

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [1] - -

Leibn. Marg. 135

Leibn:

s. 512, 5, 38,

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [2] - -

546.

METHODUS FIGURARUM LINEIS RECTIS & CURVIS COMPREHENSARUM QUADRATURAS DETERMINANDI:

Authore JOHANNE CRAIGE.

LONDINI:

Impensis *Mosis Pitt*, ad insigne Angeli in Cœmeterio D. *Paulo*, MDCLXXXV.

Niedersächsische Landesbibliothek Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [3] - -

METHODUS FIGURARUM LINEIS RECTIS & CURVIS COMPREHENSARUM QUADRATURAS DETERMINANDI.

Authore Johanne Craige.

Londini:

Impensis Mris Pitt, ad insigne Angeli in Cœmeterio D. Pauli, MDCLXXXV.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [4] - -

HONORABILI VIRO

DOMINO

ROBERTO DAWES,

BARONETTO

ANGLO,

TRACTATUM HUNC,

Benevolentiæ & Obſervantiæ ergo,

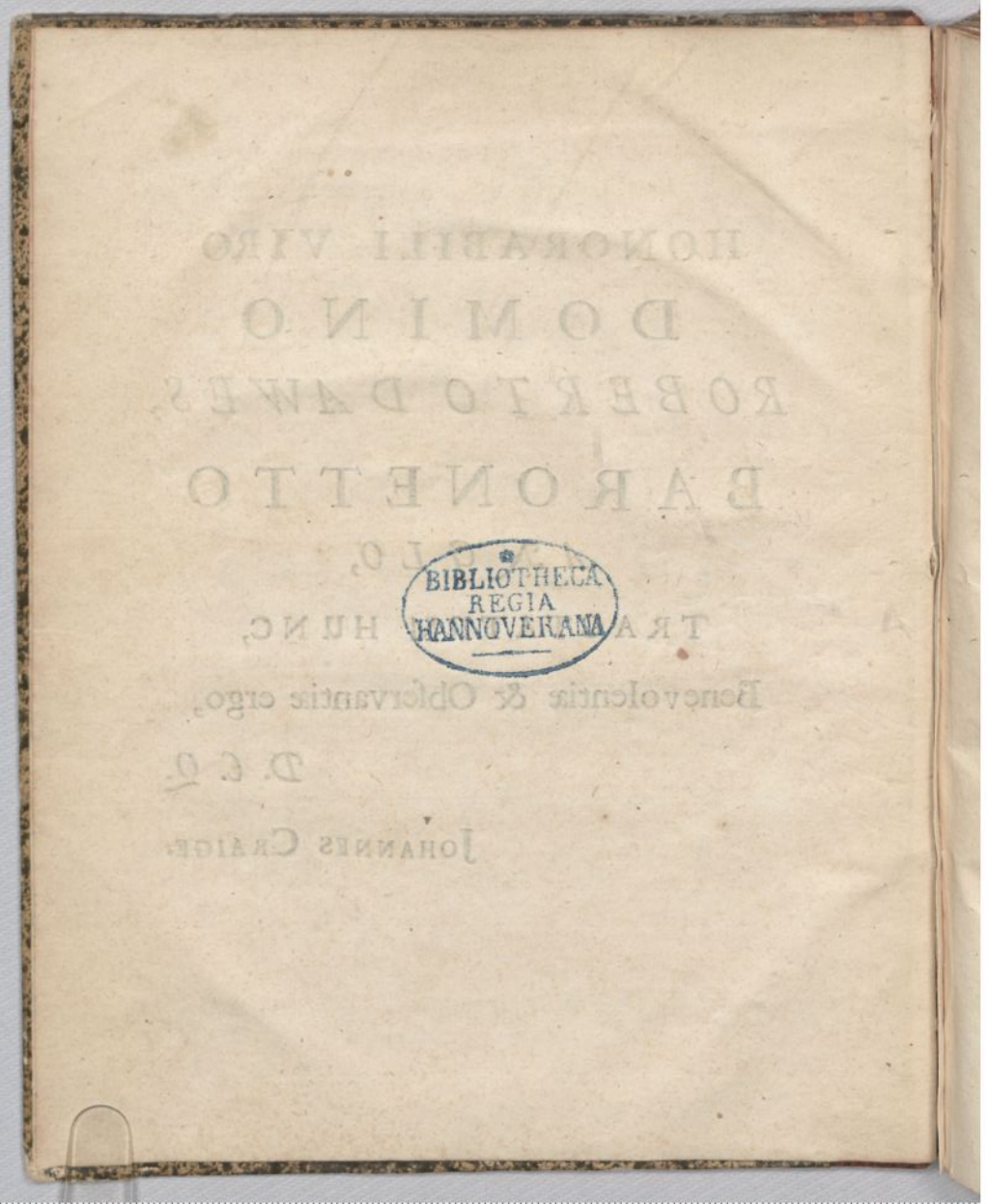
D. C. Q.

JOHANNES CRAIGE.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [5] - -





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [6] - -

Methodus Figurarum, &c.

Optimè nuper obſervârunt Geometræ quaſdam eſſe Figuras indefinitæ Quadraturæ capaces, quæ tum quoad totas, tum quoad ſingulas partes ſunt Quadrabiles; Alias vero eſſe, qnæ, licet hujuſmodi Quadraturam indefinitam non admittant, aliquam tamen habent portionem quadrabilem, imo tota figura nonnunquam Quadrari poteſt, cum quælibet ejus pars non poſſit. Nec credibile eſt ex alio fonte eorum errorem ortum eſſe, qui Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam figurarum Quadraturas impoſſibiles exiſtimârunt, quam quia hanc figurarum diſtinctionem non conſiderârunt. Methodis enim utentes quæ ſupponunt figuras eſſe indefinite Quadrabiles, cum aliquam Quadrandam aſſumerent, quæ eorum Methodos recuſabat, ſtatim illius Quadraturam impoſſibilem eſſe crediderunt; cum exinde amplius non eſſet concludendum, quam Methodos quibus uſi ſunt eſſe imperfectas, & ad omnes figuras non extendere. Sed cum inſtitutum meum non ſit aliorum errores detegere, aſt quid in hac materia excogitavi

 paucis

paucis exponere; Methodum hic tradam (non ex Arithmeticis ſed Geometricis principiis deductam) quæ figurarum utriuſque generis quadraturas determinabit. Prioris generis Geometricas, poſterioris verò Algebraicas quadraturas per ſeries infinitas exhibebit. Et quia Methodus quæ ſpeciales talium figurarum quadraturas determinet, à nemine hactenus vulgata eſt, ſperamus præclarum illum Germanum (qui publice eam promiſit, & omnino in poteſtate ſua eſſe aſſeruit, in Actis Eruditorum Lipſiæ publicatis) ſuam brevi in lucem emiſſurum.

Theorema 1.

Fig. 1. SIt Curva quævis V H. (cujus axis V D, applicata H D ad V D perpendicularis) item linea V Z S talis, ut ſi à curvæ puncto libere ſumpto puta E ducatur recta E P ad Curvam, & E A Z ad axem perpendicularis, ſit recta A Z, interceptæ A P æqualis, erit ſpatium $V D S = \frac{DH q}{2}$.

Demonſtratio: Sit angulus H D O ſemirectus, & æqui ſecetur Ū D, indefinite punctis A, B, C per quæ ducantur, E A Z, F B Z, G C Z ad H D parallellæ, & Curvæ occurrentes in E, F, G à quibus ducantur E I Y, F K Y, G L Y, ad Ū D parallelæ, quin & rectæ E P, F P, G P, H P ſint Curvæ V H perpen-

perpendiculares. Eſt Triangulum HLG ſimile triangulo PDH (nam ob indefinitam ſectionem Curvula GH pro rectâ haberi poteſt) quare eſt HL. LG :: PD. DH, adeoque HL x DH = LG x PD, hoc eſt, HL x HO = DC x DS, & ſimili diſcurſu monſtrabitur, quoniam Triangulum GMF triangulo PCG aſſimilatur, fore LK x LY = CB x CZ & ſimiliter erit KI x KY = BA x BZ, itidem erit ID x IY = AV x AZ; unde conſtat triangulum HDO (quod à rectangulis iſtis HL x HO + LK x LY + KI x KY + ID x IY minime differt) æquari Spatio VDS ((quod itidem à rectangulis DC x DS + CB x CZ + BA x BZ + AV x AZ minime differt) hoc eſt $VDS = \frac{DH^q}{2}$. Quod erat Demonſtrandum. Nobile hoc Theorema debetur viro Celeberrimo D. Doctori *Barrow*, qui innumera habet, & ſublimia Theoremata circa linearum Curvarum proprietates : nec mihi quenquam (quorum Scripta edita ſunt) vidiſſe contigit (imo nec aliis contigiſſe puto) qui tanto judicio, & Succeſſu tanto, abſtruſiorem hanc & minus cultam Geometriæ partem, tractavit & promovit.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [9] - 3

Prob. I.

Data relatione inter PM (quæ distantiam inter Curvæ perpendicularem PC & ordinatim applicatam MC designat) & abscissam AM (quæ distantiam inter applicatam & verticem A designat) æquationem invenire Curvæ lineæ AC naturam definientem. Fig. 2.

UT omnes Curvas sub unâ Regulâ generali comprehendam adnoto in quacunque linea Curva AC fore semper PM x MT = CMq propter angulum rectum PCT Quare multiplico singulos terminos PM denotantes per terminum AM (prius in diversos numeros incognitos multiplicatum) & productum pono æquale Quadrato applicatæ CM. Ratio hujus regulæ colligi potest, ex Methodo inveniendi Tangentes à Clarissimo Slusio edita in *Actis Philosophicis* Reg: Societatis Anglicanæ. Exemplis rem illustrabo.

Exemp. 1. *Fig.* 2. Detur PM = $\frac{1}{2}$ r, & vocetur AM y, CM x, a, b, c, i, &c. denotent quantitates cognitas & determinatas, item l, m, n, h. k &c. numeros incogitos. Jam juxta regulam multiplico $\frac{1}{2}$ r per ny, & productum $\frac{ny}{2} = x^2$. quæ est æquatio ad parabolam.

Exemp. 2. (*Fig.* 2.) Sit PM = $y + \frac{1}{2} r$ & quærenda sit æquatio illam curvam determinans: procedens secundũ regulam

regulam multiplico $\frac{1}{2}r + y$ per ny, my & productum $\frac{nry}{2} + my^2$ pono æquale quadrato ab x, nempe $\frac{nry}{a} + my^2 = x^2$ quæ est æquatio ab curvam quæsitam.

Exemp. 3. Esto $PM = \frac{y^2}{a} + a$ & quæratur curva AC, in qua Sit $PM = \frac{y^2}{a} + a$. *Fig.* 2. multiplico $\frac{y^2}{a} + a$ per ny, my, æritqne productum $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$.

Exemp. 4. Sit $PM = \frac{y^4}{aaa} + \frac{y^3}{aa} + \frac{y^2}{a} + y$, *Fig.* 2 & querenda sit æquatio istius curvæ naturam definiens, secundum regulam multiplico $\frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + y$, per ny, my, ly, hy, eritque $\frac{ny^5}{a^3} + \frac{my^4}{a^2} + \frac{ly^3}{a} + by^2 = x^2$ qua est æquatio quæsita.

Deniquesit $PM = \frac{a^3}{y^2}$, multiplico $\frac{a^3}{y^2}$ per *Fig.* 3 ny. erit productum $\frac{na^3}{y} = x^2$, vel $na^3 = yx^2$. sed quia n, m, l, h, &c. adhuc sint incognita, modum ostendam ea determinandi. Hoc methodo prueehit tantum cum PM sint commensurabiles

---

Prob. II.

Quantitates l, m, n. &c. in præcedenti Problemate usurpatas determinare.

PEr æquationem inventam investigo PM (procedendo secundum vulgarem aliquam methodum inveniendi Tangentes) & ejus valorem compâro cum valore dato, nempe singulos hujus cum singulis illius terminis quæ comparatio determinabit, Ut l, m, n, &c.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [11] - 5

Ut in exemplo primo $\frac{nry}{2} = x^2$, invenio $PM = \frac{1}{4} nr$, hunc valorem comparo cum valore dato sc. $\frac{1}{2} r = \frac{1}{4} nr$ unde post reductionem $n = 2$, quare substituto hoc valore pro (n) in æquatione $\frac{nry}{2} = x^2$ erit $ry = x^2$.

Sic in exemplo secundo $\frac{nry}{2} + my^2 = x^2$, invenio fore $PM = \frac{nr}{4} + my$, jam comparo utrosque hos terminos cum correspondentibus terminis valoris dati sc. $\frac{nr}{4} = \frac{r}{2}$ unde $n = 2$, deni $my = y$ unde $m = 1$. si substituantur hi valores prodibit æquatio quæsita & plene determinata $ry + y^2 = x^2$.

Similiter in exemplo 3: $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$ inveni $PM = \frac{3ny^3}{2a} + \frac{ma}{2}$, facta igitur debita comparatione sc. $\frac{3ny^2}{2} = \frac{y^2}{a}$ erit $n = \frac{2}{3}$, & ex $\frac{ma}{2} = a$, erit $m = 2$, & substitutis his valoribus erit $\frac{2y^3}{3a} + 2ay = x^2$.

Fig. 1. Et in exemplo 4. erit $PM = \frac{5ny^4}{2a^3} + \frac{2my^3}{a^2} + \frac{2ly^2}{2} + hy$. & facta comparatione horum terminorum cum terminis datis erit $\frac{5ny^4}{2a^3} = \frac{y^4}{a^3}$, inde $n = \frac{2}{5}$, & ex $\frac{2my^3}{a^2} = \frac{y^3}{2a}$ erit $m = \frac{1}{2}$, ex $\frac{3ly^2}{2a} = \frac{y^2}{a}$ erit $l = \frac{2}{3}$, & ex $hy = y$ erit $h = 1$. Et substituendo hos Valores, erit equatio $\frac{2y^5}{5a^3} + \frac{y^4}{2a^2} + \frac{2y^3}{3} + y^2 = x$.

Denique in *Exemp.* 5. Est $PM = \frac{na^3}{2y^2} = \frac{a^3}{y^2}$ *Fig.* 3. unde $n = 2$, adeoque $2a^3 = yx^2$, quæ est ad Hyperboliformem DCE.

Hæc duo Problemata (vel potiùs duas partes unius Problematis) fusius sum prosecutus, eo quod à nemine

nemine adhuc tractata sint, saltem quorum scripta ad manus meas pervenerunt; tum maxime, quod horum ope Figurarum Quadraturas sim determinaturus.

Prob. III.

Parabolæ Quadraturam determinare.

Fig. 4. Esto parabola VCS cujus latus rectum sit r. VM vocetur, y, MC, z, unde ex natura parabolæ $\sqrt{ry} = z = MC$ tum per problema primum inveniatur curva VH, talis ut sit $PM = \sqrt{ry}$ (per PG hic & in sequentibus intelligenda est Curvæ quæsitæ perpendicularis) sed per methodum jam traditam invenio Curvam quæsitam definiri per hanc equationem $nry^3 = x^4$ (per x designo applicatas GM, HD Curvæ quæsitæ) & determinando n per Prob. 2. invenies $n = \frac{16}{9}$ unde $\frac{16}{9}ry^3 = x^4$, ac proinde $\sqrt{\frac{4}{9}ry^3} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ VMC. ut constat ex Theoremate jam præmisso.

Prob. IV.

Prob. IV.

Paraboloidis Cubicalis Quadraturam determinare.

ESTO VCS parabolois Cubicalis, VD axis & latus rectum r, & VM $= y$, unde ex natura Curvæ istius erit $rry = z^3$ adeoque $\sqrt[3]{rry} = z$, propterea pro determinatione Quadraturæ areæ VMC invenienda est Curva (per Prob. 1.) VH talis ut sit semper PM $= \sqrt[3]{rry}$, & procedens secundum regulam ibi propositam invenio Curvam VH definiri per hanc æquationem $nr^2y^4 = x^6$ & determinando n (per Prob. 2.) inveniens $n = \frac{27}{8}$, adeoque æquationem quæsitam esse $\frac{27}{8} r^2y^4 = x^6$, unde $\frac{1}{4}\sqrt[3]{r^2y^4} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2}q =$ VMC. Et in hunc modum Quadrantur infinitæ paraboloides quæ definiuntur per $r^3y = z^4$; $r^4y = z^5$, $r^5y = z^6$, &c. *Fig.* 4.

Prob. V.

Paraboloidis Semicubicalis Quadraturam invenire.

Fig. 4. SIT VCS parabolois semicubicalis, cujus hæc est proprietas $ry^2 = z^3$, unde $\sqrt[3]{ry^2} = z^1$, inveniendæ igitur est Curva VH in qua

qua $PM = \sqrt[3]{r y^2} = MC$; & per problema primum invenio illam definiri per hanc æquationem $n r y^5 = x^6$; & ut determinetur n procedo in hunc modum per Prob. 2. quæro PM ex æquatione inventa $n y^5 r = x^6$, & invenio $PM = \frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 n^2 r^2 y^{10}}}$ & facta comparatione cum dato Valore erit $\frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 r^2 y^{10}}} = \sqrt[3]{r y^2}$, unde provenit $n = \frac{216}{125}$ post debitam reductionem, adeoque Curva VH definitur per $\frac{216 r y^5}{125} = x^5$ unde erit $\frac{3}{5} \sqrt[3]{r y^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q = VMC$. Et eodem modo Quadrari possunt paraboliformes infinitæ, quæ definiuntur per $r y^3 = z^4$, $r y^4 = z^5$, $r y^5 = z^6$ &c.

Prob. VI.

In Hyperbola OCN quadranda sit Area interminata OCMVL.

Fig. 4. Esto Hyperbolæ potentia $= a^2$, unde $\frac{a^2}{y} = z$, inquirenda igitur est Curva VH talis ut in ea sit semper $PM = \frac{a^2}{y}$ at nullam esse hujusmodi Methodus jam tradita statim deprehendit: nam juxta regulam multiplicanda est $\frac{a^2}{y}$ per $n y$, & productum

$n a^2$

$n\,a^3$ non potest poni æquale x^2, Quadratum determinatum nequit æquari Quadrato indeterminato, ac proinde concludendum est Spatium interminatum non esse Quadrabile: nam si daretur illius Quadratura, daretnr etiam Curva quædam V H in qua esset semper P M = M C.

Prob. VII.

Hyberboliformis O C N cujus hæc sit proprietas $y\,z^2 = a^3$ *Quadraturam determinare Areæ Interminatæ OCMVL.*

Fig. 5. Quoniam ex natura Curvæ $\sqrt{\frac{a^3}{y}} = z = MC$ quærenda est curva V H in qua semper sit $PM = \sqrt{\frac{a^3}{y}}$, atque per *Prob.* 1. Invenio Curvam V H definiri per $n\,a^3\,y = x^4$ & determinando n per *Prob.* 2. Invenies $n = 16$, adeoque $16\,a^3\,y = x^4$ unde Spatium interminatum $OCMVL = 2\sqrt{a}\,y$.

Prob. VIII.

Prob. VIII.

Sit natura Hyperboliformis definita hac æquatione $y z^3 = a^4$, *& Quadranda sit Area interminata* OCMVL.

EX natura curvæ $\sqrt[3]{\frac{a^4}{y}} = z$, & invenietur curva VH in qua PM $= \sqrt[3]{\frac{a^4}{y}}$ definiri per $27 a^4 y^2 = x^6$, Unde $\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4 y^2} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ OCMVL. Et sic quadrantur Hyperboliformes infinitæ definitæ per $y z^4 = x^5$, $y z^5 = x^6$, $y z^6 = x^7$, &c.

Prob. IX.

In Hyperboliformi OCK *cujus hæc sit proprietas* $y^2 z = a^3$ *Quadranda sit aeræ interminata* OCMVL.

Fig. 6. EX hujus curvæ natura manifestum est $z = \frac{a^3}{y^2} =$ MC quare Quærenda est curva aliqua, ut distantia inter ejus perpendicularem & applicatam sit æqualis $\frac{a^3}{y^2}$, & procedendo secundum usitatam Methodum invenio Curvam quæsitam definiri per $y x^2 = n a^3$ & determinando (n) per Prob. Secundum erit $n = 2$ adeoque æquatio est $2 a^3 = y x^2$, quæ itidem est æquatio ad Hyberboliformem (sed alterius naturæ) SGH; & quoniam

 illiu

illius perpendicularis GP, inter verticem & applicatam cadit, vel ſurſum tendit ideo $\frac{a^3}{y} = \frac{x^2}{2} =$ KCMD Et Aream OCMVL eſſe ex earum numero quas Geometræ vocant pluſquam infinitas, jam monuit clariſſimus Noſtras D. *David Gregorius* in pulcherrimo ſuo Tractatu, de Dimenſione Figurarum.

Prob. X.

Sit ACD curva talis ut ducta ut cunque MC ad AD normali, ſit poteſtas quævis ipſius AD ad ſimilem poteſtatem partis AM, ut poteſtas quævis partis DM ad ſimilem poteſtatem applicatæ MC, & determinanda ſit Quadratura Areæ AMC.

Fig. 7. ESTO AD $= b$, & exponens illius poteſtatis 2, AM vocetur y unde etiam exponens illius poteſtatis eſt, 2 eſto præterea exponens poteſtatis lineæ DM ſeu $b - y$, (1) adeoque exponens applicatæ MC ſeu z eſt 1, tum ex naturæ lineæ curva. $b^2 y^2 :: b - y . z$ unde $z = \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, Quæratur ergo curva AH in qua ſit PM $= \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, invenieturque per Prob. 1. & 2. illam definiri per $\frac{2}{3} b y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} y^4 = b^2 x^2$, unde $\frac{y^3}{3b} - \frac{y^4}{4b^5} = \frac{x^2}{2} =$ AMC. Atque hæc eadem eſt curva de qua loquitur D. *Carteſius* in *tom.* 3. Epiſt. pag. 219. quam præferendam putat (ob conſtructionis facilitatem) curvæ quam Galli vocant *la Galande*.

Prob. XI.

PROB. XI.

Determinanda sit Quadratura Areæ AMC, & definiatur natura Curvæ per $y^5 + ay^4 + a^2y^3 + a^3y^2 + a = a^4z$. Fig. 4.

QUærenda est Curva VH, talis ut in ea sit semper $PM = MC = z = \frac{y^5}{a^4} + \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + a$. Et per Prob. 1. definietur per $ny^6 + may^5 + la^2y^4 + ka^3y^3 + ha^5y = a^4x^2$ & determinando n, m, l, k, h (per *Prob.* 2.) erit $n = \frac{1}{3}$ $m = \frac{2}{5}$, $l = \frac{1}{2}$, $k = \frac{2}{3}$, $h = 2$; adeoque æquatio quæsita est $\frac{1}{3}y^6 + \frac{2}{5}ay^5 + \frac{1}{2}a^2y^4 + \frac{2}{3}a^3y^3 + 2a^5y = a^4x^2$, adeoque $\frac{y^6}{6a^4} + \frac{y^5}{5a^3} + \frac{y^4}{4a^2} + \frac{y^3}{3a} + ay = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMC$.

Atque hactenus solas illas figuras tractavi quæ sunt indefinitè Quadrabiles, & quantillo labore earum Quadraturæ, per hanc Methodum determinentur, aliis judicandum relinquo: Ad illas jam progredior quæ hujusmodi Quadraturam respuunt: & expresse moneo me Quadraturas quas hic exhibiturus sum per series infinitas, non pro Geometricis sed Algebraicis vel Arithmeticis habere.

PROB.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [19] - 21

Prob. XII.

Circuli Quadraturam determinare.

A Circulo initium faciam, qui omnium linearum curvarum ſimpliciſſima eſt, ſi curvæ ſimplicitas non ex æquationis, ſed deſcriptionis (ut re verâ debet) ſimplicitate æſtimetur.

Fig. 8. Sit itaque Circuli Quadrans ASD in quo AM vocetur y, & ordinata MC z, & radius AL $= r$, tum ex Circuli natura erit $z^2 = r^2 - y^2$, ac proinde $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hunc valorem reſolvo in ſeriem ſecundum Methodum celeberrimi D. *Iſaaci Newtoni*, & invenio $z = r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. quærenda igitur eſt Curva AGH in qua PM $= r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. & invenietur per Prob. primum Curvam quæſitam definiri per hanc æquationem. $nry - \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} - \frac{ky^7}{16r^5} = x^2$; & determinando. Quantitates, n, m, l, k, per Prob. ſecundum invenietur $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, & ſubſtituendo hos valores, æquatio erit $2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5} = x^2$. Unde $ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2}$

= GMq

$= \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Vel si quæreretur Quadratura totius Quadrantis, erit $ASD = r^2 - \frac{1}{6}rr - \frac{1}{40}rr - \frac{1}{112}rr$ ------ &c. Unde $4rr - \frac{4}{3}rr - \frac{1}{8}r^2 - \frac{1}{28}r^2 =$ toto Circulo. Et si hæc series per numeros exprimatur, ponendo $r = \frac{1}{2}$ erit area Circuli $= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{112}$ ----- &c. in infinitum Notatu dignum arbitror hinc elici posse dimensionem Zonæ Circularis, quam à celeberrimo Geometra D. *Isaaco Newtono* inventam refert clariff. *David Gregorius* in memorato tractatu. Esto ABCD Zona cujus latitud. $VL = y$, & Circuli radius $= r$, per præcedentem Quadraturam ---- $VBCL = ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5}$ -- Adeoque -- 2 VBCL $= ABCD = 2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5}$. Fig. 9.

PROB. XIII.

Hyperbola Quadraturam determinare.

Fig. 10. SIT LSC Hyperbola cujus Asymptoti VD, VP, & in qua $VE = EL = a$, atque $VA = c$, vocetur abscissa AM y, & ordinatim applicata z, sed ex natura Hyperbola $VE \times EL = VM$

$= VM \times MC$, id eſt $a^2 = yz + cz$; adeoque eſt $z = \frac{a^2}{c+y}$, & facta diviſione, ſecundum jam receptam Methodum, erit $z = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ ---- &c. Quærenda igitur eſt Curva AGH, in qua ſit ------- $PM = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ ------ &c. & per Prob. primum invenietur illam definiri hac æquatione $\frac{n a^2 y}{c} - \frac{m a^2 y^2}{c^2} + \frac{l a^2 y^3}{c^3} = x^2$, & determinando, n, m, l, per Prob. 2. erit $n = 2, m = 1, l = \frac{2}{3}$, ac proinde æquatio quæſita eſt $\frac{2 a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{c^2} + \frac{2 a^2 y^3}{3 c^3} = x^2$ unde $\frac{a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{2 c^2} + \frac{a^2 y}{3 c^3} = ASCM = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2}$. Hæc eadem eſt Hyperbolæ Quadratura quam exhibuit celebris vir *Nicolaus Mercator* in ſua Logarithmo-technia, quamvis methodo uſus ſum ab illius plane diversâ.

Conſiderando aliam Hyperbolæ proprietatem; aliam etram illius Quadraturam inveniemus. Sit ergo in appoſito ſchemate SCL Hyperbola æquilatera cujus centrum A & latus tranſverſum RS, ponatur $AM = y, = KC$, $MC = z$, $AR = AS$

Fig. 11.

$= AS = r$, unde ex natura Hyperbolæ $rr + yy = zz$, adeoque $z = \sqrt{rr+yy}$, extrahendo radicem Quadraticam ex $rr + yy$ erit $z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. Quærenda ergo est Curva AH in qua sit $PM = z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. & procedendo per Prob. primum invenietur illam definiri hac æquatione $nry + \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} + \frac{ky^7}{16r^5} = x^2$, & determinando, n, m, l, k, per Prob. secundum, erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, substitutis his valoribus erit æquatio ad Curvam quæsitam plene determinata $2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5} = x^2$, adeoque erit ---- $ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2}$ $= ASCM$.

Ex hac Hyperbolæ Quadratura facile est Zonæ Hyperbolicæ Quadraturam determinare. Sint EDA, GCB Hyperbolæ oppositæ, quarum centrum K & vertices A, B, Zona ABCD cujus latitudo $KL = y$, semiaxis transversus AK, vel $KB = r$, unde per præcedentem Quadraturam KLCB

Fig. 12.

$KLCB = ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5}$ ac proinde erit $ABCD = 2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5}$ ---- &c.

PROB. XIV.

Ellipseos Quadraturam determinare.

Fig. 8. IN semi-ellipsi LSCD sit semiaxis transversus $AS = b$ & semiaxis conjugatus $AL = a$, & ponatur abscissa $AM = y$, ordinatim applicata $MC = z$, unde ex natura Ellipseos $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, ut ergo determinetur Area AMCS, primo resolvenda est $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, in seriem extrahendo radicem ex $\sqrt{a^2 - y^2}$, unde invenietur $z = b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{5a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ----- &c. Quærenda igitur est Curva aliqua AH in qua semper $PM = b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{8a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ---- &c. & invenietur per Prob. 1. illam definiri hac æquatione $nby - \frac{mby^3}{2a^2} - \frac{lby^5}{8a^4} - \frac{kby^7}{16a^6} = x$ & determinando quantitates,

titates, n, m, l, k per Prob. 2. erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$ $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, adeoque $2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6}$ $= x^2$ unde $by - \frac{by^3}{6a^2} - \frac{by^5}{40a^4} - \frac{by^7}{112a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMSC$.

Inde facile eruitur Zonæ Ellipticæ dimensio, ut si latitudo Zonæ sit $AM = y$, cæteris positis ut prius erit Zona $2AMCS = 2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6} - \&c.$

Prob. XV.

Sit AD $(= d)$ positione & magnitudine data, & Curva SCD talis ut ea ducta utcunque recta MC $(= z)$ ad AD perpendicularis sit $d^3 = z^3 + y^3$, & determinanda sit Areæ $AMCS$ Quadratura. Fig. 13.

Quoniam ex natura Curvæ $z = \sqrt{(3)}\, d^3 - y^3$ extrahenda est radix Cubica ex $d - y^3$, & invenietur fore $z = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d} - \&c.$

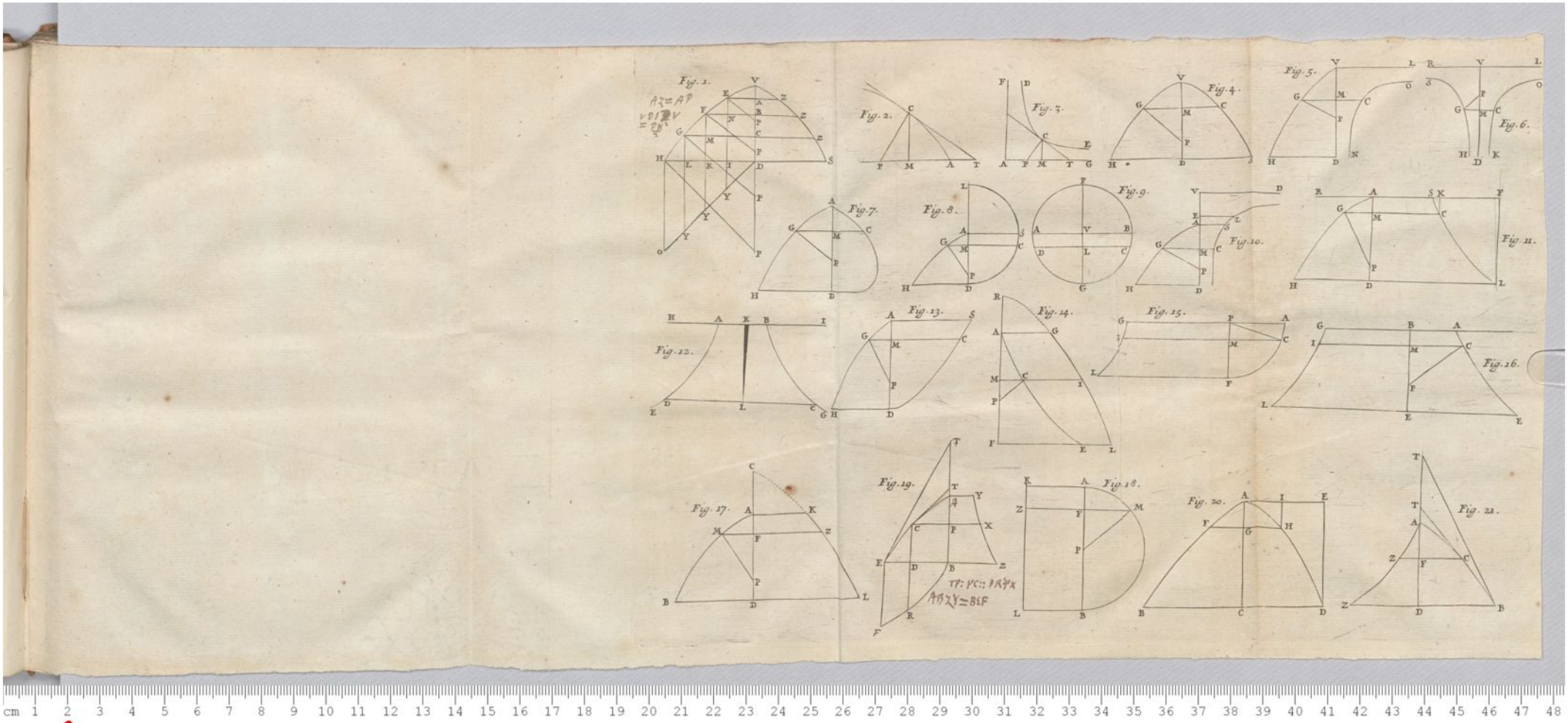
Quærenda eſt linea Curva AGH in qua $PM = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - - -$ &c. & definietur Curva quæſita AH hac æquatione $n\,dy - \frac{m\,y^4}{3d^2} - \frac{l\,y^7}{9d^5} = x^2$ & determinando n, m, l, per problema ſecundum erit $n = 2$, $m = \frac{1}{2}$, $l = \frac{2}{7}$ adeoque $2\,dy - \frac{y^4}{6d^2} - \frac{2y^7}{63d^5} = x^2$, unde etiam $dy - \frac{y^4}{12d^2} - \frac{y^7}{63d^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et ſic Quadrantur Cycliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 - y^4 = z^4$, $d^5 - y^5 = z^5$ - - - &c.

PROB. XVI.

Eſto AD (= d) linea recta poſitione & magnitudine data, & SCD linea Curva talis ut ducta utcunque MC (= z) ad AD normali ſit Cubus ex AD cum Cubo ex AM (= y) æquales Cubo ex MC ſc. $d^3 + y^3 = z^3$ & determinanda ſit Quadratum Areæ AMC.

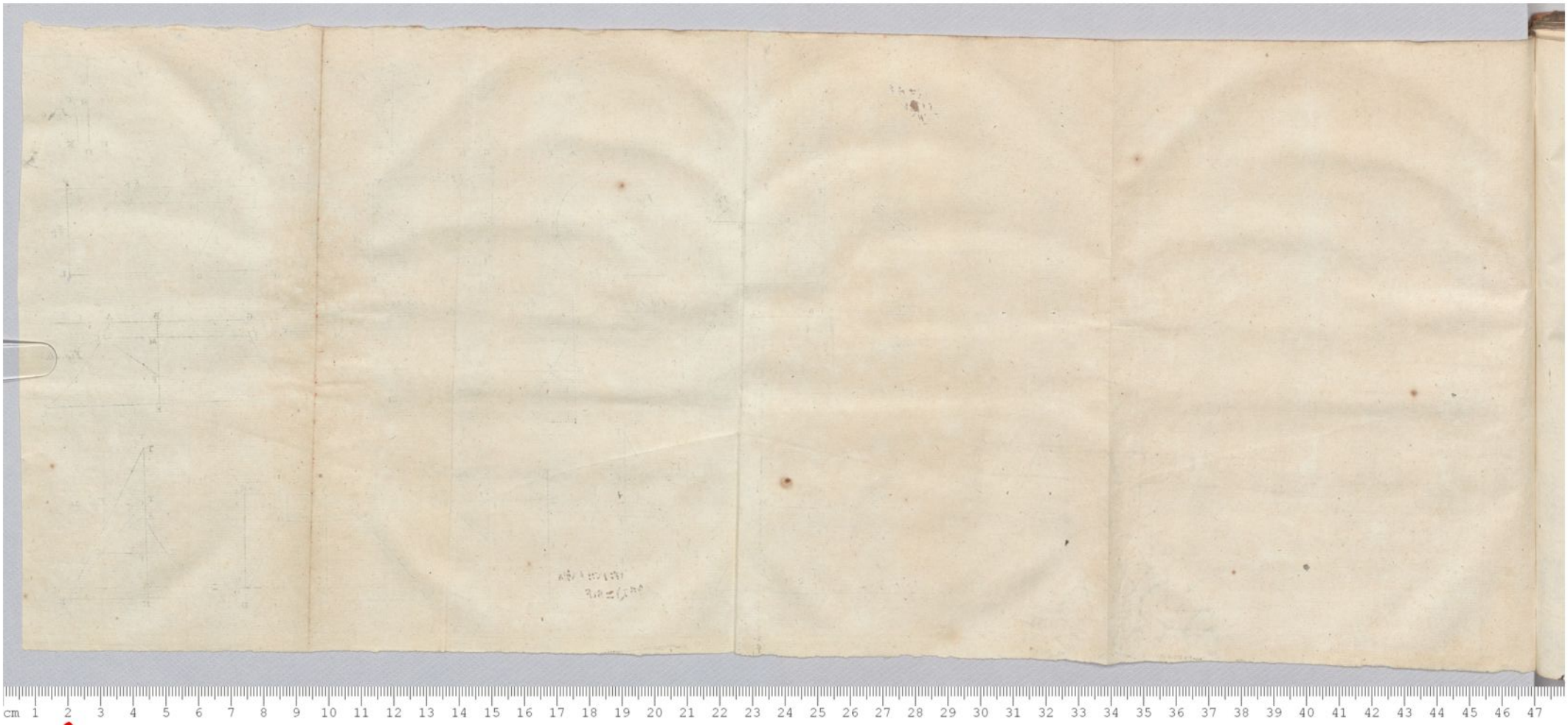
Fig. 13.

Quoniam $z = \sqrt[3]{(3)d^3 + y^3}$ reſolvenda eſt $\sqrt[3]{(3)d^3 + y^3}$ in ſeriem radicem cubicam extrahendo, & invenietur $z = d + \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - - -$ &c. Quærenda eſt



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [27] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [28] - -

est Curva AH in qua sit semper PM $= d + \frac{y^4}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - -$ &c. & per Prob. 1, & 2. erit æquatio ad Curvam quæsitam ---- $2dy + \frac{4}{6}\frac{}{}$ $- \frac{2y^7}{63d^5} = x^2$ unde $dy + \frac{y^4}{12d^2} - \frac{y^7}{63d^5} = \frac{x^2}{2} =$ AMCS. Et sic Quadrari possunt Hyperboliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 + y^4 = z^4$, $d^5 + y^5 = z^5$, &c.

PROB. XVII.

Sit AD = a AS = b, & sit Curva SCD talis ut ducta quavis MC (= z) ad AD perpendicularis sit $z^3 . a^3 - y^3 :: b^3 . a^3$, *& determinanda sit Area AMCS.* Fig. 13.

QUoniam ex natura Curvæ $z = \frac{b}{a}\sqrt{(3)\, a^3 - y^3}$ extrahenda est radix ex $a^3 - y^3$, invenieturque $z = b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6} - -$ &c. Quærenda est Curva AH in qua PM = MC $= b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6}$, &c. & per Prob. 1 & 2. invenietur Curvam quæsitam definiri hac æquatione $2by - \frac{by^4}{6a^3} - \frac{2by^7}{63a^6} = x^2$, ac propterea $by - \frac{by^4}{12a^3} - \frac{by^7}{63a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et sic quadrantur Ellipsiformes infinitæ, quæ definiuntur æquationibus $\frac{b}{a}\sqrt{(4)\, a^4 - y^4} = z$, $\frac{b}{a}\sqrt{(5)\, a^5 - y^5} = z$, &c.

PROB. XVIII.

Prob. XVIII.

Esto AD (= d) linea recta positione & magnitudine data & SCD Curva talis ut ducta utcunque MC ad AD normali sit $d^2 z + y^2 z = r^3$, *& Quadranda sit Area AMCS.*

Fig. 13.

Quoniam $z = \frac{r^3}{d^2 + y^2}$; fiat divisio, & invenietur $z = \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{d^6}$; eritque $\frac{2r^3 y}{d^2} - \frac{2r^3 y^3}{3d^4} + \frac{2r^3 y^5}{5d^6} = x^2$ æquatio ad Curvam AH in qua $PM = \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{d^6}$ unde $\frac{r^3 y}{d^2} - \frac{r^3 y^3}{3d^4} + \frac{r^3 y^5}{5d^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMCS.$

Prob. XIX.

Cujusvis Figuræ Quadraturas infinitas invenire.

Sint duæ quælibet Curvæ ACE, BRF, & à quovis puncto C in curva ACE ducatur tangens CT, & CP ad EP, & CR ad AB parallela, si fiat TP.PC::DR.PX, erit ABZY = BEF, APXY = DBR. Eximium hoc Theorema debetur etiam viro celeberrimo D. Doctori *Barrow*.

Quærenda sint, exempli gratia, Quadratura infinitæ Paraboloidis Cubicalis BRF. Assumatur pro arbitrio

arbitrio quælibet Curva ACE puta parabola communis cujus parameter sit r (quod idem sit cum parametro paraboloidis) & ponatur AP $= y$, PX $= z$, eritque TP $= 2y$, PC $= \surd ry$, & ex natura paraboloidis DR $= \surd(6)\, r^5 y$ adeoque Analogia erit $2y . \surd ry :: \surd(6)\, r^5 y . z$ unde $z = \surd(6) \frac{r^5}{64y^2}$ quæ est æquatio ad Curvam YXZ, cujus Quadratura invenietur per methodum jam traditam sc. $\frac{1}{4}\surd(6) r^8 y^4$ = APYZ = DBR. Quæ est Quadratura Paraboloidis diversa ab illa quam dedi in Prob. 4. Et eodem modo inveniri potest alia atque alia Quadratura, assumendo aliam atque aliam Curvam ACE. Et sic tractari possunt omnes aliæ Curvæ, quemadmodum parabolidem hic tractavi.

Exhinc etiam manifestum est Figuras deprimi posse ad simpliciores & Quadratu faciliores, nam in figura ABZY Curva YXZ definita hac æquatione $z^6 = \frac{r^8}{64y^2}$ magis est composita quam Curva BRF. Adeoque non parum Geometriam promoveret, qui methodum daret Figuras ad simplicissimas reducendi.

PROB. XX.

Prob. XX.

Curvam invenire cujus Area per datam quamlibet æquationem designetur.

Designetur Area hac æquatione $\surd r^3 y = VMC$ (concipiendo VCS esse Curvam quæsitam.) Tum ex ostensis patet $\surd r^3 y = \frac{x^2}{2}$ esse æquationem ad Curvam aliam VGH in qua $PM = MC$ (quæ est ordinata Curvæ quæsitæ) investigetur ergo valor lineæ PM, & invenietur $PM = \surd \frac{r^3}{4y} = z$ seu $4z^2 y = r^3$, quæ est æquatio ad Curvam quæsitam VCS cujus area $= \surd r^3 y$. Notandum quod hic (ut prius) y denotat absciſſas VM, z ordinatas MC, & x ordinatas GM.

Prob. XXI.

Curvas infinitas invenire quarum Areæ per unam datam æquationem designentur.

Solutio hujus problematis à duobus præcedentibus pendet; inveniatur una Curva cujus Area per datam æquationem exprimatur (per problema 20) & sic infinitæ inveniri possunt per Prob. 19.

Prob. XXII.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [32] - 24

Prob. XXII.

Data qualibet Curva AHD Curvam aliam AFB invenire cujus area AGF æquetur rectángulo contento sub ordinata GH & abscissa AG Curvæ datæ. Fig. 20.

IN Curva AHD sit AG = y, GH = x, & exprimatur illius natura hac æquatione $2ay - yy = x^2$, unde $\sqrt{2ay - y^2} = x$ adeoque $\sqrt{2ay - y^2} = xy = AH$. Habetur ergo Area figuræ AGF, unde facile Curva AFB definitur per problema 20. fc. $z^2 = \frac{9a^2y - 12ay^2 + 4y^3}{2a - y}$.

Prob. XXIII.

Data qualibet Curva AHD, aliam Curvam AFB invenire cujus area AGF æquatur rectangulo contento sub ordinata GF Curvæ AHD, & constanti aliqua data rectæ (a) Fig. 20.

DEfiniatur Curva AHD in primis $\sqrt{2ay - yy} = x$ unde $\sqrt{2a^2y - a^2y^2} = ay = AG$, habetur ergo natura Curvæ AFB per Prob. 20. fc. $y^2 =$

$z' = \frac{a^4 - 3a^2y^2 + y^4}{2ay - y^2}$ hic & in precedenti z denotat ordinatas Curvæ quæsitæ A F B.

Et quidem aliis modis infinitis (præter duos jam traditos) inveniri potest curva cujus area, ope alterius curvæ datæ sit quadrabilis, per Prob. 20. Quod fieri posse asseruit jam laudatus Germanus, sed quo modo faciendum sit nequaquam ostendit.

Alia solutio problematis præcedentis.

Fig. 11. SIT Curva data A C B, C T tangens in puncto quolibet C, ordinata C F; fiatq; T F. F C : : *a*. F Z, orietur hinc Curva A Z Z talis ut $a + FC = AFZ$; ut demonstratum est ab illustrissimo D. Doctori *Barrow*.

Nec quidquam jam deest ut Methodus quam tradidi Figurarum Quadraturas determinandi, ad omnes figuras extendatur (exceptis iis quæ a Curvis transcendentibus terminantur, quas nulla hactenus vulgata Methodus comprehendit) nisi ut difficultates duas amoveam; quæ in quibusdam casibus contingere possunt; quarum prior accidit cum figuram aliquam Quadrando necesse sit & Radicem ex æquatione effecta (& supra Quadraticas ascendente) extrahere, in quo casu unicum remedium mihi cognitum est radicem istius æquationis in seriem infinitam (juxta Methodum clarissimi viri D. Isaaci Newtoni Geometræ non minus

quam

quam Analyſtæ præſtantiſſimi) reſolvere, quam prælo commiſſam eſſe à clariſſ. Walliſio audimus, quamque inſignis ipſe D. Newtonus mihi in Manuſcriptis pro ſummâ ſua humanitate communicavit: Nam Methodus Generalis æquationum radices Analyticè determinandi (in Actis Eruditorum Lipſiæ publicatis Aº 1683, Menſe Maio a præclaro illo Germano edita) huic negotio parum vel nihil inſervit, ut de inſuperabili in eâ calculi moleſtia nihil dicam. Sed nihilominus inventum eſt inter præcipua Artis Analyticæ merito numerandum.

Secunda difficultas eſt cum valor ordinatim applicatæ conſtat terminis aſymmetris, nam res eſſet immenſi laboris æquationem ab aſymmetria liberare, ſi plures ſint quam quatuor termini ſignis radicalibus affecti, ut ſatis norunt Analyſeos periti. Sed huic difficultati remedium optimum ſuppeditavit inſignis Geometra G. G. Leebnitius in nova ſua Methodo Tangentes inveniendi in Actis Eruditorum Anni ſuperioris publicata. Ibi enim præclarus vir viam expeditam oſtendit, Tangentes inveniendi, quamvis æquatio curvæ naturam exprimens terminis irrationalibus quam maximè ſit implicita, non ablatis irrationalibus. Quomodo iſta methodus ad præſens negotium ſit applicanda exemplo oſtendam.

Eſto V C S circuli Quadrans cujus Diameter ſit (r) & V M vocetur y, item ordinata M C z, tum Fig. 4.

z, tùm ex natura circuli $z = \sqrt{ry - y^2}$ & reſolvendo $ry - y^2$ in ſeriem per extractionem radicis, invenietur. $z = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^2}{4r}} \sqrt{\frac{y^3}{16r^2}}$.....&c. Ut determinetur Quadratura areæ V M C, invenienda eſt curva V H, in quâ $PM = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^2}{4r}} - \frac{y^3}{16r^2}$, eritq; per Prob. 1. æquatio ad curvam quæſitam V H $\sqrt{nry^3} - \sqrt{\frac{my^5}{4r}} - \sqrt{\frac{ly^7}{16r^3}} = x^2$; & auferendo quantitates fractas (quod tamen abſolute neceſſe non eſt, ſed hic fit ob majorem facilitatem) multiplicando per $\sqrt{16r^3}$: erit $\sqrt{16nr^4y^3} - \sqrt{4mr^3y^5} - \sqrt{ly^7} = x^2\sqrt{16r^3}$; & determinando n, m, l, (per Prob. 2.) quæ ſola eſt difficultas ſic procedo: compendii cauſa pono $p = 16nr^4y^3$ $q = 4mr^3y^5$, $s = ly^7$; eritq; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{s} = x^2\sqrt{16r^3}$; ſed per calculum ibi explicatum invenietur $\sqrt{p} = \frac{dp}{\sqrt{4p}}$, $\sqrt{q} = \frac{dq}{\sqrt{4q}}$, $\sqrt{s} = \frac{ds}{\sqrt{4s}}$, atque $x^2\sqrt{16r^3} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$, & ſubſtitutis his valoribus erit $\frac{dp}{\sqrt{4p}} - \frac{dq}{\sqrt{4q}} - \frac{ds}{\sqrt{4s}} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$, ſed per eundem, calculum erit $dp = 48nr^4y^3\,dy$, $dq = 20mr^3y^4\,dy$ & deniq; $ds = 7ly^6\,dy$, & ſubſtituendo hos valores cum valoribus quantitatum $\sqrt{4p}$, $\sqrt{4q}$, $\sqrt{4s}$, æquatio erit $\frac{48nr^4y^3dy}{\sqrt{64nr^4y^3}} - \frac{20mr^3y^4dy}{\sqrt{16mr^3y^5}} - \frac{7ly^6dy}{\sqrt{4ly^7}} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$.——

Quam clariſſimus Author æquationem differentialem appellat: & hæc æquatio in Analogiam reſoluta dat. $dy.\ dx :: x\sqrt{64r^3}.\ \frac{48nr^4y^3}{\sqrt{64nr^4y^3}} \frac{20mr^3y^4}{\sqrt{16mr^3y^5}} \frac{7ly^6}{\sqrt{4ly^7}} ::$ x. PM. ut ex eodem calculo eſt manifeſtum, adeoq; erit

PM=

$PM = \frac{48nr^4y^5}{\sqrt{4096nr^7y^7}} - \frac{20mr^3y^4}{\sqrt{1024mr^5y^5}} - \frac{7ly^3}{\sqrt{256lr^3y^3}} = \&c.$

Et facta comparatione horum terminorum cum terminis prioribus PM denotantibus, juxta cognitas comparationis leges sc. $\frac{48nr^4y^5}{\sqrt{4096r^7y^7}} = \sqrt{ry}$, inde $n = \frac{16}{9}$ similiter $m = \frac{16}{25}$; & $l = \frac{16}{49}$, quibus substitutis erit $\sqrt{\frac{16ry}{9}} - \sqrt{\frac{16y^5}{100r}} - \sqrt{\frac{y^7}{496r^3}} = x^2 = GM_q$, adeoque $\sqrt{\frac{4ry^5}{9}} - \sqrt{\frac{16y^5}{400r}} - \sqrt{\frac{y^7}{196r^3}} = \frac{x^2}{2} = \frac{CM_q}{2} = VMC$. Adeoq; etiam hoc modo habetur circuli Quadratura. Et similem discursum in aliis adhibere non erit difficile, cuivis in singulari hoc calculi genere versato, ita ut superfluum duxi præstantissimæ hujus Methodi usum pluribus exemplis illustrare. Unum tamen est quod hic obiter notandum puto, posse ex hac Tangentium methodo breviter demonstrari veritatem Regulæ quam dedi pro solutione problematis primi.

Namq; $dy.dx$ :: TM. MC (ut ex ista methodo est manifestum) sed TM. MC :: MC. PM. ob angulum rectum TMP. Ergo $dy.dx$ :: MC. PM (vel posito x pro MC) erit $dy.dx$ :: x. PM. Unde $PM \times dy = xdx$, & substituendo y & x pro earum differentiis dy, dx erit $PM \times y = x^2$ Quod demonstrandum erat.

Jamq; concludo, si nulla sit Curva in qua distantia inter illius perpendicularem & ordinatam sit æqualis.

lis correſpondenti ordinatæ in Curva Figuram (cum recta vel rectis) comprehendentem, illam Figuram non eſſe indefinite Quadrabilem; nam ſi daretur illius Quadratura indefinita, daretur etiam hujuſmodi Curva ut patet ex *Prob.* 20. Et nullam eſſe talem Curvam pro Circulo & Hyperbola, facile poſſum demonſtrare, ſed demonſtrationem ob nimiam prolixitatem hic omitto.

De Linearum Curvarum Rectificatione.

QUiſnam fuerit qui primò Curvæ rectam æqualem invenit diu multumq; Anglos inter & Batavos diſputatum fuit; & qui plenius de ea re ſibi ſatisfieri volunt, totam diſputationem videre poſſunt, in eximio libello de Cycloide a Clariſſ. Walliſio Edito *pag.* 91, 92, 93, *&c.* itemq; in Horologio Oſcillatorio illuſtriſſimi Hugenii *pag.* 72, 73, & deniq; in Epiſtola Walliſii in Actis Philoſophicis Reg. Societ. publicata Num. 98. res enim tanti non eſt ut ulteriori diſquiſitione digna videatur, mihi præſertim qui nec Anglus ſum nec Batavus. Ea tamen, quæ, re bene perpenſa, utrinq; manifeſta videntur, breviter annotabo; 1. Quod Guliel. Nelius Equitis Angli Filius omnium primus rectam Curvæ æqualem invenerit.

2. Quod non datam Curvam rectificaverit ſed Curvam rectificationis capacem exhibuerit. 3. Quod dig-

niſſimus

nissimus & Geometra peritissimus D. Christoph. Wren primo oblatæ Curvæ (sc. Cycloidi) rectam æqualem determinaverit. 4. Quod Heuratius primo ostenderit quamlibet datam Curvam rectificare, suppositis Figurarum Quadraturis. Et in eo Heuratii Methodi non parum est conspicua quod statim indicat quænam illa Figura sit cujus Quadratura Curvam datam rectificaret; Adeoq; cum jam Methodum generalem præmissi Figurarum Quadraturas determinandi; facile erit Curvam aliquam in rectam transmutare; Et recta illa vel per æquationem finitam (cum nempe Figura est indefinite Quadrabilis) vel per seriem infinitam exprimetur. Henratius enim tali methodo destitutus, non potuit methodum suam Curvas rectificandi, ad omnes illas Curvas extendere, Quarum rectificationes a figuris indefinitè Quadrabilibus dependent; multoq; minus cum à figura specialis tantum Quadraturæ capaci dependerent.

THEOREMA 2.

Fig. 14 SINT duæ lineæ Curvæ ACE, GIL, & recta AF ejus naturæ ut (ducta ex puncto M libere sumpto perpendiculari *MI* secante Curvas in C & I, uti & CP perpendiculari ad Curvam ACE) sit .... *MC*. CP :: R. *MI* (R hic est quælibet linea recta data vel assumpta) erit AGILEF ==

Rx

Rx ACE. Demonstratio hujus Theorematis habetur in Epistola Heuratii ad Schotenium.

Prob. I.

Determinare Longitudinem Parabolæ. ACE

Fig 14. SIT parabolæ vertex A, ipsius axis AG, & parameter (a) AM vocetur x & MC vocetur y; unde ex natura parabolæ $x^2 = ay$; per methodum aliquam vulgarem Tangentes inveniendi, constabit fore $PM = \frac{2y}{x}$, adeoq; $PMq = \frac{4y^2}{x^2}$, unde $PC = \sqrt{\frac{4y^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2}}$ jam quia $CM. CP :: a. MI$; vel in terminis Analyticis $\frac{x}{2}. \sqrt{\frac{4y^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2}} :: a. z$ (posito nimirum $MI = z$) unde $z = \sqrt{a^2 + 4y^2}$, quæ est æquatio ad Hyperbolam; adeoq; pro determinatione longitudinis lineæ parabolicæ ACE, Quadranda est Area Hyperbolica $AGILEF$ (ut in *Prob.* 13.) eritque,

$AGILF = ax + \frac{2x^3}{3a^2} - \frac{2x^5}{5a^4} + \frac{4x^7}{7a^6}$ ——— &c.

Unde $ax ACE = ax + \frac{2x^3}{3a^2} - \frac{2x^5}{5a^4} + \frac{4x^7}{7a^6}$ — &c. per Theor. 2.

Adeoq; $ACE = x + \frac{2x^3}{3a^2} - \frac{2x^5}{5a^4} + \frac{4x^7}{7a^6}$ ——— &c.

Prob.

Prob. II.

Circuli Peripheriæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACF circuli Quadrans cujus radius sit *d*. & vocetur P M *y*, MC *x*; & MI *z*, *Fig.* 15. sitq; GIL talis curva ut ducta utcunq; normali CMI ad rectam PF sit MC. PC :: *d* (recta libere sumpta). MI. id est $\sqrt{dd-yy}\cdot d :: d. z.$ unde $z=\frac{dd}{\sqrt{dd-yy}}$ quæ est æquatio ad curvam GIL; adeoq; PM 16 $=dy+\frac{y^3}{6d}+\frac{3y^5}{40d^3}+\frac{5y^7}{112d^5}$ — — &c. Sed per Theor. 2. est *dx* AC $=dy+\frac{y^3}{6d}+\frac{3y^5}{40d^3}+\frac{5y^7}{112d^5}$ — &c. Ergo AC $=y+\frac{y^3}{6d^2}+\frac{3y^5}{40d^4}+\frac{5y^7}{112d^6}$ — — &c.

Prob. III.

Hyperbolæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACE Hyperbola æquilatera cujus semiaxis BA $=a$ & centrum B; & BM *Fig.* 16. vocetur *y*, AC *x*, unde ex natura Hyperbolæ $a^2+y^2=x^2$; ponatur PC Hyperbolæ in C perpendicularis; inveni-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [41] - 33

invenietur $PM = y$ adeoq; $PC = \sqrt{a^2 + 2y^2}$: si fiat MC. CP :: a. MI. id est, $\sqrt{a^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+2y^2} :: a. z$; erit $z = \frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}}$ quæ est æquatio ad Curvam GIL.

Sed $\sqrt{a^4+2a^2y^2} = a^2 + y^2 - \frac{y^4}{2a^2}$ ——— &c.

Et $\sqrt{a^2+y^2} = a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3}$ ——— &c.

Ideoq; $\frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}} = a + \frac{y^2}{2a} - \frac{5y^4}{8a^3}$ ——— &c.

Unde $BELG = ay + \frac{y^3}{6a} + \frac{5y^5}{40a^3}$ ——— &c.

Atq; $ACE = y + \frac{y^3}{6a^2} - \frac{5y^5}{40a^4}$ ——— &c.

De Curvarum superficierum dimensione.

QUemadmodum linearum Curvarum longitudines, sic etiam superficierum, quæ ab illarum rotatione generantur, dimensio ex quarundam Figurarum Quadraturis dependet, ut ex sequenti Theoremate constat.

THEOREMA 3.

Fig. 17. SIT MP Curvæ AMB perpendicularis & linea KZL talis ut (ducta MFZ ad axem AD normali) sit MP correspondenti FZ æqualis; erit superficies producta à rotatione Curvæ AMB circa axem

axem AD, ad ſpatium ADLK, ut Circumferentia Circuli ad ſuum radium.

Hoc etiam unum eſt ex innumeris & præclaris Theorematis viri celeberrimi D. Iſaaci Barrow.

Prob. I.

Superficiem Sphæræ determinare.

Sit AMB Semicirculus à cujus rotatione data ſphæra producitur: & deſignet r radium & c circumferentiam cujuslibet circuli; & ſit AB (diameter Semicirculi AMB) $= 2d$. jam quoniam omnes lineæ Circulo perpendiculares MP perveniunt ad Circuli centrum P; ideo erit KZL parallello graminum rectangulum cujus longitudo diameter AB & altitudo AK $= d$ radius Semicirculi AMB; unde AL $= 2d^2$; (per literam s ubiq; deſigno ſuperficiem Curvam;) ideo per Theorem tertium $s. 2d^2 :: c. r.$ unde $s = \frac{2d^2c}{r}$; vel ponendo $r = d$ erit $s = 2dc$; ac propterea Superficies Sphæræ æquatur rectangulo cujus Longitudo eſt Circumferentia & Latitudo Diameter Circuli in Sphæra maximi. *Fig.* 18.

Notatu dignum arbitror hinc conſequi omnium

Theorematum longe nobiliſſimum quo æternam ſibi famam acquiſivit Geometrarum Princeps *Archimedes*; Quod ſcilicet ſuperficies Sphæræ ſit æqualis quatuor maximis in eâ Circulis. Sit enim Q = maximo in Sphæra Circulo; at qui $Q = \frac{dc}{2}$ ut ab *Archimede* demonſtratum eſt; Ergo $2Q = dc$, & $4Q = 2dc$; ſed jam inventum eſt $s = 2dc$; Ergo $4Q = s$. Quod erat demonſtrandum.

Prob. II.

Superficiem Conoidis Parabolici determinare.

Esto r latus rectum Parabolæ AMB à cujus rotatione conoides producitur, ſit axis AD, vertex A & vocetur AF, y; FM x; per methodum aliquam tangentium invenietur $PMq = \frac{1}{4}r^2 + ry$; vel ponendo $FZ = z$, quia ſupponitur $PM = FZ$, aut $\frac{1}{4}rr + ry = Z^2$ quæ eſt æquatio ad parabolam cujus axis idem eſt cum axe parabolæ datæ AMB; cujus vertex eſt C, exiſtente $AC = \frac{1}{4}r$; & latus illius rectum etiam r, invenietur $AKLD = \sqrt{\frac{4}{9}rv^3} - \frac{1}{12}r^2$ exiſtente $CD = v$; ſed $s.\ \sqrt{\frac{4}{9}rv^3} - \frac{1}{12}r^2 :: c.\ r.$ per Theorema 3. Ergo $s = \sqrt{\frac{4c^2v^3}{9r}} - \frac{1}{12}rc.$

In

In hunc modum menſurantur non modo ſuperficies Conoidis Hyperbolici, & Sphæroidis, ſed Quævis alia Curva ſuperficies quæ generatur à rotatione lineæ Curvæ & hæc duo exempla ſatis oſtendunt quomodo eadem Methodus ad omnes alias ſuperficies Curvas ſit Applicanda.

ANIM-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [45] - 37

ANIMADVERSIO

In Methodum Figuras dimetiendi,

A clarissimo Quodam Germano editam in Actis Eruditorum Lipsiæ publicatis.

METHODUM hanc proposuerat Doctissimus illius Author Anno 1683, Mense *Octob.* quam adeo perfectam credebat; ut vel Quadraturam Figuræ, vel ejusdem Quadraturæ impossibilitatem determinaret; & ex ea Circuli & Hyperbolæ Quadraturam Geometricam impossibilem esse concluserat. Postea vero perspexit clarissimus vir tanta perfectione præditam non esse, ut exinde Circuli, Hyperbolæ aut alterius Figuræ Quadraturæ impossibilitas probari possit, ut ingenue ipse fatetur in iisdem actis Anni sequentis, ubi ait se amore veritatis coactum hoc unum monere. Unde existimat quasdam esse Figuras quæ indefinitæ Quadraturæ non sunt capaces & exemplum Figuræa scribit in qua succedere ait Quadraturam specialem sine generali: in hoc tamen hallucinatus est clariss. vir quod ex sua Methodo Figuram aliquam, Quadraturam indefinitam recusare concluserit; priusquam demonstrasset Metho-

Methodum ſuam ad omnes figuras indefinitè quadrabiles extendere; quod demonſtratu eſt impoſſibile, cum unam è milleſimis non comprehendat; ut poſtea patebit. Dantur enim infinitæ figuræ indefinitæ quadrabiles, quæ nullo modo per iſtam Methodum ſunt Quadrabiles; & quarum exempla poſtea apponam; Et ut non modo errorem ſed erroris fontem detegam, neceſſe videtur breve illius Methodi compendium adjungere.

Adhibet æquationes Curvarum Generales, quarum unaquæque omnes Curvas ejuſdem gradus exprimere exiſtimat: Et talis Curvæ generalis conſideratæ tanquam Quadratricis quærit Quadrandam Generalem. Et oblatæ Quadrandæ ſpecialis æquationem comparat cum aliqua ex formulis generalibus Quadrandaram naturam exprimentibus; unde deducit Quadratricem ſpecialem Quadrandæ ſpeciali convenientem; exemplo res erit manifeſta.

Sit ABC figura, rectis AC, CB & Curva AB comprehenſa, ſitq; ACDE=ABC, AGF=AGHL, & idem concipiatur ubique, proveniet hinc Curva aliqua AHD, quam Quadratricem appellat, quia illius ope Quadratur area ABC, jam æquationem aſſumit ad Quadratricem generalem AHD, & ex ea deducit Quadrandam generalem ABC: ut ſi notentur abſciſſæ AG, AC per x, & ordinatæ Quadratricis CD, GH per y, & deniq; ordinatæ in Quadranda per z, ponitq; æquationem ad Quadratricem generalem in qua ordinata x eſt duarum di-

menſio-

menſionum hujuſmodi, $\left.\begin{array}{r} by^2+cay+ea^2 \\ +xy+fax \\ +gx \end{array}\right\}=0$

ex qua deducit æquationem ad Quadrandam generalem, in qua ordinata z eſt etiam duarum dimenſionum,

$$bz^2+caz+ea^2 \quad \overline{d^2e+c^2g+f^2b-cdf-4beg+a^2x^2} \\ +2dxz+2fax+ \quad 4bea^2+4bfax+4bgx^2 \quad =0 \\ +4gx^2 \quad -ca^2-2cdax-dx^2$$

Et ſimiliter pro reliquis Quadratricibus generalibus Quadrandas generales inveſtigat. Proponatur jam Figura aliqua Quadranda ſpecialis ABC, & exprimatur natura Curvæ AFB hac æquatione———— $Z^2=\frac{0+1x-+12+1xx+4x^3}{2+--x}$; hanc æquationem comparat cum æquatione generalis Quadrandæ jam poſitæ, (quia ordinata z in Quadranda ſpeciali ad duas tantum dimenſiones aſcendit) nempe ſingulos hujus cum ſingulis illius terminis (ubi x eandem utrobiq; compoſitronem obtinet) eritque ex hac comparatione $c, d, e=0$, & $b=\frac{1}{2}$, $f=-1$ ac $g=\frac{1}{2}$; & hos valores ſubſtituit in æquatione ad Quadratricem ſupra poſitam in qua ordinatæ x eſt duarum dimenſionum, (quia hic ordinata z ad duas quoque dimenſiones aſcendit) eritque $\frac{y^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}=0$, ſeu $y^2=2ax-x^2$, proprietas Quadratricis ſpecialis AHD in qua AGF = AGHL adeoq; habetur Figuræ propoſitæ Quadratura.

In eo tamen latet ratiocinationis & ipſius Methodi defectus, quod omnes Curvas in quibus z ad duas dimenſiones (nec ultra) aſcendit comparet cum una & eâdem

eadem Quadranda generali, in quibus z non ultra duas dimensiones ascendit; & quod concludat Figuram non esse indefinite Quadrabilem si hæc comparatio Quadratricem non determinet. Infinitæ enim sunt Quadrandæ generales (ex ipsius etiam Methodo deducibiles) in quibus z non ultra duas dimensiones ascendit, & non nunquam æquatio Curvæ propositæ, cum prima, secunda, tertia, &c. comparata Quadratricem non habebit, & tamen comparatio cum Millesima quadratricem determinabit. Si enim ab æquatione tertia (quam posuit pro Quadratrice generali in qua x esset trium dimensionum primum terminum $by^3 + dxy^2$ auferat, ex reliquo Quadrandam generalem deducere potest, in qua z non ultra duas dimensiones ascendit, & quæ Quadratricem determinet, cum illâ quam ille statuit generalem non succedit: Et sic ex æquatione quarta, quinta (quas ille poneret pro Quadratricibus altiorum graduum) &c. ablatis iis terminis in quibus y ultra duas dimensiones ascendit, ex reliquo habere potest Quadrandæ generalis æquatio, quæ Quadratricem determinabit, cum nec ejus Quadranda, nec illa quam dixi esse deducibilem ex æquatione tertia, determinare potest, ita ut casu non arte incidimus in Quadrandam Generalem requisitam. Sed quia dixi istas æquationes ad Quadrandas generales ex ipsius Methodo esse deducibiles; volo hic paucis ostendere, Quomodo clariss. hic vir æquationes ad Quadrandas generales invenerit, vel saltem facile invenire potuisset.

Ex *Prob.* 22. conſtat, quomodo data æquatione ad Curvam aliquam AHD, alia curva AFB ſit invenienda cujus area AGF æquatur rectangulo comprehenſo ſub ordinatâ GA & abſciſſa AG; id eſt Quomodo data Quadratrice, invenienda ſit Quadranda; adeoq; aſſumpta æquatione ad Quadratricem generalem (qualem hic ſub initio aſcripſi) proveniet æquatio ad Quadrandam generalem. Jamq; exemplum unum aut alterum Figuræ hic aſcribam, in qua Quadratrix ſecundum hanc Methodum eſt impoſſibilis, & tamen alio modo determinabilis. Sit Æquatio naturam curvæ AFB exprimens $z^3 = \frac{\overline{m^2+x^2}}{p^2}+x^2$ in qua x denotat abſciſſas AC, AG, & z ordinatas BC, GF, m & p quantitates datas & peterminatas; jam ſi Quadranda ſit Area AGF, comparanda eſt hæc æquatio cum æquatione ad Quadrandam generalem jam tradita, quia in hac propoſita æquatione z ad duas dimenſiones aſcendit; ſed manifeſtum eſt comparationem non ſuccedere (ut ipſe alibi argumentatur) ſi vel ſolus numerator fractionis utrobique exiſtens comparetur, deberet enim m^2+x^2 coincidere cum $\overline{-d^2e+ag+bf_2-cdf-4beg+a^2}$, indeterminatum cum determinato, quod fieri nequit, itaq; figura hoc modo Quadratricem non habet, & tamen ipſa hæc figura eſt indefinite quadrabilis, ſcil. $AGF = \frac{\sqrt{n^6+3m^4x^2+3n^2x^4+x^6}}{9pp}$ Et non una tantum ſed infinitæ poſſunt inveniri Figuræ indefinitè Quadrabiles, quarum

Fig. 20.

Fig. 20.

Quadra-

Quadratrices hoc modo sunt impossibiles per *Prob.* 23.

Fig. 20. Definiatur AHD hac æquatione $x^3 = a^2y$, & per *Prob.* 23. inveniatur curva AFB cujus Area AGF æquetur rectangulo contento sub ordinata GH & data qualibet recta puta (a), & definietur AFB hac æquatione $z^2 = \frac{81x^4}{4a^5}$; jamq; si Quadranda sit area AGF secundum hanc Methodum, comparanda est hæc æquatio cum æquatione ad Quadrandam generalem jam tradita, quia in proposita æquatione z non ultra duas dimensiones ascendit; sed comparatio est impossibilis, quia in proposita Curva x ad septimam potestatem ascendit; & in ejus æquatione ad Quadrandam generalem ultra quartam ascendere non potest; sed terminus in quo x est septimæ, non potest comparari cum termino in quo x est quartæ potestatis; nam secundum ipsius Regulam, comparatio est sic instituenda ut x utrobiq; eandem obtineat compositionem; adeoq; Quadratrix hoc modo haberi non potest, & tamen Quadratricem habet AHD definita hac æquatione $x^3 = a^2y$, in qua $GH + a = AGF$; id est $-\sqrt{\frac{x^9}{a^5}} = AGF$. Unde abunde constat hanc Methodum omnes Figuras indefinite Quadrabiles non comprehendere; & infinitas posse inveniri quarum Areæ hoc modo non sunt quadrabiles; assumatur enim quælibet æquatio in qua z non ultra duas, & x non infra quatuor dimensiones reperitur, & habetur æquatio naturam Curvæ exprimens cujus area per hanc Methodum non sunt quadrabiles; ut in his exemplis $z^2 = \frac{x^9}{a^5}$.

$= \frac{x^9}{a^3}$, $z^2 = \frac{x^{11}}{a^9}$, $z^2 = \frac{x^{13}}{a^{13}}$, &c. quæ ſunt æquationes Curvarum naturas definientes quarum Areæ facile determinantur & tamen nullo modo per hanc Methodum poſſunt inveniri. Sed nolo in hac materia ulterius digredi ſperans clariſſ. virum boni conſulturum quicquid dixerim ; quia præcipua ratio quæ me impulit ut hæc ſcriberem, non alia eſſet, quam ut (errores ejus oſtendendo) illum extimulem ad publicanda illa, quibus Geometriam in immenſum ultra terminos à Vieta & Carteſio poſitos ſe promovere poſſe aſſeruit.

FINIS.

ERRATA.

PAg. 4. lin. 20. pro $\frac{n9}{2}$ lege $\frac{nry}{2}$; pag. 5. lin. 2. pro $\frac{nry}{a}$ lege $\frac{nry}{2}$. pag. 6. lin. 12. pro $\frac{3nyz}{2a}$ lege $\frac{3nyz}{2a}$, ibid. lin. 20. pro x lege x^2. pag. 14. lin. 11. pro $r\frac{yz}{2r}$ lege $r - \frac{yz}{2r}$ ibid. lin. 17. pro $m = 3$ lege $m = \frac{2}{3}$. pag. 19. lin. 14. pro $d - y^3$. lege $d^3 - y^3$ pag. 25. lin. 16. pro x lege x^2. pag. 28. lin. 3. pro $\sqrt{\frac{25}{16r3}}$ lege $\sqrt{\frac{y5}{64r3}}$.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [52] - 43

1066

GWLB Hannover
035
036 876 011

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

IV 6 B 1066

4°

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [53] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [54] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 135, Stück 1, [55] r