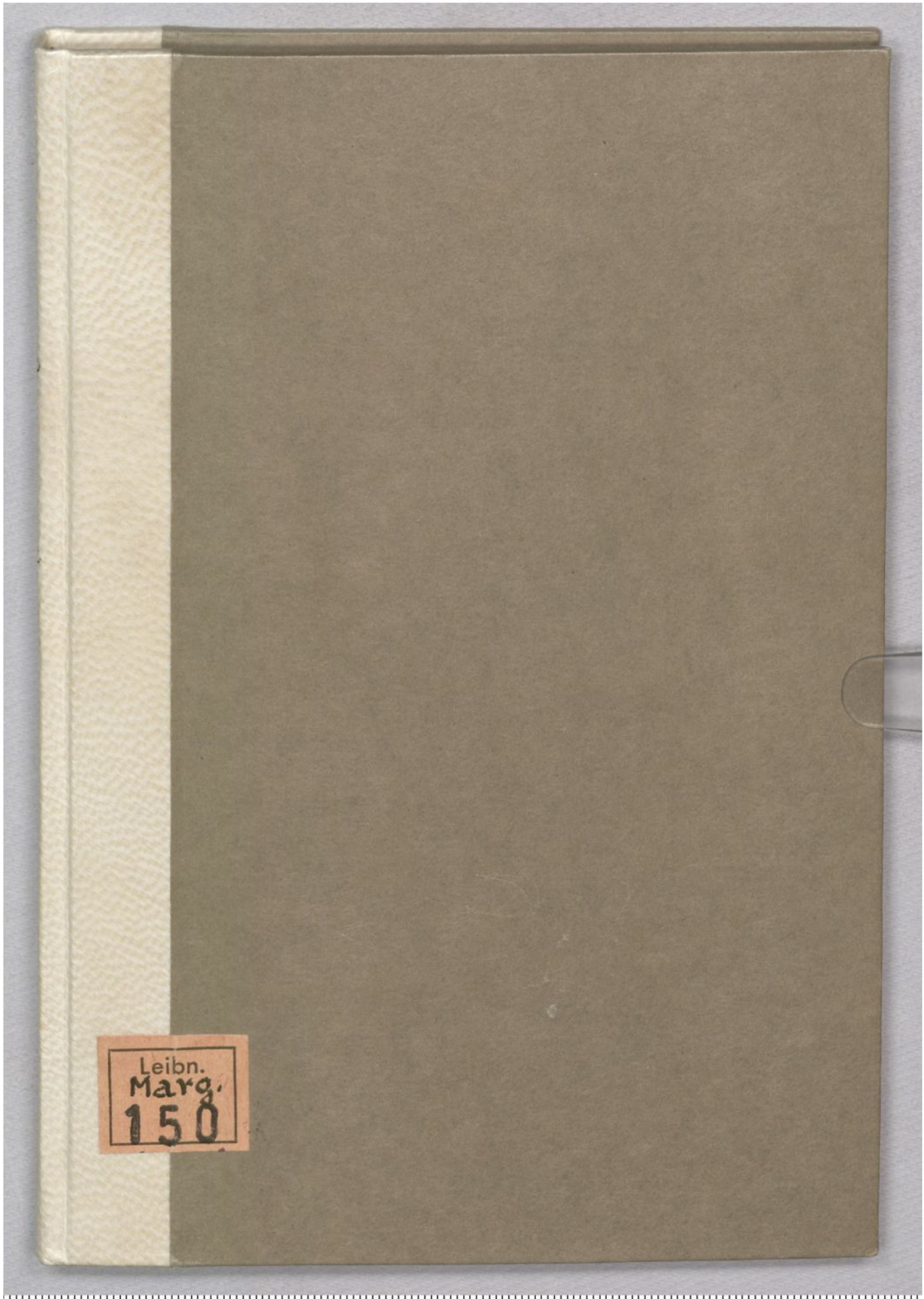


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [1] - -

Leibn. Marg. 150

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

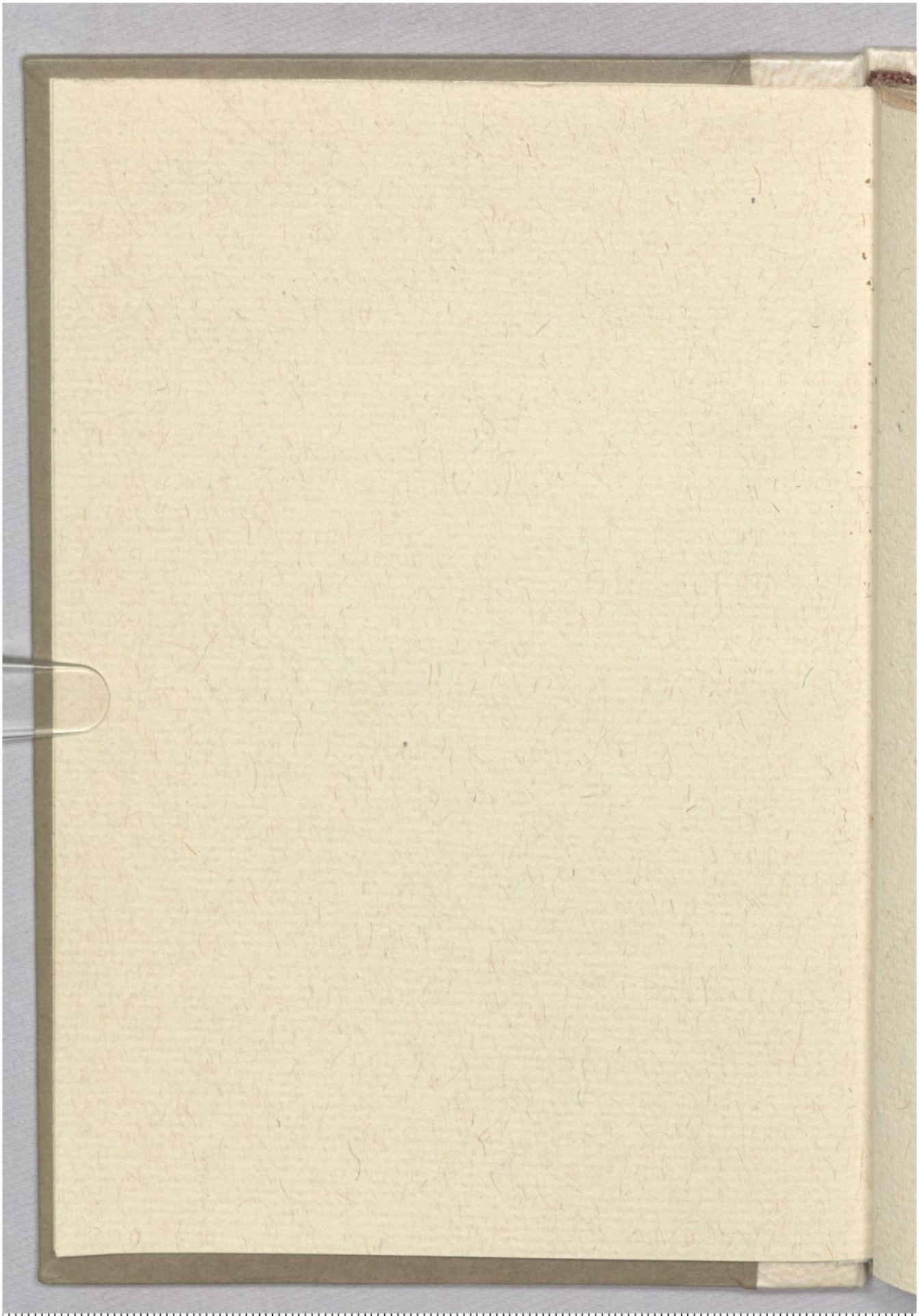
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [2] - -

s. S. 28

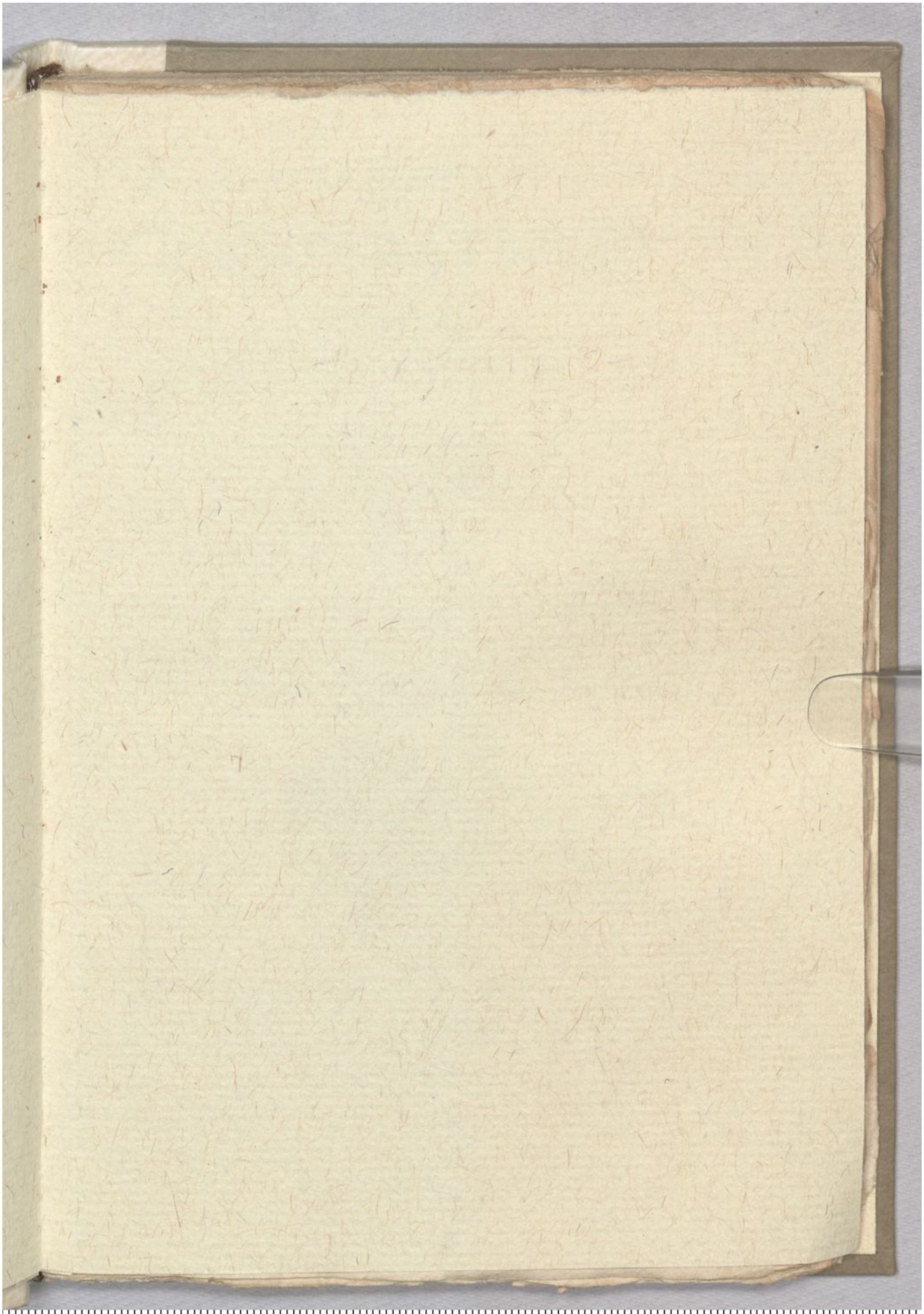
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [3] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [4] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [5] - -

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [6] - -

BERNHARDI NIEUWENTIIT

CONSIDERATIONES

Circa

ANALYSEOS

ad quantitates infinitè parvas applicatæ

PRINCIPIA,

&

CALCULI DIFFERENTIALIS USUM

In resolvendis problematibus Geometricis.



BIBLIOTHECA REGIA HANNOVERANA

AMSTELÆDAMI.

Apud JOANNEM WOLTERS,
Anno 1694.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [7] - -

Archim. Dosith. de Spir:

Quot enim in Geometriâ speculationes, non bene tractabiles initio visæ, tempore perfectionem accipiunt?

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [8] - -

CONSIDERATIONES

Circa Analyseos ad quantitates infinitè parvas applicatæ principia, & Calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis.

QUantos novissimo hoc seculo progressus fecerit, tum Physicæ, tum Geometriæ Studium, non ipsâ tantum Natura, perpetuis Omnipotentiæ Creatoris miracula rimantium ingeniorum experimentis tentata, verum & sublimes ac prædecessorum inventa longo spatio prætervectæ, hodiernis Mathematicis detectæ veritates pleno ore loquuntur.

Veteribus tanto studio celata methodus, á *Cavalierio* resuscitata, nostro hoc tempore sagacissima offendit ingenia, quæ inventis non tantum addere, verum & nulli antea calcato tramite incedentia, humanæ cognitionis pomœria immane quantum proferre heröico ausu sustinuerunt.

Difficiles antiquorum demonstrationes, tyronumque imaginationem prolixâ conclusionum se mutuo insequentium serie tantum non enc-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [9] - 3

enecantia Apodixeon genera, calculi legibus parere jussa, in facilem horum Virorum operâ desiëre methodum: quæ, licet varia forsan a variis adhibeatur, hoc tamen principio niti cunctas, quod *quantitas omnis in partes numero infinitas divisibilis sit* (voce *infiniti* vocare liceat illud, quod omni dato seu assignabili majus est) non obscuris indiciis colligere est. Ortum huic debent, *Arithmeticæ Analyseſque infinitorum*, quin & *Calculi differentiales summatoriique* pro variâ quantitatum inter se comparatione nunc hoc nunc alio nomine insigniti. Utinam Celeberrimis eorum Inventoribus placuisset hujus scientiæ cultores, novæ potius methodi communicatione beare, quam illustri theorematicarum veritatum, solutorumque problematum insolito fulgore attonitos reddere.

Non defuere tamen viri eruditissimi, & gratiam debemus, qui inventæ suæ methodi principia palam exponere non recusarunt; unde & calculi infinitesimalis usus in Geometria sublimiori jam invaluit. Fundamenta hujus tradiderunt, quantum mihi quidem constat, Clar: *Barovius*, Celeberr: *Neiotonus*, successivis eum differentiationibus auxit inclytus *Leibnitius*, quarum ope theoremata nova generalia è curvarum naturâ deduxit insignissimus *Bernoullius*.

Cum

Cum autem parvi non interſit, ut, quæ calculo ad tam ſublimia ducenti ſubſternuntur, axiomata adverſus difficultatum objectiones inconcuſſa perſiſtant; atque fundamentis ſolidè jactis, non ſecundum apparentem ſimilium analogiam, verum juxta indubitabilem liquidæ veritatis rigorem, concluſionum cumulus inædificetur, æqui bonique conſulant, precor, Viri præſtantiſſimi, ſi, quibus huc uſque *calculum infiniteſimalem* laborare credidi, difficultates hic ſincerâ fide pandam. Ubi monuero me prælaudatorum modo Virorum ratiocinia hunc in finem præ cæteris elegiſſe, cum, licet in aliorum ſcriptis non pauca etiam, interque ea conſummatæ Analyſeos infinitorum ſpecimina proſtent, omnes quidem, quantum mihi cognitum eſt, vel eâ potius utantur, quam ex profeſſo demonſtrent; adeoque & methodi hujus fæcunditatem potius, quam principiorum certitudinem tradere voluiſſe videantur; vel (ſi & alii reperiantur, quibus methodi demonſtratione lectores ſuos demereri placuit) eam Geometriæ potius, aut Arithmeticæ, quam calculo ſpecioſo accommodaverint: tum & ſublatis hisce, quæ cum illuſtrium modo recenſitorum virorum methodis aliquatenus pugnare videntur, difficultatibus, non exiguo paſſu promota

mota esse, ars inveniendi mihi videbitur.

SECTIO PRIMA.

Quæ igitur in Clariss. *Barovii* methodo illustrationem quandam deposcere mihi visa sunt, hæc sunt præcipua:

§. 1. Celeberrimum Authorem hanc ratiociniis suis thesin substernere, *si quantitas determinata ad aliud quidpiam rationem habuerit omni assignabili majorem, hoc nihilo æquivalebit*, sequentia, ni fallimur, evincunt.

Dem: Postquam enim Lect: Geom: XII, Append: II, § 4, probatum dedisset *Fig. I.* rectam determinatam *AD* ad omnes *EQ*, *FR*, *GS*, *AT*, &c. simul sumptas rationem habere quavis assignabili majorem; concludit §. 5. hinc inter computandum (eædem) omnes *EQ*, *FR*, *GS*, *AT*, &c. (*N. B.*) nihilo æquivalent. Unde quam modo recensuimus thesin a D. Authore pro verâ assumi probatum arbitramur.

Hinc etenim ipsarum *ZE* & *ZQ* tum *ZF* & *YR* &c. æqualitatem derivat Vir doctissimus, quæ si *ZQ*, *FR* &c. entibus annumeranda manerent, frustra inferretur.

§. 2. *Quantitas determinata ad quantitatem infinite*

infinite parvam, semel acceptam, rationem habet omni assignabili majorem.

Demonstratur hoc nullo negotio ex quantitatis infinitè parvæ naturâ; cum enim hæc sit omni assignabili minor, erit & ratio quantitatis determinatæ ad illam omni assignabili major; quæ cum satis sint clara, ulteriori deductioni supersedeo.

§. III. Quarum thesium comparatione sequitur, *quantitatem infinitè parvam semel acceptam nihilo æquivalere.*

Consequentiæ ratio patet hoc argumento:

Ad quod quantitas determinata rationem habet quavis assignabili majorem, illud nihilo æquivalet.

Sed ad quantitatem infinite parvam, semel acceptam, quantitas determinata rationem habet quavis assignabili majorem.

Ergo quantitas infinitè parva semel accepta, nihilo æquivalet.

Major ex cl. Authoris assumtione & §. I. hujus, minor ex §. II. consequitur.

§. IV. Quo evicto, rationem, quâ cl. viri tangentium methodus salvari queat, non video; cum hanc adversus eam formari posse instantiam vero sit simile.

Positâ cl: Barovii tangentium methodo, subtangentis ad applicatam in curvis, aut

nulla est aut æqualitatis ratio legitimè saltem non exponitur.

Dem: vocatis enim (ex lect. Geom. x. præcepto, pag. 81.) $TQ:t$, $QL \infty QE:y$, $EH \infty LH:a$, $DH:e$, (Fig. 2.) hæc juxta traditam inibi regulam III, obtinebit proportio $t:y::e:a$,

Jam autem e & a infinitè parvas à D: Authore assumi plurimæ, si non omnes, ab eo profectæ propositiones testatum faciunt; Quare hæ tum e tum a, ex §. III. hujus, (semel enim accipiuntur) nihilo æquivalent; unde ipsius t ad y ratio, per e & a designata per duo nihila exponetur; unde vel nulla est vel æqualitatis, legitimè saltem non exponitur. Utrum vero obtineat hic non disputo, cum, utrolibet existente vero, absurditas evitari non posse videatur.

§. V. Quin & hæc quoque hac in tangentium methodo, non exigua in medio relinqui videtur difficultas, quare ipsarum e & a potestates & rectangula juxta expressa D: Inventoris verba *nihil valeant*; cum tamen ex ipsius Authoris instituto, earum radices e & a rationem subtangentis ad applicatam designent.

Et hæc quidem sunt primaria, quæ mihi D: *Barovii* methodum examinanti remoram injecerunt. Cætera, quæ præter modo recensita mihi clara satis ac distincta non apparebant, brevitati studens non adjungam; cum hac difficultate sublatâ reliquæ levi negotio tolli queant.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

Quare ad ſubtiliſſimam Inclyti *Newtoni* rationum primarum & ultimarum methodum tranſeo, quam lemmati I, tanquam baſi inædificaſſe D: Authorem, poſt evolutum *Principiorum Mathematicorum* ſolidum & excellens opus neminem latere poteſt. Eſt autem lemma I. quod ſequitur.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore conſtanter tendunt, & eo pacto propius ad invicem accedere poſſunt, quam pro datâ quavis differentiâ: fiunt ultimò æquales.

Hoc autem ſequenti modo demonſtratur.

Si negas; ſit eorum ultima Differentia, D. ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere, quam pro datâ differentiâ D: contra *hypotheſin.*

Quod etſi obſcuri aliquid mihi reliquiſſe viderer, nullo tamen unquam, quod ſciam, tempore, ex propoſitionis alicujus certitudine ex præmiſſis inferendâ oborienti ſcrupulo minus exſolvere me potui. ſi enim quantitatibus, quæ ſunt infinitè parvæ, illud applicarem; eadem ac circa *Barroviana* ſeſe mihi objiciebant.

Verum quia (tantæ enim eruditionis virum hæc latere non poterant) eam ipſam ob cauſam indiviſibilium methodum, duriorem exiſtimaret, ac methodum ſuam non ad quantitates de-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [15] - 9

terminatas, sed *diminuendas* sine limite, adeoque non ad eas quæ *sunt*, sed quæ *fiunt* omni datâ minores (quas alio nomine quantitates *evanescentes & in perpetuo fluxu constitutas* non raro appellat) applicari voluisse testaretur cl: Author; scrupulis quidem ex *Barovii* demonstrationibus, & indivisibilium methodo oriundis, subtiliter admodum subducere sese videbatur hæc methodus; nec tamen demonstratis securè acquiescere me permittebat nescio quid sese continuo ingerentis dubii. Donec tandem, demonstrationis acutissimæ mirandam seriem, adhibitis, quas poteram, ex D: Authoris præscripto cautelis denuo aggressus, tandem ejus, quam reliquerat, obscuritatis causam in sequentibus consistere deprehendisse mihi videbar. Quæque ideo, præfatus veniam, æquo D: Authoris judicio, eâ, quæ tanto vero debetur, reverentiâ sisto, in quem finem hæc præmitto lemmatica.

§. I. Indubiam esse, liquidissimæque veritatis certissimos characteres secum ferre hanc enunciationem statuo. *Solæ eæ quantitates æquales sunt, quarum differentia nulla est, seu nihilo æqualis.*

§. II. Unde consequitur; *si quantitates fiant ultimò æquales, earum differentiam ultimo fieri nihilo æqualem.*

§. III.

§. III. Quantitatum quarumlibet, quarum sin ulæ fiunt omni data minores, differentia etiam fit omni datâ minor.

Hoc leviter attendenti obscurum esse non potest.

§. IV. Ex hac causâ, quod quantitates propius ad invicem aut æqualitatem accedant, quam pro data quavis differentia, non legitimè infertur eas ultimo æquales fieri.

Dem: hoc enim pacto circuli subtangentem applicatæ in contingentiæ puncto æqualem ultimo fieri sequeretur: quod absurdum. Libro enim II, Sect: II, Prop: X, exemp: I. ipsas o & $\frac{ao}{e}$ (positâ o infinitè parvâ) tangentis positionem in circulo determinare seu rationem subtangentis ad applicatam exprimere vult D: Authors; jam cum sint singulæ infinitè parvæ, seu tales, quæ fiunt omni data minores, earum differentia juxta præcedentem fiet omni data minor; quare, si hinc inferri posset eas ultimo æquales fieri, inferretur etiam subtangentem circuli & applicatam ultimo æquales fieri; eadem enim utrobique ratio. *q. e. d.* potuisset hujus § intentum aliunde confirmari, sed malui ex ipsius D: Authoris placitis instantiam formare.

§. V. Ex lemmate D: Authoris secundo hæc conclusio directè probari potest. *Differentia*

ferentia figurarum EOFMHNLIGAE & DFPHQIKAD, quarum altera (Fig: 3.) curvilineo EGA circumscribitur, altera inscribitur (axe AE in partes omni data minores discerpto); *fit omni data minor.*

Dem: sic enim argumentatur vir eruditissimus lemmate citato. Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est rectangulum BAG. Sed hoc rectangulum fit minus quovis dato; ergo (directè sequitur) earum differentia sit minor quavis datâ.

§. VI. Posita hac enunciatione, *quantitates, quæ dato tempore ad æqualitatem constanter tendunt, fiunt ultimo æquales*, non poterit hujus ope demonstrari, ullas unquam figuras fieri ultimo æquales; nisi & conditionem, *quod dato tempore ad æqualitatem constanter tendant*, eis figuris competere jam evictum sit. Demonstratione hoc ulteriori non indiget.

§. VII. Lemmatis primi D: Authoris demonstratio hoc potissimum argumento niti debet, *quod quantitates dato tempore ad æqualitatem constanter tendant.*

Dem: Lemma enim hoc evincere studet, quantitates quasdam ultimo æquales fieri, duabus de causis; prima est, quod ad æqualitatem tendant; secunda, quod propius ad invicem accedere possint, quam pro datâ

datâ differentia: sed ex hac, juxta §. IV, hujus conclusio non legitimè infertur, ergo illo potissimum argumento niti debet, *q: e: d.*

§. VIII. Ex quibus tandem hoc consequi videtur.

Figuras, tum inscriptam, tum circumscriptam, (Fig. 3.) in lemmate D: Authoris secundo ultimo æquales fieri, vi lemmatis primi sufficienter non demonstrari; quod tamen solertissimo D: Authori visum est.

Demonstr: Lemma D: Authoris primum hoc potissimum argumento nititur, quod quantitates tendant ad æqualitatem ex præced: hujus; sed hanc proprietatem figuris lemmatis secundi competere, nondum (quantum quidem mihi constat) demonstravit D: Author. ergo ex §. hujus VI. nunquam inferri poterit, figuras lemmatis secundi, vi lemmatis primi, ultimo æquales fieri; quare demonstrari non sufficienter eo ipso patet.

Evicit quidem D: Author, juxta §. V. hujus, earum figurarum differentiam fieri *quavis datâ minorem*; non autem *nullam* ultimo fieri. Quod tamen ex §. hujus II. requiritur, si probari debeat ipsas ultimò fieri æquales.

§. IX. Quin & si breviter sensum, quem ex lemm: I & II. collatione haurire licuit, proponam; hoc ritu, vi lemmatis primi, secundi

veritas

veritas evinci debere mihi videtur.

Quæ tendunt ad æqualitatem &c, fiunt ultimo æqualia; sed figuræ in scripta & circumscripta tendunt ad æqualitatem &c, ergo ultimo fiunt æqualia.

Cujus minoris adstructio hic mihi desiderari visa est, tantæque præterea difficultatis, ut non minori negotio ipsam conclusionem, (*quod* scilicet *fiant ultimò æquales*) evinci, quam hanc minorem (quod dato tempore constanter ad æqualitatem tendant) confirmari posse credam.

§. X. Tum & hæc insuper lemmatis primi demonstrationi videtur subesse difficultas; quod, si quantitates (quæ ad æqualitatem &c.) ultimo fieri æquales negetur, earum differentiam semper *datam* seu *assignabilem* esse, implicite supponat.

Postquam enim D: Author neganti concessisset, sit earum ultima differentia D. mox subjungit, ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro (N. B.) *datâ* differentia D; unde hanc *datam* semper esse tectè supponere hanc demonstrationem non obscurè colligi potest.

(Cum tamen *datas* adeoque *finitas* quantitates ex hoc calculi genere merito exterminandas esse pag. 35, & 251. pluribusq. in locis doceat

doceat Eruditissimus D: Author)

Quod si vero, ultima hæc differentia non *data*, sed (uti §. hujus V.) *omni data minor fiens* supponatur, quantitatum quidem earum ultimò fiens æqualitas ex §. II. hujus negabitur, (quod enim *omni dato minus* fit, non semper sit *nullum*;) neque tamen quicquam adversus hypothesin (quæ ipsa idem illud, differentiam nimirum harum quantitatum omni datâ minorem fieri, supponit) commissum erit. Unde hoc in casu demonstrationem lemmatis primi (cui tota hæc methodus inædificata est) intentum suum non exactè probare mihi vero fit similè. Licet alioquin ea, quæ tum D: Barovii ratiocinationes, tum cel: Leibnitii iteratas differentiationes comitari videntur incommoda, prudentissimè devitet.

SECTIO TERTIA.

Ordine jam ducimur ad celebre hujus seculi inventum, *differentialem calculum*, inventorum sublimitate nescio, an theorematum feracitate magis mirabilem. Meruerat sane hæc methodus ex professo tradi, ut promovendæ ulterius Geometriæ sine remanenti scrupulo inserviret; quod cum forsitan, Nob. quippe Authore primæ notæ negotiis occupato, frustra desideramus, non mirabitur quisquam,

si sum-

ſi ſummis ſublimioribuſque problematis perpetuò fere applicata, adeoque magis, ardua quæque molientem Inventoris induſtriam, quam propriam certitudinem commendantia novæ hujus Analyſeos ſpecimina, omnes ex inſolitæ methodi contemplatione ſubortas difficultates non ſuſtulerint: quas unico veritatis eruendæ ſtudio, nec nob. Authoris, (uti ſperamus) ingratiis hic propoſuiſſe liceat.

Ut vero, quæ hunc calculum urgere videntur, conſpectius paullo ob oculos ponantur, cum propoſitionibus fundamenta illius ex profeſſo comprehendentibus deſtituamur, primaria, quæ tum ex Nob. *Leibnitii*, tum celeberrimi *Bernoullii* in actorum, quæ *Lipſiæ* colliguntur, hiſtoriâ editis (cujus utriusq: ſtudio tum acutiſſimam inventionem, tum propagationem indefeſſam, hunc calculum debere, nemo, niſi in Mathematicis hoſpes, ignorat) excerpere potuimus, methodi indicia bona fide recenſebimus: eaque lemmatico quodam ordine diſponemus: tandemque juxta calculi hujus non ſemel obſervatas leges, D: *Bernoullii* communicata theoremata, tum ipſam differentiationum repetitarum ſucceſſionem, poſt imploratam Cl: Virorum veniam, examina nabi-

nabimus: hæc enim num cum legum in calculo differentiali traditarum nexu securè consistant, dubitare me cogunt sequentia rationum momenta.

§. I. Si exponatur differentiale ex quantitate differentiabili in differentiam suam ductâ compositum, ut $x\,dx$, erunt omnia $x\,dx$, seu $x\,d\,x$ summatorie aut collectivè accepta (D: Leibnitio per $\int x\,d\,x$ denotata) æqualia absoluto valori $\frac{1}{2}\,x\,x$.

Dem: Patet ex Celeb. Leibnitii assertione, Act: Lipsi: Anno 1686, mens: junio, pag. 297. huic enim fundamento theorema Barovianum inædificat Vir eruditissimus, inibique hujus theseos demonstrationem ex professo tradit. Quin &, ex iis, quæ Clar: *Bernoulli* in actis citatis edidit, passim constat; videatur Annus, 1694. Pag. 268, ubi simile quiddam occurrit.

§. II. Triangulum D E H (Fig. 2.) curvarum characteristicum ex quantitatibus infinitè parvis seu differentialibus constat, unde vocatis A P: x, D P: y, curvâ A D: s, erit D H: dx, H E: dy, D E: ds.

Probatur, Anno 1693, Septemb. pag. 390, & Anno 1686, pag. 298, eorundem Actor:

§. III. huic triangulo D E H seu inassig-

 nabili,

nabili simile est triangulum T P D seu assignabile, *prob.* eodem loco.

Cor: hinc si fiat T P: t, T D: k, est $t:y::dx:dy$, & $t:k::dx:ds$, &c. quod & ex Anni 1684, Octob. pag. 467. demonstrari potest.

§. IV. In secundis, tertiis &c. successivis differentiationibus, simili algorithmi genere, ac in differentiatione prima uti licet, verb: grat. dxy est $xdy+ydx$, quam quantitatem rursus differentiando orietur, $xddy+dxdy+dxdy+yddx$.

Dem: ex loco citato Anni 1684 hoc colligitur, tum exempla non pauca in Viri nobilissimi scriptis prostant, celebre inter alia est, quod in Actis Anno 1693 mense Aprili, pag. 179. videre est. Tum & Cl: *Bernoulli* eodem Anno, mense Junio, pag. 255, in subjuncta illustriss: Hospitalii demonstrationi de paraboloidibus animadversione, hæc expresse confirmat.

§. V. Data æquatione differentiali curvam spectanti, quamlibet ex differentialibus, dx, dy, ds, constantem, ac jugiter æqualem, adeoque differentiæ expertem assumere licet, & hac hypothesi differentiationem continuare.

Dem: per allata modo exempla Anni 1693, pag. 179 & 255. clarum est, ubi dy constans

fuit

fuit assumta. Tum & Anno 1684. mense Octobri pag 473 expresse indicatur, ipsam dx posse pro arbitrio assumi, nec non Doctiss: *Bernoulli* Anno 1694, mense Junio, pag. 264, luculentum hujus asserti testimonium præbet.

§. VI. Triangulum DEH, ubi ordinatæ ad axem normaliter applicantur, est rectangulum, adeoque, $axdx + dydy \propto dsds$.

Dem: consequitur ex lemmate tertio; & Anno 1693. pag. 255. mense Junio, hæc æquatio ab illustri Hospitalio adhibetur, ac sequenti modo inibi designatur, $dxq + dyq \propto dsq$.

§. VII. Quibus lemmatum in modum præmissis, suppositoque theorema Clar: *Bernoullii* Anno 1694. mense Junio, pag. 264. in actis Lipsiensibus publicatum, nihil, nisi quod legitimè demonstrari queat, in recessu habere; ac ad omnes sese curvas generaliter extendere, hæc inde consequentia, recensitas modo leges observando, deduci posse videtur. *Positis curvæ elementis æqualibus, concessaque differentiationum pluralitate, erit subtangens ipsi applicatæ ad axem perpetuo æqualis.*

Dem: Sit enim (Fig. 4.) curva DABC, vocenturque TE subtangens: t, DE: x, AE: y, AL: dx, BL: dy, AB: ds, radius circuli osculatoris seu fili evolventis longitudo AF: z,

erit juxta Cl: *Bernoulli* locum citatum semper $dx\,ddx \propto dy\,ddy$, quâ Differentiali in summatricem versâ, ac per § 1, hujus reductâ, erit $\frac{1}{2}\,dx\,dx \propto \frac{1}{2}\,dy\,dy$, unde hac æquatione per 2 multiplicata & extractâ radice fiet $dx \propto dy$. Sed ex §. III. hujus corollario est, $t : y :: dx : dy$.

Adeoque, cum sit $dx \propto dy$, erit $t \propto y$ seu subtangens T E æqualis applicatæ A E. *q. e. d.*

Simili modo positis dx æqualibus demonstrabitur fore $dy \propto ds$, seu tangentem T A æqualem applicatæ A E. ex §. III. hujus.

Ut & assumtis dy æqualibus, fore $dx \propto ds$, seu tangentem T A æqualem subtangenti T E. cujus jam momenti hæc sit difficultas, quâ calculus differentialis laborare videtur, satis appareret.

Accedit, quod ex D: Authoris constructione sit B H ∝ B C, adeoque triangulum H B C isosceles; tum & si triangula H O C & B M H futura sint similia, uti assumit Vir præstantissimus, oporter angulum B H C esse rectum, aut angulos C H O & B H M æquari; hoc redarguit laterum adhibita proportio; illud quidem reapse obtinet, verum quo pacto ex hujus calculi differentiationes iteratas admittentis principiis, in triangulo isosceli angulorum ad basin rectitudo, demonstrari queat, optarem edoceri.

§. VII. Ne

§. VIII. Ne, autem curvas in genere contemplati, circa particularia hunc calculum tuto adhiberi credamus, exemplum addo in circulo, ut curvæ hujus omnibus cognita proprietas rerum, insuetis alias satis intricatarum, difficultatem sublevet.

Sit (Fig. 2.) D P: y, sinus circuli, cujus radius r; sagitta A P: x, erit hujus proprietas, uti notum, $2rx - xx \propto yy$; cujus differentialis est $r\,dx - x\,dx \propto y\,dy$; quæ, positis dy æqualibus, denuo differentiata dabit, $r\,ddx - x\,ddx - dx\,dx \propto dy\,dy$ (hæc signetur K) quæ si rursum tertiò differentietur habebitur, $r\,d^3x - dx\,ddx - x\,d^3x - 2\,dx\,ddx \propto 0$, seu $r\,d^3x - dx\,ddx - x\,d^3x \propto 2\,dx\,ddx$ (signetur P) sed resumtà jam æquatione K erit post transpositionem $dx\,dx + dy\,dy \propto r\,ddx - x\,ddx \propto ds\,ds$ ex hujus §. VI; hæc differentietur denuo, fietque $r\,d^3x - dx\,ddx - x\,d^3x \propto 2\,ds\,ddx \propto 2\,dx\,ddx$ juxta æquationem littera P designatam.

Hæc autem ultima in summatricem versa & juxta lemma 1 reducta exhibebit post extractam radicem quadratam $ds \propto dx$, jam ex hujus §. III est $t : k :: dx : ds$, adeoque propter harum æqualitatem, $k \propto t$, seu tangens T D æqualis subtangenti circuli, seu ipsi T P.

Si vero inventa æquatio circuli differentialis

$r\,dx \propto x\,dx + y\,dy$, positis dx æqualibus, differentietur, evadet $-dx\,dx \propto dy\,dy + y\,ddy$ (notetur littera Q.) quæ tertio differentiata dabit, $2\,dy\,ddy + dy\,ddy + y\,d^3y \propto 0$ seu $-dy\,ddy - y\,d^3y \propto 2\,dy\,ddy$ (insigniatur nota R;) jam reassumatur æquatio Q, quæ post transpositionem exhibebit $dy\,dy + dx\,dx \propto -y\,ddy \propto ds\,ds$ ex § hujus VI, hæc autem tertio differentiata $-dy\,ddy - y\,d^3y \propto 2\,ds\,dds \propto 2\,dy\,ddy$, per æquationem littera R notatam; quæ modo jam tradito per §. I. hujus reducta tandem prodet $ds \propto dy$; adeoque per hujus § III tangentem T D æqualem ipsi D P seu applicatæ circuli.

Rursus cum sit $ds \propto dy$, erunt $\int ds \propto \int dy$, seu omnia ds æqualia omnibus dy, adeoque ipsa curva æqualis applicatæ P D, cui mox tangentem æqualem esse ex iisdem principiis invenimus.

Consequentiæ ratio ex hujus § I, & exemplo è Doctiss. *Bernoullii* editis ibi loci citato, manifesta est.

Notetur idem posse de parabolâ, aliisq. curvis secundum hujus calculi leges demonstrari.

Quæ, quam sint se mutuo destruentia, & demonstratis antea veritatibus contraria, non difficulter colligere est.

Et

Et hæ quidem continuo ſeſe ingerentes obicem difficultates poſuerunt, quo minus differentiali calculo hactenus ſubſcribere potuerim; eas enim, quæ adverſus *Barovii* principia militare videbantur, amoliri potui, adeoque & quæ lectiones ipſius Geometricæ circa curvilineorum naturam demonſtrant, ſine ſcrupulo admittere; hic autem inſuperabilem offendi remoram, & cum Inventoris præſtantiſſimi venia, iteratas differentiationes ſublimioribus ingeniis reliqui, donec obſtacula hæc tollendi occaſio nata fuerit. Quam ob rem ſummo hactenus ſtudio algorithmi *Leibnitiani* demonſtrationem deſideraveram; licet me non fugiat ex calculo tangentium Baroviano rite demonſtrato primam quantitatum quarumcunque differentiationem deduci poſſe, legeſq. adeo differentiationum ſequentium; modo (quæ mihi harum difficultatum cauſa videtur) particulas differentiales differentiationem repetitam juxta eundem ſemper algorithmum ferre ratum ſit. Vix tamen poſſum induci ut dubitem, quin pro penetranti, quâ pollet, ingenii acumine, ex principio infallibili, eoque forſan ſibi peculiari, eas deduxerit Vir, ſi quis in hoc ſtudiorum genere verſatiſſimus; cum fundamento meris tantum aſſumtionibus innixo tantæ molis ſuperſtruxiſſe theorematum compagem

Geometras omnis eruditionis famâ clarissimos suspicari meo quidem judicio, sine injuriâ, haud liceat.

Cujus principii communicatione; si harum litterarum cultores honorare non dedignetur; celeberrimus D: inventor, quæ plurimum semper debebit, immane quantum sibi devinciet litteratorum rempublicam; hæc enim si per successivas differentiationes securè procedat methodus, quantum ad Matheseos promotionem collatura sit, quæ hactenus ipsi inædificata lucem aspexerunt, abundè testantur.

§. IX. Consului super hac difficultatis naturâ, quos præ manibus habebam scriptores mathematicos, nec iteratas differentiationes evincentia in ullis reperire usquam potui. Solus Clarissimus *Newton*, Schol: lemm: II lib. II subnexo, suæ Leibnitiique methodi fundamenta hoc lemmate contineri asserit; quapropter, ipso non sine summâ diligentiâ perlustrato, scrupulum tamen mihi non ademtum ex animo dolebam; rationem hic addere liceat, cum à Viri tantum de republica mathematica meriti candore & generositate ægrè latum non iri sperare ausim, si considerationes, quæ me dubium super hujus lemmatis demonstratione hactenus tenuerunt eâ, quâ decet, veneratione proponam.

Demon.

Demonstratio lemmatis hujus sex casibus absolvitur, quorum quinque posteriores in primo casu fundantur, quo *laterum incrementis totis rectanguli incrementum generari* concludit præclarus D: Author. quæ equidem assertio, utut per se vera, num tamen ratiocinio, in hujus demonstrationem adhibito, certitudinem suam debeat sequenti modo inquisivi.

Linea DG (Fig. 5.) dicatur: A, ejusque momentum, seu quantitas differentialis: *a*, deinde GH vocetur: B, hujusque momentum: *b*, erit rectangulum DGHF motu perpetuo auctum ∞ AB, demonstrandum est momentum seu differentiale ipsius AB esse $Ab + aB$, quem in finem sic argumentatur Clarissimus Author:

Cum lateribus dëerant momentorum dimidia, DR ∞ $\frac{1}{2}a$, & KH ∞ $\frac{1}{2}b$, erat GR ∞ $A - \frac{1}{2}a$, & KG ∞ $B - \frac{1}{2}b$, adeoque rectangulum GKLR ∞ $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; jam vero quam primum latera *A* & *B* alteris momentorum dimidiis, seu DS ∞ $\frac{1}{2}a$, & HN ∞ $\frac{1}{2}b$, aucta sunt, evadit GS ∞ $A + \frac{1}{2}a$, & GN ∞ $B + \frac{1}{2}b$, adeoque rectangulum GSPN ∞ $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; de hoc rectangulo GSPN subducatur rectangulum

prius GRLK, & manebit excessus RSPNKLR $\infty Ab + aB$, unde præcedentem veritatem, seu *laterum incrementis totis generari rectanguli incrementum* deducit D: Author, cum tamen hoc discursu sequentem potius canonem directè demonstrasse mihi videatur: Si rectanguli cujuslibet GDFH latera GD & GH seu A & B, quantitate quadam $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, respectivè augeantur & minuantur, ac in iisdem hoc pacto auctis & minutis alia duo formentur rectangula GRLK & GSPN, erit horum differentia, sive (liceat appellare) gnomon RSPNKLR, æqualis duobus rectangulis $aB + Ab$, quorum singula ex incremento unius lateris duplo in alterum latus ducto emergunt.

Nec, tanti Viri pace, aliud quippiam hinc inferri posse video, cum licet rectangula quidem $Ab + aB$, sive gnomonem, hoc modo generari evincat, non tamen sequatur eundem gnomonem esse exposiri rectanguli GHFD incrementum momentaneum, quod igitur speciali adhuc hoc in casu probatione indiget, cum totius rei cardo in hoc præcipue vertatur. Cui adjunxisse liceat dictum gnomonem $Ab + aB$ seu RSPNKLR rectanguli GDFH incrementum legitime non vocari, cum magna sui parte RDFHKLR intra rectanguli expositi terminos jaceat; quæ, si non decre-

menti,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [32] - 26

menti, incrementi saltem nomine appellanda non venit.

Eadem difficultas urget, si ipse gnomon ipsius rectanguli decrementum vocaretur, magnâ enim sui parte, incrementi potius nomine vocandâ, extra expositum rectangulum jacere schema inspicienti satis patet.

Accedit, quod si non expressis momentorum *a* & *b* dimidiis, sed trientibus quadrantibus, aliâve laterum parte magis exigua $\frac{a}{p}$ & $\frac{b}{p}$ (posito, *p*, pro numero quantumlibet magno) aucta & minuta supponantur, (quæ hypothesis magis quidem infinitæ, qui quæritur, gnomonis seu incrementi parvitati congruere videtur) suppositum hoc rectanguli incrementum laterum incrementis *totis*, quod intendit D: Author, neutiquam generari; erit enim hoc in casu $\infty \frac{2aB}{p} + \frac{2bA}{p}$; quod, juxta ipsius *p* variam assumtionem, ab incrementis laterum *totis* varie distare nemo non videt.

§. X. Unicam hanc in calculum differentialem præcedentibus addere liceat instantiam, cum schema IV. ei gratis inserviat.

Post traditum Anno 1684. mense Octobri, calculi differentialis algorithmum, plurima curvarum symtomata ex differentiarum ad se mutua

tua habitudine deducit vir ingeniosissimus, *D. Leibnitius*; quibus tandem & hoc addit porisma, & curvarum versus axem concavitatis duplex criterium.

Si crescentibus ordinatis, u, *crescunt etiam ipsarum incrementa vel differentiæ*, du; (*seu si positis* du *affirmativis*, *etiam* ddu *differentiæ differentiarum sint affirmativæ*, *vel negativis negativæ*) *curva axi obvertit concavitatem*, *alias convexitatem.*

Cujus contrarium sequenti modo evincere ipsa parabolæ curvatura mihi videtur.

Sit (Fig. 4.) DABC parabola, in quâ ordinatæ AE, BP, QC, crescunt, quæque, uti notum est, versus axem DQ est concava, vocatisque DE: *x*, AE: *u*, ipsa AL & BN nomine *dx*, BL & NC nomine *du* generali appellatione dicenda erunt; jam quoniam tum AB, tum BC, sunt tangentium respectivarum portiones, juxta *Barovii* Lect. V. Prop. I. angulus ABL ipso BCN minor est, unde ob angulos ALB & BNC tum rectos tum æquales (ex constructione) erit angulus BAL major ipso CBN; hujusque anguli tangens si vocetur, *b*, ac illius: *t*, erit & hâc de causâ *t* major ipsâ *b*; jam appellato radio: *r*, fiet ex trigonometriæ regulis $BL \propto \frac{t\,dx}{r}$, ac $CN \propto \frac{b\,dx}{r}$; unde cum (positis *dx* æqualibus) *t* excedat ipsam *b*, pate-

patebit & B L excedere ipsam C N; unde hæc saltem curva parabolica datur, in qua versus axem concavâ ordinatæ u crescunt, earumque differentiæ B L & C N seu du decrescunt, quod cum D: Authoris tradito canone convenire non videtur.

Possent hæc generaliter ex alio principio demonstrari, sed huic instantiæ hæc sufficerint.

Tum & alterius criterii, quod in D: Authoris regulâ parenthesi inclusum cernitur, contrarium in eadem parabola obtinere apparet. Sit enim (manentibus assumtis modo symbolis) eadem parabola D A B C cujus æquatio $2rx \infty uu$, erit hujus æquatio differentialis, $rdx \infty udu$, adeoque ipsa du affirmativa; hæc, sumtis dx æqualibus, (juxta enim Cl: Authorem Anno 1684, pag. 473. pro arbitrio assumi potest) in hanc rursus differentio differentialem transibit æquatio: $uddu + dudu \infty 0$; adeoque, licet du sit affirmativa, hujus ope inventa ddu erit negativa, quippe æqualis ipsi $-\frac{dudu}{u}$, directe (saltem apparet) contra clariss: Authoris placita: juxta quæ existentibus du affirmativis, ddu vero negativis, curva axi convexitatem obvertere debuisset, nisi typothetarum error irrepserit.

Negari quidem non potest, in genere (supposita

posita successivarum differentiationum possibilitate) illis, quæ modo adversus Cl: *Barovium* militare videbantur, difficultatibus non implicari hanc methodum; cum differentias seu quantitates omni datâ minores æquales nihilo ponere non cöacta sit; verum & suas quoque differentias, & has rursum suas in infinitum (limes saltem nondum præfixus est) habere assumat. Unde, cum differentiæ semper de novo differentiabiles (nisi unîus differentiæ suppositæ æqualitas, quæ tamen semper necessaria non est, aliam in nihilum redigendo finem imponat) eo ipso nunquam evanescant, plane diversam à *Barovianâ Newtonianâque*, quin & omnium fere præcedentium mathematicorum, tetragonismi methodum viros hos eruditissimos *Leibnitium*, *Bernoullumque* in usu habere mihi non obscuris rationibus constare videtur.

Quomodo autem hæc differentiationum continuatio (primam excipio) cum calculi differentialis algorithmi demonstratione consentiat, lubens equidem edocerer.

Non equidem me latet, D: D. *Cluveri* methodum Anno 1687, mense Octobri, pag. 586. in actis Lipsiensibus intimatam, nihilumque omne ex infinitorum analysi exterminantem, successivas has differentiationes forsitan tolerare; Virumq. hunc doctissimum eo nomine

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [36] - 30

mine omnes ante se mathematum cultores paralogismi reos agere; cujus erroris causam pag. 587. exhibiturus, duobus potissimum principiis negligenter nimium suppositis, quin &, si eruditiss: huic viro assentiamur, plane chimæricis, nec ulla ratione a quoquam demonstratis attribuit. Quorum primum est: *dari ultimum quendam in hujusmodi seriebus infinitis terminum*, secundum, *hunc ipsum ob continuo decrescentem parvitatem tandem degenerare in quoddam non-quantum, sive non-ens, aut nihil.* Cum juxta cl: Authorem nihilum frustra hic fingatur, &c.

Hanc tamen huic clar: Viro usitatam methodum, ab ea Cl: D: D: *Leibnitii Bernoulliique* non parum differre, quas ex ipso deductas publico exposuit, conclusiones veræ simillimam suspicionem præbent.

Cum autem Doctiss: Cluverus inaccessæ hactenus veritatis aditum reserantia (*quorumque ope tot fere inveniuntur errores in mathematicorum libris, quot propositiones* (sunt ipsissima Cl: Viri verba) *ad solidorum curvilineorum perquirendam dimensionem adduci solent*) principia sibi soli hactenus reservaverit, ac non exiguo rationum pondere contrarium evinci posse mihi videatur, (nec enim ideo principium aliquod chimæricum, aut theorema erroneum esse certum est, quod

viro

viro cuidam erudito tali nomine, omissa demonstratione, illud appellare placuerit) non sine ratione magnam apud harum rerum curiosos gratiam initurum Cl: Inventorem credibile est, si publico eorum examini, post stupenda hactenus, si non omnium, viginti saltem seculorum (pag. 586) inventa generosè rejecta, etiam sua exponere non recusaverit.

Quare missa in illud tempus D: D: *Cluveri* methodo, ad calculum differentialem revertor; (cum ingeniosissima à Cl. *Bernoullio*, Anno 1694. communicata theoremata, calculi modo dicti fundamentis superstructa, dissertatiunculæ huic occasionem potissimum dederint), cujus quidem methodo quadantenus intellecta, meam, qua in hoc problematum genere uti soleo, differentiationes successivas non tolerare, quinimo iis totam everti; adeoque & diversum a meo expeditissimumque curvas examinandi modum è manibus mihi quasi extorqueri (quantum enim principiorum varietas compendium multis in casibus subministret, noverint harum rerum periti) tacitè indolebam; quamvis ex eo, quo utor, principio, (quod mihi aliisque, quibus illud examinandum proposueram mathematicis, licet aliunde demonstrabile, liquidi axiomatis, adeoque & veri-

tatis

tatis suam secum demonstrationem ferentis loco haberi & posse & debere visum est) non exiguum decerpsisse fructum me arbitrarer, quod omnium Geometrarum mihi nota principia, ad curvilineorum mensuras adhibita, (qualia sunt Geometria indivisibilium, tangentes *Barovii*, curvarum spatiorumque in & evolutiones &c.) eodem hoc fonte derivare, difficultatesque adversus *Barovii Newtonique* methodos reverenter supra motas amoliri, clarissimorumque horum Virorum, mihi lecta theoremata, sine ullo remanenti scrupulo, qui ab infinitorum methodo raro alias in totum se divelli patitur, demonstrare non tantum, verum & (quod, primarium licet, hactenus tamen desiderari mihi visum est) terminos in infinitorum analysi nihilum designantes, ab infinite parvis & adhuc inter entia numerandis infallibili criterio discernere possem: quin & non exigua se panderet theorematum copia, quæ in infinitorum methodo a magni nominis Geometris passim usurpari, nec ex professo tamen unquam a quoquam demonstrata noveram; quale inter alia est, *in triangulo isosceli basin infinitè parvam habenti angulos ad eandem basin & æquales & rectos esse*, & similia; uti & *terminos omnes differentiales, ex indeterminatarum quotcunque in se mutuo ductu oriundos, infinities sumtos; æquari ab-*

ſoluto valori quantitatis, ex qua, mediante differentiali algorithmo, prodierunt: ſic omnia $yxdu+yudx+xudy$ infinities ſumta æquantur valori abſoluto yxu. & hæc quidem, ut & plura alia, in eorum, quæ tum temporis a viris eruditis edita videre contigerat, demonſtrationem & certitudinem, aliis negotiis diſtrictus reſervabam; donec poſtea in Adoleſcentis mihi affinitate juncti uſum analyſin infinitorum concinnaturus, quæ variis in locis diſperſa annotaveram, in elementorum quandam formam redigere decreviſſem; quapropter omnia de novo, quantum per negotia licebat, reſumens methodum, quæ antea ordinariâ infiniteſimarum trigâ, triangulum ABL (Fig. 4.) celeberrimo Leibnitio *characteriſtici* nomine vocatum in ſingulis curvis componenti, claudi ſolebat, ad plures per multasque alias quantitates, extra illud triangulum in curvis omnibus occurrentes, extendi poſſe comperiebam; unde opulenta rurſus theorematum (quantum mihi quidem conſtat) nondum editorum, fortaſſis & paucis cognitorum, ſeges enaſcebatur.

Hinc enim hactenus mihi viſis generaliora multò conſequebantur, circa tangentium, curvarumque, ac tetragoniſmi proprietates, & in ſpecie *curvarum curvaturæ flexuumque contrariorum exactum diagnoſticum*; donec tandem ante quatuor

ruor circiter annos utilissimo Actorum Lipsiensium opere mihi comparato, non magnos tantum viros huic studio vacare, deprehenderem, verum & Nob: D: G: Leibnitium calculi differentialis algorithmum a longo jam tempore tradidisse, qui cum eadem cum meo (quem ex alio, Leibnitianoque naturâ priori algorithmo deduxeram) quantitatum infinitè parvarum differentialiumque producta, quota, summas &c. exhiberet, in idem me cum tanto Viro principium incidisse non sine quodam gaudio conjiciebam; hoc quidem apparebat discriminis, quod cum vir celeberrimus, quantitates differentiales per formulas, *dx*, *dy*, &c. designaret, ego earum loco cum alius generis symbola, tum literas *e*, & *a* &c. ex *Barovii* methodo usurpabam, & etiamnum, utpote magis assuetus, in usu habeo; hac quidem primò de causâ, quod solius *differentiæ* juxta D: *Leibnitium*, ac *incrementi momentanei*, juxta D: *Newtonum* notio quantitatum omni datâ minorum, naturam non nisi respectivè ad quantitates *differentiabiles*, aut *crescentes* exhiberet, adeoque de interiori ipsarum essentiâ non satis constaret; tum & quod quædam dentur indeterminatæ, quarum differentiæ generali nomine, *dx*, *dy*, ritè non exprimi possunt, sed quæ pro vario respectu ad problemata, nunc uno nunc pluri-

bus terminis commodè magis efferri ipſa problematis natura docet, cum utrinque aliquando creſcant lineæ; aliquando altero ſui extremo creſcant, altero decreſcant; quod a paucis adhuc animadverſum videtur. Cum tandem perſpectâ ſecundarum tertiarum &c. differentiationum naturâ principiorum noſtorum diverſitatem apertiſſime vidi, tantam quidem, ut cum illis, prout jam in uſum trahuntur, calculus meus plane ſubſiſtere non poſſit. Neque levis pro differentiationum ultra primam ſe extendentium poſſibilitate dimicare videbatur apparentia; ſiquidem continuatis in curvarum progreſſu (Fig. 4.) triangulis characteriſticis ABL, BCN, &c; poſitisque ipſis AB, BC, &c, per totam curvæ longitudinem ſemper æqualibus, ipſas AL & BN, &c, tum & ipſas BL & CN &c, eandem non ſemper magnitudinem ſervare; adeoque inter ipſas differentiam quandam, ſi non perpetuo, aliquando ſaltem intercedere vero erat ſimillimum; (cui quidem fundamento calculus differentialis inniti magna ſui parte videtur.) Rem vero preſſius examinanti conſtitit, ea quidem de cauſa hanc huic methodo a meâ diſcrepantiam irrepſiſſe, quod quantitati infinitè parvæ, non niſi propriam finitæ quantitati affectionem implicitè adſcripſerit vir eruditiſſimus; ſiquidem ſuppoſitis

trian-

ttiangulorum characteristicorum lateribus infinite parvis seu omni assignabili quantitate minoribus,& numero finitis (quales D: *Bernoulli*, duo tantum triangula characteristiea considerando, videtur assumere) suppositâque unâ laterum semper æqualium serie, etiam reliqua, quæ restabant, triangulorum latera respectivè æqualia semper fore me calculus meus edocebat, insimulque casum, quo, positis *dx* æqualibus, ipsa *dy* aut *ds* quantitate inassignabili differunt, distinctè ostendens, hujus simul differentiæ proprietates aperiebat: quem quidem calculum differentialem urgentem scrupulum, meis demonstratum principiis, eruditissimo Authori proposuissem, nisi propriis deductam calculi differentialis fundamentis difficultatem efficacius argumentari arbitratus fuissem.

Accedit quod idem illud, quo utor, principium Mathematicos eo saltem, cujus Doctiss: Cluverus illos insimulat, errorum genere absolvat, frustraque nihilum non fingi, verum & (positâ licet quantitatis in pattes omni assignabili minores divisibilitate) non quantum aliquod seu non ens, in diminutionis progressu necessario reperiri solidè evincat.

Ne autem quis apparenti hac repugnantiâ moveatur, quod scrupulos non exiguos in

Geometria nasci in præcedentibus asseruerim, si quantitas infinitè parvâ (seu ea, ad quam determinata quælibet rationem habet omni assignabili majorem) nihilo æqualis supponatur; mox vero nihilum frustra non fingi, verum in quantitatum diminutionis progressu necessario reperiri, subjunxerim. Cum verum ac legitimum tum inventionum Analyticarum, tum syntheticarum demonstrationum principium, licet non entia ex quantorum diminutionis progressu (cum Doct: D. Cluvero, ac juxta continuatæ differentiationis leges) non exterminet; ipsa tamen non quanta inter quantitates infinite parvas, seu eas, quæ sua natura in infinitum minuuntur (cum non paucis hactenus Mathematicis) frustra quæri, sed ex proprietate quadam hisce quantitatibus peculiari necessariò emergere demonstret.

Adeoque (quod laborum hisce studiis insumptorum ampla satis merces est) invictum contra mundi æternitatem, & detestabilia infelicis atheismi dogmata argumentum suppeditet, Adorandique omnium quantorum Creatoris, in omnes seculorum perennitates celebrandam potentiam æternam ac divinitatem, adversus blasphemas damnosè sibi aliisque philosophantium allatrationes, ratiocinio à creatnris petito, sacrosanctæ revelationi conformiter

ter tueatur. Cum autem summa hujus materiæ dignitas peculiarem sibi potius tractationem deposcat, ad sequentia transeo.

Sæpe quidem me incessit curiositas, num mea etiam ad sublimiora, quæ nunc temporis Geometrarum ingenia exercent, pertingeret methodus; quare, cum viderem D: Leibnitium solutionem problematis mense Majo, Anno 1693, pag. 235, a Clar: *Bernoullio* propositum plurimi facere, & tanti quidem, ut, *qui methodi Leibnitianæ faciliora tenent, non statim illuc perventuros esse* expresse pronunciet, eodem Anno 1693. mense Julio pag. 313. placuit circa hoc methodum meam experiri: cui proposito num successus æque ac in aliis methodis feliciter responderit, ut judicent alii, ex methodo mea emergentem problematis solutionem hisce, in quantum hujus dissertatiunculæ brevitas permittit, adjungam.

Problema, quod, præter alios clarissimi nominis viros, etiam examine suo dignum judicavit magnus *Hugenius*, est quod sequitur. *Quæritur* (Fig. 6.) *curva AC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ductâ ubicunque tangente BC, terminatâ ab axe AD, portio ejus abscissa AB sit ad tangentem BC in ratione constanti, ut* p *ad* q.

Vocatis AB: *f*, BC: *s*, BD: *t*, DC: *y*, AD: *x*,

AD: x, erit $ps \infty qf$; tum $tt+yy \infty ff$; quæ quidem æquationes methodo meâ tractatæ mihi exiguo admodum labore, exhibent, curvæ AE, (cujus hæc est proprietas ut BE perpetuo adæquetur ipsi BD seu t) subtangentem

$$FB \infty n \infty \frac{qqfft}{qqft+pptt-qqff}$$

Quo cognito, assumtâque generali omnium curvarum per cöordinatas ipsamque curvam designabilium genera comprehendenti æquationis hypothesi, hujus subtangentem quæro; quam cum inventâ modo æqualem statuo, atque resultantis hinc æquationis, ad suppositam aliquando applicitæ, terminos, (observato quodam artificio, secus enim omnes quandoque in suppositâ æquatione termini se mutuo destruentes nihil reliqui facerent) eadem indeterminatarum dimensione gaudentes, nihilo æquales suppono; unde tum coefficientes; tum potestatum in suppositâ exponentes reperio; talis autem hinc curvilinei AEB sese ostendit æquatio:

$$q^3f^{\frac{2p+q}{q}} - qaf + pat + pqqf^{\frac{2p}{q}}t \infty o.$$

Quâ inventâ cætera quomodo inveniri debeant, satis est manifestum. Notetur autem ipsam a esse arbitrariam, modo sit determinata;

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [46] - 40

nata; quod quam generalem efficiat problematis solutionem, neminem latere potest. Quin & posita $q \propto 1$ & $a \propto p^{2p}$, oritur solutio, quam ingeniosissimus D: Jac: *Bernoulli* in actis Lipsiensibus Anno 1693. mense Junio publico communicavit.

Alio tamen principii genere solutionem suam virum hunc doctissimum deduxisse, exinde conjicio, primo quod Illustriss: *Hospitalius*, (quem eadem methodo uti multis quidem indiciis colligi posse videtur) suam, quam exhibuit, ejusdem problematis analysin ex principiis parum notis dependere Anno 1694. mens: Majo, pag. 196, disertè significet; deinde quod merito suo in hæc studia celeberrimus D: *Ioh: Bernoulli* methodum à mea multum diversam in usu habere tum in Analysi, tum circa tangentes inversas constet, quorum primum ex præcedentibus, secundum ex eo patet, quod problematis Cartesio propositi constructio a Viro hoc Clarissimo mediante logarithmica Anno 1693. pag. 234. exhibita secundum ea principia, quibus omnes, ni fallor, mathematici sine scrupulo utuntur, examinata in absurdum aliquod incidere videatur. Quod cum præstantissimi Authoris venia hic subjungo; problema hoc est, *invenire* (Fig. 7.) *curvam AI, cujus*

applicata KI sit ad subtangentem KM, ut linea data r ad portionem applicatæ IL, interceptam inter curvam AI & rectam AL angulum semirectum faciente cum axe AK. Quam sequenti modo solvit vir Clar: ad asymtoton AB perpendicularem ad AK, construatur logarithmica vulgaris DC, cujus subtangens AF sit æqualis datæ lineæ, r; à puncto quolibet logarithmicæ C ducatur CI parallela axi AK, & CG ad eundem perpendicularis secans tangentem logarithmicæ DF in puncto H; sumtâque BI æquali ipsi CH; punctum J erit ad curvam quæsitam AJ.

Vocentur jam (ductis lineis ut apparent in schemate) KI: y, KM: t, CB: z, AD: k, AK: x, JL: $y-x$, erunt ex D: Authoris constructione, AF ∞ QB ∞ r, & CH ∞ BJ ∞ AK ∞ x, unde & HG ∞ $y-x$ & DG ∞ $k-z$, tum sit, PO ∞ NB ∞ RS ∞ dy, JO ∞ dx, CS ∞ dz,

Est igitur ex problematis conditione $y : t :: r : y-x :: dy : dx$, unde $xdy \infty ydy - rdx$, adeoque sumtis integralibus, *omnia* $xdy \infty \frac{1}{2} yy - rx \infty$ trilineo BJA, quod cum Cl: Authoris qnadratura convenit; (signetur A.)

Sed ex Constructione problematis; DA: AF :: DG : GH seu $k : r :: k-z : y-x$.

Unde $ky - kx \infty kr - rz$, & ductis omnibus

omnibus in dy, fiet, $ydy - rdy + \frac{rzdy}{k} \infty xdy$; ac tandem ex naturâ logarithmicæ facto $zdy \infty rdz$ sumtisque integralibus erit $\frac{1}{2}yy - ry + \frac{rrz}{k} \infty$ *Omn:* $xdy \infty \frac{1}{2}yy - rx$, (juxta æquationem littera A notatam:) quare fiet $ky - kx \infty rz$; sed modo reperta fuit eadem $ky - kx \infty kr - rz$, quare $rz \infty kr - rz$ & $\frac{1}{2}k \infty z$; unde cum k hac in constructione sit determinata, etiam z seu CB determinata erit, adeoque ad rectam ipsi AB parallelam, non autem ad logarithmicam. Quod conveniens D: Authoris intento non videtur.

Si vero æquatio logarithmicæ non per $zdy \infty rdz$, sed per hanc $-zdy \infty rdz$ (qualem D: Marchio Hospîtalius, Anno 1693, mense Junio pag. 254 assumit) explicetur, aliud absurdum emerget.

Ex quibus tandem methodum quidem meam a *Bernoulliană* differre, verum etiam ad ea, quæ methodi Leibnitianæ faciliora tenentibus, vel ipsius D: Inventoris judicio, inaccessa erant, directè me manuducere perspexi, insimulque non sine ratione sperare me posse conjiciebam, modum, quo hactenus in infinitesimali calculo usus sum, iteratis

diffe-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [49] - 43

differentiationibus non minus facilem, eadem omnino cum illis præstiturum. Cum paucis adhuc excultum immensæ magnitudinis speculationum campum mihi panderet, & plurimis mathematicorum inventis exactè quadrans principii sui obscuritate non laboraret; quod inter maxime in hoc studiorum genere desideranda merito reponi mihi videtur.

Quanti enim interfit, ut calculi analytici quomodolibet inventa compendia, novæque in Geometriam introductæ methodi resolvi in sua principia ac ad veritates primas referri possint, vel hinc satis patere opinor; quod plurima dentur curvarum genera, quarum æquationes juxta calculi differentialis a D. *Leibnitio* Anno 1684. mense Octobri in actis Lips: traditi algorithmum tractari recusantes, ex *Barovianâ* tamen methodo (quæ *Leibnitianâ*, in ordine demonstrationis, prior mihi semper apparuit, cum hæc illius in casibus, quonim capax est, elegantissimum & utile sit compendium) quantitates suas differentiales produnt. Tales, ut huic asserto fidem faciam, sunt omnes curvæ, in quibus interceptæ applicatæve, seu x & y inter potestatum exponentes reperiuntur, quarumque æquationes, dignitatum indices indeterminatos habentes, positis, r, f, g, constantibus ac determinatis

per

per has vel similes formulas designantur:
$g^{x} \propto r^{x-f\,f}\,y$ ant $y^{x} \propto r^{x-f\,f}\,g$.
quarum ptior est *Logarithmicæ* vulgaris, posterior alterius curvæ, quæ haut difficulter constructur. Quas curvas, ut & hujus generis alias altiorumque graduum, Geometrarum consideratione dignissimas esse comperiet, cui proprietates earum indagasse volupe fuerit.

Jam vero ad harum æquationum terminos differentiales inveniendos calculum *Leibnitianum* loco citato traditum sese non extendere exinde colligitur, quod terminorum quorundam dictas æquationes constituentium differentiationem plane non attingat; cum, quæ circa potestates inibi præceperit Nob: D: Author, ad ejus generis dignitates, quarum exponentes sunt indeterminati, neutiquam applicari posse videantur. Siquidem cum, juxta hujus algorithmi regulas, cujuslibet quantitatis indeterminatæ ac pröinde differentiabilis, verb: gr: y ad potestatem determinatam f evectæ, differentiale $fy^{f-1}\,dy$ obtineatur, expositum terminum y^{f} per potestatis suæ exponentem f multiplicando, ac unicæ ipsius y dimensioni per divisionem demtæ

demtæ differentiam dy ſubſtituendo: eo ipſo manifeſtum eſt, ſi y ſit quantitas conſtans ac determinata $\propto g$, exponens f vero ſit indeterminata $\propto x$, ac idcirco terminus expoſitus $\propto g^{x}$, hujus differentialem, (ſi canonum à Cel: *Leibnitio* traditorum tenor ſit obſervandus) fore $x g^{x-1} dg$: quod tamen legitimum ipſius g^{x} differentiale non eſſe hinc conſtat; primò quoniam indeterminata x differentiationis capax hac ratione non differentiatur; ſecundò quod dg ſeu ipſarum g differentia, ob conſtantem ex hypotheſi earum magnitudinem, nulla ſit, adeoque dg æquale nihilo; unde totus hac methodo inventus terminus differentialis, quippe in nihilum ductus, evaneſceret. Quamobrem laudatum ſæpius D: Leibnitii calculum differentialem, licet aliis quamplurimis ſufficientem, hujus tamen generis Curvis, quantitatumque modo propoſitarum differentiationi non inſervire, ſatis demonſtratum autumo.

Haſce tamen differentiationes juxta *Barovium*, ponendo loco x ipſum $x+e$ ac loco y ipſum $y+a$, non admodum difficulter fieri utriuſque methodi naturam intelligenti obſcurum eſſe non poteſt. Licet ex inven-

tis

tis hiſce differentialibus porro deducendis ſubtangentium valoribus ipſæ rurſum *Barrovii* regulæ non ſufficiant: unde, antequam hoc obtineatur, denuo ad principium methodo *Barrowianâ* prius & generalius aſcendendum erit. Quod quidem primum differentiationum principium non ex *differentiæ* ſed ex ipſâ *indeterminabilitatis* naturâ commodè magis, ſi non & magis tutò, petendum eſſe hactenus exiſtimavi; cum quantitatum omni aſſignabili minorum, ſeu infinite parvarum adeoque & vi humani ingenii *indeterminabilium* proprietatibus detegendis unicè inſervire debeat; ac *differentia*, quâ talis, determinabiles æquè ac indeterminabiles quantitates ſine diſcrimine reſpiciat.

Sed propoſitam mihi metam tranſilio, ac pluribus hiſce addendis ſuperſedeo, eam potiſſimum ob cauſam, quod, quæ ſupra memoravi, Analyſeos infinitorum elementa maximam partem jam impreſſa ſint; quorum editionem, quæ jam ante annum fortaſſis (niſi quæ me aliis implicitum tenent negotia, & typothetarum moræ obſtitiſſent) adornata fuiſſet, eximios hujus ævi mathematicos, ad difficultates ipſis modo propoſitas amoliendas, & ſua, quæ etiamnum ſe premere ſæpius ſignificant, publico indulgenda

genda inſtigaturam ſpero Fruſtra enim, (cum in tot ſententias, eaſque fere ſe mutuo deſtruentes, non ſine ipſius matheſeos, quæ hactenus veritatum naturalium legitima genitrix audiit, extremo opprobrio, paſſim abeatur) reconditioris Geometriæ certitudinem, ut incrementum taceam, expectamus, niſi apud omnes ingenuus inventorum ſuorum demonſtrationes evulgandi invaluerit candor, & de Matheſeos potius ſimul, quam ſolius famæ augmento, bene merendi ſtudium.

ERRATA.

Pag. 6. Lin. 23. YR, *Lege* ZR. *Lin.* 24. ZQ, *Lege* EQ. *P.* 10. *L.* 18. *Leg.* tanto Viro. *P.* 12. *L.* 11. *ſit leg.* fit. *L.* 12. lege *quantita*. *P.* 20. *L.* 3. *leg.* per § 1 hujus.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 150, [54] - 48

Fig. 2.

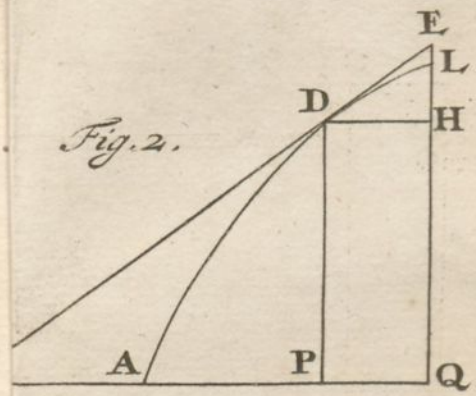


Fig. 3.

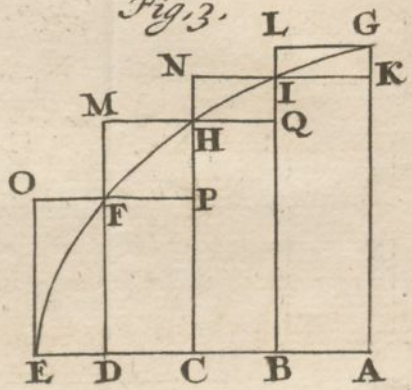
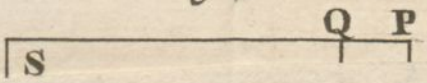
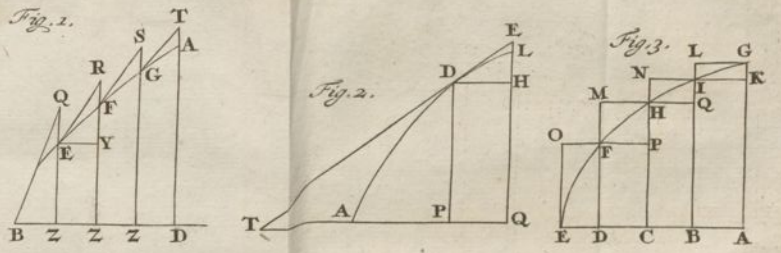


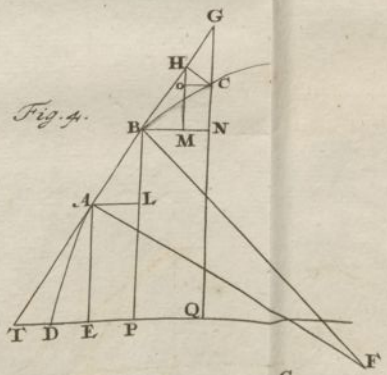
Fig. 5.

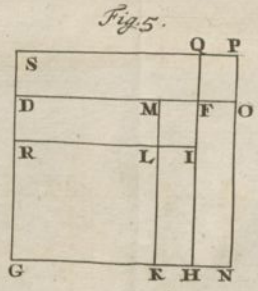


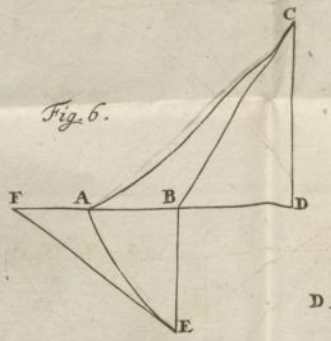
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

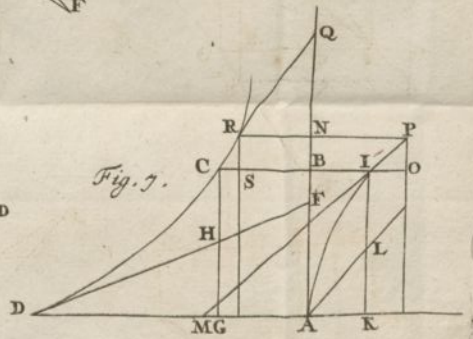
Signatur: Leibn. Marg. 150, [55] - -





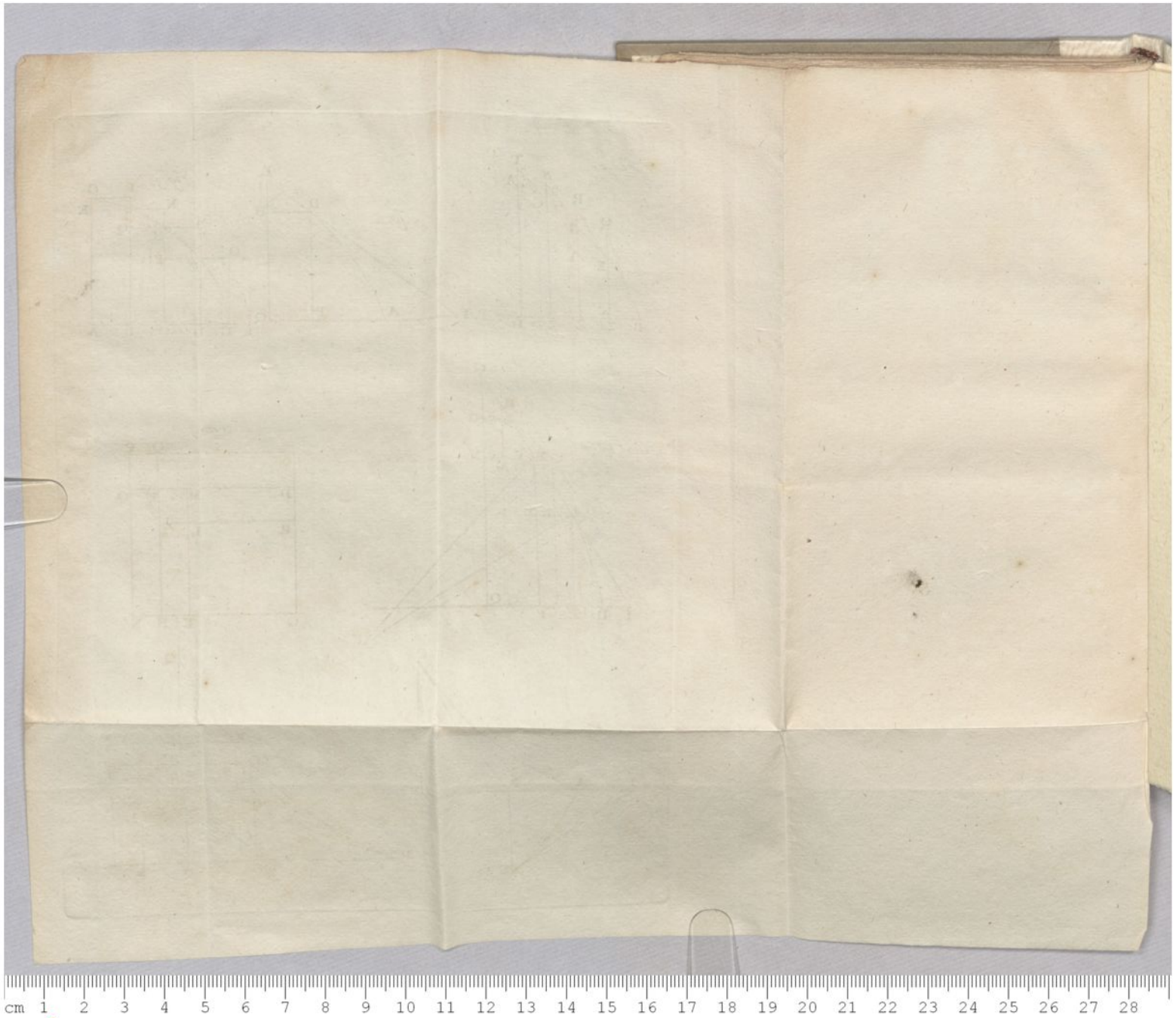






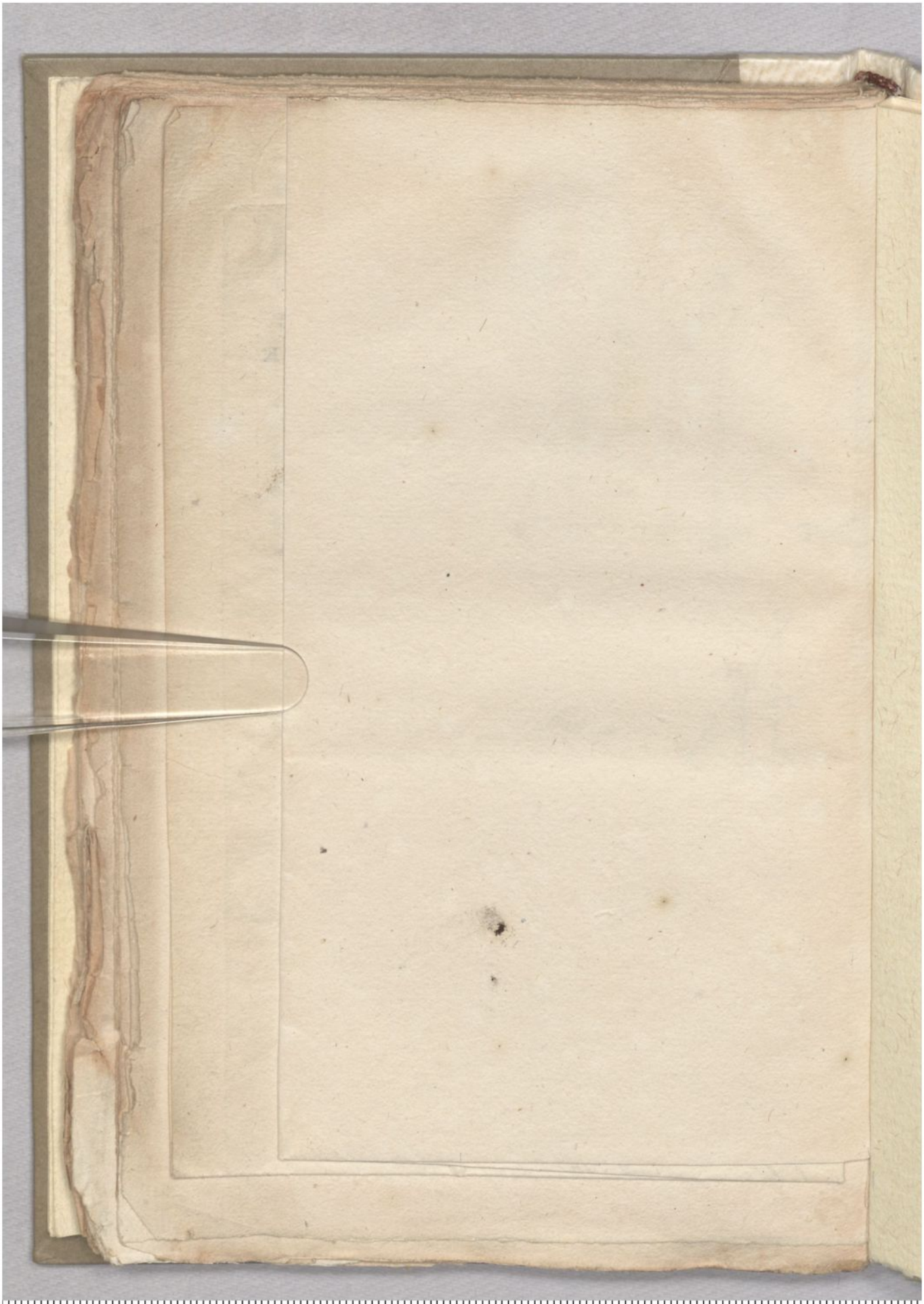
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [56] - -



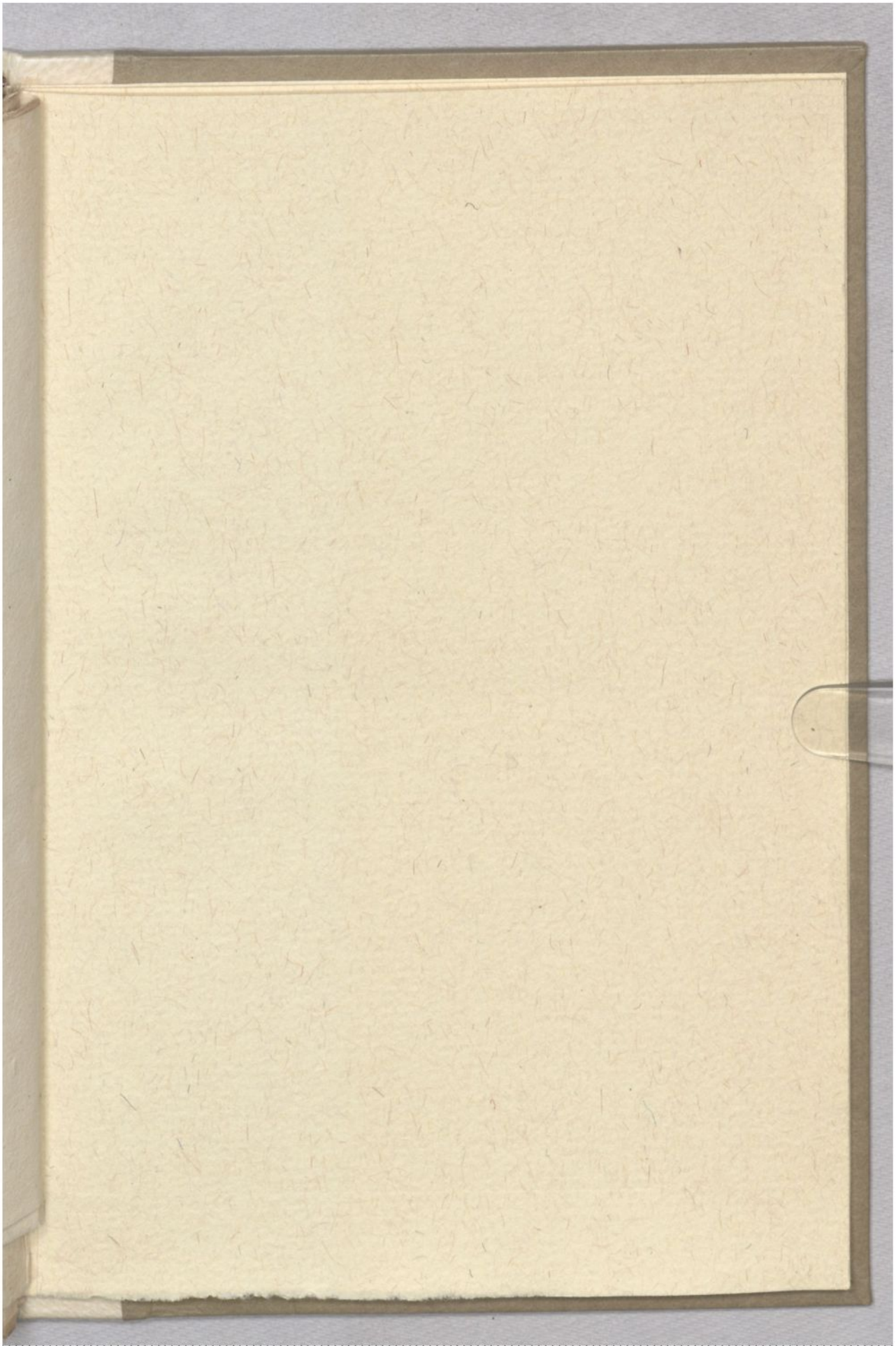
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [57] - -



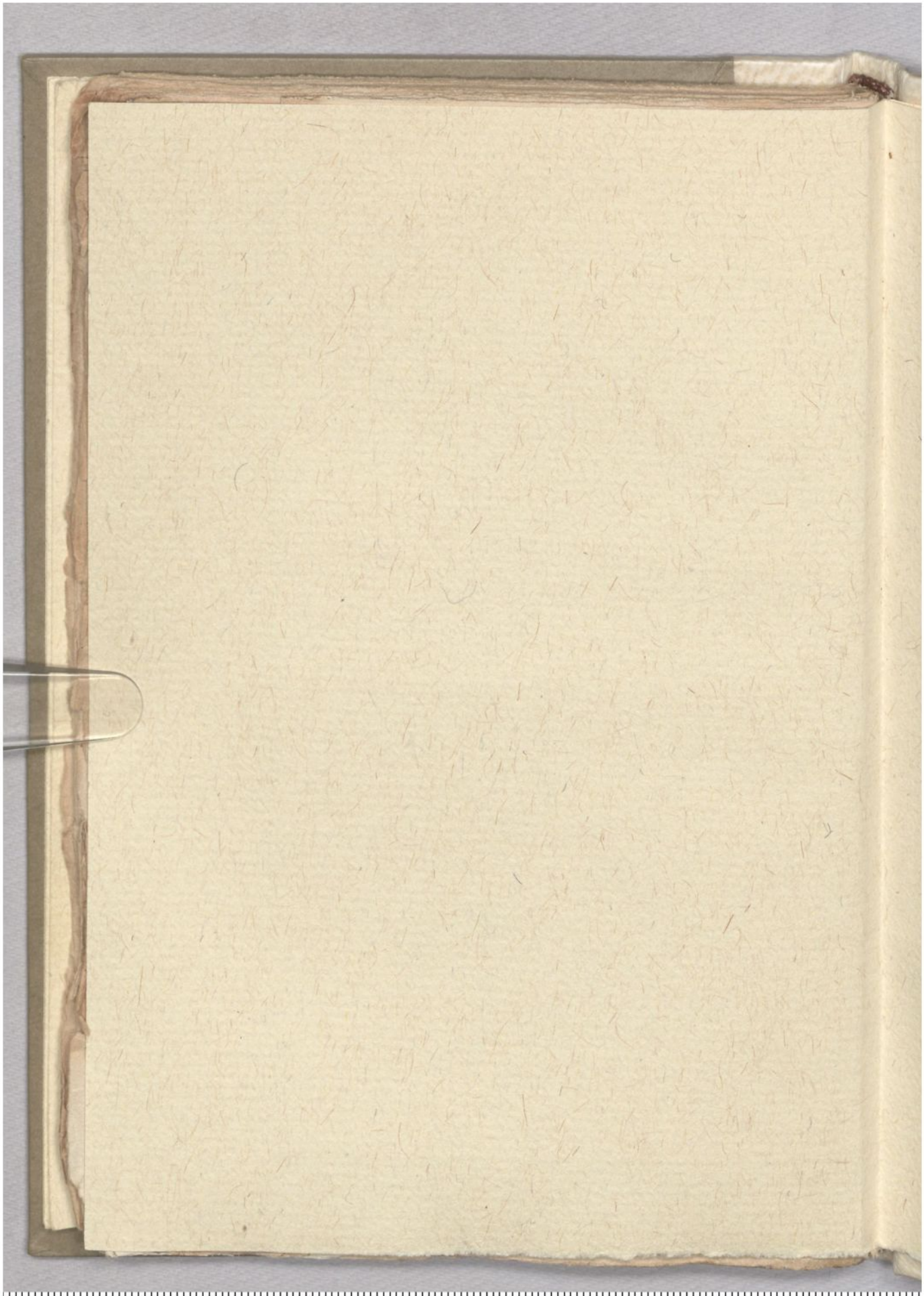
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [58] - -



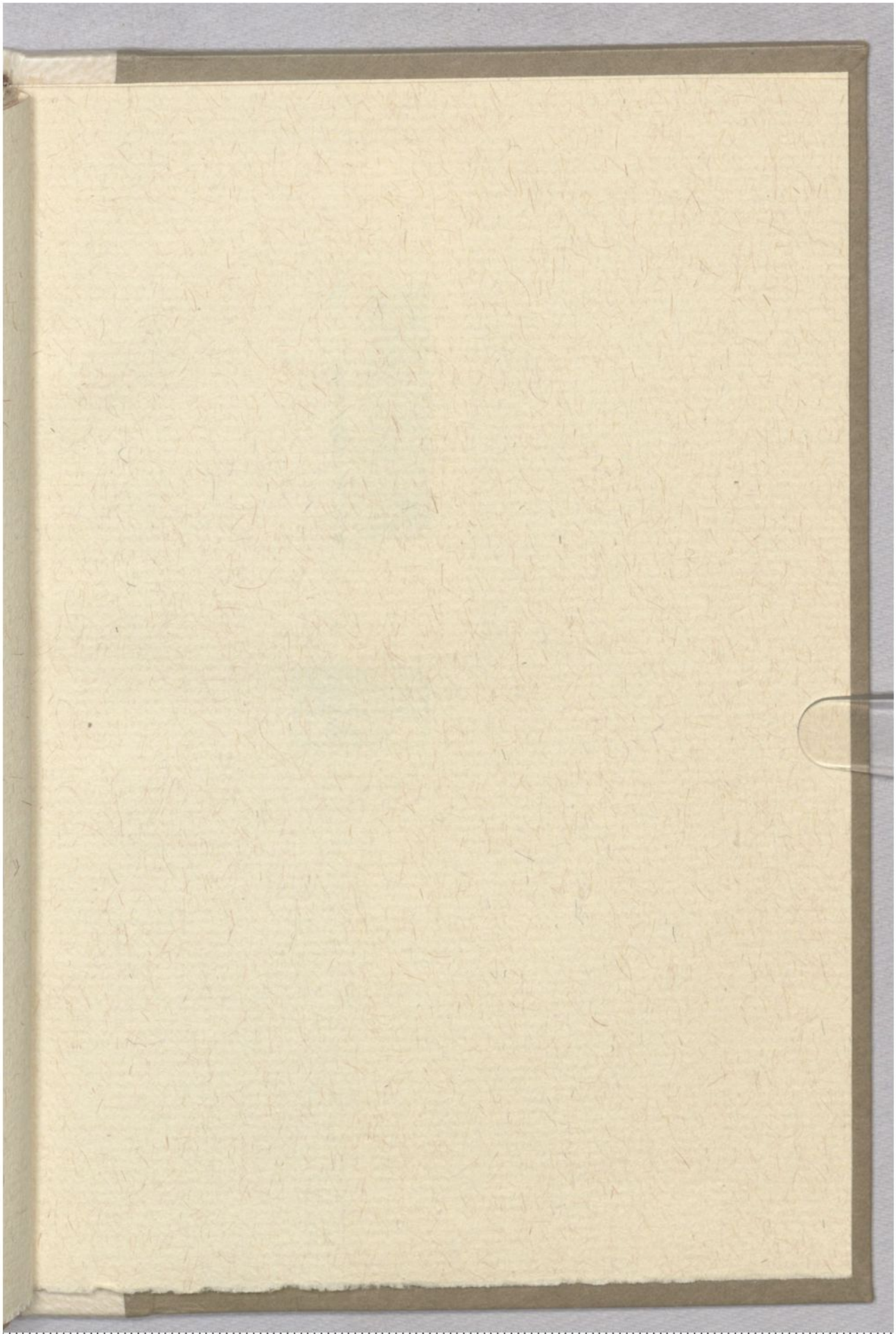
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [59] - -



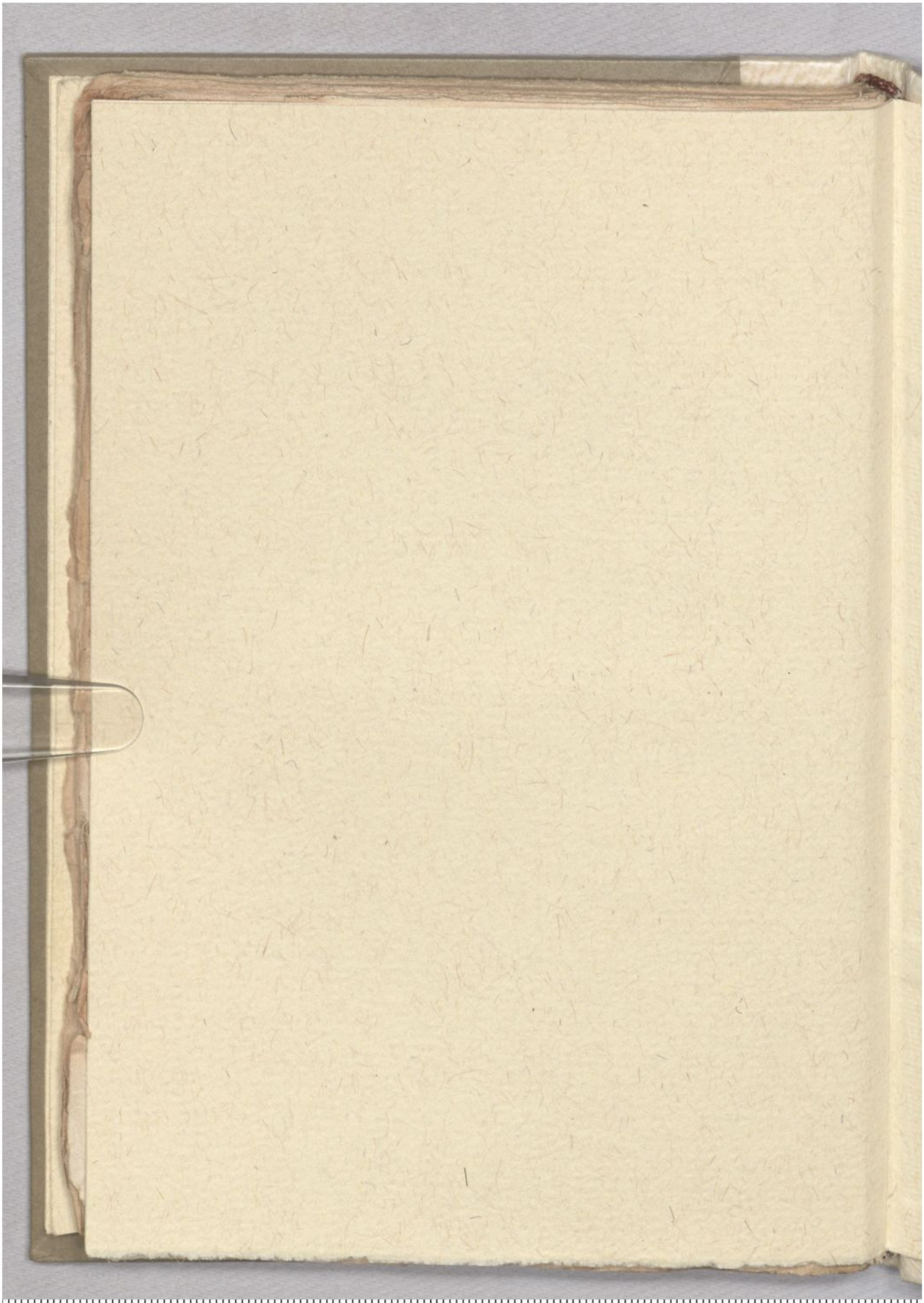
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [60] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [61] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

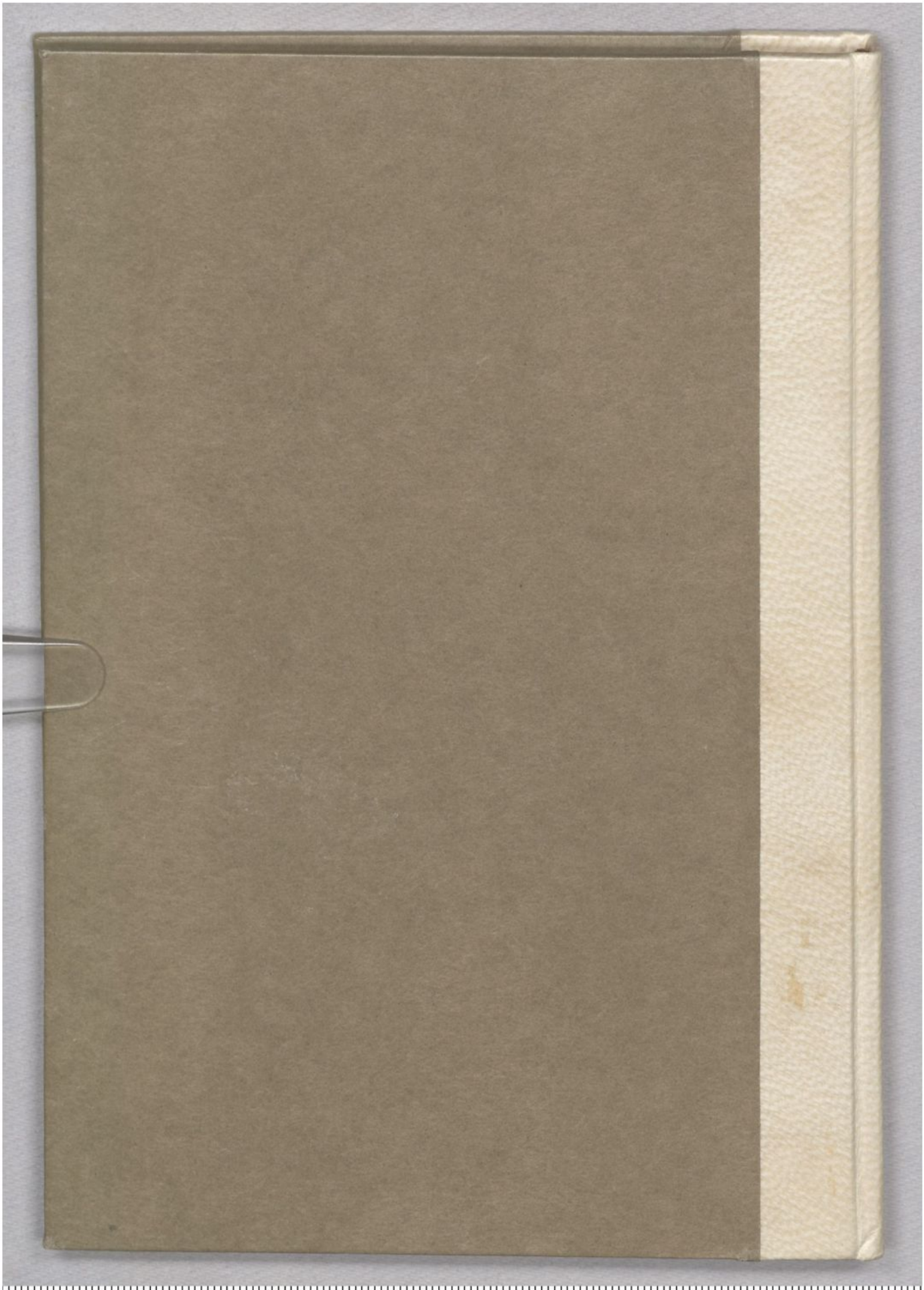
Signatur: Leibn. Marg. 150, [62] - -

GWLB Hannover 35
036 828 823

Niedersächsische Landesbibliothek Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

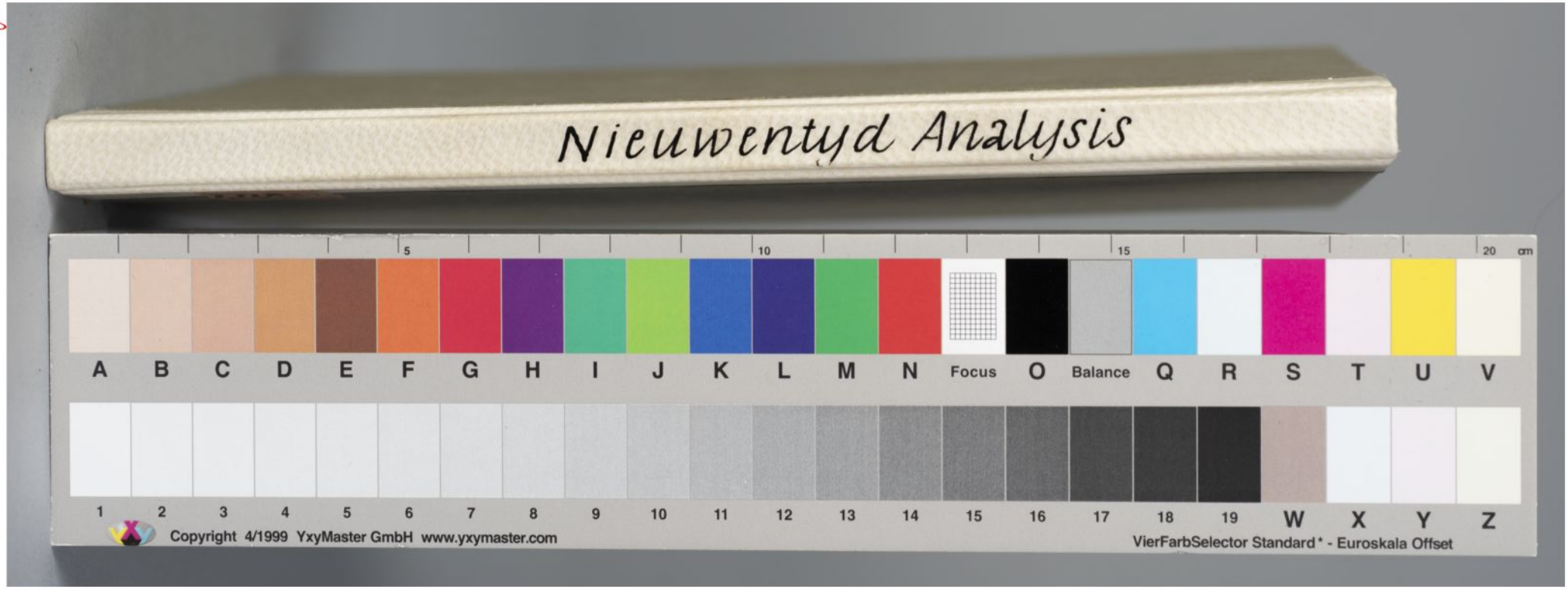
Signatur: Leibn. Marg. 150, [63] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 150, [64] - -

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK



Signatur: Leibn. Marg. 150, [65] - -