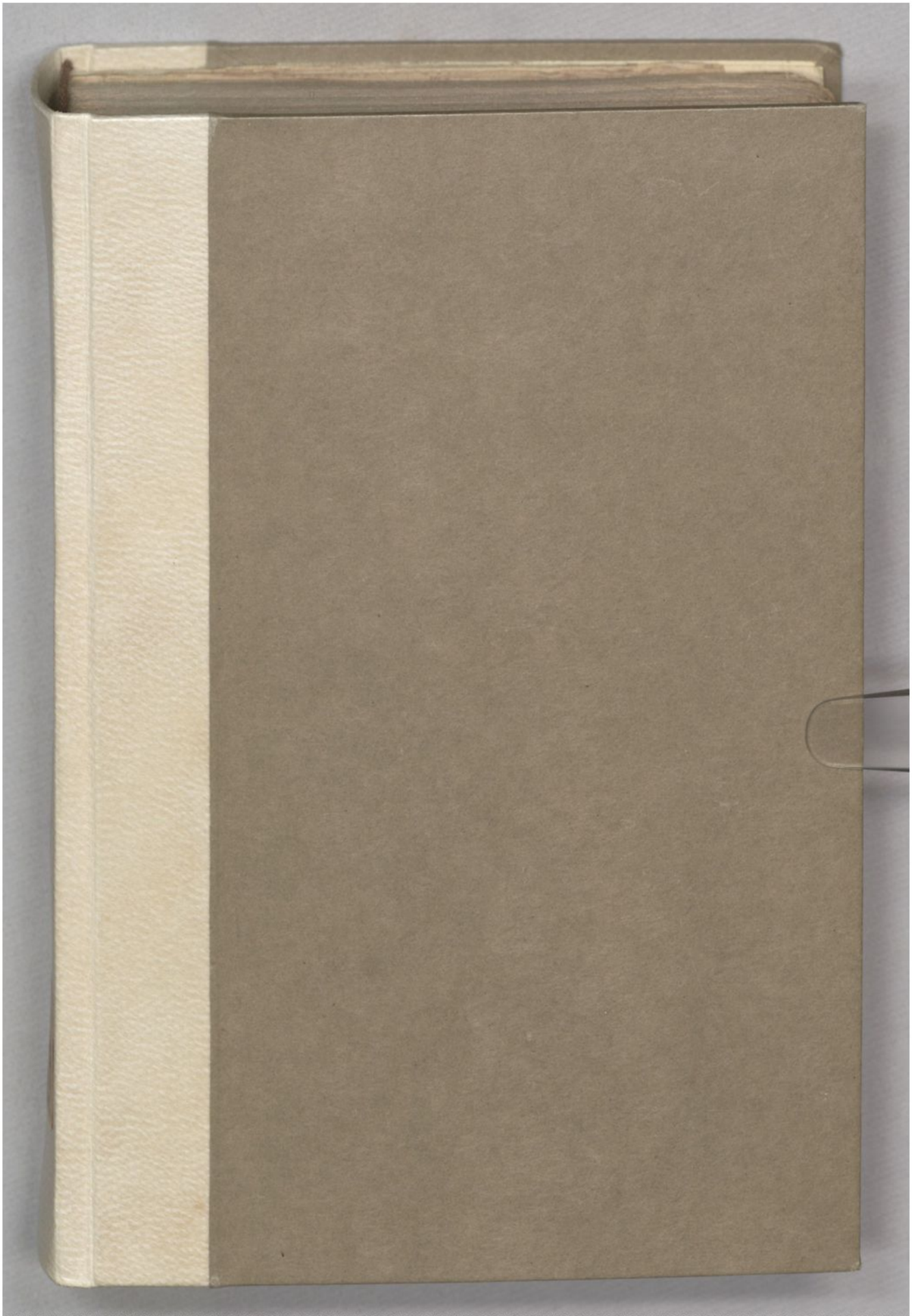


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [1] - -

Leibn. Marg. 149

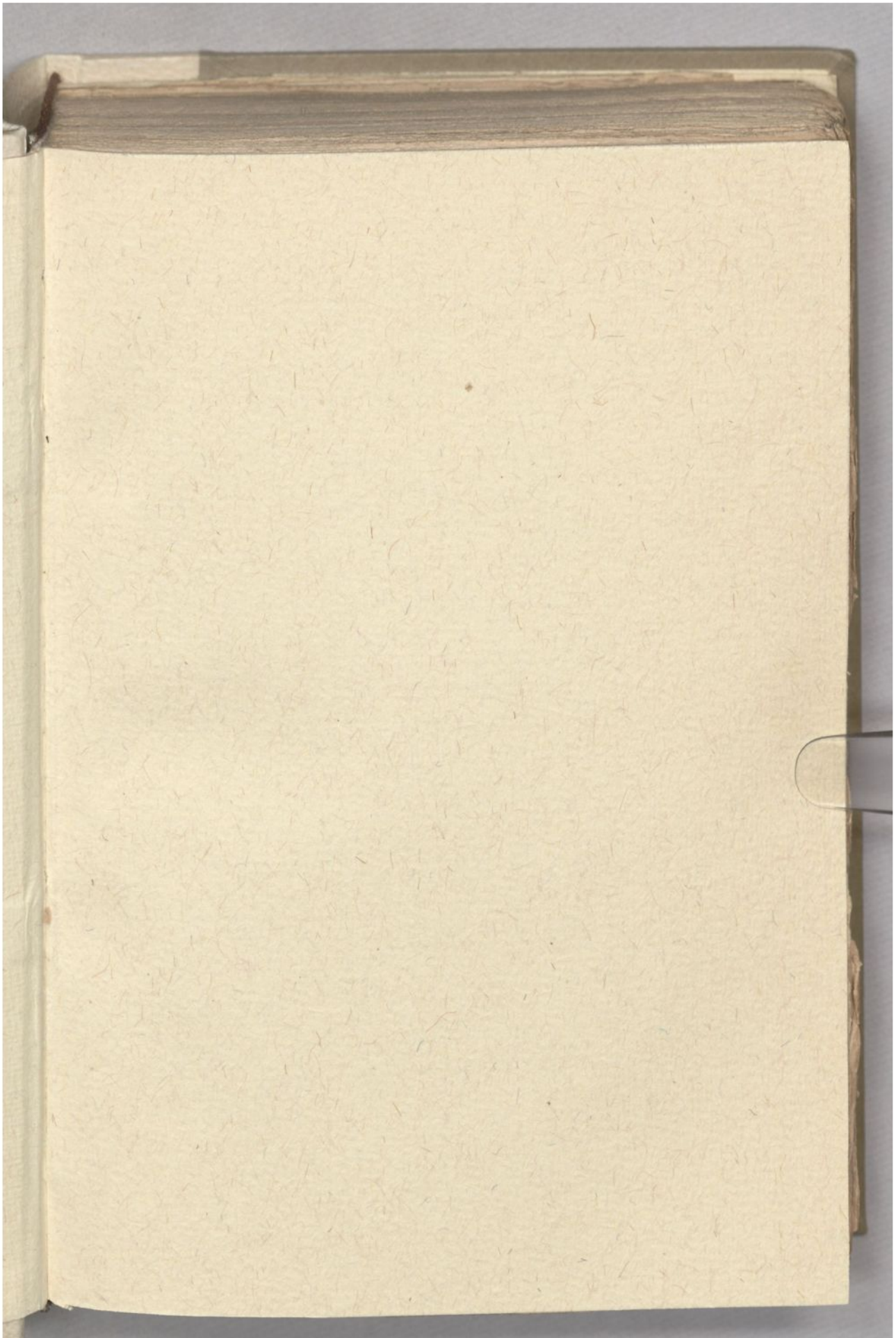
Barie L-Marginale entdeckt JS

wichtig ist die Widmung von Makrecl Kr.

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

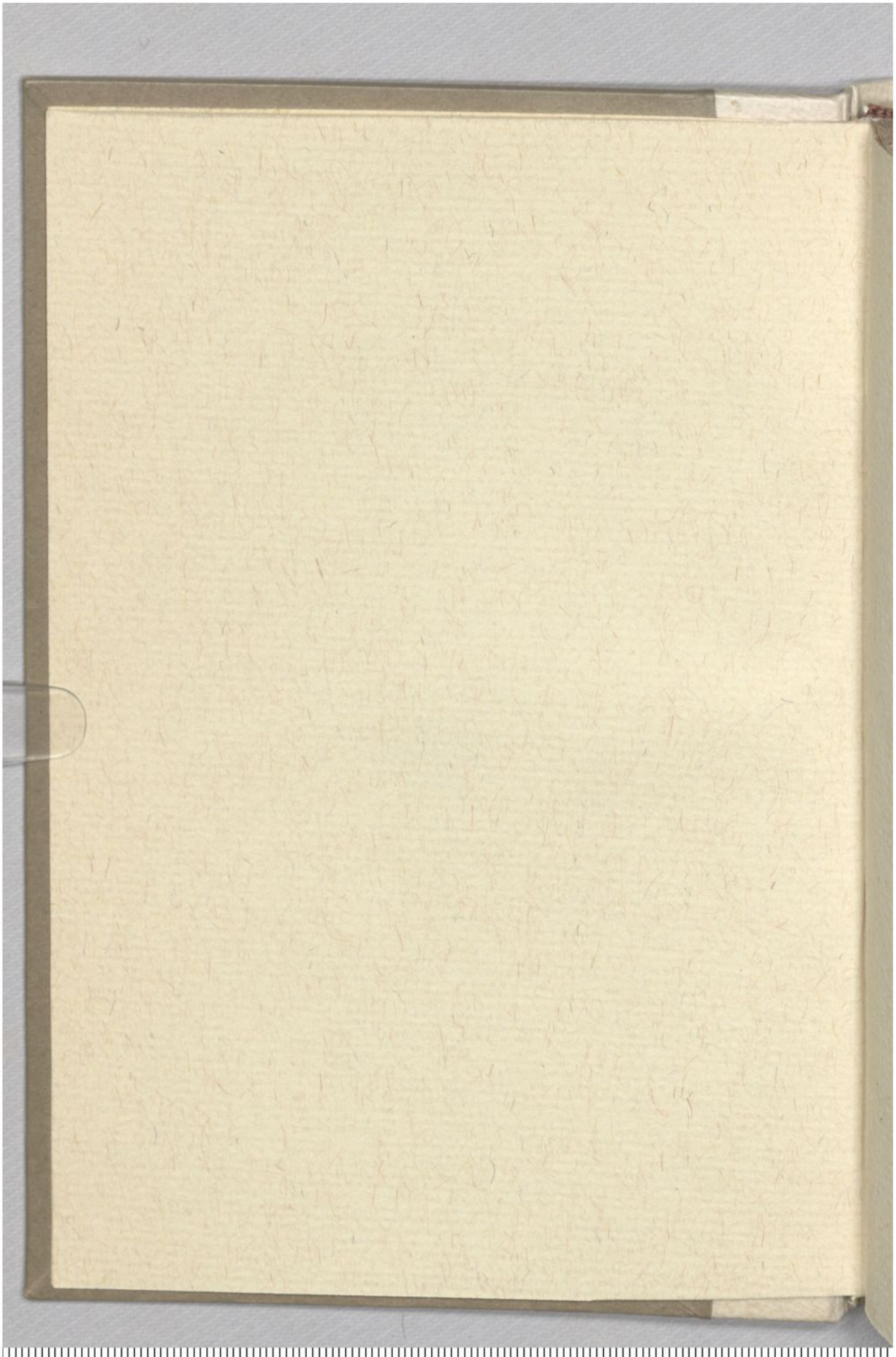
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [2] - -



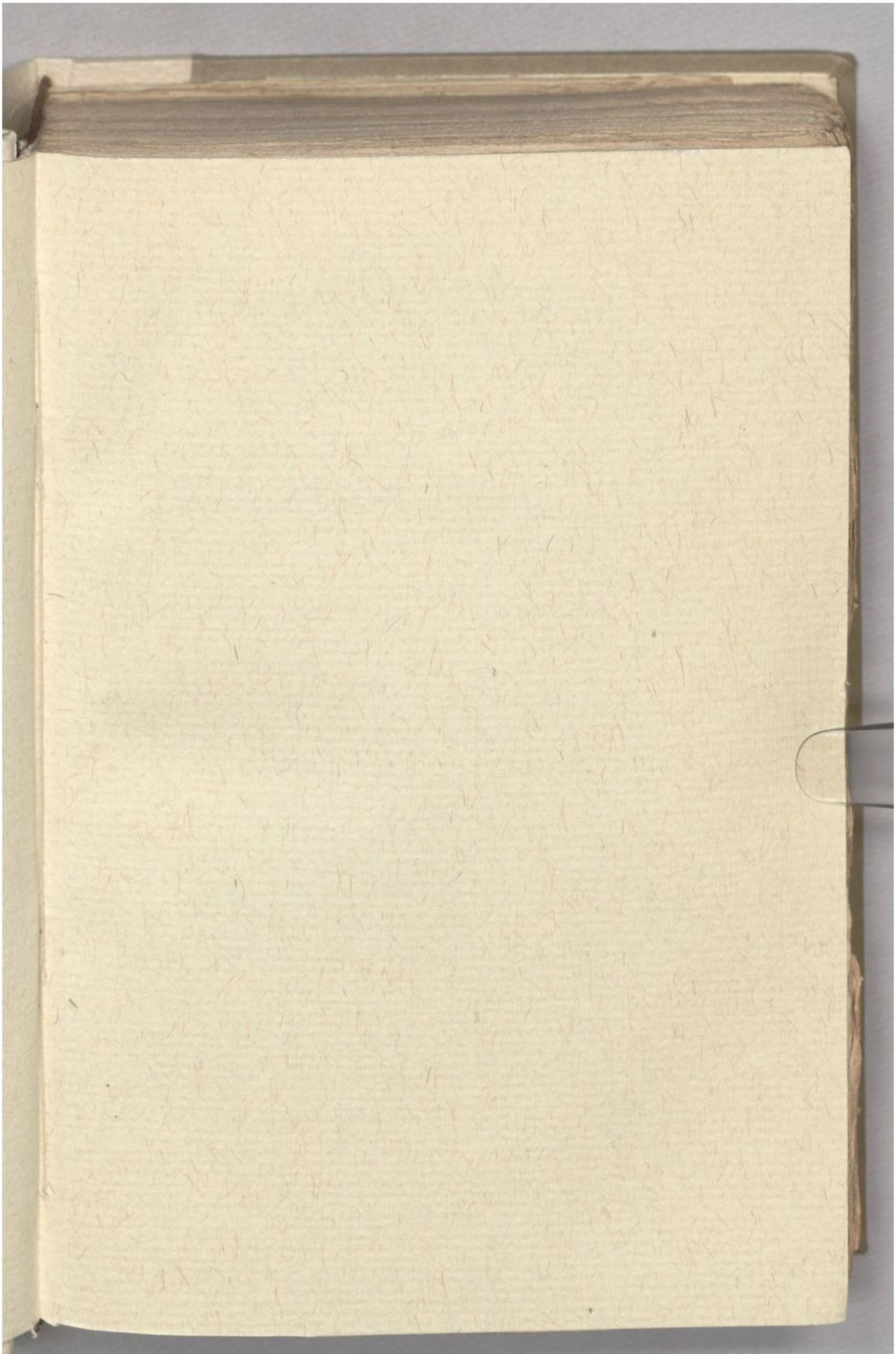
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [3] - -



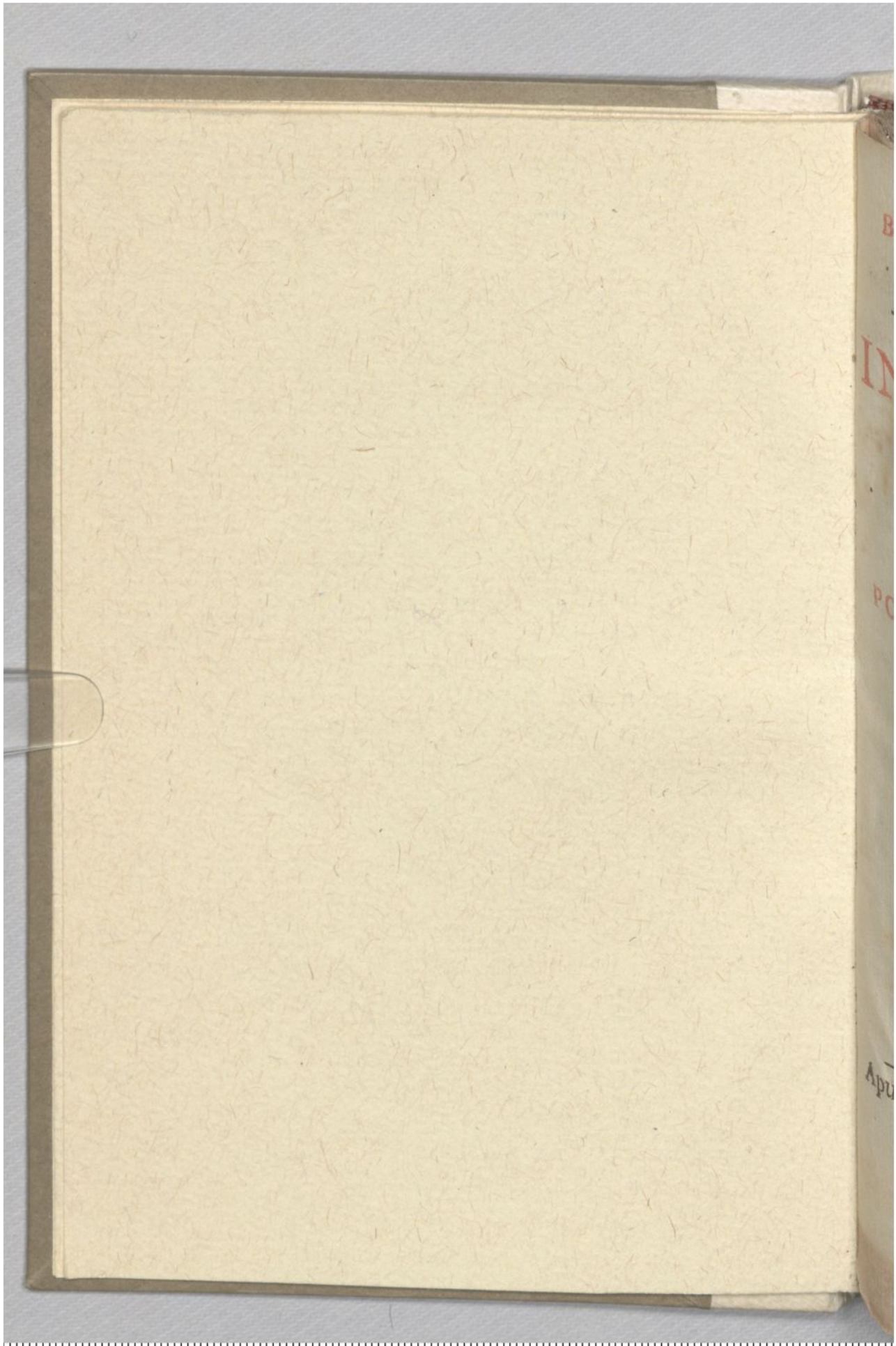
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [4] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [5] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [6] - -

BERNHARDI NIEUWENTIIT

ANALYSIS INFINITORUM,

Seu

Curvilineorum Proprietates

EX

POLYGONORUM NATURA

DEDUCTÆ.



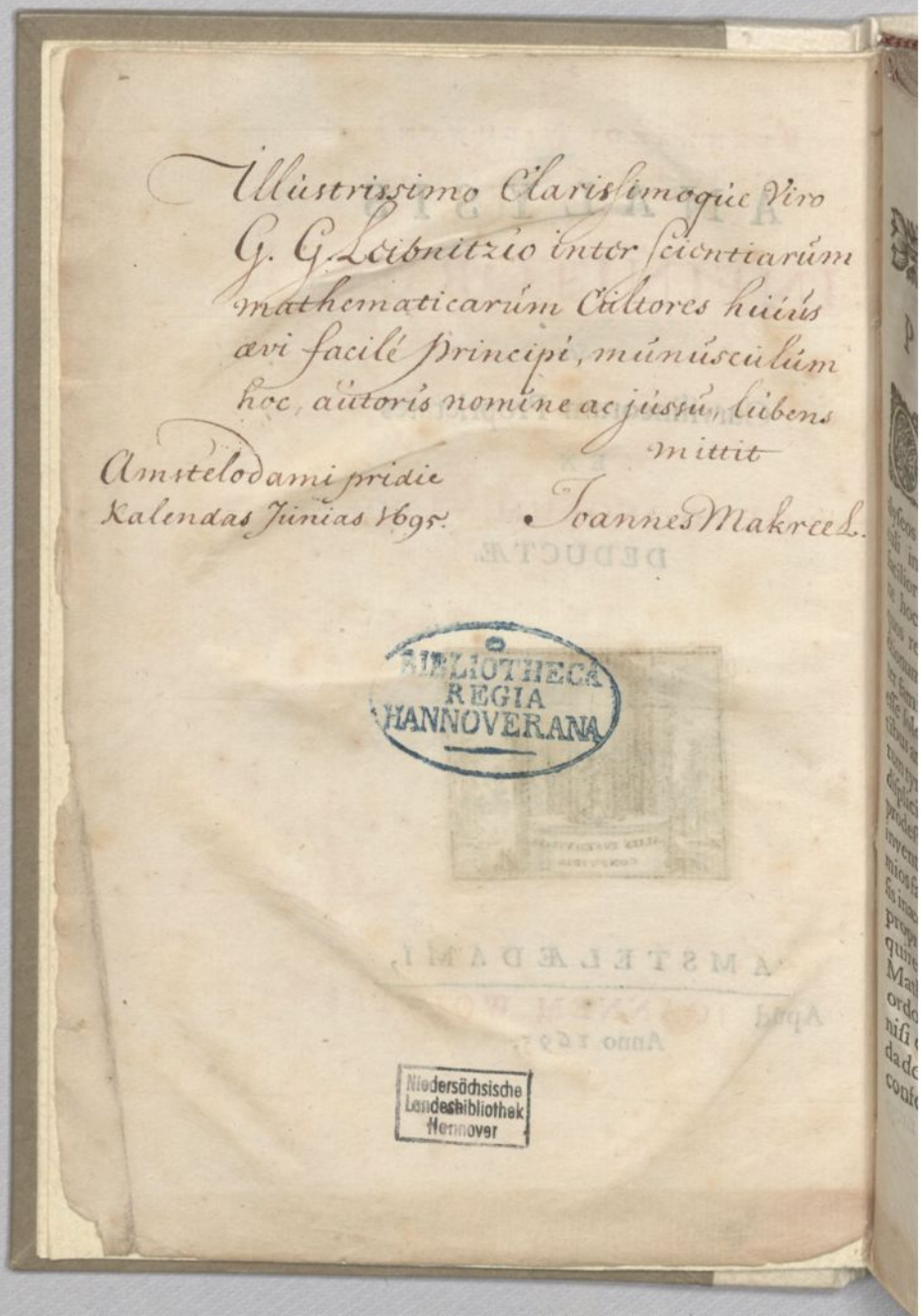
AMSTELÆDAMI,

Apud JOANNEM WOLTERS,

Anno 1695.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [7] - -



Illustrissimo Clarissimoque Viro
G. G. Leibnitzio inter scientiarum
mathematicarum Cultores huius
ævi facilé Principi, munúsculum
hoc, Autoris nomine ac jussu, libens
mittit
Amstelodami pridie
Kalendas Junias 1695. Joannes Makreel.

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

PRÆFATIO.

QUod expoſitum tibi cernis opuſculum, B: L. domeſtico tantum uſui, privignique mei ſtudiis Mathematicis unicè deſtinatum fuerat, ut poſt elucubrata Analyſeos ordinariæ præcepta ad nova hujus ſeculi inventa & recentiorum Geometrarum ipſi facilior pateret aditus. Quo ſolo forſan nomine hoc, quicquid eſt opellæ, veniam apud æquos rerum æſtimatores merebitur, ſi omni dictionum pompâ viduum, ſtyloque, qualis inter familiares ornatus cujuſcunque expers in uſu eſſe ſolet, negligenter exaratum, compellentibus amicis, in publicum prodeat. Tyroni ſcriptum tyronibus, etſi nonnulla nec provectioribus diſplicitura hic contineri ſperem, hoc ipſo forſitan prodeſſe poterit (magnos enim hic Viros, quorum inventis me plurimum debere gratus agnoſco, eximios facio) quod, quæ fundamentis multum diverſis inædificarunt Geometræ, ex unico tantum ac proprio curvarum principio deducere ſatagat; requirere enim tale quid videbatur, quem diſciplinæ Mathematicæ depoſcunt, naturalis Præceptorum ordo, ac Theorematum etiam ſublimiorum non niſi ex genuinis ſimplicioribuſque principiis eruenda deductio. Quod, quantum incipientium ſtudiis conferat, ignorare non poterunt, qui curvarum

proprietates ex recepto multorum more explorantes centri gravitatis, truncorum, ungularumque, curvarum curvilineorumque in & evolutionem, ac multijugæ præterea principiorum varietatis tædia devorare neceſſe habuerunt; Sola curvilineorum, tanquam polygona, conſideratio fœcundo ſinu non ea tantum curvarum Symptomata, quæ ab aliis principiis expectari poterant, verum & ipſorum principiorum fontem & originem complexa, quæ hactenus circa curvarum naturam à celeberrimis Mathematicis inventa omnes meritò in ſtuporem rapuerant, admirabili quadam ſerie digeſta orbi litterato expoſuit, inſigniorumque hujus ſeculi Virorum labores ac ſcrutinia demeruit. Hoc tamen ſupereſſe videbatur difficultatis, methodum à principibus hactenus Mathematicis in curvilineorum menſuris adhibitam, concluſionum potius emergentium multitudine, ac cum demonſtrabilibus aliunde veritatibus convenientia, quam principiorum evidentiâ nixam certitudinem ſuam apagogicis magis demonſtrationibus, quam inventionis rationi debere; cujus aſſerti demonſtrationem hic adjicere ſupervacaneum eſt, cum, quæ huc ſpectant, ex *Conſiderationibus* noſtris antehac editis abundè peti poſſint.

Placuit quidem celeberrimo *Walliſio*, non paucis in locis *Arithm. Infin.* de quantitatibus infinitè parvis, non tamen niſi hæſitanter admodum & ſollicitè agere; diſerte que *Schol. Prop.* CLXXXII affirmare, quamvis partem infinitè parvam (ſemel acceptam) nihilo æquivalere; quæ quidem aſſertio eaſdem, quas adverſus *Baroviana* methodi demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [10] - -

monſtrationem in *Conſiderationibus* modo citatis reverenter movimus, difficultates evitare poſſe non videtur.

Tum vel maximè viſum eſt *Cel. Leibnitio*, anno 1689. menſe Febr. in *actis Lipſienſibus*, quædam ex ſuâ *Analyſi infinitorum* depromta diſcurſui de motuum cœleſtium cauſis lemmatum in modum præmittere; (in quem tamen locum non niſi poſt editas *Conſiderationes* incidi) utinam vero placuiſſet Eruditiſſimo D. Authori in re tanti momenti paulo apertius agere, ac quantitatum incomparabilium differentiam nihilo æquipollere demonſtratum dare; cum alioquin fruſtra rejiciantur ex æquationum contextu ea, quæ realis adhuc quantitatis eſſentia gaudent; neque etiam quantitas determinata incomparabili juncta (ſi hæc adhuc quantitas ſit) æqualis ſupponi poteſt eidem quantitati determinatæ, demtâ eâdem incomparabili quantitate: cum ea verè æqualia ſint, quæ differentiam habent nullam, non autem quæ differentiam incomparabilem, (modo quantitatibus adhuc annumeranda maneat.) Num vero quantitatum cum aliis incomparabilium differentiam nihilo ſtrictè æqualem eſſe voluerit Vir Nobil. me dubium reddunt, quæ §. 5. inſinuat D. Author, quo in loco libertatem concedit, *ſi quis adhibere nolit infinitè parvas, quantitates tam exiguas ſumendi, quam ſufficere, judicat, ut ſint incomparabiles & errorem quovis dato minorem producant.* Quod num accuratioris Geometriæ leges exactè ſatis obſervet, hic ulterius diſquirendi locus non eſt, nec niſi poſt explicatam enucleatius D. Au-

thoris mentem, quod ſuo tempore expectabimus. Ut vero in orbitam redeam, hâc potiſſimum de cauſâ principii, quod curvarum proprietatibus methodo directâ explanandis par eſt ac ſufficit, inventionem pariter ac demonſtrationem difficiliores eſſe reor, quod infiniti quid involvere videtur ipſa curvarum indoles, tale quid ſaltem, quod conceptus noſtros tranſcendit ac ſuperat. Quamobrem & hoc ipſum principium non niſi ex ipſius infiniti naturâ peti poſſe credibile eſt. Cum autem hac quidem lege conditos nos voluérit creator noſter, ut, licet majorem ac minorem quavis conceptâ quantitate nobis repræſentare valeat imaginatio noſtra, non niſi finita tamen ac magnitudine determinata concipere queamus, ad infiniti ipſius notionem veram adæquatamque aſſurgere nequit intellectus humanus: hanc tamen, poſitâ quantitatis cujuſcunque in partes infinitas ſeu omnem datum numerum excedentes diviſibilitate, ex ipſius infiniti attributis veritatem elicere datum eſt, (quam & axiomatis ac fundamenti loco cæteris ſubſtravimus) *quicquid per numerum infinitum multiplicatum nullam quantitatem datam, ut ut exiguam, adæquare valet, entibus annumerandum non eſt, ac nihilo æquale haberi debet.* Cujus quidem effati certitudinem aliunde ac ex ipſis etiam Veterum aſſumtis (Poſtul. lib. x. *Euclid.* & *Archimed.* de Sphæra & Cylind. Axiom. v.) evincere in proclivi foret, niſi luce ſatis ſuâ enunciatio hæc radiare illis, quibus eam examinandam propoſueram, viſa fuiſſet; & hoc quidem ſolo ac unico principio celebriora hactenus recentiorum Geometra-

metrarum inventa derivari posse, confirmationemque suam recipere sequentia, uti speramus, palam facient. Accedit maximi hinc momenti præterea veritatem directè sequi : *Omne nimirum divisibile, adeoque & omnem quantitatem, vi infinitâ in nihilum esse reducibilem, eâdemque vi infinitâ, quantitatem quamcunque ex nihilo produci posse*; cum ex eo productum esse, in quod divisione resolvi potest, quidlibet meritò censendum sit. Unde & omni quantitatum generi liquido impressus apparet omnipotentiæ ac divinitatis character; nullumque quantum, naturâ suâ æternum esse, (hoc est tale, quod ex nihilo nec produci nec in nihilum redigi potest) evidenti ac indubitabili prorsus consequentiâ evincitur, nisi enim divisibilia ac quanta quæcunque infinities infinitâ divisione in nihilum abeant, ac infinitesimæ pars infinitesima sit nihilo æqualis, omnes hactenus Mathematicos non immerito paralogismi reos egisse videtur Doct. *Cluverus*, periitque in universum Geometricarum demonstrationum ἀνεξιβεια; ac magno lapsu corruent plurimæ, si non omnes, tum antiquorum, tum & hujus ævi, quocunque etiam ingenii acumine ac felicitate excogitatæ, inventiones. Quo vero, num ex præmisso modo Axiomate Methodum indivisibilium, quæ adhuc desiderabatur, inculpabilem, primariaque quæ hodiernorum Geometrarum industria detexit, legitimè deduxerim, apertius pateat, quem hoc in opusculo servaverim ordinem, paucis exponam.

Ac primo quidem, post assumtam quantitatis cujuscunque determinatæ in partes quâlibet datâ

minores divisibilitatem, quas cum aliis *infinitesimas* vocito, Algorithmum hisce speciatim convenientem ac proprium exhibeo. Unde maximi statim usus consectarium ex earum multiplicatione procedit, *infinitesimam scilicet per infinitesimam multiplicatam nihilo æquivalere*: quæ porro curvis applicata, tandem Lem. 26. & 27. *ipsas omnes ex rectulis infinitesimis componi, adeoque & curvilinea esse infinitorum laterum polygona* (quod a multis antehac assumtum fuerat) ex præmissis evincunt. Tum post hujus Theorematis Lem. 33. demonstrationem, *in triangulo isosceli, basin habenti infinite parvam, angulos ad basin & rectos & æquales esse*; Lem. 41. & 42. inter eas lineas discrimen ostendo, quæ tanquam infinitesimæ, adeoque quantitatis adhuc naturam ac essentiam servantes, aliasque quæ nihilo æquales in calculo considerandæ sunt. Quod quanti momenti sit diagnosticum, illi norint, quibus Analysis infinitorum familiaris est, ac licet ad calculi securitatem omnino requiratur, num antea quispiam ostenderit, ignoro.

Subnexo denique lemmatibus hisce generali Scholio infinitesimarum naturam quodammodo illustro; unde N. XII. &c. Theorema quoddam prodit, cujus ope earum curvarum tangentes, quarum parametri indeterminatæ sunt, ad ordinarias curvas reducuntur, hinc & *maximi* & *minimi* determinatio methodo, ni fallor, novâ perficitur.

Cap. I. Tangentium ducendarum methodum exhibeo, *Barovianaque* demonstrationem, aliarumque insimul, quæ eodem cum ipsa fun-

da-

damento nituntur : ac poſt particularia quædam in tyronum gratiam ex hiſce deducta compendia, deſignataſque §. 24. iis curvis tangentes, quarum natura non ex applicatarum ad interceptam, ſed ad alterius curvæ ad eundem axem applicitæ ordinatas relatione cognoſcitur, §. 32. ac 33. duplicem propono methodum, ex data qualibet æquatione curvæ (ſive terminis irrationalibus ſive fractis quocunque ſigno copulatis conflata fuerit) tangentem ducendi; quod §. 34. ad ea curvarum genera exporrigo, quarum ſive ad alias ſive ad axem relatio non unicâ tantum, ſed quolibet æquationum numero exprimitur. Donec ultimò §. 35. methodus exoriatur generaliſſima, *applicatis ad eundem axem quotlibet curvis, datâque æquatione communem earum relationem comprehendenti*; (ſive hæc per earum applicatas interceptamve ſive etiam per ipſarum curvarum portiones expreſſa fuerit) *æquationem aliam* (*ſubtangentialem* mihi dictam) *citra ullam calculi moleſtiam inveniendi, quæ ſingularum* (ſi cæteræ ſint cognitæ) *pro arbitrio ſumendarum ſubtangentes unâ operâ determinat.* Quod & §. 37. & ſeq. iis curvis applico, quarum parametri ſunt indeterminatæ; unàque ex generalibus hiſce æquationibus, quarum auxilio innumerarum curvarum tangentes eadem operâ definiuntur, ad particulares quaslibet curvas regreſſionem oſtendo. Hinc §. 41. poſt curvarum quarundam, quæ alioquin anomalæ quodammodo videntur, ad leges æquationum vulgarium reductionem illarum ſubtangentes ex iiſdem principiis inquiro, in quibus indeterminatæ quantitates inter poteſtatum exponentes

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [15] - -

tes reperiuntur, quæque hactenus Geometris aut omnino prætermissæ aut parum admodum consideratæ videntur, cum multorum nihilominus problematum, satis alioqui difficilium, constructionibus inserviant; deinde ipsum subtangentium problema, in minus provectiorum exercitationem, ex aliis datis investigo; ac quomodo curvæ datæ non recta, sed curva quælibet designata, tangens ducatur, uno aut altero exemplo ostendo. Tum §. 78, cum singulis indeterminatis singulæ attribui possint infinitesimæ, earundem plures, ac paucis adhuc huic negotio applicitas subtangentium problemati solvendo adhibeo; insimulque generaliorum quorundam, nec specialem curvæ cujusvis cognitionem deposcentium, Theorematum inventioni viam sterno: unde peculiari, ni fallor, methodo obtinetur consectarii loco §. 87. universale *convexitates & concavitates* in omnibus curvis *diagnosticum*; ac definitio puncti, si detur, flexus contrarii, quod celebri inter Mathematicos Conchoïdis exemplo illustro.

§. 93. &c. de Subtangentium subnormaliumque methodo inversâ paucis ago, quam, licet principia innumeris ejusmodi problematis solvendis sufficientia addiderim, imperfectam nihilominus reliqui; eò tamen generalem tangentium inversarum inquisitionem deduxi, ut inter infinita, in quæ æquatio quælibet ex Cl. *Slusii* exemplo dividi potest, loca, duo tantum determinari necesse sit, quæ datam quandam inter se relationem obtinent, talem scilicet, qualis inter æquationem

tionem curvæ ipsiusque Subtangentialem ex legibus antea traditis requiri facillime ostenditur.

Cap. II. Curvilinea, cum verè polygona sint, adeoque & polygonorum more mensuranda, §. 1. in trapezia, quæ duo habent latera parallela; deinde in Triangula variis modis, §. 33. &c. distinguo; ac post præmissam indivisibilium methodum scrupulis omnibus liberam, §. 11. Cor. v. fundamentalem Cl. *Wallisii* Arith. Infin. LXIV. Propositionem, tum & lemma celeb. *Mercatoris* ac D. *Gregorii* eodem fonte derivo. Quibus §. 13. huic calculi generi magis accommodatum ac generale Theorema subnecto; *Omnes scilicet terminos, infinitesimales collectivè sumtos ipsi termino, unde originem sumserunt, quique jugi ipsarum infinitesimarum coacervatione componitur, tanquam valori absoluto perpetim æquari.* Hinc post varias curvilineorum transmutationes, §. 18. Cor. II. methodum exhibeo, subnormales omnium ferme curvarum quomodolibet per interceptas applicatas ipsasque curvas expressarum unâ operâ designandi; ac Cor. III. Cl. *Wallis*: auctas multatasque series per tangentes inversas demonstro. Deinde post Celeb. *Newtoni* series in transitu strictim ventilatas, §. 24. præter ordinarium infinitesimarum numerum (quæ Triangulum Celeb. *Leibnitio characteristici* nomine vocatum constituunt) complures alias, in curvilineorum mensurâ adhibeo; plurimorumque theorematum, omnes in genere curvas spectantium, nondumque satis discussorum, originem aperio: ac post hinc emergentium, aliquot problematum solutiones *involutarum evolutarumque* figurarum

pro-

proprietates, J. Gregorio primum consideratas eodem cum cæteris fundamento deduco.

Cap. III. Solida tracto, columnas, truncos ungulasque Cylindrorum sectione genitas; tum & ea, quæ ex curvilineorum rotationibus oriuntur, corpora conoidica, annularia &c.; methodique indivisibilium, in quantum solidis applicatur, demonstrationem adjungo. Ac ne, quæ ex Cap. II. peti possunt, inutili discursu hic repetere necesse habeam, problema infinitesimarum extra Triangulum characteristicum aliunde sese ingerentium naturam ac usum in corporum dimensione illustrans, (quod in planis curvilineis Cap. II. §. 37. generaliter ostenderam) in Solidis resolvo; *datâ nimirum Solidi, ex curvilinei circa axem rotatione geniti, aliusve cujuslibet expressione analytica, convenientem huic curvilineo applicatam exhibere.*

Cap. IV. Corporum capite præcedenti consideratorum superficies tracto, eaque spectantem indivisibilium Geometriam demonstro.

Cap. V. Post trita quædam Baroviana, ac Tyronum captui accommodata §. 6. curvas methodo non admodum usitatâ expendo; unde varia, & nonnulla etiam nova eas mensurandi oriuntur principia; ac inter alia §. 10. ex quolibet curvilineo infinitas curvas mensurabiles eliciendi methodus, ab *Hugenianâ* evolutione diversa; quam tamen, tanquam primarium hujus seculi inventum, ex hoc, quo cætera derivavimus, etiam fonte manare §. 11. ostendo.

Cap. VI. Centri gravitatis cum traditis hic principiis symphonesin, Algebraicosque plurimorum

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [18] - -

rum tum curvilineorum, tum ſolidorum, ac ſuperficierum curvarumque, ex prægreſſis capitibus collectos exponentes annexa brevi appendiculâ comprehendo.

Cap. VII. *Maximi* & *minimi* determinationem modo, ni fallor, Mathematicis adhuc intacto, ex infiniti tamen naturâ directè profluenti, commonſtro; *Huddenianæque* methodi, utpote omnium generaliſſimæ, licet principio multum diverſo inventæ, hoc tamen fundamento nixam demonſtrationem adjicio. Quin & particulari hac *extrema* iſthæc definiendi ratio prærogativa gaudere videtur, quod non unum tantum *maximum* & *minimum*, ſed & plura, ſi problematis propoſiti natura ita ferat, eadem opera determinare valeat.

Cap. VIII. Varia calculi in *Analyſi infinitorum* genera, ac imprimis *Leibnitii* Differentialem eodem cum prægreſſis fundamento demonſtrabilem oſtendo; quem & ad eas extendi quantitates, quæ poteſtatum indices indeterminatos habent. Sola *Differentiationum* ſucceſſio, eodem cum cæteris principio deduci renuit. Quæque eam infeſtare videntur difficultates D. Authori in *Conſiderationibus* ex parte propoſui, ac hoc in loco inſtantia una ac altera roboravi; quarum ſolutionem inſimulque legitimam repetitarum differentiationum confirmationem, ne tantum inventum in Geometria intercidat, ſummo deſiderio meritò exoptat orbis Mathematicus.

Cap. IX. Æquationum infiniteſimas continentium, naturam reſpectu earundem inquiro, ac poly-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [19] - -

polychreſtum quoddam ex iiſdem conſectarium deduco, quod methodo huic multum promovendæ ejuſque ad innumeras infiniteſimas applicationi inſervit, ac repetitarum differentiationum quoddam velut ſuccedaneum haberi poteſt. Infiniteſimarum enim hinc infiniteſimas, quacunque licet numeri infiniti poteſtate diviſas, (quas alioquin nihilo æquales ac idcirco æquationum, quibus adhærent, terminos merè evanidos eſſe in prioribus eviceramus) non leve tamen in quantitatum aſſignabilium, curvas ſpectantium, rationibus inquirendis pondus habere ex ritè perpenſâ earum indole ac proprietatibus innoteſcit.

Cap. X. Methodum infiniteſimalem inverſam commentariis quibuſdam illuſtro; cumque Cap. II. §. 13. huic aperiat aditum, occaſiones, quibus ab infiniteſimis ad quantitates abſolutas indeterminataſque regreſſio ſecurè datur, ab aliis, quæ errorem forſan inducerent, quibuſdam in caſibus diſtinguo; quædam obiter admonuiſſe contentus, quibus ulterius perficiendis otii magis, quam mihi reliquum eſt, requiritur.

Cap. XI. Miſcellanea quædam, interque ea methodum, quâ ad æquationem ſubtangentialem, in *Conſiderationibus* ad ſolutionem *Bernoulliani* problematis adhibitam, deveni. Tum & ea, quæ cauſticarum, plurimarumque aliarum conſimili modo genitarum curvarum proprietates concernunt, modo à *Tſchirnhauſiano* aliquatenus differenti, generali Theoremate comprehendo.

Schemata, ne in immenſum excreſcerent, pluribus quandoque paragraphis accommodata ſunt; un-

unde, ne linearum multitudine confuſio inducatur, tyronibus author ſum ut figurarum lineas propoſitioni, quæ præ manibus eſt, inſervientes, miſſis cæteris, ſeligant; novaſque exinde ac ſcopo unicè conuenientes ſibi, (quod facillimo negotio obtinetur) ſi occaſio tulerit, figuras efforment. Signum [ ] Cap. I. §. 17. adhibitum terminorum hinc & inde conſiſtentium tantum ſeparationem, ⊐ æqualitatem denotat.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [21] - -

ERRATA.

Pag. 3, lin. 20, pro $\frac{e}{n}$ lege $\frac{e}{n}$. p. 6. lin. ultimâ pro ęta lege recta. p. 9, l. 4, hinc, lege, huic. p. 17, l. 13, $\frac{dn}{r^e}$, leg. $\frac{d^n}{r^n}$. lin. 23, d^n_q, leg. d^n_1. p. 20, l. 18 $\frac{ly}{mm}$, l, ✠ $\frac{ly}{mm}$. p. 37, l. 2, gut, l. gat. p. 46, l. 1, l. § 34. p. 47, l. ult., pro $\frac{zz-rz}{s}$ l. $\frac{zz-rz}{b}$. p. 56, l. 22, huic, l. hinc. p. 65, l. 18, *gte*, l. *g* ✠ *e*. p. 67, l. 4, $r^x - fy$, l. $r^x - y\,fy$. p. 101, l. 9, l. proximos. p. 129, lin. 6, $\frac{3}{3}\,y$, leg. $\frac{3}{2}y$. p. 134, lin. ult. *p* ✠ *i*, l. *p* ✠ 1. p. 139, l. 9, ſen, l. ſeu. p. 139 l. 25, l. propoſitum. p. 178, l. 19, l. nimirum p. 181, l. 7. Orei-, leg. orie-. p. 183, l. 18, *kdı*, l. *kdr* p. 249, lin. 21, l. Coroll. III. p. 269, lin. 17. *incognitam*. p. 270, l. 12, l. inſtar. p. 271. lin. penult. bx, l. bx^4.

Bericht voor den Boekbinder.

DE Figuren moeten alle achter aangeſtelt werden, malkander volgende als de getallen daar op ſtaande aanwyſen, en zyn geordineert om buiten het Boek uit te ſlaan, waarom de witte plaats van 't Papier niet moet werden afgeſneden.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [22] - -

ANALYSIS INFINITORUM,

Seu

Curvilineorum proprietates

Ex

Polygonorum naturâ deductæ.

I. DEFINITIONES.

1. DAtam quantitatem omnem eam voco, quæ determinabilis est, cujusque magnitudo imaginationis humanæ limites non excedit.

2. Unde, quid per quantitatem quâlibet datâ minorem, aut majorem intelligendum veniat, ipso nomine apertum est.

3. Quantitatem quâlibet datâ minorem, compendii gratia, *infinitesimam*; majorem, *infinitam* appellare liceat.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [23] - 1

AXIOMATA.

1. QUicquid toties ſumi, hoc eſt per tantum numerum multiplicari non poteſt, ut datam ullam quantitatem, ut ut exiguam, magnitudine ſuâ æquare valeat, quantitas non eſt, ſed in re geometricâ merum *nihil*.

2. Quælibet quantitas data in partes quâlibet datâ minores, tum æquales inter ſe, tum inæquales, eſt diviſibilis.

LEMMATA.

1. OMnis quantitas vel data eſt, vel qualibet datâ minor, aut major.

2. Cumque omnis numerus ſit quantitas, idem de numero intelligendum venit.

3. Quælibet data quantitas per numerum quemlibet eſt diviſibilis.

4. Et quotiens inde ortus, ejuſdem quantitatis pars eſt.

5. Quæ pars præcisè juxta diviſoris denominationem eâ quantitate minor eſt.

Ex. Gr. ſi quantitas b dividatur per numerum binarium, quotiens $\frac{b}{2}$ ipsâ b duplo

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [24] - 2

plo minor est; si per ternarium triplo minor &c.

6. Unde, si quantitas per numerum quolibet dato majorem dividatur, erit quotiens pars ejus quantitatis qualibet datâ minor.

Ex. Gr. numerus quolibet dato major vocetur m, (quod & in seqq., ni aliud moneatur, obtinebit) item sint aliæ datæ quantitates b & c, erunt $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$ partes ipsarum b & c qualibet datâ minores; consequentiæ ratio ex præcedentibus patet.

7. Pars cujuscunque quantitatis qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$, erit etiam omni aliâ datâ quantitate minor.

Demonstr. Si neges, sit designata quantitas k minor ipsâ $\frac{b}{m}$, erit mk minor ipsâ b, & m minor ipsâ $\frac{b}{k}$; adeoque numerus quolibet dato major m, minor erit numero seu quotiente dato, quod repugnat.

8. Si partes, qualibet datâ minores $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$ ad se mutuo addantur, vel a se mutuo subtrahantur, summa $\frac{b+c}{m}$, & differentia $\frac{b-c}{m}$ respective partes erunt qualibet datâ minores summæ vel differentiæ totorum, uti patet.

9. Multiplicetur $\frac{b}{m}$ per datam quandam r, erit factum $\frac{br}{m}$ rectangulum omni datâ minus, aut rectanguli br pars qualibet datâ minor, juxta Lem. 6.

10. Si pars qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$ ducatur in se ipsam, vel aliam qualibet datâ minorem $\frac{c}{m}$, erit productum $\frac{bb}{mm}$ seu $\frac{bc}{mm}$ æquale nihilo seu non quantum.

Demonstr. Multiplicetur enim quotiescunque libuerit hoc productum, & si placeat per numerum omni dato majorem m, emerget $\frac{bb}{m}$ aut $\frac{bc}{m}$, quæ singula sunt qualibet datâ quantitate minora, (Lemm. 7.) adeoque nullam datam quantitatem, ut ut exiguam, æquare valent, quare juxta Axioma 1. $\frac{bb}{mm}$ seu $\frac{bc}{mm}$ sunt nihilo æqualia.

11. Duæ quantitates $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$, qualibet datâ minores sunt inter se, ut quantitates b & c, quarum partes sunt, sic $\frac{b}{m} : \frac{c}{m} :: b : c$.

12. Si pars qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$ per aliam quâlibet datâ minorem $\frac{c}{m}$ dividatur erit quotiens

tiens $\frac{b}{c}$ idem, quod ex divisione totorum proportionalium resultaret.

13. Eadem $\frac{b}{m}$ si per determinatam r dividatur, erit quotiens $\frac{b}{rm}$ ipsius $\frac{b}{r}$ pars qualibet datâ minor, juxta Lem. 6.

14. Sit determinata r, & fiat, $r : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : x$ erit x seu $\frac{bc}{rmm}$ juxta Lemma 10. nihilo æqualis.

15. Si vero assumta ipsius r parte qualibet datâ minori, fiat $\frac{r}{m} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : x$, erit $x = \frac{bc}{rm}$, seu pars quâlibet datâ minor ipsius $\frac{bc}{r}$, Lemma 6.

16. $\sqrt{\frac{bb}{mm} + \frac{cc}{mm}}$ est æqualis parti qualibet datâ minori ipsius $\sqrt{bb+cc}$, seu $\frac{1}{m}\sqrt{bb+cc}$, quod ex fundamentis Algebræ notum est.

17. Sit autem determinata r, ac detur ex calculo $\sqrt{rr+\frac{bb}{mm}}$, erit hoc æquale ipsi r.

Cum enim $\frac{bb}{mm}$ juxta Lem. 10, sit æquale nihilo, erit $\sqrt{rr+\frac{bb}{mm}} = \sqrt{rr} = r$.

18. Sint b & c ita ad se mutuo relatæ, ut neutrâ earum existente omni datâ majori, si alter-

utra

utra, vel quantitas ſit, vel in totum evaneſcat, etiam altera ſemper neceſſario vel quantitas ſit, vel nihilo æqualis fiat.

Dico, ſi alterutra, verb. gr. *b*, ſit omni datâ minor, etiam *c* fore qualibet datâ minorem.

Demonſtr. ſi neges, erit, juxta Lemm. 1, *c* vel omni datâ major, quod repugnat aſſumtis, vel data, ac tum *b* etiam erit data contra hypotheſin, vel nihilo æqualis, ac tum *b* quoque talis foret, contra ſuppoſitum.

19. Hinc ſi, *Fig. I*, in cujuſvis trianguli *A E G* quolibet latere *A E* ſtatuatur *A C* quavis datâ minor, erunt, ductâ *K C* ipſi *G E* parallelâ, lineolæ, *K C*, *A K*, ſingulæ quavis datâ minores & vice verſâ.

Demonſtr. habent enim *A K* & *C K* ad lineolam *A C* relationem lemm. præced. ſuppoſitam.

20. Eadem quoque relatio obtinet, *Fig. II*, inter Curvæ Arcum *A C D*, eique ſubtenſam *A D*, ac ſinum *A E*: unde omnis arcus quovis dato minor ſubtenditur à cordâ quavis datâ minori, habetque ſinum quovis dato minorem, & contra.

21. Quin & expoſitâ curvâ *A C D*, *Fig. III*, notæ proprietatis verſus eandem partem concavâ, eique ſubtenſâ *A D*, ſi ducatur ex puncto *D* recta *D G* faciens cum ſubtenſâ *A D* angulum *A D G*

ADG vel rectum vel recto majorem; tangat autem curvam in puncto *A* linea *AG*, occurrens rectæ *DG* in *G*, sitque *HG* rectarum *AG* & *AE* differentia seu *AG* — *AE*: Dico, si Arcus *AC* (vel juxta præcedentem, subtensa *AC*) sumatur omni dato minor, etiam *HG*, seu *AG* — *AE*, fore omni datâ minorem.

Demonstr. dato enim arcu *AC*, datur *AE*, & ob datam *AG*, datur quoque *AG* — *AE*, seu *HG*. Secundo, evanescente arcu *AC*, ob linearum *AE* & *AG*, hoc in casu, cöincidentiam, adeoque & æqualitatem, & ipsa *HG* evanescet, quare, per Lemma 18, constat propositum.

22. In triangulo *AEG*, *Fig. I*, cujus angulus *E* est vel rectus vel obtusus, ducatur *KC* lateri *GE* parallela, erit ut *AE* ad *AC*, ita differentia linearum *AG* & *AE*, ad differentiam *AK* & *AC*.

Demonstr. nam ob rectarum *KC* & *GE* parallelismum erit *AG*: *AE*:: *AK*: *AC*. unde divid. & altern. *AG* — *AE*: *AK* — *AC*:: *AE*: *AC*.

23. Repetito lemmate 21, sit, *Fig. III*, *AC* arculus omni dato minor, ac per punctum *C* ducatur recta *KL* ipsi *DG* parallela, productâque subtensâ *AC* in *E*, erit differentia tangentis *AK* & subtensæ *AC* æqualis nihilo.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [29] - 7

Demonſtr. ſit $AE : r$, & ſubtenſa $AC : \frac{b}{m}$, quæ, juxta Lemma 20. qualibet datâ minor eſt, cum arcus AC talis ſit ex hypotheſi; ſit item $HG : \frac{c}{m}$, juxta Lemm. 21. omni datâ minor; tandem differentia rectarum AK & AC ſeu $AK - AC$ dicatur x; erit ex præcedenti $r + \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : x$, unde x ſeu $\frac{bc}{rmm}$, per Lem. 10. aut 14, nihilo æquatur.

24. Hinc, in argumentatione circa quantitates omni datâ minores, ſubtenſa AC æquatur tangenti AK; cum, juxta præcedentem, nulla ſit earum differentia.

25. Tum & tangens AK, ſubtensâ AC, ac Curva AC inter ſe æquales ſunt.

Cum enim Curva AC ſit major ſubtensâ AC, & minor tangenti AK, uti omnibus notum, erit differentia Curvulæ AC & alterutrius rectæ AK vel AC, non major quam differentia rectarum AK & AC, quæ juxta Lemm. 23, nullla eſt.

26. Adeoque omnis Curva ACD ex rectulis quavis datâ minoribus, quæ tanquam tangentes AK, aut ſubtenſæ AC, conſiderari poſſunt, conſtat.

27. Unde pariter clarum eſt, ſi calculum in-

ingrediatur curvæ cujuſvis particula omni datâ minor, ut AC, poſſe ejus loco ſubſtitui vel ipſius ſubtenſam AC, vel tangentem AK hinc curvulæ reſpondentem; utpote quarum omnium differentia nulla eſt.

28. Punctum P & curva ABD, *Fig. IV*, ita ad ſe invicem referantur, ut ductis PA, PD, ad curvam, omnes dëinceps rectæ a puncto P verſus curvam ABD projectæ ab A verſus D perpetuò creſcant, aut ſaltem non decreſcant; ſi ducatur AG, curvam tangens in A, item PB ipſam AG ſecans in S, & curvam in B; Dico primo, AS fore majorem, quam AB.

Demonſtr. Cum PB ſit major rectâ PA, erit angulus PAB major angulo PBA, (I. 18: Eucl.) ſed angulus PBF (I. 32: Eucl.) major PAB; ergo idem PBF, ſeu ipſi ad verticem oppoſitus ABS multo major ipſo PBA, hoc eſt (I. 32, eucl.) ABS multo major ſummâ angulorum BAS & ASB; ergo in triangulo ABS, erit ABS angulorum maximus; quare, (I: 19. Eucl.) AS major ipsâ AB.

29. Secundo, manentibus iiſdem, ſi, *Fig. IV*, ex B ducatur BL ipſi PG æquidiſtans, dico AL fore majorem, quam AS.

Demonſtr. Angulus AFG (I: 32. Eucl.) major Angulo PBF & huic ad verticem oppo-

oppoſito ABS, jam autem, ob parallelas FG & BL, angulus ABL eſt æqualis angulo AFG; ergo angulus ABL major ipſo ABS, unde AL major, quam AS.

30. Retentâ eâdem hypotheſi, ſi AB ſit pars curvæ omni datâ minor, dico differentiam ipſarum AS & AB eſſe nullam.

Demonſtr. AL eſt major quam AS, ex præced. unde $AS - AB$ minor eſt, quam $AL - AB$, ſed $AL - AB$ ex Lem. 23. eſt non quantum, adeoque, quod eo minus eſt, $AS - AB$ quantum non erit, ergo nullum.

31. Hinc corollaria in modum Lemmatum 24, 25, 26, 27, quilibet ſuo marte eliciet, & tum hic, tum inibi, tradita aliis caſibus, ubi curva verſus punctum P convexa eſt, accommodabit.

32. Hoc particulare adjungere liceat; ſi curva ABD ſit circumferentia circuli, cujus centrum P, ſectorem APB eundem eſſe cum triangulo iſoſceli APB, cujus Baſis ſubtenſa AB; eſt enim hæc æqualis arcui AB, Lem. 25.

33. Si ſuper baſi, *Fig. V*, quavis datâ minori AB, ſeu $\frac{b}{m}$, conſtitutum ſit triangulum iſoſceles APB, cujus latus AP ſeu BP eſt p, erunt ſinguli anguli ad baſin PAB & PBA recti.

Demonſtr. Ductâ enim normali PD erit

DB

DB: $\frac{1}{2}\frac{b}{m}$, factoque radio: r, & sinu anguli PBD: y, vocatâque PB: p, erit juxta trigonometriæ regulas, $r:p::y:\frac{py}{r}$ seu DP. Jam, ex I.47. Eucl: est $\frac{ppyy}{rr} + \frac{\frac{1}{4}bb}{mm} = pp$, rejectoq. per Lem. 10. termino $\frac{\frac{1}{4}bb}{mm}$, erit $\frac{ppyy}{rr} = pp$, seu $y = r$, hoc est, sinus anguli PBD æqualis radio, unde angulus PBD rectus. Idem eodem modo de angulo PAD demonstratur.

34. Sit, *Fig. VI*, triangulum PAB rectum in A, habens latus AB quovis dato minus, dicanturq., PB: p, AB: $\frac{b}{m}$, radius: r.

Erit sinus anguli APB quovis dato minor. Est enim $p:r::\frac{b}{m}:\frac{br}{pm}$, seu sinum anguli APB, quod pariter ex Lem. 18. inferri posset.

35. Hujus conversum, exposito angulo APB omni dato minori, ulteriori probatione non indiget.

36. Iisdem positis, hypothenusa BP lateri AP æqualis est. Cum enim sinus anguli BPA sit $\frac{br}{pm}$, erit sinus complementi illius seu anguli ABP $\sqrt{rr - \frac{bbrr}{ppmm}}$, & juxta triangulo-

rum

rum vulgarem dimenſionem, $r : p :: \sqrt{rr - \frac{hhrr}{ppmm}} :$ AP, ſeu $\frac{p}{r}\sqrt{rr - \frac{hhrr}{ppmm}}$ ſeu p, per Lemm. 10.

37. Angulus A B P eſt æqualis angulo B A P, & uterque rectus; quod, cæteris perceptis, ſatis patet.

38. In dato quovis triangulo A B C, *Fig. VII*, ſi ex angulo B ad oppoſitum latus A C projecta B D abſcindat D C, portionem quavis datâ minorem, ducaturque arculus circularis, ſeu ipſi æqualis recta D E juxta Lemm. 32, faciens B E æqualem B D; erunt D E & E C quavis datâ minores.

Demonſtr. Habent enim reſpectu D C relationem, Lemm. 18, expreſſam.

39. Iiſdem poſitis, ſi angulus A B D ſit rectus; dico triangula A B D & D E C fore ſimilia; juxta enim Lemm. 33. angulorum B D E & B E D uterque rectus eſt; quare D E C (I. 13. Eucl.) quoque rectus eſt, adeoque æqualis ipſi A B D ex hypotheſi;

Secundo, ob angulum B D E rectum, erit E D C, anguli B D A complementum ad rectum, atqui (juxta I. 32. Eucl.) angulus B A D ejuſdem B D A complementum eſt, unde E D C æqualis B A D, hinc & tertius A D B æqualis D C E, quare conſtat propoſitum.

40. Datis (*F. VIII.*) duabus curvis ABD, EFG, quo-

cuovis modo mediantibus rectis EP, AP, FP, BP, ad punctum P relatis, si A B sit curvæ B A D pars omni datâ minor, erit & E F pars curvæ E F G omni datâ minor & contra; habent enim relationem Lemm. 18. expositam.

41. Sit recta B N, *Fig. IX*, indefinitè versus N protensa, ac ductâ ex puncto B ad angulum N B C recto majorem lineâ B C; *s*, ex cujus extremitate C projecta C A abscindat a rectâ B N portionem B A quavis datâ minorem: $\frac{b}{m}$; erunt (juxta 38. Lemm.) D B: $\frac{c}{m}$, tum A D: $\frac{d}{m}$, rectum angulum in D facientes singulæ quavis datâ minores; facta jam C E seu $\frac{f}{m}$ itidem quavis datâ minori, ductisque E F seu *h* ipsi D B, & H E seu *k* ipsi A B parallelis, quæritur harum ut & linearum F H: *l*, & F C: *g*, & H C: *n*, natura.

I°. quia C D æqualis C B, juxta Lemm. 36, est C B: C D:: C E: C F. Hoc est *s*: *s*:: $\frac{f}{m}$: *g*. adeoque *g* seu C F $= \frac{f}{m}$ seu C E; unde C F infinitesima. II^do. C B: C A:: C E: C H, seu *s*: $s + \frac{d}{m}$ :: $\frac{f}{m}$: *n*. unde $sn = \frac{sf}{m} + \frac{df}{mm}$, & per Lemm. 10. $n = \frac{f}{m}$, unde C H æquatur C E seu infinitesimæ. III^tio. C B: B D:: C E: E F, *s*: $\frac{c}{m}$ :: $\frac{f}{m}$: *h*. ergo E F seu $h = \frac{cf}{smm}$ seu (juxta Lemm. 10.) nihilo. IV^to. C B: B A:: C E:

$CE:EH.s:\frac{b}{m}::\frac{f}{m}:k$. ergo HE seu $k=\frac{bf}{smm}$ seu nihilo, Lemm. 10. *Vlo*. $CD:DA::CF:FH$, $s:\frac{d}{m}::g$ seu $\frac{f}{m}:l$, unde FH seu $l=\frac{df}{mm}$ seu nihilo.

42. Quare liquet, retentâ eadem Hypothesi, lineas, CE, CF, CH sibi mutuo æquari, & FE, EH, HF nihilo æquipollere, adeoque omnes quantitates posterioribus hisce multiplicatas tutò ex calculo algebräico, una cum iisdem, deleri posse.

43. Sint quotlibet antecedentia, c, d, f, &c, totidemque consequentia g, h, l, &c; item exposita ratio in singulis constans, ut r ad s, ut sit, $r:s::c:g$. tum $r:s::d:h$. nec non $r:s::f:l$. & sic in cæteris; dico fore, ut r ad s, ita omnia antecedentia $c+d+f$ &c. ad omnia consequentia $g+h+l$, &c. Hoc ex elementis notum est.

44. Iisdem positis, sint quantitates determinatæ, hoc est, quæ eandem continuo ac invariatam servent magnitudinem r, s, b, item aliæ indeterminatæ, x, y, z, n, sive tales, quarum magnitudo pro vario respectu, aut positione, varia est, licet eodem litterali signo perpetuò exprimantur, quale specimen omnibus notissimum in Algebräicâ locorum doctrinâ incognitæ dictæ quantitates exhibent; si fuerit in singulis, ut r ad s, ita quælibet x ad sibi relatum y, erit ex præ-

ce-

cedenti, ut r ad s ita quotlibet x, ad totidem y; seu (quod in posterum hoc modo enunciabitur) ita omnia x, ad omnia y.

45. Quin & assumtâ tertiâ determinatâ quantitate b, si fuerit $r : s :: x : y$. Cum sit quoque, $rb : sb :: x : y$. item $r : s :: bx : by$. tum & $rb : s :: b x : y$, nec non, $r : sb :: x : by$. erit quoque in singulis hisce analogiæ generibus eadem, ac in præcedenti, argumentandi methodus, ex Lem. 43. cum in singulis prima proportionis ratio sit constans & invariabilis.

46. Quod si assumantur quantitates indeterminatæ z & n, fiatque, ut supra, $r : s :: x : y$. cum sit quoque $rz : sz :: x : y$. ac etiam $r : s :: xz : yz$. Item $rz : sz :: xn : yn$: erit, velut in duabus præcedentibus, ut, in primâ analogiæ ratione, antecedens ad consequens, ita, in secundâ, omnia antecedentia ad omnia consequentia; conclusionis fundamentum ex præcedenti & Lem. 43. manifestum est.

47. Quin & in omnibus Lem. 45 & 46 casibus, si in primâ proportionis ratione tot supponantur termini, quot in secundâ, erit, ut omnia antecedentia in primâ, ad omnia consequentia, ita omnia antecedentia in secundâ, ad totidem seu omnia consequentia.

Quod probatione speciali non eget, quippe ex præcedentibus sufficienter cognitum.

48. Sint

48. Sint duæ indeterminatæ quantitates x & y, quæ ducantur in determinatam r, item aliam s; erit, ut omnia rx ad totidem ry, ita omnia sx ad totidem sy. Patet, cum omnia x sint ad omnia y, ut omnia x ad omnia y.

49. Hoc addam, licet ex modo monstratis facili negotio colligatur, si fuerit, $r : s :: x : y$. ac, assumtâ indeterminatâ z, fiat $rz : s :: zx : y$. argumentationem Lemm. 43. & 47. non procedere; seu licet per se analogia in singulis constet, non ritè colligi, ut omnia rz ad omnia s. ita omnia zx ad omnia y, cum ratio rz ad s, propter ipsius z magnitudinem variabilem, perpetuo non sit eadem, quod tamen juxta Lemm. 43. requiritur. Quæ observatio tyronibus admonitionis loco inservire potest, cum facilis admodum lapsus sit in hoc argumentandi genere.

Ex Analysi assumo.

50. *Multiplicationem* potestatum ab eâdem radice fieri per exponentium additionem; ut si ducendum sit d^2 in d^3, fore productum d^{2+3}, seu d^5; si d^p in d^q fore d^{p+q}.

51. Unde sequitur, si potestates sint æquales, hoc est $p = q$, fore productum d^{2p}; quod si denuo per d^p multiplicetur, fiet d^{3p}, atque ita deinceps.

Quare

Quare si potestas p alicujus radicis d, ut d^p, veniat quadratè, cubicè, qquadratè aliisque modis, multiplicanda, oportet potestatis datæ exponentem p per numerum dignitatis quæsitæ multiplicare; sic quadratum ipsius d^p est d^{2p}, cubus d^{3p}, qquad: d^{4p}, adeoque si d^p ad potestatem q evehi debeat, orietur d^{qp}.

52. Hinc jam ordine retrogado constat potestatum quarumlibet, per alias ejusdem radicis potestates *divisionem*, exponentium substractione peragi; sic d^5 per d^2 divisum exhibet quotientem d^{5-2}, seu d^3; adeoque d^p per d^q divisum efficit d^{p-q}; item d^n per r^c seu $\frac{d^n}{r^c}$ facit $d^n r^{-c}$.

53. Ipsamque radicum omnigenarum ex potestatibus quibuscunque extractionem fieri divisione exponentium; sic radix quadrata ex d^2 est $d^{\frac{2}{2}}$ seu d; cubica ex d^3 est $d^{\frac{3}{3}}$ seu d; ex d^6 est $d^{\frac{6}{3}}$ seu d^2.

Radix qquadr: ex rrd^6 est $r^{\frac{2}{4}} d^{\frac{6}{4}}$ seu $r^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}$, quod juxta vulgarem notationem hoc modo designatur $\surd rd^3$; tandem radix potestatis q ex d^n extracta erit $d^{\frac{n}{q}}$.

Quæ omnia ex divisionis, extractionisque radicum notâ methodo manifesta sunt.

Sthe-

Scholium Generale.

CUm nullus exiſtat numerus, qui inter progreſſionis Arithmeticæ: 1, 2, 3, 4, &c. terminos locum non inveniat; ſinguliq: hujus progreſſionis termini generentur ex progreſſionis monadicæ reſpectivis aggregatis; numerum quemlibet, ſub ſpecie ſummæ progreſſionis unitatum, conſiderari poſſe hoc ipſo patet. Unde ſequentes, & alicujus in hiſce momenti, numerorum proprietates emergunt; nimirum.

I. Ubi unitatum hæc progreſſio *ſubſiſtit*, ipſarum aggregatum numerum conſtituit *determinabilem*, ac per monadicorum progreſſionem certo termino ceſſantem denotandum; verb: gr. $2 = 1+1$, $3 = 1+1+1$, &c.

II. Ubi vero *nunquam ſubſiſtendo progreditur*, & in multitudinem terminorum omni determinabili majorem aſſurgit hæc progreſſio, aggregatum unitatum numerum conſtituit *omni dato majorem*: m, hac de causâ per progreſſionem monadicorum nunquam deſinentem exprimendum; velut $m = 1+1+1+1+1$ *& ſic continuo abſque ceſſatione pergendo.*

III. Certo termino ſubſiſtens monadicorum progreſſio, adeoque numerus determinabilis *aliquot progreſſionis unitates*; nunquam deſinens progreſſio ſeu numerus omni determinabili major *omnes hujus progreſſionis unitates continet.*

IV. Numeri omni dato majoris eſſentialis proprietas, ac ratio formalis in perpetuo accretionis actu conſiſtit, ſubſiſtendo enim numerum determinabilem efficeret (No 1.)

V. Quare, ſi quantitas determinata b dividatur per numerum omni dato majorem, ſeu continuo creſcentem, m, erit fractio $\frac{b}{m}$ quantitas continuo decreſcens; manente enim numeratore, ac denominatore ſine fine aucto, diminuetur ſine fine fractio.

Unde infiniteſimarum natura clarius illuceſcit, patetque ipſas, non in determinato quodam indiviſibili, ut ut exiguo

exiguo, sed in quantitate, cujus ulterior diminutio actu continuo sine fine peragitur, consistere.

Quibus perceptis Analysi infinitorum in Geometria sine lapsûs periculo utemur; cum nihil hic in continui divisibilitatem, & incommensurabilium asymmetriam, quibus scopulis allisa Indivisibilium Methodus naufragium passura videbatur, commissum sit.

VI. Possent & plura, ex progressionis infinitæ proprietate, circa numeros infinitos demonstrari: *Verb: gr:* si in monadicorum progressione singuli termini, seu unitates, ducantur in determinatam quandam quantitatem $\frac{pk}{r}$, erit, si terminorum quotitas aut multitudo sit $= m$, summa hujus progressionis $\frac{pk}{r} m$. In omni enim progressione æqualium, terminorum aggregatum quodlibet æquatur termino unico in quotitatem terminorum respectivam ducto; quod satis notum est.

VII. Patet hinc m numerum *simpliciter* infinitum (hunc eum voco, qui oritur ex progressione infinitis quidem, sed meris unitatibus constanti) per quamlibet quantitatem l multiplicatum aut divisum, exhibere numerum alius generis infinitum lm aut $\frac{m}{l}$, qui ad primum m determinatam habet rationem, ut l ad unitatem, aut ut unitas ad l.

VIII. Quin & hinc apparet, quodvis infinitum pm, esse summam progressionis æqualium p, cujus terminorum quotitas infinita est seu $= m$; est enim,

$pm = p+p+p+p+p$ *&c. sic continuo absque cessatione pergendo.* juxta N. 6.

IX. Nec opus est, superioribus intellectis hoc effatum adstruere: omne scilicet infinitum in suo genere, analytice efferri, per quantitatem determinabilem in m seu numerum infinitum ductam; sic, pm, km, ym, dm, &c. sunt singulæ, sed sui generis, infinitæ quantitates.

X. Ex quibus consequitur, fore quantitatem cujuslibet

ber generis infinitam km ad determinatam r, ut infinitesima $\frac{s}{m}$ ad nihilum geometricum, & e converso; est enim quarta proportionalis $\frac{sr}{kmm}$, quæ in re geometrica pro non quanto est habenda juxta Lemm. 10.

XI. Quare & quicquid per infinitesimam multiplicatum, per infinitum aliquod dividitur, nihilo æquivalet;

XII. Hinc si æquationis expositæ terminos quosdam infinitum aliquod multiplicaverit, aliique sint ex meris determinabilibus quantitatibus compositi; omnes termini infinito vacui ex æquatione poterunt, nihilorum ad instar, rejici; sumto enim m pro numero infinito sit $myy+ly = pxx+mrx+nnm$.

Dico fore $myy = mrx+nnm$. Unde divisis per m erit $yy = rx+nn$: rejectis terminis pxx & ly, tanquam infinitum non continentibus.

Demonstr. Cum enim, existente ut supra, $ly+myy = pxx+mrx+mnn$. erit, bis factâ divisione per m, $\frac{yy}{m}$ $\frac{ly}{mm} = \frac{pxx}{mm} + \frac{rx}{m} + \frac{nn}{m}$, unde, per Lemma 10. rejectis rejiciendis, ac ductis omnibus in m, remanebit æquatio, $yy = rx+nn$, q:e:d.

XIII. Eodem modo probabitur ex qualibet æquatione omnes terminos per infinitum aliquod divisos, cæteris omni infinito sive multiplicanti sive dividenti immunibus, tutò posse rejici, totâ enim æquatione per m divisâ, hi soli termini juxta Lemma 10. nihili ad instar considerari poterunt.

XIV. Tum & terminos per infinitum multiplicatos, rursumque per infinitum divisos, pro determinabilibus habendos, est enim $\frac{pm}{qm} = \frac{p}{q}$.

Hæc autem præsenti instituto sufficiant.

De

CAP. I.

De Curvarum tangentibus.

1. SIt curva ADE, cujus intercepta $AP = x$, applicata in dato quolibet angulo EP: y, ac ducenda sit recta TE curvam tangens in E;

Unde ex datâ curvæ æquatione inter applicatam y, interceptamque x constitutâ, quæritur TE seu s, aut hanc tangentem determinans PT seu t, quam axis portionem PT, applicatâ EP, & tangente TE interceptam, ex *Nob. Hugenii* instituto *subtangentem* vocabimus.

In linea $A\mathfrak{Q}$ sumtâ $\mathfrak{Q}P$ infinitesimâ qualicunque $\frac{b}{m}$, erectâque $\mathfrak{Q}D$ ipsi PE parallelâ, ducatur HD æqualis & æquidistans ipsi $P\mathfrak{Q}$, quare triangula TPE, & DHE erunt similia, & $TP : PE :: DH : EH$ seu $t : y :: \frac{b}{m} : \frac{by}{tm} = EH$.

item $TP : TE :: DH : ED$ seu $t : s :: \frac{b}{m} : \frac{bs}{tm} = DE$.

Unde patet & ipsas EH & DE esse infinitesimas, cum per numerum omni dato majorem m sint divisæ, juxta Lemm. 7. Exponatur jam curvæ quælibet æquatio $2rx - xx = yy$ inter PE & AP constituta, hæc eadem inter interceptam $A\mathfrak{Q}$ seu $x - \frac{b}{m}$, & applicatam $D\mathfrak{Q}$ seu y

$y - \frac{by}{tm}$ ſtatuatur, ſeu quod eodem redit, in expoſitâ æquatione pro x ponatur $x - \frac{b}{m}$, ac loco y ſubſtituatur $y - \frac{by}{tm}$ (quod in poſterum vocabo *æquationem ad infiniteſimas redigere*) emerget alia æquatio hac formâ:

$$2rx - \frac{2rb}{m} - xx + \frac{2xb}{m} - \frac{bb}{mm} = yy - \frac{2byy}{tm} + \frac{bbyy}{ttmm}$$

Jam vero: (per Lemma 10.) deletis $\frac{bb}{mm}$ & $\frac{bbyy}{ttmm}$, utpote nihilo æqualibus, tum & terminis, qui datam æquationem componunt, cum ſibi mutuo æquentur, remanebit: $-\frac{2rb}{m} + \frac{2xb}{m} = -\frac{2byy}{tm}$ & diviſione facta per $\frac{2b}{m}$, ac mutatis ſignis $t = \frac{yy}{r-x} = TP$, quæ invenienda erat.

Quod ſi non QP, uti mox, ſed in lineâ EP aſſumatur EH infiniteſima $= \frac{k}{m}$ erit ob triangulorum TPE, DHE ſimilitudinem.

$EP : TP :: EH : DH$, ſeu $y : t :: \frac{k}{m} : \frac{tk}{ym} = DH$.

$EP : ET :: EH : ED$ ſeu $y : s :: \frac{k}{m} : \frac{sk}{ym} = DE$.

Unde redactâ æquatione modo expoſitâ ad infiniteſimas, ſeu loco x & y ſubſtitutis AQ & DQ, ſive $x - \frac{tk}{ym}$ & $y - \frac{k}{m}$ orietur æquatio nova

$2rx - \frac{2rtk}{ym} - xx + \frac{2tkx}{ym} - \frac{ttkk}{yymm} = yy - \frac{2ky}{m} + \frac{kk}{mm}$. & rejectis (juxta Lem. 10.) rejiciendis, iisque quæ se mutuo ex naturâ æquationis tollunt, fiet $-\frac{2rtk}{ym} + \frac{2tkx}{ym} = -\frac{2ky}{m}$, & reductâ æquatione $t = \frac{yy}{r-x}$, eadem cum modo inventâ.

2. Si vero curvæ proprietas hoc flagitet, poterit & ipsa DE, seu tangentis aut, juxta Lemm. 25, curvæ ipsius portio, infinitesimæ loco assumi;

Sit, verbi gratia, expositæ curvæ hæc relatio, ut, vocatâ curvæ portione $AE : z$, sit continuo $zz = rx + yy$, & designanda sit recta curvam tangens in E; quapropter assumtâ $DE = \frac{l}{m}$: erit, per modo monstrata

$TE : EP :: DE : EH$, seu, $s : y :: \frac{l}{m} : \frac{ly}{sm} = EH$.

$TE : TP : DE : DH$ seu, $s : t :: \frac{l}{m} : \frac{lt}{sm} = DH$.

Unde reductâ hac æquatione ad infinitesimas, hoc est, loco rectarum AP, PE & curvæ AE ad æquationem adhibiris rectis, $A2 = x - \frac{lt}{sm}$, & $2D = y - \frac{ly}{sm}$, nec non curva $AD = z - \frac{l}{m}$ orietur æquario.

$$zz - \frac{2lz}{m} + \frac{ll}{mm} = rx - \frac{rlt}{sm} + yy - \frac{2lyy}{sm} + \frac{llyy}{ssmm}$$

Quæ, rejectis per Lemm. 10. rejiciendis, ac terminis ſe mutuo tollentibus, nec non diviſione per $\frac{l}{m}$ inſtitutâ remanebit reductâ æquatione,

$$t = \frac{2zs - 2yy}{r}$$

Ex quâ æquatione ſublatâ s aut t, per æquationem $tt + yy = ss$ (quæ triangulo rectangulo EPT ortum ſuum debet, quod ſi obliquangulum foret, aliam æquationem exhiberet.)

Tum & loco ipſius z ſubſtituto valore ex æquatione curvæ datâ $zz = rx + yy$ eliciendo, orietur $ttrr + 4tryy = 4ttrx + 4ttyy + 4rxyy$, & cognita erit ipſa t ex ſolis rectis x & y.

3. In tranſitu noto, curvarum æquationes, quæ alioqui ſine curvæ ſuppoſitâ longitudine exprimi poſſe non videntur, tangentes nihilo minus exhibere ſolis lineis rectis explicabiles; adeoque, ſi ipſius t aut s valor aliunde per lineas rectas ſignificari poſſet, mechanicarum Carteſii plurimas, ſi non omnes, ad totidem Geometricas hac ratione reducibiles exiſtere.

Hoc ſaltem liquet, modo dictas æquationes, per ſolas rectas naturâ ſuâ deſignabiles eſſe.

Æquatio enim curvæ inibi diſcuſſæ $zz = rx + yy$, quæ ipſam curvam z comprehendit,

æqua-

æquationem aliam huic curvæ propriam, ad tangentem determinatam producit; $ttrr + 4trxy = 4ttrx + 4ttyy + 4rxyy$, in quâ cum t seu PT sit recta, nullæ nisi rectæ reperiuntur; unde denuo si x posset tolli per aliunde conquisitam æquationem solas rectas continentem (quod, cum PT seu t sit recta, impossibile non erit) emerget curvæ æquatio Geometrica, sed de his alibi.

Scholium I. Notetur velim, in exposito curvilineo APE liberum esse quamlibet ex lineis, DH, HE, ED. pro primâ infinitesimâ adhibere, quoniam cæteræ ex triangulorum TPE, DHE similitudine, & laterum analogiâ sponte fluunt; tum & primam infinitesimam $\frac{h}{m}$ aut $\frac{k}{m}$, aut $\frac{l}{m}$ ex supponentis arbitrio, in omnibus curvæ punctis vel semper sibi constantem ejusdemque perpetuo magnitudinis, (ut si h aut k aut l ponantur æquales determinatæ cuidam r, unde $\frac{r}{m}$ sibi perpetuo æquabitur.) Vel variatâ continuis incrementis decrementisve quantitate mutabilem assumi posse, veluti, si k æqualis y supponatur, aut h ipsi t, unde $\frac{y}{m}$ aut $\frac{t}{m}$ item $\frac{l}{m}$ pro variâ ipsius y aut t aut l magnitudine variabitur.

Adeoque & in genere hinc consequi, pro tangentis inquisitione, beneplacito cujusvis relinqui, num applicatam EP, an interceptam AP quin & ipsam curvam ADE, in partes infinitesimas æquales vel inæquales, divisam esse supponere velit; nisi certam quandam ac definitam infinitesimarum limitationem, ex curvæ

væ rectarumve naturâ aut aliunde ortam, reſpicere neceſſarium ſit.

Hæc præcedentibus ritè perceptis probatione non egent, alioquin ex Axiom: II. immediate profluentia.

Schol. II. Ne vero continuis fractionum tricis implicitus impediatur calculus, aliâ in poſterum infiniteſimarum nomenclaturâ compendium venabimur, ipſam QP ſeu $DH : e$, $EH : a$. DE tangentis aut ſi mavis (juxta Lemm. 25.) curvæ portionem, a, appellantes, quod & in ſeqq:, ni ſecus moneatur, perpetim obtinebit, ubi, ſolâ y exceptâ quam ordinatæ deſignationi reſervamus, infiniteſimas quaſcunque per vocales, aut Græcas litteras denotabimus.

4. Sit igitur curvæ cujuslibet naturam, per lineas AP ſeu x & PE ſeu y exprimens æquatio ita ordinata, ut omnium terminorum ſumma nihilo æquivaleat: Verb: Gr: $x^3 + yxx + lx - y^3 - yyx - ky - s = o$, oportet ei tangentem deſignare.

5. Reducatur hæc ad lineas AQ & QD, quæ infiniteſimas involvunt, hoc eſt, ponatur AQ ſeu $x - e$ loco AP ſeu x, item QD ſeu $y - a$ loco y ſeu PE; conſtitutâque juxta curvæ datam proprietatem æquatione, orientur:

Pro x, terminus, $x^3 - 3exx + 3eex - e^3$.
$+yxx$ $yxx - 2eyx + yee$.
$= axx + 2aex - aee$.

$+lx$

$+lx$	$lx-le.$
$-y^3$	$-y^3+3ayy-3aay+a^3.$
$-yyx$	$-yyx+2ayx-aax.$
	$+eyy-2aey+aae.$
$-ky$	$-ky+ka.$
$-s$	$-s.$

6. In ortâ jam hac æquatione primum tollendi veniunt omnes termini, ubi nec a nec e reperitur; quoniam omnium ſumma nihilo æqualis eſt, quippe datam æquationem conſtituentium. Unde & hoc manifeſtum eſt, nullum æquationis curvæ terminum, ipſo x & y vacuum, in ortâ æquatione reſervari poſſe.

7. Tum ſinguli deleantur termini, ubi ipſorum a aut e poteſtas aut rectangulum invenitur, quippe, (per ſchol: 2. §. 3. & Lemm. 10.) pro non quantis aut pro nihilo habendi; unde in æquatione ortâ, ii tantum remanebunt termini, qui vel a vel e, ſed unius dimenſionis, continent; reſtabitque, deletis delendis, $-3exx-2eyx-axx-le+3ayy+2ayx+eyy+ka=0.$ & æquatione in analogiſmum reſoluta:

$3yy+2yx+k-xx:3xx+2yx+l-yy::e:a.$

8. Jam vero, cum ex conſtructione ſimilia ſint triangula DHE & TPE, eſt $HD:EH::TP:PE.$ ſeu $e:a::t:y.$

Quare

Quare & ex §. 7, $3yy+2yx+k-xx : 3xx+2yx+l-yy :: t : y$. Unde reducta æquatione obtinebitur æquatio ad tangentem: $3y^3+2yyx+ky-xxy = 3xxt+2yxt+lt-yyt$.

Hinc & in æquatione §. 7, remanenti pro a ipſum y, pro e ipſum t reponendum eſſe conſtat; ſimulque Eruditiſſimi *Barovii* methodus in aperto poſita eſt.

9. Notari velim, omnes curvarum æquationes duplici terminorum genere componi; quorum primum (ſecluſis ab hac conſideratione quantitatibus l, k, s, quæ pro cognitis habentur) vel ſolis x aut y, earumque poteſtatibus conſtat: ut y^3, ky, x^3, lx. quos terminos in poſterum *ſimplices* nominabimus: Alterum autem terminorum genus ex ipſis, x in y ductis conflatum eſt, ut yxx, yyx, & hos propterea *mixtos* dicemus.

10. Tum & obſervare licet, ex ſingulis æquationis Curvæ terminis ſimplicibus, ſingulos tantum huic ſervientes æquationi terminos oriri.

Cum enim poteſtates ipſarum y & x, per radices, $y-a$, & $x-e$, juxta §. 5. exprimendæ veniant, poſitâ ipſarum y aut x poteſtate maximâ, (ut in æquationibus vulgo ordinandis fieri ſolet) pro primo poteſtatis termino, ſolus ſecundus remanebit; primo ſiquidem per §. 6, re-

reliquiſque poſt ſecundum per §. 7, evaneſcentibus.

11. Quinetiam terminum ex ſimplici ſolum y continenti ortum, eſſe eundem æquationis curvæ terminum, per numerum dimenſionum ipſius y multiplicatum.

Sit enim in æquatione curvæ terminus y^c (poſito c pro poteſtatis ipſius y exponente) ac pro y, juxta §. 5, acceptum $y-a$ ſi ad poteſtatem c evehatur, remanebit, per §. 10, ſolus ſecundus $-cay^{c-1}$, &, juxta §. 8, y ipſi a ſubſtituto, erit terminus ortus $-cy^c$ ex ſimplici y^c.

12. Item, terminum interceptam x concernentem, ex ſimplici ortum, eſſe eundem æquationis datæ terminum per reſpectivum dimenſionum ipſius x numerum multiplicatum; ita tamen ut poſtea unicâ ipſius x dimenſione multetur, ac eidem t ſufficiatur.

Siquidem in poteſtate, cujus exponens b, à radice $x-e$, ſecundus terminus eſt $-bex^{b-1}$, &, per §. 8, mutato e in t, erit terminus ortus $-btx^{b-1}$ ex ſimplici x^b.

13. Signa terminorum in utrâque æquatione, tum curvæ, tum ad tangentem, ſunt eadem, cum enim, §. 10, non niſi ſecundi poteſtatum termini æquationem ad tangentem ingrediantur, iſtique, in radicibus binomiis

$y + a$, $x - e$, ſigno $-$ copulatis, contrario ſigno ac primi afficiantur, tota æquatio comparebit ſub ſignis æquationi ad curvam contrariis; unde mutatis omnibus, (quod ſalvâ æquatione fieri poſſe tyronibus notum eſt) utraque æquatio hoc in caſu, (de cæteris quilibet facile judicabit) iiſdem ſignis in reſpectivis terminis affecta eſſe videbitur.

14. Hinc regula tangentes ducendi oritur, cum curva æquationem habet terminis ſimplicibus conſtantem, Ex: Gr: data ſit curvæ æquatio, $y^4 - sy^3 + ky - x^4 + lxx - mx + n = o$ quæ ordinetur, ut omnes y â ſiniſtrâ, omnes x à dextra inveniantur, erit $y^4 - sy^3 + ky = x^4 - lxx + mx - n$, unde, juxta §. 11, 12, 13, ſingulis terminis per ipſarum y & x dimenſionum numerum multiplicatis, ac unicâ x in t mutatâ exſurget æquatio ad tangentem.

$$4y^4 - 3sy^3 + 1ky = 4x^3t - 2lxt + mt.$$

15. Jam vero terminos mixtos conſiderantibus, apparet ex ſingulis terminis mixtis binos pro æquatione ad tangentem terminos oriri; ſit enim terminus mixtus $y^c x^b$, & c ac b poteſtatum ipſarum y & x exponentes, oriuntur ex y^c, juxta, §. 7, terminis $y^c - cay^{c-1}$, item ex x^b termini $x^b - bex^{b-1}$, qui in ſe mutuo

mutuo ducti, deletis ex §. 6. & 7. delendis, dabunt pro $y^c x^b$ duos terminos $-cay^c - \frac{1}{x} - bex^b - 1y^c$ hoc est per §. 8. $-cy^c x^b - bfx^b - 1y^c$.

16. Hos terminos ita esse affectos statim videtur, ac si, ordinatâ æquatione, ut §. 14, idem terminus $y^c x^b$ sub contrario signo ab utraque æquationis parte reperiretur; & à parte sinistrâ sola y, à parte dextrâ sola x considerata fuisset; legesque §. 11. & 12. respectivè subiissent.

Quod etiam contrariis signis, si ab oppositis æquationis partibus statui intelligantur, affecti sint, patet ex §. 15, ubi uterque terminus sub eodem signo oritur, in reducendâ autem æquatione, ut §. 14, termini t continentes ad oppositas partes rediguntur, ac illi, á quibus t exulat, unde & ad contraria signa; quod satis notum est.

17. Quare hinc tandem emergit tangentes hujuscemodi expedita admodum ducendi methodus, sive simplicibus, sive mixtis terminis æquatio curvæ constiterit.

I°. Ordinetur æquatio curvæ, ut omnes termini sive simplices sive mixti, in quibus y seu applicata reperitur, á sinistrâ conspiciantur, rejectis, per §. 6, quotquot adfuerint, nec y nec x continentibus terminis.

III°. Om-

II°. Omnes termini, quos x intercepta ingreditur, ſtatuantur ad dextram, adeoque omnes termini mixti y & x ſimul continentes, juxta §. 15. & 16, ab utrâque parte æquationis ſub contrariis ſignis videbuntur.

III°. Singuli ad ſiniſtram poſiti in numerum dimenſionum ipſorum y reſpective ducantur, §. 11. & 16.

IV°. Singuli à dextra per numerum ipſorum x reſpective multiplicentur, ac unicâ ipſius x dimenſione multati ducantur in t, §. 12. & 16.

Et habebitur, ex datâ cujuslibet curvæ æquatione inter applicatam & interceptam conſtitutâ, æquatio ad tangentem determinata, Ex: Gr: ex datâ curvæ æquatione, §. 4, $x^3 + yxx + lx - y^3 - yyx - ky - s = o$, erit juxta N°. 1. $y^3 + yyx - yxx + ky$ æquationis pars ſiniſtra, & $x^3 + yxx - yyx + lx$ pars dextra, unde & hac facie apparebit æquatio $y^3 + yyx - yxx + ky \square x^3 + yxx - yyx + lx$, &, per N°. III. & IV, ſingulis x & y in reſpectivum dimenſionum numerum ductis, ac à dextrâ x in t mutato, fiet æquatio ad tangentem: $3y^3 + 2yyx - yxx + ky = 3xxt + 2yxt - yyt + lt$, ut ſupra.

18. Quæ autem de figuris verſus axem concavis demonſtravimus, aliis verſus axem convexis quivis applicabit, ac, ſi facto $AQ : x$, &

QD:

$QD : y$, fiat $AP : x + e$, & $PE : y + a$, eandem redituram æquationem, facile animadvertet.

19. Cum autem termini simplices ad parabolöides, mixti ad hyperbolöides, commodè referri posse videantur; utriusque tangentem exempli loco per inventum modo canonem definiemus. Sit parabolöides, ejusve complementum cujus æquatio $y^p = r^{p-q} x^q$; erit $t = \frac{p y^p}{q r^{p-q} x^{q-1}} = \frac{p x}{q}$, applicatâ fractione ad curvæ æquationem.

Sit hyperbolöides cujus æquatio $y^p x^q = s^p r^q$, erit hæc per §. 17, ordinata : $y^p x^q [] - y^p x^q$ & $t = \frac{p y^p x^q}{-q y^p x^{q-1}} = -\frac{p x}{q}$. Signum autem negativum hic innuere, ipsam t ab alterâ parte ipsius applicatæ respectu x sumendam esse, cuivis notum est.

20. Nec terminos tantum rationales, integrosque deposcit hæc methodus, verum & sese ad quoslibet surdos fractosque extendit.

Sit verb: gratia exposita curvæ æquatio, $\frac{y^6}{r^3} + y\sqrt{r x^3} + \sqrt{C \frac{r^7 x^4}{y y}} = x^3 + r^3$. Oportet ei subtangentem designare.

Quem in finem, juxta Lemm. 50, &c. hoc modo denotetur æquatio.

$y^6 r^{-3} + y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{4}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = x^3 + r^3$. erit æquatio ipſam ſubtangentem t manifeſtans

$6 y^6 r^{-3} t + y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} t - \frac{2}{3} r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{4}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$
$+ \frac{4}{3} r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}} t y^{-\frac{2}{3}} = 3 x x t.$

ſeu reductâ denotatione ordinariâ

$\frac{6 y^6}{r^3} + y \sqrt{r x^3} + \frac{3}{2} y t \sqrt{r x} - \frac{2}{3} \sqrt{C \frac{r^7 x^4}{y y}} + \frac{4}{3} t \sqrt{C \frac{r^7 x}{y y}}$

$= 3 x x t.$

Conſequentiæ ratio, quantitatum ſurdarum fractarumque deſignationem Lemm. modo citatis expoſitam intelligenti, obſcura non erit.

21. Hac datâ occaſione ſequentem obſervationculam intertexere liceat. Expoſitâ nimirum quotlibet dimenſionum æquatione ita conſtitutâ, ~~ut unum~~ terminum ex merâ ipſius y, alterumque ex eadem ipſius x poteſtate conſtantes habeat, cum terminis mixtis quotlibet intermediis, in qnibus ſumma dimenſionum ipſorum y & x ſemper maximam ipſius y vel x poteſtatem æquat: dico, quovis etiam numero aut ſigno ſinguli afficiantur termini, perpetuo t fore æqualem ipſi x:

detur enim æquatio, $2 y^4 + 3 x y^3 - 5 x x y y + 7 x^3 y = 6 x^4$ erit per ſuperiora $8 y^4 + 9 x y^3 - 10 x x y y + 7 x^3 y = 24 x^3 t + 10 y y x t - 3 y^3 t$

— 21

$-21yxxt$, & applicatâ curvæ æquatione, factoque $8y^4 = 24x^4 + 20xxyy - 12xy^3 - 28x^3y$ erit, repoſito hoc valore in locum ipſius $8y^4$, ac diviſione inſtitutâ, $t = x$. demonſtrationem non addo, levi negotio, poteſtatum ſymbolis generalioribus adhibitis, ex præcedentibus eruendam.

22. Sit jam, *Fig. X*, curva ADE, cujus pars AD vocetur: z, intercepta AQ: x, applicata DQ: y. hujuſque proprietatem exprimens æquatio ſit $zzy^3x^4 = r^9 + ppy^5zz$. oportet ei tangentem ducere. Quare poſito pro z ipſo $z + u$, pro y ipſo $y + a$, pro x ipſo $x + e$, redigatur ad infiniteſimas, &, deletis juxta ſuperiora delendis, orietur $4zzy^3x^3e + 3zzx^4yya + 2y^3x^4zu = 5ppzzy^4a + 2ppy^5zu$.

Cumque ob triangulorum TQD & DHE ſimilitudinem, appellatis tangenti TD: s, ſubtangenti TQ: t, ſit $u = \frac{ss}{t}$ item $a = \frac{ye}{t}$, emerget, hiſce valoribus ipſorum u & a loco in æquatione ſurrogatis, ac diviſione per $\frac{e}{t}$ inſtitutâ, æquatio ad tangentem $4zzy^3x^3t + 3zzy^3x^4 + 2zsy^3x^4 = 2ppy^5zs + 5ppy^5zz$ Potuiſſet & regula §. 17, propoſita ad hujus generis curvas extendi, niſi aliam occaſionem inter ſequentia præſtolari maluiſſemus.

23. Quomodo etiam *Fig. X.* ex datis curvarum tangentibus earum perpendiculares inveniantur, & vice verſâ, abunde conſtat. Siquidem, retentis §. 1, ſymbolis, ſi fiat $QS : l$, eſt ob angulum TDS rectum $TQ : QD :: QD : QS$. ſeu $t : y :: y : l$.

Sed & quomodo a priori, non ſuppoſitâ tangentis cognitione inveniantur, breviter oſtendam. Ob angulum TDS rectum triangula DHE & DQS ſunt ſimilia, adeoque $DQ : QS :: DH : EH$: ſeu $y : l :: e : a$. Unde datâ æquatione curvæ, eaque reductâ ad analogiſmum ut in §. 7, ad inventionem normalium pro e ipſum y, pro a ipſum l reponendum eſſe clatum eſt, videantur de hiſce §. 7 & 8.

24. Et hactenus de ducendis tangentibus perpendicularibuſque, ex datâ curvæ æquatione inter applicatam y & interceptam x conſtituta. Sequentibus autem exemplis, quomodo ex data relatione inter duas diverſarum curvarum applicatas, ac alterutrius tangenti, alterius tangens innoteſcat, exhibebimus. Ubi monuero methodum generaliorem in his & cæteris fere cunctis hujus naturæ problematis, in eo conſiſtere, ut tot numero inveniantur æquationes, quot aſſumtæ fuerint infiniteſimæ; ut, his per reductionem ejectis quæſitum fiat manifeſtum.

25. Sint

25. Sint *Fig. XI.* duæ curvæ, ADE, quam tangut recta TD; item alia curva ANK ad eundem axem poſita; dataque ſit relatio inter utriuſque applicatas DQ & QN; oportet ducere rectam LNK tangentem curvam ANK in N.

Sit $AQ:x$, $QD:y$, $TQ:t$, infiniteſimæ $QP = DH = NI:e$, $EH:a$, erit $EP = y+a$, $AP = x+e$, (quæ ſymbola in ſequentibus, ubi curva iiſdem majuſculis diſtincta reperitur, ni aliud inſinuetur, perpetuo obtinebunt.)

Sit item $QN:z$, infiniteſima $IK:o$ erit: $PK = z+o$; r ſit linea cognita, LQ ſubtangens quæſita $= k$.

Cum ergo hic aſſumtæ ſint tres numero infiniteſimæ, a, e, o, totidem inveniendæ erunt æquationes, quarum prima: $ye = ta$, quia $t:y::e:a$; ſecunda: $ze = ko$, quia $k:z::e:o$; unde ex utraque, $e = \frac{ta}{y} = \frac{ko}{z}$, ſeu $\frac{tza}{ky} = o$, tertiam ipſa curvarum relatio ſuppeditabit.

26. Sit igitur, in exemplum, $yy - zz = rr$. quâ æquatione ad infiniteſimas reductâ, poſitoque pro y ipſo $y+a$, & loco z ipſo $z+o$, orietur $yy + 2ay + aa - zz - 2oz - oo = rr$, &, rejectis juxta §. 6 & 7, rejiciendis, $ay = oz$, unde $o = \frac{ay}{z} = \frac{tza}{ky}$ ex præcedenti, quare $k = \frac{tzz}{yy} = LQ$.

notetur hoc in caſu, quia $\frac{y'}{t} = \frac{\xi\xi}{k}$, lineas $\mathcal{Q}S$, & $\mathcal{Q}F$, ſi DS & NF ſint reſpectivis curvis normales, in utrâque eſſe æquales.

27. Sit ex datâ curvarum relatione rectangulum $D\mathcal{Q}N$ æquale quadrato lineæ r, ſeu $yz = rr$. quæ æquatio per infiniteſimas expreſſa dabit $yz + yo + az + ao = rr$, hoc eſt per §. 6, & 7, $o = \frac{-a\xi}{y} = \frac{+t\xi a}{ky}$ juxta §. 25, ſeu $k = -t$. ex quo ſigno negativo apparet k & t ad diverſis applicatæ $N\mathcal{Q}$ partibus ſtatui oportere, & curvam ANK invertendam. Quod hic, ne figuras multiplicaremus, nos negleximus; & quivis, ubi caſus hoc requirit, in ſequentibus ex calculo facile ſupplebit.

Notetur, ſi y ponatur ad quamlibet parabolam, ut ſit $y^p = r^{p-q} \times q$, fore z ad quamlibet hyperbolam, cujus æquatio $z^p \times 1 = r^{p+q}$.

28. Detur rurſus curvarum relatio $y^p = r^{p-q} z^q$, erit æquatione ad infiniteſimas reductâ deletiſque delendis §. 6, & 7, $pay^{p-1} = qr^{p-q} z^{q-1} o$, quæ ducta in yz dabunt $pay^p z = qr^{p-q} z^q yo$, & diviſis per $y^p = r^{p-q} z^q$, erit: $\frac{pa\xi}{qy} = o = \frac{t\xi a}{ky}$ juxta §. 25, adeoque $k = \frac{qt}{p}$.

29. Hinc, ſi omnis generis Ciſſoidalium tangentes quis deſideret, fiat curvarum relatio,

y

$yz = xx$, quæ juxta præcedentia dabit: $yo + zt = 2ex$; fiunt autem ex §. 25, $a = \frac{ye}{t}$, $o = \frac{ze}{k}$, quibus in locum o & a suffectis oritur $\frac{yze}{k} + \frac{yze}{t} = 2ex$, factoque $yz = xx$, & divisis per xe, fit $\frac{x}{k} + \frac{x}{t} = 2$. seu $tx + kx = 2kt$, aut $\frac{tx}{2t-x} = k$. Unde, cum y possit poni ad quamvis curvam, omnium Cissoidalium tangentes unâ operâ determinantur, quacunque ex curvâ ortum traxerint.

30. Sit *Fig. XII.* curva $ADEF$, ac symbola quæ §. 25, hoc tantum discrimine, quod QO hic dicatur: x; item alia curva $ANKG$, quam tangat recta NR; voceturq: $RL: t$; sintq: KM, LN, AO parallelæ, quæritur ipsius RL longitudo, si detur æquatio curvæ AEF $r^p - x^p = y^p$, & utriusque curvæ relatio $y^s = r^{s-q} z^q$.

Cum sit primò $RL : LN :: KI : IN$. seu $t : x :: o : e$. erit $\frac{xo}{t} = e$. secundo constitutâ curvæ $ADEF$ æquatione inter OP & PE, seu inter $x - e$ & $y + a$, fiet $x^{p-1} e = y^{p-1} a$, quæ ad mox inventam æquationem applicita dabit $ty^{p-1} a = x^p o$. tertio, si æquatio mutuam curvarum relationem exprimens eodem modo tractetur, emerget, $sy^{s-1} a = qr^{s-q} z^{q-1} o$,

quæ duæ ultimò conquiſitæ æquationes quæſitam exhibebunt $s y^{s-1} x^p = t q r^{s-q} z^{q-1} y^{p-1}$. Quod ſi fiat $q = 1$, & æquatio hæc per datas curvarum æquationes diviſionis ope debitè reducatur, fiet $t = s y^{s-p} r^p + 1 - s - s z$; & facto $p + 1 = s$ erit $t = s y - s z$.

NB. ſi s ipſo $p + 1$ majus ſupponatur, quantitas $s y^{s-p}$ per r^{s-p-1} dividenda erit, quod ex Lemm. 50, &c. ſatis cognitum eſt.

31. Sit $A D E O$ ſemicirculus, *Fig. XIII.* N°. 1. cujus diameter $A O : r$; curva vero AKG ſit Ciſſöis, quam tangat recta $N R$, quæritur $R L$ ſeu t.

Sint eadem, quæ §. 25, ſymbola, ac $Q O = r - x$ vocetur l, erit $A P = x + e$ & $P O = l - e$; jam primo $R L : L N :: K I : I N$. ſeu $t : l :: o : e$, unde $o = \frac{te}{l}$, & cum ex proprietate circuli ſit $lx = yy$, ſi loco x ipſum $x + e$, loco l ipſum $l - e$, loco y ipſum $y + a$ ſufficiatur, emerget $le - xe = 2ay$. tertiò æquatio Ciſſöidis $xx = zy$ dabit $2ex = yo + za$. tandem æquationibus $lx = yy$ & $zy = xx$ ad x reductis orietur, $lz = xy$. ex quibus t hoc pacto inveſtigatur, quia $o = \frac{te}{l} = \frac{2xe - za}{y}$ erit $tye = 2lxe - lza$, unde, factis ut ſupra $lx = yy$ & $lz = xy$, diviſiſque omnibus per y, fiet $a = \frac{2ye - te}{x} = \frac{le - xe}{2y}$ juxta mox

mox inventa, quâ æquatione ordinatâ, & ſubſtituto loco $x\,x$ ipſo $z\,y$, ac pro $l\,x$ ipſo $y\,y$ emerget $t = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = LR$. quæ conſtructionem omnium, nifallor, expeditiſſimam admittit, ſumendo nimirum, RL æqualem $\frac{2}{3}D\,\mathfrak{Q} + \frac{1}{3}\mathfrak{Q}N$.

32. Hoc etiam fonte manat ſingularis ac utiliſſima methodus tangentes ducendi, quæ nec quantitates ſurdas quomodolibet compoſitas, nec fractiones moratur.

Ex: Gr: ſit *Fig. XI.* curva ADE, cujus intercepta $A\mathfrak{Q}: x$, applicata $D\,\mathfrak{Q}: y$, & æquatio hujus proprietatem exprimens $\sqrt{Crrx+y^3} - \sqrt{rr+xx} = y$. & huic tangens ſit deſignanda.

Quem in finem quælibet quantitas ſurda ſtatuatur æqualis alteri cuidam aſſumtæ, fiatque $\sqrt{Crrx+y^3} = f$ & $\sqrt{rr+xx} = z$, quævocentur idcirco *æquationes aſſumtæ*, concipianturque totidem curvæ, ACG, ANK, ad eundem axem $A\mathfrak{Q}$ eſſe deſcriptæ, quarum applicatæ ſint aſſumtis quantitatibus æquales; nimirum $C\,\mathfrak{Q} = f$, & $\mathfrak{Q}N = z$; unde æquatio curvæ expoſitæ ADE erit $f - z = y$, quæ vocetur *æquatio ex aſſumtis orta*. Tandem cuilibet indeterminatæ ſua tribuatur infiniteſima, ponendo loco $A\,\mathfrak{Q}: x$, ipſam $AP: x + e$; loco $D\,\mathfrak{Q}: y$, ipſam $EP: y + a$; loco $C\,\mathfrak{Q}: f$, ipſam $GP: f + o$; denique loco $\mathfrak{Q}\,N: z$, ipſam $PK: z + i$; exi-

exiſtentibus, QP, EH, GM, IK, ſeu e, a, o, i infiniteſimis. Emergetque, juxta ſuperius tradita, æquatio ad infiniteſimas reducta, $f+o-z-i=y+a$, & deletis delendis, ex §. 6, $o-i=a$.

Ex qua ſublatis infiniteſimis invenietur curvæ expoſitæ ſubtangens TQ ſeu t.

Hoc autem duplici modo effectum dari poteſt, quorum uterque examinari quodammodo meretur.

Primus modus in eo conſiſtit, ut, præter æquationem $ta=ye$ expoſitæ curvæ ordinariam, æquationes aſſumtæ omnes ad infiniteſimas redigantur; & ope harum infiniteſimæ ex æquatione ex aſſumtis ortâ, ad infiniteſimas tamen prius reductâ, auferantur.

Sic aſſumta æquatio prima fuit $rrx+y^3=f^3$ quæ ad infiniteſimas redacta exhibebit $o=\frac{rre+3yya}{3ff}$.

Secunda aſſumta æquatio, $rr+xx=zz$, dabit ſimili modo tractata $i=\frac{xe}{z}$.

Quibus valoribus in æquatione $o-i=a$ repoſitis, orietur $\frac{rrze-3ffxe}{3ffz-3yyz}=a=\frac{ye}{t}$ ex æquatione modo inventâ, unde emergit quæſita ſubtangens $t=\frac{3ffzy-3y^3z}{rrz-3ffx}$.

Se-

Secundus hoc idem efficiendi *modus* fit per aſſumtarum curvarum ACG & ANK ſubtangentes RQ & LQ, quæ ſingulæ ſuas æquationes, pro tollendis ex æquatione ex aſſumtis ortâ infiniteſimis, conferunt.

Cum enim ſit in curvâ ADE, $t:y::e:a$, ſeu $ye = ta$; erit eadem ratione, poſitâ $RQ = k$, in curvâ ACG, $RQ:CQ::CM:MG$ ſeu $k:f::e:o$, unde $fe = ko$; nec non in curvâ ANK, poſitâ $LQ = h$, erit, $LQ:QN::NI:IK$ ſeu $h:z::e:i$, unde $ze = hi$.

Hinc invenitur, $a = \frac{ye}{t}$, & $o = \frac{fe}{k}$, nec non $i = \frac{ze}{h}$, quibus jam valoribus loco, i, &, o, & a, in æquatione $o - i = a$ ſubſtitutis, emerget $\frac{fe}{k} - \frac{ze}{h} = \frac{ye}{t}$; adeoque poſt debitam reductionem $t = \frac{ykh}{fh - zk}$.

Quin & circa utrumque hunc modum obſervatu dignum erit, ſecundum, uti primo magis compendioſum, ita & generaliorem eſſe: cum enim primus, per ipſas curvarum proprietates ſuâ naturâ determinatus, non niſi curvæ ADE inſerviat; ſecundus infinitarum curvarum, pro variâ ipſarum y, f, z, ad x relatione caſus comprehendit, levi negotio ad quamlibet curvam particularem determinabilis, ſi loco ſubtangentium

tium h & k, valores juxta primum, quem dedimus, modum inventi, ſufficiantur; hos enim valores ex datâ curvarum, quas reſpiciunt, proprietate etiam datas eſſe, præcedentia intelligenti ſatis manifeſtum erit.

33. *Ex: II.* Aſſumtâ eâdem *Fig. XI.* vocetur AD curva perpetuo c, cujus infiniteſima $D\dot{E}$ ſit u; dicaturque ipſius tangens $TD: s$; & manentibus iiſdem, quæ in præcedenti exemplo, ſymbolis, æquatio illius relationem exprimens ſit. $\sqrt{C\frac{r^4c^4}{yy+rx}} + \sqrt{\frac{rrc^4+yyx^4}{cc+xx}} = yy+rc$ oportet ei tangentem deſignare. Cum vero hic fractiones occurrant & termini inſuper irrationales, varii ſunt modi, quibus intentum aſſequi valemus, juxta varias quantitatum aſſumtiones. Sic aſſumto integro termino $\sqrt{C\frac{r^4c^4}{yy+rx}} = ff$, item alio $\sqrt{\frac{rrc^4+yyx^4}{cc+xx}} = zz$, erit æquatio ex aſſumtis orta $ff+zz=yy+rc$; quæ ordinata, ut ſupra, ad curvas reſpectivas, & reducta ad infiniteſimas dabit $2fo+2zi=2ya+ru$. Unde ſublatis per curvarum proprietates infiniteſimis poſitoque $u=\frac{se}{t}$ (eſt enim $t:s::e:u$) erit factâ reductione debitâ $t=\frac{2yykh+rskh}{2ffh+2zzk}$.

Quod ſi aliæ quantitates terminorum irratio-

na-

nalium fractorumque loco assumantur, idem, sed aliâ ratione, obtinebitur quæsitæ subtangentis valor. Sic considerari possunt primo fractionum denominatores, assumique, $ff = yy + rx$, & $zz = cc + xx$. Deinde numeratoribus hac lege assumtis, ut per denominatores suos divisionem, ac per signa radicalia præfixa extractionem pati capaces sint, alia æquatio ex assumtis orta emerget.

Verb: Gr: si fiat $r^4 c^4 = ffr^3 l^1$, & $rrc^4 + yyx^4 = zzrrgg$; quinimo si visum fuerit, & quantitas rationalis yy posset assumi $= rd$; erit æquatio ex assumtis orta $rl + rg = rc + rd$, seu, $l + g = c + d$. quem in finem, cum sola c, (item x & y, si adessent) ad curvam expositam ADE pertineat, ex cæterarum l, g, d, proprietate tot curvæ ACG, ANK, AXZ, ad eundem axem $A\mathcal{Q}$ descriptæ supponantur, ita, ut $C\mathcal{Q}$ sit $= l$, cujus infinitesima $GM = o$, subtangens $\mathcal{Q}R = k$; tum $\mathcal{Q}N$ & $\mathcal{Q}X$ existentibus $= d$ & g, quarum respectivæ infinitesimæ sint IK & OZ, seu, i & λ, ac subtangentes $L\mathcal{Q}$ & $B\mathcal{Q}$ relative h & n; emerget, si æquatio ex assumtis orta ad respectivas reducatur infinitesimas $o + \lambda = u + i$.

Cum autem, juxta præcedentia, sit in curvis respectivis $o = \frac{le}{k}$, item $i = \frac{de}{h}$, nec non $a = \frac{y}{t}e$, ut & $u = \frac{se}{t}$, ac tandem $\lambda = \frac{ge}{n}$; his in locum infinitesimarum suffectis, & reductione institutâ fiet $t = \frac{skhn}{ihn - dkn + gkh}$.

Quin

Quin & caſus non infrequentes ſolent occurrere, ubi curvæ proprietas inter ipſas x, aut y, (licet ſurdis quibuſdam quantitatibus fractionibuſque implicitas) non conſiſtit; ſed per plurimas indeterminatas, æquationeſque ex illis promanantes, cognita eſt; quæ tamen omnes, ſi modo vulgari tangens inquiratur, ad unicam æquationem reducendæ ſunt; hac autem methodo tractatæ levi operâ abſque reductione intentum produnt.

Sit in exemplum *Fig. XIII.* N°. 2. Conchöis ADE, polo K ac normâ FG deſcripta, cujus applicata QD ſit: y; intercepta $AQ: x$; $AF = DL: r$; $FK: s$; erit $QF = r - x$, quæ vocetur h; item $QK = s + r - x$, quæ dicatur f; KD ſit z, ac ſubtangens $TQ: t$.

Emergent pro naturâ Conchöidis explicandâ ſequentes æquationes I, $r - x = h$. II, $s + r - x = f$. III, $fr = hz$, eſt enim $QF. h: DL. r :: QK. f: DK. z$. IV, $yy + ff = zz$, ob triangulum KQD rectangulum in Q.

Ex hiſce jam æquationibus, abſque reductione ulteriori, quæritur tangens expoſitæ Conchöidis.

Quare, exceptis quantitatibus determinatis r & s, ſupponantur reliquæ, quarum magnitudo pro variâ ſui ad Conchöidem poſitione varia eſt, per reſpectivas infiniteſimas creſcere, QD ſeu

seu y quidem per infinitesimam a; AQ seu x per e; QF seu b per u; QK seu f per o; & DK seu z per i.

Concipianturque ex supra inventis æquationibus tot curvæ, quarum applicatæ sint b, f, z, descriptæ esse ad axem Conchoidis AF, quot æquationum inibi repertarum multitudo requirit, (quas tamen curvas ex instituto omisimus, ut pateat hanc quidem methodum curvarum istarum descriptionem pro demonstratione sui agnoscere, in ipsâ autem problematis solutione eas absolute necessarias non esse) ac redigantur æquationes ad infinitesimas:

erit ex I, $r - x - e = b + u$, unde $u = -e$.

ex II, $s + r - x - e = f + o$, unde $o = -e$.

ex III, $rf + ro = bz + bi + zu$, unde $ro = bi + zu$.

ex IV. $yy + 2ay + ff + 2fo = zz + 2zi$, unde $ya + fo = zi$.

jam, loco u & o ponendo $-e$, in III. & IV. fiet $\frac{ze - re}{b} = i = \frac{ya - fe}{z}$, quare $a = \frac{zze - rze + bfe}{by} = \frac{ye}{t}$, est enim ex curvâ TQ, $t : QD. y :: DH. e : HE. a$, unde $t = \frac{byy}{zz - rz + bf}$.

Notetur hinc consequi compendiosam illam constructionem à *Cartesio lib. II. Geom:* insinuatam, est enim Conchoidi in D normalem recta in axe determinans $= \frac{yy}{t} = \frac{zz - rz}{t} + f$.

Obſervari meretur, anxiè inquiri opus non eſſe, num indeterminatæ per infiniteſimas creſcant, an vero decreſcant, cum ipſa operatio ex curvæ naturâ cognitâ, in reliquis hoc ſuapte ſponte patefaciat. Quantum etiam hæc tangentes ducendi ratio uſum, & in calculo algebraico compendium præſtet, imprimis circa maximi minimique determinationem, aliaque difficiliora matheſeos problemata, rerum peritis ſatis perſpectum eſt.

35. Quapropter, ut calculum hunc, licet præ aliis ſatis expeditum, adhuc quantum fieri poteſt contrahamus, ſequentem ſubjicimus canonem in omnibus, quos hactenus recenſuimus, caſibus utilem. Ubi monuero me, ut alibi, ita & hic, *indeterminatarum* nomine tales quantitates denotare, quæ pro variâ poſitione magnitudinem variant, quales ſunt curvarum omnium interceptæ & applicatæ, quin & ipſæ curvæ ad eas relativæ.

I. Singuli (iis, qui meris quantitatibus determinatis conſtant, rejectis) termini indeterminatas quantitates continentes, per exponentes poteſtatis ſingularum indeterminatarum multiplicentur, unamquamque ſcilicet indeterminatam ſeorſim conſiderando. Unde ſinguli termini æquationis curvæ ſecundum indeterminatarum, quas continent, numerum in

in æquatione ad tangentem repetendi erunt, quo facto illi, qui unam indeterminatam continent, semel; qui duas, bis; qui tres, ter concurrent ad æquationem tangentis inquisitioni servientem efformandam, sic terminus $ff z' y$ propter tres indeterminatas, f, z, y, tres æquationi ad tangentem terminos suppeditabit, $2 ff z' y$ ubi sola f, $3 ff z' y$ ubi sola z, & $ff z' y$ ubi sola y consideratur, & sic in cæteris.

II. Ubi indeterminata *applicatam* denotans consideratur, per omnes aliarum curvarum subtangentes, propriam subtangentem omittendo, multiplicetur terminus.

III. Ubi indeterminata *curvam* significans consideratur; unicâ per divisionem demptâ, eiq: tangenti hujus curvæ substitutâ, & hic per omnes aliarum curvarum subtangentes, propriam subtangentem omittendo, multiplicetur terminus.

IV. Ubi indeterminata *axem* seu *interceptam* referens consideratur, unicâ demptâ divisionis ope per omnes omnium curvarum subtangentes, nullam subtangentem omittendo, multiplicetur terminus.

V. Circa signorum notationem observetur, terminos omnes ortos his in casibus iisdem signis insigniendos esse, quibus termini, unde originem

nem duxerunt, affecti ſunt; modo ab eâdem æquationis parte poſiti maneant, & poteſtates indeterminatarum, quæ conſiderantur, ſint affirmativæ ſeu ſigno + notatæ; ſecus contrarium eveniet.

Quo peracto habebitur æquatio, pro cujuslibet curvæ æquationem datam, ſeu per ſe, ſeu per lineas ſibi proprias ingredientis, tangenti inveſtigandâ.

Demonſtrationem, ut ex præcedentibus, ita ex ſequenti exemplo quilibet hauriet.

Scholium. Licet enim hic indeterminatæ continuò per infiniteſimas ſigno + affectas creſcere ſupponantur, quod tamen in multis occaſionibus alio modo contingit, nihil tamen officiet; cum æquationem hanc generalem ad unicam, cujus tangens quæritur, curvam reſtringendo, ſigna in ordinem ſuum ſint reditura. Nec in algebrâ novum eſt, æquationem, cujus omnes termini ſigno + affecti ſunt, nihilo æqualem ſtatuere, juxtaque eam, uti normam, aliarum æquationum, quarum ſigna variant, proprietates inveſtigare, cujus demonſtrationem, cum ex ſequentibus ſatis apparitura ſit, hic pleniori diſcurſu, brevitati ſtudentes non firmabimus.

36. Sit *Fig. XI.* curvæ *ADE*, *ACG*, *ANK*, circa eundem axem *AQ* deſcriptæ, vocenturque curva *AD*: *c*. *DQ* applicata: *y*, item curva *AC*: *d*. *QC* applicata: *f*. tum & *QN*: *z*. & communis omnium curvarum intercepta *AQ*: *x*. ac detur æquatio.

$$ddy^3x + ccf^3z = r^6 + ffz^3y.$$

Quæ-

Quæritur, per canonem modo traditum, curvæ ex hisce tribus pro arbitrio selectæ tangens:

Sit eum in finem curvæ ADE, tangens $TD: s$, subtangens $TQ: t$. deinde curvæ ACG, tangens $RC: h$, subtangens $RQ: k$. tandem curvæ ANK, subtangens $LQ: n$.

Emerget singulis terminis juxta indeterminatarum, quas comprehendunt, numerum separatim tractatis

$ddy^3nkt+3ddy^3xnk+2dhy^3xnt$ loco ddy^3x,
$+ccf^3zkt+3ccf^3ztn+2csf^3zkn$ loco $ccfz$,
$+ffz^3ykn+3ffz^3ykt+2ffz^3ytn$ loco $ffzy$,

adeoque, rejectâ quantitate r^o plane cognitâ, æquatio

$ddy^3nkt+3ddy^3xnk+2dhy^3xnt+ccf^3zkt+3ccf^3ztn+2csf^3zkn = ffz^3ykn 3ffz^3ykt+2ffz^3ytn$

ad quamlibet ex subtangentibus t, aut k, aut n, determinabilis.

Quod si hæc ex methodo generali §. 32, & 33, expositâ inquiratur: indeterminatæ omnes per respectivas infinitesimas crescere supponantur, hoc est, in æquatione ad infinitesimas redigendâ, quod hic requiritur, loco, x, y, z, f, d, z, respectivè sufficiantur $x+e, y+a, z+u, f+o, d+i, z+\lambda$. & fiet sublatis juxta §. 6 & 7. tollendis

$y^3dde+3yyddxa+2dy^3xi+2csf^3zu+$

$3ccffz\,o+ccf'\lambda = 2fz'yo+3ffzzy\lambda+ffz'a.$

Unde articulus hujus regulæ primus demonſtrationem ſuam petit.

Porro cum ex curvarum naturâ ſic $a = \frac{ye}{t}$, $u = \frac{se}{t}$, $o = \frac{fe}{k}$, $i = \frac{be}{k}$, & $\lambda = \frac{ze}{n}$, hiſce in infiniteſimarum locum ſurrogatis orietur æquatio, ubi ſinguli termini (ſolis illis, in quibus e reperitur exceptis) per ejus curvæ ſubtangentem diviſi erunt, ad quam aut cujus applicatam infiniteſima referri debet: iſtique, quos infiniteſimæ i & u ingrediuntur, per curvarum hiſce infiniteſimis creſcentium tangentes, unicâ curvarum poteſtate diminuti, multiplicati apparebunt.

Unde, æquationem reducendo, ipſâ operatione patebit ſequentium hujus canonis articulorum demonſtratio.

Quam obiter tyronibus indigitaſſe, ne tædium pariam, hic ſuffecerit; exercitatis alioquin ſatis obviam.

37. Sit *Fig. XI.* perſtantibus iiſdem, $fz = yy$, hoc eſt, curva ADE ejus naturæ, ut, ductis duabus curvis ACG & ANK ad eundem axem, ſit perpetuo rectangulum NQC æquale quadrato in DQ. oportet uni ex his tangentem deſignare. Quare, adhibitâ §. 35. traditâ methodo, erit, retentis iiſdem ſubtangentium ſymbolis,

æqua-

æquatio generalis ad tangentem, $fznt+fztk = 2yykn$, & facto $yy = fz$, ac diviſione inſtitutâ, $nt+tk = 2kn$.

Unde, ex datis duarum quarumlibet curvarum ſubtangentibus, ſubtangens tertiæ manifeſtatur.

Coroll. I. Notetur hanc, ut & conſimiles æquationes ad infinitas curvas determinari poſſe, earumque omnium tangentes hac ratione una opera definiri. Verb: Grat: ſit, f ad triangulum ſeu, $f = x$ erit $k = f = x$, & ſit z ad trianguli complementum ſeu $z = 2r-x$, erit $n = -z = x-2r$, adeoque y ad circulum, ſeu $yy = 2rx-xx$; cujus ergo ſubtangens $t = \frac{2kn}{n+k} = \frac{2xx-4rx}{2x-2r}$ ſeu $\frac{2rx-xx}{r-x}$ ut ſupra.

Coroll. II. Sit yy ad hyperbolam, ſeu $yy = rx+\frac{r}{q}xx$. poteſt ſumi f ad triangulum, & fieri $f = x$; unde, uti mox, $k = f = x$. & remanebit $z = r+\frac{r}{q}x$ ad aliud triangulum, unde $n = \frac{qz}{r} = q+x$; adeoque hyperbolæ ſubtangens $t = \frac{2qx+2xx}{q+2x}$.

Coroll. III. Quin & hoc generaliter obtinet; datis tribus curvis, quarum applicatæ ſint in continua proportione, ut ſit $f:y::y:z$. erit ut ſumma ſubtangentium extremarum, $n+k$, ad alterutrius ſubtangentem k, ita ſubtangens reliquæ, n, ad ſemiſſem ſubtangentis mediæ $\frac{1}{2}t$. *Co-*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [75] - 53

Coroll. IV. Sit z ad circulum, & $zz = 2rx - xx$, item f ad hyperbolam æquilateram & $ff = 2rx + xx$, erit $y^4 = 4rrxx - x^4$; cujus ergo tangens ex circuli & hyperbolæ tangentibus cognita eſt; neque novit hujus methodi extenſio limitem.

Coroll. V. Hoc tamen inter cætera notetur; cum omnes tangentium methodi in determinatâ alicujus curvæ natura ſubſtiterint, ejuſque parametros determinatas depoſcant, hanc ſolam parametrorum limitationem non reſpicere. Verb. Grat. ſit $z = x$, erit $fx = yy$; quæ æquatio, ſi f foret determinata $= r$, eſſet ad parabolam; ipſâ autem f manente indeterminatâ, erit ad curvam ex infinitis parabolis formatam, quarumque parametri ſunt curvæ pro arbitrio ſumendæ ſe mutuo ſequentes applicatæ; cujuſque æquatio ad tangentem, cum hoc in caſu ſit $n = x$, per modo inventa, erit $tx + tk = 2kx$. quæ æquatio, ſi ad parabolam ordinariam limitari debeat, fiet $z = r$, unde k eſt infinita; quare, per Schol: Gener: Lemm. N.XII. rejectâ tx, erit $tk = 2kx$, & $t = 2x$, uti oportet.

§. 38. Antequam ad alia tranſeam, hoc addo. Sit iiſdem manentibus $zfx + zxx = fyy$, quæ æquatio, præter infinitas alîus generis curvas, etiam eſt ad infinitas hyperbolas, ſeu curvam

vam ex iis formatam. Quæritur ipsius tangens.

Hæc autem juxta præcedentem regulam quæsita dabit æquationem

$zftnk+zfxnt+zfxkt+2zxtnk+zxxkt = 2fyykn+fyynt.$

quæ, pro variâ ipsarum f & z ad varias curvas determinatione, variarum, imo infinitarum curvarum tangentibus inveniendis sola inservire potest. Quod præcedentis paragraphi corollaria satis faciunt manifestum.

39. Quo vero modo generalis hæc æquatio rursum ad hyperbolam vulgarem limitetur, ostendisse operæ fuerit pretium; cum hic non sine cautelâ à generali ad particulare regressus detur.

Fiat ergo $f = q$, & $z = r$; aut si mavis, utraque, cum ad omnes lineas possit, ad parallelogrammi rectanguli applicatam determinetur; erunt eo ipso k & n infinitæ, (cum rectanguli subtangens sit infinita, quod facili negotio demonstrabile & omnibus notum est) dividatur jam tota æquatio per infinitam k, erit $zftn + \frac{zfxtn}{k} + zfxt + 2zxtn + zxxt = 2fyyn + \frac{fyynt}{k}$.

Jam vero, ex Schol: Gener: Lemm. N. XIV, termini $\frac{zfxtn}{k}$ & $\frac{fyynt}{k}$ per infinitam n multipli-

cati, ac rurſum per infinitam k diviſi fiunt hoc ipſo determinabiles; unde, per ejuſdem Schol. N. XII, cum omnibus cæteris terminis determinabilibus $zfxt$, $zxxt$, rejecti æquationem hanc reliquam faciunt: $zftn+2zxtn = 2fyyn$, aut repoſitis pro f & z valoribus q & r, ac reductâ æquatione, $qrt+2rxt = 2qyy$. quæ æquatio eſt ad tangentem hyperbolæ Apollonianæ, cujus æquatio: $qrx+rxx = qyy$.

Poſſet & hæc regreſſio alio modo fieri, dividendo omnes terminos per utramque infinitam kn. unde ex ejuſdem Scholii General: præceptis idem proveniret.

Coroll. Hinc *maximi* ac *minimi* jam plurimis uſitata methodus demonſtrationem ſuam hauſit; tum & altiorum quoque graduum curvarum in plano deſcriptiones facillimo forſan modo deducuntur; quæ, cum hujus non ſint loci, uti & plurima alia hinc originem ducentia, latius hoc tractatu non proſequemur.

40. Hoc addam, methodum huic conſequi, quâ ſi determinatæ cujuſdam curvæ, Verb: Gr: Ciſſoidis tangens expetatur, poſſit hac ratione æquatio exhiberi, non modo Ciſſoidis ex circulo aliisve curvis infinitis oriundæ, verum & aliarum inſimul curvarum, ac ſatis primâ fronte à Ciſſoide diſſentiri apparentium tangentes

unâ

unâ operâ determinans. Sit ergo, *Fig. XI*, curva *ANK* Cissöis ex circulo *ADE* ortum ducens; ac vocatis radio r, $A\mathcal{Q}: x$. $D\mathcal{Q}: y$, $\mathcal{Q}N: f$. ipsius æquatio $x^3 = 2rff - xff$. fiatque $2r - x = z$, cui æqualis statuatur curvæ *ACG* applicata $C\mathcal{Q}$, erit $x^3 = zff$. ac posita x ad aliam curvam, cujus applicata $\mathcal{Q}X = d$, erit $dxx = zff$, aut $ddx = zff$, aut $d^3 = zff$ pro libitu; unde tangentem inveniendo per superiora, & Cissöidis & infinitarum præterea curvarum tangentes habebuntur.

Potuisset & ipsa Cissöidis æquatio per aliam indeterminatam dividi, aut multiplicari, Verb: Gr: per x; ac foret, $x^4 = 2rxff - xxff$; ubi, factis $2rx - xx = yy$, fieret $xx = fy$. ac, ipsam x ad applicatam d referendo, $dx = fy$, aut $dd = fy$ unde idem consequeretur.

Hæc autem mille modis variari posse jam sufficienter probatum autumo.

Scholium. Cunctis fere Mathematicis hactenus in more fuit positum curvarum proprietates æquationibus comprehendere; in iisque quantitates, quæ *parametrorum* nomine venire vulgo solent, in omnibus curvæ punctis ejusdem ac invariatæ magnitudinis considerare; uti & pro immutabilibus habere quarumlibet quantitatum æquationem ingredientium, potestatum exponentes; cæteris, quæ indeterminatæ audiunt, & quantitatem mutant, residuam solummodo terminorum æquationisque partem constituentibus; has autem curvas hujus capitis initio discussimus.

Alia vero curvarum genera præcedentibus proximè paragraphis expendimus, ubi nimirum & ipſæ parametri indeterminatæ, ac in ſingulis curvarum punctis ex loci, ad quem pertinere ſupponuntur, lege variæ fuerunt; manentibus interim poteſtatum indicibus determinatis ac conſtantibus. Quare & curvarum ordo ad eas impræſentiarum nos deduxiſſe videtur, in quibus poteſtatum indices in ſingulis curvæ punctis immutantur.

Quarum conſideratio, ſi plane nova non ſit, trita ſaltem & multis obvia cenſeri non debet. Ac cum hac in parte Geometria ac imprimis problematum, alias ſatis difficilium, conſtructio maximopere poſſit promoveri; eæque curvæ in Matheſi potiſſimum ad res Phyſicas applicata frequentiſſimè occurrere, quinimo enaſci ſua ſponte videantur; nec earum in plano delineationes uſque adeo ſint cognitæ; operæ forſitan fuerit pretium hiſce curvarum quandam ſpeciem præmittere; quas & ipſa natura quandoque formare deprehenditur, quarumque proprietas expreſſâ æquatione, ad inſtar aliarum, primâ inſtantiâ efferri minime ſolet; quæ tamen curvarum modo recenſitarum originem, ac deſcriptiones in plano, plurimum illuſtrant.

41. Sit, *Fig. XVIII.* N°. 3, recta AF determinata $= f$, cui in dato quolibet angulo AFG applicetur recta FG itidem determinata $= g$; eâ conditione, ut (aſſumtis ipſius AF parte aut partibus quibusvis aliquotis AH, AB, &c. quinimo, ſi viſum fuerit, in ipſâ AF productâ, ipſius AF in datâ quavis ratione multiplicibus AD, AK, &c.) ſi ad ſingulas aſſumtarum extremitates H aut B, aut D, aut K & ſimiles, ſingulæ rectæ HN, BC, DE, KM, &c. reſpective applicentur, ipſi FG æquidiſtantes, hæ

hæ legem quandam obſervent ac relationem conſtantem & immutabilem, tum reſpectu ipſuis FG, tum reſpectu aſſumtæ, quam abſcindunt.

Hoc autem toties fieri ſupponatur, donec ipſæ applicatæ proxime HB, BC, &c. non niſi infiniteſimâ parte HB a ſe mutuo diſtent; unde ipſa $ANCGEM\mathcal{Q}$, ſeu rectularum, quæ applicatarum extrema connectunt, ſumma in curvam regularem abibit.

Quæritur jam, ex cognitâ applicatarum ſpeciali relatione, ipſius curvæ æquatio Geometrica, ſeu talis, quæ inter hujus curvæ applicatam interceptamque conſtituta eſt, ipſiuſque curvæ tangens.

Sit, ergo curva $AG\mathcal{Q}$ ratione modo expoſitâ generata; ac ſumtis $AH = \frac{1}{1}f$, $AB = \frac{1}{3}f$, $AD = \frac{1}{5}f$, $AK = 2f$, *& ſic pro arbitrio pergendo.* ſpecialis applicatarum inter ſe relatio ſit ea, quæ ſequitur, nimirum, $HN = \frac{1}{3}g$, $BC = \frac{16}{15}g$, $DE = \frac{64}{45}g$, $KM = 4g$, ac ſic in cæteris. Unde partium ipſius AF aliquotarum, ipſiuſque multiplicium exponentes numeros vocando generali applicatione z, hæc emerget curvæ ex præmiſſâ hypotheſi proprietas; ſcilicet, ſi

ſi AB aut AD aſſumta fuerit $= zf$, erit ipſam reſpiciens applicata BC aut $DE = zzg$. ex quibus hoc pacto curvæ æquatio Geometrica innoteſcit: ſit: $AD = zf = x$, erit, $z = \frac{x}{f}$; tum & $AD = zzg = y$, erit $zz = \frac{y}{g} = \frac{xx}{ff}$, & $\frac{ff}{g}y = xx$. unde patet curvam $AG\mathcal{Q}$ eſſe parabolam, cujus latus rectum $= \frac{ff}{g}$.

Subtangens autem hujus ſeu t eſt ex §. 35. $= \frac{ffy}{2gx}$, & loco x & y valores reponendo $= \frac{zf}{2}$.

Ne autem, ut in § proximè prægreſſo, applicatarum abſciſſarumque relationes numeris continuo exprimere neceſſe habeamus, in ſequentibus numerorum loco ſolam z adhibebimus, ipſâque quoslibet tum partium aliquotarum, tum multiplicium ipſius AF exponentes numeros ſignificabimus, tum & curvæ, quæ præ manibus eſt, ſubtangentem t, uti ſæpius, dicemus.

42. Sit, ſtante §. 41. Hypotheſi, $AD = zf = x$, ac $DE = \frac{g}{z} = y$, erit $z = \frac{x}{f} = \frac{g}{y}$, & $xy = fg$; unde curva $AE\mathcal{Q}$ eſt hyperbola, ac ſubtangens $t = -x$.

43. Manentibus iiſdem, ac $AD = zf = x$, ſit $DE = y = \sqrt{zfg - zzgg}$, ſeu, $zfg - zzgg = yy$; unde in ultimâ hac æquatione poſito $\frac{x}{f}$ loco z, erit $xg - \frac{xx}{ff}gg = yy$, æquatio ad Ellipſin; & facto $g = f$, ad circulum $fx - xx = yy$;

ſub-

ſubtangens ex præcedentibus nota eſt.

43. Sit, poſitis p & q poteſtatum determinatis indicibus, ac cæteris ut ſupra, $zpf = x = AD$, ac $zqg = DE = y$, eſt $zp = \frac{x}{f}$, & $zq = \frac{y}{g}$, unde poſt reductam æquationem $g^p x^q = f^q y^p$, locus ad paraboliformem quamlibet. Quod ſi q ſigno negativo afficiatur, fiatque $\frac{g}{z^q} = y$, erit æquatio $y^p x^q = g^p f^q$ ad hyperboliformem.

45. Sit $zf + zzf + z^3 f = x = AD$, ac $zg + zzg + z^3 g = y = DE$, erit $z + zz + z^3 = \frac{x}{f} = \frac{y}{g}$, & $gx = fy$ ad lineam rectam.

46. Sit $zzf + z^3 f = x = AD$, & $zqg = DE = y$, emerget, ipſâ z per æquationum comparationem eliſâ, æquatio ad x & y; cujus ut & præcedentium omnium ſubtangentes ex §. 35. cognitæ ſunt. Poſſent & hic præcedentium converſæ demonſtrari. Sed, cum operæ vix futurum ſit pretium, his ſuperſedebimus.

47. Sit poſt hæc præmiſſa, jam in *Fig. XVIII.* No. 1, $AF = f$, & $FG = g$, item $AN = r$, vocetur q; $A\mathfrak{Q} = fz$, & $\mathfrak{Q}D = g\frac{x}{r^{q-1}}$, unde ſi intercepta fiat $x = 1f, 2f, 3f$, &c. aut $\frac{1}{2}f, \frac{3}{2}f, \frac{5}{2}f$, &c. erit applicata reſpectiva $y = g, \frac{g^2}{r}, \frac{g^3}{r}$ &c. aut $\sqrt{rg}, \sqrt{Crrg}, \sqrt{\sqrt{r^3 g}}$.

quod

quod poteſtatum deſignationem ex Lemm. 50. &c. intelligenti, ſatis patet.

Quæritur jam ex datâ hac proprietate hujus curvæ NDO æquatio, quapropter ſiat ut ſupra $zf = x$, erit $\frac{x}{f} = z$; tum facto $\frac{gr}{r^{z-1}} = y$, ac ipſo $\frac{x}{f}$ in locum ipſius poteſtatis z repoſito fiet $g^{\frac{x}{f}} = r^{\frac{x}{f}-1} y$, quæ debitè reducta dabit $g^{x} = r^{x-f} {}^{f} y$.

Jam autem, ut ex hac æquatione ſubtangens inveniatur, ſit $TQ:t$, $QD:y$, $QP - DH:e$, $HE:a$, tum $AQ:x$, ponaturque loco x ipſa $x+e$, ac loco y ipſa $y+a$, in æquatione inventâ.

Erit $g^{x+e} = r^{x-f+e} {}^{f} y + f r^{x-f+e} {}^{f-1} y {}^{a}$; quæ diviſa per æquationem datam $g^{x} = r^{x-f} {}^{f} y$, exhibebit $g^{e} = r^{e} + f r^{e-1} y {}^{a}$; & facto $e = \frac{b}{m}$ (poſito m loco numeri infiniti) cum ſit $t:y :: e:a$. erit $a = \frac{b}{t} \frac{y}{m}$, quæ in locum ipſorum e & a ſubſtituta dabit, $g^{\frac{b}{m}} = r^{\frac{b}{m}} + \frac{f r^{\frac{b}{m}} b}{t\ m}$, unde æquatio

ad

ad tangentem determinata $t\,m\,g^{\frac{h}{m}} - t\,m\,r^{\frac{h}{m}} = f\,h\,r^{\frac{h}{m}}$.

& facto $h = t$, aut $e = \frac{t}{m}$ erit $m\,g^{\frac{t}{m}} - m\,r^{\frac{t}{m}} = f\,r^{\frac{t}{m}}$, quæ subtangentem $T\,Q$ ipsius curvæ determinat.

Coroll. I. Observetur hujus curvæ subtangentem t esse in omnibus curvæ punctis ejusdem magnitudinis, æquatio enim ipsius valorem manifestans, solâ t, quæ quæritur, exceptâ ex quantitatibus, g, r, f, immutabilibus, ac sibi per totam curvæ longitudinem constantibus componitur.

Coroll. II. Tum & hoc notari meretur, inventam modo æquationem $g^{x} = r^{x-f}\,y^{f}$ esse curvæ Logarithmicæ propriam; ac hujus ope ex facili inveniri, ex dato quidem numero logarithmum, & è converso.

Si enim fiat $A\,N$ seu $r =$ *unitati*, $A\,F$ seu, $f = 100000$, item $F\,G$ seu $g = 10$, emerget $10 = 1^{x-100000}\,y^{100000}$.

Et, cum unitatis ad quamlibet evectæ potestatem non mutetur valor, sed maneat eadem ac sibi perpetuo constans unitas, adeoque sit $1^{x-100000} =$ *unitati*, inventa modo æquatio eadem

eadem erit cum hac $10^{x} = 1y^{100000}$, ad ſpecialem illam pertinens Logarithmicam, quæ jam ob egregium, quem in Geometria practica præſtat, uſum inclaruit; quomodo vero ex dato numero y inveniatur ipſius logarithmus x, & contrarium, hinc ſatis apparet, ac uberior ejus dilucidatio hujus non eſt loci, cum hanc æquationem ex more in algebra uſitato tractanti ultro ſeſe offerant.

48. Sit, retentis ſuperioribus, in eâdem *Fig. XVIII.* No. 1, æquatio curvæ $y^{x} = rx - fgf$ oportet ei tangentem deſignare, unde ipſi x ſuffecto $x+e$, tum ipſi y ſubſtituto $y+a$, uti paragr. præced. emerget æquatio ad infinitéſimas redacta $\overline{y+a}^{x+e} = r^{x+e} - fgf$, ſeu multiplicatione inſtituta, $y^{x+e} + xy^{x+e-1}a + ey^{x+e-1}a = r^{x+e} - fgf$, deletiſque ex §. 7, delendis $y^{x+e} + xy^{x+e-1}a = r^{x+e} - fgf$; quæ diviſa per æquationem curvæ exhibet $y^{e} + xy^{e-1}a = r^{e}$, & loco a repoſito $\frac{ye}{t}$ ac æquatione in t ductâ, $ty^{e} + xy^{e}e = tr^{e}$. quæſita æquatio ad tangentem;

Poſſit autem, ex Scholio 1. §. 3, poſitâ m infinita, loco e ipſa $\frac{b}{m}$ ſurrogari, & habebitur alia æquationis forma.

49. Cum

49. Quoniam vero hæ curvæ vulgaris non sunt ordinis, ac circa Logarithmicam, §. 47, ex ejus descriptione æquationem deduxerimus, hic è converso ex æquatione datâ descriptionem eruemus. Sit ergo æquatio modo proposita $y^{x} = r^{x-f} g^{f}$, unde extractâ radice potestatis f, emerget, $y^{\frac{x}{f}} = r^{\frac{x}{f}-1} g$, & ponendo $\frac{x}{f} = z$ seu numero, (cum potestas lineæ per eandem alterius lineæ potestatem divisa numerum generet, est enim $f : x :: \textit{unitas} : \frac{x}{f}$ quare, $\frac{x}{f}$ est numerus) erit æquatio $y^{z} = r^{z-1} g$, seu, $y = r^{\frac{z-1}{z}} g^{\frac{1}{z}}$, & $x = fz$.

Hinc si AQ seu $x = fz$ sint $= 1f, 2f, 3f$, &c. erunt QD respective seu $y = g, \sqrt{rg}, \sqrt[C]{rrg}$ &c. unde curvam hanc describendi modus innotescit.

50. Sit jam exposita curvæ relatio $g^{x} = r^{x-y} f^{y}$ ac quæritur recta eam contingens, quare, æquatione ad infinitesimas redactâ, est $g^{x+e} = r^{x+e-y-a} f^{y+a}$, quæ divisa per æquationem curvæ exhibet $g^{e} = r^{e-a} f^{a}$; & cum sit $a = \frac{ye}{t}$, hoc reposito in æquatione erit $g^{te} = r^{te-ye} f^{ye}$, & extractâ radice potestatis e, fiet $g^{t} = r^{t-y} f^{y}$.

Cum autem hujus curvæ deſcriptio in mox prægreſſarum morem difficulter ſuccedat, aliam ineundo viam eam deſcribemus, ac ope logarithmicæ vulgaris.

Sit ergo, ſumendo p determinatam, n vero indeterminatam, $g^{x} = r^{x-p}\,n^{p}$; quæ æquatio eſt ad logarithmicam PDK ordinariam, uti ex §. 47. conſtat, hæc, *Fig. XVIII.* N. 2. parametris $AP = r$, $AC = p$ & $CK = g$, juxta eundem §. 47, deſcribatur, eritque abſciſſa $AB = x$, & BD quælibet $= n$.

Jam, cum ex mox aſſumtâ hypotheſi conſequatur etiam eſſe $r^{x-y}\,f^{y} = r^{x-p}\,n^{p}$, erit utrobique dividendo per r^{x-y}, juxta Lemm. 50. &c. $f^{y} = r^{y-p}\,n^{p}$, quæ æquatio itidem eſt, ſed ad aliam logarithmicam IFL; hæc rurſum, juxta §. 47, parametris $HI = r$, $CH = p$, $CL = f$ deſcripta cenſeatur ad eundem cum primâ axem OL, & factâ perpetuo $GF = BD = n$, erit ſemper $GH = y$.

Quæ GH ſeu y ſi applicetur denuo reſpective ad AB ſeu x, hoc eſt ſi ſit perpetuo $BM = GH$, donec curva NMO deſignata ſit; erit hæc eadem cum illâ, cujus tangentem modo inveſtigavimus. Quod ut a poſteriori probemus

eſt

est $g^{x} = r^{x-p}\,n^{p}$ seu, $g^{x}\,r^{p-x} = n^{p}$.

tum $f^{y} = r^{y-p}\,n^{p}$, hoc est divisione per r^{y-p} factâ, $f^{y}\,r^{p-y} = n^{p} = g^{x}\,r^{p-x}$; quæ æquatio divisa per r^{p-x} dabit quæsitam $r^{x-y} = f^{x} : g^{x}$.

Schol. Possent & his plura hujus generis exempla adjici, curvarumque, in quarum æquationibus ipsæ indeterminatæ inter potestarum indices reperiuntur, contemplatio ulterius extendi; ipsæque curvæ in loca & classes suas distribui; adeoque & illæ examinari, in quibus potestatum indices & suis rursum affecti sint potestatibus, hique rursum aliis, &c. tum & eæ hujus generis curvæ, quarum æquationes multiplici terminorum numero constant.

Illas enim, quarum inter duos tantum terminos consistit æquatio, terminis absolute cognitis hisce non annumeratis, propositionibus modo prægressis consideravimus, adeoque & primam earum classem discussimus.

Reliquarum autem curvarum examinationem, integrum forsan tractatum deposcentem, hic prætermittemus; cum sola earum tangentes ducendi methodus huc tantum directè spectet, quæ, modo traditis rite perpensis, satis, ni fallimur, elucidata comperietur.

Approximationes enim, quarum auxilio subtangentium quantitas præterpropter in terminis usitatis exhiberi potest, hic non tractamus.

51. Sit *Fig. XIV.* duæ curvæ *ABCD* & *EFGH* (ut ad alias transeamus) ita relatæ, ut, si a puncto *O* projiciatur recta *OBF*, curvas secans in *B* & *F*, lineæ *OB* & *OF* relationem

quandam aſſignatam ad ſe mutuo habeant; &, ex *O* elevatâ rectâ *OK* ipſi *OF* normali, ducatur *BS* tangens curvam *ABC* in B; quæritur in *OK* punctum *K*, ubi *FK* tangens curvam *EFG* in F rectam *KO* ſecat. Sumtâ in curvâ *ABC* infiniteſimâ *BC*, ductâque *OCG* erit, juxta Lemm. 40, *FG* ſuæ curvæ infiniteſima: hinc ductis centro *O* arcubus *BL* & *FI*, erunt juxta Lemm. 38 & 39, *CL*, BL, & *GI*, FI, infiniteſimæ; & triangula, *SOB* & BL*C*, item K*O*F & F*IG* ſimilia. Fiant ergo: *OB*: *y*, *OF*. *z*, *OS*: *t*, *OK*: *k*, infiniteſimæ BL: *e*, *CL*: *a*, F*I*: *i*, *IG*: *o*. Unde *OC*: $y+a$ & *OG*: $z+o$. quare poſitis quatuor infiniteſimis totidem opus erit æquationibus, quarum prima (per: 39 Lem.) *t*: *y*:: *e*: *a*, unde $e = \frac{ta}{y}$; ſecunda *k*: *z*:: *i*: *o*. Unde $i = \frac{ko}{z}$; tertia ex ſectorum ſeu triangulorum OBL & OFI analogiâ ortum ducit, nam: *y*: *e*:: *z*: *i*. unde $e = \frac{yi}{z} = \frac{ta}{y}$, quare $\frac{tza}{yy} = i = \frac{ko}{z}$, ac tandem $\frac{atzz}{kyy} = o$; quæ tres æquationes in cunctis hujus naturæ problematis obtinent, quartam ſuggerit ipſa curvarum aſſignata relatio.

52. Sit ea Verb: Gr: ut OB ſit ad OF perpetuo ut *r* ad *s*; erit adeo *r*: *s*:: *y*: *z*, ſeu $sy = rz$, & ad infiniteſimas: $sa = ro$; unde $o = \frac{sa}{r} = \frac{atzz}{kyy}$ ex præcedenti; unde $k = \frac{tz}{y}$; quia $rz = sy$. quod monſtrat hoc caſu FK & B*S* fore parallelas.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [90] - 68

53. Sit jam rectangulum O B in O F semper æquale quadrato definito rr; erit, $zy = rr$; & $zy + za + yo + ao = rr$, seu juxta §. 5 & 6, $o = -\frac{az}{y} = \frac{atzz}{kyy}$ ex §. 51, unde $k = \frac{-tz}{y}$; quod signum ostendit K à contrariâ ipsius *S* parte statuendum, uti abundè notum.

54. Quod si detur B F semper determinatæ rectæ r æqualis, erit $z - y = r$, adeoque $o = a = \frac{atzz}{kyy}$; unde $k = \frac{tzz}{yy}$; & hinc omnigenarum Conchoidum, prout *A B D* vel recta, vel curva quælibet assumta fuerit, tangentes profluunt.

55. Fiat $zz - yy = rr$, erit $zo = ay$, & $o = \frac{ay}{z} = \frac{atzz}{kyy}$, & $k = \frac{tz}{y^3}$. & sic in cæteris potestatibus; si fuerit $z^p - y^p = r^p$ erit $ky^{p+1} = tz^{p+1}$. Quomodo autem, ubi plura data sint puncta, tangentes ducendæ veniant, hinc levi operâ deducitur.

56. Ad tangentes curvarum provehimur, cum curvæ ad alias curvas variis modis referuntur.

Sint *Fig. XV.* tres curvæ *LCD K*, *GEFH*, *MNOP* ita relatæ, ut ducta quâcunque rectâ *CEN* ad positione datam parallelâ, curvasq, ut vides, secanti, fit semper *C E* ad *C N*, ut p ad q; dataque B *C* aut *AC* subtangente alterutrius, quæritur alterius tangens. Assumtâ *CD*, curvæ *LCD* portione infinitesimâ: u, ductâque *D O* ipsi *CN* parallela, jungantur, *NR*, *EI*, ipsi *CD* seu u æquales & æquidistantes, fiantque *CN*: z, *CE*: y, *FI*: a, *RO*: o, BC: t, *AC*: k, erit *FD*: $y + a$, *OD*: $z + o$.

Jam

Jam $BC:EC::EI:FI$. hoc eſt $t:y::u:a$. unde $u = \frac{at}{y}$;

Item $AC:CN::NR:RO$. ſeu $k:z::u:o$. quare $u = \frac{ko}{z} = \frac{at}{y}$, ergo $\frac{kyo}{tz} = a$. Sed ex relatione, $p:q::y:z$, fit $qy = pz$, & (juxta methodum inſinuatam §. 6 & 7,) $qa = po$, unde $a = \frac{po}{q} = \frac{kyo}{tz}$, & $tpz = kqy$; unde $t = k$, quia $pz = qy$. quare puncta B & A hoc in caſu coincidunt.

57. Sint curvæ $LCDK$ & $GEFH$ ita relatæ, ut recta EC ad curvam LC perpetuo datam obtineat rationem, ut p ad q. quæritur BC ſeu tangentis curvæ $GEFH$ determinatrix. Factis omnibus, ut in præcedenti, ſit LC curva : c, erit $LD : c+u$, & $t:y::u:a$, ergo $u = \frac{at}{y}$; ſed ex relatione $p:q::y:c$. unde $qy = pc$, & $qa = pu$, quare $u = \frac{qa}{p} = \frac{ta}{y}$, & hinc $qy = pt = pc$; ergo $t = c$. ſeu BC æqualis curvæ LC.

58. Si vero, ut unico calculo plures caſus comprehendantur, relatio data ſit $p^k : q^s :: y^k : c^s$, erit $p^k c^s = q^s y^k$, & pro y, ac c, poſitis $y+a$, ac $c+u$, emerget juxta §. 5 & 6. $sp^k c^{s-1} u =$

$= kq\, y^{\frac{s}{k}-1}\, a$, & applicatâ æquatione ad yc, fit $sp\, c\, yu = kq\, y^{\frac{s}{k}}\, ca$; quæ ſi hinc inde dividatur per $p\, c = q\, y^{\frac{s}{k}}$, fiet $sy = u = \frac{at}{y}$ & $\frac{kc}{s} = t$.

Quod ſi curva $LCDK$ ad circulum determinetur, erit $GEFH$ ex innumeris Cycloidibus una; cujus adeoque tangens, & omnium curvarum ſimilem ortum habentium hic oſtenditur.

59. Quin & methodi hujus elucidandæ gratia, Cycloidis $ALMO$ tangentem *Fig. XVI.* ex aliâ ad ſemicirculum hypotheſi inveſtigabimus, quod primo in quibuſcunque hujuſcemodi curvis univerſaliter aggrediemur, ſint ABG & ALO curvæ ad eundem axem ita relatæ, ut ductâ LBE axi normali, habeat LB curvis interceptæ ad curvam AB rationem ſemper eandem, ut p ad q.

Sit $LE: z$, $BE: y$. unde $BL: z - y$, $KE: t$, $IE: h$, KB & IL reſpectivas curvas tangant, ſitque BF tangenti KB normalis, $EF: l$. tum $BF: r$. & curva $AB: c$.

Infiniteſimæ ED: B P: $LN: e$, $CP: a$, B $C: u$, $MN: i$,

Erit primo $t: y :: e: a$, unde $a = \frac{ye}{t}$; tum

$h:z::e:i$, quare $i = \frac{ze}{h}$; tertio $r:y::u:e$, & hinc $u = \frac{re}{y}$; jam vero ex curvarum relatione $p:q::z-y:c$, ſeu $qz-qy = pc$; & quoque juxta ſæpius inſinuata $qi-qa = pu$; quapropter ſi loco, i,a,u, ſufficiantur modo inventi valores, ordinatâ æquatione fiet $qtzy-qhyy = prht$; factoque $yy = tl$, (quia $t:y::y:l$) erit $h = \frac{qyz}{pr+ql}$.

60. Quod ſi curva A L O ſit Cyclöis primaria, & A B C huic reſpondens ſemicircuius, erit $p = q$, & $hr+hl = yz$.

61. Quomodo autem generaliori modo poſſint inquiri ſimilium curvarum tangentes, poſita relatione $p^{k}:q^{s} :: z-y^{k} : c^{s}$ ex præcedentibus quivis colliget.

62. Sit Fig. *XVII.* curva ACD, rectæque $A\mathcal{Q}$, $D\mathcal{Q}$ poſitione datæ; item alia curva AFD ad priorem ita relata, ut ductis duabus rectis EM ad $D\mathcal{Q}$, & EB ad $\mathcal{Q}A$ parallelis, ſemper habeat intercepta AM ad curvam AB rationem datam, ut p ad q; lineæ FEK & CBH tangant curvas, dicaturque BH: h, KM: t, AM: x, ME: y, curva AB: c, infiniteſimæ BR: NL: i, CR: FG: a, MP: EG: e, BC: u; erit FP: $y+a$, AP: $x+e$, curva AC: $c+u$; jam datâ tangente H B: h, quæritur K M: t, quæ tangentem curvæ A F D determinat; eſt igitur $t:y::e:a$ unde $a = \frac{ye}{t}$; ſecundo $h:y::u:a$, ſeu $\frac{yu}{h} = a = \frac{ye}{t}$

$= \frac{ye}{t}$, & hinc $u = \frac{be}{t}$; ſed relatio curvæ $p:q :: x:c$, ſeu, $qx = pc$, quare etiam $\frac{qe}{p} = u = \frac{be}{t}$, unde $t = \frac{pb}{q}$.

63. Quod ſi curva *ABCD* ſit quadrans circuli, cujus radius r, peripheria d; ſtatuaturque ratio p ad q eadem, quæ r ad d; erit $t = \frac{rb}{d}$.

64. Nec opus hic adjicere comprehenſivam magis relationis hypotheſin; quæ ſi ſit: $p^k : q^s :: x^k : c^s$ erit $t = \frac{sxb}{kc}$; unde ſublatâ c per æquationem datam ipſa t per lineas rectas exprimetur.

65. Sint *Fig. XIV.* duæ curvæ *ABCD* & *EFGH*, ita relatæ, ut a puncto quopiam projectâ quavis rectâ *OBF*, ſemper O B ad curvam E F rationem habeat conſtantem, ut p ad q; tangant S B & K F curvas reſpectivas, ſitq: K O normalis O B, ducatur O G, ut vides, ac vocetur O B: z, K F: f, O F: y, K O: b, S O: t, curva E F: c; infiniteſimæ vero $FG:u$, $FI:o$, $BL:e$, $CL:a$, quæritur S O ſeu t; primo (per Lemm. 38 & 39,) $t:z :: e:a$, & $e = \frac{ta}{z}$; ſecundo ob parallelas *FI* & B L $z:e :: y:o$, unde $e = \frac{zo}{y} = \frac{ta}{z}$, hinc $o = \frac{tya}{zz} = \frac{bu}{f}$, quia $f:b :: u:o$; adeoque $\frac{tfya}{bzz} = u$; jam vero ex relatione $p:q :: z:c$; quæ proportio ad infiniteſimas redacta dat $u = \frac{qa}{p} = \frac{tfya}{bzz}$, unde $tfpy = qbzz$, ſeu (quia $qz = pc$,) $t = \frac{bcz}{fy}$.

66. Et

66. Et factâ ſuppoſitione generaliori, $p^{\frac{k}{k}\,\frac{s}{s}} : q :: z : c$, erit hæc redacta ad infiniteſimas, $szu = kca$, quæ comparata, cum æquatione omnibus hiſce curvis communi, (vide prægreſſ.) $tfya = hzzu$, dabit $t = \frac{kbcz}{syf}$; unde mediante æquatione relationem exprimente c poteſt tolli, & t per rectas exprimi.

67. Quod ſi EFG ad circulum determinetur, erit $ABCD$ ex Spiralibus quædam, ipſaque OK ex naturâ circuli infinita, adeoque $f = h$; ut & ob eandem rationem $y = r$ radio; quare hoc caſu $t = \frac{kcz}{sr}$.

Aliarum Spiralium tangentes, cum poſt hæc nihil difficultatis habeant, tranſilio.

68. Quia autem occurrunt quandoque curvæ, quæ tum ad determinatum aliquod punctum, ſimul & ad lineam velut axem referuntur; unde ſuppoſitæ infiniteſimæ quodammodo intricari videntur, præmittam his in caſibus generale lemmaticum.

Sint in figuris appoſitis *XIX*, N°. 1. & *XIX*. N°. 2. curvæ *AHR*, mediantibus rectis B *A* & B *H*, ad punctum B; & ope parallelarum *AD* & H *L* ad axem B *D* relatæ; ſit B *E* ipſi B *A* normalis, & *AM* tangat curvam; vocenturque *AB*: *z*, B*D*: *x*, *MD*:

$MD:h$, $MA:k$, $BE:t$, $AD:y$, $AE:s$, infiniteſimæ $AH:u$, $AI:i$, $HI:o$, AK in fig. N°. 1, ſit e, & $KH:a$, aſt N°. 2. $AK:a$, $KH:e$. emergent, quæ ſequuntur, æquationes,

$$a = \frac{ki}{h} = \frac{ko}{y} = \frac{se}{t} = \frac{sa}{z}.$$

Unde duarum quarumlibet infiniteſimarum ratio in aperto eſt; hoc eſt: I°. $a:e::z:t$. II°. $a:i::z:\frac{sb}{k}$, quo facto $= p$, erit $a:i::z:p$. III°. $a:o::z:\frac{sy}{k}$, quo facto $= l$, erit $a:o::z:l$. IV°. $e:i::t:p$. V°. $e:o::t:l$. VI°. $i:o::h:y::p:l$.

Quo vero p & l inveniantur, ductâ EG. parallelâ DB, & (*Fig. XIX.* N°. 2,) productâ DA in G, erit $EG = p$ & $GA = l$.

Quin & propter triangulorum DAB & FEB ſimilitudinem, eſt $z:y::t:\frac{ty}{z}$ EF; cui ſi addatur $GF:x$, erit GE ſeu $p = \frac{ty}{z} + x$, & ob eandem rationem erit GA (*Fig. XIX.* N°. 1,) ſeu $l = y - \frac{tx}{z}$, & (in *Fig. XIX.* N°. 2,) $l = \frac{tx}{z} - y$.

69. Sit *Fig. XX*, curva $ICBA$, & recta IN, in quâ deſignatum punctum N. recta NA ſit poſitione data; item alia curva $IHGF$ ita ad priorem relata, ut, a puncto N ductâ quâlibet rectâ NGB; ac deinde ex puncto G lineâ GR ipſi NA parallelâ, habeat intercepta IR ad curvam

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [97] - 75

I B rationem ſemper eandem, ut p ad q; ſit LN ipſi N B normalis, rectequæ B L & GM reſpectivas curvas tangant; quæritur MN: t; data ſint LB: f, LN h, GN: z, BN: y, IR: x, RN: l. curva IB: c, GR: b, PS: n, tum infiniteſimæ, BC: u, BD: o, HE: a, EG: e, HK: i, erit $z : e :: y : o$, item $f : h :: u : o$, unde $o = \frac{ey}{z} = \frac{hu}{f}$; & hinc $u = \frac{fye}{hz}$.

Jam ex curvarum relatione $p : q :: x : c$, unde $\frac{qi}{p} = u = \frac{fye}{hz}$, quare $\frac{pfye}{qhz} = i$; jam vero juxta præcedentem $e : i :: t : \frac{tb}{z} + l$, unde $i = \frac{tbe + lze}{tz} = \frac{pfye}{qhz}$, & tandem $t = \frac{qhlz}{pfy - qhb}$.

70. Si jam IBAN ſit quadrans circuli, & ratio p ad q ſit ratio radii r, ad peripheriæ quadrantem d, erit IHGF Quadratrix veterum, ac p & y & r æqualia, item $q = d$ & $h = f$ ob infinitam puncti L diſtantiam, unde $t = \frac{dlz}{rr - db}$. & ſi quæratur linea PN invenietur $= \frac{dzz}{rr}$.

71. Si relatio data fuerit $p^{\frac{k}{s}} : q :: x^{\frac{k}{s}} : c$. tangens ex anterioribus eluceſcet.

Schol. Et huc quidem uſque ea potiſſimum quæſtio ventilata fuit, quâ recta inquirebatur in dato puncto curvam datam tangens. Unde Verb: Gr: *Fig.* X, ex data curvæ *ADE* proprietate, ipſiſque AQ, QD, ſeu x & y datis (dato enim puncto D, & hæc data unt) invenire neceſſarium fuit, trianguli rectilinei TQD proprietatem, aut rationem

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [98] - 76

nem, quam inter sese habent TQ & QD, seu intercepta & applicata ejusdem trianguli. Cum autem multis quidem modis hæc quæstio possit variari, petique, ut, dato in triangulo TDQ puncto D, inveniatur curva ADE, ipsam rectam TE in dato puncto contingens: unde tum curvæ parameter, item AQ seu x, post generalem curvæ naturam cognitam investiganda forent. Quin & plurimis modis diversa, circa rectas curvasque semutuo tangentes, quæri possent, pro eorum diversitate, quæ tanquam data supponuntur. Hæc vero licet ex facili, præcedentibus perceptis, consequantur, in tyronum gratiam unum aut alterum exemplum addemus.

72. Sit *Fig. X*, recta TD in infinitum versus E protensa, ejusq: positio respectu lineæ TS data, in eâque assignatum punctum D, oportet curvam ADE hanc rectam in D tangentem designare. Ductâ ex D rectâ DQ ipsi TQ normali, aut ad quemlibet datum angulum, sit ex trianguli TQD proprietate (factâ $TQ:t$, & $QD:y$) perpetuo $p:q::t:y$, unde æquatio trianguli $pt = qy$, vocatisque ut supra, $QP = DH:e$, & $EH:a$, erit hæc reducta ad infinitesimas $qe = pa$, quæ in omnibus hisce casibus obtinet.

Jam quæratur parabola ADE ipsam rectam TD in puncto D tangens, cujus æquatio $rx = yy$, facto $AQ:x$; dabit hæc ad infinitesimas redacta $re = 2ay$; unde $a = \frac{re}{2y} = \frac{qe}{p}$, unde cum p & q item t & y in triangulo data sint (trianguli enim proprietas & punctum D.

D. datum eſt) invenietur parameter parabolæ $r = \frac{2qy}{p} = \frac{yy}{x}$ ex naturâ parabolæ, unde $x = \frac{pyy}{2qq} = \frac{t}{2}$. quare ex cognitâ AQ ſeu x & latere recto parabolæ ea poterit deſcribi.

73. Expetatur jam ADE circulus, cujus æquatio $2rx - xx = yy$, quæ rectam TE in D contingat. ea reducta ad infiniteſimas erit: $\frac{re - xe}{y} = a = \frac{qe}{p}$; unde circuli ſemidiameter $r = \frac{qyy + pxx}{2px} = \frac{yy + xx}{2x}$ ex æquatione circuli; ex quibus tum x, tum r in quantitatibus cognitis dabuntur, uti notum eſt.

74. Quod ſi hyperbola dictam TE tangens in D deſideretur, cujus æquatio, $rxx + rhx = hyy$, poſito latere ipſius recto $= r$, tranſverſo $= h$; erit hac ad infiniteſimas redactâ, $\frac{2rxe + rhe}{2hy} = a = \frac{qe}{p} = \frac{ye}{t}$ ex æquatione trianguli, unde $r = \frac{2hyy}{th + 2tx} = \frac{hyy}{xx + hx}$ ex quibus r & x innoteſcent. Cum autem ad ipſam h determinandam æquatio non ſuppetat, ea manebit hoc in caſu non omnino limitata.

Unde, licet hyperbola ADE in puncto ſui D unicam tantum admittat tangentem rectam, è contrario recta data TE in puncto ſui D innumeras habet hyperbolas tangentes, prout hæc

aut

aut illa ex ipsis x, r, & q (quarum non nisi duæ per æquationes inventas definiri possunt) arbitraria remanserit.

Posset jam eadem hæc quæstio rursus mutatâ facie proponi, ac ex datâ tum curvæ, tum trianguli proprietate punctum contactus mutui investigari; quæ tamen, ut & alia huc spectantia, cum prioribus intellectis nullam fere difficultatem (unico casu excepto, ubi cæteris datis curvæ natura quæritur) habeant, hic prætermittimus.

Cum autem non inter rectas tantum & curvas, verum & inter duas curvas, aut plures, contactus mutuus possit celebrari, licet hoc problema per communem ac omnes curvas eodem sui puncto tangentem rectam exiguo satis labore efficiatur; rem forsan tyronibus utilem præstitisse videbor, si quo pacto ex traditæ methodi generali lege effectum dari possit, paucis demonstravero; cæteris speculationibus, quæ hinc originem ducere possunt, in locum commodiorem relegatis.]

75. Sit ergo *Fig. XXI.* No. 1, curva ADE data, & in eâ punctum D. Oportet ei ducere curvam TDE tangentem.

Resumantur symbola ordinaria, fiatque $AQ:x$, $QD:y$, infinitesimæ, $DH=QE:e$, $EH:a$, $DE:u$, subtangens $TQ:t$. quapropter, si curva exposita ADE sit circulus, cujus æquatio $2rx-xx=yy$, ac debeat duci ex parabolis quædam TDE, circulum parte sui convexâ tangens; sit ipsius æquatio $tt=ky$; erit redactâ utrâque ad infinitesimas $\frac{re-xe}{y}=a=\frac{2te}{k}$, & æquatio ad tangentem determinata $kr-kx=2ty$

quæ

quæ cum aliâ æquatione $tt = ky$ combinata, dabit poſt debitam reductionem, $t = \frac{2yy}{r-x}$ & hac cognitâ latus rectum parabolæ $k = \frac{2yy}{r-x}$.

76. Quod ſi expetatur: parabola parte ſui concavâ circulum tangens, *Fig. XXI*, No. 2, & ejus æquatio $kt = yy$; quæ cum æquatione circuli redacta ad infiniteſimas erit: $2re - 2xe = ke$; unde latus rectum $k = 2r - 2x$ ejuſque intercepta TQ ſeu ſubtangens quæſita $t = \frac{yy}{2r-2x}$

77. Manente ADE circulo, & ſuppoſitâ TDE ex hyperbolis aliquâ, ſit hujus æquatio, $ktt + kht = hyy$; emerget ex utriuſque curvæ æquatione ad infiniteſimas redacta, $re - xe = ya$; tum $2kte + khe = 2hya$; unde $2hr - 2hx = 2kt + kh$; quæ æquatio cum hyperbolæ æquatione debitè tractata dabit, tum t ſubtangentem, ſeu hyperbolæ interceptam; tum h aut k alterum ex hyperbolæ lateribus, altero manente indeterminato. Unde patet circulum innumeris hyperbolis uno in loco tangi poſſe. Sed hæc ſufficiant.

Schol. Plures quidem in præcedentibus infiniteſimas adhibuimus; ſed in ſingulis curvis, non niſi eas, quæ *Fig. XXIII*, No. 1, triangulum DEH conſtituunt; cum autem hiſce non coërceatur hæc methodus, ſed & aliæ ac plures in calculum deduci queant, quæ eandem cum modo recenſitis curvam ſpectant; nimirum ductâ præter tan-

tangentem TD insuper recta BE, curvam ADE tangenti in E, tum TC ipsi BE perpendiculari, erit juxta lemmata præmissa triangulum BTC pariter ex infinitesimis compositum; quin & *Fig.* XXII. ductis DR ac ES, tangentibus TD ac BE normalibus, erit his intercepta axis portio RS, aliæque quam plurimæ $H\Lambda$, ΛE, &c. ex infinitesimarum genere; quarum considerationem, cum tangentium doctrinam multum promoveat, quin & curvarum mixtilineorumque mensuras immane quantum adaugeat, his annectere methodique hujus universalitatem, ac majorem longe, quam prima fronte promittere videtur, extensionem demonstrasse forsan non infructuosum fuerit; insimulque non ubique obvium theorematum fontem hoc rivo scaturientem ostendisse; modo, quod hoc in labyrintho filum est Ariadnes, inter infinitesimas, ac quantitates rejectaneas ex legibus lemm. 10. &c. exacte distinguatur.

78. Sint *Fig.* XXII. ut supra, $TQ:t$, $AQ:x$, $QD:y$; Infinitesimæ $DH:e$, $HE:a$, $DE:u$, DR tangenti DT normalis; BE sit ea linea, quæ tangat curvam in E. puncto ipsi D proximo, & huic perpendicularis ES. erunt, juxta lemm. 18, $BT:i$. tum $RS:o$, pariter infinitesimæ.

Detur jam curva OML ejus naturæ, ut, ductis DM, EL, &c. ipsi AO parallelis, sit continuo IM æqualis TQ, & GL æqualis BP; erit, factâ XM ipsi GI æquali & æquidistanti, lineola XL; seu differentia linearum GL & IM æqualis $BT+QP$ seu $e+i$; & $MX=a$. Sit insuper alia curva ZKV illius proprietatis, ut ejus applicata QK ipsam QR seu l, & PV ipsam PS seu $l-e+o$ constanter adæquet; erit KN parallela $QP:e$, & NV semper æqualis $RS-QP$ seu $o-e$, tangat autem MY curvam OML, sitque $IY:h$. quæritur $QC:k$, tangentem curvæ ZKV determinans.

Huic ſcopo tot quærendas eſſe æquationes, quot aſſumtæ fuerint infiniteſimæ, ex anterioribus manifeſtum eſt. Harum I^a. $ye = at$. II^a. $le = ay$. Quarum ratio jam ſæpius inſinuata. III^a. $BP : PE :: PE : PS$, ſeu, $t+e+i : y+a :: y+a : l+o-e$, unde rejectis juxta §. 6 & 7, rejiciendis $li+le+to-te = 2ay$; & quia $le = ay$, reſtat $li+to-te = ay$. IV^a. $CQ : QK :: NK : NV$. ſeu $k : l :: e : o-e$, unde $ko-ke = le$. V^a. $YI : IM :: MX : XL$. $h : t :: a : e+i$, unde $at = he+hi = ye$ ex primâ, ergo ex tertiâ & quartâ, erit $o = \frac{ay+te-li}{t} = \frac{ke+le}{k}$; unde, facto $le = ay$, orietur $e = \frac{ki}{k-t} = \frac{hi}{y-h}$ ex quintâ; quare tandem $k = \frac{ht}{2h-y}$.

79. Notetur, ut habeatur ratio infiniteſimarum QP & BT ſeu e & i, ex præcedenti eſſe $h : y-h :: e : i$; tum etiam $k : k-t :: e : i$. Item ſi ratio QP ad RS ſeu e ad o. expetatur, eam hoc analogiſmo exprimi, $k : k+l :: e : o$; juxta IV. æquationem præcedentis.

80. Iiſdem poſitis jam loco l, applicetur eadem t ad e, ſeu TQ in QK, & PB in PV, donec per puncta K, V, &c. deſcribi poſſit curva ZKV. quæritur QC ſeu k, quæ tangentem CK patefacit. Cum ſit $QK : t$, & $PV : t+e+i$, erit

erit differentia $NV : e+i$; ideoque $CQ : QK :: KN : NV. \; k : t :: e : e+i$, unde $\frac{te}{k} = e+i$. ſed in curva OML eſt $IY : IM :: MX : XL$, ſeu $b : t :: a : e+i$; quare $\frac{ta}{b} = e+i$; & hinc $\frac{te}{k} = \frac{ta}{b}$, & $e = \frac{ka}{b} = \frac{ta}{y}$, ac tandem $k = \frac{bt}{y}$.

81. Hinc facile patet, ſi, relatione curvæ LMO pro lubitu aſſumtâ, inveniatur juxta canones prægreſſos linea YI ſeu b; ac curva ZKV ejus naturæ ſtatuatur, ut QK quælibet perpetuo æquetur ipſi IM ſeu g; fore ſemper QC ſeu $k = \frac{bt}{y}$.

82. Notetur hujus ope methodum §. 35, propoſitam ampliari, ac etiam *Fig. XXIII.* N. 1. ad curvas PLI applicatam EP pro axe habentes extendi; cum loco citato omnes ad eundem axem AQ deſcriptæ eſſe fuerint ſuppoſitæ. Sit, verb: gr. $QA : z$; $HL : f$; $DQ : y$; ac mutua curvarum relatio $fz = yy$; erit factâ $QZ = HL = f$, vocatiſque ſubtangentibus $QY : n$, $QW : k$, $HF : h$, juxta §. 37, $nt + tk = 2kn$; ſed ex præcedenti $k = \frac{bt}{y}$; unde emerget æquatio pro ſubtangentibus hoc in caſu determinandis $nty + ttb = 2bny$.

83. Sit *Fig. XXIII.* N. 1. curva ADE cum ſuperiori eadem, eademque ſymbola; r ſit linea-

nea determinata; fiatque $y : t :: a : e :: r : z$, quæ z applicetur in HS, ad $EH : a$, idque perpetim, donec per omnium applicatarum extremitates deſcribi queat curva RSS. Quæritur $HK : d$, unde ducta KS curvam RSS contingat. eſt $MS : a$, ſitque $MR : \theta$; erit $I.HK : HS :: MS : MR$. $d : z :: a : \theta$, & hinc $d\theta = za = re$, ex hypotheſi.

II^do. Poſitâ curvâ ILP ejuſmodi, ut HL ſit conſtanter æqualis ipſi QT ſeu t; ductâque FL eam tangenti ſit $FH : h$, erit, juxta §. 78, $FH : HL :: GL : GI$. ſeu $h : t :: a : e + i$, unde $he + hi = at = ye$.

III^o. Redactâ æquatione datâ ad infinitesimas, erit $PE : PB :: r : ER$, ſeu $y + a : t + e + i :: r : z + \theta$; unde remotis per §. 6 & 7, rejectaneis, $za + y\theta = re + ri$; & quia $za = re$, eſt $y\theta = ri$; unde $\theta = \frac{ri}{y} = \frac{re}{d}$ adeoque $e = \frac{di}{y} = \frac{hi}{y-h}$, ac ultimo quæſita $d = \frac{hy}{y-h}$.

84. Repetitis omnibus, ſit $t : y :: e : a :: r : f$; applicetur continuo f ad e, ſeu QZ ad QP, ut hac ratione conſtituatur curva ZX; cujus ducenda ſit tangens WZ. ſit $QW : b$, infinitesima $VZ : \lambda$, erit $QW : QZ :: VX : VZ$. $b : f :: e : \lambda$. unde $fe = b\lambda$.

II^do. Sit curva $A\Lambda$ talis naturæ, ut $Q\Lambda$ perpetuo ipſi QT ſeu t æqualis ſit; & $QY : n$, unde ducta $Y\Lambda$ curvam $A\Lambda$ tangit; erit $QY : Q\Lambda :: \Lambda N : N\Delta$, ſeu $n : t :: e : e + i$. ergo $te = ne + ni$; &

& redacto analogiſmo dato ad infiniteſimas fiet, $BP : PE :: rPX$. ſeu $t+e+i : y+a :: r : f-\lambda$; quare $fe+fi-t\lambda = ra$; &, quia $ra = fe$, fit $fi = t\lambda$, unde $\lambda = \frac{fi}{t} = \frac{fe}{b}$, ideoque $e = \frac{bi}{t} = \frac{ni}{t-n}$, denique $b = \frac{tn}{t-n}$.

85. Sint *Fig.* XXIII. N°. 1, curvæ ADE, ILP, cum præcedentibus eadem, eademque ſymbola; curva vero RSS, habeat applicatam HS tangenti DT ſeu s perpetuo æqualem. quæritur HK tangentem KS definiens.

Quoniam $DE = u$, & infiniteſima; erit ducta DO ipſi BE, quæ curvam in E tangit, normali, $EO = ED = u$. juxta lemm. 42; ac ducta CT parallela DO, hoc eſt ad eandem BE perpendiculari, erit $EC = ET = s+u$ ex lemm. 36; ſit porro $CB : \lambda$ infiniteſima ex lem. 18, erit $BE = s+u+\lambda = ER$; quare ob parallelas & æquales EH, MS, fiet MR ſeu $RE - HS = u+\lambda$: tandem HK vocetur c.

Eſt $HK : HS :: MS : MR$ ſeu $c : s :: a : u+\lambda$, quare $\lambda = \frac{sa-cu}{c}$; jam vero, ob angulos CTE & TCE ex lemm. 33. rectos & æquales, erunt triangula BCT & TQD ſimilia; quare $TD : TQ :: BT : CB$. ſeu $s : t :: i : \lambda$, unde $\lambda = \frac{ti}{s} = \frac{sa-cu}{c}$, & hinc $\frac{ssa-ctsi}{sc} = u = \frac{sa}{y}$ (nam

(nam TD, s: DQ, y:: DE, u: EH, a) quare $a = \frac{cty\,i}{ssy - ssc} = \frac{y\,e}{t}$ (quoniam TQ, t: QD, y:: DH, e: EH, a) ergo $\frac{ctti}{ssy - ssc} = e = \frac{h\,t}{y - b}$ (juxta §. 79.) unde $c = \frac{ssyh}{tty + ssh - tth}$, & facto $ss - tt = yy$, eſt $c = \frac{ssh}{tt + yh} = HK$. Exempla non addo particulares caſus concernentia.

86. Cum vero omnia hæc in curvis verſus axem concavis oſtenſa ſint, eæque, quæ verſus axem convexæ ſunt, *Fig. XXIII.* N°. 2. aliquid in infiniteſimarum poſitione a prioribus diverſum obtineant, è re forſan erit prægreſſum problema hoc in caſu ſolvere, unde cætera innoteſcent. Poſitis ergo omnibus, ut in præcedenti, quæ tum linearum, tum infiniteſimarum pariter ac curvarum ADE, ILP, RSS naturam ac relationem mutuam ſpectant: notetur hoc in caſu, GI eſſe $= e - i$, cum enim ſit $TQ = HL = t$, ac $BT = i$, item QP: e, erit $BP = t + e - i = EI$, unde $GI = e - i$.

Secundo, quia $DT = HS = s$, & $CT = \lambda$, $DE = Do = u$, erit $CE = BE = ER = s + u - \lambda$; quare $MR = u - \lambda$, hoc in caſu.

Ut ergo HK ſeu c determinetur eſt HK, c: HS, s:: MS, a: MR, $u - \lambda$. Quare $\frac{cu - sa}{c} = \lambda = \frac{t\,i}{s}$ ob an-

angulum EBC rectum, tum in triangulis DEH & TDQ ſimilibus eſt. $s:y::u:a$ unde $u=\frac{sa}{y}$, item $t:y::e:a$. unde $a=\frac{ye}{t}$.

Jam in curva ILP eſt $FH:HL::GL:GI$, ſeu $h:t::a:e-i$, unde $he-hi=ta=ye$; ex quibus tandem æquationibus, eliſis infiniteſimis, orietur, ut ſupra, $c=\frac{ssh}{tt+yh}$.

Schol. Atque hac qnidem occaſione in ſpeculationem quandam circa curvarum flexus & curvaturas inſperatò dilabimur; quæ tum à veteribus, tum etiam à recentioribus Mathematicis inter primarias licet habita, nunquam tamen, quantum mihi conſtat, hoc fonte derivata, hac ſaltem ratione tractata fuit: quâ levi ſatis negotio, & magis forſan directè, quam ex radicum æqualitate, ex cujuslibet curvæ æquatione cognitâ dignoſcitur curvæ ſpecialis indoles, ipſiuſque verſus axem aut quamlibet expoſitam rectam concavitas aut convexitas, tum & punctum, ſi detur, flexûs contrarii.

87. Sit *Fig. XX*III. N°. 1 & 2. curva ADE; patet ex iis, quæ lemm. 23, &c. demonſtrata ſunt, omnes curvas ex tangentium TD, BE portionibus infiniteſimis DE, $E\varphi$ componi, quæ angulos in E efformant, unde clarum ſatis eſt, ſi modo dicti à tangentibus efformati anguli $DE\varphi$ concavum ſuum verſus axem AQ convertant, curvam verſus AQ fore concavam, *Fig.* XXIII. N°. 1. ſi vero apicem ſuum axi AQ obvertant recenſiti anguli, uti *Fig.* XXIII. N°.

N°. 2, curvarum verſus eandem AQ fore convexam; adeoque & hos angulos curvaturarum ſolas normas exiſtere.

Quo poſito, figuras obiter inſpicienti appareret, ſi recta TDE ſupponatur tangere curvam aut ei coincidere in rectulâ infinitesimâ DE, proximam huic infinitesimam $E\varphi$ verſus axem in B prolongatam, ab eodem abſcindere infinitesimam BT; hac quidem differentiâ in utrâque curvâ, ut, I^to. Vocatis ſubtangenti primâ $TQ:t$, tum $QP:e$, & $BT:i$. ſi curva ADE; *Fig.* XXIII, N°. 1, ſit verſus AQ concava, ſit ſubtangens ſecunda $BP = t+e+i$; aſt *Fig.* XXIII. N°. 2, ubi curva verſus AQ eſt convexa, $BP = t+e-i$. II^do Tum & tangenti TD vocatâ s, ac $DE = OE:u$, item $BC:\vartheta$, patet in curvâ verſus axem concavâ, *Fig.* XXIII. N°. 1, tangentem ſecundam BE fore $= s+u+\vartheta$; in altero vero caſu, ubi curva verſus axem convexa exiſtit, $BE = s+u-\vartheta$.

Ex quibus duobus criteriis manifeſtus conſequitur character curvarum quarumlibet curvaturam, reſpectu axis, quem reſpiciunt, dignoſcendi, modo perſpectum habeamus, num ſubtangens ſecunda BP per $t+e+i$, num vero per $t+e-i$ in expoſitâ curvâ ſit denotanda.

88. Quod

88. Quod ut in curvâ qualibet geometricâ indagemus, inſimulque convexitatis aut concavitatis curvarum notas diagnoſticas ad quantitates poſitivas, cum §. præced: non niſi per infinitesimas explicatæ fuerint, referamus: concipiatur in utrâque figurâ nova deſcripta eſſe curva *PIL* hujus naturæ, ut *EI* ipſi *BP*, tum *HL* ipſi *TQ*, ſingulæque porro curvæ *PLI* applicatæ reſpectivis curvæ *ADE* ſubtangentibus jugiter adæquentur; ductâque recta *FLI* ipſam in L tangenti vocetur ſubtangens *FH*: *h*; ac cum ex naturâ curvæ ſit HL: = *t*, poſitâ infinitesimâ *GL* = EH = *a*, erit infinitesima *GI* in *Fig.* XXIII. N°. 1, = *e*+*i*, in *Fig.* XXIII. N°. 2. = *e*−*i*; eſt enim in utrâque ipſa *GI* ſubtangentium *BP* & *TQ* differentia, uti patet.

Jam autem cum ſit perpetuo FH: HL:: GL: GI. ſeu vocando GI generali appellatione = *o*, (quæ tum per *e*+*i*, tum per *e*−*i* pro rerum exigentiâ poterit explicari) *h*: *t*:: *a*: *o*. erit *ta* = *ho*; ſed eſt *ta* = *ye* ex curva *ADE*; (cum ſit *TQ*: *QD*:: *D*H: *E*H. ſeu *t*: *y*:: *e*: *a*.) ergo tandem in utroque caſu perpetim invenietur, *ye* = *ho*.

89. Quapropter, ut ad rem propius accedamus, cum in *Fig.* XXIII. N°. 1, ubi curva *ADE* verſus axem AQ concava eſt, ſit *GI* ſeu $o = e+i$, erit $ye = ho = he+hi$, & æquatione in analogiſmum reſolutâ $y-h : h :: i : e$. unde patet hoc in caſu *h* eſſe minorem ipſâ *y*.

Si vero, uti *Fig. XX*III. N°. 2, curva *ADE* verſus AQ convexa eſt, erit *GI* ſeu $o = e-i$, adeoque $ye = ho = he-hi$, ſeu $hi = he-ye$, & æquatioue ad proportionem redactâ $h-y : h :: i : e$. unde patet rurſum hoc in caſu contrarium evenire, ac *h* eſſe majorem ipſâ *y*.

90. Unde tandem, vocatâ curvâ *PLI curvâ ſubtangentiali* ex proprietate ſuperius memoratâ, hic emergit in curvis quibuslibet curvatarum character.

Si ad curvæ cujuſvis *ADE* ordinatam *EP* applicetur curva ſubtangentialis *PLI*. Hujuſque ſubtangens F*H* ſeu *h* fuerit minor curvæ expoſitæ applicatâ *y*; erit curva *ADE* verſus axem ſuum AQ concava.

Si vero fuerit ſubtangens *h* major ipſâ *y*, contrarium obtinebit, ac curva *ADE* verſus axem ſuum AQ erit convexa.

91. Quod ſi *Fig.* XXIII. N°. 1. TQ & *BP* non in *HL* & *EI*. ad ordinatam *EP* ſeu *y*, ſed in QΛ & *P*Δ ad interceptam AQ ſeu *x* applicentur; erit hoc in caſu *A*$\Lambda\Delta$ curva ſubtangentialis, in quâ

Q

$Q\Delta = t$, $\Delta N = e$, $N^{\Delta} = o$, vocetur etiam ΥQ subtangens hujus $= k$, erit $k : t :: e : o$, & $te = ko$.

Unde si sit $o = e + i$, ac curva ADE versus axem concava, erit $te = ke + ki$ & $te - ke = ki$, quare k minor ipsa t.

Quod si $o = e - i$, est $te = ke - ki$, & $ki = ke - te$, adeoque k major ipsa t.

Et sequens oritur curvarum flexuræ diagnosticum in casu, quo curva subtangentialis $A\Delta^{\Delta}$ ad curvæ interceptam $A\,Q$ applicata est,

Si fuerit subtangens k minor ipsâ curvæ expositæ subtangenti t, erit curva ADE versus axem suum concava.

Si vero k fuerit major ipsâ t, erit curva ADE versus axem suum convexa. NB. Potuisset & hoc ex §. 80 & 81 elici, cum ibi demonstretur esse $k : t :: h : y$.

Coroll. I. Patet ex duabus præcedentibus, si subtangens t curvæ ADE, cujus flexus quæritur, explicetur per interceptam $A\,Q$ seu x. commodissime adhiberi præcedentem; si vero per applicatam y designetur subtangens t, inquisitioni curvaturæ potius inservire §. 90.

Coroll. II. Quo vero methodi hujus usus per exempla pateat, sit curva, cujus intercepta x, applicata y, subtangens t, ejusque æquatio $2rx - xx = yy$ ad Circulum. Quæritur ejus curvatura versus interceptam $A\,Q$.

Eris

Erit ex §. 35, æquatio ad tangentem $yy = rt - xt$, quæ reducta ad x fiet $2rx - xx = rt - xt$; ſed per y deſignata fiet $rrtt - yytt = y^4$. quarum prima *Fig.* XXIII. N°. 1, eſt æquatio ſubtangentialis ſeu curvæ $A\Lambda\Delta$ ad axem AQ; ſecunda erit æquatio ſubtangentialis ſeu curvæ PLI ad applicatam EP poſitæ.

Reſumendo ergo primam $2rx - xx = rt - xt$ erit ex §. 17, TQ ſeu $k = \frac{rt - xt}{2r - 2x + t}$; quæ inquiratur num ſit major aut minor quam t, juxta præcedentem, quare ſi ſit k ſeu $\frac{rt - xt}{2r - 2x + t}$ major aut minor ipſa t; ſequetur tandem (eas quantitates inſtar æqualium tractando, hoc enim fieri poſſe cuivis notum eſt) fore etiam nihilum majus aut minus ipſo rr; ac cum conſtet nihilum eſſe minus ipſo rr, nec nunquam ei æquari poſſe; etiam conſequitur k ipſâ t ſemper minorem eſſe, adeoque juxta §. 91, curvam ADE fore verſus axem ſuum concavam.

Coroll. III. Idem ſequenti modo colligi poteſt ex æquatione ſubtangentiali ad y reducta, quæ eſt $rrtt - yytt = y^4$; poſita nimirum t ad y in curva PLI applicari, cujus ſubtangens $h = \frac{rrtt - yytt}{2y^3 + tty}$; quæ inquiratur num ſit major aut minor quam y, juxta §. 90, invenietur ipſa

ipſa b minor ipſâ y; adeoque per §. 90, curva expoſita erit verſus axem $A\mathfrak{Q}$ concava.

Coroll. IV. Sit curva, cujus æquatio, $ry = xx$ erit æquatio curvæ ſubtangentialis ad y appoſitæ $ry = 4tt$, cujus curvæ ſubtangens b invenietur major ipſâ y, adeoque curva expoſita verſus axem erit convexa, ex §. 90.

Idem circa k & t comperietur, ſi ſubtangentialis curva ad x fuerit applicita.

92. Et hæc quidem circa concavitatis aut convexitatis curvarum dignotionem, quando b aut k ipſâ y aut t minor aut major exiſtit; ubi autem ea emergit quantitatum, b & y, tum k & t inter ſe relatio, ut non tantum ſe invicem utrinque excedere, verum & ſibi mutuo æquari poſſint; ſequetur in caſu hoc æqualitatis curvam nec convexam nec concavam eſſe (ſecus enim una alteram excederet juxta §. 90 & 91,) adeoque & hac ratione punctum flexionis contrariæ in qualibet curva determinari; eo enim lōco curva verſus axem nec convexa nec concava eſt.

Sit in exemplum *Fig.* XIII. No. 2, Conchois Nicomedis polo K, normâ FG deſcripta, vocatâque $FK:S$, tum $AF = LD:r$, $\mathfrak{Q}F:x$, $\mathfrak{Q}D:y$, item $T\mathfrak{Q}$ ſubtangenti: t, erit æquatio proprietatem ipſius exprimens $xxyy = rrxx + 2srrx - x^4 - 2sx^3 - ssxx$.

Unde

Unde juxta regulas §. 17 & 35, traditas, ac ope æquationis curvæ elisâ y, emerget subtangentis TQ valorem manifestans æquatio, post debitam per $2x+2s$ depressionem, ea, quæ sequitur:

$$rrxx+srrx-x^4-sx^3=-srrt-tx^3,$$

quæ, positâ perpetim TQ seu t in QC, subtangentialis curvæ ACG naturam prodet. Cujus rursum subtangens QR seu k ex regulis modo citatis hâc ratione determinabitur,

$$\frac{-srrt-x^3t}{2rrx+srr-4x^3-3sxx+3txx}=k.$$

qui ipsius k valor, si supponatur major aut minor aut æqualis ipsi t, colligetur etiam esse $\frac{-2srr+3x^3-2rrx+3sxx}{3xx}$ esse majorem, minorem, aut æqualem ipsi t, hoc est invento ipsius valori, $\frac{rrxx+srrx-x^4-sx^3}{-srr-x3}$ quibus denuo quantitatibus ex æquationum lege comparatis, ac per $s+x$ divisis, emerget fore $2srr$ majorem, minorem, aut æqualem, ipsis $3sxx+x^3$; quæ omnia, cum pro variâ

ipsius

ipsius x determinatione sint possibilia, aperte consequitur:

I. Si $2srr$ sit minor ipsis $3sxx+x^3$, fore k minorem t; adeoque curvam versus axem AF concavam.

II. Si contrarium eveniat, fore convexam.

III. Si sibi mutuo æquentur, seu si sit, $2srr = 3sxx+x^3$, curvam in hac ipsius x magnitudine fore nec concavam nec convexam; verum hac æquatione ipsum curvæ flexus contrarii punctum definiri.

Schol. Placuit hoc potius Conchöidis exemplo præ aliis uti, cum inter problemata illustria à præstantissimis hujus ævi Mathematicis numeretur; tum & canonum superius traditorum in inquirendis subtangentibus præcepta sequi; ut, quod ante circa signorum notationem insinuavimus, apertius pateat. Ipsam enim t continuo negativo valore expressam esse, cum a contrariis ipsius x partibus respectu applicatæ QD inveniatur, nemo non videt, ac nihilo secius signa, ex canonum legibus oriunda, servando ad æquationem legitimâ signorum qualitate affectam deveniri.

Possent & in modum §. 37 & 38, hæc infinitis curvis simul & semel unâ opera applicari; ac licet subtangens t per quaslibet aliarum curvarum applicatas designaretur, idem effici; unde ipsam t ad expositæ curvæ abscissam ordinatamve x aut y, quod hisce exemplis perpetuo factum fuit, primo referre necessarium non erit: verum hæc, cum satis leviter ex ante dictis eruantur, compendii gratia, privato cujusliber studio committimus.

§. 93.

93. Neſcio an operæ futurum ſit pretium ſpeculationem quandam, quam per otium ulterius perficere mihi animus fuerat, hic adjungere circa *methodum tangentium inverſam*; qua ſatisfit huic problemati: *Dato valore lineæ cujuslibet ſubtangentis* (*ſeu*, Fig. XXII. *ipſius* TQ *inter applicatam* D Q *tangentemque* D T *interceptæ*) *in terminis æquationis proximis, invenire curvæ huic valori convenientis æquationem.*

Quos autem terminos æquationis *proximos* appellem, exemplo potius manifeſtabitur: ſit Fig. XXII. TQ: t, AQ: x, QD. y, TD: s, curva AD: z, cujus æquatio $y^3 + fyy = x^3 + rxx$, erit juxta §. 17 aut 35, ſubtangens TQ ſeu $t = \frac{2y^3 + 2fyy}{3xx + 2rx}$; hos terminos ſubtangentis valorem exprimentes *proximos* dico, ſiquidem ex æquatione curvæ proxime dimanantes; ſi vero hic ſubtangentis valor per applicationem æquationis curvæ immutetur, Exemp: Grat: ponendo $3y^3 = 3x^3 + 3rxx - 3fyy$ adeoque $t = \frac{3x^3 + 3rxx - fyy}{3xx + 2rx}$; hos voco terminos *remotos*. Idem in cæteris caſibus judicium fiet.

Jam vero ne ſubtangentis valore dato, dubium circa hanc terminorum diſtinctionem oboriatur, ſequens exſurgit ex ſuperioribus terminorum *proximorum* diagnoſis; patetque.

I. Sub-

I. Subtangentem t ſemper unius eſſe dimenſionis, ac per fractionem exprimi.

II. Fractionis hujus numeratorem nullos terminos ingredi, in quibus applicata y, aut tangens s (quæ tangens unicam dimenſionem nunquam tranſcendit) non reperiatur.

III. Si termini æquationis fuerit *ſimplices*, nullam interceptam x in numeratore, nullam s aut y neque z in denominatore conſpici.

IV. Si *mixtos* continuerit æquatio curvæ, tam x quam y, item z & s reperiri poſſe in utrâque fractionis parte; hac tamen lege, ut, fractione denuo ad æquationem reductâ, quæ nihilo ponatur æqualis, ac omnibus t in x, ac s in z mutatis, nullus reperiatur terminus mixtus, qui juxta indeterminatarum ſuarum, quas continet, numerum reperitus non appareat; numeris præfixis ſingularum indeterminatarum poteſtatum exponentes, ipſorumve rationes, perpetuo exprimentibus.

V. Unde ſequitur terminorum, in quibus eædem indeterminatæ concurrunt, ſigna, poſt peractam per numeros præfixos legitimam diviſionem, fore eadem.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [119] - 97

94. Ut ergo ad rem propius accedamus, hoc pacto ſolvitur recenſitum modo problema.

I. Mutato t in x, ac s, ſi occurrat, in z curvam denotantem, omnes termini in eandem partem rejiciantur; ac curioſè diſpiciatur, num *ſimplices* ſint termini, num vero intercurrant *mixti*.

II. Si omnes ſint *ſimplices*, ſinguli per numerum dimenſionum indeterminatarum ſuarum dividantur & habebitur æquatio curvæ.

III. Si *mixti* adſint, & legem diagnoſtici IV. & V. præc. §. obſervent: ſinguli eaſdem indeterminatas continentes per reſpectivum dimenſionum numerum, ad quem indeterminatæ evectæ ſunt, hac lege dividantur, ut ex ſingulis idem reſultet terminus, qui juxta indeterminatarum ſuarum numerum repetitus apparebit.

IV. Quorum terminorum hac ratione ſæpius occurrentium unico tantum ſervato, ſimplicibuſque juxta N°. 2. tractatis, emerget quæſita curvæ æquatio.

Ex 1. Detur $t = \frac{y^3 + fyy + rry}{xx + fx + rr}$; juxta N°. 1. mutato t in x, ac rejectis omnibus ad eandem partem erit, $x^3 + fxx + rrx - y^3 - fyy - rry$; cum autem hic omnes ſint ſimplices, juxta

N°.

N°. 2. erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}fxx+rrx-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}fyy-rry=0$, æquatio curvæ desiderata.

Exemp. II. Detur $t=\frac{3x^3+2rxy-2xyy-xxy}{3xx+2yx+yy}$ erit omnibus juxta N°. 1. peractis $3x^3+2yxx+yyx-3y^3-2ryy+2xyy+xxy$ ubi cum mixti adsint, $2yxx$ & xxy, item yyx & $2xyy$ singuli secundum duarum indeterminatarum numerum bis repetiti, si mixtorum indeterminatas continentium alter per dimensiones ipsius x, alter per dimensiones ipsius y juxta N°. III. dividatur, orientur termini $yxx+yyx$ secundum *N. IV*; *simplicibusque* per suarum indeterminatarum exponentes divisis, nascetur æquatio curvæ requisita $x^3+yxx+yyx-y^3-ryy=0$.

Exemp. III. Ne autem æquationes, quæ curvas involvunt, neglexisse videar, sit; posita z loco curvæ,

$$t=\frac{6ry^3zz+4ry^3z^3+rry^4-yxxz^3-3yxxzz^3}{2yxz^3},$$

cui oportet æquationem curvæ congruam exhibere. quare juxta N°. 1, t in x, ac s in z verso, omnibusque terminis ad eandem partem retractis erit

$$2yz^3xx+yz^3xx+3yz^3xx-6ry^3zz-4ry^3zz-rry^4$$

ubi terminus yz^3xx tres continens indeterminatas ter, ac ry^3zz duas habens indeterminatas, bis

bis repetitur, ſolo rry^4 exiſtente *ſimplici*, cumque etiam pateat terminos *mixtos* per indeterminatarum reſpectivum dimenſionum numerum diviſos eundem quotientem relinquere, fractionem ipſam t exprimentem in terminis æquationis *proximis* datam eſſe jam certi ſumus, juxta §. 93. enumerata criteria: adeoque *ſimplici* ex more tractato, & mixtorum iiſdem indeterminatis conſtantium unico retento, exoritur æquatio curvæ $yz^3xx - 2ry^3zz - \frac{1}{4}rry^4$, $= 0$ aut additâ qualibet determinatâ quantitate, $yz^3xx - 2ry^3zz - \frac{1}{4}rry^4 + p^6 = 0$.

NB. Determinatam quantitatem ſemper inventæ æquationi addi poſſe, ex tangentium methodo directâ patet, cum in ſubtangenti inquirendâ continuo excidat; quin & aliquando neceſſarium videtur.

Exemp. IV. Detur $t = \frac{-xy}{2x+y}$ erit $2xx + xy + xy$ adeoque $xx + xy = 0$, æquatio quæſita, ſeu additâ determinatâ $xx + xy = pp$, cum primo inventa æquatio, non niſi falſam radicem admittat.

95. No-

95. Notetur, quod in sequentibus usum aliquem præstiturum est, ex methodo modo traditâ sequi, quo pacto, *Fig. XXII.* ex dati *intervalli* cujusvis QR (quam lineam & *subnormalem* in seqq. vocabo) valore analytico curvæ ADE æquatio conveniens indagari possit, positâ enim $QR = l$, est perpetuo subtangens seu $t = \frac{yy}{l}$, uti notum; quæ subtangentis expressio ad terminos proximas reducta, juxta §. 94. requisitam æquationem prodet.

Schol. Præcedentium demonstratio ex §. 14, 17, 35. non difficulter colligetur; cum, quæ ibi circa methodum tangentium directam præcipiantur, hic ordine retrogrado sint tradita: ac solus jam terminos *remotos* subtangentis valorem exprimentes ad *proximos* reducendi modus hac in parte desiderari videtur, quod effectum dabitur, si cogitra fit methodus æquationem datam in duo loca, vel duas potius æquationes, resolvendi, quæ datam inter se legem & conditionem observant, talem scilicet, qualis inter æquationem curvæ, eamque, quæ subtangentis valorem exprimit, ex supra traditis requiritur. Quod, quam variis modis tentari queat, æquationum constructiones palam faciunt; hoc enim casu æquationem datam quamcunque in infiniti generis loca dirimi, in eaque quotlibet fere quantitates, ex assumtæ hypotheseos instituto, seu æquationum, tum ipsius curvæ naturam, tum ejus subtangentem exprimentium relatione mutua, determinationem patientes invehi posse, post editum Celeberr. *Sluſii Mesolabum* nemo ignorat.

Cumque jam termini subtangentium proximi ex methodis §. 14, 17, 35, oriundi ex facili dignoscantur; ubi nimirum curvarum æquationes per unius pluriumve cur-

va

varum interceptas applicataſque, quin & ipſas reſpectivas curvas exprimuntur; reſtaret hanc regulam extendendi modus ad ejuſmodi curvas, quarum indeterminatæ inter poteſtatum exponentes reperiuntur, uti §. 47. & ſeqq: tum & ad alias, quarum æquationes non, niſi mediantibus infiniteſimis, exprimi valent; quas inter ſequentia magis commode tractabimus: licet utrumque hoc non tantum ſed & omnia curvarum genera ad methodum §. 35 expoſitam referri valeant. Hanc autem ſubtangentium ſubnormaliumque varietatem exactius diſcutere, ac ad unum pluresve, omnibus tamen inverſæ methodi caſibus ſufficientes, canones reducere, noſtri nunc eſt nec inſtituti, nec otii: non enim huc ſpectantes methodos omnes, quæ animo adhucdum obverſantur, explorare permiſit temporis auguſtia. Interim, ne curioſioribus inquirendi occaſionem præſcindam, paucula quædam tentamina ſubjicio; inſimulque quomodo ex ſingulis immenſum exemplorum ac theorematum agmen, citra ullam calculi moleſtiam, educi queat, exhibito levi ſpecimine oſtendam.

96. Quem in finem, quamcunque terminorum ſummam tum determinatorum, tum *ſimplicium* x continentium, quibuslibet ſignis affectorum, ut $x' - bxx$ &c. $+r'$ voco z; ac per eandem z, aut ſolam, aut in quotlibet x ductam, ut zx, zxx &c. ſi per majuſculam quamlibet vocalem A multiplicetur, ut (Az) (Azx) &c. denoto omnem ipſius z terminorum ſeriem, cum ſinguli termini per dimenſionum ipſius x numerum ſunt multiplicati: ſic $(Az) = 3x' + 2bxx$ &c. & $(Azx) = 4x^4 + 3bx'$ &c. Ubi vero z

vel

vel zx &c. per eandem A dividitur, ut $\left(\frac{z}{A}\right)$ $\left(\frac{zx}{A}\right)$ &c. deſignatur eadem terminorum ipſius z ſeries, cum ſinguli termini per reſpectivum dimenſionum ipſius x numerum ſunt diviſi, ſic $\left(\frac{z}{A}\right) = \frac{1}{1}x^1 + \frac{1}{1}bxx$ &c. & $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{1}{1}x^1 + \frac{1}{1}bx^1$ &c

Sic & ſumma terminorum *ſimplicium* y continentium vocata f, ſi per majuſculam quandam conſonantem Verb: Gr: B multiplicetur, deſigno per (Bf) aut $(B\,fy)$ hanc ſummam ſimiliter multiplicatam; ſin vero per B dividatur, erit $\left(\frac{f}{B}\right)$ aut $\left(\frac{fy}{B}\right)$ ſumma eadem ſimiliter diviſa.

NB. Has quantitates parentheſi includo, cum non niſi junctim in æquationis diviſione aut multiplicatione &c. adhiberi poſſint, uti ex earum naturâ cognitâ ſatis innoteſcit.

Tandem quantitates determinatas, dimenſionibus æquandis quandoque inſervientes, appello m, ſubnormalem: l, ac ſubtangentem: t, dico.

97. Sit $\frac{z}{f} = l = \frac{yy}{t}$, erit $zt = fyy$; unde æquatio juxta §. 94, Ex. I. huic ſubtangenti conveniens eſt $\left(\frac{zx}{A}\right) = \left(\frac{fyy}{B}\right)$.

Corol. I. Jam facto $f = m$, erit $l = \frac{z}{m}$, & $B = 2$; unde æquatio $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{myy}{2}$, patetque ſubnormalium valores per fractionem $\frac{z}{m}$ expreſſos omnes eſſe ad terminos *proximos*, adeoque & ad curvam congruam reducibiles.

Coroll. II: Quod ſi fiat $f = y^p$, erit $l = \frac{z}{y^p}$ & juxta §. 94. *Exemp. I.* reducibilis ad hanc æquationem $p+2\ \left(\frac{zx}{A}\right) = y^{p+2}$; cujus ope l reducta ad x fiet $= z$ diviſæ per $\sqrt[p+2]{p+2, \left(\frac{zx}{A}\right)^p}$, & facta $\frac{p}{p+2} = \frac{q}{k}$ fiet $p+2 = \frac{2k}{k-q}$; rurſumque poſita $q = 1$, erit $p+2 = \frac{2k}{k-1}$, hoc vocetur h, erit $l = z$ diviſæ per $\sqrt[\frac{1}{k}]{h\left(\frac{zx}{A}\right)}$ & æquatio curvæ reſpondentis $= h\left(\frac{zx}{A}\right) = y^h$.

Cum autem z hic per quantitatem irrationalem ſit diviſa, notum eſt, ſi poteſtas ſigni radicalis $\frac{1}{k}$ fiat negativa, ipſam z per eandem quantitatem multiplicatum iri: quo in caſu erit $h = \frac{2k}{k+1}$, & æquatio $h\left(\frac{zx}{A}\right) = y^h$, mutato juxta

ta ſtatim inſinuata ipſius h valore.

Coroll. III. Unde ſolvitur hoc problema: data quantitate irrationali ex terminis, tum determinatis, tum ſimplicibus x continentibus, quolibet radicali communi ſigno copulatis conſtanti, duas alias quantitates z invenire; ut, ſi harum altera per dictum irrationalem dividatur, altera vero per eandem multiplicetur, in utroque caſu emergat ſubnormalis ad terminos proximos, adeoque ad curvam convenientem, reducibilis; ipſiuſque curvæ æquationem determinare.

Sit $\sqrt[k]{xx+rx+rr}$ expoſita quantitas irrationalis; multiplicentur termini ipſam componentes per dimenſiones reſpectivas ipſius x (unde terminus determinatus excidet, cum x in eo dimenſiones habeat nullas) & fiet $2xx+rx$; tum ſinguli per x in duplum exponentis ſigni radicalis ductam dividantur, & emergit quotiens $\frac{2x+r}{2k}$;

Qui ſi multiplicetur per exponentis ejuſdem ac unitatis differentiam emerget $z = k-1$ in $\frac{2x+r}{2k}$, quod primo caſui inſervit, cum z dividitur per quantitatem expoſitam irrationalem.

Si vero idem quotiens per exponentis dicti ac unitatis ſummam multiplicetur, orietur $z = \frac{k+1}{2k}$ in $\frac{2x+r}{2k}$, quod in ſecundo caſu requiritur, ubi z multiplicatur.

Demonſtrationem ex præmiſſis quilibet eruet, eamque proinde cum cæteris hinc deducendis (ſi z & f, ad terminos quoſvis mixtos extendantur, ipſique ſignorum exponentes q & k, quam pati poſſint, varietatem admittant) brevitatis ergo prætereo, æquatio curvæ mox inſinuata eſt.

98. Reaſſumatur *Fig. XI.* ſervatiſque §. 36. ſymbolis, ac §. 37. hypotheſi $fz = yy$, invenitur æquatio ſubtangentialis $nt + kt = 2kn$, unde $l = \frac{yy}{t} = \frac{fz}{t} = \frac{nfz + kfz}{2kn} = \frac{fz}{2k} + \frac{fz}{2n} = \frac{yy}{2k} + \frac{yy}{2n}$.

Coroll. I. Unde ſequitur, duabus curvis ad eundem axem deſcriptis, ſi correſpondentium applicatarum rectangulum fz per utriuſque curvæ ſubtangentem, n & k ſucceſſivè dividatur, erit quotientum ſummæ ſemiſſis æqualis ſubnormali l, ad tertiam quandam curvam pertinenti, cujus ordinatæ quadratum yy æquivalet fz ſeu expoſito applicatarum in reliquis curvis rectangulo; $l = \frac{fz}{2k} + \frac{fz}{2n}$.

Coroll. II. Hinc etiam patet problema Cor: §. præcedent: infinitis modis ſolvendi methodus; poſitâ enim z æquali cuidam quantitati irrationali,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [128] - 106

nali, sive uno sive pluribus vinculis radicalibus ligato, erit $\frac{nf+kf}{2kn}$ ipsam multiplicans quantitas; quæ, cum f sit arbitraria, infinitis modis variari potest.

Schol. Quoniam vero curvæ non tantum tres, uti modo, sed pro arbitrio multæ assumi, interque singulas infiniti generis relationes statui possint, quin & ipsæ curvæ iis admisceri; quantus se pandat reducibilium subnormalium tangentiumque campus, quarum curvæ absque ulla calculi molestia statim se produnt, nemo non videt, sufficerit hic digitum intendisse. Quin & vario, præter modo tradita, principiorum genere oriundas methodos, subnormales ad curvas congruas reducendi his adjungere in proclivi esset, nisi peculiarem sibi tractatum potius deposceret materiæ dignitas: quare è multis unicam, ex infinitesimarum calculo originem trahentem annecto, & hoc ex anterioribus demonstrabile præmitto lemmaticum.

99. Sit indeterminata x, crescens aut decrescens per infinitesimam e; y per a; b per i, &c. erit exposita quæcunque æquatio ad infinitesimas redacta (in quâ indeterminatæ singulæ in proprias sibi infinitesimas, determinatasque ductæ sint) sequenti modo ad æquationem ordinariam reducibilis: si, nimirum, mutatâ infinitesimâ in propriam sibi indeterminatam, emergens terminus dividatur perpetuo per exponentem dimensionum indeterminatæ

Exemp: Gr. detur, $rhi+hhi+\frac{6h^3i}{r}=yya+rya$, erit hæc reducibilis ad hanc æquationem $\frac{1}{3}rhh+\frac{1}{3}h^3+\frac{1}{3}\frac{h^4}{r}=\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}ryy$, & sic in cæteris.

100. Jam

100. Jam cum juxta §. 23. in omnibus curvis ſit $ya = le$, fiat $l = \frac{hz}{k}$; poſitis h, k, z, pro quantitatibus vel ex arbitrio, vel ex progreſſu calculi determinandis; erit $\frac{hzxe}{k} = ya$ adeoque $e = \frac{kya}{hzx}$; tum aſſumtâ h pro quotlibet terminis ſimplicibus x continentibus, ſignoque radicali cujuslibet poteſtatis q copulatis, qui ab aſymmetriâ liberati litterâ g deſignentur, erit $h = g^{\frac{1}{q}}$, & $hq = g$; quæ æquatio ad infiniteſimas redacta juxta methodos ſuperiores, erit $qhq-1\,i = \frac{(Ag)e}{x}$ & ponendo $e = \frac{kya}{hzx}$ fiet tandem, $qhqzxi = (Ag)kya$. quæ ultima vocetur *æquatio reducenda*; cujus reductio poſſibilis exiſtit, ſi in alterâ parte exceptis determinatis, nulla indeterminata niſi h, in alterâ vero nulla niſi y reperiretur, juxta præcedentem; quot autem modis hoc effici poſſit ſequentia conſectaria manifeſtabunt. Quotlibet determinatæ denotentur per m, & ſingulæ per r.

Coroll. I. Sit $hq = mx + m$, unde $(Ag) = mx$; & $k = r$, erit æquatio reducenda $qhqzi = mryx$; quæ reducibilis eſt, I. ſi z per quotlibet terminos, vel h continentes, vel determinatos, exprimatur. II. Si z quotlibet terminos ſimplices x continentes, communi vinculo

lo non adſtrictos comprehendat; ſiquidem, cum ex hypotheſi fuerit $h^q = mx + m$, ſit $x = \frac{h^q - m}{m}$ qui valor in omnibus ipſam z componentibus terminis repoſitus efficiet terminum $qh^q z^i$, qualem primo loco deſideravimus.

Unde patet ſi fuerit $l = x^p + rx^n$ &c. in $\frac{1}{\sqrt{rx + rr^q}}$ hoc eſt, ſi ſubnormalis valor exprimatur per quodlibet ſignum radicale (ſub quô x ad plures unicâ dimenſiones non aſſurgit) in quotlibet numero terminos ſimplices x continentes multiplicatum; erit ad curvam, ex præcedenti, reducibilis; cujus æquatio levi negotio ſe pandet.

Coroll. II. Si vero fiat $h = \sqrt{Cx^3 + rxx}$, erit $q = 3$ & $(Ag) = 3x^3 + 2rxx$; poſitoque $(Ag) = zx$ erit $3xx + 2rx = z$; unde factâ k determinatâ erit $kl = 3xx + 2rx\sqrt{Cx^3 + rxx}$; & æquatio reducenda $qh^q i = myz$, ſeu $3h^3 i = myz$: quæ reducta dabit æquationem curvæ $\frac{1}{3}h^4 = \frac{1}{2}myy$, ex æquatione reducendâ, juxta §. 99, reſultantem.

Hinc ſequitur, poſito $(Ag) = zx$ ſeu $\left(\frac{Ag}{x}\right) = z$; ſi h ſit æqualis cuilibet quantitati irrationali x continenti; ac z eam multiplicans ſit æqualis ſummæ terminorum ſub ſigno radicali copulatorum

rum in exponentes ipſarum x reſpective ductorum, ac unicâ x per diviſionem multatorum: l ſeu $\frac{hz}{m}$ ſemper fore reducibilem ad curvam, cujus æquatio $\frac{q}{q+1} h^{q+1} = \frac{1}{2} m y y$.

Coroll. III. Quod ſiquis alterius generis poriſmata deſideret, multiplicet æquationem reducendam $q h^q z x i = (Ag) k y^a$ utrinque per $y^f h^b$, emerget: $q h^{q+b} y^f z x i = (Ag) k h^b y^{f+1} a$. Quæ, facto $q y^f z x = (Ag) h^b$, relinquet $h^{q+b} i = m y^{f+1} a$; unde æquatio curvæ, omnibus his caſibus congruens $\frac{1}{q+b+1} h^{q+b+1} = \frac{1}{f+2} m y^{f+2}$. Ex: Gr: $h = \sqrt{xx+rr}$, fiat $f = 0$ & $b = 2$; erit $q = 2$, unde $(Ag) = 2xx$, & $2zx = xxhh$; quare $z = x^3 + rrx$, ac kl ſeu $ml = zh = x^3 + rrx\sqrt{xx+rr}$, & æquatio curvæ correſpondentis $\frac{1}{5} h^5 = \frac{1}{2} m y y$.

Schol. Cum autem hic ex data h ſemper ipſa z determinetur; quod primario requiritur tamen, hoc eſt, ut, datis tum h tum etiam z, inveniatur æquatio curvæ, cujus ſubnormalis l analyticè effertur per $\frac{hz}{k}$; hoc eſt, ut dato quolibet intervalli valore curva ipſi conveniens reperiatur, unde problema hocce generaliter ex parte ſolutum eſt. Quem in finem, cum exponentes b & f adhuc aptæ ſint determinationem recipere, poterit earum ope curvæ æquatio indagari, quæ aliquando erit geometrica, aliquando ex earum genere, quas tractavimus §. 47. & ſeqq:; aliquando alius generis. Accedit, quod, ſi termini mixti conſiderentur, cum

cum hactenus non niſi ſimplices adhibuerimus, tum ſi in æquationem reducendam aliæ ex calculo poſtea determinandæ quantitates ingerantur, variis modis intentum poſſimus aſſeqni ; inſimulque experiri, quam curvæ ſpeciem æquatio requiſita exprimat. Hæc autem ob cauſas ſupra memoratas in aliam occaſionem reſervamus, iis interim ſua in rem Mathematicam merita gratulaturi, quibus hæc ad finem perducendi vel otium vel facultas ſuppetit.

101. Sit *F. XXIV.* curva *I L O* ad axem *KP* ope applicatarum *TL*, *BI*, pertinens, eamque tangat in *L* recta *NLI*; oportet deſcribere aliam curvam *ADE*, ejus naturæ, ut, ſi ducatur eam tangens *TD*, ſit ſemper *QT* ad applicatam *QD*, ut *KT*, ad *TL*. inquem finem ductâ *KM* parallela *TL*, jungatur *LS* parallela *KT*; ſumtâque *TB* infinitesimâ, compleatur parallelogrammum *BIMK*; hinc productis *ST* & *MB* verſus *D* & *E*, donec ſe mutuo ſecent in *E*; ſumatur *DE* infinitesima, ac demittantur normales *DQ*, *EP*, erunt *D* & *E* puncta in curva *ADE* quæſita, quam tangit *DT*. vocentur jam *KT*: *x*. *TL*: *f*. *ST*: *g*. *NT*: *b*. *TQ*: *t*. *QD*: *y*. *TD*: *s*; infinitesimæ, *TB*: *i*. *CB*: *θ*. *TC*: *λ*. *GI*: *ν*. *SR*: *μ*: *MR*: *π*. *DE*: *u*. *DH*: *QP*: *e*. erit ergo *SR*: *SE* :: *CB*: *CE*. ſeu $\mu : g + s + u :: \theta : s - \lambda + u$, unde rejectis per Lem. 10. rejiciendis $\theta = \frac{s\mu}{g+s} = \frac{yi}{s}$ (nam *TB*, *i*: *CB*, *θ* :: *TD*, *s*: *DQ*, *y*.) adeoque $\mu = \frac{gyi+syi}{ss}$.

Rurſus quoniam *MB*, $g + \pi + \lambda : KB$, $x + i ::$ *SM*, *π*: *SR*, *μ*. erit juxta Lemm. 10,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [133] - 111

$r = \frac{g\mu}{x} = \frac{fi}{b}$ (nam $NT : TL :: LG : GI$. ſeu $b : f :: i : r$.) unde $\mu = \frac{fxi}{gb} = \frac{gyi + syi}{ss}$ ſeu $ssfx = ggyb + gbsy$; in quâ æquatione poſitis, tg loco sx, & poſtea yx loco ft, (cum ſit $g : x :: s : t$, & $f : y : x :: t$.) emerget $sx = gb + bx$, unde tandem $s = \frac{gb}{x-b}$; quare, datis x, b, & g magnitudine & poſitione, datur in productâ ST ſeu g, linea TD ſeu s, & punctum D in curvâ ADE quæſitâ: unde ſequens oritur analogiſmus $x-b : b :: g : s$. & propter triangulorum SKT & DQT ſimilitudinem $x-b : b :: g : s :: f : y :: x : t$.

Exempla non addo; cum $KT + QT$ ſeu $t + x$ aut KQ vocatâ n, æquatio inter n & y ex facili inveniatur, tum ſi curvæ, *Fig. XXV.* ab eâdem axis parte ſint poſitæ, erit s hoc in caſu $= \frac{gb}{b-x}$ & $QT - KT = n = t - x$; uti ſchema inſpicienti ſatis apparet: omnes enim hujus problematis caſus percurrere, majoris foret operæ, quam utilitatis.

CA-

CAPUT II.

De Planorum Curvilineorum dimensionibus.

1. EX lemm. 26 & 27, curva *ABCDEF* Fig. XXVI. rectilis constat, angulos in *B*, *C*, *D*, *E*, &c. facientibus; unde spatium *AFO* (cujus angulum *AOF* hic rectum supponimus) polygonum est; quod polygonum si lineis ipsi *FO* parallelis *EP*, *DQ*, *CR* &c. partesque axis infinitesimas æquales aut inæquales *PQ*, *QR*, *RS* &c. intercipientibus, dividatur trapezia *DQPE*, *CRDQ* & similia; erit omnium trapeziorum summa ex Geometriæ legibus æquale spatio infinitè polygono seu curvilineo *ABCDEFOA*.

2. Idem constat; si planum in trapezia *EGID* ope linearum ipsi *AO* æquidistantium dividatur. Quibus principiis omnis fere curvilinearum mensura hactenus nota absolvitur.

3. Ad inveniendum ergo trapezii *DQPE* valorem, sit *DQ*: *y*. *DH* seu *QP*: *e* infinitesima, ut & *EH*: *a*; quare *EP*: *y* + *a*; unde trapezium *DQPE* æquatur facto ex *DQ* + *PE* in ½ *QP*. seu $\frac{2ye+ae}{2}$; & deleto (juxta lemm. 10.) infinitesimarum rectangulo *ae*, erit trapezium

pezium $D\,\mathcal{Q}\,P\,E = y\,e =$ rectangulum $D\,\mathcal{Q}\,P\,H$.

4. Hinc, poſita y ad locum curvæ cujuslibet, erunt omnia $y\,e$ æqualia ſpatio curvilineo quæſito: Unde directè hoc theorema: ſi axis figuræ $A\,O$ dividatur in partes infinitesimas æquales aut inæquales $A\,S$, $S\,R$ &c. & ad ſingula diviſionum puncta eleventur applicatæ $S\,B$, $R\,C$, $\mathcal{Q}\,D$. quarum ſingulæ parte infinitesimâ $D\,M$, ~~$C\,N$~~, &c. proximam excedunt; erunt omnia rectangula ex ſingulis applicatis in ſingulas infinitesimas ſimul ſumta, ſeu omnia $y\,e$, æqualia curvilineo $A\,O\,F\,A$.

5. Si vero fuiſſet $E\,P : y$, unde $D\,\mathcal{Q} : y - a$, cæteris ut ſupra, foret idem trapezium $D\,\mathcal{Q}\,P\,E$ æquale rectangulo $Z\,\mathcal{Q}\,P\,E$ æquale rectangulo $Z\,\mathcal{Q}\,P\,E$ ſeu $y\,e$, juxta modo tradita. Quæ & in figuris verſus axem $A\,O$ convexis obtinent.

6. Quin & hinc ſequitur; *Fig. XXVII.* ſi fuerint duo ſpatia $A\,O\,F$, $A\,O\,L$, in eâdem altitudine $A\,O$ poſita, factiſque applicatis, $\mathcal{Q}\,D : y$, $\mathcal{Q}\,R : z$, & in utrâque $\mathcal{Q}\,P$ infinitesimâ ſemper æquali: e; primum ſpatium æquari omn. $y\,e$, & ſecundum omn. $z\,e$: quare primum ad ſecundum, ut omn. $y\,e$ ad omn. $z\,e$; & (diviſis rectangulis per æqualem altitudinem e) ut omnia y ad omnia z; hoc eſt ut ſumma applicatarum in primâ ad ſummam applicatarum in ſecundâ figurâ.

7. Huic,

7. Hinc, si y ad z, constantem in singulis rationem habeat, ut r ad s; erit quoque, juxta lemm. 43, ut r ad s ita omn: y ad omn: z.

8. Quibus adde, si ad hæc duo spatia assumatur tertium, cujus applicata $QH: h$; & fiat perpetuo $r: s :: y: z \mp h$; erit quoque $r: s ::$ omn. y: omn. $z \mp h$; hoc est ut r ad s, ita figura prima ad summam vel differentiam secundæ & tertiæ: idque tam in integris AOF, AOL, AOM, quam partibus AQD, AQR, AQH; modo eadem servetur altitudo, & infinitesimarum constans æqualitas.

9. Ac idem evenire patet, quotcunque figurarum applicatæ quibuslibet signis copulatæ assumantur; modo, quæ mox insinuavimus, ritè observentur.

10. Sit jam *Fig. XXVIII.* curva $QADEF$; non ad axem, sed ad punctum Q relata. Assumtâ DH, infinitesimâ, ductisque QD, QE, jungatur DH, ut QD sit æqualis HQ; dicatur $QD: y$, infinitesima DH, e, HE, a; & triangulum QDE æquabitur facto ex QE in $\frac{1}{2}DH$, seu $\frac{ye + ae}{2}$ juxta lemm. 33, & juxta lemm. 10. $= \frac{ye}{2}$ adeoque totum spatium QAF, quod æquatur omnibus triangulis QDE, QEF &c. æquale erit omnibus $\frac{ye}{2}$, seu

ſeu omnibus triangulis QDH; unde ſimilia, ac ſupra, deduci poſſent.

11. Sit *Fig.* XXIX. figura AFO eadem quæ §. 1; ſymbola, quæ in §. 3; tangat TD curvam in D, vocetur que $TQ:t$; erit propter triangulorum TQD, DHE ſimilitudinem, $TQ, t:: QD, y:: DH, e:: EH, a.$ unde $ye = ta$: quare ob parallelas EG, DI, exiſtente $GI = a$, ſi linea TQ, in IM, normalis ipſi FI, ſtatuatur; erit rectangulum $GIMX = ta$: idque ſi fiat toties, donec per puncta MLK, deſcribi poſſit curva $KLMNO$; conſtabit ſpatium KFO totidem ta, quot rectangulis ye figura AFO conſtat: quare, quia ſemper $ye = ta$, erunt omnia $ye =$ totidem ta, hoc eſt ſpatium AFO æquale ſpatio OFK.

Coroll. I. Sit AFO paraboliformis, & AQ vocatâ x, ejus æquatio $r^p - q x^q = y^p$; erit, juxta §. 19, Cap. I, TQ ſeu $t = \frac{px}{q}$; unde ſpatium $FOK = \text{omn.} \frac{pxa}{q}$; jam vero quia $RD = AQ = x$, & $BR = a$, erit trilineum SAF æquale omnib: $BRDE$ ſeu omn. xa, ex §. 4, ſunt autem omn: $\frac{pxa}{q}$ ad omnia xa ut p ad q; ſed omnia $\frac{pxa}{q} = \text{omn: } ye$; ergo omn. ye ſeu data parabola AOF, ad complementum SAF ſeu omn. xa, ut p ad q: hoc eſt parabola AFO ad rectan-

ctangulum circumſcript. $SAFO$, ut p ad $p+q$; ſeu ut exponens poteſtatis applicatarum, ad exponentium applicatarum & partium axis ſummam.

Coroll. II. Sit *Fig. XXX.* hyperbolöides quodlibet $CEDV$, ad aſymtotos KA, AO relatum, cujus æquatio, retentis ſymbolis ſuperioribus $y^p \times q = s^p r^q$; erit ob tangentem DT linea $\mathfrak{Q}T \frac{px}{q}$: jam vero, cum ſit $ye = ta$, erit poſito perpetim $\mathfrak{Q}T$ ſeu t in IM, rectangulum $D\mathfrak{Q}PH$ ſeu ye, ſemper æquale $MIGL$ rectangulo ſeu ta; adeoque, ſi id fiat continuo, erit figura $KAOBC$ verſus KC interminata, ſeu omnia ye, æqualis figuræ $KNSH$, ſeu omn. $ta =$ omn. $\frac{px^{\frac{q}{q}}}{q}$. atqui (vocatis brevitatis cauſâ figurâ $KAOBC: f$, & rectangulo inſcripto $NBOA: h$,) erit figura $KNBC: f-h =$ omn. xa, (cum ID ſit $= x$, & $GI = a$) undę omnia $\frac{px^{\frac{q}{q}}}{q}$ ſeu omnia ye ſeu f, ad omnia xa ſeu $f-h$ ut p ad q; & $p:p-q :: f:h$; hoc eſt figura $KAOBC$ ad rectangulum inſcriptum $NAOB$, ut exponens poteſtatis applicatarum p, ad differentiam exponentium applicatarum & partium axis $p-q$. undę ſequitur, poſitâ q minori quam p, curvam verſus K interminatam eſſe menſurabilem; ſi $p = q$, infinitam: ſi q major quam p, pluſquam infinitam: item hyperbolöidea omn. (ſolâ Apollonianâ exceptâ)

parte K terminabiles, ab altera V pluſquam interminabiles exiſtere; cum, quæ illic fuit ratio p ad $p-q$, hic ſit q ad $q-p$, quare conſtat. ſed hæc in tyronum gratiam.

Coroll. III. In tranſitu noto (ſi ſolam è cono ſectam hyperbolen reliquam facias) *Fig. XXXI.* omnia ſpatia $CBDE$, $EFGH$, inter aſymptoton & hyperboliformem quamlibet conſtituta, ac utrinque applicatis CB, DE, ſeu EF, GH, ad eandem aſymtoton terminata, menſuram admittere; quod coroll: præcedentis non difficile conſectarium eſt. Unde rurſum infinita curvarum genera quadrantur; factis enim $HG:y$, $AG:x$, $EF:s$, $AF:r$; ſit huic curvæ conveniens æquatio $y^p x^q = s^p r^q$; jam autem productâ AE ſeu b verſus N, huic ad perpendiculum excitetur recta NH; & vocatis $AN:z$, $HN:f$, ſi ad has ipſas æquatio ab aſymtotis reducatur, prodibit $\overline{sz-rf}^p$ in $\overline{rz+sf}^q = b^{p+q} s^p r^q$, quæ facto $r=s$ fiet $\overline{z-f}^p$ in $\overline{z+f}^q = b^{p+q}$.

Trilineum jam NEH eſſe quadrabile nemo non videt, cum juxta mox propoſita quadrilineum $EFGH$ menſuram patiatur, modo p & q diverſæ ſint magnitudinis.

Coroll. IV. Abundè quidem hinc innoteſcit, *Fig. XXXII.* & *XXXIII.* datâ cujuſvis generis pa-

parabolâ, ejuſve trilineo, aut hyperbolâ, & exiſtente applicatâ $QD:y$, interceptâ $QA:x$; tum $QR = OF:b$, axe $AO:c$, fore omnia QR ſeu b ad totidem ſeu omnia QD ſeu y, ut $p+q$ ad p. Si vero quæratur, quam habeant rationem omnia b ad quamlibet poteſtatem k evectæ, ad totidem y in eâdem poteſtate conſtituta, ſeu omnia bk ad omnia yk, ſequenti modo inveſtigari poteſt; ac primo, in *F. XXXII.* ſeu paraboloidibus: propter æquationem $r^p - q \times q = y^p$, eſt $y^k = r^{\frac{pk-qk}{p}} \times \frac{qk}{p}$; fiat jam $y^k = r^{k-1}z$, erit valore hoc in locum ipſius yk repoſito, ac diviſione legitimè peractâ $r^p - q^k = z^p$, quæ æquatio denuo eſt ad parabolam; ſit ea AGO, ubi manente $AQ:x$; & $AO:c$, ſit $QP:z$; & $OG:d$; jam vero ex Coroll. I, ut $p+qk$ ad p, ita omnia GO ſeu d ad omn: PQ ſeu z; hoc eſt ita omnia bk ad omnia yk. cum enim mox fuerit ſuppoſitum $y^k = r^{k-1}z$, erit eandem ob cauſam $b^k = r^{k-1}d$, unde conſtat ratiocinium.

Idem ſi fiat in hyperboloide $LAOFDL$, *Fig. XXXIII.* cujus hic æquatio, retentis ſymbolis $y^p \times q = b^p c$, fiatque $y^k = b^{k-1}z$ invenietur ratio omnium yk ad omnia bk, ut p ad $p-qk$. Poſſet &, reducendo hyperboliformem hanc æquationem ad paraboliformem, idem

unicâ operâ obtineri; cum enim, juxta hanc reductionem, fiat $y^p = b^p c^q x - q$, erit interceptæ exponens hic negativus, adeoque quæſita ratio juxta parabolæ leges ut p ad $p - qk$; & ſequitur utiliſſimus hicce canon utrique caſui congruens: *In* indagandâ ratione omnium y^k ad omnia b^k, in hyperbolöide pariter ac paraboliformi, primò, ſi opus ſit, æquatio eò reducatur, ut x & y ab oppoſitis æquationis partibus conſpiciantur, hoc eſt, ut paraboliformem repræſentet; eritque, ut dignitatis applicatarum, ac dignitatis interceptarum per quæſitam poteſtatem multiplicatæ ſumma: $p \mp qk$; ad dignitatem applicatarum p, ita omnia b^k ad omnia y^k.

Eſſe autem interceptæ in parabolöide poteſtatem $= q$ in hyperbolöide $= -q$ poſt reductionem ſatis apparet. Notetur ipſum k ad quoſvis, tum fractos, tum negativos, exponentes extendi poſſe. Exempla his caſibus inſervientia tranſilio.

Coroll. V. Deducitur hinc celebratiſſima *Cl. Walliſii Arith: Infinit:* prop. LXIV, cum ſit p ad $p \mp qk$, ut unitas ad unitatem $\mp \frac{qk}{p}$; ſi enim curvarum æquationes ad quæſita y^k reducantur, emerget pro parabolâ ſeu ſerie directâ $y^k = r^{\frac{pk-qk}{p}} x \frac{qk}{p}$; pro hyperbola verò ſeu ſerie inverſâ $y^k = b^{\frac{pk}{p}} C \frac{qk}{p} x - \frac{qk}{p}$; quare, ſi poteſtas

teſtas ipſi x ſeu interceptæ adhærens ſumatur pro ſeriëi indice, erunt, juxta modo inventa omnia yk ad omnia bk ut unitas ad interceptæ poteſtatem (cum ipſam y in requiſitis dimenſionibus conſtitutam repræſentat) ſeu ſeriëi indicem unitate auctum.

Coroll. VI. Et hactenus quidem cognita ratio omnium yk ſeu (ducendo utrumque in infiniteſimam $ZN:e$) omnium yke ad omnia bke; ut vero valor eorum abſolutus alio modo inveniatur, erat, ex modo prægreſſo Coroll. IV, ut $p \mp qk$ ad p, ita omnia ze ad omnia de, hoc eſt ita parabolöides AGO, ad rectangulum $AOGK$ ſen dc, quare $\frac{pdc}{p \mp qk}$ = omnia ze = omnia $\frac{yk}{rk-1}e$; ſed ex eadem Coroll. IV, eſt $bk = rk-1\,d$; unde valore per hanc æquationem invento ipſi d ſuffecto, emerget omnium yke valor abſolutus = $\frac{pcbk}{p \mp qk}$ = $\frac{1cbk}{1 \mp \frac{qk}{p}}$.

Coroll. VII. Quod ſi (facto indice $\frac{p}{q} = n$) in invento valore omnium $yke = \frac{1cbk}{1 \mp n}$, loco bk, ſurrogetur æquivalens quantitas per cur-

curvæ utriuſque æquationem reperta; hoc eſt, in parabola $r^{k-n}c^n$; in hyperbola $b^k c^n c^{-n}$; exprimentur omnia $y^k e$ in parabolâ per c^{1+n} in r^{k-n}; aſt in hyperbolâ per c^{1-n} in $b^k c^n$.

Unde videtur naſci lemma a *Clar: Mercatore* prop. XVI. Logarithmotechn: ſuæ demonſtratum: cuique ſoli exercitationem ſuam ſuperſtruxit ingenioſiſſ: *D: Gregorius*, cum enim ſint omnia $y^k e = \text{omni } r^{k-n} x^n e$ in parabolâ, & in hyperbol: $b^k c^n x^{-n} e$; manifeſtum eſt (rejectis utrinque quantitatibus determinatis, utpote nullam mutationem inferentibus) fore perpetuo omnia $x^{+n} e = \frac{c^{1+n}}{1+n}$; facta ſcilicet maximâ $x = c$. ex quo ſequitur hoc generale.

Coroll. VIII. Si linea recta, $AO:c$, in partes innumerabiles ſeu infiniteſimas e dividatur; erit ſumma quarumvis dignitatum ab innumeris rectis, $QA:x$, ab extremitate A propoſitæ rectæ continuò incipientibus genitarum (quarumque ſingulæ in infiniteſimam propriam $QN:e$, ipſarum terminos reſpectivos claudentem multiplicatæ ſunt) ſeu omnium $x^{+n} e$, æqualia rectæ expoſitæ, $AO:c$, ſeu maximæ x poteſtati aſſumtis poteſtatibus ipſarum x proxime ſuperiori, ac diviſæ per ſuum exponentem $= \frac{c^{1+n}}{1+n}$ ratio

ex

ex mox inventis apparet. NB: Quare hic, à laudat: Authoribus prætermissam, parenthesi inclusam conditionem addiderim, demonstrationis series ostendit, conferatur utraque.

Fusius paullo hæc prosequi operæ duxi pretium; ut quomodo summa omnium yke, tum per Applicatam $OF:b$, seu figuræ basin, uti *Coroll. V*; tum per interceptam $AO:c$, seu figuræ axem aut altitudinem exprimenda veniat, tyrones addiscant.

Possent & alia hinc erui, ac ex valore $\frac{1}{1+n}cbk$ ope æquationis curvæ respectivæ ipsa c tolli, unde aliûs denuo generis canon enascetur.

12. Quod si præcedentis *Coroll*: effatum modo ad rem præsentem magis accommodato efferatur, sic sonabit: Sint quotlibet legem quamcunque servantes indeterminatæ quantitates x, y, f, z, &c. crescentes aut decrescentes per respectivas ac proprias sibi infinitesimas e, a, o, μ &c; ac quælibet cujuscunque indeterminatæ potestas in propriam infinitesimam ducta assumatur, ut $x^{\lambda}e, y^{\lambda}a, f^{\lambda}o, z^{\lambda}\mu$ &c. (quales terminos semper, ubi infinitesimam vel propriam vel alienam comitem habent, in posterum vel *proprias* vel *alienas infinitesimales* vocabimus) dico: quamlibet *propriam infinitesimalem* in suo genere, infinities (seu toties, quoties ipsa infinitesima, Verb: Gr:

Gr: e aut a; indeterminatam propriam, quam componit, Verb: Gr: x aut y, ingreditur) ſumtam (quarum infiniteſimalium infinitam ſummam ſimpliciter voce *omnium* denotamus in ſeqq:) æquari indeterminatæ maximæ poteſtati proxime ſuperiori ac diviſæ per ſuum exponentem: Sic omnia $x \times e = \frac{1}{3} x^3$ omnia $z^3 \mu = \frac{1}{4} z^4$ + &c.

Demonſtratio eadem eſt, ac præcedentis corollarii.

13. Hinc ſequens profluit maximæ utilitatis in calculo infiniteſimali theorema, nulli, quantum mihi conſtat, adhuc animadverſum.

Sit expoſita quælibet quantitas aut æquatio, indeterminatas quascunque, quæ per infiniteſimas creſcunt aut decreſcunt, continens; eaque redigatur ad infiniteſimas more jam ſæpius oſtenſo; dico omnes terminos infiniteſimales infinities, juxta leges §. præced. ſumtos ex eodem expoſitæ quantitatis termino oriundos (quinam autem illi ſint, ſequens docebit ſcholium.) Ipſi termino unde originem ſumſerunt, tanquam valori abſoluto, perpetim æquari; & è converſo. Si hûc valor abſolutus indeterminatæ ac maximus; in infiniteſimalium vero infinitâ ſerie continuo per infiniteſimarum applicationem mutatus intelligatur.

Demonſtratio duobus in caſibus abſolvitur:

I, cum

I, cum terminus Verb: Gr: ryp præter determinatas r, quæ nullam mutationem inferunt, unicam tantum indeterminatarum, uti y, continet. II, cum terminum Verb: Gr: $rypfq$ plures unâ indeterminatæ y & f, in ſe mutuo ductæ, ingrediuntur. In I. caſu ſit quantitas expoſita ry^p; erit ea ad infiniteſimas reducta $ry^p + pry^{p-1}a$. Jam eſſe omnia $pry^{p-1}a = ry^p$ ex §. præcedenti patet. In II. caſu, ſit expoſita quantitas $x^p y^q z^b$; erit eadem ad infiniteſimas redacta, $x^p y^q z^b + py^q z^b x^{p-1}e + qx^p z^b y^{q-1}a + bx^p y^q z^{b-1}\mu$.

Ubi tres termini infiniteſimales ex uno expoſito oriuntur; quos infiniteſimales brevitatis ergo, litterâ M; expoſitum vero terminum littera N deſignabimus.

Eſſe autem omnia M æqualia abſoluto valori ipſius N, hoc modo evincitur; fiat $N = f^d$; erit utrâque ad infiniteſimas redactâ $N + M = f^d + df^{d-1}\theta$; & deletis æqualibus, infiniteſimalibuſque infinities ſumtis, omnia $M =$ omnia $df^{d-1}\theta$; ſed omnia $df^{d-1}\theta$ juxta præcedentem $= f^d = N$; ergo omnia $M = N$; *Q: e: d.*

Schol.

Schol. Potuisset generalis regula terminum quemlibet ad infinitesimas redigendi, hisce aliisque præmitti; cum autem ipsam operationis methodum sæpius, si non ad nauseam, adhibuerimus, quilibet sibi compendia ipse excogitabit. Hoc interim in calculi commodum tyrones observent: terminum quemcunque ad infinitesimas redactum esse eundem illum terminum, tot numero terminis infinitesimalibus junctum quot indeterminatas ipse terminus continuit, quomodo vero infinitesimales efformentur sequens exemplum docebit,

I. In exposito quocunque cum suo signo termino $+xxy^3z^4$, prima ordine consideretur indeterminata x; terminusque per ipsius x exponentem multiplicatus unicâ x divisionis ope demptâ, ducatur in e, seu propriam ipsi x infinitesimam, suo signo debitè affectam; & habebitur terminus infinitesimalis primus $2y^3z^4xe$.

II. Jam, secundâ indeterminatâ y assumta, eadem operatio repetatur, emergètque pro infinitesima y secundus terminus infinitesimalis $3xxz^4yya$.

III. Tertia indeterm: z sequatur, eodemque ordine ac lege peragantur omnia, orieturq: tertius terminus infinitesimalis $4xxy^3z^3\mu$.

IV. Eoque juxta omnium indeterminatarum numerum continuato, obtinebitur hoc in casu $xxy^3z^4+2y^3z^4xe+3xxz^4yya+4xxy^3z^3\mu$ pro termino xxy^3z^4 ad infinitesimas redacto. determinatæ, si termino exposito misceantur, quantitates manent. De signis non est quod

quod laboremus, modo exponentes ac infiniteſimæ legitimis ſuis ſignis affectæ adhibeantur.

Demonſtrationem omitto; ex præcedentibus non paucis in locis, aut numerorum poteſtates exprimentum vice generaliora ſymbola ſubſtituendo, levi negotio petendam.

NB. In exemplum dedimus terminum pluribus indeterminatis conſtantem; quæ ſi unica tantum ſit, juxta hanc unicam terminum conſiderandum eſſe quilibet videt; ſic $rrx3$ ad infiniteſimas redacta dabit $rrx3+3rrxxe$.

Conferet hoc ad pleniorem §. 35, methodique tangentium inibi traditæ, demonſtrationem; & ad legitimam ex terminis infiniteſimalibus ad eos, unde ortum duxerunt, regreſſionem; quam, ut hujus ſcholii converſum, hinc cognitam ſupponimus, in quantum eorum, quæ modo tradidimus, natura patitur.

14. Sit *Fig.* XXXIV, curvilineum $ADFO$ idem ac §. 11, eademque ſymbola; intelligantur-que ſubtangentes TQ in MD, VO in LE &c. perpetuo applicari ſervato ad ipſam AQ parallelíſmo: erit juxta §. 11. oſtenſa trapezium $MDEL = ta$; adeoque trilineum $LAF =$ omnia $ta =$ trilineo AFO ſeu omnibus ye, ex eadem §. 11.

Coroll. Unde factis $TM = DQ$, $LV = PE$ &c. donec enata ſit curva LMA, erit, vocata $AT: z$, cum ſit $MT = y$, relatio curvæ LMA ex relatione curvæ ADF cognita; datoque ſpatio ADQ, datur ſpatium $TMA =$ rectangulo $MDQT -$ ſpatii ADQ duplo; & contra.

15. Sit

15. Sit *Fig. XXXV.* curvilineum AFO; curvamque tangens *TD* producatur, donec prolongatæ OF occurrat in *S*; vocenturque *TQ:t*, *AQ:x*, *QD:y*, *DI:l*, *IS:h*; infiniteſimæ *DH:e*, *EH:a*. Statuaturque SO ſeu *h+y* perpetim in QB, donec deſcribi poſſit nova curva OBR: erit ſpatium ARO ſemper duplum ipſius AOF.

Eſt enim ſpatium ARO juxta §. 4. = omnia *he+ye*; ſed omnia *he* ſecundum §. 2. = omnia *ye*; quare omnia *he+ye* = totidem *2ye*, unde conſtat propoſitum.

Coroll. Sit AEF arcus circuli; erit, facto radio = *r*; $OS = \frac{rr}{y}$; unde curvilineum AOR, hanc habens ad circulum relationem æquabitur duplæ circuli portioni AOF.

16. Quod ſi ipſa QB perpetuo adæquetur ſubtangenti *IS* ſeu *h* erit ſpatium ARO æquale ſpatio AFO: cum enim ſit perpetuo *la = he*, ex §. 2. apparet intentum.

Coroll. 1. Patet hinc ratio ad eundem axem AQ ſeu *x*, non duo tantum curvilinea AFO, ARO conſtituendi, quæ ſibi mutuo æquantur, verum & pro lubitu multa; ſiquidem tractato curvilineo ARO denuo, eodem more, quo in curvilineo AFO uſi ſumus, novum ad eundem axem applicabile emerget curvilineum prio-

prioribus æquale; & sic in infinitum. plura hinc retragonismorum genera originem ducunt & multifaria spatiorum inter se comparatio.

Coroll: II. Sic *Fig. XIII.* N. 1. cissois in ratione ad Circulum mensuratur; resumto enim §. 31. Cap: I, erat $RL, t = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z$, seu $3y = 2t - z$; & ductis omnibus in $QP : e$, fiet $3ye = 2te - ze$: cum autem semper sit $te = lo$; seu (posita $BQ = RL = t$ ad curvam ABC) trapezium $BQPC = NLMK$; erunt omnia te, seu spatium curva $ABCK$ & rectis AO, OS, interjectum, æquale integro spatio Cissoidali seu omnibus lo: & si omnia ye; seu semicirculus dicatur c, ac omnia ze seu spatium Cissoidale vocetur f; cum fuerit omn. $3ye$ = omn. $2te$ — omn. ze, erit $3c = 2f - f$; adeoque $3c = f$; & cissois semicirculi tripla.

Coroll. III. Hoc modo Cycloidum mensura indagatur; quæ, prout hic tractatur, exempli loco; in cæteris; tyronibus servire potest.

Sit *Fig. XXXVI.* Cyclois $ALMO$ ad semicirculum $ABCG$ relata; hanc tangat recta $ILMS$; sit centrum Circuli F; vocenturque $IE : t$, $VS : s$, $LE : z$, $BE : y$; LV seu $EG : x$, arcus $AB : c$; æquatio Cycloidis sit $p : q :: z - y :: c :: LB : AB$; erit, juxta §. 59, Cap. I. IE seu $t = \frac{qyz}{pr - qr + qx}$, & quia $IE : EL :: LV : VS$. erit VS, seu $s = \frac{xx}{y}$ $\frac{+prx - qrx}{qy}$.

Jam vero appellatis, DE, BP, $LN:e$, $CP:a$, $MN:i$, quia $SV:VL::MN:LN$. ſeu $s:x::i:e$. erit ſemper $xi = se$; unde, poſitâ SV ſeu s in ET, deſcriptâque curva GHT erunt omnia xi, ſeu rectangula LVR, ſive totum Cycloidis AOG ſpatium, æquale omnibus se, ſeu rectangulis TED, hoc eſt integro ſpatio $GATT$; quare inventâ hujus ſpatii GAT, ſeu omnium se, ratione ad Circulum, inventa erit ſpatii Cycloidalis, ſeu omnium xi, ratio ad eundem.

Quod ut fiat: ſit primo ALO cyclois primaria, erit $p = q$, adeoque $SV = ET = \frac{xx}{y}$: Unde patet curvam GAT eſſe Ciſſoidem: ſed, ex modo dictis, ciſſoidale ſpatium hoc cycloidali expoſito æquatur, ſeu omn. $se =$ omn. xi; adeoque & hoc eſt ſemicirculi triplum juxta coroll. præc. Hoc notabo: quia ſemper eſt: $se = xi$, ſi ad eundem ſemicirculum, tum cyclois AOG, tum ciſſois $AGTT$, referantur; ductâ LV ipſi AG parallel â, eique normali LT, fore ſemper ſpatium LVO æquale ſpatio ETG.

Quod ſi cyclois alterius ſit generis, & $s = \frac{xx}{y} + \frac{frx - arx}{qy}$; quoniam $\frac{xx}{y}$ manet ad ciſſoidem; ſi jam innoteſceret, quam rationem curvilineum, cujus applicata $\frac{rx}{y}$, haberet ad ſemicirculum; ex

ex §. 8. ac applicatarum summâ notum foret spatium omnium *se*; unde quæstio ad sequentem devolvitur:

Sit centro *F* descriptus semicirculus *ASG*, voceturque radius *r*, *GD*: *x*, *DC*: *y*, *DA*: $2r - x = l = MH$; *Fig. XXXVII.* sit item alia curva *GHT*, cujus applicata $DH = \frac{rx}{y} = f$, tangat vero *HK* curvam in *H*, dicaturque *KM*: *t*, *PC*, *ED*, *NH*: *e*, *NT*: *o*, *BP*: *a*; erit *I.* æquatio *KM*: *MH*:: *NT*: *NH*, unde $lo = te$. *II* Æquatio ex naturâ curvæ $\frac{rx}{y} = f$, seu $\frac{rx}{f} = y = \frac{lx}{r}$, quare $ry = fl$; & $rx = fy$ redacta ad infinitesimas $re = fa + yo$.

III. Ex natura circuli $lx = yy = 2rx - xx$; unde $re - xe = ay$ jam autem ex I. & II æquationibus, est $o = \frac{te}{l} = \frac{re - fa}{y}$, unde $a = \frac{rle - tye}{fl} = \frac{re - xe}{y}$, quâ ordinatâ & facto $fl = ry$ dabit $rl - ty = rr - rx$, & loco *l* posito $2r - x$, fit $t = \frac{rr}{y} = KM$: quæ si ponatur in *ID* ad curvam *VSI*, erit; cum sit $te = lo$, spatium rectis *ZA*, *GO* & curva *VSI* comprehensum, seu omnia *te*, æquale spatio expositio rectis *AG*, *AL*, & curva *GHT* interjecto, seu omn *lo*:

Jam autem denuo oporteret rationem curvilinei

linei (cujus applic. ID ſeu $\frac{yy}{y} = t$) ad ſemicirculum indagare. Sed in hoc particulari ad Circulum caſu aliam viam ingrediemur; Ad radium FS ducatur normalis SR, ſecans radium FC produductum in R, voceturque $BC : u$, erit (quia DC, y: FC, r:: SF, r; FR, $\frac{yy}{y} = t$) $y : r :: r : t ::$ PC, e: BC: u: quare ſemper $ru = te$; jam autem ſemicirculus eſt æqualis omnibus triangulis BFC ſeu $\frac{ru}{2}$, hinc omnia ru ſemicirculi duplum; adeoque & omnia $te =$ omnia $lo =$ ſpatium KAGT, quod æquivalet omnibus fe. Jam concludendo, fiat $\frac{xx}{y} = h$; &, quia $\frac{rx}{y} = f$, erit $se = he + \frac{p-q}{q} fe$; vocato jam cycloidali ſpat. k, ſemicirculo: d, emerget, quia omnia $he = 3d$, & omnia fe, $= 2d$, hæc æquatio $k = \frac{2pd+qd}{q}$; & orietur *Toricellii* regula, quia ratio q ad p eſt ratio peripheriæ ſemicirculi ABG ad baſin Cyclöidis cujusvis GOA.

Coroll. IV. Eodem modo & *Fig.* XXXVIII. Complementum Cyclöidis AQO metimur. Vocetur enim BE: y, LE: z, AB: c, AE ſeu KL: x, EF: $l = r - x$ (ſi radius dicatur r) & KV: s; recta LV tangat curvam, erit exiſtente æquatione Cyclöidis, $p : q :: z - y : c$, linea IE $= \frac{qyz}{pr+ql}$ (uti præced: Coroll. inſinuatum) &, quia $l = r - x$, erit

erit IE = $\frac{qyz}{pr+qr-qx}$; jam vero IE: EL:: KL: KV = s = $\frac{prx+qrx-xx}{qy}$: $\frac{r}{y}$; quia autem poſita SL = i, & SM: = e, eſt KV: KL:: SL: SM. Sive s: x:: i: e, erit ſemper xi = se, & poſito RT = s ad curvam QRO, ſpat. AQO ſeu omn. xi, = ſpat. QRO ſeu omn. se = $\frac{prxi+yrxe-xxe}{qy}$: $\frac{r}{y}$, hoc eſt, facto ſemicirculo = d, (quia per Coroll: præc. omnia $\frac{ax}{y}e$ = $2d$, & omn. $\frac{xx}{y}e$ = $3d$) omnia se = $\frac{2p-q}{q}d$ = complem. Cycloidis AQO. Quod ſi p = q ponatur, cyclois erit primaria, ac compl: AQO æquale ſemicirculo d. ſed & cum hoc caſu ſit s = $\frac{2rx-xx}{y}$ = y; ex proprietate ſemicirculi, patet RT ac BE ſemper æquari & QRO eſſe ſemicirculum; adeoque ſemper eſſe se = ye = xi; ſeu ſpat. AKL continuo æquari ſpat. QRT ſeu ABE.

Corol. V. Sit jam ALO alterius naturæ Cyclöis *Fig. XXXVIII.* cujus æquatio (retentis per omnia ſuperioribus ſymbolis) p: q:: EL: arc. AB:: z: c. Unde qz = pc; & juxta tangentium methodum IE = $\frac{qyz}{pr}$, ac KV ſeu s = $\frac{prx}{qy}$; quare omnia se = omn. xi = comp: QOA = $\frac{2pd}{q}$; quod ſi ſubtrahatur ex rectangulo $QAGO$ ſeu $\frac{2pkr}{q}$ (poſito k æquali ſemiperipheriæ $AECG$) ſeu

ſeu $\frac{A.dp}{q}$, remanebit ſpatium $AOG = \frac{2pd}{q}$, æquale ſuo complemento. Si $p = q$, erit alterutrum $= 2d$ ſeu ſemicirculi duplum.

Coroll. VI. Repetitis ſymbolis §. 62. C. 1, aſſumtâque inibi traditâ hypotheſi; *F. XVII.* ſi $ABCD$ ſit quadrans circuli, ac KE curvam tangat, erit, juxta §. 63. cap. 1, KM ſeu $t = \frac{rh}{d}$, quare $d:r::h:t$; & juxta lemma 46, (quia ratio d ad r perpetuo manet eadem) $d:r::ha:ta$; ſed citato §. 62. $ha = uy$, & $ta = ye$, quare $d:r::uy:ye$; verum ex proprietate ſemicirculi $BQ:BN::CB:BR$ ſeu $r:y::u:i$; unde $uy = ri$; adeoque erit $d:r::ri:ye$; hoc eſt radius r ad quadrantem peripheriæ d, ut ſpatium $AFDQ$ ſeu omnia ye ad quadratum in AQ ſeu omn. $ri = rr$. Secundum 1, II. Euclid.

Coroll. VII. Reſumtâ curvâ §. 30. cap. 1, *Fig. XII.* cæteriſque ut inibi ſuppoſitis, nimirum $r^p - x^p = y^p$ pro æquatione curvæ AEF, factis ſcilicet $QO:x$, $QD:y$; tum & $y^s = r^{s-1}z$, pro æquatione curvæ ANG, cujus applicata $QN:z$, erit, juxta §. 30. cap. 1, RL ſeu $t = \frac{sy^{s-p}}{r^{s-p-1}} - sz$; unde cognitâ figurâ $ADFO$ ſeu omnibus ye cognoſcetur figura AOG ſeu omnia ze.

Sit enim primo $s = p + i$; erit æquatio inter utriuſ-

utriusque curvæ applicatas, $y^{p+1} = r^p z$, ac RL seu $t = \overline{p+1}\,y - \overline{p-1}\,z$. Cum autem juxta 30. cap. 1, sit continuo $te = xo$, hoc est (posito RL seu t in QS donec descripta sit curva $ASVF$) figura $ASVFO$ seu omnia te æqualis figuræ $ANKGO$ seu omnibus xo, quæ æquantur omnibus ze; quia eandem figuram juxta §. 1. & 2. hujus constituunt: erunt & omnia $te = \text{omn. } ze$. unde factis omnibus te seu omnibus $ze = b$, & omnibus $ye = c$, erit (quia modo sunt $te = \overline{p+1}\,ye - \overline{p-1}\,ze$) quoque $b = \overline{p+1}\,c - \overline{p-1}\,b$, seu $\frac{p+1}{p+2}c = b$ = figura AGO; unde posita figura $ADFO$ ad quadrantem circuli erit $p = 2$, adeoque $\frac{3}{4}c = b$: & æquationes $rr - xx = yy$ ac $y' = rz$, seu $rr - xx \sqrt{rr - xx} = rrz$.

Jam, manente quadrantis circularis hypothesi, fiat curvæ AGO applicata h, & æquatio $y' = r^4 h^5$; fiet $s = 5$, & $p = 2$, unde RL seu $t = \frac{5y^3}{rr} - 5h$; eritque factis omnibus $he = d$, (cum ex modo inventis omnia $\frac{y'}{rr}e$ seu omnia ze fuerint $= \frac{3}{4}c$) $d = \frac{15}{4}c - 5d$, seu $d = \frac{5}{8}c$.

Schol. Ne autem particularibus nimium inhæreamus, methodum generalem addo, quælibet curvilinea in alia infiniti generis transmutandi, tum & plurimorum mensuras inveniendi; ex solo præcedenti §. 4. deductam.

17. Sit

17. Sit curva, *Fig. XXXIX. AEF*, vocenturque $DQ:y$, $AQ:x$, ſubtangens $TQ:t$, tangens $TD:s$, huic normalis $DR:k$, ſubnormalis $QR:l$, curva $AD:c$, infiniteſimæ $DH:e$, $EH:a$, $HE:u$; jungaturque *Fig.* XL, $\alpha\varphi o$ ejus naturæ, ut $\alpha\varphi$ per omnia exactè quadret curvæ AEF, ſitque δ æqualis parti curvæ infiniteſimæ DE ſeu u, tandem $o\varphi$, $\pi\delta$, $\varkappa\delta$ ſint applicatæ. Aſſumanturque indeterminatæ h & z, ac fiat quælibet hypotheſis; ſit que

I. $he = za$; erit applicatâ perpetuò h in QC ad e, nec non z in IM ad a, juxta §. 4, omnia he ſeu ſpatium ASO æquale omnibus za ſeu ſpatio OFK.

II. Fiat $he = zu$; erit, poſitâ curvâ $ADEF$ in directum in $\alpha\varphi$, ac ſemper applicatâ $\varkappa\delta$ ſeu z ad δ, ſeu u, area $\alpha o\varphi$ ſeu omnia zu æqualis areæ ASO ſeu omnibus he.

III. Sic & facto $za = hu$; erit, exiſtente continuò $\varkappa\delta = h$, & $IM = z$, trilineum $\alpha o\varphi$ æquale trilineo OFK.

Unde patet, datâ curvæ ADE proprietate, ac ſumta ipſarum z & h alterutrâ ad arbitrium, reliquam ſemper per infiniteſimarum rationem determinari; hanc autem rationem ex curvæ ADF naturâ dari plus quam cognitum eſt, eſt enim $s:t::u:e$. item $s:y::u:a$. nec non $t:y::e:a$.

Coroll. I. Hinc cujuslibet curvilinei transmutationes infinitæ. reſumtâ enim primâ hypotheſi $he = za$ cum ſit ex proprietate curvæ cujuscunque

que $ye = ta$ erit $\frac{tb}{y} = z$; unde sumpta b pro arbitrio, Verb: G: ad circulum $= \sqrt{2rx - xx}$, si $y = D\,Q$ sit ad parabolam $= \sqrt{rx}$, erit $z = 2x\sqrt{\frac{2r-x}{r}}$; quæ mediante parabolæ æquatione $rx = yy$ expressa per y (cum hic z ad a, seu ipsius y infinitesimam, applicari supponatur) dabit $z = \frac{2yy\sqrt{2rr-yy}}{rr}$; adeoque relationem curvæ OMK. cum autem, retento ipsius b valore & loco, possit $D\,Q$ ad infinitas curvas statui; & modo prædicto ex singulis emergat aliûs naturæ curvilineum, quorum singula nihilominus circulo seu omnibus be æquantur; patet dato cuilibet spatio infinita æqualia hac methodo exhiberi posse: quod in multis casibus non exigui est usus.

Sic & ex hypothesi secundâ $be = zu$, manentibus b ad circulum & y ad parabolam, cum sit $se = tu$, erit $\frac{tb}{s} = z$; unde s & t ex naturâ parabolæ, b ex naturâ circuli cognitis, ipsa z magnitudine nota est: quæ ad $\alpha\varphi$ curvæ AF æqualem applicata efficiet trilineum $\alpha\omega\varphi$ æquale ipsi ASO.

Coroll. II. Quod si z ad quamcunque curvam, spatium cognitum continentem, statuatur, ad triangulum, parallelogrammum, paraboliformium quandam aut aliûs generis quadrabilem; erit & b ad locum cognitum) cujus spatium mensuram patitur; unde mutatâ rursus curvâ ADF in

in infinitum, infinita dantur ſpatia menſurabilia, & aſſumto cuidam curvilineo æqualia.

Ex: G: in hypotheſi primâ $he = za$, factâ z æquali determinatæ r, erit $h = \frac{ry}{t}$; unde, y & t ex curvæ ADF relatione cognitis, erit ASO æquale omnibus ra ſeu ry ſeu rectangulo $FOGK$. Idem ſi fiat in hypotheſi ſecundâ $he = zu$ erit $h = \frac{sr}{t}$, & ſpatium ASO æquale rectangulo $\alpha\varphi o\mu$, ſeu r in curvam AF; quod ſi aſſumatur $z = c$ erit $he = cu$; & ſpatium AOS æquale ſemiquadrato curvæ AF.

Coroll. III. Nec hypotheſis in duobus tantum terminis conſiſtat neceſſe eſt, cum infinitis fere modis variata aſſumi poſſit. Sit in exemplum $ye + xa = he$; eſt ye ad curvilineum AFO, xa ad ejus complementum AFV, & he (facto $QC = h$) ad trilineum ASO; unde hoc in caſu ſemper $AQC =$ rectangulo $XDQA$. quod ſi proprietatem curvæ ACS invenire quis velit (cum ex data curva AEF etiam x & y data ſint) eſt $ye = ta$; adeoque $h = \frac{xy + ty}{t}$; quæ ope curvæ ADF expreſſa per interceptam x dabit quæſitum.

Sic aſſumto $za + he = fu$ (poſitâ f pro tertia in determinata ad α, applicabili) unicâ Verb. Gr. f pro lubitu determinatâ $= r$ & eliſis infiniteſimis

mis

mis emerget $zy + th = rs$; unde altera quoque ex ipsis z vel h, præter ipsam f, adhuc arbitrio relinquitur.

18. Hoc addam, licet præcedentis tantum sit consectarium, in hypothesi prima $he = za$ fiat $z = y$ erit $h = l$; adeoque $le = ya$; & omnia le seu spatium AOS (cujus applicata QC semper æqualis est subnormali respectivæ QR) æquatur FOK seu semi quadrato ipsius FO. Cum enim perpetuo sit $IO = I^{II}$ erit I^{II} ad triangulum isosceles tum & ex §. 13, notum esse omnia $ya = \frac{yy}{2}$.

Coroll. I. Hinc opulenta rursus mensurabilium spatiorum copia, & ex quâvis curva ADE infiniti generis; positâ enim quâcunque subnormali QR in QC, nascetur AOS spatium mensuræ capax; cujus si rursus subnormalis inquiratur, aliud rursus spatium & sic sine fine, enascentur ex unâ eâdemque curvâ ADE curvilinea magnitudinem cogniram habentia, quod ex præcedenti satis manifestum est.

Coroll. II. Quin & hæc, præter alias methodos, curvarum generalem absolveret quadraturam; si solvi posset problema §. 95 cap. I. propositim; hoc est si, datâ qualibet QC per QA seu x expressâ, inveniri posset curva ADE, cujus subnormalis QR ipsi QC perpetuo ac respecti-

pecti QR ipſi QC perpetuo ac reſpectivè adæquaretur unde, ſi $QC = QR$ datâ foret in terminis æquationis curvæ ADE proximis, obtineretur intentum, juxta Cap. I, §. 93, & ſeqq. Modi hoc inquirendi varii Cap. I. 95. &c. videri poſſunt.

Quibus hunc adjungo; cum referat omnium ſubnormalium ad curvas tum geometricas, quæ per ſolas x & y; tum & alias, quæ per curvam c quocunque modo efferuntur, pertinentium terminos proximos.

Fiat $z+f+g+b+d+h+k+m = 0$.

Ac terminorum quorumlibet ſumma, in quibus ſub quibuſcunque ſignis, invenitur poteſtas quælibet ipſius x deſignetur per z, ipſius y per f, ipſius c per g, tum ipſarum x & y per b, ipſarum x & c per d, ipſarum y & c per h, omnium denique x & y & c per k; determinati termini vocentur m. tum littera quamcunque terminorum ſeriem in ſingulis terminis per exponentes reſpectivos ipſius x multiplicans dicatur A; quæ hoc idem in omnibus ratione ipſius y præſtat, ſit B; quæ ratione ipſius c appelletur D: NB. Has terminorum ſeries per $A, B, D,$ &c. hoc eſt in ſingulis terminis per ejuſdem indeterminatæ exponentes reſpectivos multiplicatas, aut diviſas, in poſterum *ſubtangentialiter* multiplicatas aut diviſas appellabo.

Sequitur I. omnes curvarum deſignatas æquationes per modo propoſitam exprimi; uti cuilibet patet; cum omnis generis & multitudinis terminos involvat.

II. Hanc juxta regulam §. 35. Cap. I. tractatam omnium curvarum, tum geometricarum, tum c continentium, ſubnormales l, generali hac æquatione exhibere; juxta denotationem §. 96. Cap. I. adeoque l æquabitur.

$$\frac{(Az)+(Ab)+(Ad)+(Ak) \text{ in } cyy}{-(Bf)-(Bb)-(Bb)-(Bk) \text{ in } cx-(Dg)-(Dd)-(Dh)-(Dk) \text{ in } xx}$$

Excm-

Exemplum in tyronum gratiam addam: sit *Fig.* XXXIX. curva ADE; cujus æquatio $2rx - xx = yy + xy + ry + rr$; Quæritur QR, seu l, ejus subnormalis.

Positâ æquatione, ut supra, nihilo æquali; erit $2rx - xx - yy - xy - ry - rr = 0$, videre est c hanc æquationem non ingredi; quare ad hanc pertinentes quantitates g, d, h, k, nihilo fiunt æquales; solæque, z quæ x, f quæ y, b quæ x & y continet, reservandæ; fietque per c divisione institutâ $l = \frac{(Az)yy + (Ab)yy}{-(Bf)x - (Bb)x}$, unde loco z substituto $2rx - xx$, loco f posito $-yy - ry$, tandem pro b ipso $-xy$, servatis in singulis additis signis, fiet, omnibus juxta A, B, &c. subtangentialiter multiplicatis, ad divisis per xy, subnormalis $l = \frac{2ry - 2xy - yy}{2y + r + x}$.

Schol. Hoc solum ac unicum restare videtur: ut ipsa l, per terminos hosce generales explicata, in curvis geometricis per solam x posset efferri, juxta canonem omnibus curvis convenientem & universalem; unde primo fere intuitu appareret in qualibet curvâ, num juxta præcedentis tenorem posset quadrari; & an inter varias, quæ hinc enascerentur, relationum expressiones aliqua reperiretur, quæ expositæ curvæ proprietati congruerer.

Videbantur hæc inter subnormalium inventiones Cap. I. tractatas sibi locum vendicare; verum quoniam curvilineorum hinc orientium quadraturæ primario considerantur, malui hanc methodum huic potius loco, tanquam ei, quod intendimus, convenientissimo inserere. Sed ad corrollaria revertor.

Coroll.

Coroll. III. Hinc eadem, quæ in §. 11. coroll. ex alio principio oſtendimus, originem ducunt; ſerierumque juxta *Clar: Wallis:* tum auctarum tum multatarum aggregata & reſidua, horumque poteſtates quælibet in debita ſua ratione ad totidem maxima conſtituuntur; quæ §. præcedentis non niſi particularem caſum efficiunt.

Ex: Gr: *Fig. XXXIX* poſitâ $AQ = x$, & $QB = n$: ſit z quotlibet terminorum ſimplicium x continentium ſumma, & curvæ ABS æquatio $n^p = z$; quæruntur omnia ne ſeu omnia ze. Quapropter fiat $z = n^p = ml$; ſitque $l = QC$, eique ſemper æqualis curvæ ADE ſubnormalis QR; erit ergo $l = \frac{z}{m}$, & juxta Cap. I. §. 97. Coroll. I. æquatio curvæ ADE $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{myy}{2}$; ſed omnia $le = \frac{yy}{2}$ ex præced: ergo $\left(\frac{zx}{A}\right) =$ omnia $mle =$ omnia ze. quæ erant invenienda.

Unde hæc regula; omnia ze, (ſeu facto in exemplum $z = rx \pm xx$) omnia $rxe \pm xxe$ æquantur ipſi zx ſubtangentialiter per A diviſæ; hoc eſt ſerei datæ z unicâ ipſius x dimenſione auctæ, & poſtea in ſingulis terminis per poteſtatem ipſius x diviſæ $= \frac{1}{2}rxx \pm \frac{1}{3}x^3$. hinc §. 12. rurſus demonſtrari poteſt. Poſſe autem poteſtates ipſius x, in terminis ipſam z componentibus, nunc per numeros fractos nunc per negati-

vos

vos deſignari ; tum & dignitates quaslibet aggregatorum ſerierum auctarum aut multatarum, per ſymbolum z efferri ; notius eſt quam ut hic oſtendi mereatur.

Coroll. IV. Oritur hinc, & ex §. præced:, multifaria methodus, quâ ex dato curvilineo AQC, in terminis quibuscunque algebraïcis, ipſius applicatæ QC ad interceptam AQ relatio exhibetur. Hæc inter ſequentia ex fundamento magis generali deducemus.

19. His annectere liceat facillimam curvilineorum quorumcunque transmutationem, ſubſtractionem, additionem &c. ex §. 6, 7, 8, 9. directè manantes.

Sit in exemplum (reſumtis §. modo citatorum ſymbolis ac *Fig. XXVII.*) $z+b=y$. ſupponatur $z=\sqrt{2rx-xx}$ ad Ciſſöidem; $b=\sqrt{2rx-xx}$ ad ſemicirculum correſpondentem ; fiet $y=\sqrt{2rx}$. Jam autem omnia y e æquantur omnibus b e quater ſumtis, ſeu quatuor ſemicirculis, ex §. 16. Cor: III. & juxta hypotheſin omnib. $be+ze$ ſeu ſpatio infinito Ciſſöidali cum ſemicirculo : quare Ciſſöidale ſpatium ſemicirculi triplum eſt.

Coroll. Poſſet y ſupponi æqualis quotlibet applicatis $z+s+f+g$ &c. quibuslibet ſignis affectis; unde

unde poſitâ y ad curvam datam quamlibet, cæteriſque, exceptâ unicâ, ex arbitrio determinatis, ultima definitione ſui patefaciet curvæ naturam, cujus ſpatium cum reliquarum omnium areis nunc ſimul addits, nunc pro variâ ſignorum naturâ à ſe mutuo ſubductis, æquabit datum ſpatium ſeu omnia *y e.* verum, quæ hic ob tantam applicatarum copiam arbitrio relictam ſe pandunt, ſpeculationes præteribo.

20. Hoc addo: ſi aſſumta ſpatia quadraturam admittant, etiam quod ex iis per additionem aut ſubſtractionem componitur, erit quadrabile: poſſuntque hic curvilinea quælibet, quæ menſuram pati aliunde novimus, adhiberi; horum autem æquationes ſi ad paraboloidum hyperboliformiumque loca conſiſtant, erunt & omnes ipſius y poteſtates cognitæ: quod leviter ad præcedentia attendenti ignotum eſſe nequit.

Coroll. Poſſent hæ omnes poteſtatum, ac ſpatiorum menſurabilium hinc oriundæ diverſitates in ordinem redigi, a ſimplicioribus ad magis compoſita progrediendo, ac theoremata quædam efformari, quod provectioribus facile, in minus exercitatorum tamen commodum hoc generalius paulo ſpecimen ſubnecto.

Detur. $y^{\frac{f}{g}} = z^{\frac{d}{c}} - q^{\frac{m}{n}}$ in $\overline{\overline{\overline{

Ac litteræ, $d, m, ſ, l, f, k, n, p$, quantitatum præpoſitarum poteſtatem deſignent; item t, verum hæc binomii, lineolâ ſuperinductâ notati, dignitatem generalem ſignificat; reliquæ, z, g, q, c, h, b, ſunt ſingulæ ad locum quendam ſpatio menſurabilem; qualia ſunt rectangulum, triangulum, paraboloïdea quæcunque, aut hyperboliformia; quæ hoc in exemplo tantum conſiderabimus.

Dico, ſi fiat $f = 1$, curvilineum, cujus applicata y, quadraturam admittere, conſequentiæ ratio ex §. 11. cum annexis corollariis manifeſta eſt.

Ex: Gr: factis $m = d$, item $ſ$ & l nihilo æqualibus, omnibuſq. ad dignitatem p evectis, ac tandem in analogismum reſolutis, fiet $b^n : h^k :: z \mp q^{\frac{d}{p}} \mp d^{\frac{k}{p}} : y$. Unde poſito rurſum $d = 1$, emerget hæcce, cum y ſuppoſita ſit unius dimenſionis, inter poteſtatum exponentes æquatio $t + \frac{k}{p} - \frac{n}{p} = 1$, ſeu $pt + k - p = n$:; denique ut â ſimpliciſſimis incipiamus, aſſumtis $b = r$, $h = x$, $z = r$, $q = x$, oritur proportio nova, quæ, facto $t = 1$, in ſequentem abibit $r^k : x^k :: \overline{r \mp x}^p : y^p$, quæ, ſigno negativo retento, eſt curvilinei â Clar: *Sluſio* menſurati.

Sic & pro variâ tum quantitatum, tum exponentium aſſumtione variæ continuo enaſcuntur cur-

curvarum proprietates, quæ omnes ſunt ſpatio menſurabiles, ut factis $b = x$ & $h = r$ erit $x^{\frac{p}{q}} : r^{\frac{p}{q}} :: r^{\frac{p}{q}} \mp x^{\frac{p}{q}} : y^{\frac{p}{q}}$.

Schol. Quanta vero hinc theorematum, ac menſurabilium curvilineorum copia enaſcatur, nulli non manifeſtum eſſe poteſt; qui ex aliis tum poteſtatum, tum reliquarum quantitatum, hypotheſibus alias in infinitum oriri curvas; tum & pro ſingulis, in æquatione generali, fractionum numeratoribus, quotlibet terminorum, ſimpliciter x cum determinatis continentium, aggregata tuto aſſumi poſſe perſpexerit. modo hæc ſequentia obſerventur; I. ne plures uno terminos ipſi fractionum denominatores contineant II. ne poteſtas per t deſignata, niſi per numerum affirmativum aut integrum explicetur; cæteris d, m, s, &c. ſupponentis bene placito relictis.

Quod, ſi ſecus hæc ſeſe habeant, ac deveniatur igitur ad hanc aut ſimilem æquationem $y = \frac{rr}{r \mp x}$ aut $y = \sqrt{rr - xx}$; nulla adhuc hic regula tradita eſt (niſi forte inter ſubnormales repertæ ex §. 18. menſuram invenirent) quâ omnium ye valorem abſolutum indagare poſſimus; niſi adhibita prius reductione, quam per *diviſiones Mercator*, per *extractiones* inclytus *Newton* ad optatam metam perduxerunt. utraque hæc, tum diviſionis tum extractionis operatio poteſtatum in binomiis deſignatione perficitur; uti mox ſubnecſendo theoremate parebit.

21. Eſt autem theorema hujuſmodi: ſit binomium quodcunque $z + f$ evehendum ad poteſtatem quamcunque deſignatam p: erit (poſito termino hujus poteſtatis in ordine primo $= 1 z^0$ cujus genitura $= 1$) hæc, quæ ſequitur, generalis pro terminorum reliquorum genituris congruis

gruis inveniendis regula. Aſſumto quolibet termino, exponens ipſius z multiplicetur per genituram ejuſdem termini; ac productum dividatur per numerum loci, quem aſſumtus terminus in Ordine poteſtatis obtinet; & habebitur genitura termini ſequentis.

Ex: Gr: $z+f$ ſit attollendum ad poteſtatem qquadratam: erit $1\ z^4$ terminus *I*; tum 4 per 1 multiplicetur, ac productum diviſum per 1. (cum terminus ſit ordine primus) erit ſequentis termini genitura $= 4$, adeoque $4fz^3$ terminus *II*. hic denuo multiplicato 3 per 4 fiet productum 12, quod diviſum per 2 (cum terminus ſit ordine ſecundus) dabit ſequentis ſeu tertii genituram 6, qui idcirco fiet $= 6\ ffzz$: & ſic pergendo obtinebitur levi operâ binomii cujuscunque quælibet pöteſtas. Quare ſi $z+f$ elevanda ſit ad dignitatem p, erit terminôrum hanc componentium ſeries ea, quæ ſequitur. Et

Genitura termini

I *i* ... 1 — — — $= A..$ in z^p

II *di* ... p — — — $= B..$ in fz^{p-1}

III ... p in $\frac{p-1}{2}$ — — $= C..$ in ffz^{p-2}

IV ... p in $\frac{p-1}{2}$ in $\frac{p-2}{3}$ — $= D..$ in f^3z^{p-3}

V ... p in $\frac{p-1}{2}$ in $\frac{p-2}{3}$ in $\frac{p-3}{4}$ $= E..$ in f^4z^{p-4}

Et ſic pergendo, donec in geniturarum progreſſione numerus (ipſi p ex ſuppoſito æqualis) ex ipſo p ſubducendus veniat; unde iſthæc genitura, cæteræq. eam ſubſequentes nihilo æquales evadent, adeoq: & reliqui termini evaneſcent.

Poteſt p in numeri fracti modum, ut $\frac{k}{n}$, proponi, ad *extractiones radicum* perficiendas; tum & inſtar numeri negativi $-p$, quod *diviſionibus* inſervit & hoc pacto nova in his caſibus geniturarum & terminorum tabula efformari.

22. Hinc primo hyperbolici ſpatii aſymtotis interjecti, Fig. XXX. menſura per infinitam ſeriem explicatur: facto enim $AQ = QD = r$, & $QO : x$, ac $BO : y$, erit. $\frac{rr}{r+x} = y$; quæruntur jam (poſitâ e aſymtoti infiniteſimâ) omnia ye, ſeu ſpatium, $VBDQOV$ verſus V interminabile.

Quare Juxta *Cl: Mercatorem* rr dividendum venit per $r+x$; ſeu (quod ex poteſtatum denotatione cognitum eſt,) rr eſt multiplicandum in $r+x^{-1}$; cum mutatio ſigni exponentis ex affirmativo in negativum, quantitatem præpoſitam vertat ex diviſore in multiplicatorem & contra. conſulantur lemmata 50, 51, & ſeqq.

Ut ergo $r+x$ evehatur ad poteſtatem -1, erit $p = -1$, & terminorum genituræ ſucceſſivæ

$= 1-1$

$= 1-1+1-1+1$ &c. adeoque facto $z = r$, & $f = x$, erit.

$$\frac{\div 1}{r+x} = r^{-1} - xr^{-2} + xxr^{-3} - xr^{-4} \text{ &c. } \textit{in infinitum.}$$

Hinc, quantitatibus, quarum exponentes negativi ſunt, ad diviſores reductis, ſinguliſq: terminis per rr multiplicatis emerget.

$$\frac{rr}{r+x} = y = r - x + \frac{xx}{r} - \frac{x^3}{rr} + \text{&c.}$$

Adeoque omnia $ye =$ Seriëi terminorum, quorum ſinguli in e ducti ſunt; ac per § 12 omnia ye

$$= rx - \frac{xx}{2r} + \frac{x^3}{3r} - \frac{x^4}{4rr} \text{ \& } \textit{ſic continuando ſeriem in infinitum.}$$

§. 23. Tum & eodem fonte ſcaturit infinita ſeries, in Figurâ XXXII, quamlibet quadrantis Circuli AOF portionem determinans. Sit enim radius AO: r, $O\underline{Q}$: x, $\underline{Q}D$: y, unde $yy = rr - xx$, & $y = \sqrt{rr-xx} = (rr-xx)^{\frac{1}{2}}$, ſeu eadem $rr-xx$ ad dignitatem $\frac{1}{2}$ evecta, hinc deſcribendo ex eodem §. 21. Poteſtatem binomii $rr-xx$ juxta exponentem $\frac{1}{2}$, hoc eſt facto $p = \frac{1}{2}$ $z = rr$, & $f = -xx$; erunt, manentibus genituris, quilibet exponentes, qui ipſi z & f adhærent, per 2 multiplicandi, (cum z & f perquantitates, quæ numerum binarium pro exponenti habent,

deſignentur) adeoque progreſſio poteſtatis $Ar^{2p} - Bxxr^{2p-2} + Cx^4 r^{2p-4} - Dx^6 r^{2p-6}$ — &c. unde poſito $p = \frac{1}{2}$ ac ipſis A, B, C, &c. per numeros explicatis fiet, $y = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^6}{16r^5} - \frac{5x^8}{128r^7}$ — &c. hoc eſt ſecundum §12 omnia $ye = rx - \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{40r^3} - \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7}$ — &c. hinc factâ maximâ $x = r$, dabitur totius quadrantis circuli per infinitam hanc ſeriem dimenſio.

Schol. Quomodo vero, diviſione ac extractione hoc modo inſtitutâ, ſemper ſeries inveniri poſſit, quæ omnium ye, ſeu curvilinei dati cujuſcunque valorem abſolutum comprehendat, modo ipſius y valor per quantitates determinatas ac interceptam x efferri poſſit, licet cujuſvis generis aſymmetriis fractionibuſque implicitus, erudiſimâ ſuâ diſſertatione proſecutus eſt *Cl. D. Gregorius*: quo lectorem curioſum remittimus. Neque aliud quid ad abſolvendam per infinitas ſeries omnium curvilineorum quadraturam reſtare videtur, niſi ut ipſa applicata y modo ſtatim recenſito poſſit determinari. Decreveramque huc ſpectantia nonnulla hiſce annectere, niſi, felici omine, cum hæc prælo ſubmittenda eſſent, me honore præſentiæ ſuæ dignatus inſignis Mathematicus *Mr. Makreel* anglico idiomate *celeberrimi Newtoni* cogitata circa ſerierum proprietates in publicum emiſſa eſſe aſſeveraſſet: quare cum nihil niſi omnibus numeris abſolutum è tanti viri lucubrationibus prodeat, meis edendis, ut & demonſtrationi §. 21. addendæ ſuperſedi; & nullus dubitans, quin ibi loci profundè tractata reperiantur, ad alia me confero.

Hacte-

Hactenus quidem ea præcipuè curvilineorum ſymtomata, quæ ex ordinariâ infiniteſimarum triga, e, a, u, ſeu triangulo DHE enaſci videbantur, diſcuſſimus, uti toto hujus capitis decurſu tum §. 17, 18, &c. videre eſt; quoniam vero non hæ tantum in ſingulis curvis, ſed & in quibuslibet præterea lineis ſubtangentibus, tangentibus, normalibus ac ſubnormalibus cæteriſque innumeris ſuæ conſiderari poſſunt infiniteſimæ, (quale ſpecimen Cap. I. §. 78, 79, &c. exhibuimus) nova hic ſeſe pandit, curvilinea tranſmutandi menſurandique methodus, ac theorematum non exigua multitudo.

24. Sit *Fig: XLII.* curvilineum $ADEP$, vocenturque ut ſemper $A\mathfrak{Q}:x$, $\mathfrak{Q}D:y$, tangens $TD:s$, ſubtangens $T\mathfrak{Q}:t$, normalis $DR:k$, ſubnormalis $\mathfrak{Q}R:l$, curva $AD:c$, creſcet x per reſpectivam infiniteſimam $\mathfrak{Q}P:e$; y per $EH:a$; c per $DE:u$; AT ſeu $t-x=f$ per $BT:i$; adeoque $T\mathfrak{Q}$ ſeu t per $\mathfrak{Q}P+BT$ ſeu $e+i$, hinc & illinc; ſic & $DT=9C$ ſeu s utrinque creſcit per infiniteſimas $9E:u$, & $BC:\lambda$; ſubnormalis $\mathfrak{Q}R:l$, creſcit per $RV:o$, decreſcit per $\mathfrak{Q}P:e$, unde $PV=l-e+o$, $BE=s+u+\lambda$, $BP=t+e+i$. Sic & TC ac R 10, ipſis BE & EV reſpectivè normales, ſunt infiniteſimæ; & DR creſcit per infiniteſimam V 10, & ſic in cæteris.

Quæ jam hinc ſuccreſcant curvilineorum proprietates uno aut altero exemplo declarabo.

25. Sit P 2 curva ſubtangentialis (hoc eſt cujus applicata H 2 curvæ ADE ſubtangenti reſpecti-

pectivæ TQ ſeu t perpetim adæquatur) erit $E\Phi = BP = t+e+i$, adeoque $w\Phi = e+i$; & factâ ſubtangenti $H\Delta : h$, eſt $h : t :: a : e+i$; unde $ta = he+hi$, ſed $ta = ye$, ergo $ye = he+hi$, quare factis $Q3 = T8 = H\Delta$, donec enata ſint curvilinea AZP & AFB, erit hoc = omnia hi, illud = omnia he, & utrjuſque ſumma æqualis curvilineo expoſito AEP ſeu omnibus ye, unde hoc theorema :

Si in quâlibet curvâ ADE ad applicatam EP ordinetur curvilineum ſubtangentiale $P2H$, hujuſque inquiratur ſubtangens $H\Delta$: erit expoſitum curvilineum AEP ſemper æquale duorum curvilineorum ſummæ AZP & AFB; quorum hæc eſt proprietas, ut applicatarum $Q3$ & $T8$ ſingulæ, utrique ſubtangentis reſpectivæ TQ extremitati inſiſtentes, inventæ curvæ ſubtangentialis ſubtangenti $H\Delta$ jugiter adæquentur.

N. B. quomodo jam curvæ ADE proprietate cognitâ, cæterarum relationes inter applicatas interceptaſque conſtitutæ inveniri poſſint, cuilibet mediocriter in analyſi verſato plusquam cognitum eſt.

26. Sit, *Fig. XLII*, idem curvilineum APE, item duo alia AGP & $A8FB$, quorum alterum ad interceptam, $AQ : x$, alterum ad ſubtangentis abſciſſam AT, $= t - x = f$, ordinatum eſt ; ſintque in utroque reſpectivæ applicatæ $Q4$ &

& TS ſemper æquales $= h$; tandem ſubtangens primi QI applicetur in T, 12, ad ſecundi interceptam AT; item ſubtangens ſecundi TO ad primi interceptam AQ in $Q5$, donec exorta ſint duo nova curvilinea $A, 12, F, B$, & AYP. Dico hæc ultima ſibi mutuo perpetim æquari.

Vocatis enim $TO : n$; & $QI : m$; ſit 14, G, $= 13, F, = \mu$; quæ eſt infiniteſima, quâ h in utroq curvilineo creſcit: erit; $n : h :: i : \mu$; tum: $m : h :: e : \mu$; unde emerget $mi = ne$, eſt autem ex hypotheſi area A, 12, F $B =$ Omn. mi & ſpatium $AYP =$ omn. ne; unde conſtat propoſitum.

27. Notari poteſt, ſi fiat $h = t = TQ$, fore perpetuò $m + n = t$; hoc enim caſu fiet $\mu = e + i$; adeoq. $n : t :: i : e + i$; tum $m : t :: e : e + i$; unde, exploſis ex æquationum lege infiniteſimis, effati veritas eluceſcet.

28. Sit idem curvilineum APE, item aliud ad eundem axem poſitum, AGP; cujus hæc eſt proprietas, ut $Q4$ jugiter adæquetur prioris ſubnormali $QR : l$; hujus indagetur ſubtangens $QI : m$; erit G, 14, $= o - e$; adeoque $m : l :: e : o - e$; unde $me + le = mo$, quare facto 4, 5, $= m$, erit $Q5 = m + l$; adeoque quadrilineum A, 20, Y P, ſeu omnia $me + le$ æquabuntur quadrilineo, 30, 15, 17, V; cujus hæc eſt natura, ut ad ſingulas normalis DR ac axis AR interſectiones R & V, &c. elevata perpendicularis R, 16,

æquetur inventæ ſubtangenti : $Q\,1$; quamobrem quadrilineum, 30, 15, 17, V = omnia $m\,o$; demonſtratio patet, curvarumque omnium relationes ex curva $A\,P\,E$ proprietate cognitâ manifeſtæ ſunt.

29. Quod hic circa infiniteſimas $B\,T$, i, & $R\,V$, o, præſtitum eſt, eodem modo circa cætera, verbi gr: u & λ ſeu $D\,E$ & $B\,C$ obtinet ; factisque 6, C, & 7,9, = h ; erit ſpatium $M\,N\,B$, omnia = $h\lambda$; & $W\,X\,E$ = omnia hu; ſed de his in ſpecie alibi latius ; cum punctum N, determinatum per interſectionem curvæ $A\,K\,N$ & tangentis B E, ipſam tangentem dirimat in duas partes ; quarum prior N E æquatur curvæ $A\,D\,E$ = c, unde $N\,B = s - c$; ſuffecerit hic modum indicaſſe, quo innumeri generis curvilinea transmutantur.

30. Quomodo vero hinc multa curvilineorum ſpatia ad notam redigantur menſuram, ex methodo §. 17. adhibitâ innoteſcet. factâ enim quâlibet hypotheſi $h\,e$ = $z\,i$, erit factâ $Q\,3 = h$, & T, 12, = z, ſpatium $A\,Z\,P$ = omnia $h\,e$, & $B\,F$, 12, A = omnia $z\,i$: ſumtâque h ad curvilineum quadrabile, erit & ipſa z ad curvilineum notum.

Quopacto autem ex datâ h inveniatur z, ſequentia manifeſtant. Cum hic infiniteſimæ e & i ſint adhibitæ, notum eſt eas conſtituere ſubtangentis $T\,Q$ incrementum, quare deſcribatur alia curva $A\,4\,G$, in qua ſemper $Q\,4 = T\,Q = t$,

erit

erit G, $14 = e + i$, vocatâque hujus ſubtangenti $QI = n$, fiet $n : t :: e : e + i$, unde $\frac{te - ne}{n} = i = \frac{be}{z}$ adeoque $z = \frac{bn}{t-n}$, hinc, datâ curvâ ADE, datur z ſeu curvilinei BFA relatio.

31. Sic & aſſumtis quibuslibet hypotheſibus, per quaslibet infiniteſimas deſignatis, ultima indeterminatarum poſt rejectas infiniteſimas (cæteris ex arbitrio ad quaslibet curvas determinatis) innoteſcet.

Verb: Gr: fiat $be + do = zi + g^{\lambda}$, quomodo hinc infiniteſimæ ejiciantur, ſequenti paradigmate patebit. In genere, ſi e in ſuppoſita æquatione reperiatur, illa ad curvam ADE pertinens linea, quæ per infiniteſimam, quam ejicere conamur, creſcit, ad eundem axem AP applicetur; curvæque hinc enatæ ſubtangens reperiatur, habebiturque æquatio, qua expoſitam infiniteſimam tollere poterimus.

Sic I. ad ipſam o tollendam, cum ſubnormalem ſpectet, juxta §. 24. fiat curvilineum AGP tale, ut $Q4$ æquetur ipſi QR, erit $G14 = o - e$; adeoque vocatâ ſubtangenti $QI = b$, eſt $b : l :: e : o - e$, unde $o = \frac{le + be}{b}$

II. ad i tollendam, cum ſpectet ſubtangentem t, concipiatur eadem $Q4$ eſſe $= TQ = t$, ejusque ſubtangens $QI = n$, erit $n : t :: e : e + i$, unde

unde $i = \frac{te - ne}{n}$.

III. Ad tollendam λ, cum hæc tangentem ſpectet, ſit $Q4 = s$, $QI = m$, erit $m : s :: e : u + \lambda$, ſeu $mu + m\lambda = se$; ſed ex ordinariâ curvarum proprietate eſt $tu = se$, cujus ope ſublata u ex modo inventa æquatione, erit $\lambda = \frac{tse - mse}{tm}$. qui tandem valores in ipſorum o, i, λ, locum repoſiti, ac diviſione per ultimam e inſtitutâ, hanc æquationem reliquam faciunt:

$$h + \frac{dl + db}{b} = \frac{zt - zn}{n} + \frac{gst - gsm}{tm}$$

Unde, tribus ex h, d, z, g, pro arbitrio aſſumtis, ultima manifeſtatur.

Schol. Notetur, cum ad ſingulas lineas, quæ pro vario ad curvas reſpectu ac poſitione magnitudinem variant, ſingulæ pertineant infiniteſimæ, quibus vel ab unâ vel ab utrâque ſui extremitate augentur aut minuuntur; ac nulla ſit curva, ad quam infinitæ, ſaltem pro lubitu multæ, tales indeterminatæ multis modis referri non valeant; quarum ſingulæ in quamlibet infiniteſimam ductæ, ſi infinities ſumantur, curvilineum aliquod efformabunt; hoc ipſo methodus patet ac ratio, tranſmutationes ac ſpatiorum quadraturas plurimis modis tentandi; qui hactenus, ni fallimur, ferme intacti Mathematicis remanſerunt. Exempla quilibet ac theoremata proprio marte, ad præcedentium normam, ſibi cudet; unicum hoc addam in minus exercitatorum gratiam; ut pateat infiniteſimarum curvilineorumq: hinc ortum ducentium numerum ac varietatem, ſi velimus, in ſingulis curvis nullo limite cõerceri.

32. Re-

32. Repetitis *Fig. XXII.* ac Cap. I. §. 78 ſymbolis; in axe $A\,2$ producto aſſumatur punctum aliquod fixum W, unde ad prolongatas tangentes $E\,B\,3$, $E\,T\,5$, ducantur perpendiculares $W\,3$, $W\,5$, appellatiſque $AW: r$, $W\,5: k$, erit $WT = r + x - t$; tum & 4, 5, erit infinitesima quæ vocetur: μ, unde $W\,3 = k - \mu = W\,4$, juxta lemma 36; & ex hypoth. angulus E, 3, W, eſt rectus, quare triangula $W\,3\,B$, & $E\,P\,B$ ſunt ſimilia, ideoq. $r + x - t - i : k - \mu :: s + u + \lambda : y + a$, unde $r\,a - x\,a - t\,a - y\,i = k\,u - s\,\mu + k\,\lambda$, quibus rectangulis, tanquam curvilineorum indicibus, infinities ſumtis, juxta infinitesimarum μ & i multitudinem; hinc & inde naſcetur æqualis curvilineorum ſumma; nec ſchemata nec demonſtrationem addo, cum mox prægreſſa intelligenti hæc obſcura eſſenequeant. Hoc adjungo, puncta 3 & 5, eſſe ad novam hinc generatam curvam 6, 3, 5, 7; cujus relatio ad axem $W\,A$, ſi opus ſit, exhiberi poteſt, mediante normali in eundem demiſſâ; rectula 3, 4, eſt infinitesima, & triangula W, 3, 4, & E, 4, 5, ſunt ſimilia, unde alia denuo propullulant.

Sic reſumtis Cap. I. §. 101, ob magnam illic indeterminatarum, infinitesimarumque copiam, nulla fere ibi loci reperitur æquatio, quæ variorum curvilineorum multifariam æqualitatem aliaque ſymtomata non inferat: verum hæc ſufficiant.

33. Quo-

33. Quoniam vero in trapezia non ſolum, ſed & plurimum in triangula, idque variis modis, quæ menſuranda præ manibus ſunt, polygona diſpeſcere ſolent Geometræ; ſit *Fig. XLI.* Curva $ADEF$, ejuſq. tangens TDE, cui normalis eſt AR; dividaturq. Curvilineum $ADEF0$ (quod juxta Lem. 26, & 27 cum polygono coincidit) ex puncto A in triangula ADE, AEF & ſimilia; ac cæteris vocatis; ut ſæpius, dicatur $AR:n$, erit $TA:AR::DE:EH$; ſeu $t-x:n::u:a$; quare $ta-xa=nu$; hoc eſt poſito TA in IM, figura $FK0$ ſen omnia $ta-xa$ æqualis duplo bilinei $ADEF$, quod conſtat totidem triangulis ADE ſeu $\frac{nu}{2}$ hoc eſt $\frac{AR \text{ in } DE}{2}$.

Coroll. ſit, ADE, paraboloides, cujus æquatio $r^{p-q}x^q=y^p$, erit $t=\frac{p}{q}x$ adeoque $ta-xa=\frac{pxa-qxa}{q}$; ſunt autem omnia xa æqualia complemento parabolico SAF, quod vocetur f, ergo $\frac{pf+qf}{q}$ æquale duplo bilinei ADE; quare $\frac{xy}{2}-\frac{pf+qf}{2q}=f$, ſeu triangulum SAF minus bilineo $ADEF$ æquale trilineo $SADF$: unde reductâ æquatione $\frac{qxy}{p+q}=f$. uti ſupra jam aliquoties inventum.

34. Sit

34. Sit eadem *Fig. XLI.* multangula ſeu curvilinea $ADEFO$, ducaturque NE curvam in F tangens; ut ſpatii AFO magnitudo indagetur, dividatur trilineum $NFZA$ in triangula DBT, ac ſimilia; cujus alterum latus DT infiniteſimæ ED in directum jaceat, alterum BD ſit in infiniteſimâ ZD productâ & ſic in cæteris; vocatiſque BT infiniteſima i, ac $EP:y+a$, poſitâ $DQ = y$, erit triangulum $BDT = \frac{yi}{2}$, adeoque trilineum $NFZA$ æquale omn. $\frac{yi}{2}$: fiat jam $yi = ze$, factoque $Q2 = z$, erit ſpatium $A40$ ſeu omnia ze æqnale duplo trilinei NAF ſeu omn. $\frac{2yi}{2}$; cum autem hic ſit $y: z :: e:i$ & poſito $\gamma I = h$, ac $IM = t$ juxta §. 79. Cap. I. $h:y-h :: e:i$, erit $z = \frac{yy-hy}{h}$.

Coroll. Unde poſita AEF ad idem cum præcedenti parabolöides, erit juxta tangentium methodum γI ſeu $h = \frac{qy}{p}$, quare $z = \frac{py-qy}{q}$; & omnia ze ſeu $A40$ ſeu $\frac{pye-qye}{q}$ ad parabolöides AFO ſeu omnia ye ut $p-q$ ad q, ſed ſpatium $A40$ æquale ex præcedenti duplo trilineo NAF, ergo duplum trilinei ANF ad

ad parabolam AFO triangulum NFO complentem ut $p-q$ ad q, unde rurſus parabolôideôn quadratura innoteſcit.

35. Si vero quis aliam curvilineorum in triangula diviſionem expetat, aſſumto *Fig. XLIII & XLIV.* in axe AP puncto quolibet B, ducatur ex eo tangenti DE productæ normalis BR, quæ vocetur z, ac $BT: h$, & porro ex puncto B curvilineo $BEDA$ diviſo in triangula BDE &c. æquabunt hæc triangula ipſum curvilineum; & propter triangulorum TDQ & TBR ſimilitudinem $TD:DQ::BT:BR::DE:EH$, ſeu $s:y::h:z::u:a$. unde $zu = ha$, factâque MB ipſi DQ parallelâ, ac ſumtâ in eâ $BC = DQ = y$, & $GC = EH = a$, cui in C normaliter inſiſtat $CL: h$, idque toties, donec per extremitates ipſorum h ſeu puncta K, L, &c. deſcribi queat curva $NKLA$, erit ſpatium $NMBA$ æquale omn. ha, quod æquatur totidem zu, ſeu rectangulis ex BR in DE; jam BR in DE, eſt duplum trianguli BED, per elementa: quæ triangula complent trilineum mixtum $ADEB$, quod proinde $=$ omn. $\frac{zu}{2}$, quare omnia ha ſeu ſpatium $NMBA$ æquatur duplo trilinei $ADEB$ ſeu omn. $\frac{2zu}{2}$ unde variæ denuo curvilineorum transmutationes.

Coroll.

Coroll. Positis enim, *Fig. XLIII*, $BQ:x$, $QD:y$, sit æquatio curvæ ADE ad hyperbolam $rr+yy = \frac{l}{q}xx$; erit juxta tangentium methodum BT seu $CL = h = \frac{qrr}{lx}$, quæ æquatio expressa per y, cum CL ad y seu CB ordinetur, erit $h = \frac{rr\sqrt{\frac{q}{l}}}{\sqrt{rr+yy}}$ curvæ NLA relationem designans æquatio; estq. hoc in casu curvilineum $BGKA$ æquale trilineo hyperbolico $BEDA$.

36. Sponte hinc nascentem observationis loco Conchoidum dimensionem adjicere liceat.

Sit *Fig. XLV.* Polo M, vertice A, normâ DQ, descripta Conchois ABC; vocenturque $AD = QB:r$, $DM:s$, $GD:f$, $GB:x$, erit radio AD seu r descripto quadrante circuli AHJ, appellatâque $HG:y$, conchoidis proprietas, $x = \frac{fy}{\sqrt{rr-yy}} + y$; &, positâ $\frac{fy}{\sqrt{rr-yy}} = z = GN$ ad curvam ANR, $z+y = x$. Unde trilineum AGN seu omnia ze, una cum trilineo AHG seu omnib. ye æquatur omnib. xe seu spatio conchoidali AGB.

Jam autem, cum omnia ye sint ad quadrantem circuli, inveniendum restat trilineum AGN seu omnia ze, quem in finem sumtâ NP seu f pro applicatâ, & DP seu z pro interceptâ, erit

erit (cum ſit $\frac{\int y}{f} = z$, & $yy = rr - ff$) $f = \frac{rs}{\sqrt{ss + zz}}$ æquatio curvæ ANR relationem ad axem DP manifeſtans, huic autem curvilineo $ADPN$ per præcedens corollarium, æquale fuit inventum trilineum hyperbolicum; quæ ut hinc caſui approprientur, erat $h = \frac{rr\sqrt{\frac{q}{l}}}{\sqrt{rr+yy}}$ in Coroll. præmiſſo, hic vero $f = \frac{rs}{\sqrt{ss+zz}}$. fiat ergo terminorum comparatio, & collatis denominatoribus erit $\int = r$ & $z = y$, ex numeratoribus autem emergit: $\frac{q}{l} = \frac{rr}{\int\int}$; quare loco æquationis hyperbolicæ $rr + yy = \frac{l}{q} xx$, ſi loco x ſumatur k, orietur hoc in caſu hæc, quæ ſequitur, $\int\int + zz = \frac{\int\int}{rr} kk$, hyperbolam ſpectans, cujus latus transverſum $= 2r$, rectum $= \frac{2\int\int}{r}$. ad cujus conſtructionem, quadrilineo $ADPN$ circa DP revoluto in $SDPT$, latere recto $\frac{2\int\int}{r}$ & tranſverſo AS ſeu $2r$, deſcribatur hyperbola modo inventa SF, ſecans productam NP in F, erit ductâ rectâ DF, mixtilineum

$ADNP$

ADNP ſeu *DSTP*, duplum trilinei hyperbolici *SDF*.

Ergo ſpatium *AGN* æquale duplo trilineo *SDF*, demto rectangulo *GDPN*; cui ſpatio *AGN* jam invento ſi addatur ſpatium *ANB*, ſeu illi æquale ſegmentum circulare *AHG*, ex modo datis emergit ſpatium conchôidale *AGB* æquale duplo trilineo hyperbolico *SDF*, una cum ſegmento circulari *AGH*, demto rectangulo *GDPN*.

§. 37. Repetantur ſymbola §. 24. aſſumta, ac ſchema XLII. oportet curvilineum *AZP* deſcribere, quod æquale eſt rectilineo cuicunque inter quaſlibet rectas, curvam *ADE* ſpectantes, efformato.

Dicatur curvilinei quæſiti applicata $Q3 : h$, erit $AZP =$ omnia he; jam quæritur h, ſi

I. Sint omnia $he = \frac{yy}{2}$; ſeu area $AQ3 =$ ſemiquadrato in QD. Hæc & ſequentia ex §. 13. ſolutionem admittunt. fiat enim he ſemper æquale terminorum infiniteſimalium ſummæ ex rectilineo dato, ſeu hoc in caſu ex $\frac{yy}{2}$ ortum ducentium, erit $he = ya$; adeoque juxta §. 13. tradita, omnia $he =$ omn: $ya = \frac{yy}{2}$, jam per æquationes ex curva *ADE* conquiſitas eliminentur in-

infinitesimæ e, & a; habebiturque, cum sit $he = ya$, & $ye = ta$, amotis infinitesimis, $h = \frac{yy}{t} = l = QR = Q3$.

II. Sint omnia $he = ry =$ rectangulo ex r determinatâ in DQ, erit ra terminus infinitesimalis ex ry oriundus, & facto $he = ra$, erit $ry =$ omnia $he =$ omnia ra, ex §. 13. adeoque cum sit $ye = ta$, fiet $h = \frac{ry}{t}$.

III. Sint omnia $he = xy =$ rectangulo ex AQ in QD, erit juxta *Schol.* §. 13. $xa+ye$ terminorum infinitesimalium ex xy nascentium summa; hæc fiat $= he$, erit $xy =$ omn. $he =$ omn. $xa+ye$ ex §. 13. & elisis infinitesimis per æquationem: $ye = ta$, fiet $h = \frac{xy+ty}{t}$

IV. Sint omnia $he = ty =$ rectangulo ex QT in QD. erunt, juxta §. 24. ipsius t respectivæ infinitesimæ $= e+i$; adeoque termini infinitesimales per *Schol.* §. 13. hinc prodeuntes $ye+yi+ta$, quibus factis $= he$, erit $ty =$ omn. $he =$ omn. $ye+yi+ta$ ex §. 13; unde ex hac æquatione $he = ye+yi+ta$ hoc modo ejiciantur infinitesimæ, primo, est $ta = ye$, quare $he = 2ye+yi$; secundo, ut tollatur i, cum hæc pertineat ad subtangentem TQ seu t, fiat AGP curvilineum subtangentiale, in quo semper,

per, $Q4 = QT$, erit $G,14, = e+i$, & vocatâ hujus ſubtangenti $QI = n$, eſt $ne+ni = te$, ex quâ cum priori combinatâ emergit $h = \frac{ty+ny}{n}$.

V. Rurſum ſint omnia $he = rt$ = rectangulo ex r determinata in QT, erit juxta modo memorata $he = re+ri$, tum $ne+ni = te$, adeoque $h = \frac{rt}{n}$.

VI. Sint Omnia $he = ſt$ = rectangulo ex TD in QT. erunt, juxta §. 24, $u+\lambda$ ipſius $ſ$, ac $e+i$ ipſius t infiniteſimæ; adeoque infiniteſimales termini ex $ſt$ oriundi, juxta §. 13. Schol. $tu+t\lambda+ſe+ſi$; qui ſi fiant $= he$, erunt omnia $he =$ omnia $tu+t\lambda+ſe+ſi = ts$ ex §. 13 ...; quomodo jam hinc infiniteſimæ tollendæ ſint, ut ipſius h valor inveniatur, jam §. 31. in genere oſtenſum eſt; & exemplis præcedentibus ritè intellectis ſatis liquido apparet.

§. 38. Hoc notetur, neceſſario non requiri, ut h ſeu $Q3$ perpetuo ad AQ applicetur; unde curvilineum AZP per omnia he explicatur, ſeu per h & infiniteſimam e, qua AQ ſeu x creſcit, verum & ad alias quaſcunque rectas ipſam h ordinari poſſe.

Sit enim $T, 8, = h$, erit curvilineum BFA = omnia hi; ſit hoc æquale ipſi xy ſeu omnibus $xa+ye$, adeoque cum ſit $xa+ye =$ hi,

hi, tum $ta = ye$, & juxta §. præc. Ex. IV. $ne + ni = te$, ejectis infiniteſimis fiet $h = \frac{nxy + nty}{tt - tn}$.

Nec ulteriori diſcurſu adſtruere opus videtur, poſſe h ad quaſlibet rectas quibuslibet infiniteſimis creſcentes applicari; modo infiniteſimarum eliminatio, juxta ea quæ in §. præc. tum & §. 31. tradidimus, legitime adhibeatur: ſic enim ty poterit ſupponi = omnia he in curvilineo AZP; tum = omnia ha in curvilineo $AP\Omega$, item = omnia hi in curvilineo AFB; nec non = omn. ho in curvilineo 30, 15, 17, *V.* & ſic infinitis modis.

§. 39. Neque ſemper neceſſarium eſt, ut rectilineum, cui alia figura curvilinea æqualis quæritur, ſit inter rectas ad curvam ADE ſpectantes conſtitutum; quinimo generaliter ſolvi poteſt problema, ac inveniri relatio, quam habet applicata $Q3$ ad interceptam AQ, ſi curvilinei $AQ3$ area ſemper ſit æqualis rectangulo quarumcunque applicatarum $Q4$ & $Q5$. factis enim $Q4 = f$, & $Q5 = z$, ſubtangentibuſque, $QI = b$; $Q, 18, = d$, ac infiniteſimis, $G, 14, =, \theta$, & $\Upsilon, 19, = \mu$:

Cum ex hypotheſi ſint omnia $he = fz$; erunt $f^{\mu} + z_{\theta}$ termini infiniteſimales ex rectangulo fz oriundi, qui ſi fiant = he, erunt omnia $he =$

öm-

omnia f_μ + omnia $z^\theta = fz$ ex §. 13. jam ex curvilineorum AGP, AYP naturâ eſt $\theta = \frac{fe}{b}$ item $\mu = \frac{ze}{d}$, unde ſuffectis in æquatione $he = z\theta + f\mu$ inventis valoribus erit $h = \frac{fz}{b} + \frac{fz}{d}$; quare fz rectangulo per x interceptam expreſſo etiam h per eandem x exprimetur.

Ex. Gr. ſit $fz = \sqrt{rrxx + rx^3}$, fiatque $f = x$, & $z = \sqrt{rr + rx}$, erit $b = x$, & $d = 2r + 2x$; unde ablatâ aſymmetriâ emerget curvilinei AZP relationem deſignans æquatio, $4r^3 + 12rrx + 9rxx = 4rhh + 4xhh$.

§. 40. Quod ſi f & z, quolibet modo, hoc eſt in relatione ad quaſlibet lineas tum rectas, tum curvas, exprimantur, tamen h determinabitur; modo ſubtangentes b & d cognitæ ſint, uti patet.

§. 41. Animadverſu dignum videtur, ſi curvilineum quæſitum per omnia he deſignetur, hoc eſt ſi $Q3$ ſeu h ad AQ ſeu x tanquam interceptam ordinata fuerit, ipſius h valorem jugiter adæquari ſubnormali QV curvæ A, 23, P; cujus hæc eſt proprietas, ut exiſtente ipſius applicatâ Q, 22, $= g$, ſit perpetuo $fz = \frac{gg}{2}$, vocatâ enïm hujus ſubtangenti Q, 21, $= m$, & ſubnormali QV: q, cæteris ut ſupra

ſupra manentibus, erit juxta Cap. 1, §. 35. æquatio ad tangentem $fzbm + fzdm = ggbd$: quare $\frac{fz}{b} + \frac{fz}{d} = h = \frac{gg}{m} = q$ ex proprietate trianguli rectanguli, 21, 22, v.

Poſſent hinc omnia exempla §. 37. exhibita deduci; ſi enim fiat, $f = t$, & $z = y$, erit $b = n$, & $d = t$, adeoque $h = \frac{ty}{n} + y = q$, ut in exemplo tertio.

Schol. quod, ſi quis hinc converſum meditetur; & ex data h ſeu $Q3$ velit inquirere curvilinei $AQ3$ magnitudinem; patet ex præcedenti totum hoc negotium ad probl. §. 95. Cap. I. propoſitum referri, nempe ad inventionem curvæ A, 23, P, cujus ſubnormalis QV ſit data $= h$; de quo alibi latius actum eſt. Interim licet §. 37. & 39. exhibita exempla varios videantur innuere modos, quibus idem, à poſteriori veſtigia relegendo, obtineri poſſit; ex §. 41. tamen ſatis eſt manifeſtum, totam hanc, quæ primò ſeſe offerre videtur, principiorum varietatem in unicum hoc, quod modo propoſuimus, deſinere.

Quænam etiam ſit eorum, quæ §. 38. tradidimus, cum modo recenſitis differentia, adhibito calculo generalioriad methodum §. præcedentis, eluceſcet.

Poſſent & hic relationes curvilinei menſurabilis $AQ3$, naturali quodam ordine diſponi; a ſimplicioribus ad magis compoſita progrediendo, plnrimorumq. adeo curvilineorum menſuræ tradi, ex variis ipſius g ſeu Q, 22, ad AQ, relationum hyphotheſibus oriundæ; at quorſum? cum non niſi generaliter ſoluto ſæpius inſinuato ſubnormalium problemate, deſideratum obtineri queat.

§. 42. Sit, *Fig. XXXIV.* $AQ = \frac{ND : x}{QD}$,

$QD = TM : y$, $QT = DM : t$; $QP : e$, $VT : i$; erit area $AEP =$ omn: ye, hujus quæritur menſura. I, cum e ſit infiniteſima ad AQ ſeu x referenda, hoc in ipſius locum repoſito habebitur: yx, cujus termini infiniteſimales $ye + xa$; & juxta §. 13, omnia $ye +$ omn. $xa = yx$; unde patet cognitis omnib. xa, cognoſci omn. ye: eſt autem xa ad dati ſpatii complementum KEA, uti notum.

II. Cum infiniteſima e ſpectet ſimul ſubtangentem, TQ ſeu t, emerget, t ipſi e ſurrogato, yt; cujus infiniteſimales $ye + yi + ta$, ſeu $2ye + yi$; & per §. 13, omn. $2ye +$ omn. $yi = yt$; unde inventis omnibus yi, nota erunt omnia ye; jam yi eſſe ad curvilineum LVA nemo ignorat. Hæc autem methodi gratiâ.

Schol. ut vero pateat, non ſemper tangentium inventionem aut ſubnormalinm ad menſuras curvilineorum neceſſariam eſſe; verum & ſolam æquationis curvæ ad infiniteſimas redactionem ſæpenumero levi operâ pandere, quæ, non niſi intricatiori calculo, per tangentium methodum inquirere moris eſt, ſequentia ſubjungo.

§. 43. Sit, in *Fig. XXXIX*, $AQ = x$, $QD : y$, infiniteſimæ $DH : e$, $EH : a$, & curvæ æquatio ad quamlibet paraboliformem $rp - qxq = yp$; erit hæc æquatio ad infiniteſimas redacta, ac in yx ducta $qrp - qxqye = pypxa$, quæ per æquationem datam diviſa dabit $qye = pxa$; quocirca juxta lemm 43, $p : q ::$ omnia

nia xa ad omn. ye, hoc eſt ita complementum AFV ad paroboloidem AFO. Unde eadem, quæ §. 11. oſtenſa ſunt, deduci poſſent abſq. tangentium auxilio.

§. 44. Sit *Fig. XIII. N.* 1. eademque, quæ §. 31. Cap. I. ſymbola; adeoque ciſſoidis AKG æquatio $x\,x = yz$, ſeu $x^3 = rzz - xzz$; erit ea ad infiniteſimas redacta, juxta *Schol.* §. 13, $3xxe = 2rzo - 2xzo - zze$; quæ diviſa per z, ac loco $\frac{xx}{r}$ poſito y juxta hypotheſin, tum & l ipſi $r - x$ ſubſtituto abibit in hanc. $3ye = 2lo - ze$.

Jam vocato ciſſoidali integro ſpatio $= k$, ſemicirculo integro $= c$, cum omnia lo ſint = omnia ze, (ſi utrumque aream ciſſoidis infinitam deſignet) erit $3c = 2k - k = k$ ſeu Ciſſoidis ſemicirculi tripla.

Hoc notetur; ſi tum omnia lo, tum omnia ze, non ad infinitum ciſſoidis ſpatium, ſed ad partes ejus reſpectivas referantur, fore AKP = omnia ze (hoc dicatur: f) tum $AKMO$ = omnia lo (hoc appelletur: $p + f$, vocato ſcilicet rectangulo $PKMO$: p) ac omnia $ye = APE$. (hoc fiat $= d$) quare cum ſit ex ſuperioribus omn. $3ye$ = omn. $2lo$ — omn. ze, erit $3d = 2p + 2f - f$, ſeu $3d - f = 2p$, hoc eſt triplum portionis circularis APE, detractâ reſ-

reſpectivâ Ciſſoidali portione AKP, erit æquale bis ſumto rectangulo $PKMO$ ſeu AP in PE: eſt enim ex naturâ Ciſſoidis $rz - xz = xy$.

Tum & alia ratione ex æquatione inventa $3d - f = 2p$ totius Ciſſoidis ad circulum ratio cognoſcitur; eſt enim rectangulum $PKMO = p = rz - xz$; unde facto $x = r$, ſeu $A\mathfrak{Q} = AO$, pertinebit ipſa f ad integram Ciſſoidem, ac d ad totum ſemicriculum, & p evadet æqualis nihilo; quare $3d - f = 0$, & $f = 3d$, ſeu ciſſois ad ſemicirculum ut 3 ad 1. ſimilia hic poſſent circa ciſſoidem ex hyperbola genitam aliaſque curvas adjungi.

§. 45. Sit Conchöis ABC *Fig. XLV*, vertice A, normâ $D\mathfrak{Q}$ ac polo M deſcripta; vocenturq. $AG: x$, $GB: z$, $GD: f$, $GM: l$, $AD: r$, $DM: p$, tum radio AD ducto circuli quadrante ADI, appelletur $HG: y$, tandem dicantur infiniteſimæ, $G\mathfrak{2}: e$, $4, 5: a$; $W\,3: o$.

Notum eſt æquationem conchöidis proprietatem exprimentem eſſe $ly = fz$, hæc redacta ad terminos infiniteſimales dabit $fo - ze = la - ye$, quæ, ſi ducatur in l, ac loco ly ponatur fz, exhibebit $flo - lla = lze - fze$: unde (cum ſit $l - f = p$, ac ex naturâ conchoidis $l: z :: f: y$.) omnibus per f diviſis fiet $fo - la = p$

$= \frac{pye}{f} = \frac{prye}{fr}$: jam vero ſi $\frac{ry}{f}$ ſeu tangens $A7$ vocetur n, ipſiq. jugiter æqualis aſſumatur GN, donec exorta fuerit curva nova ANR, erit $fo = la + \frac{pne}{r}$; & ſumtis omnibus infinities, omnia fo ſeu ſpat: $AWVD$ æquantur omnib. la ſeu ſpatio $5ZMA$, una cum ſpatio $A, 2, 8,$ ſeu omnib ne ducto in $\frac{p}{r}$.

Unde rurſum conchoïdis ad alîus generis curvilinea ratio innoteſcit.

§. 46. Sit, *Fig. XXXIX.* radius $AO:r$, & AD arcus circuli, $AQ:x$, $QD:y$, AC portio Ciſſoidis cujus applicata QC: $\frac{xx}{y} = z$; tum AB pars curvæ, cujus applicata QB: $\frac{rx}{y} = k$; quæritur Areæ ABQ ratio ad ſemicirculum; ſeu omnium ke ad omnia ye. æquatio ſemicirculi eſt: $2rx - xx = yy$, quæ redacta ad infinitesimas dabit, $re - xe = ya$, & ducta in x ac diviſa per y exhibebit. $\frac{rxe}{y} - \frac{xxe}{y} = xa$, ſeu $ke - ze = xa$; & vocatis omnib. ke ſeu $ABQ:d$, tum omnib. ze ſeu $ACQ:f$, ac omnib. xa ſeu complemento portionis circularis $ADX:b$, eſt $f = d - b = 3c - 2p$ ex §. 44. (facto nimirum ſegmento ſemicirculi $ADQ:=c$, & rec-

& rectangulo $xy = 2rz - xz = p$) unde $d = 3c + b - 2p$, & cum ſit $b + c = p$, tandem $d = 2c - p$.

Notetur, ſi ſit $x = 2r$ fore $p = 0$, adeoque $d = 2c$, hoc eſt totum curvilineum d, cujus applicata: $\frac{rx}{y}$, æquatur duplo totius ſemicirculi, ſeu $2c$.

Hujus curvilinei aream §. 16. *Coroll. III.* alio modo in ratione ad circulum tangentium ope dimenſi ſumus.

§. 47. Quinimo & brevius ſic efficitur, diviſâ circuli æquatione $2rx - xx = yy$ per y, ductiſq. omnibus in e, fiet: $\frac{2rxe}{y} - \frac{xxe}{y} = ye$; ſeu ſumendo ſymbola præcedentis $2d - f = c$; & cum æquationem ad integra curvilinea determinando ſit juxta §. 44. $f = 3c$, erit $d = 2c$, ut ſupra.

§. 48. Stantibus iisdem, quæritur curvilinei ABQ, cujus applicata $QB = \frac{rr}{y}$, ratio ad circulum.

Æquatio ſemicirculi infiniteſimalis $re - xe = ya$, ducta in r, ac diviſa per y, dabit $\frac{rre}{y} - \frac{rxe}{y} = ra$; fiant omnia $\frac{rre}{y}$ ſeu $ABQ = q$, omnia $\frac{rxe}{y}$ ſeu $AQC = d$, omnia $ra = AX$

$10 = ry = n$, erit $q - n = d = 2c - p$, juxta §. 46, adeoque, $q = 2c - p + n$.

Et æquationem ad integra curvilinea extendendo, erit $x = 2r$, & hinc tum p tum n nihilo æqualia; unde tandem: $q = 2c$, ſeu integrum hoc curvilineum eſt ſemicirculi duplum; quod §. 16. *Coroll. III.* tum & §. 15, alio pacto per tangentes evictum eſt.

§. 49. Quomodo vero hæc omnia in §. 10. modum curvis ad punctum Q relatis applicari queant, levi opera explicabo; cum enim ſit Fig. XLVI. continuo $TD : s, DQ, y :: DE, u : EH : a$, erit ſemper $sa = yu$; unde radiis, DQ & EQ ductis arcubus DI, EG, erit $IG = a$; poſitâque TD ſeu s, in IM, erit Figura QFK ſeu omnia sa æqualis Figuræ $q\varkappa\varkappa\varphi\varphi$ ſeu omnibus yu, Fig. XLVII. in qua Fig. $q\varphi\varphi$ recta $q\varphi$ ſuppoſita eſt æqualis curvæ expoſitæ $QDEF$, ita ut DE ſit æqualis $\partial\!\!\!/$ ſeu u, ac applicatæ $\partial\varkappa$, $\varkappa\varkappa$, ſunt æquales rectis DQ, EQ ſeu y.

Quoniam vero tot continentur in rectâ QF infiniteſimæ ut $IG = HE$ ſeu a, quot in Curvâ $QDEF$ infiniteſimæ DE; vel, quod eodem redit, quot in recta $q\varphi$ (quæ cum curvâ QDF eadem eſſe ſupponitur) infiniteſimæ $\partial\!\!\!/$ ſeu u, vocatis $\partial\varkappa : z$, & $IM : h$, factoque ſemper $ha = zu$, Figura QFR ſeu omnia ha, æqualis erit ſpatio $q\varphi\varphi$ ſeu totidem zu.

Quare

Quare posità z vel h ad locum quemlibet, altera h vel z innotescet; nam quia $ha = zu$, est. $a : u :: z : h :: y : s$, unde $hy = zs$, & $h = \frac{zs}{y}$.

Cum vero quidem æquemulta sint DH seu e, quam HE seu a, ac DE seu u; sed infinitesimæ DH tam commodè in rectam projici nequeant, ac in Figuris ad axem relatis; descriptâ Curvâ secundâ $QSNO$ ad idem punctum Q relatâ, productisque QD in S, & QE in N, fiat QS seu $QR = z$, & arculus infinitesimus RS dicatur i, erit juxta §. 10, spatium $QSNO =$ omnia $\frac{zi}{2}$; facto jam $zi = ha$, ipsa IM dicatur h; eritque spatium QKF seu omnia ha æquale duplo spatii $QSNO$ seu omnium $\frac{zi}{2}$, nam $ha = \frac{2zi}{2}$. quare posità alterutrâ h ad locum quemlibet innotescit z, cum enim sit $QD, y : DH, e :: QS, z : SR, i$. ob arculos DH & SR parallelos, erit. $e = \frac{iy}{z} = \frac{at}{y}$, hinc $\frac{atz}{yy} = i = \frac{ha}{z}$, qnare $tzz = hyy$. unde data h noscitur z & contra.

Simili modo, posito $zi = hu$, factâque rectâ $q\varphi$ æquali curvæ $QDEF$, ac $\delta\kappa = DE$,

$DE, = u$, item $\delta z = h$, erit spatium $q\phi\varphi$ seu omnia $h\,u$ æquale duplo spatio $QS0$, seu $\frac{2\zeta i}{2}$; quare z vel h pro arbitrio positâ, quæ restat hoc modo determinatur, est enim, $TD, s: DE, u:: QT, t: DH, c.$ unde $c = \frac{tu}{s} = \frac{yi}{\zeta}$, quare $\frac{tzu}{sy} = i = \frac{hu}{\zeta}$, & tandem $tz\zeta = shy$; unde patet propositum.

Coroll. I. Hoc in exemplum: sit F. XLVIII. spiralis $DVSH$ Pad Circulum APX pertinens, cujus radius, r, peripheria, d, $SD: z$, $DF: t$ recta FS tangat spiralem in S, infinitesimæ, $SI: c$, $HI: a$, sitque juxta quemvis tum in radio tum in circumferentia motum, vocato arcu PA ad lineam SD relativo: c, æquatio spiralis, $rk: d^s :: r^k : c^s$, erit juxta §. 67 Cap. I. de tangent. DF seu $t = \frac{kc\zeta}{sr}$, & per curvæ æquationem ipso c amoto $\frac{s^s r^k + s}{d^s k^s} t^{k+s} = z^s$, quæ æquatio est ad parabolarum unam; ducto enim ad spiralis principium P radio DP, factâque $DM = DS = z$, & $DL = DH$; erit $LM = HS = a$, positâq. DF seu t in MN, donec per omnia N duci possit Curva $DNOR$; erit t applicata, & DM seu z intercepta, ac $RP = \frac{kd}{s}$, & rectangulum

gulum $PD\,\mathcal{Q}R = \frac{k\,dr}{s}$: ſed juxta §. 11. Cor. I. erit parabolôides DRP $\frac{k\,dr}{k+2s}$ = omnia $t\,a$, $= \frac{2ze}{2}$ = duplum areæ ſpiralis ex §. 10; quare ſpatium ſpirale æquatur $\frac{\frac{1}{2}k\,dr}{k+2s}$, quod eſt ad Circulum ſeu $\frac{1}{2}\,dr$, ut k ad $k+2s$; hæc quoque, ſed alio modo, demonſtrata dedit doctiſſimus *Sluſius* in miſcellaneis.

Corol. II. Quod ſi ſpiralis ejus ſit naturæ, ut circuli radios BD ad eundem ſemper angulum ſecet, erunt triangula SHI perpetuo ſimilia, angulus enim I rectus eſt, & H ex ſuppoſito in omnibus conſtanter æqualis. Sit ergo laterum SI: e ad HI: a ratio permanens ut p ad q, erit $pa = qe$, adeoque $qze = pza$; & per §. 13. converſum ſpatium ſpirale infinitum SVD ſeu omn. $\frac{ze}{2} = \frac{pzz}{4q}$; ſeu cum ſit p: q:: GD, n: PD, r, (poſitâ GP ſpiralem in P tangenti, ac GD ipſi DP normali) erunt omnia $\frac{ze}{2} = \frac{nzz}{4r}$; unde calculum ad totum ſpirale ſpatium $PSVD$ aptando, erit $z = r$, adeoq. hoc ſpatium infinitum $= \frac{nr}{4} =$ ſemitriangulo PDG. Notari poteſt, ſi AB vocetur: o, fore $e = \frac{zo}{}$

$\frac{z^o}{r} = \frac{p^a}{q}$, unde hæc proportio $\frac{p^r}{q} : o :: z : a$; jam poſita o conſtanter æquali, hoc eſt PB, PA, &c, in progreſſione arithmeticâ, habebit z ad a rationem ſemper eandem) adeoque omnia z erunt in progreſſione geometricâ; cum quantitatibus, quæ differentiis ſuis proportionales ſunt, hoc eſſe proprium ex elementis notum ſit.

50. Forſitan & hinc ortum trahentes *involutarum* (quas vocant) & *evolutarum figurarum* proprietates addidiſſe operæ fuerit pretium.

Sit *Fig. L.* ſpatium $ABHG$ in trapezia infiniteſima $CEFD$ præcedentium more diviſum; concipianturq. curvæ partes CD earumq. ſinus CL filorum in modum flexiles, poterunt igitnr manentibus applicatis, AB, EC, FD, GH, rigidis, ſingula trapezia $CEFD$ mutari in trilinea $\varkappa\gamma\delta$ in *Fig. LI.* ſi puncta ninurum E & F cöincidant; quod ſi fiat in ſingulis *Fig. L.* trapeziis, & omnia diviſionum axis puncta ſupponantur in G cöire, orietur *Fig. LI.* $\varkappa\beta\eta$, & punctum $\varkappa$ referet omnium punctorum $AEFG$ coalitum; dicitur-que Figura $\varkappa\beta\eta$ Figuræ $ABHG$ *involuta*, & hæc illius *evoluta*, quarum ſequentes obviæ ſunt proprietates.

I°. Cum rectangulum $CLFE$ cogatur in cir-

circuli ſectorem infiniteſimum $\gamma\lambda\varkappa$, hoc eſt dimidium ſui, ob angulos in γ & λ rectos, ac linearum $\gamma\lambda$ & CL, item $\gamma\varkappa$ & EC æqualitatem: quod ſi idem fiat in omnibus, erunt omnia rectangula $CEFL$, ſeu Figura $ABHG$, dupla omnium triangulorum $\varkappa\gamma\lambda$ ſeu Figuræ involutæ $\varkappa\beta\eta$.

2°. Quia ex hypotheſi $CL = \gamma\lambda$, & $CD = \gamma\delta$, erunt, ob angulos in L & λ rectos, triangula CLD & $\gamma\lambda\delta$ ſimilia & æqualia: quare poſito angulo $\tau\varkappa\gamma$ recto, quia $\gamma\varkappa = EC$, erunt & hiſce ſimilia triangula $\tau\varkappa\gamma$ & TEC ſimilia & æqualia inter ſe.

3°. Sic & arcum $\beta\rho$ radio $\varkappa\beta$ deſcriptum axe AG minorem, arcum vero $\mu\eta$ radio $\varkappa\mu$ deſcriptum eodem axe majorem eſſe ex præmiſſis ſponte fluit.

Duo vero ſequentia problemata fundamenti loco cæteris huc ſpectantibus ſubſterni poſſunt.

§. 51. Quorum primum ſit; ex data involuta $\varkappa\beta\eta$ ejus evolutam $ABHG$ invenire.

Ad cujus problematis ſolutionem, (cum dentur $\varkappa\eta = GH$, $\varkappa\delta = FD$, $\varkappa\gamma = EC$ ex involutæ natura) requiritur EG axis longitudo in reſpectu ad datam applicatam EC ſeu $\varkappa\gamma$; quæ hoc modo indagatur, ſit $\tau\varkappa = TE : t$, $\varkappa\gamma = EC : y$,

$\gamma\lambda = CL: e$, $\lambda\delta = LD: a$, $\gamma\delta = CD: u$, $\tau\gamma = TC: s$. quia $\tau\varkappa : \varkappa\gamma :: \gamma\lambda : \lambda\delta$, ſeu $t: y :: e: a$, erit $e = \frac{ta}{y}$, & omnia $\frac{ta}{y}$ = omnia e = omnia EF = axis AG.

Quia vero y eſt indeterminata, fiat. $\frac{ta}{y} = \frac{fa}{r} = e$, erit $f = \frac{rt}{y}$, quæ ſemper poſita in ιo erit trapezium $\iota o \sigma \xi = fa$, & ſpatium $\iota o \varphi \eta =$ omnia fa, quæ Figura diviſa per r dabit omnia $\frac{fa}{r}$ ſeu omnia e inter η & γ, hoc eſt axem EG, ad quem in puncto E applicanda $\varkappa\gamma$ ſeu $\varkappa\iota = EC$.

Habeturq. adeo punctum C in evolutâ, ad quem modum cætera inveniuntur; diviſâ enim verb. Gr. Figurâ integrâ $\rho\psi\varphi\eta$ per r oritur AG ſeu integer evolutæ axis, cui ſi $AB = \varkappa\beta$ applicetur in A habetur denuo punctum B in evolutâ, & ſic in cæteris.

Coroll. I. Reſumtâ *Fig. XLVIII.* ac eâdem cum ſymbolis ſpirali, quæ §. 49. Cor. I. diſcuſſa fuit; cum ſit $ze = ta$, adeoque $e = \frac{ta}{z}$, fit hoc $= \frac{fa}{r}$, erit hoc in caſu, facto $MN = f$ æquatio Curvæ DNO: $rt = fz$; ejectâque, t per valorem §. 67. de tang. inventum ſeu $\frac{kcz}{sr}$, re-

reductâque æquatione ad indeterminatas f & z oritur $k^s\, d^s\, z^k = s^s\, r^k\, f^s$ ſeu paraboliformis; unde ſpatium DMN ſeu omnia fa, juxta §. 11. Cor. I, æquatur $\frac{s\,f\,z}{k+s}$, & omnia $\frac{f\,a}{r} = \frac{s\,f\,z}{k\,r+s\,r}$ = omnia e ſeu longitudo axis AE in *Fig. XLIX.* ubi $EC = DS = z$, & $EF = e$, vocetur autem hæc $AE : b$, ſeu omnia e, oreiturq. curvæ ADH æquatio $\frac{s\,f\,z}{k\,r+s\,r} = b$, quæ redacta per ſuperiora ad indeterminatas b & z, ſeu AE & CE, dabit æquationem rurſus paraboliformem: $\overline{k+s}^{\,s}\, r^{s+k}\, b^s = k^s\, d^s\, z^{k+s}$ curvam ACH reſpicientem; adeoque cum maxima z ſit GH ſeu r, & maxima b ſeu AG ſit $\frac{k\,d}{k+s}$, erit rectangulum $AQGH = \frac{k\,d\,r}{k+s}$; & juxta §. 11. Coroll. I. curvilineum $ADHG = \frac{k\,d\,r}{k+2s}$; eſt autem hoc ſpatium ſpiralis ſpatii evolutum juxta præcedentem, ergo juxta §. 50, hujus duplum, unde ſpatium ſpirale æquatur $\frac{\frac{1}{2}\,k\,d\,r}{k+2s}$, uti in §. 49. Coroll. I. malui autem iiſdem exemplis inſiſtere, ut principiorum conſenſus dilucidius ob oculos ponatur.

§. 52. Idem & alio modo problema ſolvitur; ſi quidem, *Fig. LI.* $\tau\chi : \chi\delta :: \tau\kappa : \chi\lambda$. ſeu $s : u ::$

$s : u :: t : e$; unde $\frac{tu}{s} = e$, ſit hoc $= \frac{hu}{r}$ erit $rt = sh$: quare in *Figurâ LII.* poſitâ curvâ involutâ $\beta\gamma\delta\eta$ in directum, ut $\gamma\delta$ in utrâque ſit æqualis $= u$, applicetur & in γ linea $\gamma A = h$, erit $A\gamma\delta B = hu$, & $\beta D B \delta =$ omnia hu; quod ſpatium diviſum per r dabit omnia $\frac{hu}{r} =$ omnia e, ſeu longitudinem axis AF in *Fig. L.* factâ nimirum EC in *Fig. L.* æquali $\varkappa\gamma$. eſtque, uti patet, ſpat. $ABHG$ in *Fig. L.* ſpatii $\varkappa\beta\eta$ in *Fig. LI.* evolutum.

§. 53. Quin & hinc naſcitur aliis jam exculta ex involutâ evolutam deſcribendi methodus.

Radio quolibet $\varkappa P$ ſeu r deſcribatur Fig. LI. arcus PO; cujus infiniteſima, inter $\varkappa\gamma$ & $\varkappa\delta$ productas intercepta QR ſit: o, erit, ob radios arcubus proportionales, $\varkappa\gamma : \gamma\lambda :: \varkappa R : RQ$. ſeu $y : e :: r : o$, unde $\frac{yo}{r} = e$. poſito ergo arcui $ORQP$ in directum, *Fig. LIII.* applicetur in puncto R linea $RI = \varkappa\gamma = y$, erit $IRQK = yo$, & $OQKH =$ omnia yo; quod ſpatium diviſum per r dabit omnia $\frac{yo}{r} =$ omnia $e = AE$ in evoluta Fig. L. ubi $EC = \varkappa\gamma = RI = y$, & curva $BD =$ curvæ $B\delta$.

Coroll. I. Sit Fig. XLVIII. eadem ſpiralis §. 49. & 51. in Coroll. tractata $DVSP$, factâ circuli

culi infinitesimâ $AB = o$. (quia DS est $= z$) erit $zo = re$. & positâ circumferentiâ circuli in directum in $AEFG$, *Fig.* XLIX. ut EF sit $= AB = o$, & EC huic applicata $= DS = z$, erit $EA = c$; & curvæ $ACDH$ æquatio eadem cum spirali $d^s z^k = r^k c^s$, quæ ad Figuram XLIX relata est paraboliformis.

Unde, §. 11. Cor. I. AEC spatium est $= \frac{kcz}{k+s}$ = omnia zo seu omnia $ECDF$; ergo omnia $\frac{zo}{r} = \frac{kcz}{kr+sr}$ = omnia e; sint autem omnia $e = h$, & in *Fig. L.* ei æqualis statuatur AE, cui applicetur EC seu z, erit hujus curvæ æquatio $\frac{kcz}{kr+sr} = h$; & per æquationem spiralis curvæ ablato c, ac æquatione inter z & h constitutâ, erit $d^s k^s z^{k+s} = \overline{k+s}^s r^{k+s} h^s$; est autem in *Figurâ* L. spatium $ABGH$ spiralis evolutum, adeoque hujus duplum, & juxta §. 11. Cor. I. æquale $\frac{kdz}{k+2s}$, unde spirale $\frac{\frac{1}{2}kdr}{k+2s}$, ut supra jam sæpius inventum.

§. 53. Alterum, quod considerationem hic meretur, problema est, ex datâ evolutâ invenire involutam. Sit

Sit *Fig. L.* data evoluta $ABHG$; cujus ut inveniatur involuta $\varkappa\beta\eta$, *Fig. LI.* determinetur. ideo in hæc punctum γ reſpondens evolutæ puncto C, patet quidem lineam $\varkappa\gamma$ ſeu $\varkappa\iota$ æquari lineæ EC, ſed & præterea ad definiendum punctum γ requiri anguli $\gamma\varkappa\iota$ determinationem, ſeu arcus $\gamma\iota$ aut PR: quod ut fiat, reſumto §. præced. erat $yo = re$; adeoque $\frac{re}{y} = o$, ſit hoc $= \frac{he}{r}$, erit $\frac{rr}{y} = h$; quæ applicetur in EN erit $NEFS$ ſeu he duplum ſectoris circuli $\varkappa R\mathcal{Q}$, ſeu $= \frac{2ro}{2}$; adeoq. omnia he ſeu ſpat. $NEGK$ duplum ſectoris $\varkappa RP$; hoc autem ſpatium diviſum per r dabit omnia o, ſeu arcum RP, quo dato angulum $R\varkappa P$ dari notum eſt; unde ſi in radio $\varkappa R$ ſumatur linea $\varkappa\gamma$ ipſi EC æqualis, habetur in involutâ punctum γ reſpondens evolutæ puncto C, quo invento & cætera eodem modo inveſtigari poſſunt.

CA-

CAPUT III.

De Corporum ex Curvilineis ortorum dimenſionibus.

§. 1. EX ſuperioribus Fig. LIV. ſpatium $ADEFO$ polygonum eſt, quia curva $ADEF$ rectulis DE & ſimilibus conſtat; in quo ſpatio, tanquam baſi, ſi erigatur corpus columnare in altitudine $A\alpha$, ſeu O° conſtabit hoc infinitis columnulis, quarum baſes ſunt trapeziola $D\,\mathcal{Q}\,P\,E$, altitudines $\mathcal{Q}^{x}$, P_{π}, quod ex geometriæ vulgaris præceptis notum eſt.

§. 2. Cujus columnulæ valor algebraicus ut inveniatur, fiat ut ſupra $D\,\mathcal{Q} : y$, $\mathcal{Q}P = DH : e$, $EH : a$, $DE : u$, altitudo $A\alpha : r$. erit quæſita columnula rye, hoc eſt æqualis baſi in altitudinem ductæ; adeoque integra columna = omn. rye; ſeu, juxta præcedentem omnibus parallelopipedis in baſi rectangulâ $D\,\mathcal{Q}\,P\,H$, cum priſma triangulo DHE inſiſtens ob ipſius trianguli nullitatem nihilo ſit æquale; eſt enim triangulum $DHE = \frac{ae}{2}$, & priſma ei inſiſtens $= \frac{rae}{2}$, quod ex lemm. 10 nullum eſt.

Quod hic, licet jam ad nauſeam fere inculcatum, monemus, ne poſtea de ſectione columnari acturi illud repetere neceſſe habeamus. Cum omnia corpora, tum pyramidalia, tum cyliudrica &c. baſin nihilo æqualem habentia etiam nihilo æquivaleant, adeoq. in calculo prætermitti debeant.

§. 3. Hinc patet, ſi fuerint duæ columnæ, quarum baſes ſunt in eadem latitudine AO, & applicata primæ baſeos: y, ſecundæ: z, tum altitudo primæ columnæ: r, ſecundæ: s, ſi infiniteſima e ſibi perpetuo conſtans & æqualis aſſumatnr, fore primam columnam ſeu omnia rye ad ſecundam ſeu omnia sye, ut omnia ry ad omnia sy, hoc eſt, ut ſumma rectangulorum $\mathcal{Q}^{x}\mathcal{D}$ ex applicatis ſingulis in altitudinem ductis in primâ columnâ: ad totidem reſpondentia rectangula in ſecundâ.

Plura hinc quilibet ad §. 6, 7, 8, 9, &c. Cap. præc. normam facile deducet.

§. 4. Quod ſi *Fig. LV. N°.* I. columna hæc plano per lineam CB ipſi AO æquidiſtantem tranſeunte, quodq. plano per utriuſque baſeos axem FO incedenti normale eſt, obliqué ſecetur, ortum hinc ducent duo columnæ ſegmenta, ſuperius & inferius, iisdem corpusculorum generibus inverſé conſtantia; quæ *truncorum* nomine vocant Geometræ.

Hos conſideranti innoteſcit truncum inferiorem

rem conſtare infinitis Corpuſculis, quorum baſes ſunt traperia $D\,\mathcal{Q}\,P\,E$, altitudines ab unâ parte PG, $\mathcal{Q}I$, ab alterâ EN, DK; quæ ut calculo explicentur, cæteris, ut ſupra, appellatis, dictiſq $\mathcal{Q}I : l$, & $KD : s$, erunt primo omnia baſi triangulari DHE directe inſiſtentia ob ipſius trianguli nullitatem ex lemm. 10 rejicienda; unde tantum pro calculo reſtat rectangulo $P\,\mathcal{Q}\,D\,H$ inſiſtens priſma $P\,\mathcal{Q}\,I\,G\,L\,K\,D\,H = \frac{sye+lye}{2}$, æquale parti infiniteſimæ trunci inferioris a plano reſecti; quare factis $CT : b$, $TS : h$, $\mathcal{Q}C : d$, erit QI ſeu $l = \frac{hd}{b}$, & KD ſeu $s = \frac{hd}{b} + \frac{hy}{b}$; unde hoc in caſu conſtabit truncus omnibus, $\frac{h}{b}$ in $d+\frac{1}{2}y$ in ye; & ſuppoſito $h = b$, hoc eſt angulo RBV ſemirecto, componetur truncus omnibus, $d+\frac{1}{2}y$ in ye, ſeu $\frac{2dye+yye}{2}$; iterumq. ſi fiat CD ſeu $d+y = z$, conſtabit idem truncus omnibus $\frac{zze-dde}{2}$.

§. 5. Unde expoſito alio cylindrico, (cujus baſis ejuſdem latitudinis cum AO) oblique ſecto, factâq. diviſione per e, erit truncus inferior primi cylindrici ad truncum inferiorem ſecundi, ut omnia trapezia $OQDK$ in primo

ad

ad omnia trapezia correſpondentia in ſecundo.

Hoc notetur, cum hæc trapezia $IQDK$ ſint continuo $= \frac{2dy+yy}{2} = \frac{zz-dd}{2}$, ſeu æqualia differentiis quadratorum in CD & CQ conſtitutorum, truncorum rationem per has differentias exprimi poſſe.

§. 6. Quod ſi planum ſecans non tranſeat per BC, ſed per baſis axem AO, erit QC ſeu $d = 0$: quique hinc reſultabit truncus, *ungulæ* nomine alias dictus, conſtabit infinitis $\frac{byye}{2b}$ ſeu priſmatibus $PHLKDQ$.

Eritque in ratione ad aliam ungulam, ubi e ſibi ſemper æqualis diviſione excidit, ut omnia $\frac{byy}{2b}$ ſeu triangula KQD, ad totidem triangula in ſecundâ ungulâ.

§. 7. Si vero fiat $b = b$, & angulus ideo quo planum ſecans lineam AO tranſit ſemirectus, erit $\frac{yye}{2}$ hujus ungulæ, quæ hâc de cauſâ ſemiquadrantalis vocari ſolet, pars infiniteſima; atque triangulum KQD, hoc in caſu $= \frac{yy}{2}$.

§. 8. Si autem non $\frac{byy}{2b}e$, ſed $\frac{byye}{b}$, pro parte Corporis infiniteſimâ aſſumatur, aliud ſolidi genus efformabitur, duplum ungulæ: factâ ni-

nimirum *Fig.* LVI. linea DQ ut ſupra $= y$, fiat continuo, ut b ad h ita y ad $\frac{by}{b}$, quæ ſi ſtatuatur in MQ, normalis Figuræ AOF, erit completum parallogrammum $QMID = \frac{byy}{b}$; quod ſi ducatur in infiniteſimam QP ſeu ϵ, oritur parallelopipedum ſolidi hujus infiniteſimum; cum cætera extra hoc parallelopipedum extantia corpuſcula juxta lem: 10 ex calculo evaneſcant.

Hoc autem perpetuis his parallelopipedorum aggregatis conflatum ſolidum $AOFCB$ ejus eſt proprietatis, ut quælibet ſectio, rectangulo $BOFC$ parallela, faciat parallelogrammum $MQDI$ ſeu $\frac{byy}{b}$. quod monuiſſe ſufficiat, cum & hoc principii loco pro Curvilineorum menſuris ſtatui poſſit; quoniam vero ungulæ ſimpliciores forſan viſæ fuerunt, iis potius inſiſtere voluiſſe geometras vero eſt ſimile.

§. 9. Cum autem *Fig.* LVII. trunci ungulæ ve baſis AOF, juxta ſuperiora, non tantum reſpectu AO in trapezia $DQPE$, verum & reſpectu OF in trapezia $DGIE$ dividi poteſt, conſtabit, hoc ſuppoſito, ungula truncuſve $AOFV$ ſolidis trapezio $DGIE$ inſiſtentibus, quale eſt $DGIEMSKL$.

Quod ut Calculo exprimatur, ſiat $IL : s$, $EI : x$,

$EI:x$, infiniteſimæ GI ſeu $KT:e$, $LT:i$, erit KG ſeu $IT:s-i$; jam vero cum triangula KTL, MRN, DHE, SNR, juxta lemm. 10, nihilo æquivaleant, reſtabit ſolum parallelopipedum $GITKNREH:=sxe-ixe=sxe$, (ex eodem lemm. 10) pro ſolidi hujus infiniteſimâ; adeoque ungula ſive truncus quovis modo per AO reſectus in ratione ad alium eliſâ utriuq. e, ut omnia sx ſeu omnia rectangnla $MLIE$.

Unde ſi ſolidum ſit ungula ſemiquadrantalis per AO reſecta, erit LI ſeu $s=OI$ ſeu y, adeoque $sx=yx=$ rectangulum $MLIE=$ rectangulum $OIEP$; quare hoc in caſu ungula ſemiquadrantalis $AOFV$ algebraice per omnia yx efferetur.

§. 10. Sit $OC:d$, & BC ipſi AO parallela, erit $CI:d+y$ ſeu $CO+OI$, ſeceturq cylindricus ipſi AOF inſiſtens plano ſeminormaliter per BC tranſeunte, erit trunci inferioris infiniteſima $=dxe+xye$; & ratio trunci ad alium ejuſdem latitudinis calculo deſignabitur per omnia $dx+xy$, ſeu rectangula ex CI in IE.

§. 11. Quod ſi perpetuo fuerit CI ad IL ut b ad h, erit trunci inferioris cylindrici, in angulo, quem data ratio ipſius b ad h determinat, per BC reſecti infiniteſima abſoluta $=$

$dx+yx$

$dx+yx$ in $\frac{he}{b}$, respectiva vero ad alium ejusdem latitudinis truncum = rectangulum $dx+yx$ in $\frac{h}{b}$.

§. 12. Hoc notetur, *Fig.* LV. *N°.* 1. truncum cujuslibet cylindrici inferiorem æquari summæ cylindrici in eâdem basi constituti in altitudine PG, & ungulæ ejusdem cylindrici basi superiori insistentis, eodem plano, per IG ad eundem angulum transeunte, resectæ.

Demonstratio ex appositæ Figuræ inspectione patet. Tum & calculus eandem statim prodit, sit enim $\frac{dhye}{b}+\frac{yyhe}{2b}$ infinitesima trunci juxta §. 5. est $\frac{dhye}{b}$ ex §. 2. ad cylindricum, & $\frac{yyhe}{2b}$ per §. 6. ad ungulam. si vero trunci infinitesima, juxta §. 11, ponatur. $\frac{h}{b}dxe+\frac{h}{b}xye$, idem eveniet; consequentiæ ratio ex §. 9. elucescit.

Corollaria casus particulares concernentia hic non adjungo, cum in sequentibus abunde circa solida ex rotationibus genita sese ingestuta sint.

§. 13. Neque tantum ad curvilinea, quæ axem ac basin rectilineam habent, modo deducta

ducta extenduntur; verum &. *Fig.* LV. *N°.* 2. ad Figuras quibuslibet peripheriis terminatas, applicari poſſunt; cum enim triangula *DHE* ac *QPO*, ex lemmate 10, nihilo æquivaleant, erunt & ſolida iis ſuperſtructa nihilo æqualia: adeoque & hoc in caſu, trunci ungulæque per eadem, quæ modo ex calculo inventa ſunt, priſmata deſignabuntur.

De Corporibus ex Curvilineorum rotatione genitis.

§. 14. REctangulum *ABEP*, *Fig.* LVIII. conſtat infinitis rectangulis *QPEF*, *RQFT*, &c. ſeu (vocatis *PE*: *b*, *QP* infiniteſimâ: *e*) omnib. *be*. quæ rectangula *QPEF*, &c. ſi circa reſpectivos axes *PQ*, *QR*. &c. rotari concipiantur, efficient infiniti hi cylindruli integrum cylindrum ex *APEB* circa *AP*; exiguorumq. horum cylindrorum valor algebraicus, juxta cylindri menſuram in elementis traditam, erit $\frac{bbce}{2r}$. (poſitâ nimirum ratione radii ad circumferentiam ut *r* ad *c*, quod & in ſequentibus ſemper obtinebit) adeoq. totus hic cylindrus explicabitur per omnia $\frac{bbce}{2r}$: quæ

quæ (appellatâ $AP:d$, æquivalebunt termino absoluto $\frac{bbcd}{2r}$.

§. 15. Huic rectangulo $APEB$ inscriptum sit triangulum APE, vocatisque $AR:x$, $RX:y$, SR infinitesima: e, erit trianguli proprietatem exprimens æquatio $bx = dy$, constabitque hoc triangulum juxta Cap. præc. §. 4. omnib. $ye =$ omnib. $\frac{bxe}{d}$ hoc est infinitis rectangulis $SRXZ$; hæc autem omnia rectangula seu triangulum APE, si circa axes suos SR convertantur, generabunt conum AEM innumeris cylindrulis hisce constantem; quorum cylindrulorum valor analyticus ex §. præc. est $= \frac{cyye}{2r} = \frac{cbbxxe}{2rdd}$; unde conus AEM æquivalet omnibus $\frac{cbbxxe}{2rdd}$, seu (juxta Cap. II. §. 13.) absolutæ quantitati $\frac{cbbx^3}{6rdd}$. quæ, posità x maximâ $= d = AP$, transit in hanc $\frac{cbbd}{6r}$.

Unde patet conum AEM esse ad cylindrum circumscriptum $BENM$, ut $\frac{cbbd}{6r}$ ad $\frac{cbbd}{2r}$ adeoque ut 1 ad 3.

Malui hoc in casu, methodi gratiâ, Figuras circumscriptas

ſcriptas adhibere; rationemq. coni ad cylindrum, utpote ex Cap. II. §. 13. immediate profluentem, eodem cum cæteris principio demonſtrare; cum conus, ut ut ex figurâ rectilineâ ſeu triangulo ortum ducens, rotationis tamen nomine curvilineis annumerandus videatur.

§. 16. Hoc notetur, cum in ſequentibus ſemper ſubintelligendum veniat, eadem hæc omnia in converſione partiali locum habere. Si enim rectangulum $APEB$ circa axem AP per arcum IE tantum convertatur, erit (arcu ſimili in radio r poſito $= f$) pars cylindri converſione iſthâc imperfectâ geniti $= \frac{bbfe}{2r}$.

Poſſent ex eodem, quo §. 15. uſi ſumus, fundamento, ſeu curvilineorum in rectangula diviſione, generalia ſolidorum ſymptomata deduci, cum vero eorum in trapezia diſtinctio tum hanc, quam intendimus, ſolidorum diſcuſſionem, tum & ſuperficierum conöidalium naturam magis directe ſpectet, hanc viam eligemus.

§. 17. Ex præc: *Fig. LIX*, ſpatium AOF conſtat infinitis trapeziis $DQPE$, $EPOF$, &c; quæ ſi ſingulæ rotentur circa ſuos axes, QP, PO, efficient totidem conos truncatos, vertices habentes in T & V, ubi tangentes ſeu Curvæ coincidentes DE, FE, productæ axem OA ſecant; omnesque hi coni truncati ex trapeziis $DQPE$ circa axes QP volutis conficient ſolidum ex integrâ Figurâ mixtillineâ

tilineâ $ADEFO$ circa axem ſuum AO rotatâ.

§. 18. Ut ergo ejus modi coni truncati valor indagetur: retentis, quæ ſupra ſymbolis, & ratione radii ad circumferentiam poſita, ut r ad c, erit circulus radio QD ſeu y deſcriptus $= \frac{cyy}{2r}$; qui ductus in $\frac{1}{3}$ QT ſeu $\frac{1}{3}t$, dabit $\frac{\frac{1}{3}tcyy}{2r}$ pro ſoliditate coni minoris ex triangulo QTD circa QT voluti. Jam vero circulus radio PE deſcriptus eſt $\frac{cyy+2cay+caa}{2r}$, qui multiplicatus per $\frac{1}{3}$ PT, ſeu $\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}e$, dabit, rejectis per lemma 10. rejiciendis, $\frac{\frac{1}{3}tcyy+\frac{2}{3}tacy+\frac{1}{3}ceyy}{2r}$ pro contento coni ex triangulo TPE circa TP circumacto; ex quo ſi detrahas conum minorem modo inventum $\frac{\frac{1}{3}tcyy}{2r}$, reſtabit coni truncati ex trapezio $DQPE$ circa QP rotati quæſitus valor: $\frac{\frac{2}{3}tacy+\frac{1}{3}ceyy}{2r}$, ſeu $\frac{ceyy}{2r}$, aut $\frac{atcy}{2r}$ (eſt enim $at=ye$ ex §. 11. Cap. præc) jam vero $\frac{ecyy}{2r}$ eſt æquale cylindro ex rectangulo $QDPH$ circa QP, & pars conoidis quæſiti infinitesima.

 §. 19. Hinc

§. 19. Hinc ſi fuerint *Fig. LX.* duo curvilinea *AFO* & *AGO* ad eundem axem *AO* conſtituta, ſintq. applicatæ in primo $y = DQ$, in ſecundo $z = RQ$, erit, ut Conoides ex primo *AFO* circa *AO* rotato ad conoides ex ſecundo *AGO* circa eandem *AO*, ita omnia $\frac{c}{2r} \cdot e\,y\,y$ ad omnia $\frac{c}{2r}\,e\,z\,z$; & diviſis per e, ut omnia $\frac{c}{2r}\,y\,y$ ad omnia $\frac{c}{2r}\,z\,z$, hoc eſt ut omnes circuli ex applicatis, tanquam radiis, deſcripti in primâ ad omnes circulos correſpondentes in ſecundâ Figurâ; tandemque, rurſus diviſione per $\frac{c}{2r}$ factâ, ut omnia $y\,y$ ad omnia $z\,z$, ſeu ut omnia applicatarum quadrata in primâ Figurâ ad omnia applicatarum quadrata in ſecundâ; poteſt & hoc addi, omnia $\frac{c}{2r}\,e\,y\,y$ eſſe ad omnia $\frac{c}{2r}\,e\,z\,z$, ut omnia $\frac{y\,y\,e}{2}$ ad omnia $\frac{z\,z\,e}{2}$; hoc eſt conoides ex *AFO* circa *AO* ad conoides ex *AGO* circa eandem *AO*, ut ungula ſemiquadrantalis cylindrici in baſi *AFO* per *AO* reſecti, ad ungulam ſemiquadrantalem in baſi *AGO*; juxta 7 hujus.

§. 20. Rurſus, cum *Fig. LX.* conoides ex *AFO*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [218] - 196

AFO circa AO sit æquale omnibus $\frac{cyye}{2r}$ & conôides ex AGO circa eandem AO æquale omnibus $\frac{ce\zeta\zeta}{2r}$, erit solidum secundum demto solido primo, seu solidum cavum ex AGF circa AO æquale omnibus $\frac{ce\zeta\zeta}{2r} - \frac{ceyy}{2r}$: quâde causa, si aliæ duæ curvæ AIO & AKM ad eundem aut æqualem axem applicentur, sitque $QI:h$, & $QK:k$, erit solidum cavum ex AOM circa AO æquale omnibus $\frac{cekk-cehh}{2r}$.

Unde solidum ex AGF circa AO ad solidum ex AMO circa AO, ut omnia $\frac{ce\zeta\zeta-ceyy}{2r}$ ad omnia $\frac{cekk-cehh}{2r}$ & divisis per e ut omnia $\frac{c\zeta\zeta-cyy}{2r}$ ad omn. $\frac{ckk-chh}{2r}$ seu ut omnes differentiæ circulorum in radiis RQ & DQ ad totidem differentias circulorum in radiis QK & QI; aut potius ut omnes armillæ ex omn. RD circa AO ad totidem armillas ex omnibus IK circa AO; rursumq. divisione per $\frac{c}{2r}$ institutâ, ut omnia $zz-yy$ ad omnia $kk-hh$, hoc est ut differentiæ quadratorum RQ & DQ ad differentias quadratorum in QK & QI; unde factis $z-y=f=\frac{}{RD}$

RD, ac $k-h=g=IK$, erunt ſolida inter ſe, ut $2fy+ff$ ad $2gh+gg$.

Coroll. I. Hoc notetur, Corpora cava ſeu annularia, ex armillis compoſita per quadratorum in applicatis conſtitutorum differentiam exprimi.

Coroll. II. nec opus eſt addi; cum omnia $\frac{czze-cyye}{2r}$ ſint ad omnia $\frac{ckke-chhe}{2r}$ ut omnia $\frac{zze-yye}{2}$ ad omnia $\frac{kke-hhe}{2}$; eſſe ſolidum annulare ex AGF circa AO, ad ſolidum ex AMO circa AO, ut truncus inferior cylindrici baſi AGF inſiſtentis ac per AO ſeminormaliter reſecti, ad truncum inferiorem in baſi $A\odot M$ per eandem AO reſecti: juxta § 4. hujus.

§. 21. Sit jam r ad s ratio immutabilis: ac ſemper $r:s::zz:yy$; erit conoides ex AGO circa AO, ad conoides ex AFO circa AO, ut r ad s, juxta lemma 43.

Ac ſi fuerit perpetuo $r:s::zz-yy:hh$; erit ſolidum annulare ex AGF circa AO ad conoides ex AFO circa AO, ut r ad s; & poſito $r=s$, erit ſolidum annulare illud æquale hinc corpori conoidali.

Coroll. I. patet hinc, ſi loca duorum, hoc eſt ipſorum z & y ad arbitrium ſumantur; locum reliquum, ad quem h futurum eſt, hinc pate-

patefactum iri. poſitâ enim $AQ:x$, ſit z ad parabolam AGO, ut ſit $2rx = zz$; & y ad triangulum iſoſceles AFO, unde $y = x$; erit ſuffectis in locum z & y valoribus, $2rx - xx = hh$, unde QI ſeu h ad ſemicirculum AHO, cujus centrum W. quare ſi parabola latere recto $2r$ deſcripta ARQ circa axem AQ rotetur; & triangulum ADQ circa eandem AQ volvatur; erit differentia, quâ conoides parabolicum ſeu omnia $2rx$ ſuperat conum ſeu omnia xx, æqualis portioni ſphæricæ ex ſegmento ſemicirculi AQI circa eandem AQ revoluto genitæ.

Coroll. II. Si vero portionis hujus ſphæricæ non ratio ad alia ſolida, verum abſolutus valor quæratur; eſt ſegmentum ſphæricum ex AQI circa AQ rotatum = omnia $\frac{hhce}{2r}$ = omnia $\frac{2rcxe - cxxe}{2r}$, ex modo demonſtratis: ſed ex Cap. II. §. 12. Sunt omnia $2rcxe = rcxx$, tum omnia $cxxe = \frac{1}{3}cx^3$, adeoque omnia $\frac{hhce}{2r}$ ſeu portio ſphærica $= rxx - \frac{1}{3}x^3$ in $\frac{c}{2r}$ = cono, cujus baſis circulus radio QI deſcriptus, altitudo $\frac{3rx - xx}{2r - x}$ ſeu $\frac{QO + WO}{QO}$ in QA. Si vero quæratur integra ſphæra, fiat $x = 2r$, eritque

que $rxx - \frac{1}{3}x^3$ in $\frac{c}{2r} = \frac{4}{6}rrc$; adeoque hæc ſphæra ad cylindrum circumſcriptum rrc, ut 2 ad 3.

§. 22. Potuiſſet & in *Fig. LX.* aſſumtâ Fig. quartâ AMO, cujus applicata $QL = k$, fieri perpetuo $kk - hh = rr - yy$ hoc eſt ſolidum annulare cavum ex AMO circa AO æquale ſupponi ſolido annulari modo dicto ex AFG circa eandem AO, unde locis trium ex hiſce cognitis cognoſcetur ſemper locus quarti.

§. 23. Neq. poſt hæc intellecta dictu opus autumo, ſi axis rotationis BC ſit extra Figuræ cujuslibet, ut MAG, ambitum, omnia ſimiliter obtinere. Facto enim $SC:z$, & $CL:y$, ſolidum annulare ex Figura MAG circa CB rotata in ratione ad aliud ſolidum æque altum, explicabitur per omnia $zz - yy$, aut poſitâ LS ſeu $z - y = f$: per omnia $2yf + ff$.

§. 24. Cum autem non tantum trapeziis $DQPE$ planum mixtilineum AOF *Fig. LXI.* conſtet, verum & trapeziis $DIGE$; quæ ſi rotentur circa axem AO, facient ſingula trapezia ſingulos tubos ſeu ſolida tubulata; quæ ſimul ſumta integrum conſtituent conôides ex Figurâ AFO circa AO rotatâ.

§. 25. Pro ſingulorum ergo valore inveniendo, retentis ſuperioribus ſymbolis, ſit præterea

rea QO seu $DI: x$, HE seu $GI: a$ infinitesima; unde, quia $OI: y$, erit $OG: y+a$, & $GE: x-e$; jam autem juxta §. 18. erat conus truncatus ex $DQPE$ circa $QP = \frac{ceyy}{2r}$; cui adde cylindrum ex rectangulo $POGE$ circa $PO = \frac{cyyx}{2r}$ $\frac{+2acyx-ceyy}{2r}$, orietur solidum ex pentagono $QDEGO$ circa $QO = \frac{cyyx+2acyx}{2r}$; ex quo si dematur cylindrus ex rectangulo $QDIO$ circa QO seu $\frac{cyyx}{2r}$ orietur tubus quæsitus ex trapezio $DIGE$ circa $QO = \frac{acyx}{r}$; seu, ut ex calculo patet, tubus ex rectangulo $DIGS$ circa QO, quæ conoidis hoc modo considerati infinitesima est.

Coroll. I. Quod si $OF = AM$ sit $= p$, & $AO = MB = b$; erit cylindri ex rectangulo $AMFO$ circa AO infinitesima $= \frac{byac}{r}$.

§. 26. Sint jam *Fig. LX.* duæ Figuræ AGO & AFO ad eundem axem AO positæ; vocatisq. $RQ: z$, $DQ: y$, infinitesima $QP: e$, intercepta $AQ: x$, erit ex præcedenti solidum ex AGO circa ${}^{\beta}A^{\pi}$, quæ per verticem applicatis parallela est, æquale omnibus $\frac{zxec}{r}$; & soli-

ſolidum ex AFO circa eandem $\beta A \pi$ æquale omnibus $\frac{yxec}{r}$.

Unde illud ſolidum ad hoc, ut omnia $\frac{zxec}{r}$ ad omnia $\frac{yxec}{r}$; & diviſione facta per e, ut omnia $\frac{zxc}{r}$ ad omnia $\frac{yxc}{r}$, ſeu ut omnes ſuperficies cylindricæ aut tubulatæ ex applicatis RQ, in diſtantia ſua AQ & poſitione ſuâ ad AQ normali, circa $\beta A \pi$ rotatis, ad totidem ſuperficies cylindricas ex omnibus DQ in eadem diſtantia AQ circa eandem $\beta A \pi$ volutis; & factâ rurſum diviſione per $\frac{c}{r}$, erit ſolidum primum ad ſecundum, ut omnia zx ad omnia yx; hoc eſt ut ſumma rectangulorum ex lineis RQ axi rotationis $\beta A \pi$ parallelis in reſpectivas ab eodem axe diſtantias ductis factorum, in primâ Figurâ, ad ſummam rectangulorum reſpondentium in ſecundâ Figurâ, manente eâdem ab axe diſtantiâ AQ; hoc addatur, cum $\frac{zxec}{r}$ ſemper ſit ad $\frac{yxec}{r}$ ut zxe ad yxe; fore ſolidum primum ad ſecundum ut truncus cylindrici ungulave in baſi AGO ſeminormaliter per $\beta A \pi$ reſecti, ad ſimilem ungulam in baſi AFO; conſequentiæ ratio ex 9 hujus manifeſta eſt. *Schol.*

Schol. Hoc notetur *Fig. LXI.* si QD seu OI sit y; & QO seu DI sit: x; $PQ: e$; $IG: a$, fore rectangulum $QODI$ seu xy exponens rationis solidi ex spatio AOF tum circa AO, tum circa OF rotato, juxta præcedentem; ne autem hic error subrepat, si solidum designetur per rectangula xy, notetur semper illud ad infinitesimam e vel a reducendum esse; cum omnia $\frac{xyec}{r}$ constituant solidum ex AOF circa OF, & omnia $\frac{xyac}{r}$ componant solidum ex eadem AOF circa AO rotatâ; ut inquirenti patebit.

§. 27. rursus, sint *Fig. LXII.* duæ figuræ RAF & GOQ, ad æquales lineas RF & GO positæ; ita ut interceptæ RQ & MG, ac infinitesimæ QN & ME, continuo æquales sint, adeoque Figuræ ad eundem axem ordinari posse intelligantur; quæ cautela in hisce ubique necessaria. Vocatisque $RQ = GE: x$, $QN = ME: e$, $PQ: y$, $DE: z$, ac $BR: b$, & $BG: d$, utraque determinata; sitq. HB axis rotationis, erit, juxta præcedentes duas, solidum ex RAF circa HB æquale omnibus $\frac{byec + xyec}{r}$, illudque ex QGO circa eandem HB æquale omnib. $\frac{dzec + xzec}{r}$ unde solidum primum ad secundum, ut omnia $\frac{byec + xyec}{r}$ ad

ad omnia $\frac{dzec+xzec}{r}$; & diviſis per conſtantem *e*, ut omnia $\frac{byc+xyc}{r}$ ad omnia $\frac{dzc+xzc}{r}$; hoc eſt ut omnes tubi cylindrici ex *PQ* circa *HB* ad totidem tubos ſeu ſuperficies cylindricas ex *DE* circa eandem *HB*; ac, rurſum inſtitutâ diviſione per $\frac{c}{r}$, ut omnia $by+xy$ ad omnia $dz+xz$, ut omnia rectangula ex applicatis *PQ* & *DE* in reſpectivas ab axe rotationis diſtantias *BQ* & *BE* ductis.

Coroll. I. Unde hoc notetur ſolida cava; ſeu annularia, ex tubis compoſita exprimi per modo recenſita rectangula.

Coroll. II. Cum autem ſemper ſit $\frac{byec+xyec}{r}$ ad $\frac{dzec+xzec}{r}$, ut $bye+xye$ ad $dze+xze$, erit, juxta §. 10. ſolidum primum ad ſecundum ut truncus cylindricus in Figurâ primâ per axem rotationis ſeminormaliter reſectus ad truncum ſimilem in ſecundâ Figurâ.

Coroll. III. Nec opus eſt addi ipſum ſolidum ex *RAF* rotatione genitum, ſeu omnia $\frac{byec+xyec}{r}$, æquari trunco cylindrici inferioris, baſi *RAF* inſiſtentis, ac per *HB* reſecti ad angulum, quem ratio radii circuli ad circumferen-

ferentiam determinat; cum pateat hoc ex præ-greſſâ §. 11. Idemq. circa §. 20. animadverti poſ-ſet in ſolidis armillaribus.

Coroll. IV. Notetur hinc, ſi ſolidum quod libet annulare ſeu tubulatum in æqualem trun-cum poſſit commutari, rationem radii ad cir-cumferentiam circuli cognitam eſſe.

Coroll. V. Cætera hinc facile eliciuntur, ut & ea, quæ ſolida ex Figuris circa axi aut baſi parallelas rotatis genita ſpectant, cum HB ut talis conſiderari poſſit. Item BC circa ſolida armillaria: §. 23.

§. 28. Pro ſpecialibus ſolidorum menſuris præcedentis Capitis §. 11 Coroll. V, VI, VII, VIII. ut & §. 12. & 13. dilucide ſatis funda-menta tradunt. ne tamen nihil dixiſſe videar, ſo-lidorum ex parabolis genitorum contemplatio-nem primo ex præcedentium more aggrediemur.

I. Sit parabola AFO, Fig. *LXI.* in quâ $AQ : x$, $QD : y$, æquatio $r^p - q\, x^q = y^p$. quæritur ratio ſolidi ex eâdem circa AO rotatâ geniti, ſeu omnium $yy =$ omnium $r^{\frac{2p-2q}{p}}$ $x^{\frac{2q}{p}}$ ad omnia bb, ſeu cylindrum ex rectangulo $AOFM$ circa AO; eritq. ex §. 11. Coroll. V. Cap. præced. ut p ad $p+2q$. cum vero omnia $\frac{yy}{2}$ ſint juxta §. 7. ad ungulam ſemiquadranta-lem

lem in baſi parabolicâ per A O reſectam, erit $\frac{bb}{2}$ & hæc ad omnia ſeu ſimilem ungulam in baſi rectangulâ A *M F O* per eandem A O reſectam in eadem ratione.

II. Si parabola circa baſin O F rotetur, factâ A O: c, erit Q O: $c-x$, & ratio ſolidi hac ratione geniti ad cylindrum ea, quæ eſt omnium $yc-yx$ (§. 27.) ad omnia $bc-bx$; quæ & ungularum ſemiquadrantalium per O F reſectarum in reſpectivis baſibus A F O & A *M F* O (§. 10.) exponentes ſunt; ergo omnia $yc-yx$ ad omnia $bc-bx$, ut omnia $cr\frac{p-q}{p} x \frac{q}{p} - r\frac{p-q}{p} x \frac{p+q}{p}$ ad omn. $bc-bx$; hoc eſt per §. 11. Capitis II. ut $2pp$ ad $2pp+3pq+qq$, ita ungula ad ungulam, aut ſolidum ad cylindrum.

III. Si circa A *M* baſi in vertice parallelam revolvatur, erit ſolidum ad cylindrum circumſcriptum, aut ungula ſemiquadrantalis reſecta per eandem A *M* in baſi parabolicâ ad ſimilem ungulam in baſi rectangulâ A *M F* O (juxta §. 26. & 9.) ut omnia yx ad omnia bx, ſeu ut omnia $r\frac{p-q}{p} x \frac{p+q}{p}$ ad totidem bx, hoc eſt ut $2p$ ad $2p+q$.

IV. Si circa *M F* axi parallelam fiat rotatio,

tio, erit ſolidum hoc modo productum in ratione ad cylindrum, ut omnes differentiæ quadratorum in QK, & DK, ſeu omnia $2by - yy$ ad omnia bb, hoc eſt ut omnia $2br^{\frac{p-q}{p}} x^{\frac{q}{p}} - r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q}{p}}$ ad omnia bb, adeoque ut $\frac{2p}{p+q} - \frac{p}{p+2p}$ ad 1. conſequentia ex loco citato nullo negotio colligitur.

§. 29. Et hæc de parabolis; quæ ſi q ſit major quam p ad earum complementa AFM referri poſſunt; ſin autem q ſigno negativo afficiatur, erit curvæ æquatio ad aſymtotos hyperbolæ; quarum ſolida ſimili modo genita & hinc dimenſionem, determinationem ſaltem, accipiunt.

§. 30. Sit *Fig. XLV.* polo M, normâ DQ, vertice A, deſcripta conchöis ABC; item radio AD ſeu r deſcriptus circuli quadrans ADI vocenturque $DM: s$, $GD: z$, $GB: x$, $HG: y$, erit juxta Cap. præc. §. 36. conchoidis proprietas $sy + zy = xz$.

Adeoq. juxta §. 27. ſolidum ex quadrante circuli ADI circa ZM (quæ normæ æquidiſtat) rotato, ſeu omnia $sz + zy$ æquale ſolido infinito ex ſpatio conchöidali circa normam DQ in infinitum productam rotato ſeu omnibus xz.

Tum

Tum &, juxta §. 10. erit truncus inferior cylindrici quadranti ADI inſiſtentis, ac per MZ ſeminormaliter reſecti, ſeu omnia $sy+zy$, æqualis ungulæ in baſi infinitâ conchoidali per infinitam DQ ſeminormaliter reſectæ ſeu omnibus xz.

§. 31. Sit (*Fig: XIII. N°. 1.*) ſemicirculus ADO, cujus diameter $AO: r$, $QA: x$, $QO: l$ ſeu $r-x$, $DQ: y$; item hunc ſpectans ciſſois $ANKG$, cujus applicata $QN: z$; erit, juxta calculum §. 31. Cap. de tangentibus, æquatio curvæ ciſſoidis $lz = xy$; unde ex §. 26. ſolidum ex ciſſoidali ſpatio circa infinitam aſymtoton OR voluto, ſeu omnia lz, æquantur ſolido ex ſemicirculo circa AF aſymtato OR parallelam rotato ſeu omnibus yx; aut juxta §. 9. ungula ſemiquadrantalis in baſi ciſſoidali per OR infinitam reſectæ, ſeu omnia lz, æqualis ſimili ungulæ in ſemicirculo per AF reſectæ, ſeu omnia yx.

§. 32. Quomodo autem hinc ſolidorum tranſmutationes plurimæ levi operâ obtineantur, facile quivis animadvertit. Reſumtâ enim *Fig. XXXIX.* ſymbolisque §. 17. Cap. præced. ſuppoſitis, cum ſit perpetuo $ye = ta$, hoc eſt, poſito TQ in IM, ſpatium AOF æquale ſpatio FKO, erit & ſi utrumque in y ducatur,

$yye = tya$; unde omnia $\frac{yye}{2}$ ſeu ungula cylindrici in baſi AFO per AO ſeminormaliter reſecti (§. 7.) ad tya, ſeu truncum inferiorem cylindrici in baſi FKO per eandem AO ſeminormaliter reſecti (§. 9.) ut omn. $\frac{yye}{2}$ ad omn. tya ſeu omn. yye hoc eſt ut 1 ad 2.

Tum etiam omn. $\frac{yyec}{2r}$ ſeu per §. 17. ſolidum ex AOF circa AO rotato ad $\frac{tayc}{r}$ juxta §. 25. ſolidum ex FKO circa eandem AO revoluto, ut omn. $\frac{yyec}{2r}$ ad omn. $\frac{tayc}{r}$ ſeu omn. $\frac{yyec}{r}$ hoc eſt ut 1. ad 2.

Si vero IM vocetur h, fiatque ſemper $ty = hh$, erunt omnia $\frac{tayc}{r}$ = omnia $\frac{hhac}{r}$ = $\frac{yyec}{r}$; & omnia $\frac{hhac}{2r}$ = omnia $\frac{yyec}{2r}$, hoc eſt ſolidum ex FKO circa FO æquale ſolido ex AFO circa AO, ſecundum §. 17; quod ungulis ſuperiori modo applicari poteſt. Quin & aſſumtâ *Fig. XL.* ſi recta $\alpha\delta\varepsilon\varphi$ reſpondeat curvæ *Fig. XXXIX.* $ADEF$, fiatque $\varkappa\delta = QD$ ſeu y, ac $IM = TD$ ſeu s, erat $yu = sa$, quare $yyu = sya$ hoc eſt $\frac{yyuc}{2r} = \frac{syac}{2r}$, ſeu ſolidum ex

ex $\alpha\circ\varphi$ circa $\alpha\varphi$ (§. 17.) æquale ſemiſolido ex FOK circa OA rotato; quod & ungulis, ſi placuerit, applicetur.

§. 33. Sit *Fig. LXIII.* $BK = BF$, & BA ſemper æqualis BC ſeu x interceptæ, angulus KBF rectus, applicata $AE: y$, & $CD: z$, fiatque ſolidum ex FDB circa FB, ſeu omnia $\frac{z\,z\,c}{2\,r}$ §. 19. æquale ſolido ex BKL circa BN, ſeu omnibus $\frac{y\,x\,c}{r}$ §. 26. erit æquatione conſtitutâ $\frac{z\,z}{2} = y\,x$, hoc eſt juxta §. 7. & 9. ungula ſemiquadrantalis cylindrici in baſi FDB per FB reſecti æqualis ungulæ cylindrici in baſi KBL per BN ſeminormaliter reſecti; unde poſito y ad locum quemlibet, cujus applicata x, innoteſcet z, & contra.

§. 34. Sint (*Fig. LXIV.*) FK, RM, PN, normales ipſi FN; vocenturq. FC & $NP: r$, $CN: b$, intercepta NS & huic ſemper æqualis $BC: x$, $BA: y$, $ES: z$, unde $EG: 2z$, conſtitutâque æquatione qualibet, juxta §. os. 7. & 9. verbi gratia. $yx = 2bz$, erit juxta §. 9. yx ad ungulam ſemiquadrantalem in baſi FKC, per CM reſecta; & $2bz$, ad cylindricum in baſi HNL, cujus altitudo CN ſeu b, eſt enim $2bz = b$ in $2z$, unde illa ungula huic æquatur cylindrico.

§. 35.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [232] - 210

§. 35. Quod ſi yx ponatur ad ſolidum rotundum, & fiat $\frac{yxc}{r} = \frac{2bzc}{r}$; erit ſolidum ex FKC circa RM rotatum æquale cylindrico, cujus baſis HNL ſeu omnia $2z$, & altitudo $\frac{bc}{r}$, ſeu circumferentia circuli radio CN deſcripti.

Coroll. I. Poſito hinc y ad locum quemlibet, noſcitur locus ad z, & viciſſim; verbi gratiâ, ſit y ad ſemicirculum, ut ſit, $yy = 2rx - xx$, erit, facto $2b = r$, hoc in caſu $zz = \frac{2rx^3 - x^4}{rr}$; adeoq. juxta §. 34. ungula in ſemicirculo per CM ſeminormaliter reſecta, ſeu omnia yx, æqualis cylindrico in baſi PNL, cujus altitudo r. Notetur ungulam in baſi PNL per NP ſeminormaliter reſectam, ſeu omnia $\frac{zz}{2} = \frac{2rx^3 - x^4}{2rr}$ cubari poſſe, juxta Coroll. VII. §. 11. Cap. præc.

Coroll. II. Cum vero ſit $yx = 2bz$, erit $\frac{yx}{b} = 2z$, unde poſito y ad quemlibet locum, cujus intercepta x, ductâque curva FTC, cujus applicata BT ſit $\frac{yx}{b}$, erit ſpatium FTC ſeu

ſeu omnia $\frac{yx}{b}$ æquale plano curvilineo HNL, ſeu omnibus $2z$.

§. 36. Similia plura tranſmutationum ſpecimnia ſibi quilibet pro arbitrio cudet; retentis enim linearum nominibus, fiat $4bz = yy$ ſeu $\frac{yy}{2} = 2bz$; adeoque cylindricus in baſi HNL, cujus altitudo b, æqualis ungulæ ſemiquadrantali in baſi FKC per FC reſectæ; quod factis $\frac{yyc}{2r} = \frac{2bzc}{r}$ ad ſolida rotunda referri in modum præcedentium poteſt.

Coroll. I. Ponatur y ad ſemicirculum, erit $yy = 2rx - xx = 4bz$; & locus ipſius z ad curvam, cujus ſpatium juxta Cor. IV. §. 11 Cap. præc. eſt quadrabile, nam, facto $4b = r$, erit $2x - \frac{xx}{r} = z$; adeoq. cylindricus in baſi HNL cubationem admittit, qui æqualis eſt nngulæ cylindrici in baſi ſemicirculari per diametrum ſeminormaliter reſectæ, unde & hæc ungula cubari poteſt.

§. 37. Affinis hiſce eſt methodus, qua ſolvitur hoc problema, datis *Fig. LXV.* duobus ſpatüs, AFO & AOM, invenire duo ſolida in ratione harum Figurarum.

Factis $D\,\mathfrak{Q} : y$, & $\mathfrak{Q}\,S : z$, erit ſpatium AFO ad ſpatium AOM, ut omnia y ad omnia

nia z; & assumtâ b determinatâ, ut omnia by ad omnia bz; si jam expetantur solida conoidica, reducantur by & bz ad circulos, ac fiat $by = \frac{kkc}{2r}$, & $bz = \frac{hhc}{2r}$, erit, sepositâ ratione $\frac{c}{2r}$, applicata TQ seu $k = \sqrt{by}$, & QN seu $h = \sqrt{bz}$; & solidum ex AGO circa AO seu omnia $\frac{kkc}{2r}$ ad solidum ex AOL circa eandem AO seu omnia $\frac{hhc}{2r}$, ut spatium AFO seu omnia y ad spatium AMO seu omnia z; unde posito $AQ = x$, & $yy = 2rx - xx$, erit $kk = 2brx - bxx$; &, dato loco ipsius z, innotescet curvæ ANL proprietas, cum sit $hh = bz$.

Si quis autem malit solida tubulata seu annularia: detur circa axem AO Figura AGL, cujus applicatæ $QN = TQ = z$; item alia AFM, cujus applicatæ $QS = DQ = y$, erit Figura prima ad secundam ut omnia z ad omnia y, seu assumtâ b determinatâ, & r pro numero, ut omnia rbz ad omnia rby; quorum utrumque si reducatur ad armillas seu quadratorum differentias pro acquirendis solidis annularibus juxta §. 20. fiatq. $rbz = kk - hh$, & $rby = ff - uu$, erit $hh = kk - rbz$, & $uu = ff - rby$. Cum autem, tum hh, tum uu sint

ſint quadrata rationalia, oportet quoque ut ipſorum valores $kk - rbz$ & $ff - rby$ rationali radice gaudeant; quare aſſumtâ quadrati $kk - rbz$ radice $k - td$ erit $k = \frac{rbz + ttdd}{2td}$; ac ſuppoſito quadratum $ff - rby$ provenire a radice $f - sc$, emerget $f - \frac{rby + sscc}{2sc}$; quo vero tum k tum f á fractionibus liberentur, factis $r = 4$, item $s = t = 2$, ac $b = c = d$, evadet $k = z + b$, & $f = y + b$; unde emergit $b = z - b$, aut $b - z$, nec non $u - y - b$ aut $b - y$. Ducta igitur AH ipſi FM parallela vocetur b, completoque $AOKH$ rectangulo, erit ſemper ducta quavis ipſi FK æquidiſtanti recta $DI = b + y$ & $IS = b - y$, unde ſemper armilla ex DS circa HK, ſeu quadratorum in DI & SI differentia æqualitur $4by$, & ſolidum ex ſpatio AFM circa HK rotato = omnia $4by$: eodem modo invenietur ſolidum ex AGL circa eandem HK = omnia $4bz$. Adeoque patet hic ab aliis, alio tamen modo demonſtratus canon.

Si circa axem AO duo quæcunque conſtituantur ſpatia AFM & AGL, fiatque ductâ AH ipſi MO parallelâ quodlibet rectangulum $AOKH$; erit, ut prima Figura ad ſecundam, ſeu ut omnia y ad omnia z, ita ſolidum ex

ex Figura prima circa HK rotata, ad ſolidum ex Figura ſecunda circa eandem HK.

Coroll. I. Quod ſi AGL ſit ſpatium menſurabile, & AFM rectangulum ipſi AGL circumſcriptum; erit tubus ex hoc rectangulo circa HK rotato ad ſolidum ex AGL circa eandem, in ratione rectanguli circumſcripti ad ſpatium AGL; cujus ideo ſolidi datur ratio ad cylindrum, cum ſpatii AGL ad rectangulum circumſcriptum ratio ſit nota ex hypotheſi.

Coroll. II. Cum autem, juxta Cor. I. §. 18. Cap. præc. ex quâlibet curvâ infinita curvilinea cognitæ magnitudinis ortum ducant, per hanc infinita ergo ſolida quorum ratio ad cylindrum nota erit, ex ſingulis curvis, juxta præc. Coroll. exhiberi poterunt.

§. 38. Neſcio anoperæ ſit pretium hic aperire fontes, qui Mathematicorum libros immenſâ theorematum ſerie jam olim inundaverunt; cum cuilibet per præcedentia ſatis innoteſcant. In tyronum tamen gratiam unum aut alterum ſpecimen addo.

Datum (*Fig. LXVI.*) ſpatium BDC (cujus applicata $FE: y$) rotetur circa rectam TAS, ipſi FE normalem; voceturq. $AE: d$, ſolidum ea rotatione genitum juxta §. 20. explicabitur per omnium quadratorum in FA & EA conſtitutorum differentias, ſeu omnia

$\frac{2dyc+yyc}{2r}$, ſi vero in baſi BCD elevetur cylindricus, cujus altitudo FK vocetur b, & qui ſecetur plano HA per TAS tranſeunti, ita ut AG ſit: b, truncus inferior algebraicè exponetur juxta §. 5. per omnia trapezia $PFEQ$ ſeu omnia $\frac{2dyb+yyb}{2b}$; qui truncus ergo erit ad ſolidum rotatione genitum, ut omnia $\frac{2dyb+yyb}{2b}$ ad omnia $\frac{2dyc+yyc}{2r}$, hoc eſt, ut b ſeu altitudo cylindrici ad $\frac{bc}{r}$ ſeu circumferentiam in radio GA ſeu b: vel poſito $b=b$, aut angulo HAG ſemirecto, ut r ad c, ſeu ut radius circuli ad peripheriam.

§. 39. Hinc aſſumto, in Figura LXVII. ſpatio altero DBC; cæteriſque, quæ tum rotationem tum trunci ſectionem ſpectant, factis, ut in præcedenti; vocentur $AE: z$, $FE: x$, altitudo $FK: s$, $GA: g$; erit juxta præcedentem truncus inferior ad ſolidum tubulatum ut omnia $\frac{2zxs+xxs}{2g}$ ad omnia $\frac{2zxc+xxc}{2r}$, ſeu ut s ad $\frac{gc}{r}$; unde, vocato trunco in *Fig. LXVI*: t, in *Fig. LXVII*: p, ſolido rotundo in *Fig. LXVI*: f, in *Fig. LXVII*: l, factoque $\frac{bc}{r}=q$

$\frac{gc}{}$

$\frac{gc}{r} = n$, erit juxta §. 38. $t:f :: h:q$. & quoque $p:l :: s:n$; unde ſolidorum quorumvis annularium ratio $f:l :: \frac{qt}{h} : \frac{pn}{s} :: \frac{bt}{b} : \frac{gp}{s}$; truncorum autem ratio $t:p :: \frac{hf}{q} : \frac{ls}{n} :: \frac{hf}{b} : \frac{ls}{g}$; quæ fuſius demonſtrata apud alios videantur.

§. 40. Reaſſumto ſchemate XLII. ac ſymbolis, tum §. 24. tum §. 37. Cap. II. adhibitis, oportet ſolidum rotundum verb. gr. ex curvilineo AZP circa AP rotato genitum efformare, quod æquale eſt, ſolido cuicunque rotundo per quamlibet expreſſionem analyticam deſignato.

Caſus, ubi ſolidum datum mediantibus rectis, ad curvilineum cognitum APE pertinentibus, explicatur. Sit ergo deſcribendum, poſito $\mathcal{Q}3 = h$, ſolidum ex APZ circa AP rotato (ſeu, juxta §. 18. omnia $\frac{chhe}{2r}$) æquale cono, ex triangulo $TD\mathcal{Q}$ circa TP rotato, ſeu $\frac{cyyt}{6r}$; erit ex §. 13. Cap. II. omnia $\frac{chhe}{2r}$ = omnib. $\frac{cyye + cyyi + 2ctya}{6r}$ ſeu terminis ipſius $\frac{cyyt}{2r}$ infiniteſimalibus, adeoque, diviſione facta per $\frac{c}{2r}$ erit $3hhe = yye + yyi + 2tya$;

$+ 2tya$; ex qua æquatione ejectis, methodo §. 31. Cap. II. traditâ, infiniteſimis, ipſa h per lineas cognitas deſignabitur, calculum hic omitto, cum poſt Cap. II. §. 31. & 37. ritè intellectas ſponte ſequatur.

§. 41. Neque ſemper requiritur, ut curvilineum quæſitum ad AP applicetur; verum & ad quaſcunque rectas curvam ADE ſpectantes ordinari poteſt.

Quæratur, exempli gratiâ, curvilineum $A8FB$ ad tangentis abſciſſam AB applicatum, quod rotatione ſui circa eandem AB efficiat ſolidum æquale cono modo expoſito $\frac{cyyt}{2r}$; poſitâ $T8 = h$, ac $BT = i$, erit hoc ſolidum $= \text{omn.} \frac{chhi}{2r}$, juxta §. 18, adeoque ſumendo ipſius $\frac{cyyt}{2r}$ partes infiniteſimas, ac diviſione per $\frac{c}{2r}$ inſtitutâ, erit $3hhi = yye + yyi + 2tya$; unde ad modum Cap. II. §. 31. & 38. eliminatis infiniteſimis, applicata h innoteſcet; quæ ordinariâ methodo ad interceptam AT reducta, curvilinei $A8FB$ æquationem exhibebit.

Simile in Figuris planis exemplum Cap. II. §. 38. ſuppeditat.

§. 42. Quin & eadem, quam in Figuris planis Cap. II. §. 39. demonſtravimus, etiam in ſolidis generalis methodus obtinet, retentis enim

enim inibi assumtis symbolis quæratur solidum, ex APZ circa AP rotato æquale cylindro, cujus basis est circulus radio 24 seu f descriptus, ac altitudo 25 seu z, erunt omnia $\frac{hhce}{2r}$ æqualia $\frac{cffz}{2r}$; unde juxta Cap. II. §. 13. divisis omnibus per $\frac{c}{2r}$ erit $hhe = ff\mu + 2fz\theta$; jam cum juxta ibi tradita sit, $\theta = \frac{fe}{b}$ & $\mu = \frac{ze}{d}$ erit $hhe = \frac{ffze}{d} + \frac{2ffze}{b}$ & $hh = \frac{ffz}{d} + \frac{2ffz}{b}$;

Unde, f & z per quamlibet expressionem analyticam designatis, etiam h per eandem respectivè exprimetur.

Coroll. Hinc eâdem operâ constat ratio, dato cuilibet solido ffz ungulam truncumque æqualem constituendi; tum &, è converso, innumera solida rotunda ad cylindros, & truncos ungulasque ad cubos reducendi methodus.

§. 43. Quomodo jam, quæ §. 17. & 30. Cap. II. circa plana demonstravimus, etiam solidis accommodari queant, post levem attentionem in aperto est; assumta siquidem quâlibet hypothesi, $\frac{chhe}{2r} = \frac{czzs}{2r} = \frac{cffu}{2r} = \frac{cgga}{2r}$ &c. habebuntur, post ejectas secundum §. 31. Cap. II. infinitesimas, duo solida sibi mutuo æqualia.

Nec

Nec brevitati conſulentes integrum in ſingulis hiſce calculum adjungere operæ duximus pretium, principia tradidiſſe contenti; nec quomodo hæc ad ſolida annularia ſeu tubulata, & truncos ungulaſque referri queant, ulteriori hic diſcurſu proſequor; cum modo prægreſſa §. 42. generaliter hæc omnia comprehendat. Hinc enim datâ cujuslibet ſolidi deſignatione in terminis quibuscunque algebraicis, ſolidum tum rotundum, tum ad ungulas truncoſque pertinens exhiberi poteſt, cujus magnitudo per expoſitam expreſſionem analyticam eſt determinabilis; quin & non uno modo idem effici poſſe ex §. 41. manifeſtum eſt, cum pro variis, quibus ipſa *b* applicatur, infinitesimis conſtructio varia ſit. Quod, licet ſpiſſo ſatis volumini opulentam materiam exhibeat, num etiam ab aliis, qui ſatis prolixè alioquin ſolidorum ex Curvilineis ortorum proprietates deſcripſerunt, animadverſum ſit, neſcio.

CA-

CAPUT IV.

De superficierum, lineis Curvis insistentium, dimensionibus.

§. 1. IN expositio Curvilineo $ADEOA$, *Fig. LXVIII.* si erigatur Cylindricus, cujus altitudo $A\alpha : r$, vocenturque, ut in superioribus, $QP : e$, $DE : u$, constabit superficies curva cylindrici curvæ $ADEO$ normaliter insistens, propter basin infinitè polygonam, innumeris rectangulis $DE\delta E$ seu omnibus ru. ea vero, quæ insistit rectæ AO, omnibus seu totidem re; quare integra, demtis basibus, cylindrici superficies æquatur omnibus $ru + re$.

§. 2. Quod si cylindricus hic, *Fig. LXIX.* plano per CB transeunte in duos secetur truncos; ita ut CT sit : b, ac $TS : h$; constabit inferioris trunci superficies, quâ parte rectæ AO superstat, innumeris rectangulis $QIGP$; hoc est (cum appellato $QC : d$, $QP : e$, sit $QI : \frac{dh}{b}$) omnibus $\frac{dhe}{b}$; quâ vero parte superficies curvæ $ADEO$ insistit, constabit omnibus, trapeziis $DKNE$, hoc est (cum vocatis $QD : y$, $HE : a$, $DE : u$, $PE : y + a$, sit

ſit $DK = \frac{dh+yb}{b}$ & $EN = \frac{dh+yb+ah}{b}$) omnibus $\frac{2dhu+2yhu+ahu}{2b}$, hoc eſt, juxta lemnia 10. omnibus $\frac{dhu+yhu}{b}$, adeoq propter trianguli NKM nullitatem omnibus rectangulis $MEDK$.

§. 3. Quod ſi fiat $h=b$, & angulus TCS ideo ſemirectus, æquabitur trunci ſuperficies curvæ $ADEO$ inſiſtens omnibus $du+yu$.

§. 4. Sin autem non per BC, ſed per AO planum ſecans tranſeat, erit ungulæ plano $ADEOA$ inſiſtentis ſuperficies æqualis omnibus yu; hoc enim caſu QC ſeu d ex hypotheſi evaneſcit.

Coroll. I. Sit *Fig.* LXX. ſemicirculus AEO centro F deſcriptus, ac radio $FD:r$; erit ſuperficies ungulæ cylindrici per diametrum ſeminormaliter reſecti, retentis iisdem ſymbolis, juxta præcedentem æqualis omnibus yu; cum autem ſit $DF:DQ::DE:DH$, ſeu $r:y::u:e$. erunt omnia $yu=$ omnia re, hoc eſt, facto $AL=DF=r$, erit ungulæ ſuperficies æqualis rectangulo $ALMO$; adeoq. quadrabilis, tum integra, tum ſecundum partes proportionales, quod & in parabolâ obtinet, conſulatur Cor. III. §. 11. ſeq.

§. 5. No-

§. 5. Notetur, non requiri ut linea AO neceſſario ſit recta, factis enim, *Fig. LXXI.* $QC:z$, & $CD:y$, $ST:h$, $TC:b$, infiniteſimes $DE:u$, $QP:i$; planum ſecans per SC & CB tranſeat; erit ſuperficies trunci curvæ $ADEO$ inſiſtens æqualis omnibus $\frac{yhu}{b}$, illa vero, quæ curvam $AQPO$ pro baſi habet, æquatur omnibus $\frac{hzi}{b}$, juxta §. 2. hujus, adeoque tota trunci ſuperficies toti curvæ $ADEO$ PQA ſuperſtans æquabitur omnibus $\frac{hyu+hzi}{b}$.

§. 6. Patet hinc, poſitâ y curvæ cujuslibet applicatâ, ipſiuſque curvæ infiniteſimâ $= u$, ac b, h, r, d, lineis quibuſcunque determinatis; curvæ inſiſtentem ſuperficiem cylindricam in altitudine r deſignari per omnia ru; ſuperficiem ungulæ ſemiquadrantalis per omnia yu; ſuperficiem ungulæ cylindrici, ad angulum, quem ratio b ad h determinat, reſecti per omnia $\frac{hyu}{b}$; trunci ſuperficiem per omnia $\frac{hdu+hyu}{b}$ aut $du+yu$, prout angulus plani ſecantis vel ſemirectus vel alterius magnitudinis eſt, & ſic in cæteris, quod modo traditis ritè intellectis ſatis manifeſtum eſt.

De

De ſuperficiebus rotatione Genitis.

§. 7. REctangulum *ABEP Fig. LVIII.* diagonali *AE* diviſum, ſi rotetur circa axem *AP*, efficiet linea *BE* hac circumvolutione ſuperficiem cylindricam *BEINM*; & linea *AE* ſuperficiem conicam *EIMA*. Cujus utriuſque valor Analyticus ut indagetur, circuli *EIM* utriuſque baſin conſtituentis peripheria vocetur *c*; quæ ſi dividatur in partes infinitesimas, ut *GI*, quæ appellentur *u*, conſtabit ſuperficies cylindrica infinitis rectangulis *LOIG*, ſeu (vocata *AP* = *OI*: *d*) innumeris *du*; ideoque totius cylindri ſuperficies, juxta Cap. II. §. 13. æquabitur *dc*.

§. 8. Conica autem ſuperficies componetur infinitis triangulis iſoſcelibus *GAI*, quorum ſingula (vocatâ nimirum *AE* = *AI* = *AG*: *l*) erunt = $\frac{lu}{2}$, cum juxta lemni 33. ſint rectangula ob baſin *GI* infinite parvam, unde ſuperficies modo dicta æquabitur omnibus $\frac{lu}{2}$; erit que juxta Cap. II. §. 13. abſolutus ipſius valor = $\frac{lc}{2}$, ſeu triangulo rectangulo, cujus unum latus eſt latus trianguli per axem coni, alterum circumferentia circuli baſin conſtituentis.

§. 9. Ve-

§. 9. Verum & alius cylindricæ ſuperficiei valor hoc pacto inveſtigatur, non contemnendi uſus in hoc calculi genere. Cylindrus, *Fig. LXXII.* ex rectangulo *AOFB* circa *AO* rotato conſtat infinitis cylindrulis ex *QPED* circa *QP*, unde ſuperficies cylindri majoris ex infinitis ſuperficieculis cylindricis ex *DE* circa *QP* rotata genitis : talis autem ſuperficiecula, factâ *PE*: *p*, & *DE*: *e* infiniteſimâ rectæ *BF* ſeu *AO*, æquabitur $\frac{pec}{r}$, poſitâ radii ad circumferentiam ratione ut *r* ad *c*; unde tota cylindri ſuperficies erit æqualis omnibus $\frac{pec}{r}$, tam ſecundum converſionem integram, quam partialem.

§. 10. Conoides *Fig. LIX.* ex Figura *AFO* circa *AO* rotata, juxta 17. Cap. præc:, infinitis conſtat conis truncatis, ex trapeziis *QDPE* circa *QP* volutis; quorum ſingulorum ſuperficieculæ efficiuntur reſpectivis rectulis *DE* circa eandem *QP* rotatis ; unde patet omnes has conorum truncatorum ſuperficieculas ſimul ſumtas æquare ſuperficiem conoidicam ex omnibus rectulis *AD*, *DE*, *EF* &c. hoc eſt ex integrâ Curvâ *ADEF* circa *AO* rotatâ.

§. 11. Ut vero inveniatur ejus modi ſuperficieculæ valor, factis *DQ*: *y*, *TD*: *s*, cui tangenti ſit normalis *DR*: *k*, tum *EH*: *a*, *DE*: *u*,

$DE:u$, & ratione radii ad circumferentiam ut r ad c, erit circumferentia radio QD deſcripta $= \frac{cy}{r}$, quæ ducta in $\frac{1}{2}TD$ dat $\frac{cys}{2r}$ pro ſuperficie coni ex TDQ circa TQ rotati; uti ex prægreſſo §. 8. notum eſt. Eandem ob rationem ſuperficies coni ex triangulo TPE circa TP converſo æquabitur $\frac{cy+ca}{r}$ in $\frac{s+u}{2}$, ſeu (eliminatis per lemma, 10. rejectaneis) $\frac{cys+cyu+cas}{2r}$; unde ſi detrahas $\frac{cys}{2r}$, remanet coni truncati ſuperficies ex DE circa PQ $= \frac{csa+cyu}{2r}$.

Cum vero ob tangentem TD ſit perpetuo $yu = sa = ke$, erit ſingularum ſuperficiecularum valor $= \frac{cyu}{r} = \frac{csa}{r} = \frac{cke}{r}$; quare tota ſuperficies ex AFO circa AO rotata $=$ omnia $\frac{cyu}{r}$ $=$ omnia $\frac{csa}{r}$ $=$ omnia $\frac{cke}{r}$.

Coroll. I. Sit AEO *Fig. LXX.* ſemicirculus centro F deſcriptus, qui volvatur circa diametrum AO, quæritur hinc orta ſphæræ ſuperficies; vocatoq. radio $DF:r$, & $DQ:y$, æquabitur juxta modo inſinuata omnibus $\frac{cyu}{r}$ $=$ omnibus $\frac{cre}{r}$ $=$ omnibus ce; eſt enim

yu

$yu = re$, §. 4. Cor. I. ſed omnia ce efficient rectangulum $ALMO$, in quo, AO exiſtente circuli diametro, AL æquatur ipſi c ſeu peripheriæ; eſt autem hoc rectangulum $= 2rc = \frac{4rc}{2} =$ quadruplum majoris circuli in ſphærâ expoſita.

Coroll. II. Cum autem hoc æque in partibus analogis obtineat; ſuperficies ex ſegmento ADQ circa AQ rotato, facto $AQ: x$, æquabitur, ipſi cx, ſeu rectangulo ex AQ in circumferentiam integram maximi circuli in ſphæra.

Quod ſi deſiderentur circulus huic ſuperficiei æqualis, ſit radius: z, erit circulus $\frac{zzc}{2r} = cx$, adeoque $\sqrt{2rx} = AD = z =$ radius circuli quæſiti.

Coroll. III. Rotetur, *Fig.* LXXIII. linea parabolica ADE circa axem AP, vocenturq. $AQ: x$, $QD: y$, DF tangenti normalis: k, erit genita hinc ſuperficies ex præc. = omnia $\frac{cuy}{r} = \frac{cke}{r}$; quod ſi k ſeu DF applicetur ad QP ſeu e, adeoque ad AQ ſeu x, erit $\frac{1}{4}rr + rx = kk$; adeoque curva $SLCM$ erit eadem parabola & $SA = \frac{1}{4}r$; unde omnia ke ſeu ſpatium $ALMP$ cognitum eſt, &

æquale ſuperficiei ungulæ cylindrici in baſi APE per AP ſeminormaliter reſecti; vocetur hoc n, erit ideo ſuperficies conoidis parabolici $= \frac{cn}{r}$; cui æquatur circulus radio $\sqrt{2n}$ deſcriptus.

Coroll. IV. Eodem modo res in cæteris curvis peragitur; ſi ADE ſit hyperbola (cujus æquatio $2rx+xx=yy$) erit k ad hyperbolæ alterius ſegmentum $ALMP$, cujus æquatio $rr+4rx+2xx=kk$; ſit hoc ſegmentum $= n$; erit $\sqrt{2n}$, radius circuli æqualis ſuperficiei conoidis hyperbolici.

§. 12. Quod ſi rotationis axis LM, *Fig. LXX.* ſit extra Figuræ $ADEO$ ambitum; factâ $QN: d$, determinatâ; $QD: y$, & $DE: u$, conſtabit ſuperficies ex curva $ADEO$ circa LM converſa, omnibus, $\frac{duc+yuc}{r}$; quod coincidentem DE ultra T producendo, donec cum LM concurrat, ac eodem cum §. 11. calculo patefiet.

§. 13. Si vero inquiratur, *Fig. LXXI.*, ſuperficies ex integrâ Figuræ $ADEOPQA$ peripheriâ circa BC rotatâ, ſint infiniteſimæ $DE: u$, $QP: i$, rectæ $CD: y$, $QC: z$, erit eadem

eadem æqualis omnibus $\frac{yuc+zic}{r}$, conſequentiæ ratio jam ſæpius inculcata eſt.

§. 14. Plurima hinc in modum §. 38. & 39. Cap. præc. deduci poſſent; cum, juxta §. 2. hujus, ſuperficies trunci inferioris cylindrici in altitudine ST ſeu h, per planum BC (ita ut TC ſit $= b$) reſecti conſtet omnibus $\frac{yuh+zih}{b}$ & ſuperficies ex perimetro $ADEOPQA$ circa BC rotatâ ſit æqualis omnibus $\frac{yuc+zic}{r}$ per præced; erit illa ſuperficies trunci ad hanc ut omnia $\frac{yuh+zih}{b}$ ad omnia $\frac{yuc+zic}{r}$ ſeu ut h ad $\frac{bc}{r}$.

Unde in truncorum ac ſolidorum rotatione genitorum ſuperficiebus idem obtinet ac in eorum ſolidis. Conferantur hæc cum §. 38, 39. Cap. præcedent.

§. 15. Cæteræ vero, quæ ordinario circumferuntur propoſitiones, facili hinc negotio eruuntur. Reſumtis enim ſchematibus *XXXIX* & *XL* ac ſymbolis §. 17. Cap. II. cum ſuperficies conoidalis ex curva $ADE\,F$ circa AO converſa ſit, juxta §. 11. hujus, æqualis omnibus $\frac{cuy}{r} =$ omnib. $\frac{csa}{r} =$ omnib. $\frac{ckc}{r}$; erit *Primo*, ut r ad c ſeu

ſeu radius ad circumferentiam ita omnia uy ſeu ſuperficies curva ungulæ cylindrici plano AFO inſiſtentis ac per AO ſeminormaliter reſecti, juxta 4 hujus, ad omnia $\frac{cuy}{r}$ ſeu ſuperficiem conoidalem ex $ADEF$ circa AO.

Secundo, poſitâ $ADEF$ in directum, ut ſit $DQ = \delta x = y$, $DE = \delta i = u$, planum $\alpha\varphi$. æquale omnibus uy; & poſitâ DT ſeu s continuo in IM, erit FKO æqualis omnibus sa; nec non, DR conſtitutâ ſemper in QC, Figura ASO æquabitur omnibus ke. Unde generaliter: ut r ad c, ſeu radius ad peripheriam, ita quodlibet ex planis $\alpha\varphi$, FKO ASO ſeu omnia uy, aut $\int a$, aut ke, ad ſuperficiem conoidalem ex $ADEF$ circa AO, hoc eſt omnia $\frac{cuy}{r}$ ſeu $\frac{csa}{r}$ ſeu $\frac{cke}{r}$.

§. 16. Hoc addam; ſi Conöidalis ſuperficies per omnia $\frac{kec}{r}$ explicetur; & figuræ AFO circum ſcribatur rectangulum $AVFO$, ac fiat $AV = p$; fore omnia $\frac{pec}{r}$ ſeu ſuperficiem cylindricam rectanguli $AVFO$ circa AO rotatione genitam ad omnia $\frac{kec}{r}$ ſeu ſuperficiem conoidalem ex AFO circa AO volutâ productam, ut omnia pe ad omnia ke, ſeu ut rec-

rectangulum, $AVFO$ ad planum ASO.

§. 17. Quo vero pacto immenſa propoſitionum meſſis hinc colligatur, hoc exemplo tyronibus aperire liceat. Retentis ſymbolis, vocentur AQ, cui æqualis $DX: x$, & $AO: q$; fiatque juxta ſæpius jam inculcata $t: s :: e: u :: p: z$, unde $ze = pu$. Facto ergo conſtanter $QC = z$, erit planum $ASO =$ omnia ze; ſi autem p & e in analogiſmo ſint quantitates permanentes ac immutabiles, quïa fuit ut $p: z :: e: u$. Erit & $pe: ze :: e: u$; &, ductis conſequentibus in $\frac{cx}{r}$, ut $pe: \frac{zexc}{r} :: e, \frac{xuc}{r}$, hoc eſt ut rectangulum $AVFO$ ſeu omnia pe, ad ſolidum ex ASO circa VG rotato ſeu omnia $\frac{zexc}{r}$, (§. 26. Cap. III.) ita omnia e ſeu recta AO ad omn. $\frac{xuc}{r}$ ſeu ſuperficiem conoidalem ex AEF circa VG rotatâ, ex §. 11. hujus. Quod ſi antecedentes in idem $\frac{cx}{r}$ ducantur erit $\frac{pexc}{r} : \frac{zexc}{r} :: \frac{exc}{r} : \frac{xuc}{r}$, hoc eſt, ut cylindrus ex $AVFO$ circa VG, ſeu omnia $\frac{pexc}{r}$, ad ſolidum ex ASO circa eandem GV, ſeu omnia $\frac{zexc}{r}$, ita omnia $\frac{xec}{r}$ ſeu $\frac{qqc}{2r}$, (quia omnia $xe = \frac{1}{2}qq$.) ſeu

ſeu circulus in radio AO ſeu q ad ſuperficiem conoidalem ex AEF circa VG ſeu omnia $\frac{xuc}{r}$, quod ablatâ per diviſionem ratione $\frac{c}{r}$ ad ungularum truncorumque ſuperficies tranſferri poteſt: ſed hæc omitto.

§. 18. Cum igitur, juxta §. 37. Coroll. II. Cap. III. infinitorum numero ſolidorum ratio ad cylindrum nota ſit, per hanc præcedentem quoque infinitarum numero ſuperficierum conöidicarum ad circulum ratio innoteſcet, ſi ex data curva ACS inveniri poſit æquatio curvæ AEF.

§. 19. Reſumtâ *Fig. XI.* ſit $QD: y$, $AQ: x$, ſubnormalis $QS: l$; erit circulus radio DQ deſcriptus $= \frac{yyc}{2r}$, cui oportet ſuperficiem conöidicam æqualem ex curvæ ANK circa eundem axem AP rotatione genitam, aſſignare. Sit eum in finem $QN: f$, tangens $NL: k$, ſubtangens $LQ: h$, curvæ normalis $NS: n$, infiniteſima $NK: o$, erit juxta §. 11. dicta ſuperficies $=$ omnia $\frac{foc}{r}$; quæ æquanda eſt circulo $\frac{yyc}{2r}$ $=$ omnia $\frac{yac}{r}$ ex §. 13. Cap. II. adeoque, diviſis omnibus per $\frac{c}{r}$, fiet. $fo = ya$; ſed, quia $h: k::$

$h : k :: e : o$, est $o = \frac{ke}{h}$; tum etiam est $ya = le$, adeoque $\frac{fke}{h} = le$ & $l = \frac{fk}{h} = n$.

Unde hic consequitur canon: Si duarum curvarum ADE & ANK, ad eundem axem AP ordinatarum, ea sit relatio, ut illius subnormalis QS hujus normali NS perpetuo adæquetur, erit superficies ex hujus curvæ ANK rotatione circa axem AP genita, semper æqualis circulo, qui applicatâ DQ alterius curvæ, tanquam radio, describitur.

Coroll. I. Sit QN ad circulum, cujus æquatio $2rx - xx = ff$; & QD ad parabolam, cujus æquatio $2rx = yy$; erit pars superficiei sphæricæ semper æqualis circulo, qui applicatâ parabolæ in eodem axis puncto Q, tanquam radio, descriptus est seu $= \frac{yyc}{2r} = cx$; unde posito $x = 2r$ erit integra superficies $= 2rc =$ quadruplum circuli maximi in sphæra, cujus radius r, peripheria: c; cum inter circulum hunc & parabolam requisita relatio obtineat.

Coroll. II. Patet hinc, datâ methodo subnormalium inversâ, dari omnium superficierum conoidicarum ad circulos reductionem.

Cor. III. Posset & hoc principio subnormalem NS per x expressam in seriem resolvendo non pau-

paucarum ſuperficierum ratio ad circulum (in praxi ſatis accuratè) determinari.

Schol. Licet autem de planis & ſolidis tractantes methodum tradiderimus, dato cuilibet plano ſolidoque per analyticam quamcunque expreſſionem deſignato, curvilineum, truncumq. æqualem exhibendi, problema hoc circa ſuperficies non æque feliciter ſolvitur, hâc quidem de cauſâ, quod methodum normalium ſeu, quod eodem recidit, tangentium inverſam requirat; potuiſſetque ſuperficierum, quæ corpora conica determinant, tractatio ulterius longè extendi; cum modis variis, præter jam recenſitos, formari, adeoque menſurationis ſuæ diverſa à modo traditis principia admittere poſſint: cum tamen ex eodem cum præcedentibus fundamento originem ducant, juxta quod curvilinea tanquam infinitorum laterum polygona conſiderantur, ſpecialem magis horum inquiſitionem curioſorum ſtudio relinquimus. Elegans exemplum ſuppeditat Erudit. *Barrovii* Lect. XII. appendicula II.

CA-

CAPUT V.

De Curvarum dimensionibus.

§. I. EX lemmate 26. curva *ADEF Fig. XXXIX.* constat rectulis infinitis, *FE*, *ED*, &c. simul sumtis, seu omnibus u; quorum valor ut reperiatur, manentibus §. 17. Cap. II. symbolis, noti sunt, propter tangentem *TD*, eique normalem *DR*, sequentes analogismi, qui exhibent $u = \frac{ke}{y} = \frac{se}{t} = \frac{te+le}{s} = \frac{sa}{y} = \frac{ka}{t} = \frac{ta+la}{k}$.

§. 2 Hinc ergo curva *ADEF*, seu omnia u, æquantur omnibus $\frac{ke}{y}$, cum sit $y : k :: e : u$; unde, cum e sibi semper æqualis supponi possit, si & y talis foret, esset ut omnia y ad omnia k ita omnia e ad curvam seu omnia u. hæc autem immutabilitatis conditio cum in denominatore y desideretur, factâ r determinatâ, fiat $\frac{ze}{r} = \frac{ke}{y}$ unde $\frac{ze}{r} = u$, jam positâ z in *QC* ad curvam *ACBS*, erit, factâ $AG = r$, ut omnia r seu rectangulum *AGSO* ad omnia z seu spatium *ASO*, ita omnia e seu axis *AO* ad omnia u seu curvam *ADEF*. Noscitur autem

tem

tem locus ipſius z ex Curvæ $ADEF$ relatione cognita & r determinatâ. Quare dato ſpatio $ABSO$ ſeu omnibus z datur curvæ $ADEF$ ratio ad axem ſuum AO.

Notari poteſt, quia $ze = ru$, fore $\frac{ze}{r} = u$; hoc eſt, curvam ſeu omnia u, æquari ſpatio ASO per r determinatam diviſo, ſeu $\frac{\text{omnibus } ze}{r}$.

Coroll. 1. Quo vero hac methodo indagetur, num paraboliformium quædam ad menſuram poſſit revocari, ſit curvæ $ADEF$ æquatio $rp - qxq = yp$, erit ex tangentium methodo TQ ſeu $t = \frac{px}{q}$, unde QR ſeu $l = \frac{qyy}{px}$, & kk ſeu quadratum $DR = yy + \frac{qqyy}{ppxx}$: Jam vero, cum ſit $kk : yy :: zz : rr$, erit, poſito pro kk in vento valore, ac eliſo yy per æquationem curvæ, hæcce curvæ ASO proprietas $zz - rr$ in $\frac{pp}{qq}r^{\frac{2q-4p}{p}} = x^{\frac{2q-2p}{p}}$;

unde ſi dimenſiones ipſius x ſint $\frac{1}{f}$, erit curvilineum ASO ex Cap. II. §. 11. Coroll. ſemper menſurabile; fiat ergo $\frac{2q-2p}{p} = \frac{1}{f}$, erit

erit $q = \frac{p + 2pf}{2f}$, & $q : p :: \frac{2pf + p}{2f} : p :: 2f + 1 : 2f$, seu ut numerus impar ad numerum proximè minorem. Observetur, cum q hic major sit ipsâ p, semper r adhæsuram ipsi y; sed hæc nihil habent difficultatis.

Coroll. II. Sit *Fig. LXXIV.* cyclöis (cujus dimensionem hisce cognatam hic adjungo) primaria $ADEG$, cujus axis $AF : 2r$, ACF semicirculus genitor, vocenturq. $AQ : x$, $QC : y$, $CF : h$, $DB : s$, quæ cycloidi normalis est, & $DQ : f$, $DE : u$, $DH : e$; erit ex §. 60. Cap. I. $s : f :: h : y :: u : e :: z : r$, unde omnia $ru =$ omnia ze; ponatur z in QS, donec descripta sit curva LSI; cujus ut noscatur relatio, fuit $h : y :: z : r$, $:: AC : AQ$, seu $2rx : xx :: zz : rr$, unde $2r^3 = zzx$. Quare curva ISL ex hyperboliformibus una est & juxta Cap. II. §. 11. Coroll. 2. curvilineum $KAFLI$ seu omnia ze æquale $4rr$; adeoque omnia u, seu $\frac{\text{omnia } ze}{r}$, seu curva cycloidis $= 4r$, hoc est duplo diametri circuli genitoris. Observetur hic, cum $KAQI$ seu quælibet pars spatii hyperbolöidis cognita sit, etiam AD seu quamlibet curvæ partem hoc ipso notam esse.

§. 3. Addam & hoc a pluribus animadversum, cum absque lemmatum auxilio immediatè

tè ex hoc calculo profluat. Sit *Fig. LXXV.* curva ADEF, eademque, quæ in §. 1, linearum ſymbola, erat $y:k::r:z::e:u$, unde $ze = ru$, quæritur jam (ſi z ponatur in QC ad ſpatium curvæ $BCNG$ ex hypotheſi quadrabile) curvæ ADEF, quæ idcirco, ex §. 1. in rectam eſt mutabilis, proprietas; aut applicatæ DQ ſeu y ad AQ ſeu x relatio; cum itaque ſit $y:k::r:z$, erit & $yy:kk-yy::rr:zz-rr$, &, facto $zz-rr=ff$, erit quoque $y:l::r:f::e:a$, unde $fe=ra$; poſitis ergo f in QX, & r in IM, eſt curvilineum $AXXO$ = omnia fe, & rectangulum FKLO = omnia ra, quæ æquantur rectangulo dicto ry; quare DQ ſeu $y = \frac{\text{omnia } fe}{r} = \frac{\text{ſpat. } AXXO}{r}$. Unde ſtatim apparet ſequens theorema: data Figura quadtabili $ABGO$, cujus applicata QC ſeu z, ad eundem axem applicetur ſecunda Figura $AXXO$, cujus applicata QX ſeu f; ita tamen, ut ſit perpetuo $zz-rr=ff$; ſi deinde aſſumatur tertia Figura AFO, cujus applicata DQ ſeu y, ejus naturæ, ut ducta determinata r in applicatam quamlibet DQ ſeu y, ſit continuo rectangulum ry æquale ſpatio curvilineo adjacenti. $AXXQ$ ſeu omnibus fe, erit curva ADEF in rectam convertibilis, &

æqua-

æqualis spatio primo assumto *ABGO* diviso per *r* determinatam.

Coroll. I. Sit *ABGO* trapezium parabolicum, & $zz = rr + rx$, erit $ff = rx$, & *AXXO* parabola, quæ, juxta Cap. II. §. 11. Cor. I, est mensurabilis & æqualis $\frac{2}{3}\sqrt{rx^3} =$ omnia *fe*. Cum autem sint omnia $fe = ry$, erit $\frac{2}{3}\sqrt{rx^3} = ry$, & $x^3 = \frac{9}{4}ryy$, quæ est æquatio curvæ *ADEF*.

Coroll. II. Hoc notetur, cum sit $ru = ze$ in quavis curvâ, datâ omnium curvilineorum quadratura, verb. gr. omnium *ze*, dari omnium curvarum longitudines seu omnia *u*.

§. 4. Hunc in modum, assumto quolibet omnium *u* valore, proceditur; ex. gr. sit $u = \frac{ka}{l}$; fiatque, si *l* seu *QR* Fig. XXXIX. sit quantitas mutabilis, $\frac{k}{l} = \frac{z}{r}$; erunt omnia $u =$ omnia $\frac{za}{r}$, hoc est, posito *z* continuo in *IM*, spatium spatium *FOK* seu omnia *za* divisum per determinatam *r*, æquale omnibus *u* seu curvæ *ADF*.

Quin & cum sit $za = ru$ erit spatium *FOK* æquale rectangulo $\alpha\mu\circ\varphi$, *Fig.* XL. cujus alterum latus $\alpha\varphi$ curvæ, alterum $\varphi\circ$ determinatæ *r* æquatur.

Quod

Quod ad quoſlibet omnium u valores §. 1. recenſios quivis juxta ſuperiorum normam accommodabit.

§. 5. Quo vero modo hæc methodus curvis, tum verſus axem concavis applicari queat; tum & quo pacto, ſi curva non ad axem, ſed ad punctum referatur, hæc tractanda ſint; præcedentia intelligenti ſatis manifeſtum eſt.

In exemplum, repetatur *Fig. XLVIII.* ſitque $DVSP$ eadem ſpiralis, quam Cap. II. prop. XLIX. Cor. 2. diſcuſſimus, talis nimirum, quæ circuli radios BD ad eundem ſemper angulum ſecat; fiatque $SH = u$, tum vocatis $SF: s$, $SD: z$, $HI: a$, curvâ $DVS: c$, factâque conſtanti ratione ipſius u ad a eâ quæ eſt b ad q, erit perpetuo $qu = ba$; quæ ad terminos abſolutos per Cap. II. §. 13. reducta dabunt $qc = bz$; ſed $b: q :: s: z$, ergo $qs = br = qc$, adeoque $s = c$, quod ſi c extendatur ad infinitam ſpiralem, erit $GP = s$; unde infinita hæc ſpiralis ipſi GP ſpiralem in puncto P tangenti adæquatur.

§. 6. Sit *Fig. LXXVI.* curva $AZXDE$ conſtans infinitis rectulis ED, DX, XZ, &c. ſeu totidem u, quam contingat recta BD in E; ipſæ autem curvam conſtituentes infiniteſimæ productæ axem BA interſecent in punctes T, M, N, R, &c. aſſumaturque $EO = DE$; item $VO = DI =$

$DI = DX$; ut & $SV = 3, 1, = 2X = XZ$; continuando hoc modo, donec tandem ultima KI facta sit $= 7, 8, = 9, 6, = 10, 5, = 11, 4, = A4$. Porro in triangulo BET, ductâ CT, fiat $CE = TE$; item in triangulo TDM ducta $M, 12$, fiat $D, 12, = DM$; sit & in triangulo MXN ducta $N, 14$, fiat $X, 14, = XN$; & sic in cæteris. Tandem factâ $LC = T, 12$, nec non $LF = 12, 13, = M, 14$, in reliquis idem continuetur, donec fiat ultima, $GI = 15, 8, = 16, 9, = 17, 10 = R\ 11$. vocatisq. BT, TM, MN, semper: i; & BC, ac $T\ 12$, ut & $M, 14$, perpetim λ; sequentes se pandent proprietates.

I. Recta EI æquabitur curvæ ADE: cum IK & $A4$, KS & $Z4$, SV & ZX &c. continuo ex hypothesi æquentur, & ex partium æqualitate totorum æqualitas legitime inferatur, quare & recta EI erit $=$ omnibus u, seu curvæ ADE.

II. Recta BA, hoc est $BT+TM+MN$ &c. æquabitur omnibus i.

III. Recta BI mensurabitur per omnia λ.

IV. Adeoque integra tangens BE æqualis erit omnibus, $u+\lambda$, & quia omnia u æquantur curvæ ADE, erit recta BE æqualis curvæ $ADE+$ omnibus λ seu rectæ BI.

V. Cum autem lineolæ $A, 11; 11, 10; 10, 9; 9;$

9; 9, 8; 8, 1; pariter ſint infiniteſimæ angulos perpetuo in 8, 9, 10, 11, facientes, notum eſt eas omnes in lineam curvam *AI* deſinere, quæ in eandem partem ac curva *ADE* concava eſt; cujuſque hæc eſt proprietas: ut quælibet recta *EI*, *D*, 8, *X*, 9, &c. curvam *ADE* contingens huic ſit ad angulos rectos, & contra.

Cum enim ex hypotheſi *D*, 8, & *D*, 9, ſint æquales, & 8, 9, infiniteſima, erunt ex lemmate 33. angulo *D*, 8, 9, & *D*, 9, 8, recti, unde conſequitur propoſitum.

VI. Quod etiam *RG*, *NF*, *K*4, *ZS* &c. curvæ ſint modo dictam habentes relationem ad curvam *ADE*, eodem modo demonſtratur.

§. 7. Unde hoc tandem oritur theorema ſi ab eodem principio *A* duæ egrediantur Curvæ *AI* & *AE*, in eandem partem concavæ, ita ad ſe invicem relatæ, ut, quæ interiorem *AE* tangit recta, verb. *D*, 8, ſit exteriori *AI* ſemper ad angulos rectos, erit *D*, 8, pars tangentis inter duas curvas intercepta perpetuo æqualis curvæ *A X D* inter punctum contingentiæ *D*, & principium commune *A* interjectæ.

Eſt enim *D X* = *D* 1, tum *X Z* = 3, 1, ac *Z*, 4 = 3, 7, &c. ex modo aſſumtis; unde liquet intentum.

§. 8. Hoc notetur, (quod inter præcedentia jam attigimus) ſi curva *ADE* ſit verſus axem

axem AQ concava, *Fig. LXXVI.* rectas TD & BE curvam in punctis successivè ab axe remotioribus tangentes, utroque sui extremo crescere; altero quidem per infinitesimam OE seu u altero per BC seu λ; unde facta $TD = s$, erit tangens proxima $BE = s + u + \lambda$; est enim $CO = TD$ per superiora. Si vero fuerit curva ADE (*Fig. LXXIX.*) versus axem convexa, tangentes, altero sui extremo, quo curvam tangunt, crescere, per u seu OE; altero vero, quo axem intersecant, decrescere per TC seu λ. Hoc est, si TD sit $= s$; erit $BE = s + u - \lambda$, est enim $BO = CD$ per anteriora.

Nec opus est addere, si rectæ curvas in punctis ad axem successivè appropinquantibus, tangant, futurum ut, positâ $BE = s$, sit $TD = s - u - \lambda$ in priori, sed $s - u + \lambda$ in posteriori casu.

§. 9. Cum autem omnis curvarum in rectas mutatio in eo sita sit, ut inveniatur summa omnium u, seu longitudo rectæ IE; hinc sese offerunt methodi, à prioribus, quas §. 1, 2, &c. recensuimus, diversæ: verb. gr. Sit *Fig. LXXVI.* DQ applicata $= y$, ac eadem, quæ in superioribus, symbola; est, uti notum est, $TD : DQ :: DE : EH$, seu $s : y :: u : a$, unde semper $yu = sa$.

Ut jam hinc longitudo curvæ ADE indagetur: describatur, *Fig. LXXVII.* curva secunda MNI, cujus applicata NO sit $= DQ = y$, in-

infinitesima $OE = u$, erit $GI = EH = a$; adeoque $EI = y + a$, & curvilineum $MIE =$ omnia yu; cum autem sit ex hypothesi, $a : u :: y : s$. seu $IG : GN :: NO : OC$, erit OC hujus curvæ tangentem determinans æqualis ipsi $OC = DT$ in *LXXVI* Figurâ, seu s, & $BC = \lambda$: adeoque BE, *Fig. LXXVI* & *LXXVII.* quæ tangens est in curvâ ADE, erit subtangens in curvâ secundâ MNI, ac $ME =$ omnia $u =$ curva ADE; & $BM =$ omnia λ; unde, si posset inveniri relatio curvæ MNI ad axem ME, ex datâ applicatâ $NO = y$, & subtangenti $CO = s$, quæ lineæ TD curvam ADE tangenti æqualis est; inventa esset recta ME æqualis curvæ ADE.

Quare omnis curvarum mensura ad methodum tangentium inversam, seu ad hoc problema reducitur: datâ *Fig.* LXXVII. curvæ applicatâ NO & subtangenti CO, invenire æquationem, quâ curva MNI mediante applicata ad axem suum MO refertur.

Schol. I. Quomodo autem tangentium inversa methodus cum fructu in geometriâ tractari queat, si CO in terminis proximis data sit, cap. de tang. §. 93. & seqq. ostensum est; unde hoc solum ad curvarum rectificationem restat, ut valor lineæ CO, datus in terminis applicatam y respicientibus, seu remotis, ad terminos

minos proximos ad interceptam MO juxta ac applicatam NO relativos reducatur.

Schol. II. Datâ vero curvilineorum quadraturâ. quo pacto methodus tangentium inversa inter cognita redigi possit, hic in tyronum gratiam ostendam, licet loco forsan minus opportuno.

Quæritur ergo *Fig.* XXXIX. æquatio curvæ ADE, cujus applicata $DQ = IO$ sit y, & TQ subtangens seu t sit $= \frac{2y^3}{3rr}$.

Vocatis, QP seu $DH : e$, & $EH : a$, ut semper, fiat. $t : y :: e : a :: z : r$, ac sit r determinata, erit $za = re$; quare applicata constanter z, in IM ad a, ut fiat curvilineum IMO æquale omnibus za, applicetur r ad e in QZ, ut fiat rectangulum $AGZQ$ æquale omnibus re. Hinc si AQ vocetur x, erunt omnia $re = rx$ ex Cap. II. §. 13. adeoque $rx =$ omnia $za =$ spatium IMO, sed t seu $\frac{2y^3}{3rr} : y :: z : r$, unde $3rz = 2yy$, & $z = \frac{2yy}{3r}$, ad complementum parabolæ FOK; quod juxta præcedentia quadrabile est & $= \frac{1}{3}zy$; sed, per modo assumta, omnia za seu $\frac{1}{3}zy$ æquatur omnibus re seu rx, quare $z = \frac{3rx}{y} = \frac{2yy}{3r}$, unde

unde tandem $9rrx = 2y^3$, quæ curvæ ADE æquatio quæſita eſt.

Quod autem ex hoc æquatione rurſum prodeat TQ ſeu $t = \frac{2y^3}{3rr}$ jam abunde notum eſt. Neque hanc methodum ſemper obtinere, modo modo omnia za ſeu ſpatium FKO quadrabile ſit, ulteriori demonſtrationum apparatu indiget.

§. 10. Alia curvarum longitudines explorandi methodus hoc nititur fundamento; quod ſcilicet, *Fig. LXXVIII.* integra tangens BE ſit æqualis omnibus $u+$ omnibus λ, hoc eſt curvæ $ADE +$ omnibus λ, uti §. 6. N°. IV. demonſtratum fuit. Unde, quia datâ curvâ ADE datur tangens BE, ſi darentur omnia λ, darentur omnia u ſeu longitudo curvæ.

Ut ergo indagentur omnia λ (vocatis, $TD:s$, $TQ:t$, $DQ:y$, infinitefimis $QP:e$, $EO = ED:u$, $BT:i$, $BC:\lambda$,) quia TC eſt normalis ipſi BE, eſt $BE:BP::BT:BC$; hoc eſt $s+u+\lambda : t+e+i :: i:\lambda$; quare, rejectis rejiciendis, fiet $s\lambda = ti$; unde $s:t::i:\lambda$, ſit hoc ut determinata r ad z, erit $r\lambda = zi$.

Unde poſita z in TG, donec formetur curvilineum AFB; erit hoc æquale omnibus zi, quod æquale eſt omnibus $r\lambda$, unde $\frac{Omn.\ zi}{r} = Spat.$

$= \frac{\text{Spat. } AFB}{r} =$ omnia λ.

Quæ si subtrahantur ex tangenti BE relinquentur juxta modo tradita omnia u, seu longitudo curvæ ADE.

Coroll. I. Unde, si omnia zi seu spatium AFB sit quadrabile, erit curva ADE in rectam mutabilis. Quare denuo ex curvilineorum omnium quadraturâ curvarum omnium longitudo data erit: exempla quilibet indagâre potest.

Coroll. II. Hoc addo, modum hinc non ita vulgarem derivari, quo ex dato quolibet curvilineo mensurabili AFB inveniri potest curva ADE, quæ longitudinis suæ mensuram patitur. Sit $AT: x$, $GT: z$, ac AGF quælibet curva, cujus spatium AFB mensurabile est, verb. gr. parabola, unde erit $rx = zz$, & juxta præcedentia spatium $AFB = \frac{2}{3}\sqrt{rx^3} =$ omnia zi; quocirca omnia $\lambda = \frac{\text{Spat. } AFB}{r} = \sqrt{\frac{4x^3}{9r}} =$ omnia $r\lambda$.

Jam vero, ut curvæ ADE æquatio ex hisce datis investigetur, & longitudo tangentis DT; cum sit $s: t :: r: z$, hoc est $DT: TQ :: r: GT$, eò deductum est hoc problema, ut invenienda restet curva ADE, cujus tangens

gens DT ad ſubtangentem TQ eam ſemper habeat rationem, quam r ad z.

Hoc autem, juxta tradita §. 101. Cap. de tang: effici poſſe ſequentia palam facient.

Sit igitur, uti loco mox allegato, $AQ:n$. atque, ductâ AK ipſi AB normali, ad eundem axem AT deſcribatur curva AIN, cujus applicata $TI = AL:f$, $TL:g$, hanc autem tangat recta NIS, ac ſit ſubtangens $TS:b$; erunt, (veluti §. 101. Cap. de tang.) ductis diagonalibus BK & TL, donec ſibi mutuo occurrant in E, puncta D & E in curvâ quæſitâ ADE; adeoque $g:x::s:t::i:\lambda$; propter triangulorum BCT, TAL, & TQD ſimilitudinem: ſed ex hypotheſi fuit $s:t::r:z$, quare & $g:x::r:z$, ergo $rx = gz$; jam verò ex ſuppoſito AFG eſt parabola, ideoque $rx = zz$, quo circa $g = z$, & $rx = gg$.

Sed, ob triangulum TAL in A rectangulum, eſt $gg = ff + xx$, unde prodit $rx - xx = ff$ æquatio curvæ NIA, quæ circulus igitur eſt; cujus ſubtangens TS eſt $b = \frac{2rx - 2xx}{r - 2x}$, unde AS ſeu $b - x = \frac{rx}{r - 2x}$.

Jam autem, ex §. 101. Cap. I. de tang: & ſubſequenti ſcholio, eſt $b - x : b :: g : s :: x : t :: f : y$; quare, in locum b & $b - x$ ſuffectis valoribus, erit

erit $\frac{rx}{r-2r} : \frac{2rx-2xx}{r-2x} :: g:s :: x:t :: f:y$; unde emerget $t = \frac{2rx-2xx}{r}$, & $\frac{2rf-2xf}{r} = y$, aut, loco f ſurrogato ipſius modo invento valore, cub. $r-x$ in $4x = rryy$.

Tandem, cum ſit $TA+AQ = QT$, ſeu $x+n = t$, erit, valore ipſius t repoſito, $rx-2xx = rn$, quare per inventas duas haſce æquationes $rx-2xx = rn$ & cub. $r-x$ in $4x = rryy$ ejecto x, emerget (ſalvo calculo) æquatio ſequens $n^4+2rn^3-8rrnn+2yynn-6ryyn+y^4 = 0$. Quæ curvæ ADE relationem ad axem AQ ſeu n, mediante applicata QD ſeu y, exprimit.

Hinc jam quomodo tangens BE inveniatur plus quam cognitum eſt: ut & hanc curvam ADE æquari tangenti $BE - \sqrt{\frac{4x^3}{9r}}$, ſeu tangenti BE — omnia λ.

Quo pacto vero in aliis curvarum ADE & AIN poſitionibus res hæc tractanda ſit, hoc percepto quilibet intelliget.

Coroll. 1. quâ ergo ratione ex quovis curvilineo quadrabili curva inveniri queat, cui recta æqualis exhiberi poteſt, ex corollario prægreſſo patet, ſed ex §. 18. Cap. II. aliiſque, ex quâvis curvâ geometricâ innumera curvilinea quadratu-

ram admittentia deducuntur, quamobrem ex quâvis curvâ geometricâ infinitas curvas in rectas mutabiles derivari poſſe hinc inferri poteſt.

Scholium. Cap. I. §. 101. methodum tradidimus, ex dato curvilineo ABN curvam (*Fig. LXXVIII.*) ADE deſcribendi, quæ eam inter ſe habent relationem, ut ſit perpetuo $AT : AL :: TQ : QD$, tum $AT : TL :: QT : TD$. Quod, cum illic loci multarum ſatis infiniteſimarum ope præſtitum ſit, quomodo expeditius paullo effici queat, hic oſtendiſſe forſan tyronibus non inutile fuerit; retentis ergo §. ſuperioris ſymbolis, ſint infiniteſimæ $NM = KL = o$, $RL = \varphi$; eſt $b : f :: i : o$, unde $fi = bo$; tum $BA : AK :: RL : KL$, ſeu $x + i : f + o :: \varphi : o$, unde $xo = f\varphi$; tandem $ET : BT :: EL : RL$. Hoc eſt $s + u : i :: s - g + u : \varphi$; unde $s\varphi = si - gi$; ex quibus tribus æquationibus eliſis infiniteſimis orietur $s = \frac{bg}{b - x}$, quod, licet lemmatis in modum §. 10. præmitti potuiſſet, ne propoſitionum tamen ſe mutuo inſequentium filum abrumperetur, hoc potius inſequenti ſcholio comprehendere volui, inſimulque monere, me præcedenti propoſitione methodi magis univerſalitatem ſpectaſſe, quam poſitionis rectarum, flexuræque curvarum rationem habuiſſe; cum in ſingulis fere hujus problematis caſibus, ac juxta variam curvilinei dati ABF naturam, variæ ſint.

§. 11. Sit porro *Fig. LXXIX.* Curva ADE convexa verſus axem AQ, quam rectæ TD & BE tangant in D & E; vocenturque $TD : s$, $DQ : y$, $TQ : t$, $AQ : x$, ductâque BC, ut CE ſit æqualis BE, hoc eſt normali in C juxta lemma 33. dicantur infiniteſimæ $TB : i$, $TC : \lambda$, $DE = OE : u$; $DH = QP : e$, $EH : a$, $CB : \varkappa$, erit

erit $BE = s + u - \lambda$, unde tangentium TD & BE differentia continua est: $u - \lambda$; si vero eædem tangentes TD, & BE constanter producantur in F & I, ita ut TF appellatâ h, linea BI sit perpetuo $h + \lambda$; erit $DF = s + h$ & $EI = BE + BI = s + u - \lambda + h + \lambda = s + h + u$; quare linearum DF & IE differentia erit $= OE = u$, lineæque EF & EI æquales; unde clauso per FI triangulo EFI, erit FI utrique perpendicularis, ex lemmati 33, & parallela infinitesimæ CB, ac ex T ducta TS itidem & ipsi CB æquidistans faciet $BS = CT = \lambda$; remanebitq. $SI = TF = h$; cum autem FI sit quoque infinitesima, quoniam CB talis est, continuatâ, ut in §. 6. tangentium serie, rursus omnia FI abibunt in curvam AFI, cui omnes rectæ curvam ADE tangentes normales erunt; unde, si ambæ hæ curvæ in eodem puncto A desinant, semper recta DF æquabitur curvæ AD, tum juxta §. 7. tum etiam, quia EF æquatur omnibus u, quoniam BE æquatur omnibus, $u - \lambda$, & BI omnibus λ, uti tangentes continuando apparebit.

Quare, si datâ curvæ ADE relatione, adeoque omnibus eam tangentibus, inveniri posset curvæ AFI natura, seu respectus ad axem AQ, inventa foret hac unica operâ omnium geometricarum curvarum longitudo.

Coroll.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [273] - 251

Coroll. I. Hoc ſaltem hinc notum eſt, datâ quâvis curvâ AFI aliam ADE inveniri poſſe, cui recta æqualis dari poteſt.

Sit enim in curvâ AFI applicata $FG: z$, & ſubtangens $NG: k$, ipſa GT normalem curvæ FT definiens: l, intercepta $AG: f$, infinitesima $FK = GV: o$, $KI: \varphi$, $FI: \mu$; erit ob triangulorum ECB & EFI ſimilitudinem, $FI: FE :: CB: CE$, ſeu $\mu: h+s+u :: z: s-\lambda+u$, unde, rejectis rejiciendis per lemm. 10. erit $\frac{s\mu}{h+s} = z$. Sed & $TG: GF :: TC: CB$, hoc eſt $l: z :: \lambda: z$; unde $\frac{\tilde{z}\lambda}{l} = z$, ideoque $\lambda = \frac{l s \mu}{h\tilde{z} + s\tilde{z}} = \frac{\tilde{l} i}{h}$, (nam $TF, h: TG, l :: TB, i: CT: \lambda$,) unde denuo $\mu = \frac{h\tilde{z} i + s\tilde{z} i}{hs} = \frac{\tilde{h} o}{\tilde{z}}$ (nam $TF: FG :: FI: FK$,) quare, ſi jam alia poſſit inveniri æquatio infinitesimas, i & o involvens, utraque earum elideretur, hunc infinem, applicatâ GT in GL, & VB in VM; donec per puncta L & M deſcribi poſſit nova curva LM, cujus ſubtangens GX vocetur g, erit rurſum $LR = GV = o$, & $MR = i - o$; jam ex paſſim notis eſt $XG: GL :: LR: RM$; ſeu $g: l :: o: i-o$, unde $lo = gi - go$; quæ æquatio eaſdem cum ſuperiori infinitesimas continet, quare

quare ex utrâque emergit tandem $o = \frac{gi}{l+g} = \frac{bzzi+szzi}{bbs}$, & elisa i tandem $s = \frac{blzz+bgzz}{gbb-lzz-gzz}$, quia autem $bb-zz=ll$ fiet $s = \frac{blzz+bgzz}{gll-lzz} = TD$.

Hàc autem inventâ notum erit punctum D in curvâ ADE, unde cæteræ ejus proprietates, & relatio ad axem AQ deduci possunt.

Hoc addo, cum rectam DF curvæ AD æquari jam sæpe ostensum sit, erit curva $AD = s+b = \frac{b^3 g}{gll-lzz}$; ut vero valor ipsius s in aliis terminis reperiatur, quia $NG:GF::GF:GT$ seu $k:z::z:l$, erit $kl=zz$; quo valore in locum ipsius zz surrogato prodibit $s = \frac{bgk+blk}{gl-kl}$.

Schol. I. Atque hinc ad ingeniosissimam *Nob. Hugenii* curvarum evolutionem manu quasi ducimur; si enim recta FE instar fili flexilis esse concipiatur, ac curvæ EDA circum posita, deinde extremitate sua F à puncto A exire, erit linea ADE evoluta, ac AFI ex evolutione descripta; qua data, retentisque symbolis modo assumtis, invenietur s seu TD eadem cum eâ, quam statim exhibuimus.

§. 12. Ut vero pateat tyronibus modus, quo curvæ ADE relatio ad axem AQ inveniri potest;

teſt; hoc eſt inter $DQ:y$, & $AQ:x$; erit primo $TF:FG::TD:DQ$, ſeu, $h:z::s:y$, unde $zs=hy$, deinde $FT:TG::TD:TQ$ ſeu $h:l::s:\frac{ls}{h}=TQ$, cui ſi addas $TG+GA=l+f$, erit igitur $QT+TG+GA=\frac{ls}{h}+l+f=x=AQ$, unde repoſito in utraque æquatione $s=\frac{hgk+hlk}{gl-kl}$ emergent pro priori æquatione $gly-kly=gkz+klz$; & pro ſecundâ $gx+fk=gk+fg+gl+kx$.

Cum autem, datâ relatione curvæ AFI, omnes litteræ exceptis, x & y poſſint ad AG ſeu f reduci, hâc eliſâ remanebit æquatio inter x & y, ſeu curvæ ADE, quæ quærebatur.

Poſſent circa methodum evolutionum inverſam, ſeu ex evolutâ deſcriptam inveniendi, hoc loco quædam adjungi: cum autem (*Fig. LXXVI*) datâ evolutâ ADE, ejus deſcriptæ AI proprietates non niſi rectis IE, $8D$, &c. determinari queant, neque hæ, niſi cognitâ curvæ ADE longitudine, cognoſcantur; ſolutionem hujus problematis curvarum rectificationem, methodum ſaltem tangentium inverſam, involvere, eo ipſo manifeſtum eſt; quæ, cum non exiguis adhuc difficultatibus premantur, pluribus hiſce addendis ſuperſedeo.

C A-

CAPUT. VI.

De Mensura Curvilineorum ex Centris Gravitatum.

§. 1. CElebre, tum hoc, tum antiquis temporibus, mensurationis fundamentum fuit, *Centri gravitatis consideratio*; quæ eodem cum superioribus fonte manans, nisi materiæ dignitas particularem sibi discussionem deposcere videretur, jam inter tertii capitis corollaria locum invenire potuisset.

Resumtis enim Cap. III. §. 4. &c. tum figurâ *LV. N°.* I. tum symbolis, erat cylindrici plano A O F insistentis truncus inferior, posito angulo *R B V* semirecto, æqualis $d+\frac{1}{2}y$ in ye; cum autem ye sit rectangulum $QDHP$, erit (factâ $\zeta\theta=\frac{1}{2}y$ & $\beta\zeta=d$.) juxta mechanicæ regulas $d+\frac{1}{2}y$ in ye momentum rectanguli $QDPH$ ad axem motus *C B* appensi; si quidem momenta gravium exprimuntur per rectangula ex mole corporum in respectivam ab axe distantiam ductâ. Jam autem omnia ye constituunt figuram A O F, unde momentum omnium ye in suis respectivè distantiis ad axem *CB* appensorum, æquatur momento totius figuræ

A O F

AOF in diſtantia $\xi\omega$ ad eundem axem CB appenſæ, ſi punctum ω pro centro gravitatis totius figuræ AOF aſſumatur. Quod mechanicæ principia non ignorantibus ſatis notum eſt.

Unde ſi figura AOF vocetur f, & $\xi\omega$ diſtantia centri gravitatis ω ab axe motûs dicatur: k, erit $kf =$ omuia $dye + \frac{1}{2}yye$.

Quare expoſitis trunco reſecto, ſeu omnib. $dye + \frac{1}{2}yye$, figura AOF ſeu f, & diſtantia centri gravitatis ejuſdem k, ex datis duobus datur tertium.

§. 2. Quomodo autem hæc ungulis vel ſeminormaliter, vel alio quovis angulo per AO reſectis applicari queant, quilibet ſuo marte indagabit: cum nihil hic diverſum occurrat.

§. 3. Hoc addo, cum ſit $fk =$ omnia $dye + \frac{1}{2}yye$, truncum inferiorem æquari cylindrico, cujus baſis figura AOF ſeu f, & altitudo æqualis lineæ $\xi\omega$, quâ ω centrum gravitatis figuræ ab axe motus CB diſtat.

§. 4. Si vero angulus RBV non ſemirectus, ſed alius quivis ſupponatur, ac cylindricus baſi AOF inſiſtens habeat altitudinem ST ſeu $D\delta$ ſeu h, ac $\beta\mu$ ſit b, erit totus cylindricus æqualis omnibus hye, ac truncus inferior $=$ omnib. $\frac{h}{b}\ dye + \frac{1}{2}yye$, quare truncus ſuperior æqua-

æquabitur omnibus, $hye - \frac{h}{b} dye - \frac{h}{2b} yye$ ſeu $\frac{h}{b}$ in $b - d - \frac{1}{2}y$ in ye;

Cum autem $b - d - \frac{1}{2}y$ ſit æqualis lineæ $\theta\mu$, quâ centrum gravitatis rectanguli $QPDH$ diſtat à lineâ TV, erit linea $\psi\omega$, ſeu diſtantia centri gravitatis totius figuræ AOF ab axe $TV = b - k$, unde juxta §. I. erunt omnia $b - d - \frac{1}{2}y$ in $ye = bf - kf$; adeoque truncus ſuperior $\frac{h}{b}$ in $bf - kf$ ad truncum inferiorem $\frac{h}{b}$ kf ut $b - k$ ad k, ſeu ut $\psi\omega$ ad $\omega\xi$, hoc eſt ut partes lineæ $\xi\psi$ reſectæ a centro gravitatis figuræ.

§. 5. Quod ſi hæc ad ſolida, tum conoidica, tum annularia tranſferre placet, patet ex §. 20. &c. Cap. III. ſolidum tubulatum ex figura AOF circa axem CB rotatum, æquari omnibus, $\frac{2dyec + yyec}{2r}$; quod ſolidum ſi vocetur: s, quia omnia $dye + \frac{1}{2}yye$ ex §. 3. ſunt æqualia kf; erunt omnia $\frac{dyec + \frac{1}{2}yyec}{r}$ ſeu corpus hac ratione genitum $= \frac{kfc}{r} = s$.

§. 6. Unde, ad ſimilitudinem §. 3. ſolidum omne annulare ſeu s æquale eſt cylindrico, cujus baſis eſt f ſeu figura AOF, & altitudo kc

$\frac{k\,c}{r}$ ſeu circumferentia circuli, cujus radius eſt $\xi\omega$ ſeu k, aut diſtantia centri gravitatis figuræ ab axe motus.

§. 7. Aſſumatur jam ſecundum ſolidum annulare $= p$; & figura, cujus circumvolutione genitum eſt, ſit $= g$; diſtantia centri gravitatis figuræ ab axe rotationis $= h$; erit ſolidum hoc ſecundum ad ſolidum primum, hoc eſt, p ad s uti $\frac{h\,g\,c}{r}$ ad $\frac{f\,k\,c}{r}$, quare $s\,h\,g = p\,f\,k$; unde ſi tres exponantur rationes ſolidi ad ſolidum ſeu, s ad p, figuræ ad figuram ſeu f ad g, & diſtantiæ centri gravitatis in primâ figurâ ab axe motus, ad ſimilem diſtantiam in ſecundâ ſeu k ad h, ex cognitis duabus cognoſcitur tertia.

§. 8. Hinc ſi truncus quilibet aut ungulæ aut alteri trunco æqualis ſupponatur, multum operæ in quibuſdam curvilineis quadrandis conferet, ſi centrum gravitatis cognitum ſit. Applicatis enim (*Fig. LX.*) ad eundem axem AO figuris AFO, AGO; vocatiſq. $DQ : h$, & $RD : f$, $QP : e$, erit truncus inferior cylindrici baſi AFG inſiſtentis, ac per AO ſeminormaliter reſecti, æqualis omnibus $\frac{2\,h\,f\,e + f\,f\,e}{2}$ qui ſupponatur æqualis omnibus $\frac{y\,y\,e}{2}$, ſeu ungulæ ſeminormaliter per AO reſecti cylindrici in

in baſi AIO, ſi nimirum QI ſit continuo $= y$, erit perpetuo $h + \frac{1}{2}f$ in $fe = \frac{1}{2}y$ in ye; hoc eſt juxta mechanicæ theoremata.

Omnium fe ſeu trapeziorum $SRED$ momenta ad axem AO æqualia momentis omnium ye ſeu trapeziorum $PHIQ$ ad eundem axem.

Sit autem planum curvilineum $AFG = k =$ omnia fe, ejuſq. centri gravitatis Υ diſtantia $Z\Upsilon$ ab axe $= l$; nec non planum curvilineum $AIO = g =$ omnia ye, ejuſq. centri gravitatis V ab axe AO diſtantia $NV = n$; erunt, juxta 1 hujus, omnia $\frac{2hfe + ffe}{2} = kl$, & omnia $\frac{yye}{2} = gn$, adeoq. $gn = kl$.

Unde cognitâ figuræ AGF menſurâ, ejuſque centro gravitatis; & centro gravitatis plani AIO cognoſcitur plani AIO magnitudo.

Quod ſi præterea ad eundem axem applicetur figura AMO, ſitque $IK = q$, & truncus in plano AFG jam æqualis ſtatuatur non ungulæ in AIO, uti mox factum fuit, ſed trunco in baſi $AHOM$ per AO reſecto ſeminormaliter, hoc eſt, ſi fiat ſemper $\frac{2hfe + ffe}{2} = \frac{2qye + qqe}{2}$, erit ergo $h + \frac{1}{2}f$ in $fe = y + \frac{1}{2}q$ in qe; & TX diſtantiâ centri gravitatis X figuræ $AHOM$ vocatâ n, ac ipſâ figurâ $AHOM$ ſeu

ſeu omnia $qe = g$; erit denuo $gn = kl$, ut ſupra.

Ac ſi QR ſeu $h+f$ vocetur: z; nec non QK ſeu $q+y$ dicatur: s; erit in primo caſu $rr - hh = yy$ & in ſecundo $rr - hh = ss - yy$.

Unde primum & ſecundum *Cl. Sluſii* lemma ortum vel duxiſſe, vel ducere ſaltem poſſe videntur. Particularia ſatis egregia & multa hinc in appendice *Meſolabi* derivavit Eruditus Author.

§. 9. Cum autem ex §. 9. & 24. Cap. III. generis alîus tum truncorum, tum ſolidorum infiniteſimæ deducantur, eadem patet ad inveſtigandam curvilineorum quadraturam ſemita, poſitâ enim (*Fig. LXII.*) infiniteſimâ $QN:e$, applicata $AN:y$, intercepta $RN:x$, ac determinata $BR:b$, erit truncus cylindrici baſi RAF inſiſtentis ac per HB ſeminormaliter reſecti æqualis omnibus $bye + xye$, juxta Cap. III. §. 10. hoc eſt omnibus, $b+x$ in ye, ſeu omnibus, $b+x+\frac{1}{2}e$ in ye, per lemm. 10. cum autem ye ſit rectangulum $PQNA$, ac KC ab ipſius centro gravitatis C ad axem HB ducta ſit $= b+x+\frac{1}{2}e$, erit $b+x+\frac{1}{2}e$ in ye ſeu $bye+xye$ momentum parallogrammi $PQNA$ ad axem motus BH.

Jam autem rurſum ex Mechanicâ momentum omnium ye in reſpectivis ſuis diſtantiis KC æquantur momento totius figuræ RAF in diſtantia FL ad axem motus appenſæ, ſi L totius

tius figuræ centrum gravitatis supponatur. Fiat ergo figura $RAF = f$, & $FL = d$, erunt omnia, $bye + xye = fd$, hoc est truncus modo dictus æqualis cylindrico in Basi RAF & altitudine KC; unde rursum eadem ac modo recensita deduci possunt ac hisce ad figuras §. 33. & 34. Cap. III. applicatis, lemmata *Cl. Slusii*, tertium & quartum, in curvilneorum mensurâ satis magni momenti ortum suum debere videntur, sed nequid nimis.

§. 10. Notetur hinc demonstrari, (resumta *Fig. LX.*) momenta figurarum ad axem AO inter se esse (retentis §. 8. symbolis) uti omnia $\frac{2bfe+ffe}{2}$ ad omnia $\frac{2qye+qqe}{2}$, seu divisione factâ per e constantem, ut omnia $b+\frac{1}{2}f$ in f ad omnia $y+\frac{1}{2}q$ in q, hoc est ut momenta omnium linearum RD in una figura AFG, ad momenta omnium linearum KI in alia figura $AHOM$; quod a plurimis assumitur.

§. 11. Similia hisce circa superficies curvas demoustrari possent, quæ cum ex modo traditis levi operâ colligantur, breviter perstringam, resumtis igitur Cap. III. §. 2. & 3, 4. symbolis ac *Fig. LXIX.* erit $du + yu$ trunci inferioris superficies curvæ AEO insistentis, juxta ibidem tradita. Hæc autem æquatur momentis omnium rectularum DE, curvam $ADEO$ compo-

nentium, ac ad axem BC appenſarum; ſi enim DE ſeu u medio ſui puncto F ſeu centro gravitatis appendatur ad axem BC in diſtantia FL, quæ æqualis eſt $C\mathcal{Q}+\mathcal{Q}D+\mathcal{Y}F$ ſeu $d+y+\frac{1}{2}a$, erit ipſius DE momentum ex mechanicis ſemper $dy+uy+\frac{1}{2}au$, hoc eſt, per lemm. 10, $=dy+uy$; cum autem momenta omnium DE curvam $ADEO$ conſtituentium æquentur momento totius curvæ in diſtantia XZ ad eundem axem appenſæ, ſi quidem X pro gravitatis centro totius curvæ ſupponatur, erunt vocatis, curva $ADEO:k$, & $XZ:l$, omnia $du+yu=kl$.

Adeoque trunci ſuperficies curvæ inſiſtens æqualis ſuperficiei cylindricæ, ſeu rectangulo kl ex curva k & diſtantia centri gravitatis curvæ ab axe ſeu l, & poſitâ $d=0$, erit ungulæ quadrantalis baſi AEO inſiſtentis ſuperficies $=$ omnia yu æqualis momentis omnium DE ad axem AO, ſeu omnium $y+\frac{1}{2}a$ in u, ſeu $\mathcal{Q}D+F\mathcal{Y}$ in DE; unde poſita curvæ integræ longitudine, k, & ejus centri gravitatis ab axe AO diſtantiâ l, ſequitur rurſum omnia yu eſſe $=kl$.

§. 12. Quod ſi hæc ad ſuperficies rotatione genitas extendere placeat; erunt omn. $\frac{dyc+yuc}{r}$ æqualia ſuperficiei ex curvæ $ADEO$ rotatione circa axem BC genitæ, ex Cap. IV.

§. 14.

§. 13. Hæc, juxta præcedentem, æquatur $\frac{klc}{r}$; hoc eſt ſuperficiei cylindricæ, cujus baſis eſt curva k, & altitudo eſt circumferentia circuli radio ZX ſeu l deſcripta.

§. 14. Quod ſi ſecunda curva exponatur, cujus longitudo $= g$, diſtantia centri gravitatis ab axe motus $= n$; erit ſuperficies ex hujus curvæ circa hunc axem rotatione genita per præcedentem $= \frac{gnc}{r}$; & hæc ad ſuperficiem primam ſeu $\frac{klc}{r}$ ut gn ad kl; unde ex tribus rationibus, ſuperficiei ad ſuperficiem, curvæ ad curvam, & diſtantiæ centri gravitatis in prima curva ad eandem diſtantiam in ſecunda, datis duabus dabitur tertia.

Plura hinc nec exiguæ notæ particularia ſubſequentur, centriq. gravitatis inveniendi multifaria methodus, ſi quis hæc penitius proſecutus fuerit, hæc autem apud eruditiſſimos authores *Walliſium*, *Steph. ob Angelis*, aliosque in copiâ reperient, quibus doctiſſima eorum monumenta evolvere volnpe fuerit.

Appendicula.

QUo vero hæc facilius in uſum deducantur, non inutile forſan fuerit planorum, ſolidorumq., nec non ſuperficierum, ac linearum curvarum exponentia algebraica in unam quaſi tabellam, contraxiſſe.

Sit ergo, Figurâ LXXX. curvilineum AOF, eique circum-

circumſcriptum rectangulum $AOFM$, fiatque BC ipſi AO ac NI ipſi AM parallela, vocatiſq. ut ſemper, $QD:y$, $QA:x$, $CQ:d$, $NA:b$, $OF:p$; infiniteſimiſque $DH:e$, $HE:a$, $ED:u$, ſit CD ſeu $d+y=z$; r ſit radius circuli, cujus circumferentia: c.

Exprimentur:

Rectangulum $AFOM$ per omnia pe.

Spatium Curvilineum AFO per omnia ye, §. 4. Cap. II.

Columna aut priſma in baſi AOF, cujus altitudo CQ, per omnia dye §. 2. Cap. III.

Truncus inferior hujus columnæ, ſi per BC ſeminormaliter ſecetur per omnia $\frac{2dye+yye}{2}$, §. 4. Cap. III. aut per omnia $\frac{zz-dd \text{ in } e}{2}$, §. 4. Cap. III.

Momentum Figuræ AOF ex centro ſuæ gravitatis ad axem BC appenſæ per eadem, §. 1. Cap. VI.

Truncus inferior ejuſdem columnæ per NI ſeminormaliter reſectæ per omnia $by+xy$ in e §. 10. Cap. III.

Momentumq. Figuræ AOF ex centro ſuæ gravitatis ad axem NI appenſæ per eadem, §. 9. Cap. VI.

Trunci inferiores dictæ columnæ alio quolibet angulo per BC aut NI reſectæ, in primo caſu per omnia $\frac{2dy+yy}{2}$ in $\frac{eh}{b}$ §. 4. Cap. III. aut per omnia $\frac{zz-dd}{2}$ in $\frac{eh}{b}$ §. 4. Cap. III. in ſecundo caſu per omnia $by+xy$ in $\frac{eh}{b}$ §. 11. Cap. III. pro variâ ratione ipſius b ad b.

Ungula ſemiquadrantalis ejuſdem columnæ per AO ſeminormaliter reſectæ per omnia $\frac{yye}{2}$, §. 7. Cap. III.

Momentumq. figuræ AOF ad axem AO ex centro gravitatis ſuæ appenſæ per eadem, §. 2. Cap. VI.

Truncus ſeu ungula ſemiquadrantalis ejuſdem columnæ per AM reſectæ per omnia yxe, §. 9. Cap. III.

Mo-

Momentumq. figuræ AOF ad axem AM ex centro gravitatis suæ appensæ per eadem, juxta §. 9. Cap. VI.

Unguæ truncique semiquadrantales ad alium angulum resectæ per omnia $\frac{hyye}{2b}$, §. 6. Cap. III. aut per omnia $\frac{hyxe}{b}$ §. 11. Cap. III.

Solidum rotatione genitum ex rectangulo AFOM circa AO seu cylindrus per omnia $\frac{ppec}{2r}$, §. 14. Cap. III. & circa AM per omnia $\frac{pxec}{r}$ §. 24. Cap. III.

Ex curvilineo AOF circa AO seu conoides, per omnia $\frac{yyce}{2r}$ §. 17. Cap. III.

Ex eodem curvilineo circa AM per omnia $\frac{yxec}{r}$ §. 24. Cap. III.

Ex AOF circa BC seu annulare per omnia $\frac{2dy+yy}{2}$ in $\frac{ce}{r}$ §. 20. Cap. III. seu omnia $\frac{zz-dd}{2}$ in $\frac{ec}{r}$ §. 20. Cap. III.

Ex AOF circa NL seu tubulatum per omnia $by+xy$ in $\frac{ec}{r}$ §. 27. Cap. III.

Superficies Columnæ in altitudine CQ curvilineo AOF insistentis, qua parte curvæ AF superstat per omnia *du* §. 1. Cap. IV. qua parte rectæ AO per omnia *de* §. 1. Cap. IV. qua parte rectæ OF omnia *da* §. 1. Cap. IV. hinc *integra columnæ* superficies per omnia $du+de+da$ §. 1. Cap. IV.

Superficies Unguæ semiquadrantalis per AO resectæ per omnia *yu* §. 4. Cap. IV.

Momentum curvæ AEF ex centro suæ gravitatis ad axem AO appensæ per eadem §. 11. Cap. IV.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [287] - 265

Superficies trunci inferioris curvæ inſiſtens per BC ſeminormaliter reſecti, quâ parte curvæ AEF inſiſtit per omnia $du+yu$, ſeu zu §. 3. Cap. IV.

Ac *momentum Curvæ* AEF ex centro gravitatis ſuæ ad axem BC appenſæ per eadem §. 11. Cap. VI.

Superficies rotatione genita exceptis baſibus, ex rectangulo AMFO circa AO ſeu cylindri per omnia $\frac{pec}{r}$ §. 9. Cap. IV.

Ex curva AEF circa AO ſeu conoidis per omnia $\frac{yuc}{r}$ §. 11. Cap. IV.

Ex Curva AEF circa BC ſeu pars ſuperficiei ſolidi annularis per omnia $du+yu$ in $\frac{c}{r}$ ſeu $\frac{zuc}{r}$ §. 12. Cap. IV.

Ex totâ figurâ AOF ſeu integra ſuperficies ſolidi annularis, exceptâ baſi, per omnia, $\frac{zuc}{r} + \frac{dec}{r}$ §. 13. Cap. IV.

Ipſa Curva ADEF per omnia u §. 1. Cap. V.



C A-

CAPUT VII.

De Maximis & Minimis.

CUm omnis æquatio unam pluresve indeterminatas continens per curvæ unius pluriumve locum geometricè designari possit, ita ut singulæ occurrentes indeterminatæ vel tanquam applicatæ diversarum linearum ad eundem axem positæ considerari possint, vel etiam una ex illis interceptam quandoque repræsentare; plurimæque reperiantur curvæ (*Fig. LXXXII.*) ADEZ, quarum, si ad rectam AZ referantur, applicatæ ex A in *I* perpetuo crescunt, ex *I* in *K* per infinitesimum spatium distantes subsistunt, & æquales sunt, ac ex *K* in Z denuo, manente eâdem curvæ æquatione, decrescunt; patet inter varios applicatarum hisce in curvis valores *extremum* unum dari, cum nimirum nec crescunt nec decrescunt; & hoc quidem in casu *maximum*, cæteris omnibus hinc inde ab hoc *extremo* seu maximo deficientibus.

Simile quid observatur in aliis curvis, aut etiam in hac eâdem, si non ad axem AZ. verum ad rectam YX applicetur, quo quidem casu applicatæ ex Y in *V* decrescunt, in *V* & *S* per infinitesimam distantiam disjunctæ sibi mutuo æquantur & subsistunt, ac ex *S* in X rursum augentur; unde applicatarum punctis *V* & *S* insistentium valores omnium ad hanc curvam pertinentium *minimi* sunt.

Ex quibus consequitur, omnem æquationem indeterminatas quotcunque continentem, si unica ex illis ad valorem *extremum* determinari debeat, ad quendam ex modo dictis curvarum locis, & casum quo nec crescunt nec decrescunt, adeoque sibi invicem æquales sunt duæ sese proxime excipientes applicatæ, referri posse. Ad curvam scilicet versus axem suum concavam si *maximum*, convexam vero si *minimum* expetatur.

Ex

Ex qua *extremi* & linearum, quæ curvas in reſpectivis punctis tangunt, proprietate ſequens in *maximi* & *minimi* determinatione emergit fundamentalis canon.

§. 1. Si curvæ cujuſdam $ACDEHZ$ ſubtangens BT ſit omni aſſignabili major aut infinita; erunt applicatæ BC & ID (quæ mediante tangenti TC ad ſubtangentem expoſitam TB relativâ, ſeu per ipſi coincidentem curvæ infiniteſimam DC, conjunguntur) ſibi mutuo æquales, adeoque inter reliquas curvæ applicatas *maximæ* aut *minimæ*.

Demonſtratio ſit $BT:t$, $BC:y$ applicata, $CR:e$ infiniteſima, $DR:a$ applicatarum incrementum aut decrementum; erit, juxta proprietatem omnibus curvis communem, $a = \frac{ye}{t}$; poſitâ vero t infinitâ $= km$ & e infiniteſimâ explicatâ per $\frac{r}{m}$ erit $a = \frac{ry}{kmm}$, quod per lemm. 10. nihilo æquivalet.

Quare, cum hoc in caſu differentia applicatarum nulla ſit, eo ipſo nec creſcunt nec decreſcunt, ſed ſibi mutuo æquantur, adeoque juxta modo præmiſſa *maxima* ſunt, aut *minima*. *q. e. d.*

§. 2. Unde tandem manifeſtum eſt; ſi expoſitæ æquationis indeterminata quælibet ad *maximum* aut *minimum* determinanda veniat, æquationem hanc, tanquam ex curvæ convenientis

nientis (in qua nimirum determinanda ad extremum quantitas applicatæ vicem ſuſtinet) naturâ profluentem conſiderandam eſſe; cujus curvæ ſubtangentialis æquatio ex ſupra traditis regulis eſt inquirenda, ac ipſa ſubtangens ſupponenda æqualis cuidam infinito: unde juxta Schol. General. *N°. XII. extremi* quæſiti ſeu *maximi* aut *minimi* determinatio ſequetur.

§. 3. Sint, ut exemplis hoc illuſtremus, x intercepta, tum z, y, f, ad eandem applicatæ; curvarumque hinc genitarum ſubtangentes reſpectivæ, l, t, n. ita ut l ad z, t ad y, n ad f referatur; d, b, c, r, s, ſint quantitates determinatæ; *extremum* per applicatam y perpetuo denotetur.

I. Caſus, *cum termini algebräici extremum aliquod deſignantes non niſi unam nicognitam quantitatem continent.*

Sit $rrx^3 - x^5 + bbccx = $ *alicui extremo*, vocetur hoc y^5 vel rry^3 aut $bbccy$ ſimilive modo, quo poſſit æquationem curvæ repræſentare; habebitur curvam hanc exprimens æquatio, $rrx^3 - x^5 + bbccx = y^5$, cujus æquario ſubtangentialis juxta præcedentia, eſt, $3rrxxt - 5x^4t + bbcct = 5y^5$; in quâ ſi t ponatur omniaſſignabili major ſeu infinita, juxta Scholii General. *N°. XII.* omnes termini infinito vacui, ut $5y^5$, evaneſcent: unde, cæteris per t diviſis,

ſis, emerget $3rrxx - 5x^4 + bbcc = 0$, quæ eſt æquatio quæſita *maximum* aut *minimum* determinans.

II. Caſus, *cum æquatio duas continet in eodem termino indeterminatas* x *&* y, *quarum altera* y *ad extremum aliquod eſt determinanda.*

Sit æquatio expoſita, $r^4 - x^3y + bbxx - cxyy = 0$; erit curvæ hancce æquationem conſtruentis æquatio ſubtangentialis $-3xxyt + 2bbxt - cyyt = 2cxyy + x^3y$; & poſitâ t infinitâ, termini infinito vacui ex Schol. General. *N°. XII.* nihilorum ad inſtar rejici poſſunt, unde, reliquis per t diviſis, oritur æquatio ad extremum determinata $-3xxy + 2bbx - cyy = 0$; ex quâ, ſi ad expoſitam applicetur, tum ipſius x, tum ipſius y valor, uti notum eſt, indagari poteſt.

§. 4. Quoniam jam in utroque hoc caſu æquationem ad *extremum* aliquod determinatam, non niſi termini ſubtangentem t continentes, cæteris evaneſcentibus, ingrediuntur: patet in expoſitâ qualibet æquatione, omiſſâ indeterminatâ y, quæ *extremum* ex hypotheſi deſignat, ſingulos terminos reliquam indeterminatam x continentes per numerum poteſtatem ipſius x in quolibet termino exponentem, multiplicandos eſſe, & hoc facto, ex iis terminis hoc modo mul-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [292] - 270

multiplicatis componi æquationem ad valorem *extremum* ipſius y determinatam.

Quod exhibita modo exempla hoc ritu tractando innoteſcit. Demonſtratio ex Cap. I. §. 17. & 35. haurienda.

Schol. Cum autem Nob. *Huddenii extremorum* ſeu *maximi & minimi* methodus, tum hâc, tum aliis hactenus poſt ipſam inventis, non paucis in caſibus, latius pateat ac magis comprehenſiva exiſtat; eam quidem ob cauſam, quod ipſis indeterminatarum poteſtatibus non adſtricta, aſſumtâ quâlibet progreſſione arithmeticâ, intentum aſſequatur; tum primario, quod hujus ope terminus quicunque per cyphram multiplicari, adeoque ex datâ æquatione tolli poſſit; unde hinc promanantes problematum ſolutiones generaliores *multo ac infinitis quandoque caſibus* ſufficientes evadunt.

Sit Verb. Gr. æquatio ad circulum $2rx - xx = yy$, cujus applicatarum maxima expetitur; habebitur ex præcedenti $2rx - 2xx = 0$ & $r = x$; quod & ex methodo Huddenianâ, uti notum, conſequitur: ſi vero alia juxta eandem methodum aſſumatur progreſſio, ac terminus $2rx$ per cyphram multiplicetur, obtinebitur mox $yy = xx$, ſeu $y = x$.

Quod maximum in circulo ſine relatione ad ipſius diametrum, adeoque & locum, ad quem futuræ ſunt infinitorum circulorum eodem vertice deſcriptorum applicatæ maximæ, primâ inſtantiâ determinat. Operæ pretium mihi facturus videor, ſi methodi modo traditæ, cum admirando tanti Viri invento convenientiam, inſimulq. ipſius hoc fundamento innitentem demonſtrationem aperiam.

§. 5. Sit in eum finem æquatio; $x^5 - bx^4 - yyx^3 - ccyxx + bbccx + b^5 = 0$; oportet valo-

valorem ipſius y ad maximum aut minimum determinare.

Aſſumtis, d, & r, quarum utraque conſtantis quidem magnitudinis ſed pro arbitrio ſumendæ ſupponitur, ac juxta calculi conditionem nunc negativos, nunc affirmativos numeros ſignificare: ducatur æquatio primò in d, ac deinde in x^r, ſeu ſimul & ſemel in dx^r, numero r ipſius x poteſtatem deſignante; obtinebitur $dx^{5+r} - bdx^{4+r} - dyyx^{3+r} - dccyx^{2+r} + bbccdx^{1+r} + db^5x^r = 0$. in quâ, ſi juxta præcedentem, ſinguli termini x continentes per numerum poteſtatem ipſius x exponentem multiplicentur, emerget $\overline{5+r}\,dx^{5+r} - \overline{4-r}\,bdx^{4+r} - \overline{3-r}\,dyyx^{3+r} - \overline{2-r}\,dccyx^{2+r} + \overline{1+r}\,bbccdx^{1+r} + rdb^5x^r = 0$, pro æquatione ad extremum determinatâ; quæ ideo per x^r rurſum diviſa exhibebit:

$$\overline{5+r}\,dx^5 - \overline{4-r}\,bdx^4 - \overline{3-r}\,dyyx^3 - \overline{2-r}\,dccyx^2 + \overline{1+r}\,dbbccx + rdb^5 = 0.$$

Adeoque æquationem expoſitam quâlibet progreſſione arithmeticâ juxta leges *Huddeniani* theorematis, multiplicatam.

Coroll.

Coroll. Patet hinc I. quemlibet expositæ æquationis terminum, Verb. Gr. yyx^3, per cyphram posse multiplicari, adeoque ex æquatione ad *extremum* determinatâ tolli, sit enim $-3-r=0$ erit $r=-3$. tum II, quemlibet ex residuis, Verb. Gr. bx^4, posse quolibet numero tum affirmativo tum negativo, ut s, multiplicari, cæteris ex eo determinationem accipientibus; sit enim $-\overline{4-r}\,d=s$, erit (posito loco r invento valore -3) ipsa $s=-7d$, adeoque $d=\frac{-s}{7}$. quæ quidem, ni fallor, ea sunt, quæ methodus *Huddeniana* requirit.

§. 6. III. Casus, *Cum æquatio plures, imo quotlibet, continet indeterminatas, quarum unica* y *ad extremum determinanda est.*

Sit æquatio, $yyf-byz+ccb=0$; oportet ipsius y valorem extremum definire. Quamobrem ex §. 2. ac retentis §. 3. symbolis, juxta Cap. I. §. 35. reperiatur (consideratis scilicet indeterminatis, tanquam curvarum ad eundem axem descriptarum applicatis) ipsius æquatio subtangentialis: $2yyfnl+yyftl-byztn-byzln=0$; & positâ t infinitâ, ac cæteris ex Schol. General *N°. XII.* evanescentibus, emerget æquatio quæsita: $yyftl-byztn=0$, seu $yfl-bzn=0$.

Schol. Et hæc quidem, cum nullæ amplius supersunt æqua-

æquationes, quæ inderminatas f & z ad y aut interceptam communem x limitant; quæ ſi in promtu fuerint, etiam ſubtangentes reſpectivæ n & l ad eaſdem y aut x referri poſſunt, adeoque extremum per ſuperiores caſus omnino erit determinabile. Elegans Celeberrimi *Leibnitii* exemplum, quem modo recenſuimus caſum, elucidabit; quod Vir eruditiſſimus per quantitatum differentialium proprietates reſolvit; nos autem ex ſubtangentis valore infinito, præcedentium in morem, deducemus; cum Cap. I. §. 35. methodum huic negotio inſervientem ſatis, ni fallor, expeditam ſuppeditet.

§. 7. Sit (*Fig. LXXXI. N°. 1.*) AE ſuperficies dirimens aerem & vitrum; BC radius lucis in CD reflexus, aut in CF refractus; ſi aer lucis motui reſiſtat ut r, vitrum ut s, quæritur punctum C, in quod incidens radius ex puncto B ac punctum D per reflectionem, F per refractionem, illuſtrans omnium facillimè, ſeu vi omnium minimâ munia hæc ſua peragere poteſt?

Sit eum in finem in caſu reflectionis $DE:b$, $DC:f$; in caſu vero refractionis $EF:b$, & $CF:f$; AB dicatur: d, $AC:x$, $AE:c$, unde $CE:c-x$; quarum b, d, c, determinatæ, f, z, x indeterminatæ exiſtunt, item BA & DF ipſi AE normales.

Quoniam jam ex mechanicis conſtat, vires requiſitas inter ſe eſſe in longitudinum emenſarum & reſiſtentiæ mediorum ratione compoſitâ, ſeu, ut rz ad sf; vis utriuſque ſumma exponetur

netur per $rz+sf$; quæ omnium minima hoc in caſu expetitur. Sit ergo $rz+sf=yy$ æquatio repræſentans virium ſummam, in quodcunque etiam ſuperficiei AE punctum radius ex B inciderit; in quâ, ut y minima reperiatur, (*Fig. LXXXI. N°. II.*) ad interceptam communem $AC:x$, ordinatæ concipiantur tres curvæ AD, AB, AF; quarum applicatæ dicantur $CB:z$, ejuſque ſubtangens $CK:l$; CD in caſu reflectionis, CF in caſu refractionis vocentur: f, earumque ſubtangentes CL & CM pro varia intentione appellentur n; tandem in curvâ POH ſit applicata $HC:y$, ejuſque ſubtangens $CI:t$; erit poſita curvarum inter ſe relatione $rz+sf=yy$, æquatio ſubtangentialis earum omnium ex Cap. I. §. 35. $rztn+sflt=2yyln$, in quâ, ſi y ad extremum ſit determinanda, ſeu ad lineam ON, erit t infinita; unde ex Schol. Generalis, *N°. XII.* rejecto $2yyln$, ac diviſione per t inſtitutâ remanet $rzn+sfl=0$, pro æquatione determinatâ.

Cum autem hic ad omnimodam problematis determinationem æquationes neceſſariæ ex datorum naturâ reperiri poſſint; ac ſit I. in triangulo BAC in A rectangulo, (vide *Fig. LXXXI. N°. 1. & 2.*) $dd+xx=zz$, quæ eſt ad locum curvæ BA, erit ejus ſubtangentialis $l=\frac{zz}{x}$.

II. In triangulo DEC aut EFC in E rectangulo eſt $cc - 2cx + xx = ff$, æquatio ad curvam AD aut AF, cujus ſubtangentialis $n = \frac{ff}{x - c}$.

Quarum ſubtangentium n & l inventus valor ſi in æquatione $rzn + sfl = 0$ ſurrogetur, emerget $rfx = csz - xsz$; quæ, loco f & z ſubſtitutis valoribus, ſolam x continebit, adeoque penitus determinata eſt.

Corol. I. In Caſu Dioptrico, cum ſit $x : c - x :: sz : rf$, ſi F & B (*Fig. LXXXI. N°. 1*) in ejuſdem circuli peripheria ſitæ eſſe intelligantur eſt $z = f$; adeoque $x : c - x :: s : r$, ſeu ut AC ad CE ita reſiſtentia vitri ad reſiſtentiam aëris. Adeoque in caſu minimæ obtinet regula *Carteſii* in dioptricis tradita.

Coroll. II. In caſu catoptrico, cum radius CD maneat in aere, ideoque reſiſtentia non mutetur, erit $r = s$, & $x : c - x :: z : f$, ſeu $AC : CE :: BC : CD$. Unde cum, ob laterum proportionem & angulos in E & A rectos, triangula ACB & DCE ſint ſimilia, patet hoc in caſu angulum incidentiæ BCA æquari angulo reflectionis DCE.

CA-

CAPUT VIII.

De Variis Calculi in Analysi infinitorum Generibus, & methodo infinitesimali directâ.

§. 1. CAlculi *infinitesimalis* fundamentum consistit in considerandis quantitatibus infinitesimis, tanquam fractionibus; quarum denominatores numerum omni assignabili majorem m includunt: sic $\frac{r}{m}$ est ipsius r pars infinitesima, &c.

§. 2. Hinc, quem lemm. 8, 9, 10. &c. fusè satis tradidimus, omnibus, ni fallor, hactenus adhibitis naturâ prior enascitur *quantitatum infinitesimarum Algorithmus*; unde postea æquationum, ex quantitatibus indeterminatis, seu parte sui infinitesimâ (juxta curvæ quam spectant, aut spectare possunt, naturam) per totam sui longitudinem crescentibus aut decrescentibus constantium, *redactio*, aut si mavis, *reductio ad infinitesimas* juxta Cap. I. §. 1. & 2. aliasque plurimas innotescit.

§. 3. Quod si hæ *fractiones* seu *quantitates* in-

infiniteſimæ per vocales *a* & *e*, &c. litteras, compendii gratiâ, deſignentur, oritur tangentium inventioni inſerviens *Cl. Barovii* methodus. Videatur Cap. I. §. 3. Schol. II. & §. 4, 5, 6, 7, 8.

§. 4. Si vero eædem quantitates infiniteſimæ vocalium & litterarum loco, per indeterminatarum, quas reſpiciunt, differentias (quæ infiniteſimarum naturam nihilo ſecius retinent) exprimantur, deducitur hinc *Ccleberr. Leibnitii* calculus, *differentalis* nomine vocatus, cujus ſpecialem demonſtrationem, cum inter præcedentia, ſuperiorum ad inſtar, expreſſe non attingatur, hic adjungo. Sint quantitates indeterminatæ quotcunque, x, y, z, f, earumq. infiniteſimæ reſpectivæ, e, a, u, i, quæ juxta *D. Leibnitii* placita per indeterminatarum differentias, ſeu dx, dy, dz, df, denotentur.

I. Quæritur ipſius $x \overline{+} y$, ſeu quantitatum ad ſe mutuo additarum vel á ſe invicem ſubſtractarum, differentiale?

Fiat $x \overline{+} y = z$, quæ æquatio redacta ad infiniteſimas (poſitis nimirum $x+e$ loco x, $y+a$ loco y, $z+u$ loco z, (quod & in ſequentibus, ſemper obſervatum velim) dabit, $x+e \overline{+} y \overline{+} a = z+u$, & deletis æqualibus, $e \overline{+} a = u$; ſeu reſumtis ſymbolis *Leibnitianis* $dx \overline{+} dy = dz$.

II. Quæritur ipſius xy, ſeu indeterminatarum

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [300] - 278

rum ſe mutuo multiplicantium, differentiale?

Fiat $xy = z$; quæ ſuperiori modo ad infinitesimas reducta dabunt $xy + ye + xa + ae = z + u$, ac deletis æqualibus, tum & per lemm. 10. rejectaneis, erit $ye + xa = u$; ſeu juxta D. Leibnitium $y\,dx + x\,dy = dz$.

III. Quæritur ipſius $\frac{x}{y}$, ſeu indeterminatarum ſe mutuo dividentium, differentiale?

Fiat $\frac{x}{y} = z$, erit $x = yz$, & poſt redactionem ad infinitesimas & rejecta rejectanea $e = yu + za$; unde poſito $\frac{x}{y}$ loco z, & æquatione ad u ordinatâ, emerget $u = \frac{ye - xa}{yy}$; & ex notatione differentialium $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$.

IV. Quæritur ipſius y ad poteſtatem p evectæ differentiale?

Fiat $y^p = z$, quæ ad infinitesimas reducta, deletis juxta Cap. I. §. 10. delendis, dabit $py^{p-1}a = u$, ſeu $py^{p-1}dy = dz$.

§. 5. Sin autem quantitates indeterminatas *Fluentium* nomine, ipſas vero infinitesimas *fluxiones*, *momenta*, *incrementa momentanea*

tanea aptiſſimo uſitatoque *Clar. Newtono* technologemate appellemus, eodem hoc fonte calculi, ab inclyto hoc Authore in profundiſſimæ eruditionis de *Phil. Nat. Princ. Math.* tractatu adhibiti, demonſtratio haurietur.

§. 6. Hiſce corollarii ad inſtar annecti, inſimulque confirmari poſſet, Scholio, §. 13. Cap. II. ſubnexo, terminos æquationum indeterminatos ad infiniteſimas redigendi inſinuata, adeoque inde petenda methodus; quæ, licet fractionibus æquationem ac irrationalitatibus liberam poſtulet, non paucis tamen in caſibus terminos differentialium ſimpliciſſimos, compendioſè magis, quam modo traditus calculi differentialis algorithmus exhibet.

§. 7. Poſſet *differentialis* hic *algorithmus* ulterius extendi, ac quantitatum, qui poteſtatum indices indeterminatos habent, differentialibus aſſignandis adhiberi.

Quæritur verb. Gr. ipſius y^x differentiale?

Fiat $y^x = z$, ac poſito $x+e$ loco x, $y+a$ loco y, $z+u$ loco z, erit $y+a$ ad poteſtatem $x+e$ evecta $= z+u$, unde multiplicatione inſtituta, ac rejectis per lemm: 10 rejiciendis, orietur $y^{x+e} + xy^{x+e-1} a = z+u$; ac denuo

nuo ipſi z ſurrogato y^{x}, fiet tandem, $y^{x+e} + xy^{x+e-1} - y^{x} = u$; jam ſi loco a & e reponantur dx & dy, differentiale quæſitum, juxta deſignationem *Leibnitianam*, obtinebitur.

Coroll. Quod ſi x fiat determinata $= p$, erit $e = 0$; & prodibit, tanquam caſus hujus theorematis particularis, §. 4. *N°. IV.*

Schol. I. Poſſet poteſtas x etiam ad quamlibet aliam poteſtatem, tum determinatam, tum indeterminatam evehi; & hæc rurſus ad aliam, poteſtatumque poteſtates hoc ritu in infinitum continuari; tum & unico pluribuſque terminis efferri; ſic verb. gr. y evectâ ad poteſtatem x poteſt hæc rurſum ad poteſtatem f, ac f denuo ad poteſtatem $rxx + x^3$ evehi; unde calculi hujus, tum & curvarum, quæ hactenus non ſatis conſideratæ fuerunt, contemplatio ulterius longe promoveri earumque tangentes (ex more Cap. I. §. 47. &c.) aliaque ſymtomata inquiri poterunt. Cum autem caſus hinc originem ducentes ferme ſint innumerabiles, adeoque eorum ad certa quædam capita reductio tantum non impoſſibilis, præſtabit in hiſce omnibus methodo potius generaliori uti, cum labor alias inſumtus operæ ſuæ tædium vix compenſaturus videatur.

Schol. II. Antequam calculum differentialem deſeram, celebre ex eo deductum curvarum ſymptoma, *repetitam* ſcilicet *differentiationum ſucceſſionem* ſilentio prætermittere nequeo. Placuit nimirum quibuſdam è clariſſimis hujus ævi Mathematicis ipſa curvarum triangula characteriſtica, (*Fig. LXXXIII.*) DHE, EdC, CLI, differentiationi de novo ſubjicere, partiumque differentialium differentias, ſeu infiniteſimarum infiniteſimas in calculo conſiderare, apparebat enim, poſitis DH, Ed, CL, ſemper æqualibus

bus, non tamen DE, EC, CI, fore æqualia, adeoque differentiam quandam inter illas intercedere. Quæ quidem differentiationum continuatio num ex iiſdem, quibus differentiatio prima, fundamentis deduci qneat, ſequenti modo inquiſivi.

Sit (*Fig. LXXXIII.*) curvilineum $AX\delta$, ſumtâque AQ intercepta: x, DQ applicatâ: y, AD curva: c, ſubtangenti $TQ:t$, tangenti $TD:s$; in axe AZ accipiantur ſe mutuo inſequentes interceptæ AP, AR, AS, quarum differentiæ ſunt infiniteſimæ ſeu omni datâ minores, $QP:o$, $PR:o$, $RS:\pi$, *Cl. Leibnitio* dx vocitatæ; deinde ad ſingula axis diviſionum puncta ſi eleventur applicatæ, PE, RC, SI, erunt applicatarum differentiæ $HE:a$, $\square C:\mu$, $IL:\xi$; curvarumque reſpectivarum, $DE:u$, $EC:\delta$, $CI:\zeta$; quarum illæ *D. Leibnitio*, dy, hæ dc nominantur; quæ curvarum differentiæ infiniteſimæ verſus axem in T, F, G, productæ generabunt infiniteſimas, $FT:i$. $GF:\varphi$; ac ductis FK, $TB5$, $D23$, $E4$, tangentes ad angulos rectos ſecantibus aliæ rurſum orientur infiniteſimæ, $GK:\psi$, $FB=K5:\lambda$, $34=2E=DE:u$; $4C=EC=\delta$.

Jam ob triangulorum TQD & DHE ſimilitudinem, eſt.

I. $t:y::e:a$, ſeu $TQ:QD::DH:HE$; unde $ta=ye$.

II. $s:y::u:a$, ſeu $TD:DQ::DE:EH$, unde $su=ya$.

III. $t:s::e:u$. ſeu $TQ:TD::DH:DE$. unde $se=tu$.

Tum ob triangulorum FPE & $E\square C$ ſimilitudinem eſt.

IV. $t+e+i:y+a::o:\mu$. ſeu $FP:PE::E\square:\square C$, unde (per lemm. 10.) $yo=t\mu$.

V. $t+e+i:s+u+\lambda::o:\delta$. ſeu $FP:FE::E\square:EC$, unde (per lemm. 10.) $so=t\delta$.

VI. $s+u+\lambda:y+a::\delta:\mu$. ſeu $FE:EP::EC:C\square$, unde (per lemm. 10.) $y\delta=s\mu$.

Item ob triangulorum GRC & CLI ſimilitudinem eſt.

VII. $s+\psi+\lambda+u+\delta:y+a+\mu::\zeta:\xi$. ſeu $GC:CR::CI:IL$. unde (per lemma 10.) $y\zeta=s\xi$.

VIII. $s+\psi+\lambda+u+\delta:t+\varphi+i+e+o::\zeta:\pi$. ſeu $CG:GR::CI:CL$. unde (ex lemm. 10.) $t\zeta=s\pi$.

IX. $t+i+\varphi+e+o:y+a+\mu::\pi:\xi$ ſeu $GR:RC::CL:LI$, nnde (per lemm. 10.) $t\xi=y\pi$.

Hoc

Hoc autem similiter eventurum patet, quotcunque (modo numero finitæ) assumtæ fuerunt infinitesimæ.

Corol. I. Manifestum hinc est, quotlibet triangula ex infinitesimis constantia, DHE, E◻C, CLI, &c. (modo numero sint finita) quæ se invicem non interruptâ successione sequuntur, inter se & triangulo assignabili TQD esse similia; est enim $t : y :: e : a :: o : \mu :: \pi : \xi$. & sic in cæteris. Demonstratio ex §. præced. Num. I. IV. & IX. levi negotio colligitur.

Corol. II. Unde sequitur, posita in triangulis hisce similibus una laterum homologorum æqualium serie, & reliqua latera, homologa homologis, æqualia fore.

Idem hoc ex calculo demonstratur, sint enim omnia dx seu DH, E◻, CL constanter æqualia, erit ideo, $e = o = \pi$; adeoque juxta *N°. I. IV. IX.* $ye = ta = t\mu = t\xi$; quare tandem $a = \mu = \xi$, seu omnia dy, vel HE, ◻C, LI, perpetuo æqualia.

Corol. III. Quod si omnia dy aut omnia dc perpetuo assumantur ejusdem magnitudinis, eodem modo colligetur, hic omnia dy & dx, illic omnia dc & dx constanter fore æqualia. Calculum hoc evincentem, cum superiori plane similis sit, omitto.

Corol. IV. Ex quibus tandem consequi videtur, cum posità una laterum seu omnium dx semper æqualium serie, omnia quoque dy sibi semper æquentur, ac omnia dc (juxta Corol. II.) nullam inter ipsa dy aut dc, si numero sint finita, interceſſuram differentiam, cum æqualium nulla sit differentia; unde hoc saltem principio, quo omnia, ni fallor, reliqua calculi infinitesimalis genera deduci possunt, *differentiationum secundarum tertiarum &c. ultra primam continuationes* demonstrari nequeunt.

Ne autem hoc demonstrationis genere in re tanti momenti quispiam offendatur, cum per modum inductionis intentum evincere studeat, aliam adjungo; quem in finem sequentia præmitto lemmatica:

Lemm. I. Si quotlibet, modo numero finitæ, infinitesimæ ad se mutuo addantur, earum summa erit quantitas infinitesima: evincitur ex lemm. 8. vel etiam hoc modo:

sint

ſint quantitates quotlibet aſſignabiles, ſed numero finitæ $b+c+d+g$ &c; quæ (poſito k pro numero quolibet finito quantum libet magno) ſint $= kq$. erit & q quantitas aſſignabilis; jam ſi ſumantur ſingularum partes infinitesimæ, erit earum ſumma $\frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} + \frac{g}{m}$ &c. $= \frac{kq}{m}$, ſeu æqualis parti infinitesimæ ipſius kq.

Lemm. II. Sint infinitesimæ, numero infinitæ, ac ſibi mutuo æquales, erit earum ſumma æqualis quantitati aſſignabili; ſic infinitesima $\frac{r}{m}$ infinities ſumta eſt $= \frac{mr}{m} = r$, ſeu quantitati aſſignabili.

Lemm. III. Sint tres quantitates, A, B, C, quarum A eſt minima, C maxima, B inter utramque magnitudine media. Dico ſi A & C ſint aſſignabiles, etiam B fore aſſignabilem, hoc eſt nec infinitam nec infinitesimam.

Demonſtr. Si neges, ſit primò B infinita, ergo C finita & aſſignabilis, erit major ipſâ B infinita, quod abſurdum. Secundò, ſit infinitesima, ergo dabitur quantitas aſſignabilis A minor quantitate infinitesimâ B, contra lemma 7.

Lemm. IV. Sint infinitesimæ quælibet numero infinitæ, erit earum ſumma B æqualis quantitati aſſignabili. *Demonſtr.* ſi enim omnes ſupponantur æquales maximæ, erit earum ſumma C quantitas aſſignabilis juxta lemm. hujus II. ſin vero ſupponantur æquales minimæ, erit quoque ſumma earum A quantitas aſſignabilis juxta lemma II. hujus; unde cum ſumma B media ſit magnitudine inter A & C, & harum utraque ſit aſſignabilis, erit & juxta lem. præced. ſumma B aſſignabilis. Sed ad rem.

Reſumtis iiſdem ſymbolis, ac *Fig.* LXXXIII. ſit $VT:b$, $QZ:z$, $WA:b$, erit $ZW = y+b$, WY ſit e, & $XY:x$, erit propter triangulorum TQD & DHE ſimilitudinem æquatio prima $ye = ta$; inſuper & ob triangulorum VZW & WYX ſimilitudinem, eſt $VZ:ZW :: WY:YX$ ſeu $b+t+z : y+b :: e:x$ unde $bx+tx+zx = ye+be$, pro æquatione ſecundâ. Ex quibus ſequentia deducuntur.

Corol. I.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [306] - 284

Corol. I. Cum DH ac *WY* seu omnia *e* aut *dx* sint æqualia, ex hypothesi, si *t* seu *TQ* sit assignabilis, QZ vero seu summa ipsarum *dx*, aut ζ, constet numero infinitesimarum finito, erit juxta lemm. hujus I. ζ infinitesima; quam ob causam & *h* ac *b*, (cum easdem, non plures saltem, numero infinitesimas, ac ζ, ex constructione contineant) pariter futuræ sunt infinitesimæ; unde per lemma 10. termini $h\zeta$, $\zeta\varkappa$ & *be* nihilo fient æquales, remanebitque $ye = t\zeta$; quamobrem, cum ex æquatione prima sit $ye = ta$, erit $a = \varkappa$; unde idem, quod Schol. hujus II. Corol. II. evictum fuit, denuo sequitur: nimirum, si omnia *e* seu *dx* sunt æqualia, omnia *a* seu *dy* fore æqualia, quin & cætera, illic loci per methodum inductionis tradita, hinc legitimè colligi possunt.

Corol. II. Si vero tum ζ, tum *h*, tum *b*, constent numero infinitesimarum infinito, erunt singulæ harum juxta lemm. IV. hujus, ex quantitatum assignabilium genere; quare nullus in æquatione secundâ terminus evanescit, & hoc solo in casu, positis, ut supra, *dx* æqualibus, inter ipsa *dy* intercedet differentia; assumtâque *a* majori ipsâ $\varkappa$, erit $a - \varkappa = \frac{ye}{t} - \frac{ye - be}{h + t + \zeta}$.

Cujus differentiæ proprietates accuratius indaganti patet ipsam esse natura suâ quantitatem *infinitesimam*, seu termino Leibnitiano, *differentialem*, neutiquam vero *infinitesimæ infinitesimam*, aut *differentio differentialem*; quod tamen, si calculus differentialis quantitatibus purè differentialibus juxta celeb. *Leibnitium* applicari debeat, requiri videtur. Nisi alio (uti credibile est) prorsus fundamento sua deduxerit Vir eruditissimus.

Schol. III. Sedulo discrimen hoc attendendum restat, num infinitesimæ, si unâ plures simul considerandæ veniant, numero sint finitæ, num vero infinitæ, cum hac quidem cautelâ accuratè adhibitâ plurimæ objectiones, quibus calculus quilibet infinitesimalis urgeri alioquin videtur, sponte dispareant; neglectâ vero, non exiguam quandoque confusionem inducant.

C A-

CAPUT. IX.

De Æquationum in Analyſi infinitorum naturâ, & proprietatibus quibuſdam.

§. 1. *Æquationes indeterminatas* (hoc enim nomine in locorum doctrinâ paſſim notæ ſunt) vulgaris conſiderat Analyſis; quæ duplici viâ ad infiniteſimales reducuntur, vel *Primo* ponendo $x \pm e$ loco x &c. juxta modum §. 1. & 5. Cap. I. traditum; ſic æquatio indeterminata circulum ſpectans $2rx - xx = yy$ hac ratione abibit in ſequentem infiniteſimalem $re - xe = ya$. vel *ſecundo* integram æquationem per cujuslibet indeterminatæ pro arbitrio ſumtæ infiniteſimam multiplicando, ſic ducendo præcedentem in a emerget $2rxa - xxa = yya$.

Notari poteſt, quarumlibet aliarum indeterminatarum z & f infiniteſimas u & i, modo hæ ſuas indeterminatas toties ingrediantur, quoties e ipſam x aut a ipſam y, (quæ conditio in ſimili caſu perpetuo requiritur) hic adhiberi poſſe.

§. 2. Ex-

§. 2. Exortæ hinc *æquationes infinitesimales.*

I. Terminorum infinitesimalium additionem aut subſtractionem patiuntur, quod ſatis notum eſt.

II. Dividi ac multiplicari inſtar aliarum poſſunt per quantitates determinatas, indeterminatas, ac infinitesimas, neque ulla in his difficultas eſt, niſi forſan in poſteriori caſu.

Si enim $re - xe = ya$; dividatur per e, erit $r - x = \frac{ya}{e}$; adeoque tota fit indeterminata; ipſe ſiquidem terminus $\frac{ya}{e}$ ex lemmate 12 aſſignabilis eſt, non vero infinitesimus; tum infinitesimæ ex more præcedentium per aliunde conquiſitam æquationem tolli poſſunt.

Sin autem $re - xe = ya$ per infinitesimam a multiplicetur, fiet $rae - xae = yaa$; ex qua, licet omnes termini ex lemm. 10. evaneſcant, non pauca tamen quantitates poſitivas concernentia deduci poſſunt, mediante hoc ex ipſâ infinitesimarum naturâ profluenti lemmate.

§. 3. Si quotlibet in ſe mutuo ductæ infinitesime verb. gr. aae^3i, rurſum dividantur per alias in ſe invicem multiplicatas infinitesimas, verb. gr. e^4i, quarum numerus præcedentium numero unitate minor eſt, quod emerget $\frac{aa}{e}$ erit

erit quantitas infiniteſima. *Demonſtratio* ex iis, quæ ſcholio generali tradita ſunt, facillime conſequitur; ſit enim $a = \frac{f}{m}$, & $e = \frac{b}{m}$, eſt $\frac{aa}{e} = \frac{ff}{bm}$, ſeu infiniteſima pars ipſius $\frac{ff}{b}$.

§. 4. Reſumta jam modo inventa æquatio $rae - xae = yaa$ dividatur per e, fiet $ra - xa = \frac{yaa}{e}$, quare *Fig. LXXXVII.* vocatis $AQ: x$, $QM: l$, $DH: e$, $HE: a$, $MN: o$, $BD: \mu$. inter infiniteſimas hoc modo quæratur lineola ipſi $\frac{aa}{e}$ reſpondens; cum ſit $BH : HE : HE : HI$, ſeu $\mu + e : a :: a : \lambda$ erit (ob ipſius μ ſeu BD juxta lemm. 41. nullitatem) $\frac{aa}{e} = \lambda = HI$; adeoque $ra - xa = y\lambda$; ſed $EH : HI :: EP : PN$. ſeu $a : \lambda : y + a :: l - e + o$, quare, rejectis per lemm. 10. rejectaneis, $y\lambda = la$, quæ ad æquationem modo inventam applicata dabit $r - x = l = QM$, ut decet. Poſſet æquatio $re - xe = ya$ per plures infiniteſimas multiplicari, unde aliarum linearum determinabilium magnitudo innoteſceret. Cum autem inter mox ſecutura, plurima huc ſpectantia reperiantur, poterunt inde peti, quæ hujus theorematis illuſtrationi exempla inſerviunt.

§. 5. III. Æquationes infiniteſimales, manen-

nente utrinque æqualitate, ad quaslibet poteſtates evehi poſſunt; ſic æquatio $re - xe = ya$ quadratè multiplicata dabit $rree - 2rxee + xxee = yyaa$, quæ diviſa per e, dabit $rre - 2rxe - xxe = \frac{yyaa}{e} = yy\lambda$; jam autem $TP : PN :: DH : HI$. ſeu $t + e : l - e + o :: e : \lambda$; unde $le = t\lambda$: quæ ad inventam æquationem applicata, ejectis infiniteſimis, dabit $t : l :: yy : rr - 2rx + xx$, adeoque rationem ſubtangentis ad ſubnormalem.

Sit retentis iiſdem ſymbolis, ac Figurâ, æquatio omnibus curvis conveniens, $le = ya$; quæ multiplicata cubicè dabit $l^3 e^3 = y^3 a^3$, ac rurſum per aee diviſa, $l^3 \frac{ee}{a} = y^3 \frac{aa}{e}$; jam cum HI ſeu λ ſit $= \frac{aa}{e}$, erit $H\Lambda = \frac{ee}{a}$, quæ vocetur π. Adeoque erit $l^3 : y^3 :: \lambda : \pi :: HI : H\Lambda$. inventis jam λ & π inter quantitates infiniteſimas, ſi deſideremus lineas homologas inter quantitates aſſignabiles, ipſi TD ducta normali TW, donec productam DQ in M ſecet, vocetur $QW : n$, erit $HI : H\Lambda :: QM : QW$, ſeu $\lambda : \pi :: l : n :: l^3 : y^3$.

Poſſunt hæc variis caſibus applicari, plurimarumque hinc linearum rationes inveniri, ac curvilineorum ſolidorumque nondum penitus exhauſtæ proprietates aliquatenus ampliari.

Depreſſionem æquationum infiniteſimarum per radicum extractiones, cum ſine quadam præparatione eandem tolerare non videantur, hic tranſeo.

§. 6. Æquatio infiniteſimalis, verb. gr. $re - xe = ya$, ſi ſinguli ejuſdem termini infinities, ac juxta conditionem Cap. II. §. 12. expreſſam ſumantur, mutatur in æquationem *collectivam*, ſeu appoſito termino *Leibnitiano*, *ſummatricem*, ſic omnia re — omnia xe = omnia ya, eſt æquatio *Collectiva* ſive *ſummatrix*. Harum exempla in ſuperioribus paſſim occurrunt.

Schol. Clarum hinc eſt, ex datâ qualibet æquatione infiniteſimali & collectivam ipſius legitime conſequi; licet ex collectivâ quâlibet infiniteſimalis per regreſſum deduci ſemper nequeat. Sic reſumta *Fig.* XXVI. poſitiſque $QD:y$, $QP:e$, $DI:x$, $GI:a$, idem curvilineum AFO tum per omnia ye, tum per omnia xa exprimetur, unde quidem omnia ye = omnia xa; non tamen ſequitur fore in ſingulis trapezium $DQPE$ ſeu ye ſemper æquale trapezio $DIGE$ ſeu xa, quod notetur ad errores præcavendos.

CA-

CAPUT. X.

De Methodo Infinitesimali inversâ.

SInt x, y, f, z, indeterminatæ; ac e, a, i, u, infinitesimæ ad ipsas respectivè pertinentes.

§. 1. Quæritur indeterminatus terminus, ad quem terminus infinitesimalis constans, ex quantitatibus determinatis & infinitesimâ quâcunque, ut rre, ba &c. reduci potest? loco infinitesimæ e aut a surrogetur quantitas respectiva indeterminata x aut y, & habebitur terminus quæsitus rrx aut by.

§. 2. Quæritur idem; si terminus infinitesimalis præter determinatas, si occurrant, ac infinitesimam, etiam indeterminatas, sed ad infinitesimam tantum relativas, contineat: ut $rrxxe$, y^3a, &c? ipsi infinitesimæ e aut a sufficiatur indeterminata relativa x aut y; ac quod emergit, per ipsarum x aut y potestatis exponentem dividatur, & obtinebitur $\frac{1}{3}rrx^3$ & $\frac{1}{4}y^4$. *N. B.* potuisset uterque hic casus, tanquam terminos infinitesimales proprios spectans, unico canone determinari.

§. 3. Quæritur terminus indeterminatus, si expositus infinitesimalis præter determinatas & in-

infiniteſimam alias inſuper indeterminatas, ſed ad infiniteſimam neutiquam relativas, contineat, ut $rrxxy^3a$, z^3ffxxe?

Et hactenus tantum reſponderi poſſe videtur, per ſupra tradita nec has nec ullum terminum infiniteſimalem alienum, ſi ſolus hoc modo exponatur, reducibiles exiſtere; ac non niſi ipſum tot comitentur termini infiniteſimales, quot juxta Schol. Cap. II. §. 13. ſubjunctum requiruntur.

§. 4. Ut vero, expoſitâ terminorum infiniteſimalium multitudine, verb. Gratia, $ffxxa+5ffxye+2xxyfi$, dignoſci poſſint, quinam ſint reducibiles: ſumatur quilibet ex hiſce terminis $2xxyfi$, cujus pars fi, (quæ, ſi indeterminatis aliis juncta non foret, infiniteſimalem proprium conſtitueret) inſtar termini infiniteſimalis proprii juxta §. 2. hujus reducatur in $\frac{1}{2}ff$, ac loco fi ſubſtituatur, habebitur $xxyff$; qui redactus juxta præcedentia ad infiniteſimas dabit, $2xxyfi+2ffyxe+ffxxa$; unde patet totam terminorum expoſitam multitudinem, excepto $3ffxye$, ad indeterminatum $xxyff$ eſſe reducibilem.

Demonſtratio præcedentium è locis ſat multis & Cap. II. §. 13. Scholio peti poteſt.

§. 5. Cognito jam, quinam ſint termini infiniteſimales ad congruos indeterminatos reducibiles, habebitur eo ipſo omnium æquationum in-

infinitesimalium (modo termini eas constituentes sint vel proprii, vel alieni legem Schol. Cap. II. §. 13. adimplentes) ad suas indeterminatas reductio. Cumque ex Cap. II. §. 13. termini infinitesimales collective seu toties sumti, quoties infinitesima quævis indeterminatam quantitatem, quam componit, ingreditur, sint æquales valori absoluto termini indeterminati, unde originem duxerunt; variarum hinc æquationum collectivarum, reductio ad indeterminatas enascitur, & ex dato valore infinitesimalium collectivo, earundem valorem absolutum multis in casibus reperiendi methodus.

Ex. I. Sit æquatio collectiva, omnia re — omnia xe = omnia ya; erunt, juxta §. 13. Cap. II. omnia $ya = \frac{yy}{2}$; ergo omnia re — omnia $xe = \frac{yy}{2}$; quod æquationis genus quodammodo *mixtum* appellari potest, cum altera pars sit collective infinitesimalis, altera absoluta & indeterminata, tum & omnia re — omnia $xe = rx - \frac{1}{2}xx$; adeoque ex modo proposita collectiva infinitesimali oritur hæc indeterminata, $2rx - xx = yy$.

Ex. II. Sit (*Fig. LXXXVI.*) vocatis $AQ:x$, $TQ:t$, $AT:f$, $DH:e$, $EH:a$, curva ADE ejus naturæ, ut existentibus p & q determinatis

tis, ſit perpetuo $p:q::f:y$. unde $qf = py = qx - qt$; & ductis omnibus in a, erit $pya = qxa - qta$; ac loco ta poſito ye, erit $pya = qxa - qye$; & addito utrinque $2qye$, ac omnibus collective ſumtis, emerget poſt tranſpoſitionem omnia $2qye =$ omnia $qxa +$ omnia $qye -$ omnia pya; adeoque (cum altera hujus æquationis pars ſit reducibilis per hujus §. 2. & 4. ad $qyx - \frac{1}{2}pyy$) tandem, juxta Cap. II. §. 13. evadet $\frac{1}{2}xy - \frac{pyy}{4q} =$ omnia $ye =$ trilineum AEP, unde & hujus quadratura innoteſcit.

Potuiſſet ipſa alio modo inveniri; ſi enim inventæ æquationi $pya = qxa - qye$ addatur utrinque qxa, erit $pya + qye + qxa = 2qxa$; quibus collectivè ſumtis, ac juxta §. 2. & 4. hujus reductis orietur ex Cap. II. §. 13. $\frac{\frac{1}{2}pyy + qyx}{2q} =$ omnia $xa =$ trilineum KAE.

Scholium Notetur reductionem hanc ſupponere indeterminatas x & y &c. nullâ ſui parte determinatas eſſe, ſed meris infiniteſimis ab initio ad finem per totam ſui longitudinem componi, & eodem quidem modo, quod circa Cap. I. §. 12. expreſſe monuimus; tum & æquationes ex reductione reſultantes terminum nullum omnino determinatum admittere. Si enim infiniteſimæ ſine ullâ ad indeterminatas ſuas limitatione accipiantur, una eademque infiniteſimalis æquatio varias quandoque curvarum ſpecies reſpiciet.

Quod ut breviter oſtendam, ſit æquatio infiniteſimalis $2ya = 2xe$, quæ collective ſumta dabit omnia $2ya =$ omnia

nia $2xe$; & juxta præcedentia reducta exhibebit $yy = xx$, ac extractâ radice $y = x$; unde primo hæc æquatio infinitesimalis *Fig. LXXXIV.* ad triangulum verb. gr. RPW (in quo $RQ:x$, & $QS:y$,) reducitur.

Si vero inventæ æquationi $yy = xx$, determinata quantitas rr sub quolibet signo addatur, erit, ex. gr. $yy = xx - rr$ ad hyperbolam, ad quam eadem hæc infinitesimalis secundo referri potest, positis enim in eadem figurâ $RA:r$, $RQ:x$, $QD:y$, $QP:e$, $EH:a$, sit curva ADE Hyperbola, unde ipsius æquatio $xx - rr = yy$, quæ reducta ad infinitesimas dabit $2xe = 2ya$.

Unde positis RP in PW, RQ in QS &c, tum EP in EF ac DQ in HK &c. erit EPF triangulum $=$ omnia $ya = \frac{1}{2}yy$; tum trapezium $AGWP =$ omnia xe, adeoque hic reductio omnium xe ad $\frac{1}{2}xx$ locum non habet, hâc quidem de causâ, quod RP seu x non in totum, sed parte solummodo sui AP ex infinitesimis PQ, QL, LC, &c. seu infinitis componatur; residuâ nimirum portione RA determinatâ manente, quare hoc in casu omnia xe seu trapezium $AGWP$ æquatur $\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}rr$.

Tertio, Sit jam $QP:x$, eaque supponatur crescere per QL &c. seu e; ac $QD:y$ decrescere per $DZ:a$; exponaturq. quadrantis circuli æquatio $rr - xx = yy$, dabit hæc infinitesimalem $-2xe = -2ya$ &, mutatis signis, $2xe = 2ya$; sunt autem (positâ QP in QX &c. omnia $xe =$ triangulo PCV, ac his æqualia omnia ya (si quidem y perpetuo in EF, HK, NO ponatur) constituent trapezium $E34F$ seu $\frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}yy$.

Unde patet quamlibet æquationem infinitesimalem, simpliciter sine restrictione propositam, unam determinatam curvam non respicere: cum manente eadem infinitesimali, post reductionem quantitates quælibet determinatæ multis modis æquationi adjungi queant, quorum tractationem magis accuratam, cum plus requirat temporis, quam mihi mea impræsentiarum permittunt negotia, aliorum indagini ulteriori relinquo, hoc addo:

§. 6. Sit æquatio quælibet infiniteſimalis, $rxe - yye = 3yya$; quæ collective ſumta, ſi altera pars $3yya$ ex §. 2. hujus reducatur, abit in collectivè mixtam (vid §. 5. exempl. I.) omnia rxe — omnia $yye = y^3$. quæruntur hinc termini infiniteſimales collectivè ſumti, qui valorem ipſius y^3 per quaſlibet indeterminatas verb. gr. f^3 multiplicati aut diviſi, ſeu ipſum $y^3 f^{\mp 3}$ adæquent. Quod quomodo obtineatur in caſu multiplicationis, ſequens docebit theorema: terminis expoſitis infiniteſimalibus $rxe - yye$, per f^3 ſeu quantitates indeterminatas prius multiplicatis, pars æquationis expoſitæ abſoluta y^3 per terminum infiniteſimalem $3ffi$ ex f^3 oriundum multiplicata, cum ſuo ſigno legitimo addatur; & ſumma hæc infiniteſimalium collective ſumta æquabitur quæſito valori abſoluto $y^3 f^3$.

Sic, ut in eodem maneamus exemplo, ex inventa æquatione omnia rxe — omnia $yye = y^3$, ſequitur omnia rxf^3e — omnia $yyf^3e +$ omnia $3y^3ffi$ fore æqualia valori abſoluto $y^3 f^3$.

Demonſtratio. Cum enim (ex Cap. II. §. 13) ſit $y^3 f^3 =$ omnia $3yyf^3a +$ omnia $3y^3ffi =$ omnia rxf^3e — omnia $yyf^3e +$ omnia $3y^3ffi$; ſi collectiva hæc ad infiniteſimalem deprimarur (fieri

(fieri enim hoc poſſe ſupponimus) ac per f' dividatur, redibit æquatio expoſita.

Coroll. Quomodo hoc diviſionibus, per ipſius f exponentem negativum, accommodetur; tum & in radicum extractionibus ac poteſtatum ad altiores gradus evectionibus (quæ multiplicationis ac diviſionis ſpecies quædam ſunt) uſui eſſe queat, quilibet hinc eruet.

CAPUT. XI.

Miſcellanea.

Præparatio Communis. Sit, *Fig. LXXXV. LXXXVI.* &c. curva ADE, cujus applicata $DQ:y = TI$, intercepta $AQ:x$, ſubtangens $TQ:t$, cujus abſciſſa $TA:f$, tangens $TD:s$, infinitesimæ $QP = DH:e$, $HE:a$, $DE:u$, $FT:i$.

§. 1. Satis jam notum eſt, ſi *Fig. LXXXV.* & *LXXXVI.* HM ſit $= TQ = t$, trilineum PEL ſeu omnia ta, æquari trilineo AEP, ſeu omnibus ye; ſpatium vero PLO, ſeu complementum trilinei PEL, ſemper æquari ſummæ vel differentiæ trilineorum APE & AFG, neſcio an adhuc animadverſum ſit; illud obtinet, ſi curva ADE (*Fig. LXXXV.*) verſus axem concava ſit; hoc ſi verſus axem (*Fig. LXXXVI.*) convexa ſit.

Demonſtr. Cum ex hypotheſi ſit perpetuo $HM = QT$, & $EL = FP$, erit ZL (*Fig. LXXXV*) $= NO = e + i$; ſed in *Fig. LXXXVI.* $= e - i$; adeoque cum in utroque caſu ſit $MN = y$, erit curvilineum POL in primo $=$ omnia $ye + yi$, in ſecundo $=$ omnia $ye - yi$; unde cum APE ſit $=$ omnia ye, ac $AGF =$ om-

omnia yi, patet propositum. Posset idem more vulgari ex figurarum æquivalentia demonstrari.

Schol. Hinc, si curva in A cum axe $A\mathcal{Q}$ concurrat, posset erui curvaturæ diagnosticum; cum si curva existat versus axem concava sit $t = x+f$; si vero sit convexa, evadat $t = x-f$. verum hæc Capite I. ex professo tractavimus.

§. 2. Sit r determinata, ac $t:y::e:a::z:r$, erit $za = re$; adeoque, si (*Fig. LXXXV.*) r in $B\mathcal{Q}$ applicetur ad e, ac z in HM ad a. erit spat. $HPM =$ omnia $za =$ omnibus $re =$ rectangulo $B\mathcal{Q}SA$, $= rx$, quod ab aliis jam demonstratum est, ast spatium PMN semper adæquari rectangulo $ASCT$ nondum observatum memini.

Demonstratio facilis est, cum enim ex hypothesi sit $zy = rt$ seu rectangulum $HMNP =$ rectangulo $\mathcal{Q}BCT$, ac spatium $PHM =$ rectangulo $\mathcal{Q}BSA$, erit spat. $PMN =$ rectangulo $ASCT$. *q. e. d.*

Idem ex infinitesimali calculo evincitur, sit enim NO ipsius z infinitesima $= o$; erit, æquatione $zy = rt$ ad infinitesimas redactâ, $za+yo = re+ri$; unde cum sit $re = za$ remanebit $yo = ri$, quare omnia $yo = PMN =$ omnia $ri = rf =$ rectangulo $ASCT$.

§. 3. Sit $t:y::e:a::r:z$, erit $ze = ra$, tum $zt = ry$, quæ redacta ad infinitesimas, (si curva,

va, ut in *Fig. LXXXVI.* ſit verſus axem convexa) dabit $ra = to + ze - zi$; unde quia $ra = ze$, erit $to = zi$; quare ſi z jugiter in TS ad FT ſeu i applicetur, erit $SV = i$, & $VW = o$; jam, cum ſit $to = zi$, erit $o : i :: z : t$, ſeu $VW : VS :: TS : TR$, quare curvæ ASW hoc modo generatæ ſubtangens TR ſemper æquabitur curvæ expoſitæ ADE ſubtangenti $TQ = t$.

Quod notabile, videtur cum omnibus curvis, habitâ curvitatis & ſigni ipſa e & i copulantis ratione, competat.

Schol. Qua jam ratione variæ curvarum proprietates, omnibus curvis communes, per aliarum rectarum curvas in genere ſpectantium (tangentium, ſubtangentium, normalium, ſubnormalium &c.) infiniteſimas erui, ac adhibitâ, quam capite I. tradidimus, tangentium methodo, non paucis theorematum generalium acceſſionibus, quæ particulari cuidam curvæ alligatæ non ſunt, Geometria locupletari valeat, ſatis hinc manifeſtum eſt; ſuffecerit digitum intendiſſe.

§. 4. Sit Figura LXXXVI. curva ADE ejus proprietatis, ut ſubtangentis abſciſſa $AT : f$, ad tangentem $TD : s$, conſtantem habeat rationem, ut p ad q; erit $qf = ps$, ſed propter triangulum TQD rectangulum eſt $tt + yy = ss$; in

in quâ æquatione posita $s = \frac{qf}{p}$ erit $pptt + ppyy = qqff$; quæ redacta ad infinitesimas ac per 2 divisa dabit $ppte - ppti + ppya = qqfi$; factaq. $ta = ye$ juxta sæpius ostensa, $pptte - pptti + ppyye = qqfti$; rursumque posito $ss = tt + yy$ ac $qqff = ppss$ fiet tandem $qqffe = qqfti + pptti$, quæ æquatio cum ipsarum f & t infinitesimas e & i contineat, si applicetur TQ seu t in TS erit $SV = i$ & $VW = e - i$, curvæque ASW hinc emergentis subtangenti RT vocatâ n, erit $RT : TS :: SV : VW$ seu $n : t :: i : e - i$; unde $te - ti = ni$; ex quâ, mediante inventa modo æquatione ejectis infinitesimis, invenietur $RT = n = \frac{qqfft}{qqft + pptt - qqff}$; unde datâ methodo tangentium inversâ dabuntur curvarum AS & AD constructiones.

§. 5. Sit, *Fig. LXXXVII.* curva ADE, cujus subnormalis QM vocetur l, normalis $DM : k$, recta DR ex puncto curvæ D juxta datam quamlibet conditionem ducta, axemque AQ productum in R secans producatur versus V, dicaturque $DR : p$, ac $MR : h$; erit $QR = l + h$, quæ compendii gratia appelletur : b; quod si, ductâ FE curvam in puncto E ipsi D proximo tangenti, idem fiat respectu applicatæ

catæ EP; ac sit ES axem in S secans linea eandem ad punctum E lineasque ad ipsum respectivas relationem habens, quam habet DR ad punctum D, lineasque hoc ipsum similiter spectantes; supposito jam lineas DR & DS protractas in V sibi mutuo occurrere, idemque fieri ductis similibus lineis ex omnibus curvæ ADE punctis, erit punctum V ad novam hinc ortam curvam VW; cujus natura quæritur & constructio.

Quem in finem, productâ DH utrinque in B & O, dicantur $HI: \lambda$, $HO: \varphi$, $MN: o$, $RS: \varkappa$, quarum singulæ juxta lemma 41. sunt infinitesimæ, BD vero appelletur: μ. tandem sit $DV: z$ erit $RV = z - p$. Jam ob triangulorum DOV & SRV similitudinem est $OD: DV :: SR: RV$. seu $e + \varphi : z :: \varkappa : z - p$, unde $\varkappa e + z\varphi - pe - p\varphi = z\varkappa$, (signetur X.) tum &, ob rectarum BO & FS parallelismum, est $BH: HO :: FP: PS$. seu $\mu + e : \varphi :: t + e + i : b - e + \varkappa$, unde cum BD seu μ ex lemm. 41. nihilo æquivaleat, amotis juxta lemm. 10. rejiciendis, fiet $be = t\varphi$; quæ cum inventâ modo æquatione litterâ X notatâ si ad φ determinetur, ex utraque orietur $bze - bpe - pte + tze = tz\varkappa$, (signetur Υ) hæc autem cum infinitesimas e & $\varkappa$ adhucdum contineat, alia reperienda est æquatio, cujus ope tolli possint, quæ

juxta

juxta præcedentia ſequenti modo acquiritur; ſtatuatur b ſeu QR in QG, & PS in PL, donec per earum extremitates nova curva AGL deſcribi poſſit, erit $GK = e$ & $KL = PS - QR = x - e$; quare QC ipſius curvæ AGL ſubtangenti vocatâ: n, fiet QC: QG:: GK: KL. ſeu n: b:: e: $x - e$. adeoque $nx = be + ne$; quæ ad æquationem littera γ ſignatam applicata, exhibebit $z = \frac{pbn + ptn}{bn - bt}$.

Unde cognitâ DV ſeu z tum longitudine tum poſitione, datur punctum V in curva VW, adeoque hujus conſtructio; & ſi placuerit, etiam relatio ad axem AS, juxta methoCap. V. §. 12. circa evolutas inſinuatam.

Generali hoc theoremate plurimarum curvarum examen inſtitui ac conſtructio effici poteſt.

Corol. I. Poſita enim ipſa b æquali nihilo, erit $b = l$, & $p = k$, rectæque DR & DM item ES & EN coincident; eritque VW ipſius AE evoluta ac $z = \frac{kln + ktn}{ln - lt}$, uti Cap. V. §. 11. Cor. I. inventum.

Corol. II. Si vero DR juxta aliam quamlibet conditionem ducta ſit, & repræſentet verb. gr. viam radii, poſt refractionem in ſuperficie curvæ ADE verſus R tendentis, erit VW curva á radiis poſt refractionem concurrentibus formata.

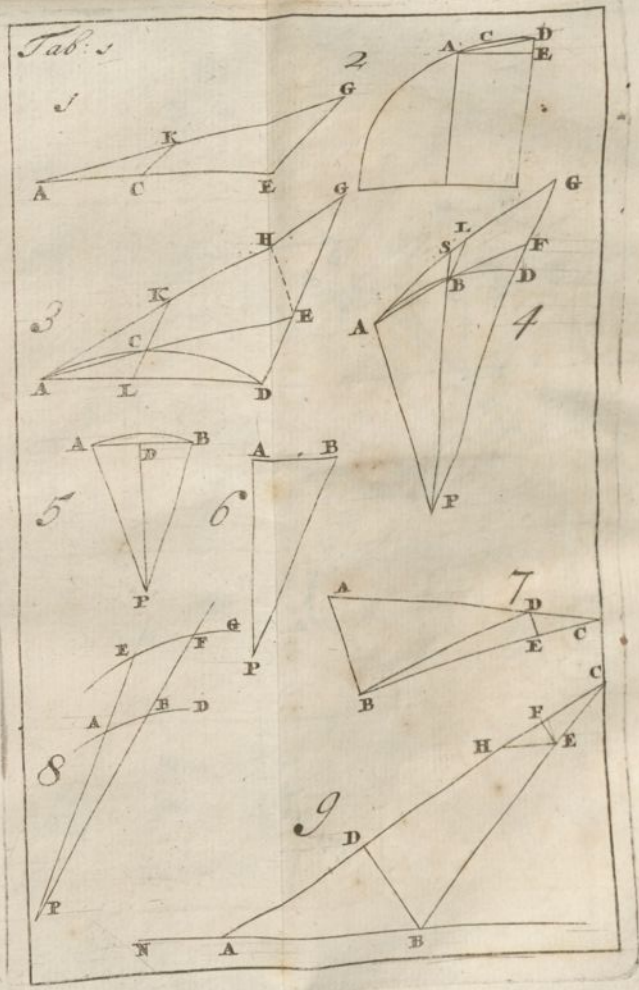
Corol. III.

Corol. III. Quod ſi DR cum recta DM faciat angulum $RDM = MDQ$, erit VW curva ex radiis QD & PE ſibi mutuo parallelis, ac ad ſpeculum concavum ADE reflexis, oriunda.

Corol. IV. Unde cum conditio hæc infinitis modis varia eſſe poſſit, juxta cujus leges linea DR duci poteſt; infinitarum, quæ hiſce modis generantur curvarum VW conſtructiones evolutarum, catacauſticarum, diacauſticarum &c. unico hoc theoremate expediuntur. Particularia, cum poſt inventum hunc canonem plus requirant laboris, quam induſtriæ, tranſilio; uti & caſum, quo interſectio V cadit ab altera axis parte.

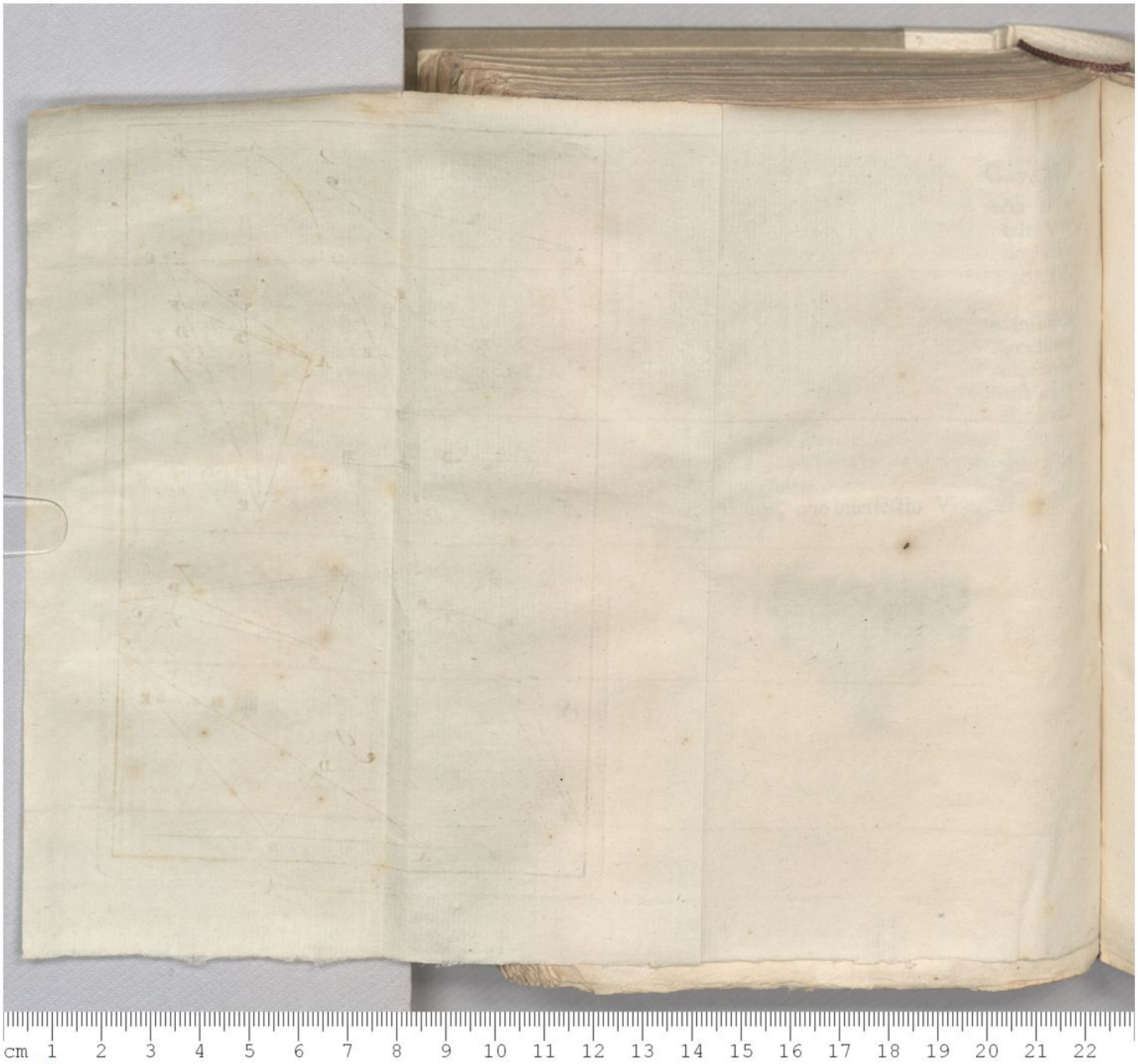
FINIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 149, [326] - 304



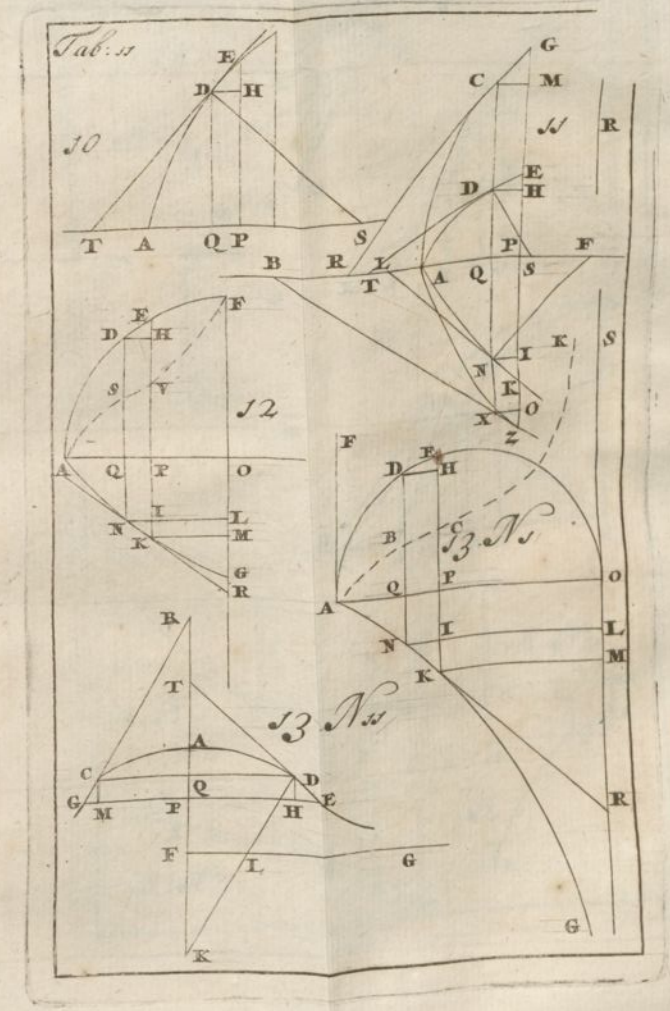
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [327] - -



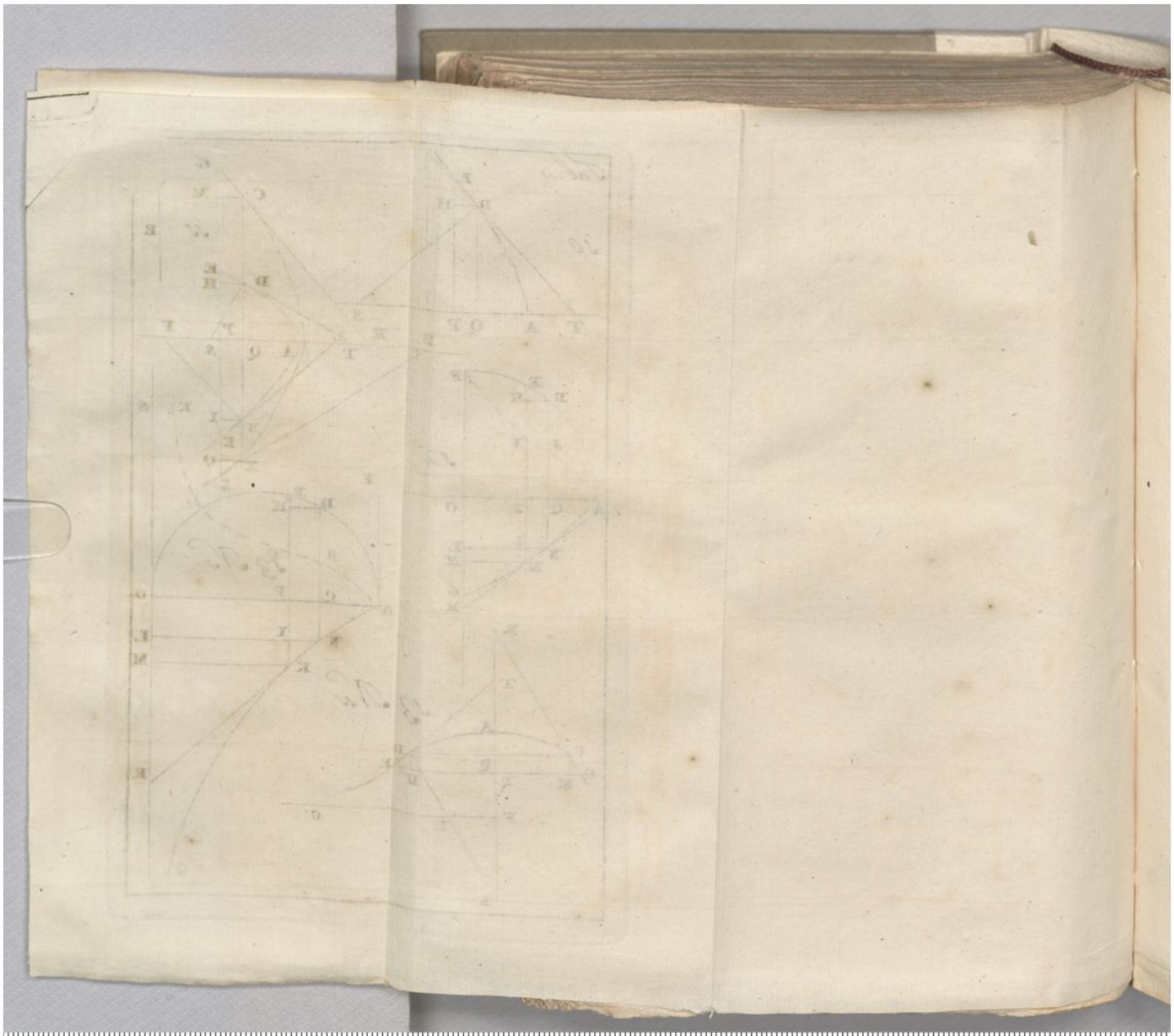
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [328] - -



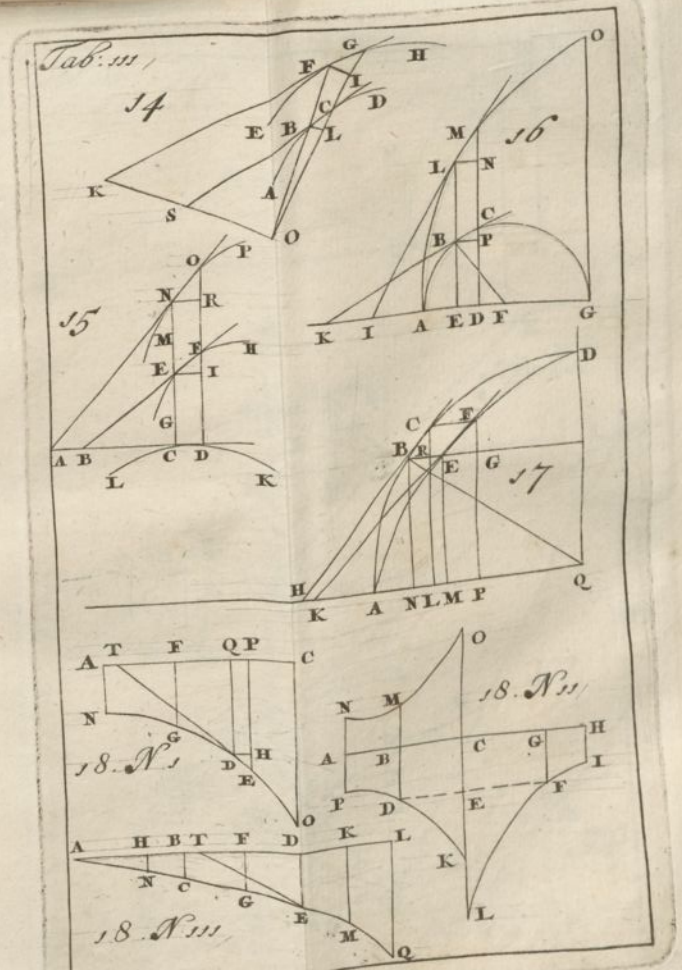
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [329] - -



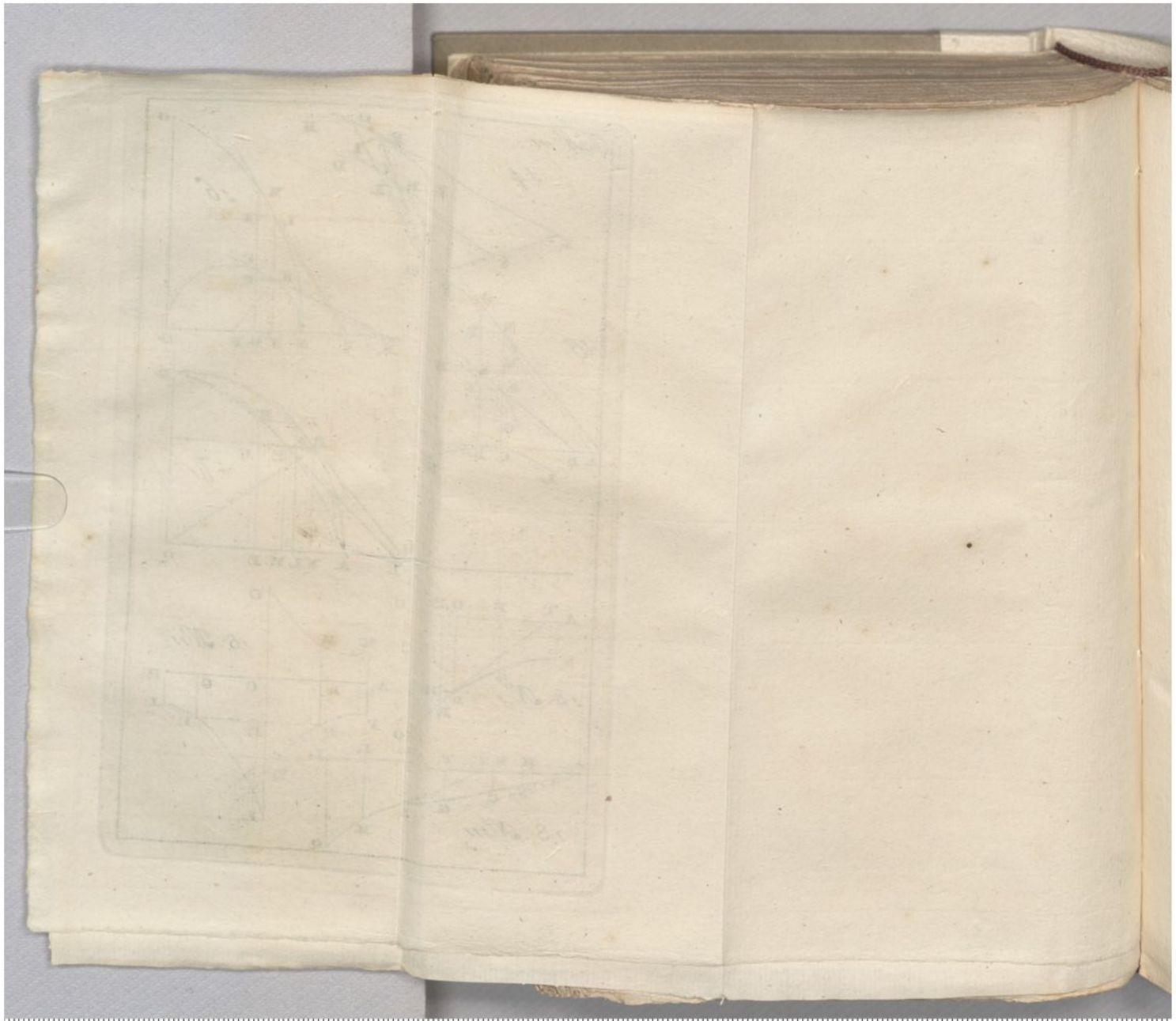
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [330] - -



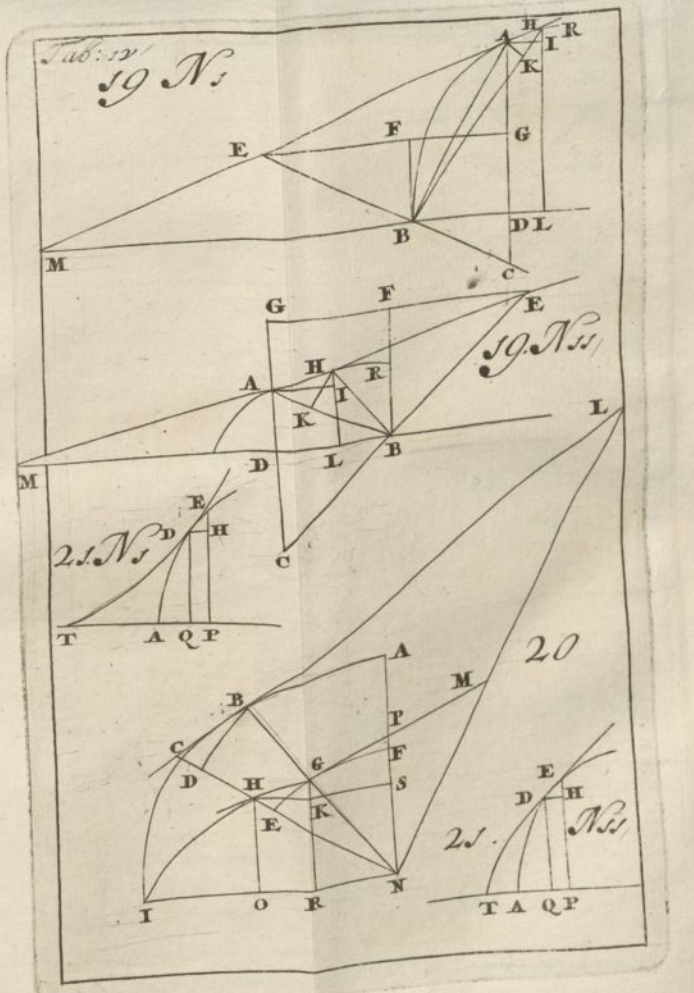
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [331] - -



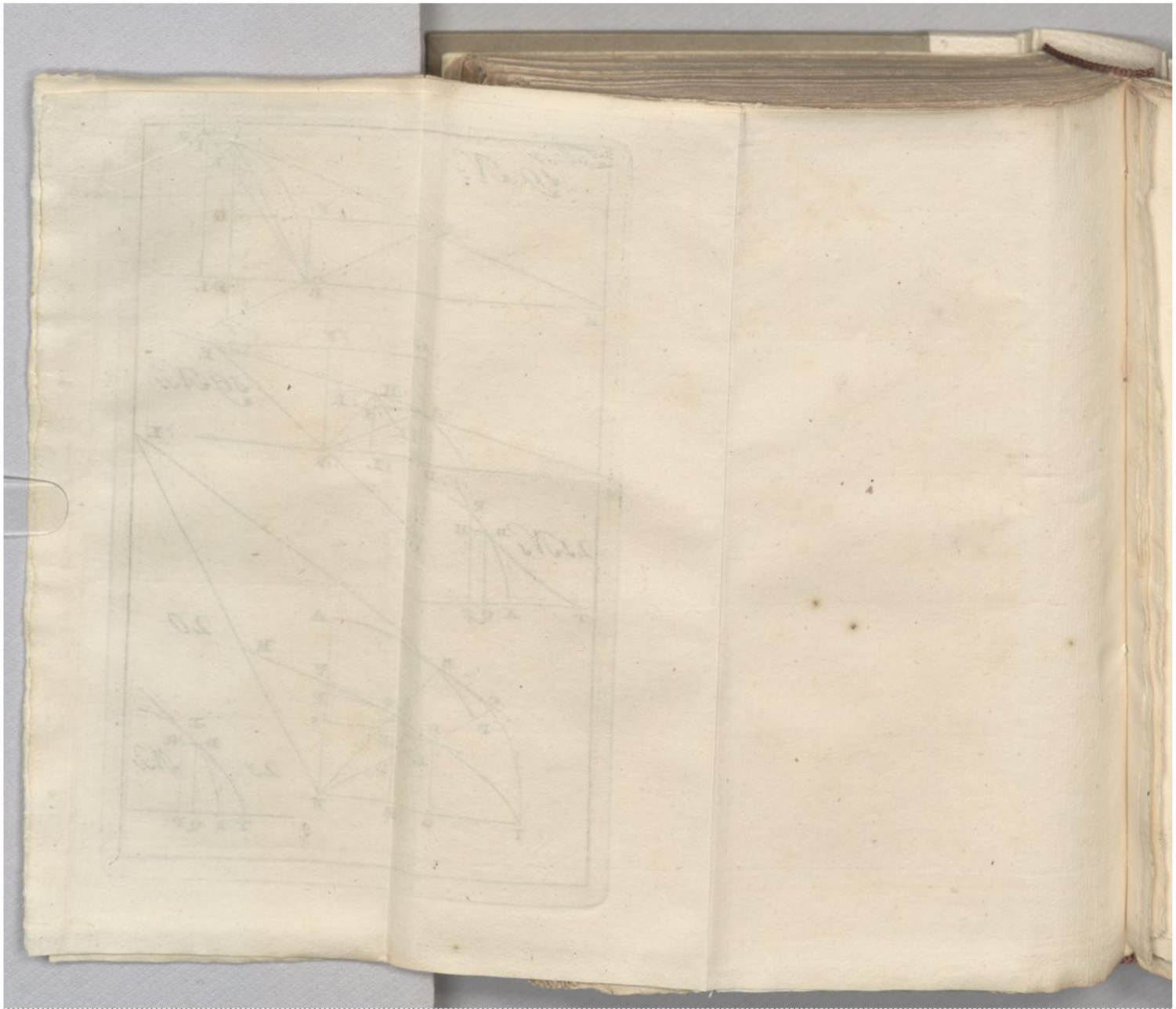
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [332] - -



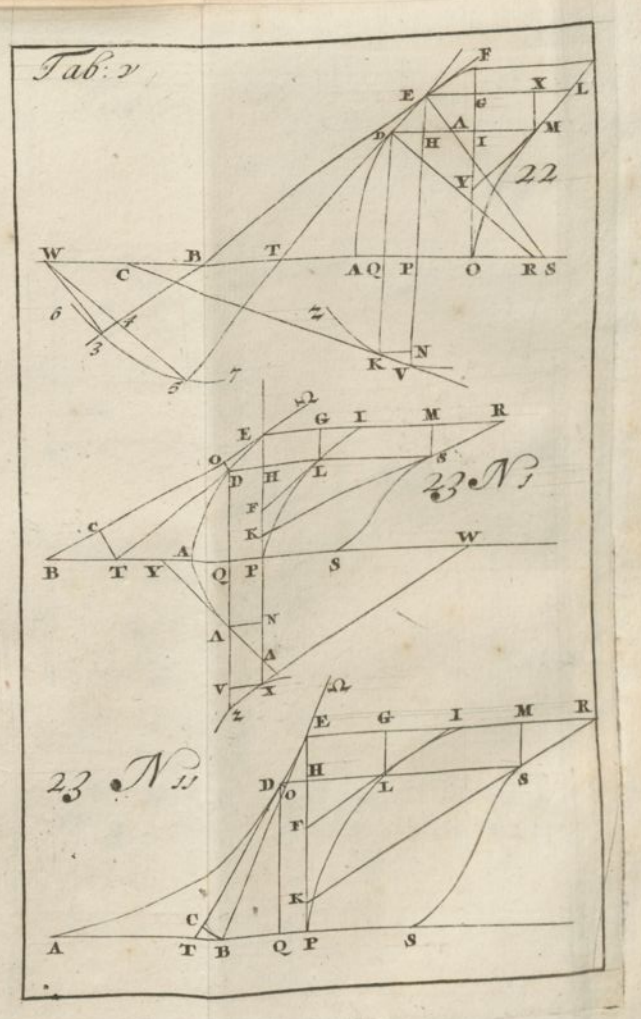
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [333] - -



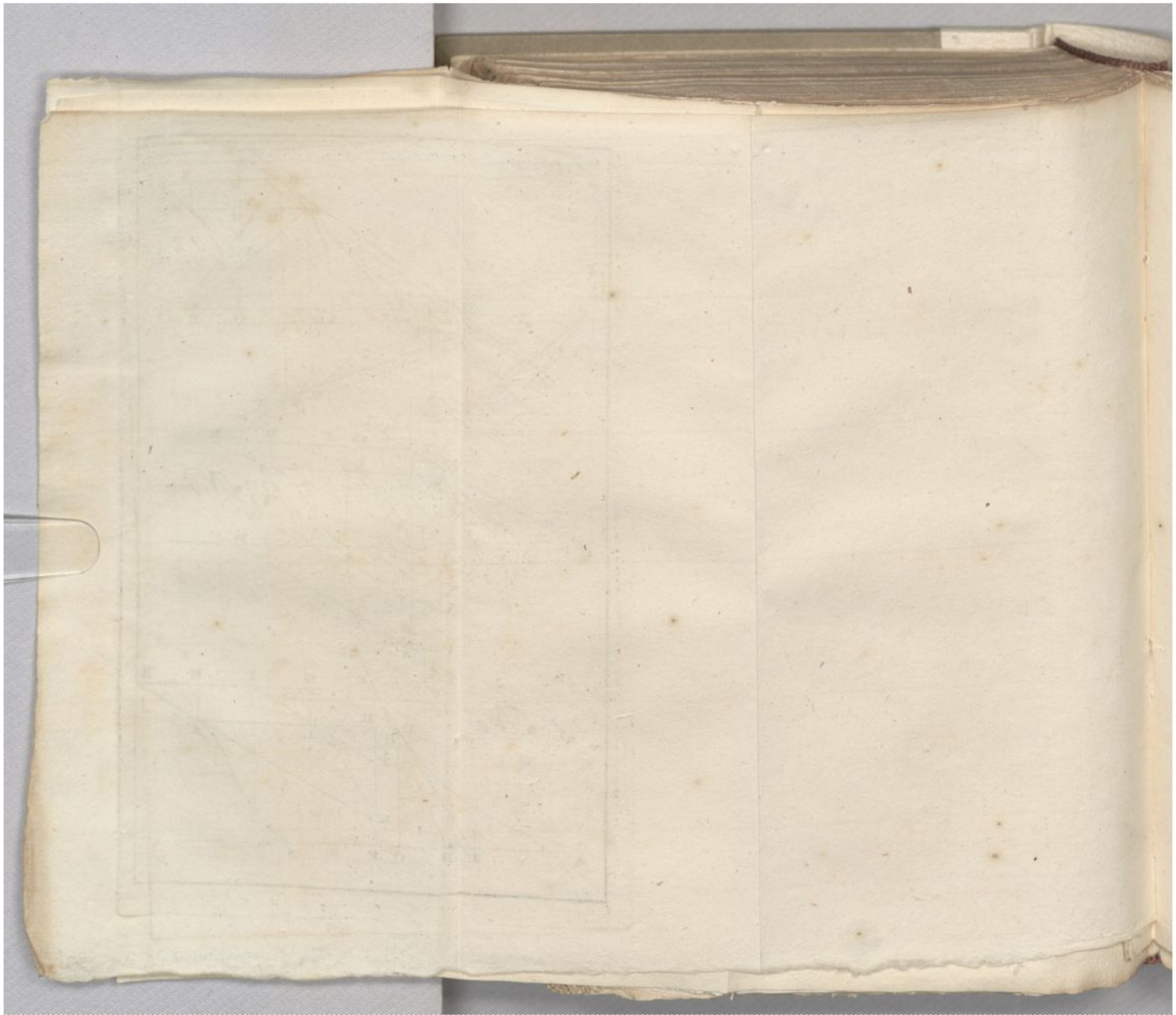
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [334] - -



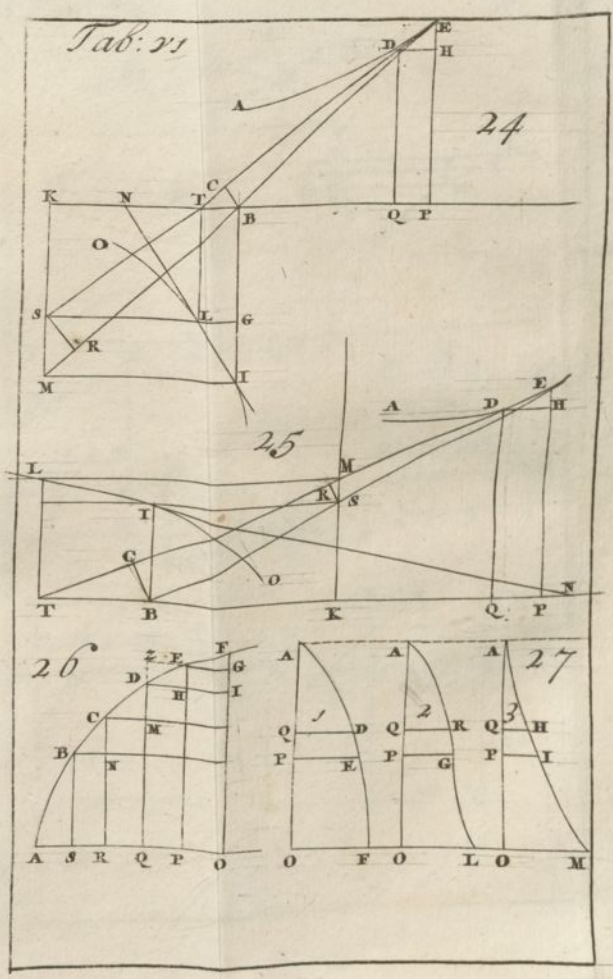
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [335] - -



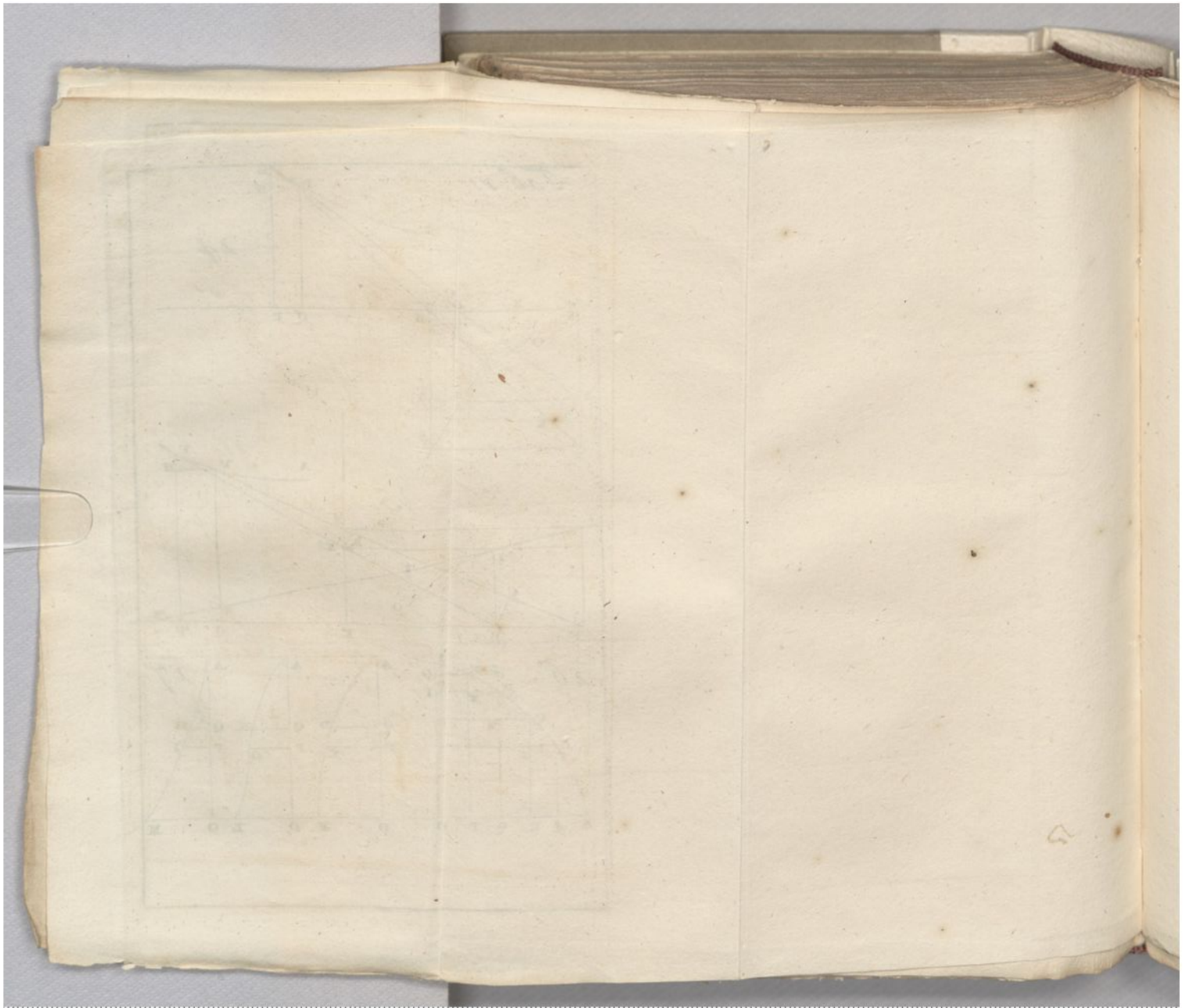
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [336] - -



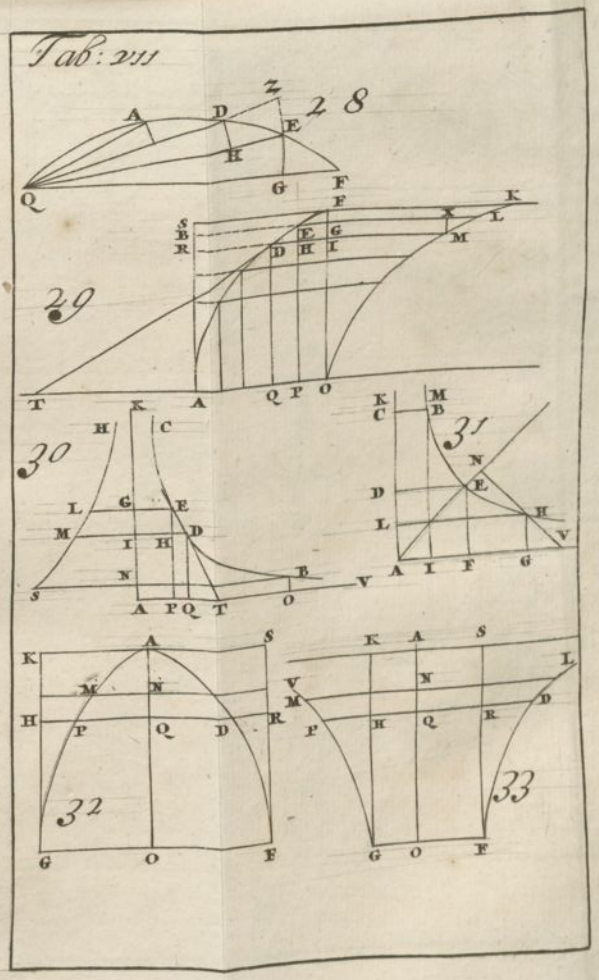
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [337] - -



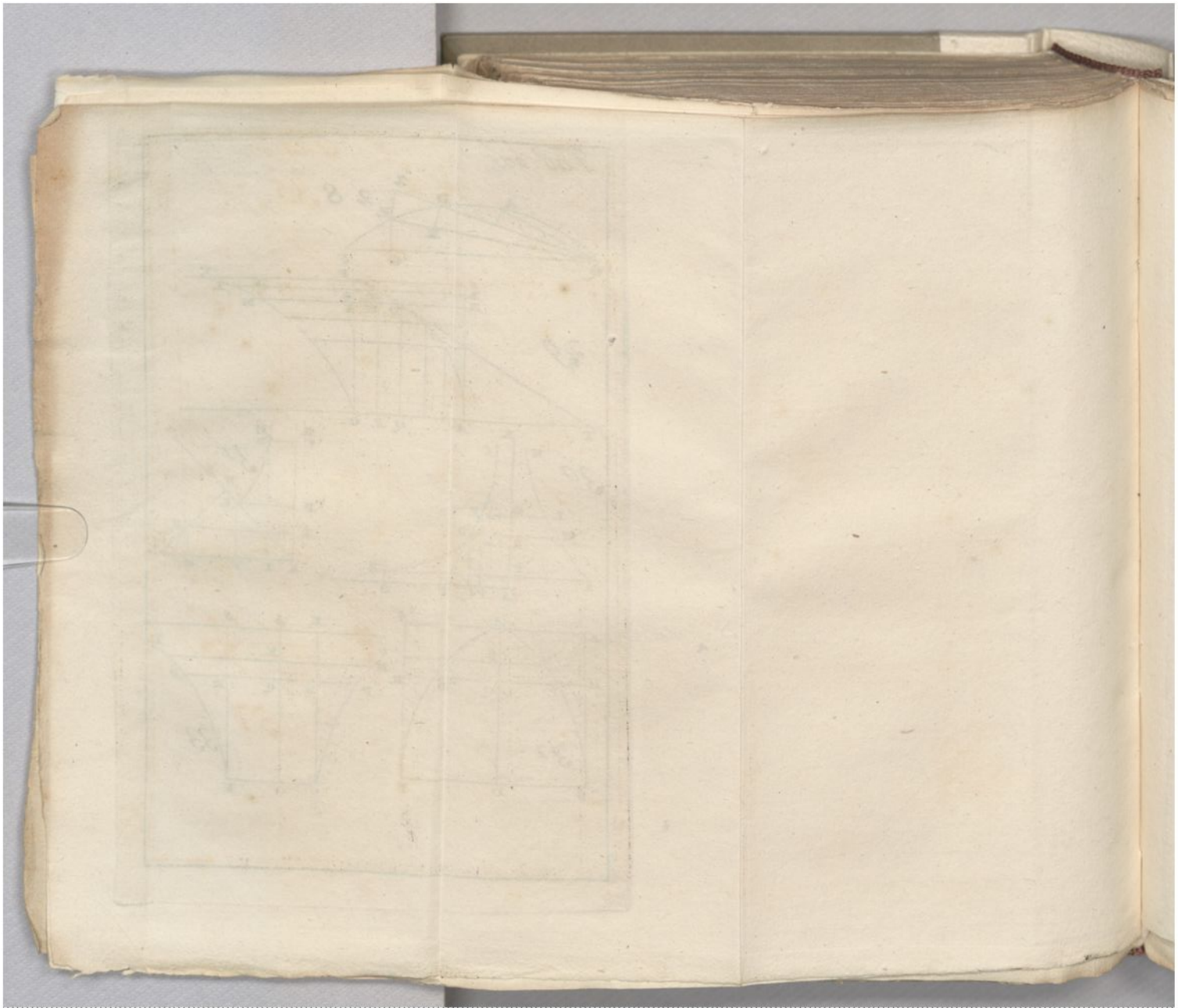
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [338] - -



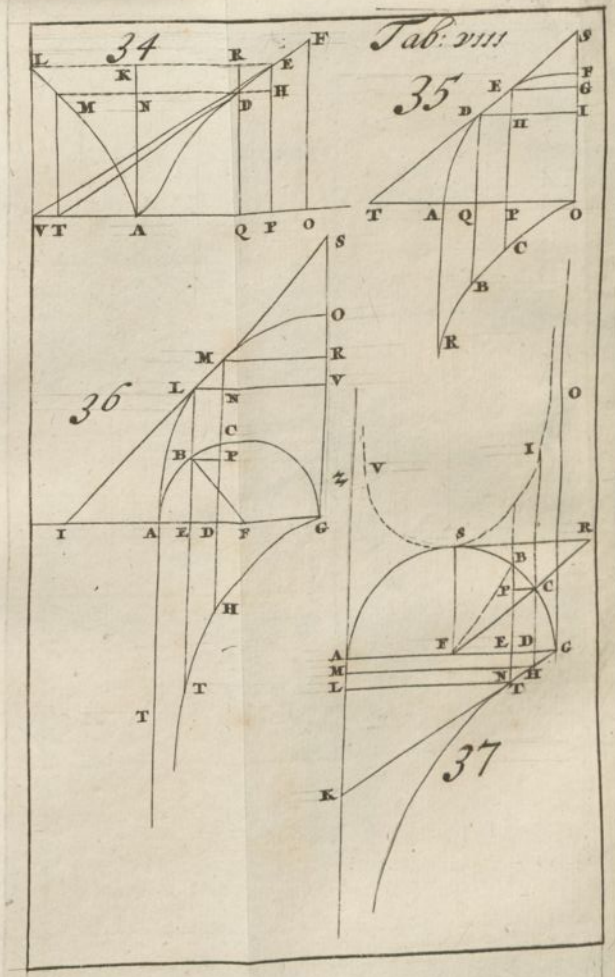
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [339] - -



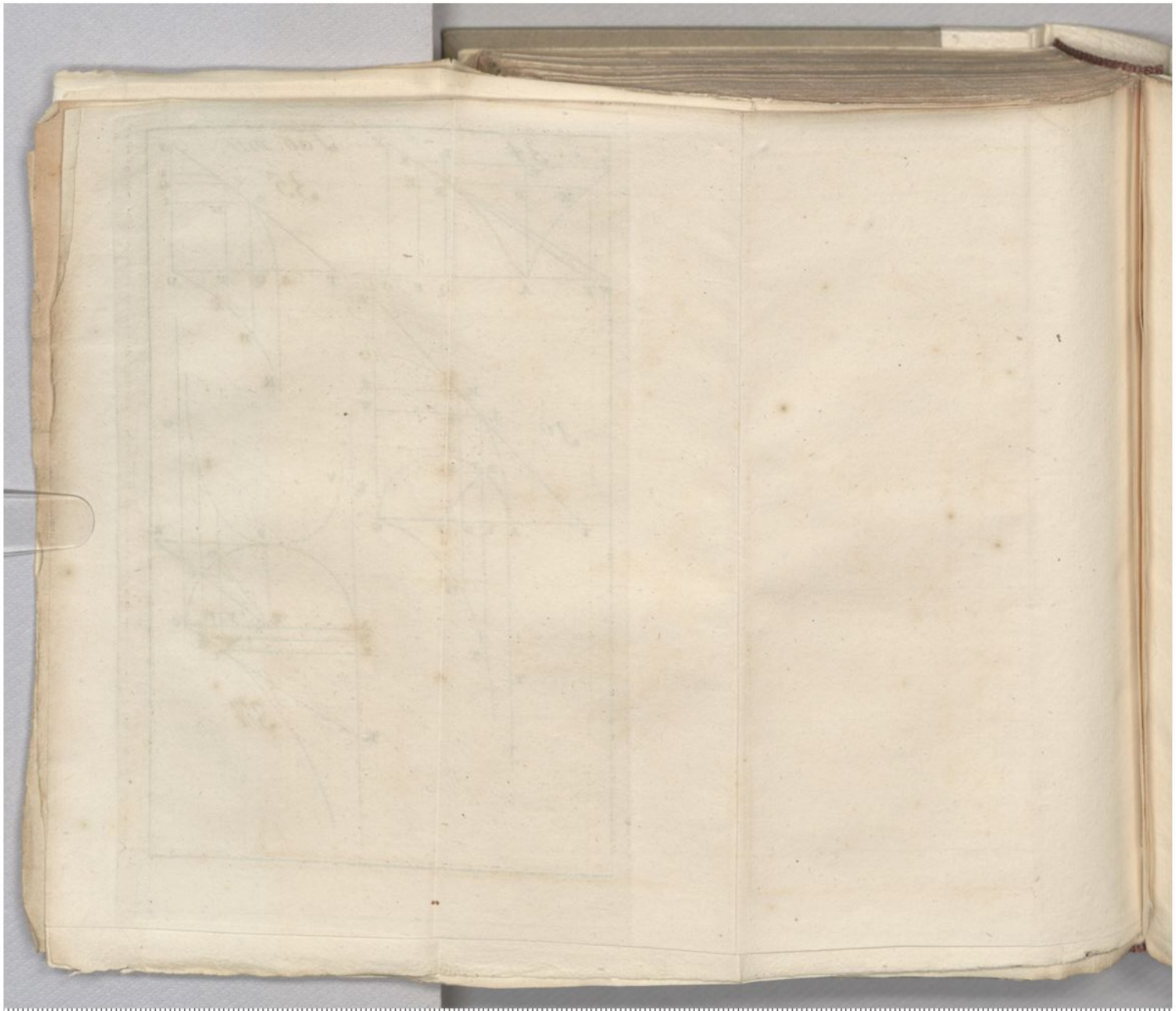
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [340] - -



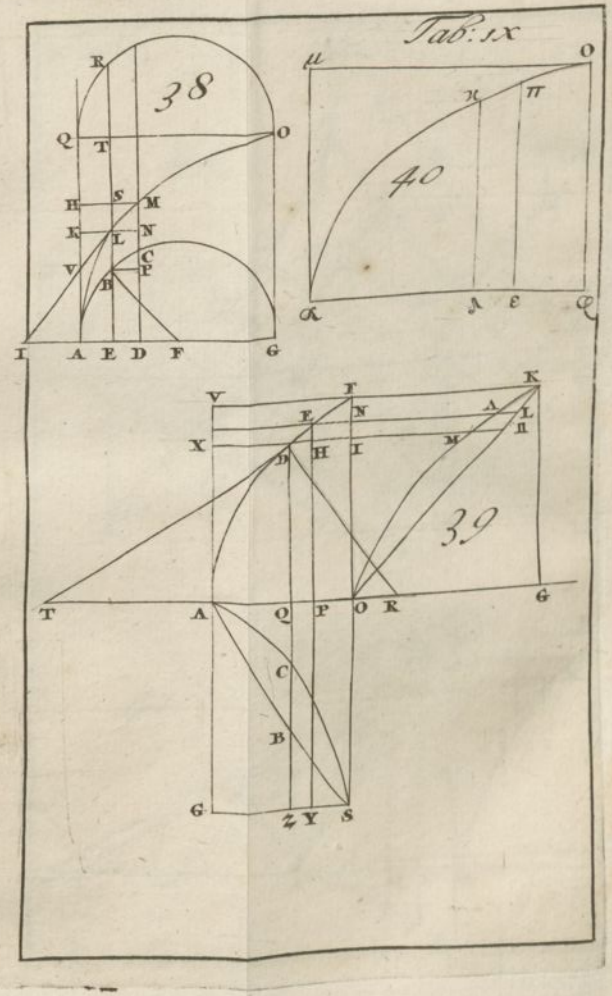
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [341] - -



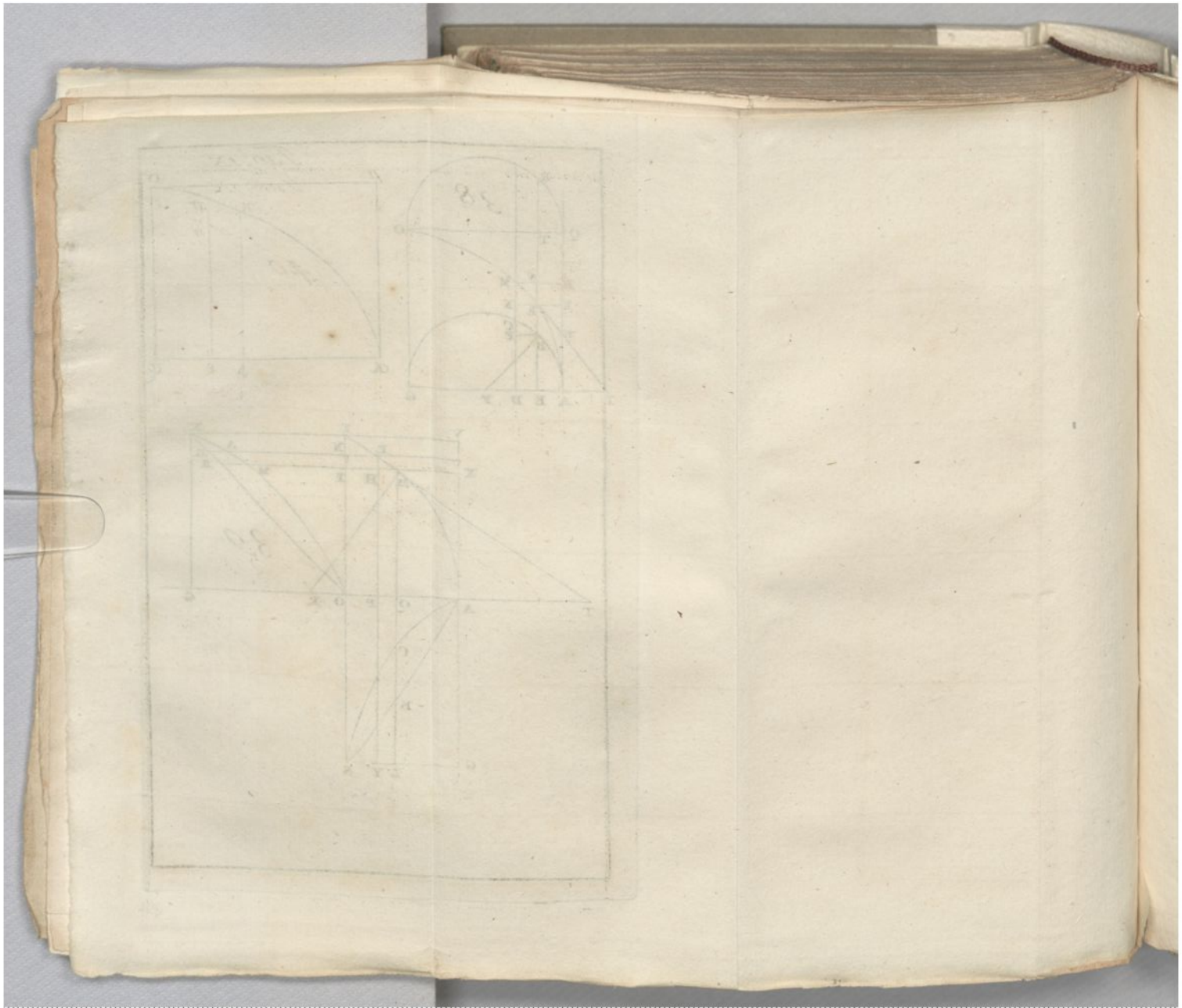
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [342] - -



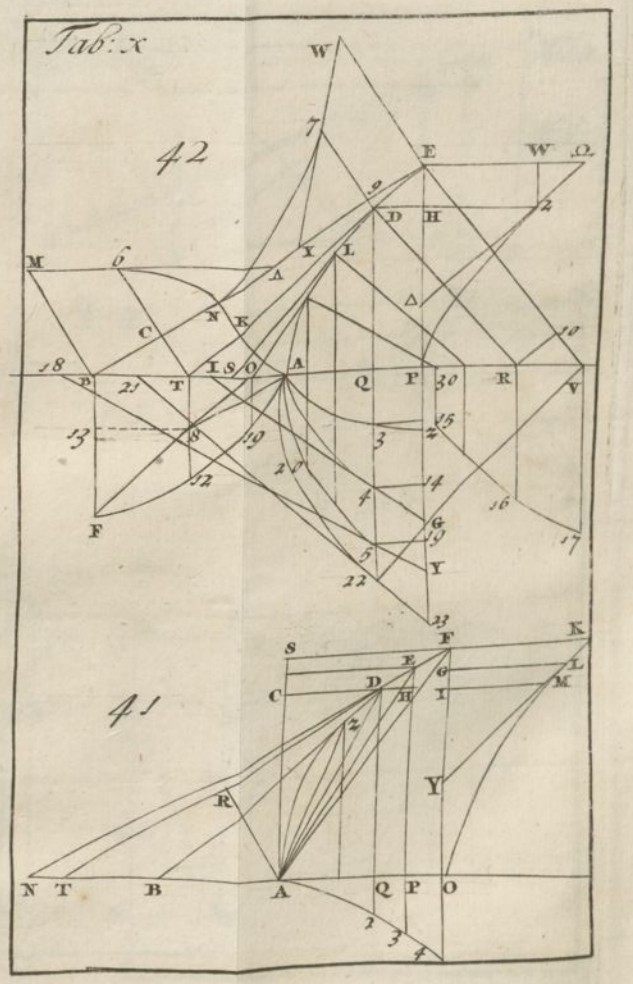
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [343] - -



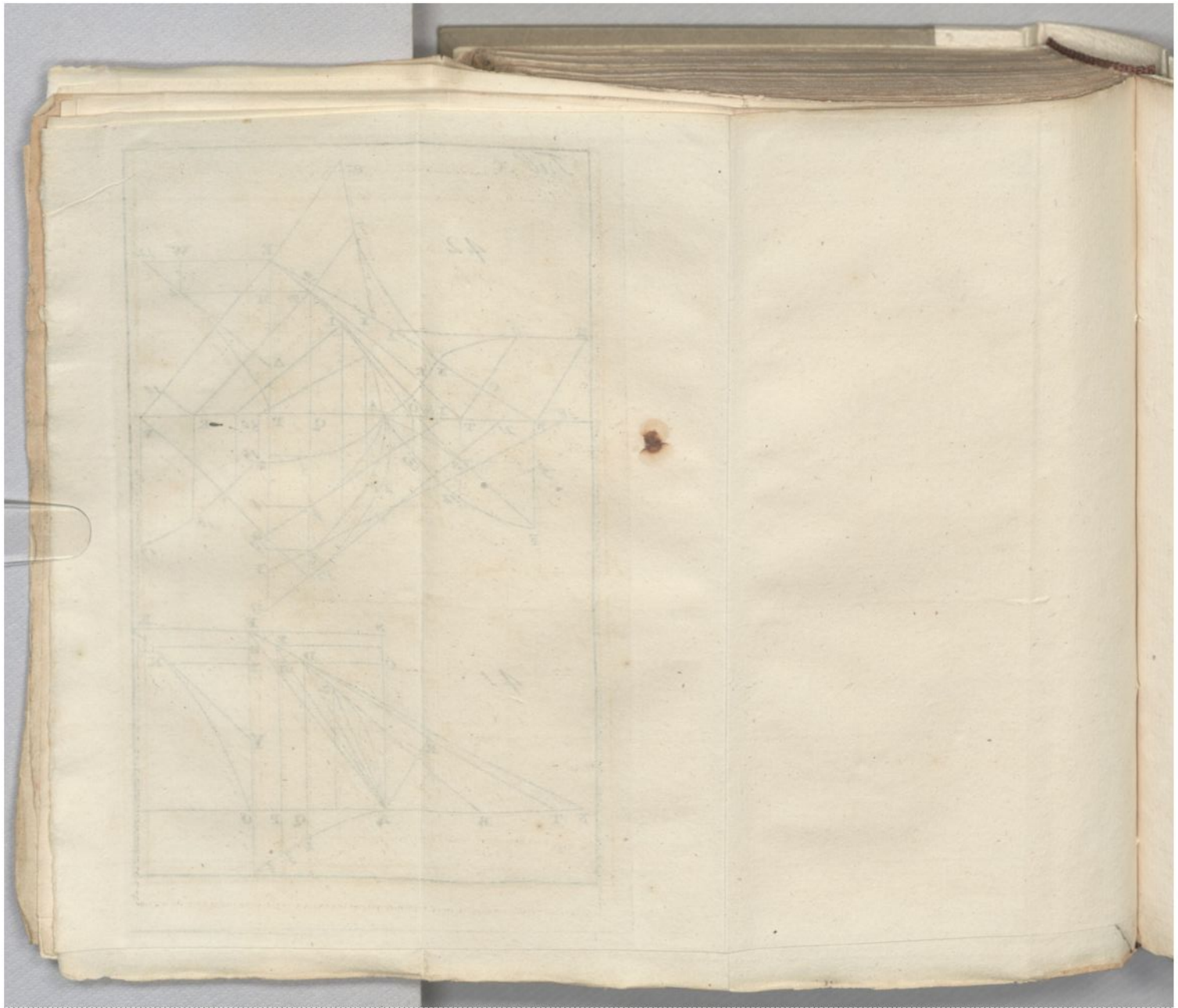
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [344] - -



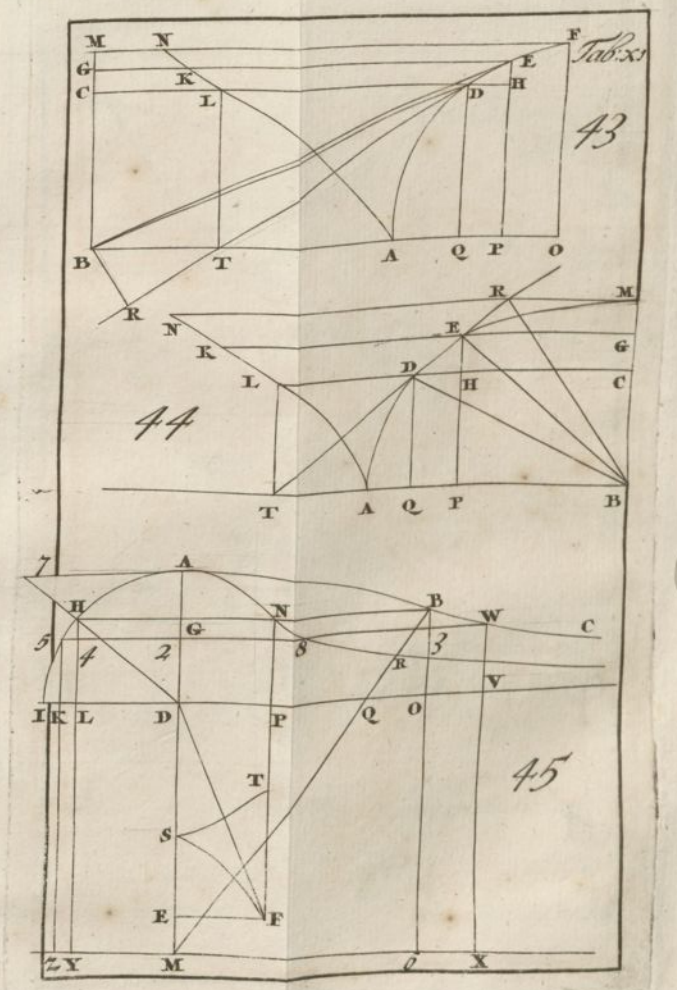
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [345] - -



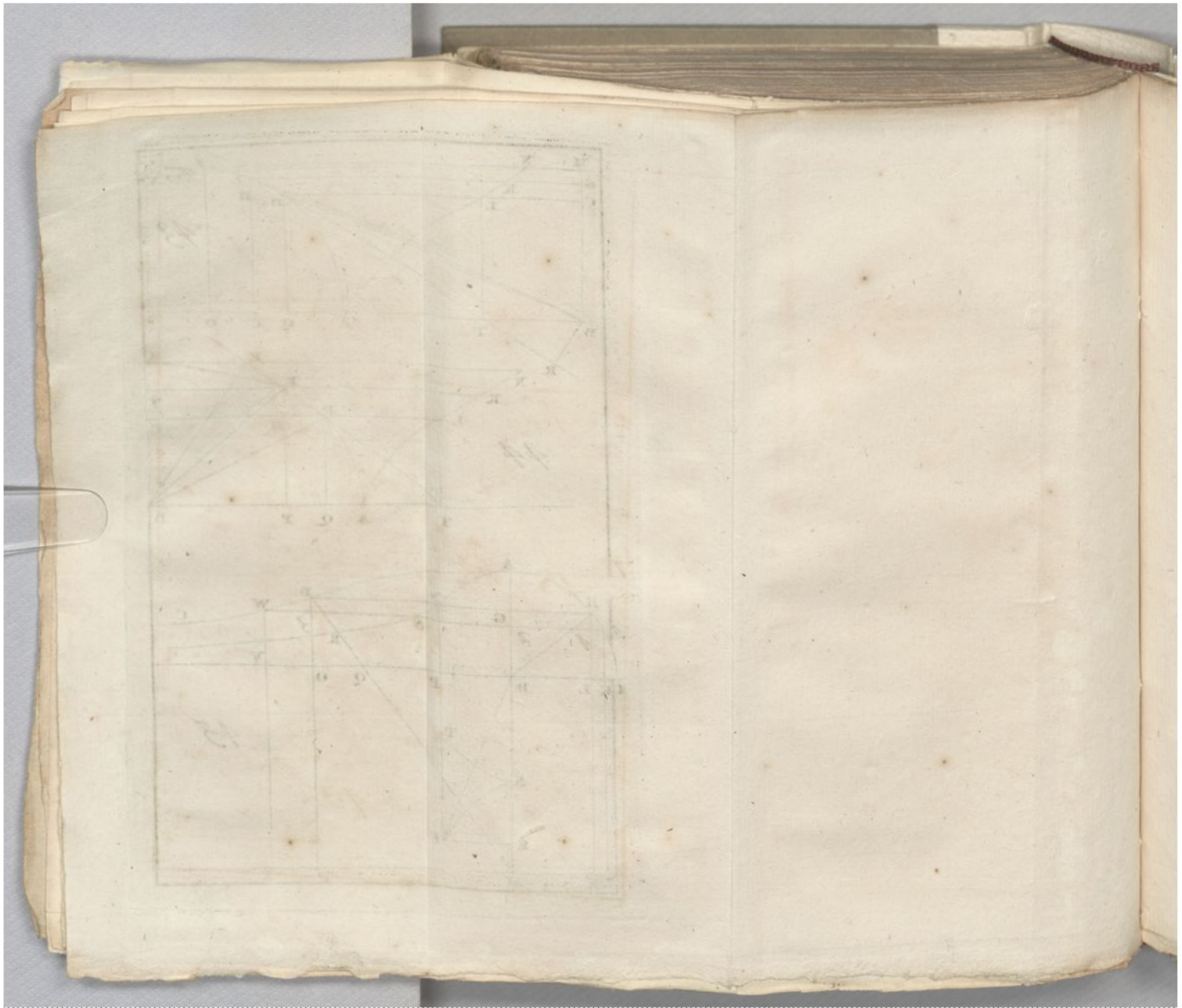
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [346] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

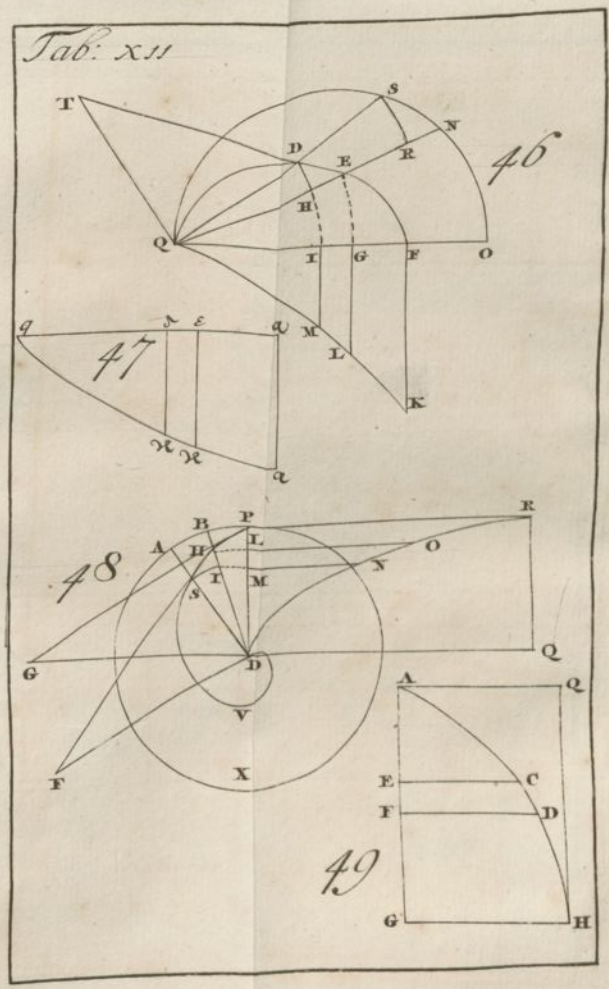
Signatur: Leibn. Marg. 149, [347] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

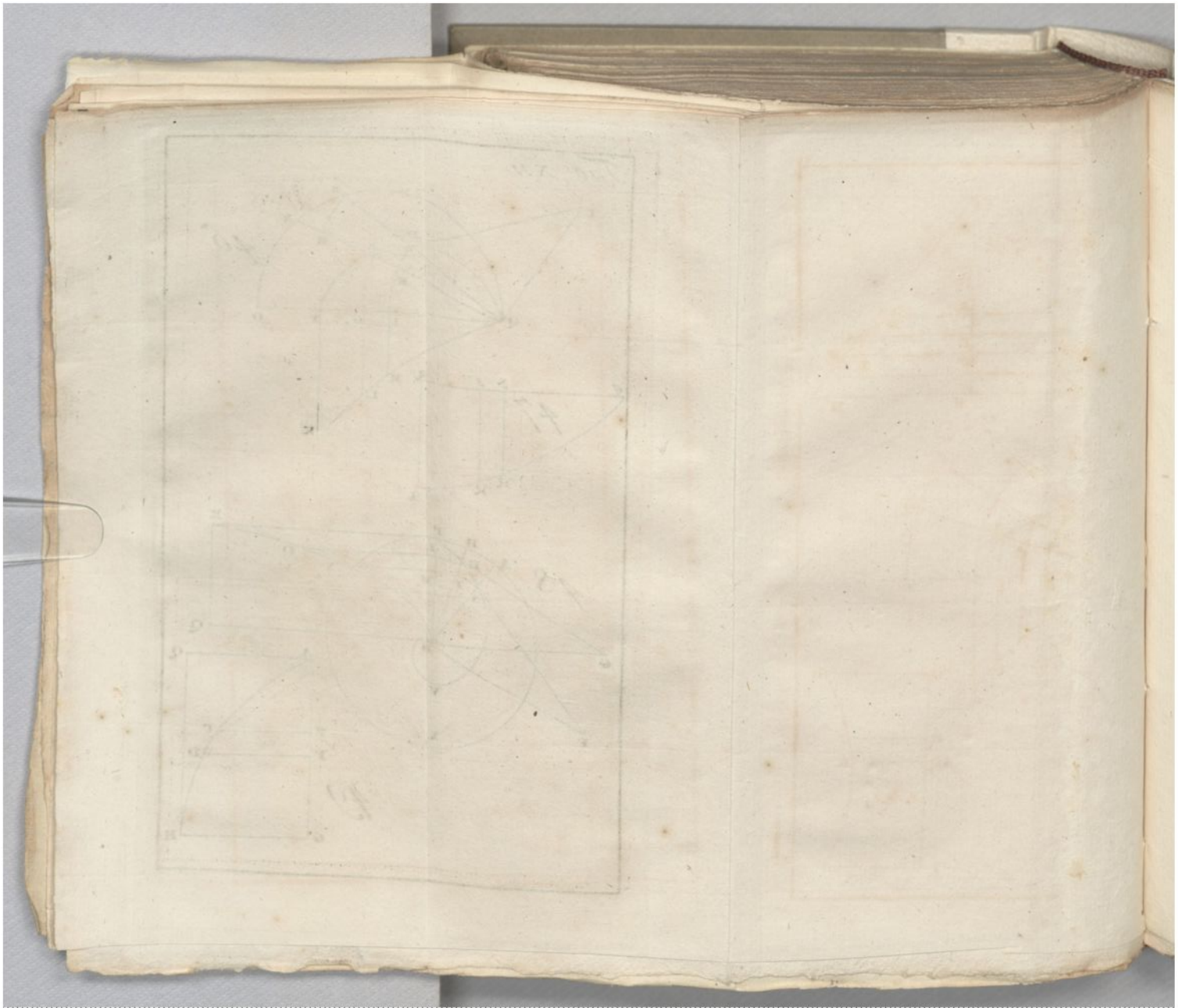
Signatur: Leibn. Marg. 149, [348] - -

Tab: XII



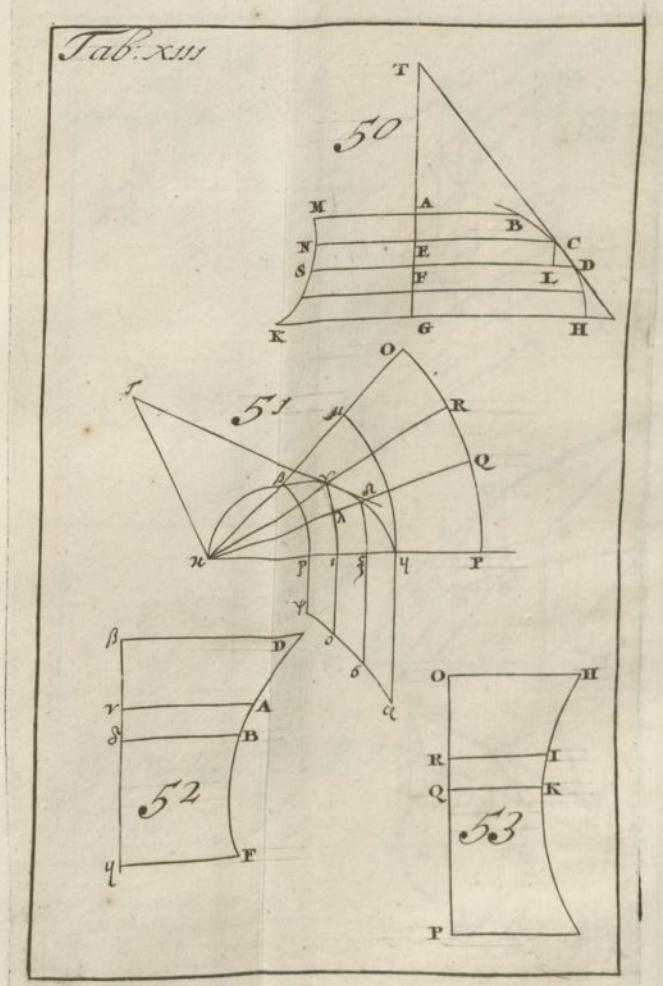
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [349] - -



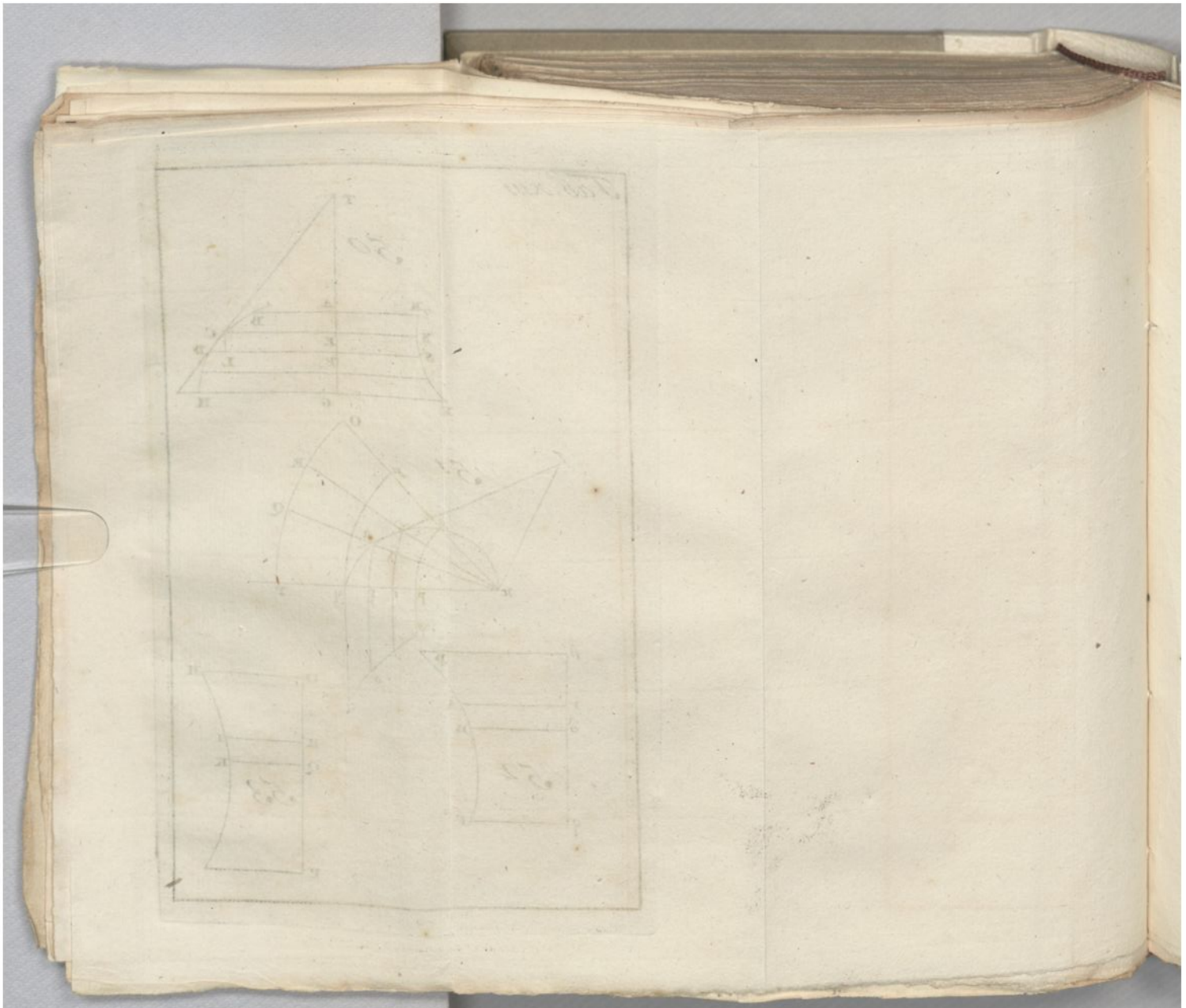
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [350] - -



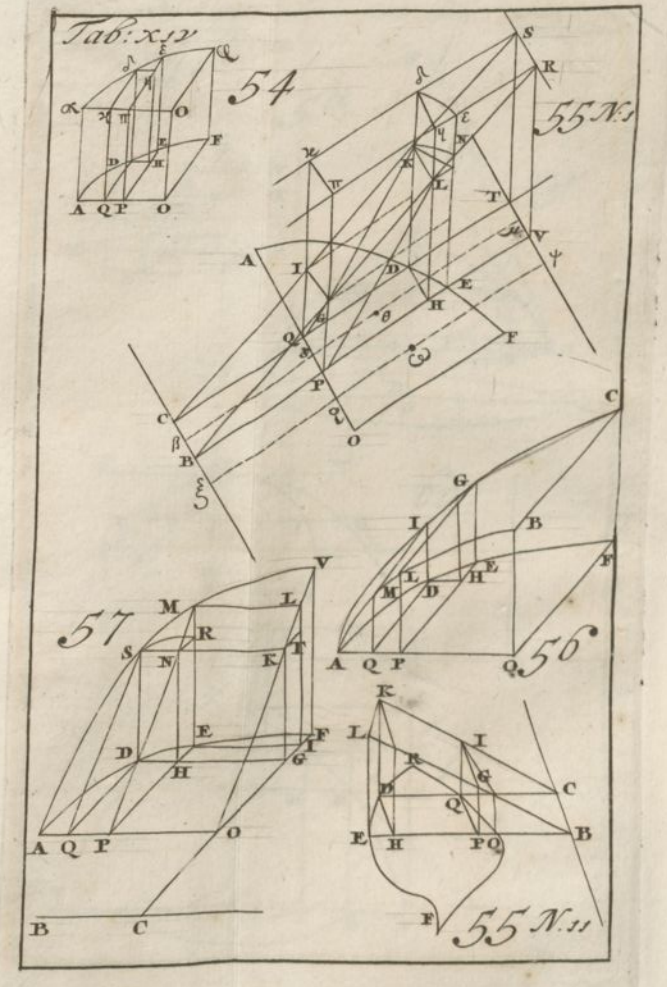
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [351] - -



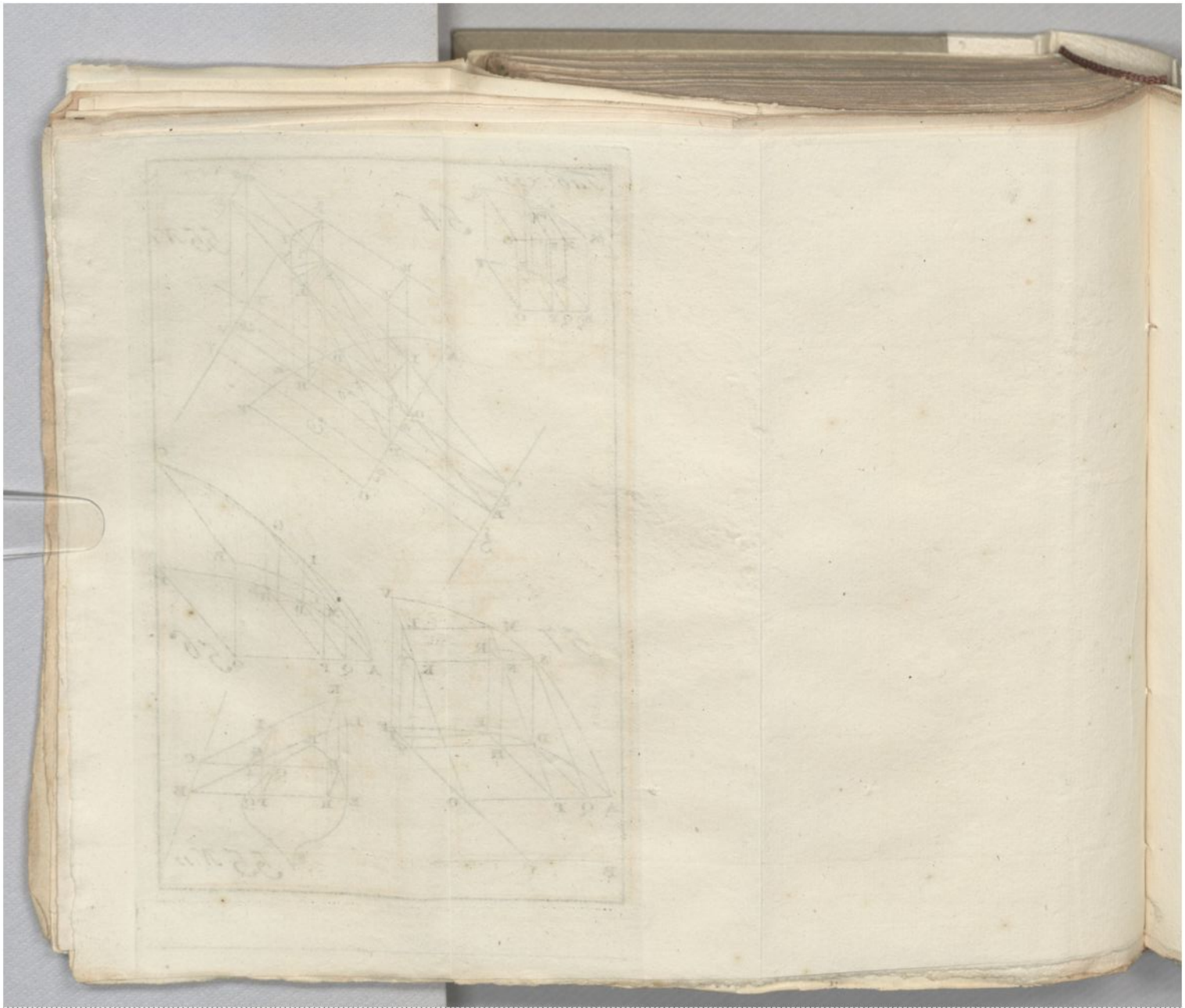
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [352] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

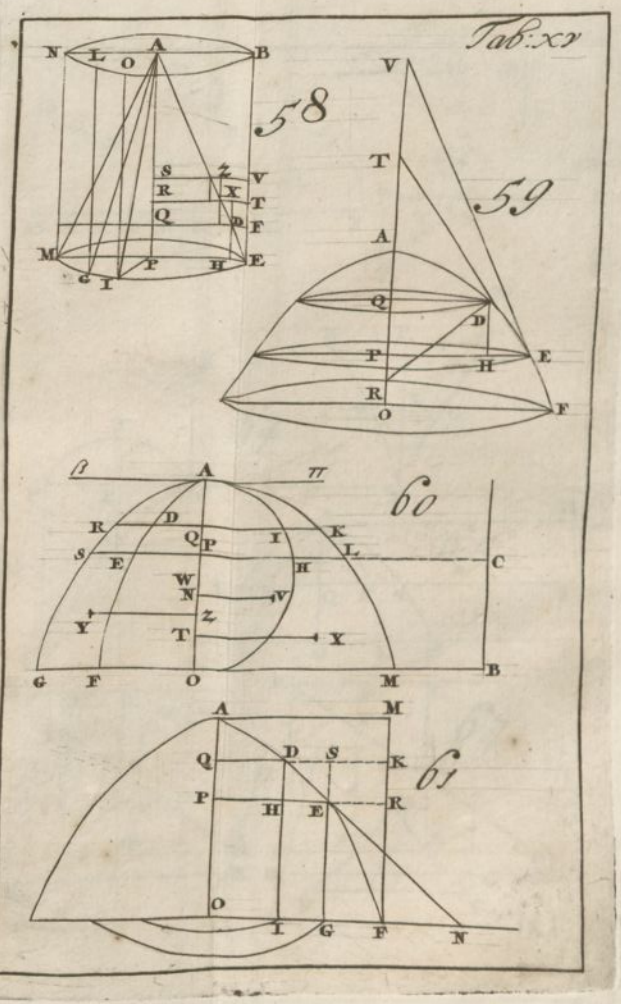
Signatur: Leibn. Marg. 149, [353] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

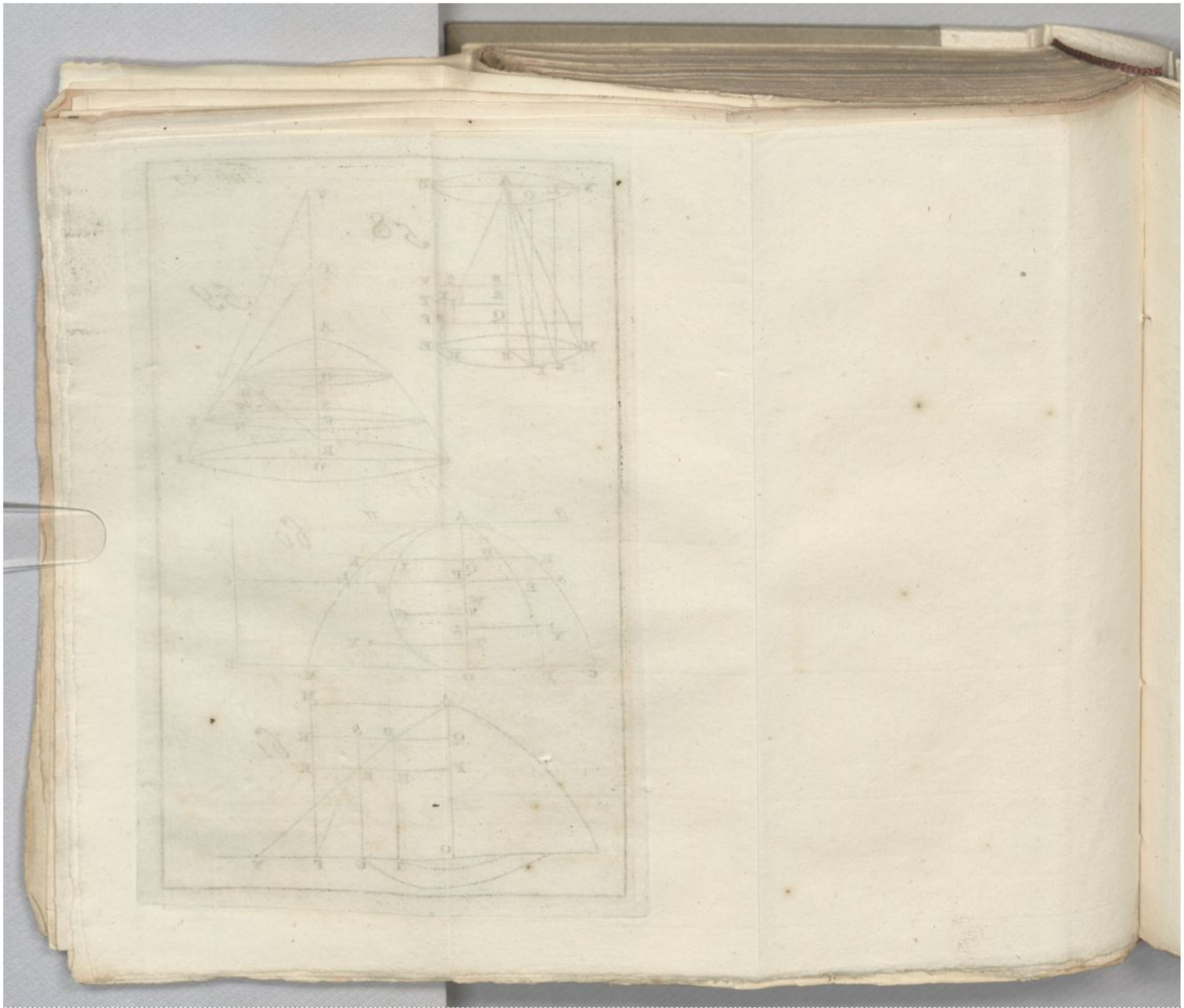
Signatur: Leibn. Marg. 149, [354] - -

Tab: xv



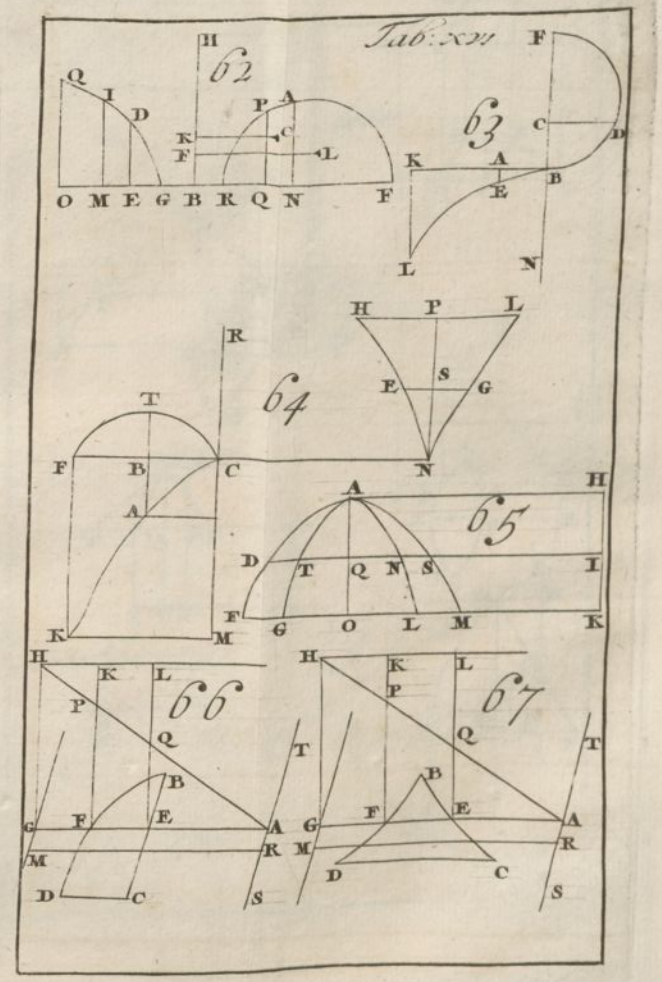
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [355] - -



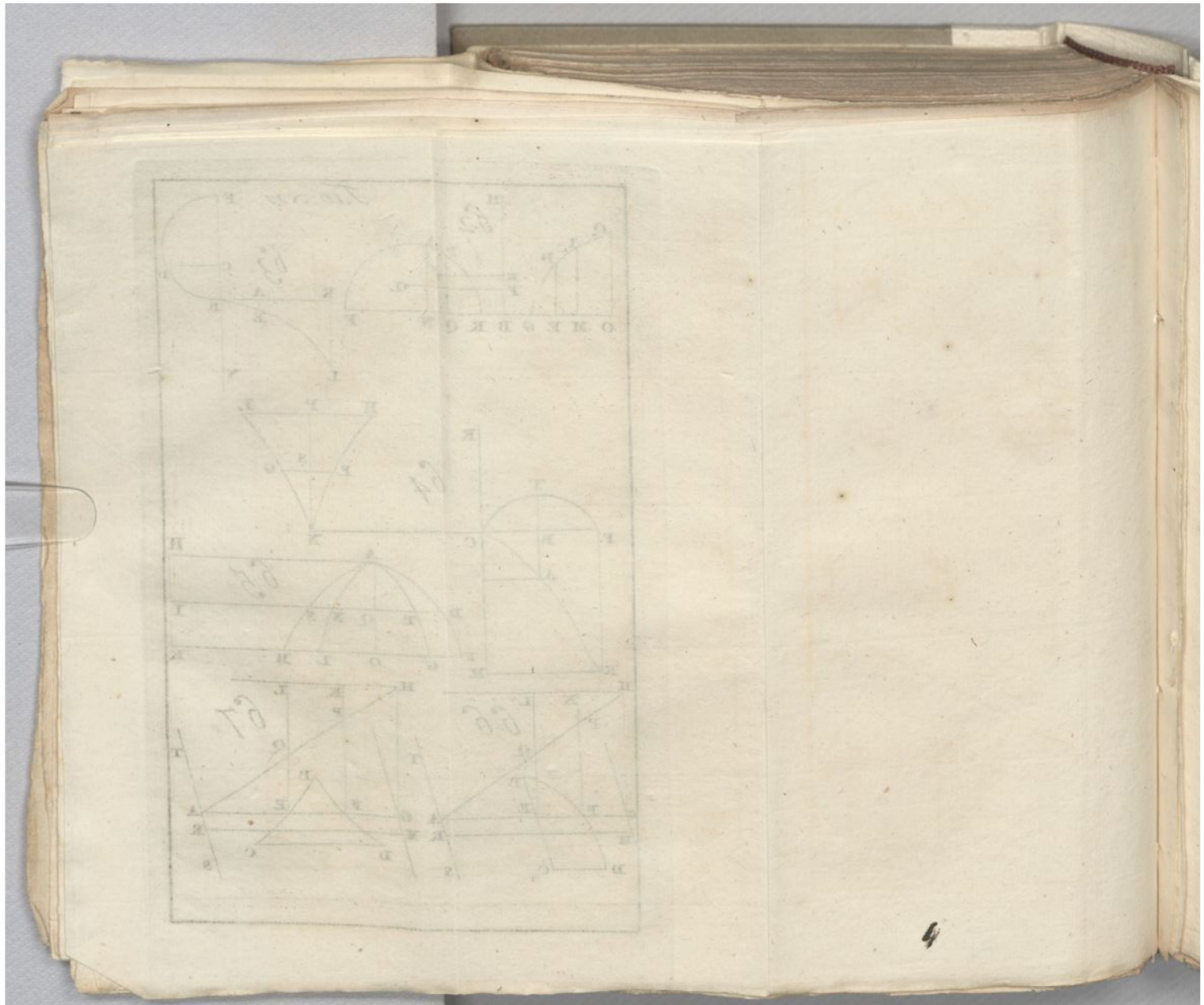
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [356] - -



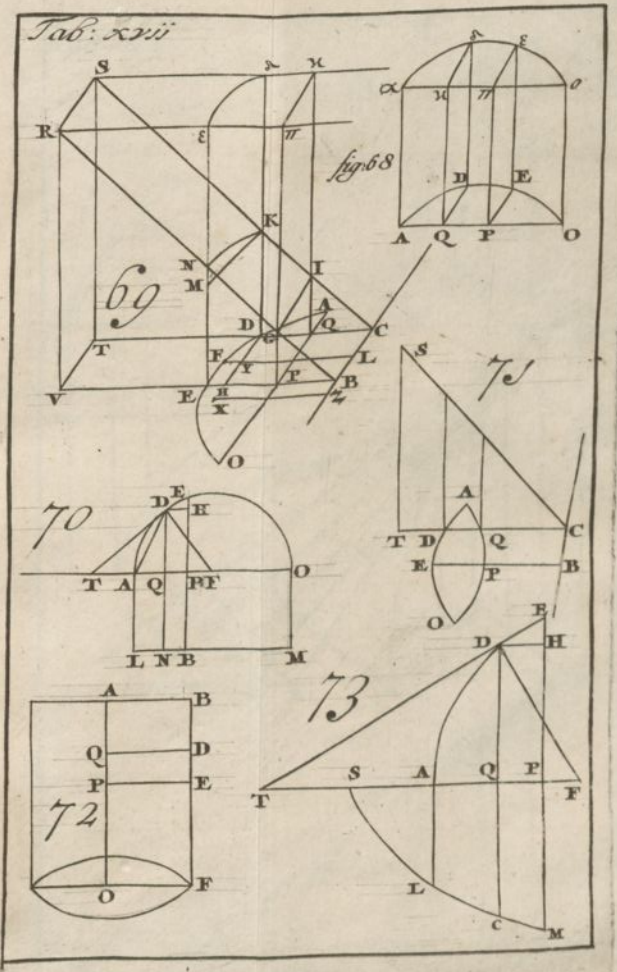
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [357] - -



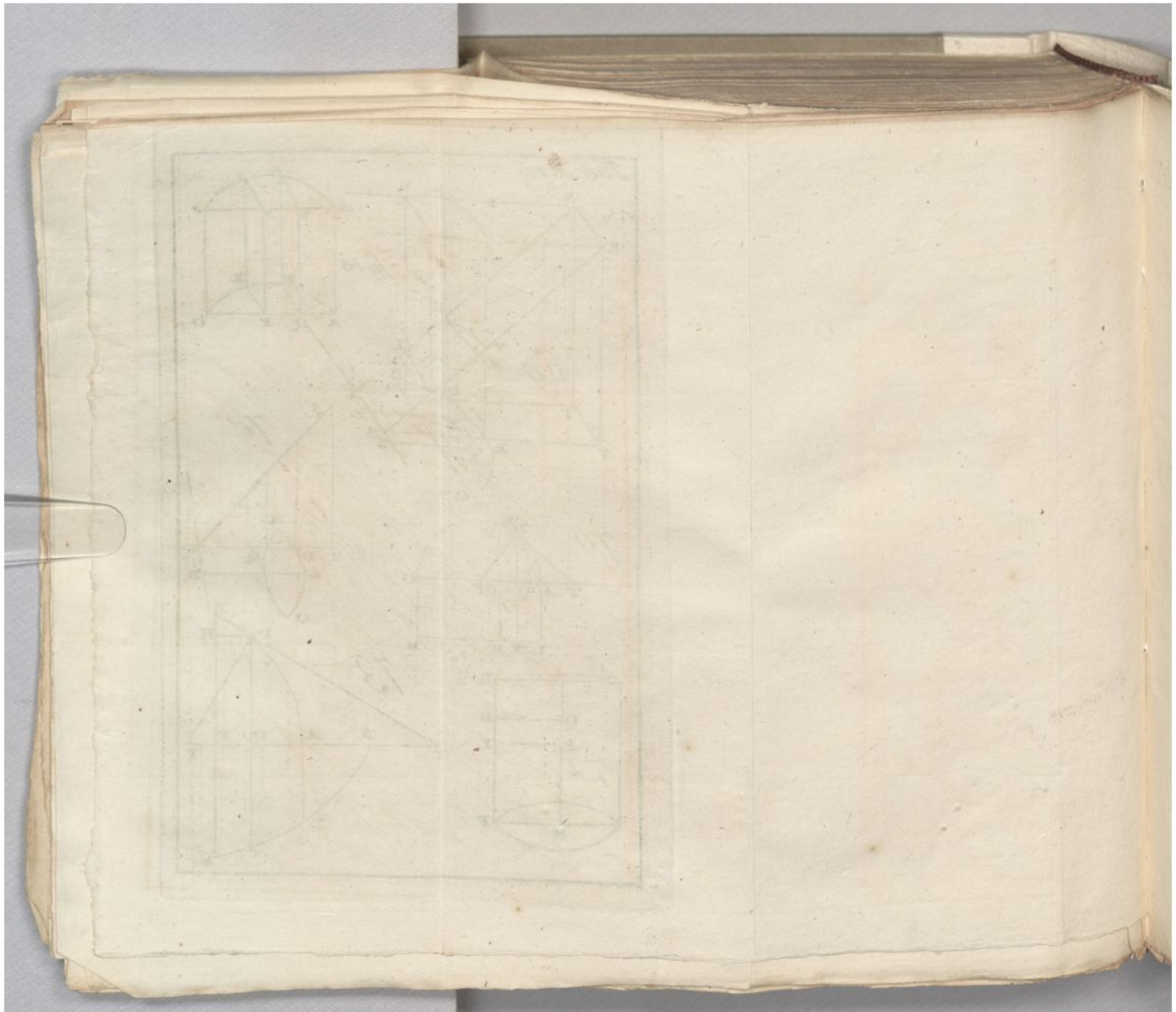
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [358] - -



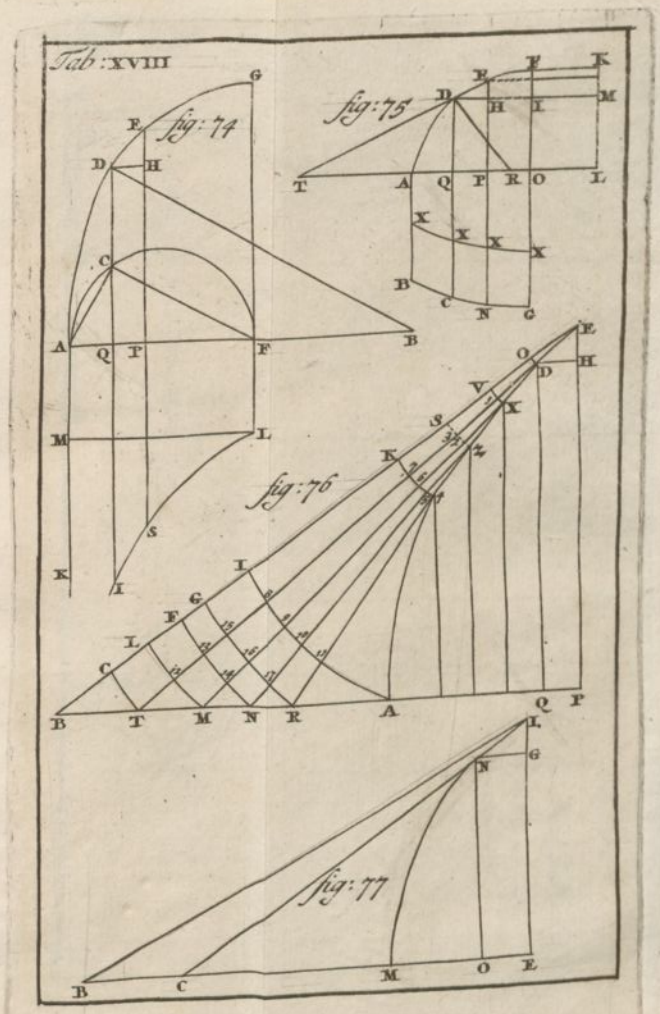
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [359] - -



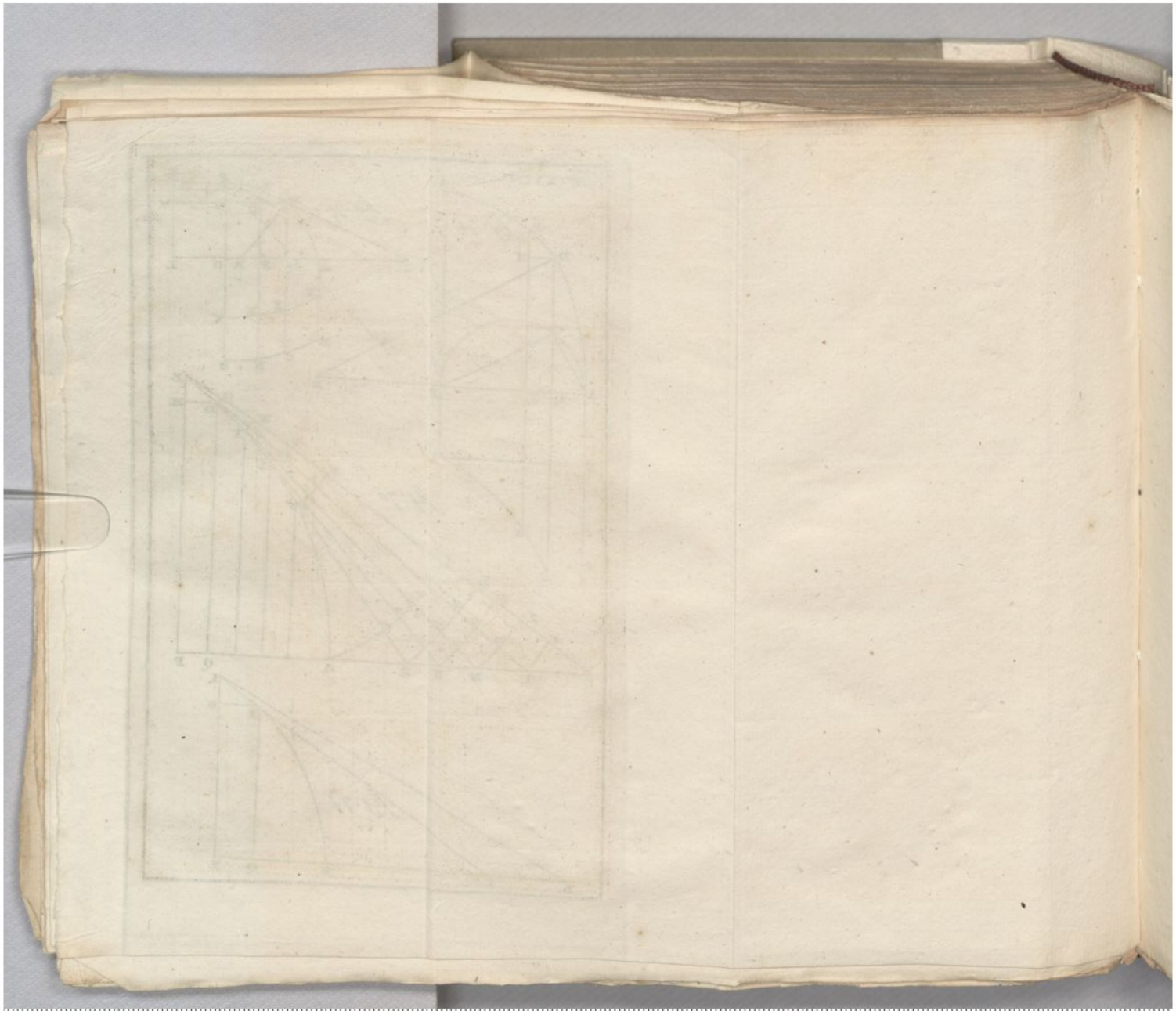
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [360] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [361] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [362] - -

Tab: XIX

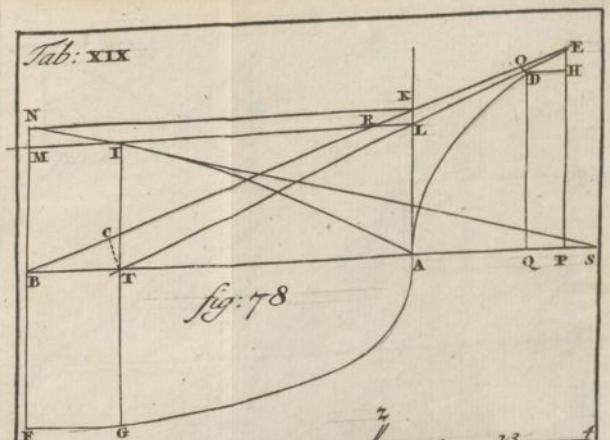


fig: 78

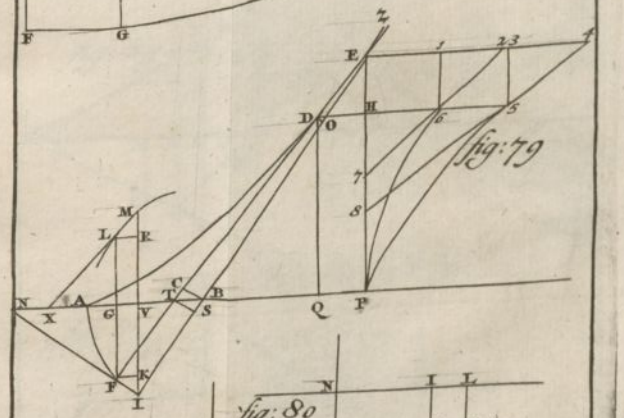


fig: 79

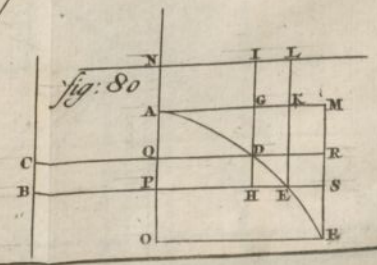
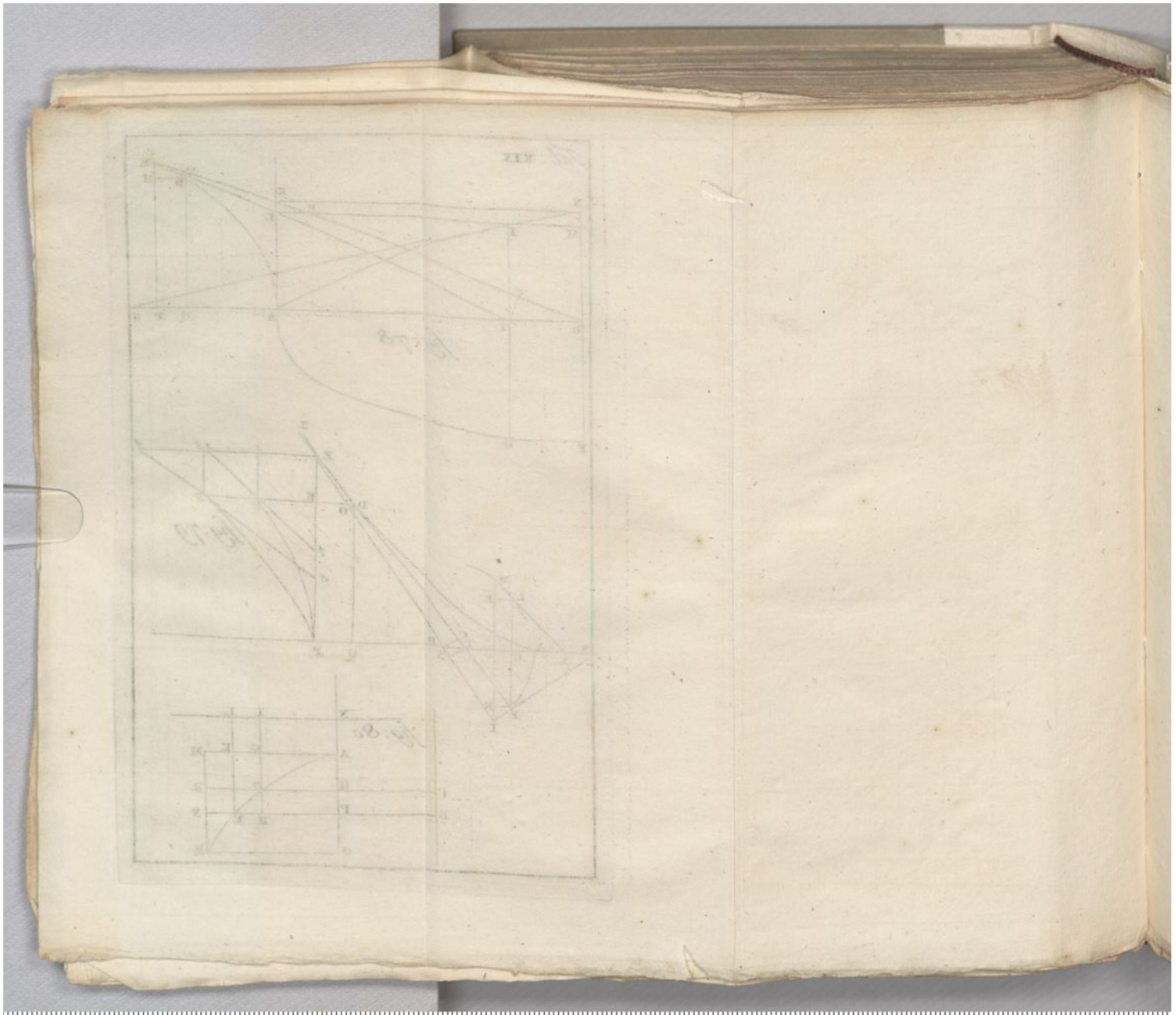


fig: 80

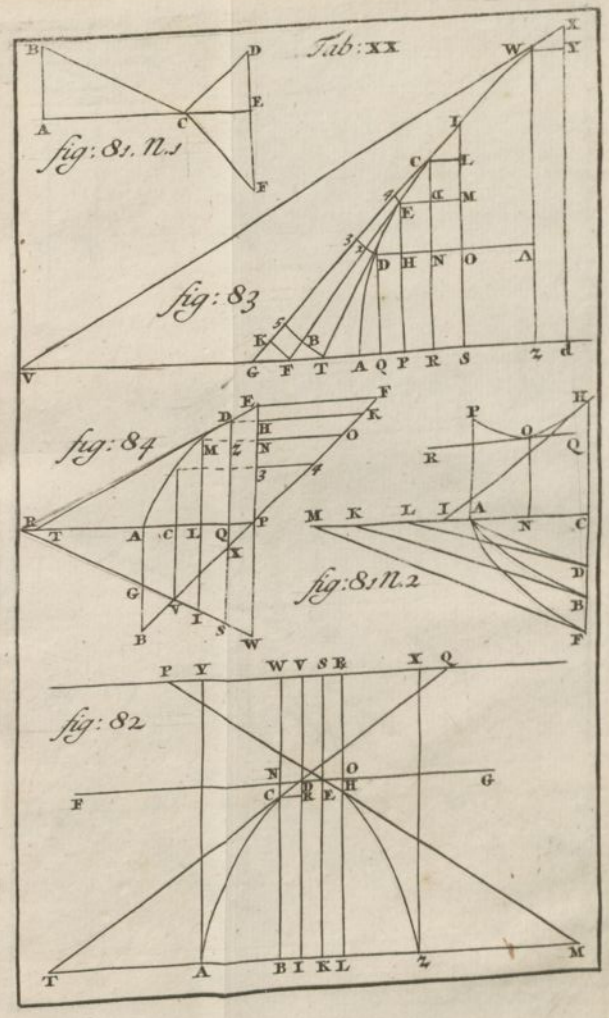
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [363] - -



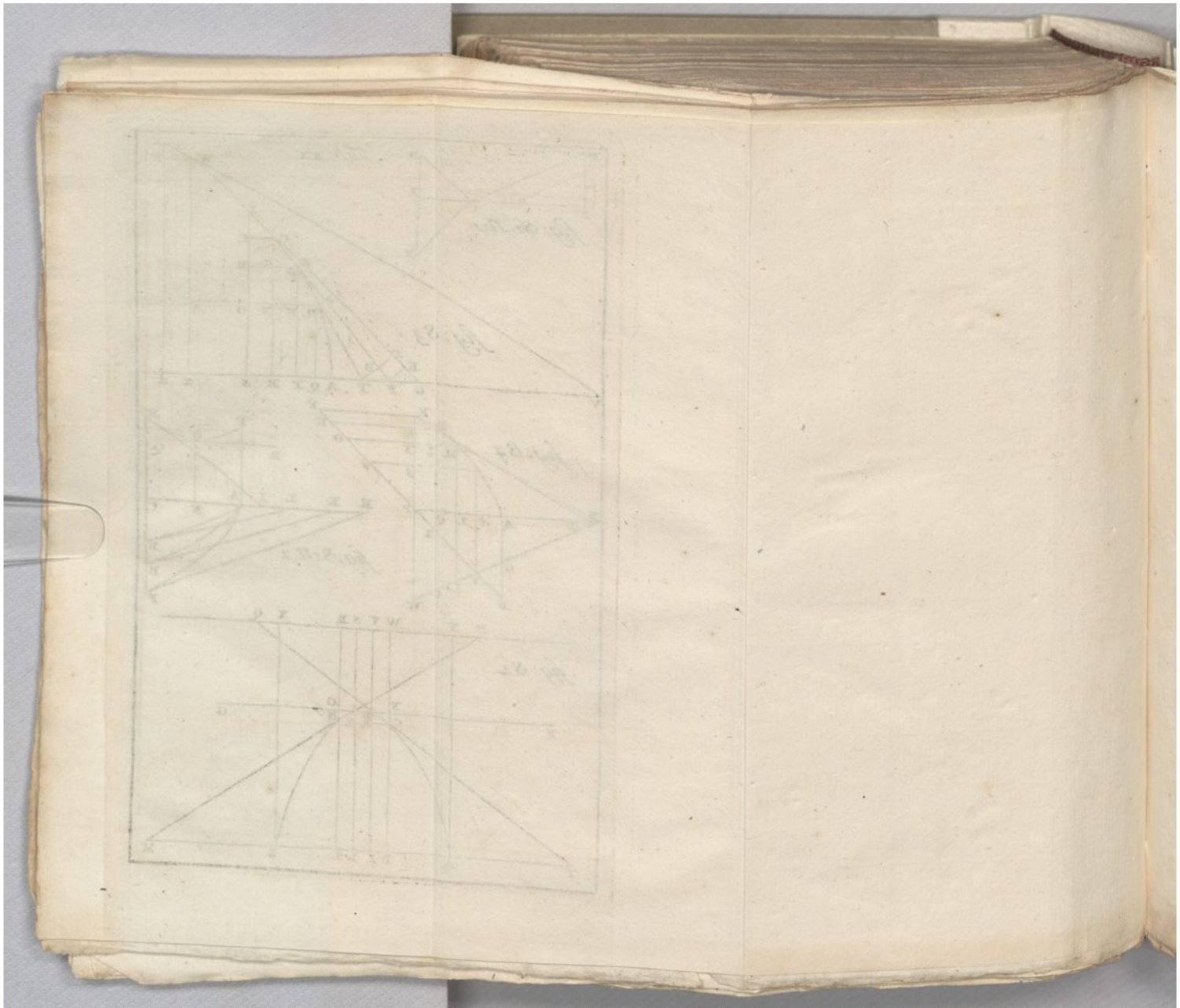
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [364] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [365] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [366] - -

Tab: XXI

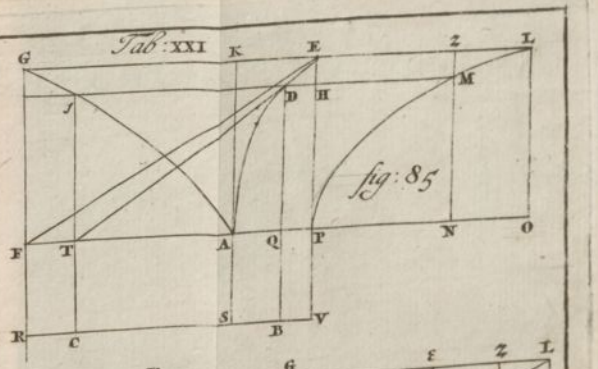


fig: 85

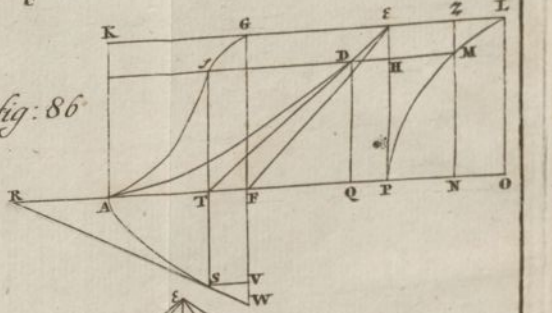


fig: 86

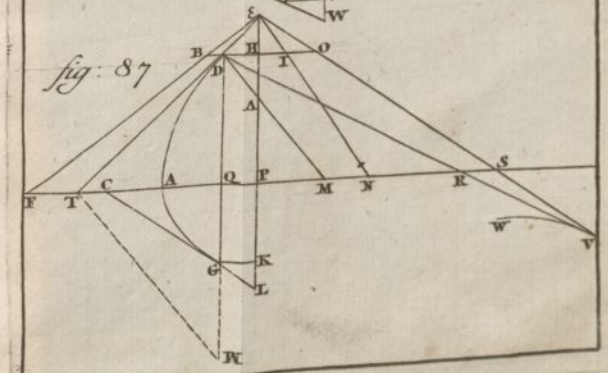
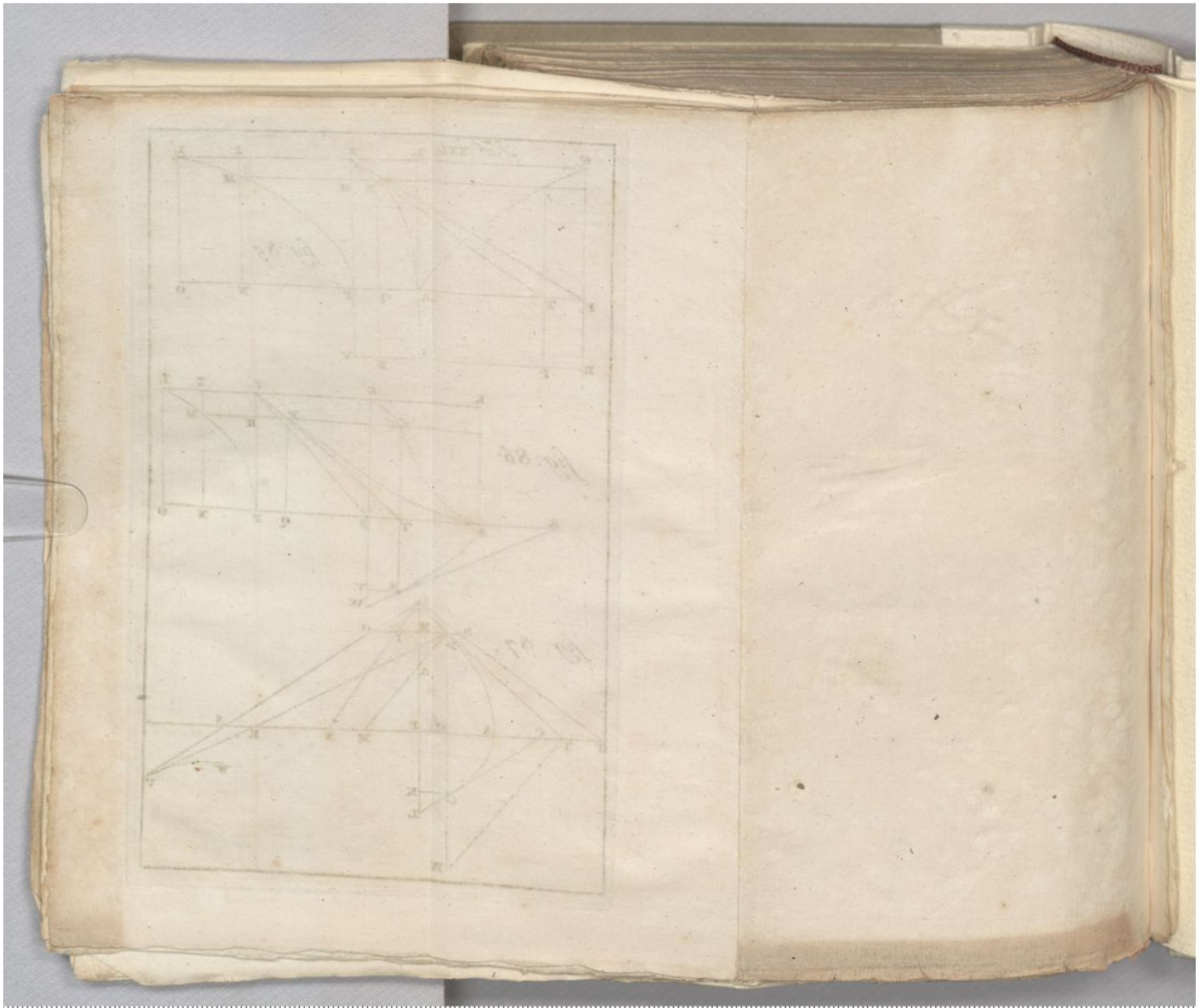


fig: 87

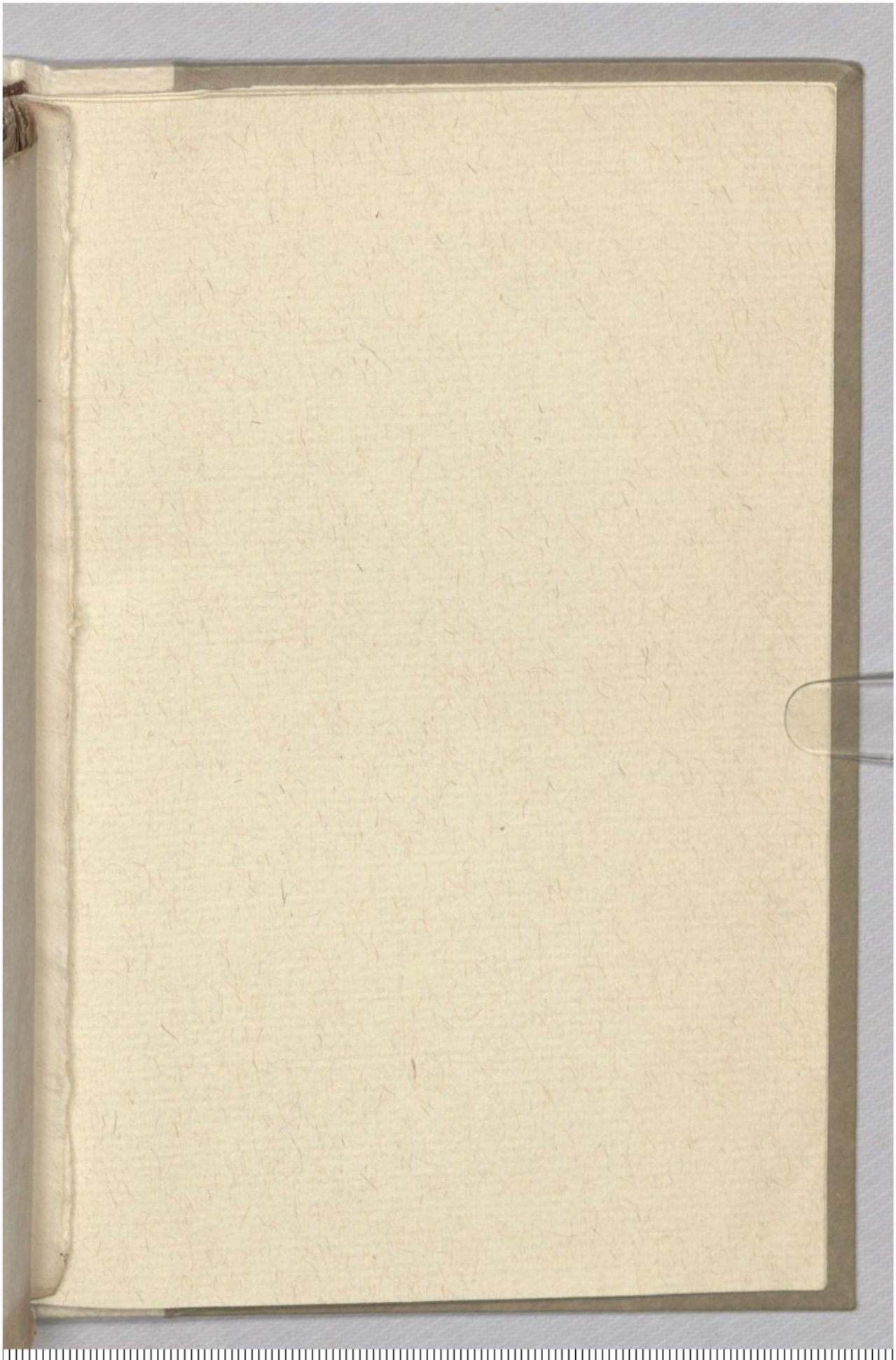
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [367] - -



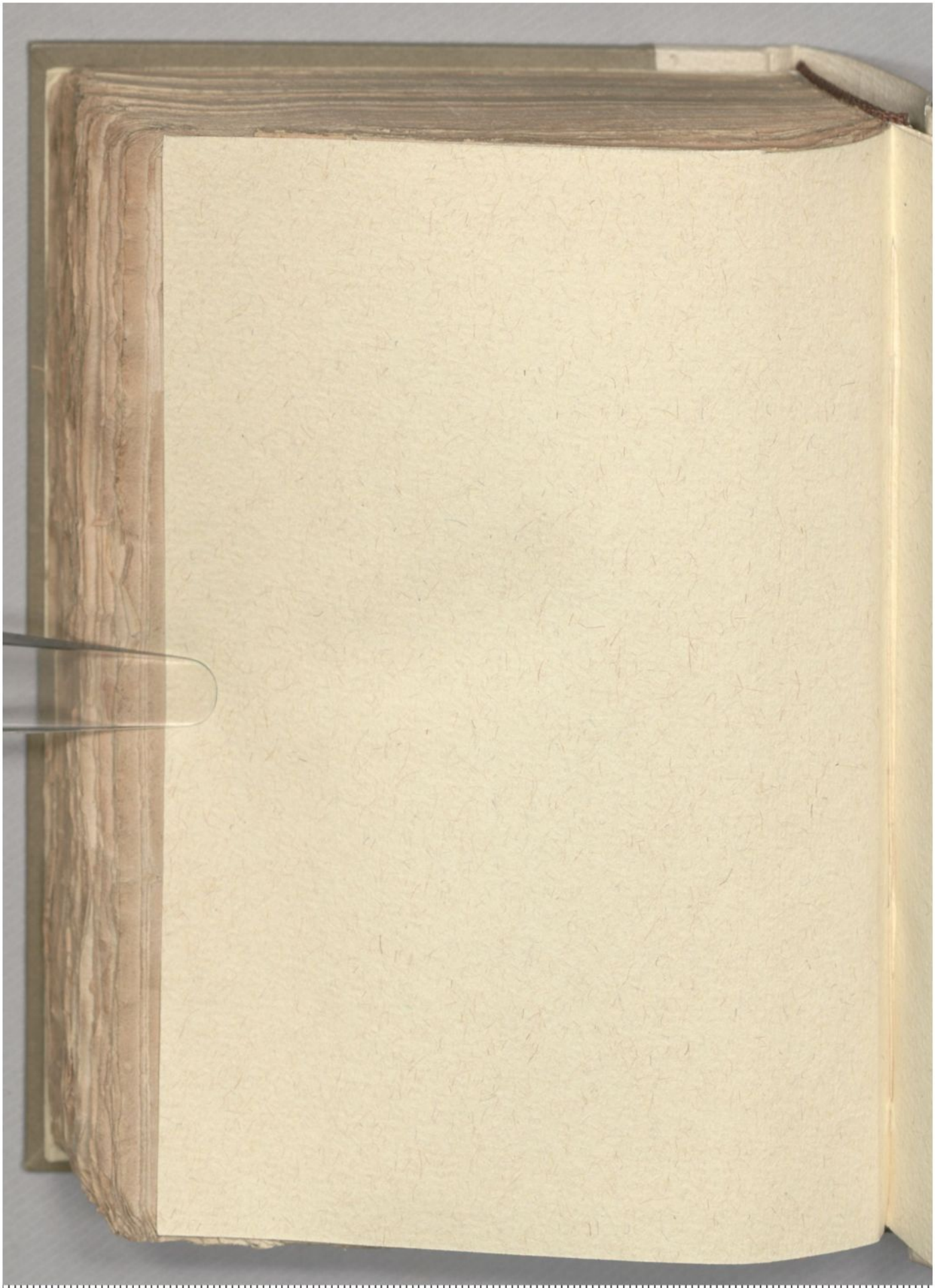
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [368] - -



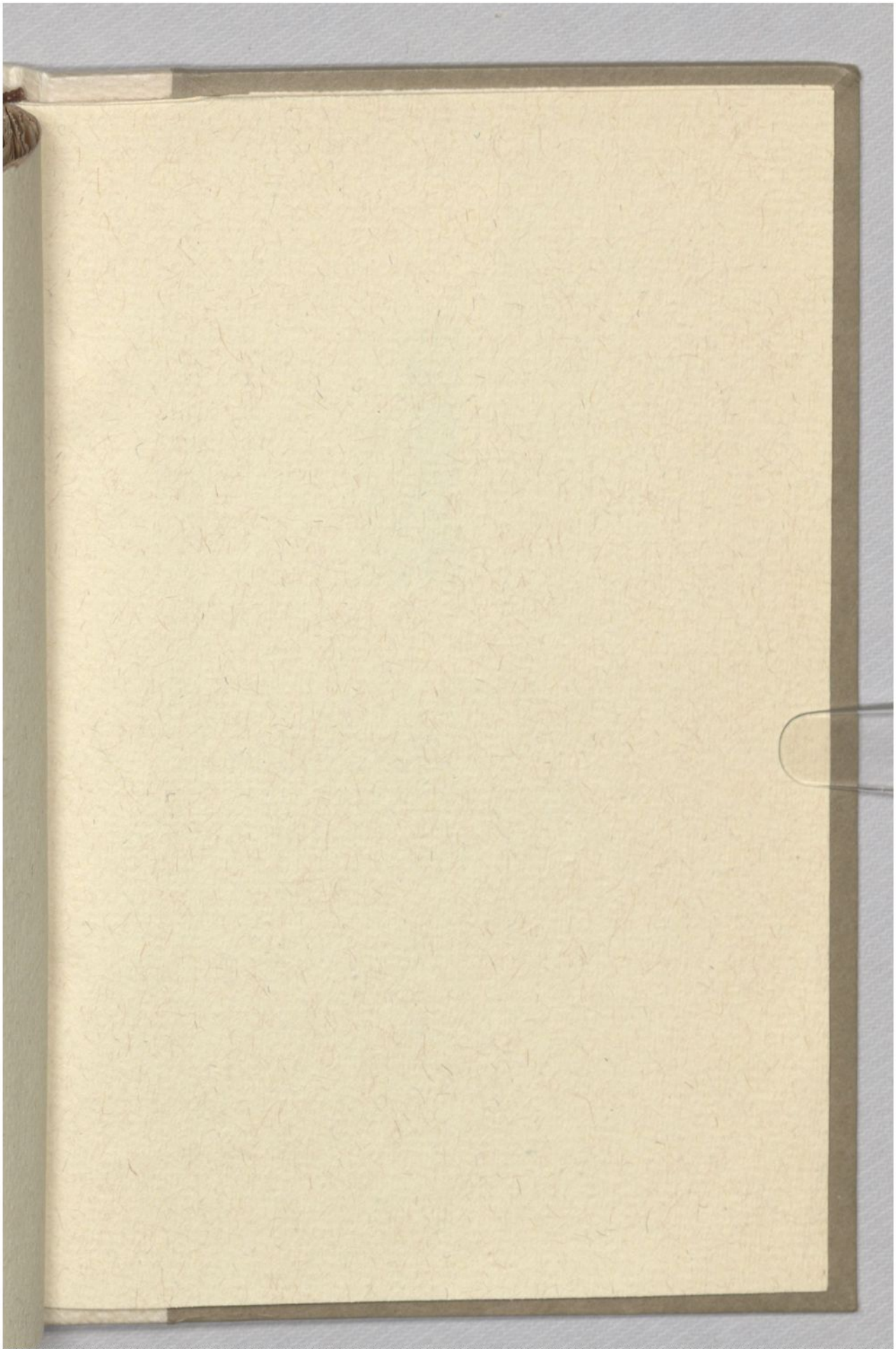
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [369] - -



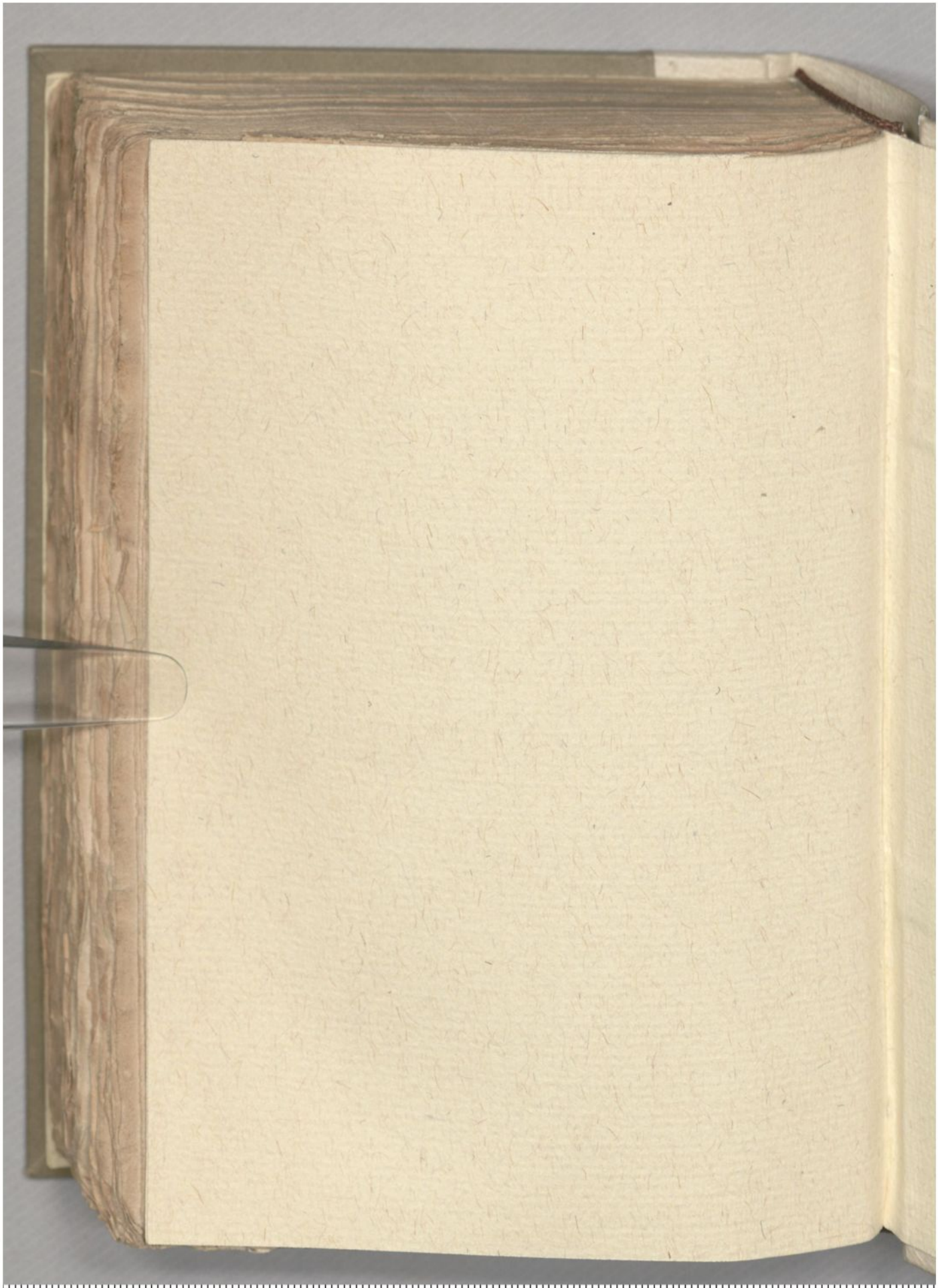
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [370] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [371] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

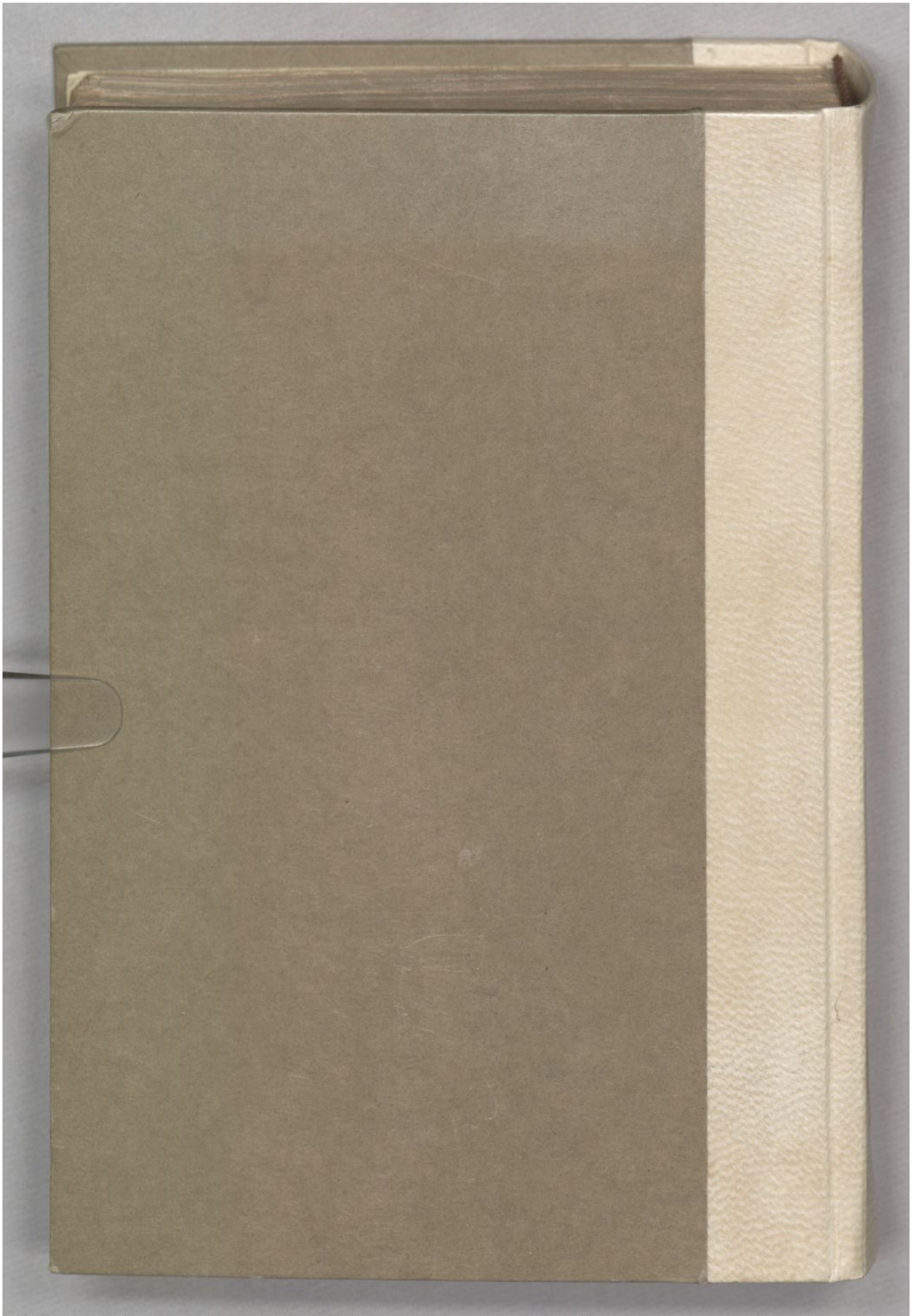
Signatur: Leibn. Marg. 149, [372] - -

GWLB Hannover 35
036 828 815

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [373] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 149, [374] - -

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Leibn. Marg. 149

Nieuwentyd Considerationes



Signatur: Leibn. Marg. 149 [375] -