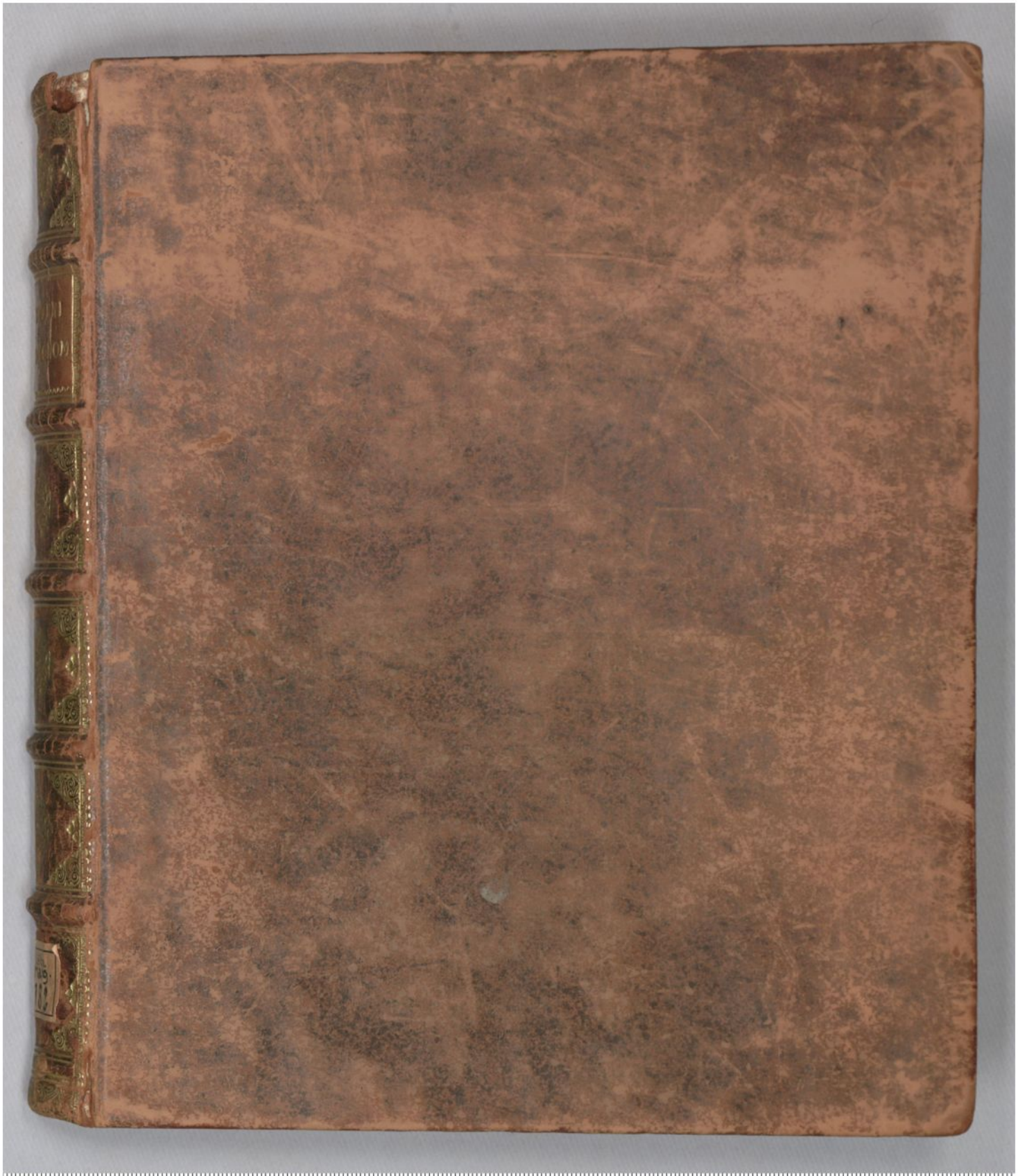
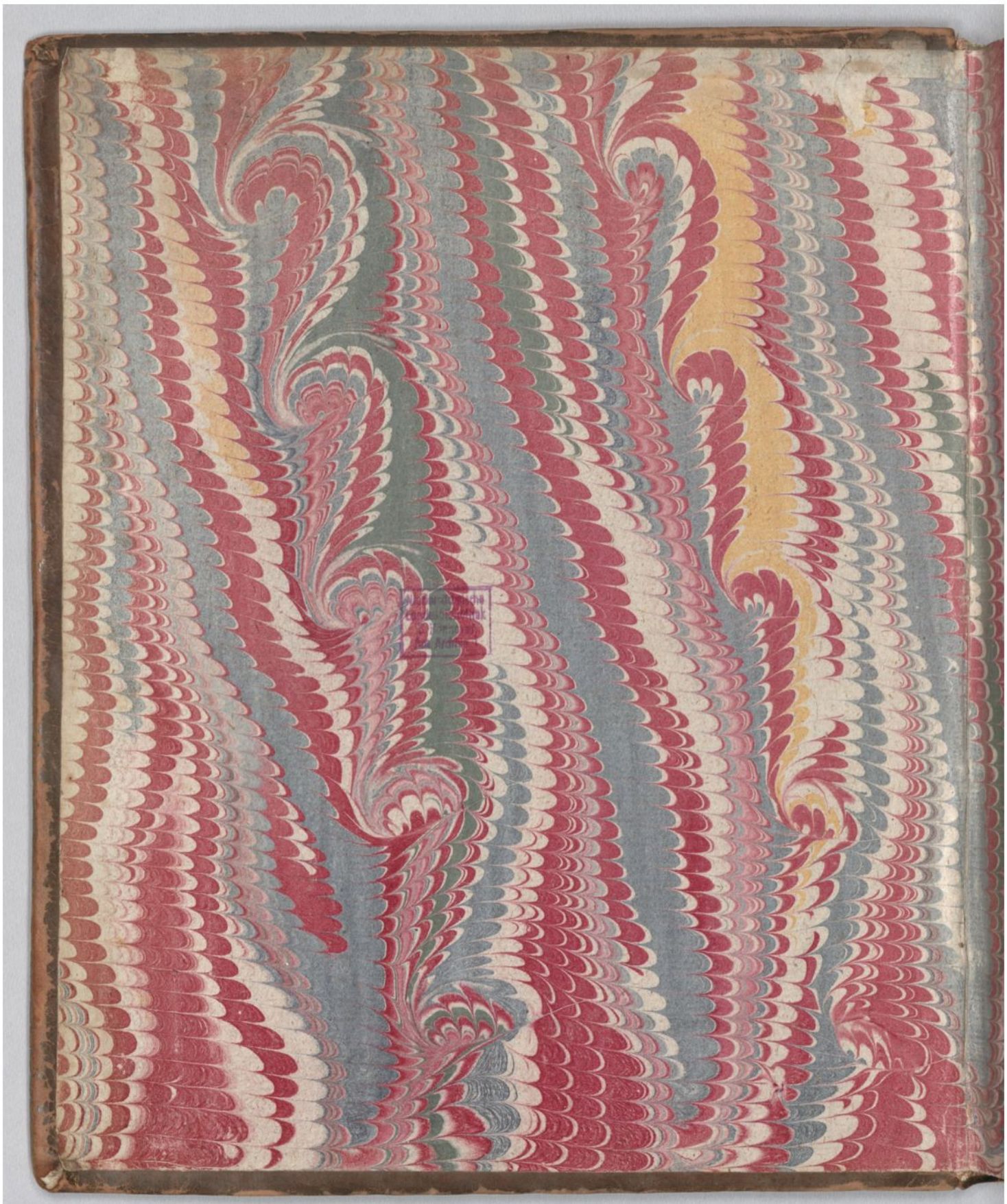


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [1] - -

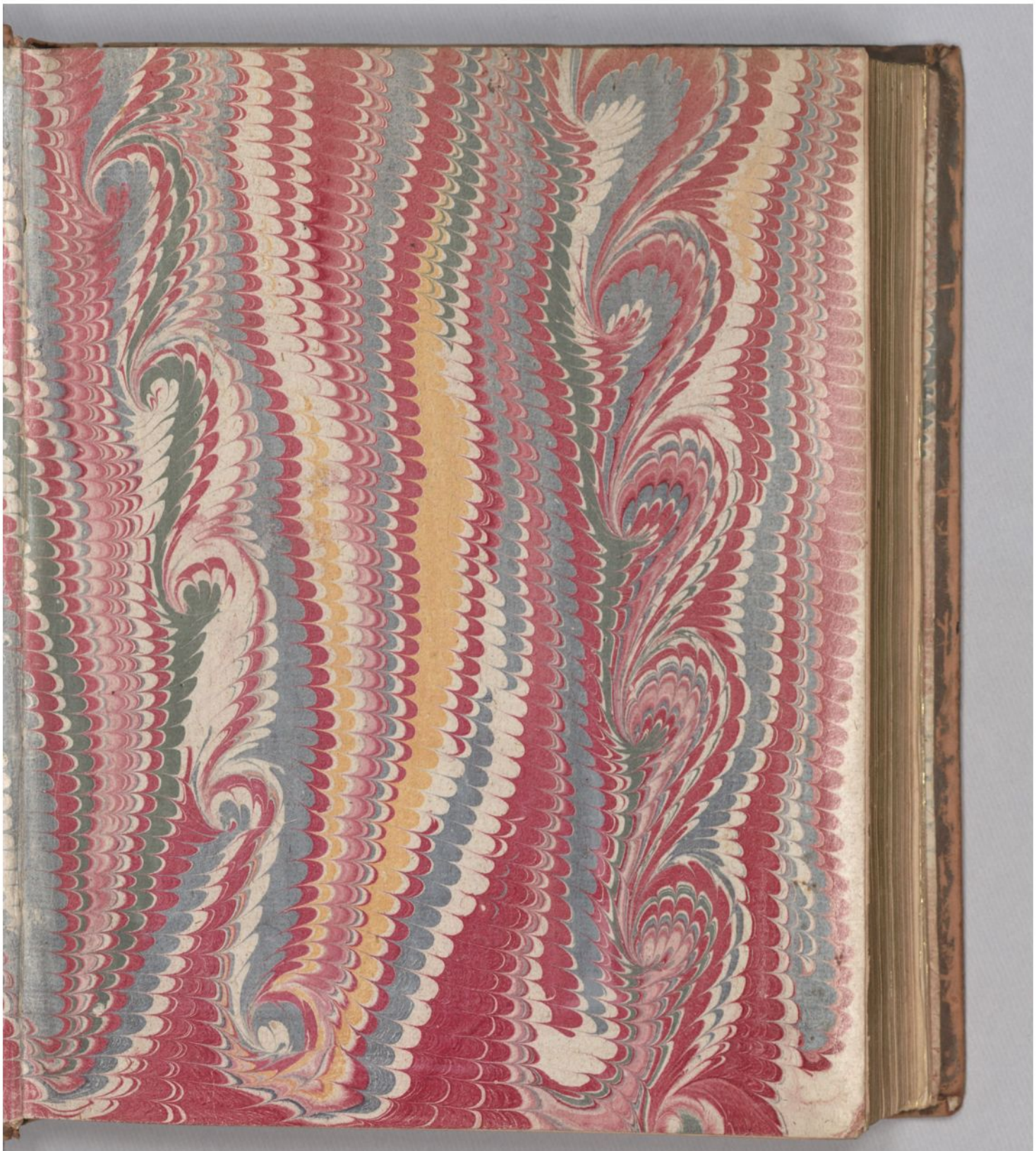
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [2] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

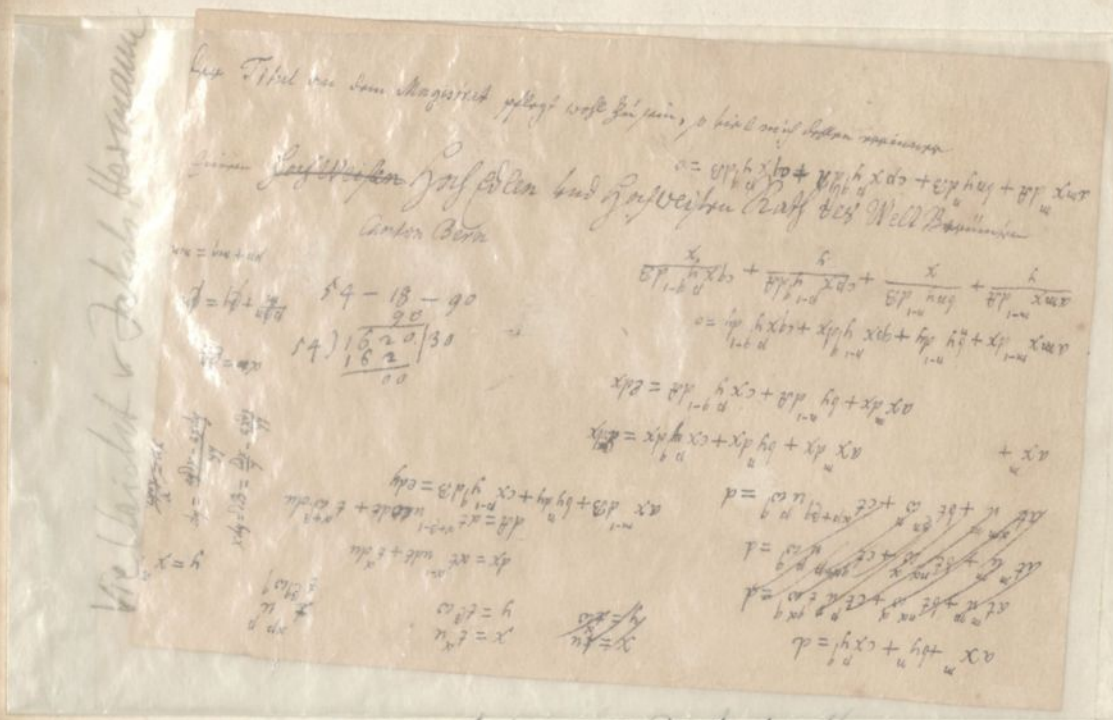
Signatur: Leibn. Marg. 182, [3] - -

PUBLIC DOMAIN

Leibn. Marg. 182

~~N-A 690~~

Leibniz' Schrift auf d. S. 27, 51, 52, 54



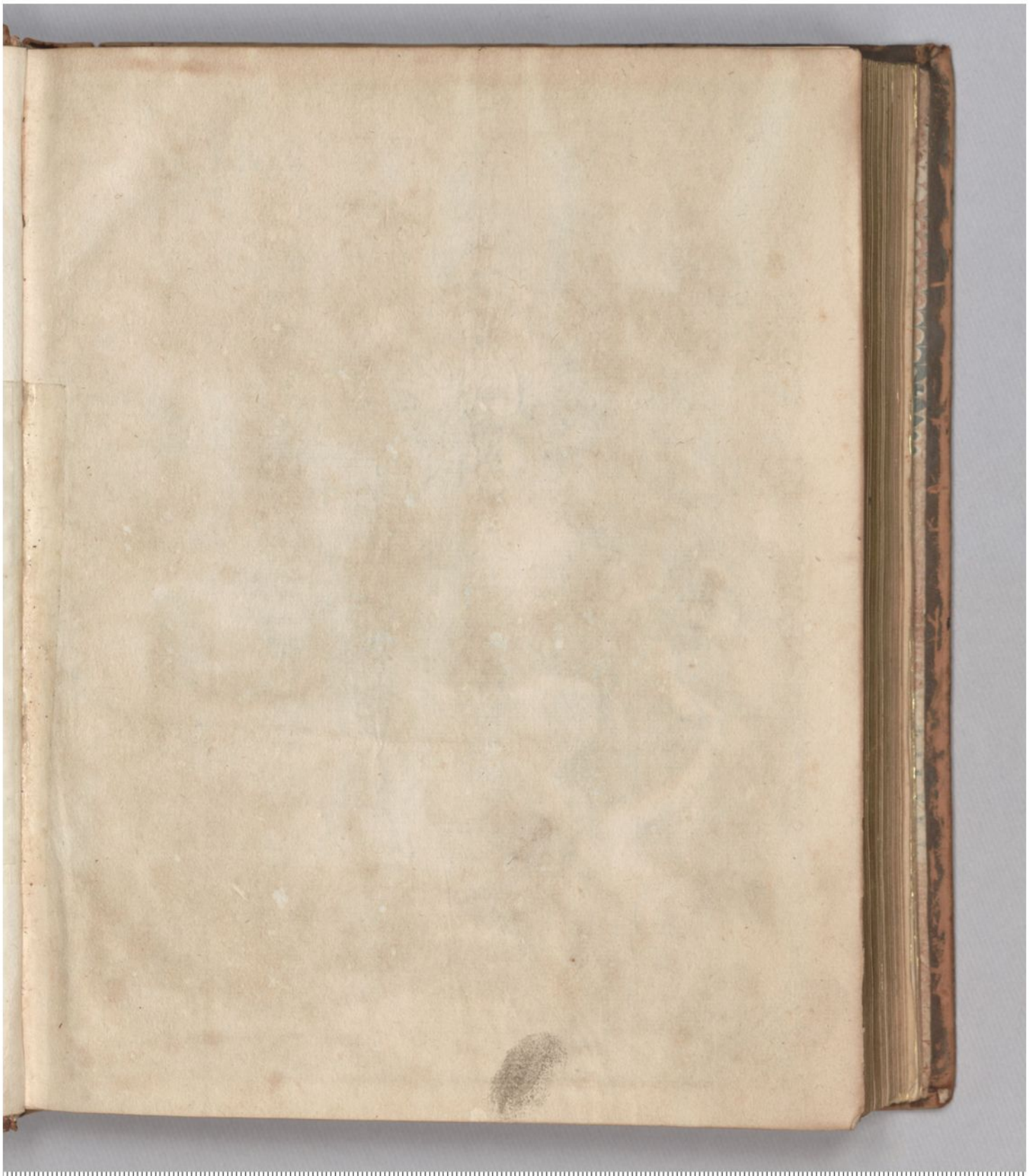
Vielleicht von Jakob Hermann

Niedersächsische Landesbibliothek
Hannover
Am Archiv 1

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [4] - -

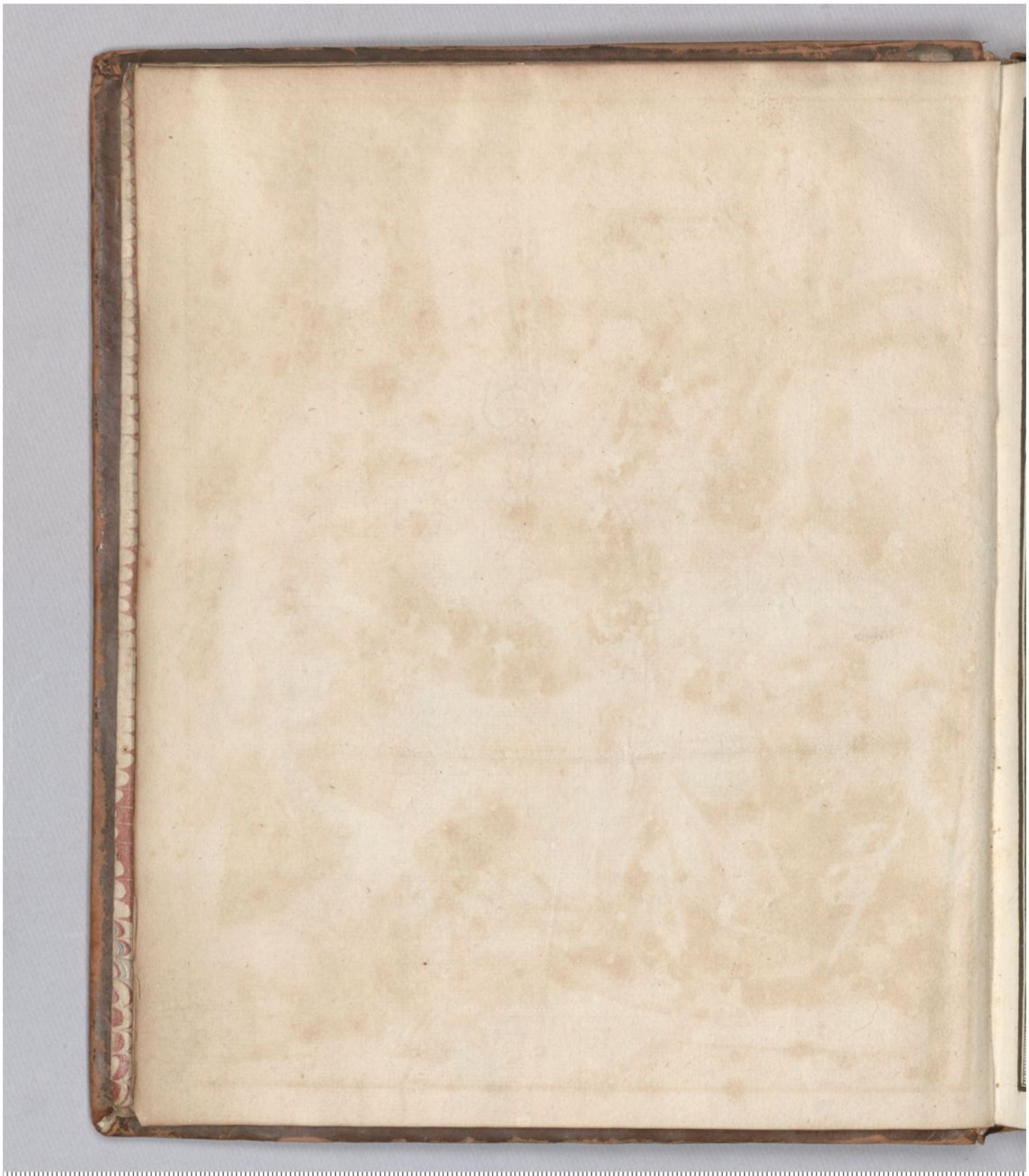
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [5] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [6] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [7] - -

PUBLIC DOMAIN

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [8] - -

PUBLIC DOMAIN

PHORONOMIA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS

CORPORUM

SOLIDORUM ET FLUIDORUM

LIBRI DUO,

AUTORE

JACOBO HERMANNO Basil.

antehac in Illustri Patavino Lyceo; *nunc vero*
in Regio Viadrino *Math. Prof. Ord.*
& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini *est, Sodali.*



AMSTELÆDAMI,
Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.

M. D. CCXVI.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [9] - -

PUBLIC DOMAIN

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [10] - -

PUBLIC DOMAIN

VIRO

PERILLUSTRI

ATQUE

CONSULTISSIMO

GODOFREDO GULIELMO

LEIBNITIO,

CONSILIARIO IMPERIALI AULICO,

ET MAGNÆ BRITANNIÆ REGIS, PRINCIPISQUE
ELECTORIS BRUNSVICENSIS

INTIMO &c.

REGIÆ SOCIETATIS BORUSSICÆ

PRÆSIDI.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [11] - -

PUBLIC DOMAIN

ITEM ET RELIQUIS

EJUSDEM SOCIETATIS

MEMBRIS,

VIRIS CLARISSIMIS

SUIS QUIQUE TITULIS

CONDECORATISSIMIS,

OPUS HOC

PHYSICO-MATHEMATICUM

IN SUÆ ERGA COLLEGAS OBSERVANTIÆ

TESTIMONIUM

DICAT

JACOBUS HERMANNUS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [12] - -

PUBLIC DOMAIN

AD BENEVOLUM LECTOREM.

CUm ante hoc quinquennium circiter in Illuſtri Lyceo Patavino Hydroſtaticam publicis meis Lectionibus exponendam eligerem, tam ob argumenti jucunditatem, quam ob utilitatem non contemnendam in Philoſophia Naturali, cogitatio ſimul animum ſubiit, forte non ab re futurum, ſi, quæ auditoribus meis explicuiſſem, in publicum mitterem. In hoc deinceps propoſito eo magis confirmatus fui firmiusque perſtiti, quo id magis amicis harum rerum intelligentibus probari cognovi.

Archimedes primus, quod conſtet, Hydroſtaticæ rudimenta tradidit in ſuis *De Inſidentibus Humido* Libris, ſed optima ab ipſo in Philoſophiam Naturalem ſparſa ſemina magno temporis tractu ſterilia jacuere, usque dum ſagaci Galilæi ingenio fœcundata germinare inciperent. Etenim magnum hoc Philoſophiæ lumen Archimedea principia non ſolum luculentius expoſuit, explanavit, nonnullisque novis ſpeculationibus auxit, ſed etiam ſingulare phænomenon, ab aquilege tamen acceptum, Philoſophos docuit, *non poſſe aquam in antliis ſuctoriis ultra* octodecim cubitorum altitudinem attolli, &, quanquam veram ejus rationem non aſſequutus eſſe videtur, de elegantiſſimo tamen invento optime eſt meritus, cum hoc ejus phænomenon, ſeu obſervatio, non tantum tubi Torricelliani experimentum pepererit, ſed etiam occaſio fuerit, qua Hydroſtaticæ principia ad aërem ipſum traducerentur. Nam Euangeliſta Torricellius Magni Ducis Hetruriæ FERDINANDI II. Mathematicus, & Galilæi in hoc munere ſucceſſor, obſervationem illam attenta mente

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [13] - -
PUBLIC DOMAIN

te revolvens pro ea, qua erat ingenii ſagacitate, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis à determinata atmoſphæræ preſſione provenire poſſe demum ſuſpicari cœpit, qua de re ut certior fieret, cum hydrargyro experimentum tentavit, &, ut præſagiebat, reſpondit eventus. Tam nobile inventum diu deliteſcere non poterat, nam paulo poſt ejus ortum ſtatim in Gallia aliisque regionibus percrebuit, & curioſorum animos in ſe convertit. Hinc Blaſius Paſcalius ſagaciſſimi ingenii juvenis, quæ fama ex Italia attulerat experiundi cupidus, non ſine inſigni voluptatis ſenſu ea omnia iteratis experimentis veritati conſentanea invenit, & experimenti proceſſum atque eventum in peculiari libello De Gravitate Atmoſphæræ (*De la Peſanteur de la Maſſe de l'Air*) expoſuit, cui alium ingenioſum tractatum De Æquilibrio Liquorum præmiſit. Paſcalii conatus deinceps Anglorum ingenia excitavit, atque inter ea Celeberrimum Philoſophiæ experimentalis cultorem Robertum Boylium, qui in Paradoxis ſuis Hydroſtaticis experimenta captu facillima, atque ab innumeris cum ſucceſſu repetita, memoriæ prodidit; hæc vero omnia latius pertractata multisque aucta fuere à Borellio & Mariotto, quorum opera notiora ſunt, quam ut ulla recenſione indigeant, ambo enim hi Autores, præter Hydroſtatica, etiam plura ad hydraulicam pertinentia attigerunt, de motibus aquarum aliisque, in quibus, quem antea laudavi, Torricellius, & Benedictus Caſtellus ipſis facem prætulerunt; Gulielminus verò doctrinam de motu aquarum magis deinceps auxit, atque fluminibus feliciter applicuit; verum laudatis hisce viris ulterius longe proceſſit Celeberrimus Petrus Varignon, qui eam Hydraulicæ partem, quæ menſuram liquorum fluentium reſpicit, plurimum protendit in duobus præclaris ſpeciminibus Actis Academiæ Regiæ Pariſienſis inſertis, quorum prius circa conſtructionem omnis generis Clepſydrarum verſatur; alterum verò argumentum de liquoribus effluen-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [14] - -
PUBLIC DOMAIN

fluentibus eorumque menſuris ex profeſſo excolit. Ante hosce duos poſtremos laudatiſſimos viros Summus Geometra Iſaacus Newtonus in aureo opere, quod *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica* inſcripſit, plura tradidit corporum fluidorum vires & affectiones concernentia, quo referenda ſunt ea, quæ circa vim elaſticam aëris, denſitates atmoſphæræ, quæ circa reſiſtentias figurarum in fluidis incedentium, circa motus corporum in mediis reſiſtentibus, circa agitationem aëris in productione ſoni, atque alia demonſtrata exhibuit: ejusque exemplo permoti Illuſtris Leibnitius atque Nobiliſſimus Hugenius meditationes ſuas circa motus corporum in medio reſiſtenti publico diutius invidere noluerunt; quod argumentum poſtea generaliter pertractavit ſupra laudatus Varignonius. Celeberrimi vero deque reconditiori Geometria optime meriti Bernoullii Fratres diverſa Problemata circa fluidorum actiones in corpora dura, ſed flexibilia, contemplati ſunt, atque interiori Geometria *ipſis* opem ferente, elegantes curvas velariæ atq; intei intus ſtagnantem liquorem continentis, in apricum produxerunt, ut alia multa taceam.

Sed, quia eximia hæc inventa in variis Diariis aliisque libris diſperſa & ex diverſis ſæpe principiis elicita ſunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, exiſtimavi, ſi omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque ſimplicibus principiis deducta & aucta publicæ luci ſiſterem. Verum hunc vix ingreſſus campum illicò perſpexi, propoſitum iſtud me nunquam feliciter ad exitum deducturum, niſi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum ſolidorum mutuarer, ad id ut tyrones opusculum citra offenſionem percurrere poſſent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere neceſſum haberent. Cum verò in rebus hisce ſubſidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem conſtitueret,

 natus

natus demum est præsens tractatus, quem generaliori titulo *Phoronomiæ*, seu *De Viribus & Motibus Corporum solidorum & fluidorum*, insigniendum & in duos libros dividendum duxi, quorum prior vires & motus corporum solidorum, fluidorum vero alter, evolveret.

Liber primus duas continet Sectiones in sua Capita subdivisas, quarum prior versatur circa simplices gravitationes solidorum, seu circa leges æquilibrii potentiarum mechanicarum inter se commissarum, earumque medias directiones, sive hæ potentiæ corporibus inflexibilibus & rigidis, sive flexibilibus applicatæ sint; qui duo casus nobis præbuerunt admodum generalia & forte non inelegantia theoremata, ex quibus deinceps leges æquilibrii solidorum & fluidorum facile definiuntur & solutiones Problematum catenariæ, velariæ, figuræ lintei, aliorumque non nisi Corollariorum ad instar derivantur. Secunda Sectio motus doctrinam sibi vendicat, quatenus hi motus à gravitatis solicitationibus continuatis seu continue operantibus proveniunt, vel qui ex collisione corporum inter se resultant. Hæc proinde secunda Sectio præcipua eorum omnium continet quæcunque circa motus acceleratos vel retardatos à gravitate uniformi, aut quomodocunque difformi, demonstrari possunt, tum etiam generaliter Isochronam definit quodcunque gravitatis systema assumi queat, idque in casu, quo gravium directiones in uno etiam eodemque puncto conveniunt. Et quia curvæ projectorum non in omni gravitatis difformis seu variabilis hypothesi algebraicæ esse queunt, canon generalis traditur, juxta quem gravitatem variare oportet, ad id ut missilia curvas algebraicas describant, & pro orbibus mobilibus propemodum circularibus facili ratione regula pro viribus centripetis, in curva mobili requisitis, traditur, ostenditurque deinceps quomodo ex data ejusmodi vi centripeta, seu solicitatione gravitatis, motus curvæ circularis inveniri queat. Post hæc se-

qui-

quitur theoria nova centri oſcillationis, quæ propter ſimplicitatem ſuam non displicebit, ut opinor: ea tota fundatur in eo, quod ſolicitationes quædam aſſumtæ & in particulas oſcillantes agentes in directionibus perpendicularibus diſtantiis particularum ab axe oſcillationis æquipollent gravitatis preſſionibus; ope hujus principii & comparationis penduli compoſiti cum ſimplice ei iſochrono, illico reperitur longitudo hujus penduli ſimplicis, idque per unicam atque ſimplicem analogiam. Cum primum in hanc theoriam incidi, quod minimum ante triennium & quod excurrit, accidit, eam tantum gravitati uniformi, ut Hugenius & Jac. Bernoullius, applicueram, ſed poſtea, ex quo in Acta Lipſienſia 1713. M. Febr. incidi, ubi Celeb. Joh. Bernoullius in §. 23. egregii ſui Schediasmatis de nova centri oſcillationis theoria, quæ tam ad pendula intra varios liquores oſcillantia, quam extra eosdem, ſeſe extendat, mentionem facit, in hisce etiam circumſtantiis methodi meæ periculum facere cœpi optimo cum ſucceſſu, nam ſponte ſua ea, quæ Bernoullius de ſua tunc pollicebatur, & poſtmodum anno ſequenti Menſ. Jan. præſtitit, ultro ſeſe mihi obtulerunt ſtatim poſt lectum ſpecimen prius anni 1713. præterquam quod demonſtratione facili id demonſtratum dedi, quod Hugenius tanquam poſtulatum ſibi concedi poſtulabat, centrum ſcilicet commune gravitatis omnium particularum, cujusque penduli compoſiti diffractis, quibus connexæ erant, vinculis ad eandem altitudinem attolli poſſe motu earum in altum converſo, ex qua idem centrum ceciderat, particulis tamen inter ſe connexis. Ex memorabili ejusmodi naturæ lege methodo, ni fallor, nova regulas motus ex percuſſione corporum elaſticorum derivavi.

Liber Secundus corporibus fluidis deſtinatus perplura complectitur. Agit enim de gravitationibus liquorum quorumlibet tum in plana ſubjecta, tum in latera vaſorum, indeque canones derivantur circa vires vaſorum, ut citra fracturam liquo-

ris preſſiones perferre queant. De æquilibriis liquorum cum inter ſe, tum cum corporibus ſolidis ipſis immiſſis. De figuris, quas fluida corporibus flexibilibus, in quibus ſtagnant, inducunt. De gravitate & elaſticitate aëris ac denſitatibus atmoſphæræ in omnia tellure diſtantia & in quacunque elaſticitatis lege. De motu & menſura aquarum fluentium ex vaſis quibuscunque erumpentium, aut in canalibus devolutarum. De effectibus fluidorum ex percuſſione, quò pertinent reſiſtentiæ, quas figuræ in fluidis latæ patiuntur, harumque reſiſtentiarum mediæ directiones, item problema velariæ & id genus alia. De motibus corporum in mediis reſiſtentibus tam rectilineis quam curvilineis. De motu navium vento impulſarum. De motu circulari fluidorum. De motu aëris in productione ſoni; ac denique de motu inteſtino ſeu interno fluidorum, à quo calor pendet. Hisce ſummatim recenſitis totum opusculum abſolvitur.

Cum brevitati in omnibus ſtuduerim, id cumprimis operam dedi, ut, quantum fieri poterat, cuncta generalibus theorematis comprehenderentur; ex quibus deinde particularia, tanquam Corollaria, poſſent deduci. Propterea liquores tanquam heterogeneos ſtatim ſpectavi, atque eorum leges preſſionis atque æquilibrii inveſtigavi, ex quibus deinceps leges æquilibrii fluidorum homogeneorum facillime elicui. Sic etiam vectem rectilineum vel curvilineum in omnibus ſuis punctis à potentiis quomodocunque variantibus impulſum mihi propoſui, in quo mediam potentiarum directionem inveſtigarem, hocque modo in inſignem proprietatem centrorum gravitatis, quam me primum inveniſſe putabam, incidi; ſed quam etiam Celeb. Joh. Bernoulli in Libro nuper edito (*Eſſay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*) Cap. XII. §. VI. proponit. Sed Cl. hic Geometra recordabitur haud dubie ſe MStum meum vidiſſe, in quo theoremata huc facientia continebantur, priusquam laudatus ſuus liber editus eſſet, quemadmodum ego eius Propoſitio-

sitionem propriam in eius libro, tunc adhuc inedito, pariter viderам. Sic etiam problemata catenariæ, velariæ, &c. ad hoc generale reduxi: invenire figuram manentem lineæ flexilis in singulis punctis à potentiis secundum directiones quascunque impulsæ, cujus solutionem simplicissimam, ut mihi saltem videtur, exhibui. Et hoc modo in aliis procedere conatus sum. Perspicuitati, quantum potui, litavi; propterea multæ demonstrationes provectioribus Geometris nimis prolixæ fortasse videbuntur, sed sciant velim Tyronum quoque rationem habendam mihi fuisse, quibus non semper in potestate est ea supplendi, quæ subinde ex demonstrationibus brevitatis & elegantiæ gratia resecantur mente necessario supplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam sectatum esse, atque propterea demonstrationes lineares algebraicis prætulisse, experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum sæpissime simpliciores & elegantiores suppeditare solutiones ac constructiones, quam Analysin speciosam. Speciosam dico, nam subinde utor analysi geometrica, se. lineari absque symbolis algebraicis procedente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etsi non semper. Ejusmodi analysi geometrica veteres usos existimo, quemadmodum ex Euclidis datis & Apollonii libello *de Sectione Rationis* à Celeberrimo Edmundo Hallæo edito non obscure colligitur; simili etiam analysi summus Newtonus ad stuporem usque usus est in suis *Principiis*. In applicatione verò theorematum, tanquam loco magis idoneo, calculo algebraico subinde utor.

In his libris frequens curvarum est usus ad repræsentandas virium, temporum, celeritatum, aliarumque ejusmodi affectionum proportiones, quas propterea curvas vocabulo *scalarum* insignire soleo, prout Cavallerius & Vivianus Celeberrimi Geometræ diu ante me circa varios gravitatis gradus & momentorum corporum, Architectos imitati, qui lineam rectam

in plures particulas æquales interſtinctam (ad id, ut ex ea præconceptorum operum ideas proportionaliter delineare poſſint) *ſcalam* Geometricam vocant. Patet ergo curvarum linearum contemplationem non ſolum non eſſe inutilem, ſed abſolute neceſſariam ad accuratam phænomenorum atque virium naturæ repræſentationem.

Quantum ad notationis formam attinet, cum duæ pluresve lineæ cum interjectis punctis conjunguntur, hoc ſignificat lineas in ſe mutuo ductas eſſe, ut AB. CD ſignificat rectangulum ſub AB in CD, quod aliis ſic deſignari ſolet AB + CD. Sic etiam §. 172. *num.* 11. tBE = N. $\surd$A. ang. ICD indicat tempus per BE exponi, facto ex N & radice ipſius A in angulum ICD, & ſic in reliquis hujus Propoſitionis demonſtrationisque locis, & in Propoſitionibus duabus ſequentibus. Fractiones ſeu rationes ad Typothetarum commoditatem exprimuntur per duo puncta. Sic AB : CD idem eſt ac communiter $\frac{AB}{CD}$, & AB : CD = EF : MN idem ac vulgo AB. CD :: EF. MN. Cum plures fractiones ſibi invicem adduntur, eæ vel commate, aut commate cum puncto, aut etiam parentheſibus diſtinguuntur: ſic $f = a:b, +c:d.$ aut $f = a:b; +c:d$ idem eſt quod ordinarie $f = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Subinde quantitatibus aliæ parentheſibus incluſæ ſine ullo interpoſito ſigno annectuntur, quod indicat quantitates eſſe æquales; ſic, ſi haberetur A(a) id indicaret æquales eſſe vel æquivalentes magnitudines A & a, ſin verò cum puncto interpoſito diſtinguantur ut A.(a) hoc denotat factum ex A in a; & ſic in aliis. Expreſſiones vero $\surd(aa+bb)$; $(aa+bc)^m$ denotant $\surd\overline{aa+bb}$, & $\overline{aa+bc}^m$ reſpective. Reliqua ſigna uſitato ſenſu adhibentur.

HO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [20] - -
PUBLIC DOMAIN

HONORI AC MERITIS

Viri CL.

JACOBI HERMANNI,

LIBROS DUOS

DE VIRIBUS & MOTIBUS

CORPORUM

edentis.

SUblimioris qui ſapientiæ
Arces reviſis pectore candido,
HERMANNE, Rauracis ab oris
Pruteniæ ſociate Muſæ.

Nuper retentus non fueras, ubi
Olim penates fixerat inclitus
Antenor, in ſacro receſſu
Italiæ Patavinus hoſpes.

Nec Te jocoſi dulcis amœnitas
Rheni reluctantem in patrio ſolo,
Nec rura, nec clari ſodales
Ingenii tenuere nexu,

Carum POLENVS ſideribus caput
Et LAZARINI flumina, nec ſolum
Dives Camœnarum, aut ſtupendum
Adriaci regimen Senatus,

Quin Te citato proriperes gradu
Linquens amœni compita Livii, &
Rheni Padique obliviſo
Anteferens Viadrum ſuſurro.

Sic

Sic Tu beato ſaucius æthere
Prudens amicos deſeris hoſpites,
Et porrigens lumen per orbem
Sidereos imitaris ignes.

Quæ cura vaſtum tendere limitem
Mortalis ævi & viſere cœlites
Immane pandentes theatrum
Per ſuperûm ſpatioſa regna!

Quæ mater artis conſcia lubricæ
Natura cœco clauſerat in ſinu,
Tu prodis & vires moventes
Cuncta jubes numeros ſubire;

Centrique amores latius explicas,
Pulchroque cingens ætheream facem,
Ductis per artem ceu choreis,
Ordine circumagis planetas.

Duris inhærens & fluidis onus
Tu curioſis in rationibus
Ducis, pererrans atque olympum
Cuncta domas abaco Minervæ.

Newtonvs hoſpes divitis inſulæ,
Sed nil habentis ſe magis aureum,
Hac primus ivit, Tuque forte
Nil populis dederis ſecundum.

Felicis ævi pignora! queis amor
Rebus creatis lumina reddere,
Et, quæ potenti more luſit,
Subdere jura Patris papyro

Porrecta ponto, fuſa per ætherem
Terræque gyris indita: diſcite,
Mortalium cœtus moveri &
Centra ſequi potiora ſole,

Atque

Atque ordinatis doctius ignibus;
Huc mentis alas atque animum vagum
Conferte, nec soli cadente
Sub numerum effluitote motu.

Postquam volatum mentis, & igneos
Sic appetitus rite sub orbitam
Egistis, ad naves regendas
Vertite & ad *gravium* librandam

Molem ruentum pondere corporum,
Aestus marinos & celerem fugam,
Sinas & Indos computate,
Subsidium decus atque vitæ.

Hæc in Poësi Castalidum nemus
Aut in puellarum ordinibus novem
Non pandit, aut rostra, aut tribunal
Mobile fulminibus Periclis.

Ite ergo *Musæ turba minor meæ*, &
Humanitatis docta volumina
Submittite HERMANNO sagaci,
Hunc hedera redimite vestra.

COLLEGAE CONIVNCTISSIMO

POS.

NICOLAVS WESTERMAN,
Eloq. Professor Ord. & Bibliothecarius Regius.

* * *

IN-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [23] - -
PUBLIC DOMAIN

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM.

DE Viribus & Motibus Corporum prænotanda. 1

LIBER PRIMUS, DE CORPORIBUS SOLIDIS.

SECTIO PRIMA.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum æquilibriis & mediis directionibus. 6

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, seu pondera Corporum, cum proportione Massarum eorundem Corporum collata. ibid.

CAPUT II.

De Solicitationibus, quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus. 10

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis, & de mediis directionibus harum potentiarum. 36

SECTIO SECUNDA.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis. 51

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypothesi. 68

C A-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [24] - -
PUBLIC DOMAIN

CAPUT III.

De Motu Isochrono Corporum in curvis descendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypothesin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum. 81

CAPUT IV.

De Solicitationibus centralibus, quibus Corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de Motu Apsidum. 95

CAPUT V.

De Motibus gravium inter se connexorum, atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; seu de Motu Pendulorum compositorum eorumque centro oscillationis in omni possibili gravitatis variabilis hypothesi. 100

CAPUT VI.

De Regulis motus in collisione Corporum. 110

LIBER SECUNDUS, DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO PRIMA.

De Viribus Fluidorum à gravitate. 125

CAPUT I.

De generalibus regulis gravitationis Liquorum in subjecta plana. 128

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de tuborum firmitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones. 138

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum solidorum in Fluidis quibuscunque demersorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [25] - -
PUBLIC DOMAIN

INDEX

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in Corporibus flexibilibus ſtagnantia hisce Corporibus flexibilibus inducere debent. 162

CAPUT V.

De Preſſionibus Aëris ex gravitate. 169

CAPUT VI.

De Vi Elaſtica Aëris in genere. 180

CAPUT VII.

De Viribus Elaſticis Aëris cum denſitatibus ejus comparatis. 189

CAPUT VIII.

De Denſitatibus Aëris in diverſis Atmoſphæræ locis in omni poſſibili elaſticitatum hypotheſi. 197

SECTIO SECUNDA.

De Motibus Aquarum. 213

CAPUT IX.

De Motibus Liquorum per minora foramina erumpentium. 214

CAPUT X.

De Curſu Fluminum. 226.

SECTIO TERTIA.

De Effectis fluidorum ex percuſſione. 235

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percuſſionis fluidorum. ibid.

CAPUT XII.

De Reſiſtentiis figurarum in fluidis motarum. 242

C A-

CAPUT XIII.

De Figuris, quas ſuperficies flexiles induere debent, cum venti allapſus directè excipiunt, ſeu de curva Velaria. 265

SECTIO QUARTA.

De Motibus Corporum in mediis reſiſtentibus. 277

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus Corporum in mediis reſiſtentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria neceſſaria. 279

CAPUT XV.

De Motibus Corporum, quibus aër reſiſtit in ratione celeritatum mobilis. 287

CAPUT XVI.

De Motu Corporum in aëre reſiſtente in duplicata ratione celeritatum mobilis. 302

CAPUT XVII.

De Motibus Corporum in aëre reſiſtente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem. 311

CAPUT XVIII.

Methodus inveniendi ſymptomata motuum Corporum in mediis utlibet reſiſtentibus, atque denſitate pro libitu variantibus. 325

CAPUT XIX.

De deſcenſu & aſcenſu gravium in lineis quibuscunque curvis, poſita medii reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali. 334

CAPUT XX.

De Motu projectorum in aëre, qui miſſili in duplicata ratione celeritatum reſiſtit, cum corpus à ſolicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum poſitione datum, ut hactenus conſiderari ſolebant, tendenti-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [27] - -
PUBLIC DOMAIN

bus, urgetur, ſed ſecundum directiones lineam quamcunque curvam poſitione datam contingentes. 345

CAPUT XXI.

De Motu navium vento impulſarum. 356

SECTIO QUINTA ET ULTIMA.

Continens Miſcellanea de motu circulari fluidorum, de Motu aëris in producendo ſono, & de Motu interno fluidorum. 361

CAPUT XXII.

De Motu circulari fluidorum. ibid.

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione ſoni. 373

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum. 376

APPENDIX. 378

DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

PRÆNOTANDA.

1. CORpora abſolute *moveri* dicuntur, cum contiguitas eorum cum partibus ſpatii undequaque infiniti & immobilis continue mutatur; atque adeo *Motus* ipſe conſiſtit in iſtiusmodi contiguitatis mutatione.

2. Partes illæ ſpatii infiniti & immobilis cortori contiguæ ſunt, quæ ipſum immediate contingunt & ambiunt; ſpatiumque immobile dicitur, quia ſingulæ ejus partes eandem conſtanter diſtantiam, atque adeo eundem mutuo reſpectu ſitum ſervare intelliguntur, totumque ſpatium utpote undique in infinitum excurrens extra ſe ipſum vagari atque ſitum mutare, intelligi non poteſt.

3. Quia contiguitatis mutatio non niſi tractu temporis fieri poteſt, implicat enim ut unum idemque corpus ſimul & eodem tempore diverſis ſpatii partibus contiguum ſit, id eſt, in diverſis locis exiſtat; ideo omnis motus tempus involvit.

4. Tempus conſiderari poteſt tanquam æquabilis fluxus unius ejus ſigni indiviſibilis, quod Momentum vel Inſtans nominabimus; eodem ferme modo quo Geometræ lineas motu puncti generari intelligunt, hoc tamen cum diſcrimine; quod puncti lineam deſcribentis motus modo concitatior modo remiſſior fingi poſſit, cum è contrario fluxus momenti noſtri æquabili, ut ita dicam, paſſu fiat, ita ut æquales temporis partes æquales fluentis momenti diſtantias, ſeu intervalla, à prima ſtatione in qua ea incipiunt, ſibi vindicent.

5. Hinc eſt, quod fluxus momenti noſtri ſeu tempus ſoli intellectui hoc modo perceptibile, periodicis Corporum cæleſtium motibus vel Horologiorum uſu aliorumve inſtrumentorum ope, & ſenſibile quodammodo reddatur, atque ad menſuram qualemcunque revocetur. Sed tales temporis menſuræ & repræſentationes non ſunt exactæ in ultimo rigore, quandoquidem nec motus annuus ſolis,

nec qui ex eo atque diurno componitur, nec forte ipſe diurnus, ut nonnulli Aſtronomi ſuſpicantur, perfecte æquabiles ſunt, ac propterea non niſi temporis apparentis menſuræ eſſe poſſunt. Ideo etiam Aſtronomi, qui temporis veri & æquabilis menſuram exquirunt, ſubinde apparens tempus ad tempus, quod vocant medium, quodque pro uniformi habent, reducere neceſſum habent. Et quanquam Horologiis oſcillatoriis, prout ad inſignem perfectionis gradum ab Hugenio perducta ſunt, accurata veri ſeu æquabilis temporis menſura haberi poſſe videtur, eorum tamen motus Mathematice accurati & uniformes eſſe nequeunt, non quidem ob principiorum defectum, in quibus conſtructio eorum fundata eſt, ſed ob defectum executionis; conſtat enim machinas nunquam in ultimo rigore tales parari poſſe, quales theoria conſtruendas jubet, quia in theoria ab illis impedimentis atque circumſtantiis tantum non ſemper abſtrahi ſolet, quæ tamen in ipſa praxi nunquam abeſſe ſolitæ ſunt, ſucceſſum machinæ accuratiſſimum eludentes.

6. Si fluens noſtrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi paſſu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis *æquabilis* vocatur. Et iter ſeu longitudo, quæ etiam ſpatium vocari ſolet motu corporis deſcriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc eſt, ad tempus lationis applicatum ſeu diviſum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur.

7. Id, quod corpus ad motum concitat, ſeu ex quo motus corporis reſultat, id eſt quo poſito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quæ dividi poteſt, in *Vivam* & *Mortuam*.

8. *Vis viva* eſt, quæ cum motu actuali conjuncta eſt. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam tranſmittit, vi viva præditum dicitur.

9. *Vis Mortua* verò eſt, ex qua nullus motus actualis reſultat, niſi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulſus nullis aliis ei ſuccedentibus, etenim non, niſi poſt infinitos demum gravitatis ictus indeſinenter replicatos ſeu unos aliis continue ſuccedentes, motus ſenſibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulſus, ſiſtunt exemplum vis mortuæ.

10. Majoris diſtinctionis gratia Vim Vivam ſimpliciter Vim, Mortuam verò cujuſcunque demum generis fuerit, *Solicitationem* poſthac vocabimus.

Præ-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [30] - 2
PUBLIC DOMAIN

Præcedentes virium definitiones satis aperte indicant in iis agi de *Vi activa* corporum.

11. Sed inest etiam corporibus *Vis* quædam *passiva*, ex qua nullus motus nec tendentia ad motum resultat; sed consistit in *Renixu* illo, quo cuilibet vi externæ mutationem status, id est motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur. Quæ resistentiæ vis significantissimo vocabulo à summo Astronomo Joh. Keplero *Vis inertiæ* dicta est. Hæc Vis inertiæ in corporibus quiescentibus se satis prodit; etenim corpus quodcunque A in aliud, sed quiescens, B impactum aliquid de sua vi & motu amittet, excipiensque B aliquid virium & motus ab impellente A acquiret. Ex quo claret, quiescens corpus B reapse vim aliquam passivam habere à vi in id incurrentis corporis A frangendam atque superandam; alioqui impellens A post occursum nihil de suo motu amisisse debuisset, cum corpus quiescens B, si resistendi facultate careret, alterius motui nullam remoram afferre possit, adeo ut ambo, impellens A & impulsum B, ea ipsa celeritate, qua corpus A ante occursum ferebatur, etiam post contactum incedere deberent, quod phænomenis adversari nemo non videt.

12. In hac Vi inertiæ materiæ fundata est Naturæ lex, qua *Cuilibet actioni æqualis & contraria est reactio.* In omni enim actione est luctatio inter corpus agens & patiens, & sine ejusmodi luctatione nulla actio, proprie sic dicta, agentis in patiens concipi potest, alioqui nulla stabilia haberentur Mechanicæ fundamenta, sed quilibet effectus à qualibet caussa oriretur.

13. *Vires activæ*, cujuscunque generis fuerint, gemino modo inter se collatæ variare possunt. Aliæ enim aliis intensive majores sunt, nulla habita ratione subjecti recipientis; cum duo corpora, quoad materiam æqualia, viribus inæqualibus pollent. Aliæ porro aliis etiam majores esse possunt, cum vires intensive æquales corporibus quoad materiam inæqualibus applicatæ sunt. Nam in genere vis cujusque corporis est ea, quæ resultat ex omnibus viribus partialibus, quibus singula corporis elementa seu minimæ particulæ pollent. Sic si vires, quibus singula corporis elementa afficiuntur, conspirantes sunt, *Vis totalis* erit complexus seu aggregatum omnium virium partialium.

14. *Quantitas materiæ* cujusque corporis, quam *Massam* deinceps vocabimus, est complexus (aggregatum) omnium particularum, quibus corpus compositum est. Ipsæ verò particulæ corporis

conſtitutivæ; ejus *elementa* brevius dicentur. Idcirco materia fluida, quæ in corporum meatibus latere poteſt, ad corporis ſubſtantiam pertinere non cenſetur, perinde ac aqua in ſpongiæ poris delitescens ad ſpongiæ ſubſtantiam non refertur.

15. *Volumen* cujuſque corporis eſt ſpatium, quod corporis Materiam cum interſperſis poris occupat. Ex collatione Maſſæ ſeu quantitatis materiæ cum Volumine reſultat

16. *Denſitas*, quæ eſt ratio quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen. Ut, ſi corpus in maſſam poris carentem colliquatum intelligatur, facile etiam intelligitur ejusmodi maſſam minus ſpatium occupaturam, quam antea cum intermixtis poris occupârat: Ratio talis Maſſæ poris deſtitutæ ad corporis Volumen nobis eſt *Denſitas corporis*. Aliis denſitas major minorve conſiſtit in majore vel minore pororum amplitudine, quod cum noſtra definitione ſatis convenit; nam quo major eſt ratio maſſæ poris expertis ad corporis Volumen, eò minor erit meatuum amplitudo, atque adeo major corporis denſitas.

17. *Raritas* eſt corporum qualitas reciproca denſitati, conſiſtens in ratione Voluminis ad Maſſam ſeu Materiæ quantitatem, hæc enim duo ſemper unum idemque ſignificare ſciendum eſt.

Ex hiſce definitionibus prono alveo fluunt ſequentia conſectaria, quæ, quia in ſequentibus maximo uſui erunt, breviter hoc loco ſunt indicanda. Dicantur Corpora inter ſe collata C, c; eorum Maſſæ M, m; Volumina V, v; Denſitates D, d; Raritates R, r; atque, hiſce nominibus poſitis, erunt

18. *Quantitates Materiæ ſeu Maſſæ* (M, m) *in compoſita ratione Denſitatum* (D, d) *& Voluminum* (V, v). Id eſt, M : m = D. V : d. v. Nam (§. 16.) D = M : V & d = m : v, ergo M : m = D. V : d. v.

19. *Volumina* (V, v) *erunt in compoſita ratione ex directa Maſſarum & inverſa Denſitatum.* Id eſt, V : v = (M : D) : (m : d). Liquet ex §. 17.

Volumina ſunt etiam in compoſita ratione ex directa Maſſarum & directa Raritatum. Hoc eſt V : v = M. R : m. r. Nam (§. 16.) R = V : M, & r = v : m ergo V : v = M. R : m. r.

20. *Denſitates Raritatibus ſunt reciproce proportionales, ſeu* D : d = r : R. Nam (§. 16. 17.) eſt D = M : V, & R = V : M, erit 1 : R = M : V = D atque adeò D. R = 1, & d. r = 1 = D. R; hinc D : d = r : R.

21. *Directio* cujuslibet vis motricis eſt linea, juxta quam hæc vis

vis in corpus agit, eſtque illa recta, quam mobile hac vi citatum actu deſcribit aut ſaltem deſcribere conatur.

22. *Vires* & *Motus conſpirantes* ſunt, quorum directiones congruunt, aut ſaltem parallelæ ſunt, & easdem ad partes tendunt.

23. *Vires* verò & motus *Contrarii* hoc eſt, *directe* oppoſiti, quorum directiones quidem congruunt aut ſaltem æquidiſtantes ſunt, ſed in oppoſitas partes vergunt.

Hactenus generales corporum affectiones, quibus recenſitæ virium ſpecies applicari poſſunt, breviter attigimus. Ordinis ratio inſuper requirit ut corporum ſpecies, quibus vires illæ variè poſſunt applicari, ab invicem diſtinguantur; corpora enim ſunt vel ſolida vel fluida; & ex diverſis hiſce ſpeciebus diverſa reſultant phænomena.

24. *Corpora ſolida* aut *conſiſtentia* dicuntur ea, quorum elementa ſaltem eousque cohærent, ut nulla corporis pars ſenſibiliter moveri poſſit, quin tota maſſa eundem motum participet. Cæterum ex obſervationibus Celeb. Dominici Caſſini conſtat metalla frigori expoſita nonnihil contrahi, & vice verſa, quoad Volumen, extendi in locis calidis; & ejusmodi metallorum extenſiones & contractiones, quibus haud dubie duriſſima quæque alia corpora plus minus obnoxia ſunt, absque interno partium motu fieri nequeunt: ſed quia hi motus, ex ſolis phænomenis per ratiocinia colligendi, in ſenſus immediate non incurrunt, definitioni iſti nihil officere poſſunt; quandoquidem in ea corporum durorum, ſeu ſolidorum, elementa non abſolute cohærere dicuntur, ſed tantum eousque, ut ea ab invicem avelli aut moveri ſenſibiliter nequeant, quin totum corpus eodem motu abripiatur.

25. *Fluida* verò corpora ſunt, quorum particulæ agiliſſimæ non cohærent, ſed facile moveri poſſunt non motâ univerſâ fluidi maſſâ. In fluidis viſcidis particulæ nonnihil cohærere videntur, ſed talis earum adhæſio miram earumdem inter ſe mobilitatem non tollit, ac propterea talia fluida ex allata hac definitione non excludun-

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER PRIMUS.

HIc Liber reſpicit *Corpora ſolida* dividiturque in duas ſectiones, quarum prima verſatur circa Æquilibra ſolicitationum gravitatis aliaque huc pertinentia, & ſectio altera expendit motus, qui ex ejusmodi ſolicitationibus, ut libet variatis, reſultant.

SECTIO I.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum Æquilibriis & Mediis Directionibus.

26. CUm Solicitationes variis corporibus applicatæ ita inter ſe committuntur, ut nulla earum reliquas vincere queat, ipſæ in *Æquilibrio* conſiſtere dicuntur. Ejusmodi Solicitationes *Potentiarum Mechanicarum* nomine apud veteres inſigniebantur, quam nomenclationem nos etiam paſſim retinebimus. Quæ igitur ad harum Solicitationum ſeu Potentiarum mechanicarum Æquilibria, Medias Directiones, & id genus alia, pertinent, hac prima ſectione excutiemus, ſive corpora, ad quæ tales potentiæ pertinent, rigida ſint ſive flexibilia.

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, ſeu pondera corporum, cum proportione Maſſarum eorundem corporum collata.

APud Philoſophos Geometras elegans corporum proprietas celebratur, in eo conſiſtens quod corporum pondera in eadem prorſus ratione creſcant in qua ipſorum Maſſæ ſeu Quantitates Materiæ;

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [34] - 6
PUBLIC DOMAIN

teriæ ; aut Geometrica phraſi eandem proferendo ; *quod corporum gravitates ſeu pondera Maſſis ipſorum proportionalia ſint.* Illuſtr. Newtonus, ſumtis accuratiſſimis pendulorum experimentis hanc, gravium proprietatem ſe ſemper comperiſſe teſtatur pag. 305. Princ. Phil. Nat. Math. primæ edit. quam etiam ex Coroll. I. Prop. XXIV. Lib. II. eleganter elicuit. Nobiliſſ. Hugenius hanc proprietatem non ſolum admittit, ſed etiam pag. 140. Diatribæ De Cauſſa Gravitatis ex regulis motus deducit. Et quia hæc corporum affectio per univerſam Philoſophiam Naturalem magni momenti eſt, aliam adhuc ejus demonſtrationem adducere tentabo, admiſſâ unicâ quæ ſequitur hypotheſi.

HYPOTHESIS.

27. *Eadem manente Materiæ quantitate, & directionibus gravium exiſtentibus parallelis, ſeu in Centro indefinite diſtanti convergentibus, pondera corporum non mutantur, variatis eorum poſitione reſpectu horizontis & figuræ.*

Hoc eſt, corpus quodvis idem pondus retinet, quocunque modo id poſitum ſit reſpectu horizontis, nec ejus pondus mutari cenſendum, ſi ejus figura in aliam, quamcunque ſcilicet, in globum, cylindrum, conum &c. mutata ſit, modo eadem manſerit materiæ quantitas, ſeu maſſa.

PROPOSITIO I. LEMMA.

28. *Cauſſa gravitatis, quæcunque ea ſit, non tantum agit in partes exteriores corporum, ſed etiam in interiores omnes.*

Nam ſi gravitatis cauſſa in exteriores tantum corporum partes ageret, in eas ſolum ageret, quæ horizonti averſæ ſunt corporum ſuperficies, atque adeo corporum pondera hiſce ſuperficiebus proportionalia eſſent: atqui, pro varia corporis poſitione & ſitu, ſuperficies horizonti averſa modo major modo minor eſt; ergo, ſi gravitatis impreſſiones ſuperficiebus hiſce proportionales eſſent, ſequeretur, mutari corporis pondus, pro alio atque alio ejus ſitu, contra hypotheſin.

Deinde, ſi gravitas tantum ageret in exteriores corporum partes, non verò in interiores omnes, ſequeretur, quod, mutatâ figurâ corporis, ſed eadem manente materiæ quantitate, aliud atque aliud inde reſultet corporis pondus ; quandoquidem variatis figuris varian-

riantur ſimul particularum & ſuperficierum horizonti averſarum poſitiones ac quantitates, atque adeo variarent corporum pondera eadem manente eorum materiæ quantitate. Quæ omnia ſunt contra hypotheſin articulo 27. aſſumtam.

COROLLARIUM.

29. Idcirco nullius corporis pondus in omni poſitione & figura idem manere poteſt, niſi ſingula ejus elementa æqualia æquales gravitatis impulſus excipiant. Quo poſito facilis erit probatu ſequens

PROPOSITIO II. THEOREMA.

30. *Pondera corporum quantitatibus materiæ ſeu maſſis eorum proportionalia ſunt.*

Sint primùm duo corpora commenſurabilia C, c, unum eorum elementum e, numerus elementorum in Corpore C, N & numerus in altero c, dicatur n, & denique maſſæ corporum ſeu materiæ quantitates dicantur reſpective M, m. Quibus poſitis, quia (§. 29.) ſingula utriusque corporis elementa æqualem à gravitate impreſſionem ſubeunt, ſi una ejusmodi impreſſio nominetur i, pondus corporis C ſeu ſolicitatio totalis à gravitate, qua corpus ad deſcenſum urgetur (§. 13.) eſt aggregatum ſolicitationum, quibus ſingula elementa urgentur, & quoniam harum ſolicitationum directiones ex hypotheſi parallelæ ſunt, ipſæ ſolicitationes ſeu gravitatis impreſſiones conſpirantes erunt; atque adeo ſolicitatio totalis gravitatis in corpore C erit una ſolicitatio ſeu impreſſio i ducta in numerum N elementorum, quæ in hoc corpore continentur, hoc eſt pondus ipſius C quod indicabo per pC fiet $= N.i$ ac $pc = ni$. Eſt verò $N.i : n.i = N.e : n.e$; ergo quia N. e eſt aggregatum particularum e in corpore C, ſeu hujus corporis maſſa M, & n. e maſſa alterius c ſeu m, erit omnino $pC : pc = M : m$ hoc eſt pondera corporum C, c ſunt maſſis eorum proportionalia. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

31. Si corporis maſſa, quæ ſubinde eâdem literâ deſignabitur, qua ipſum corpus ſignatur, ducetur in ſolicitationem ſeu gravitatis impreſſionem (hæc enim duo hoc loco & ubique unum idemque ſignificant) qua unum corporis elementum urgetur, factum exponet ſemper

per pondus absolutum corporis, ut si corpus fuerit C, & gravitatis solicitatio, qua singula ejus elementa afficiuntur, nominetur G, quantitas seu factum C.G exponit pondus absolutum corporis C, intelligendo per hanc literam C massam hujus corporis.

Corollarium II.

32. Hinc si, ut supra, Corporis hujus volumen & densitas dicantur V & D, & pondus pC, erit pC ut G.D.V. Id est, pondus cujusque Corporis est ut factum ex solicitatione gravitatis G, qua singula ejus elementa *e* urgentur, & densitate D in Volumen V. Nam (§. 31) pC est ut CG, & (§. 18) C, quæ hoc loco idem significat ac illic M, scilicet massam corporis, est ut D.V, ergo pC seu CG est sicut G.D.V.

Corollarium III.

33. Et quia gravitas specifica corporum consistit in proportione ponderum absolutorum corporum, sub *voluminibus* æqualibus, ideo gravitates specificæ densitatibus proportionales erunt, cum (§. 16.) *massæ corporum volumine* æqualium densitatibus proportionales sint, & per præsentem propositionem pondera corporum, eorum massis. Idcirco si corporis nostri C gravitas specifica dicatur S, erit ejus pondus absolutum seu pC ut S.V, quandoquidem S est ut D.G.

Scholion.

34. Hæc ipsa propositio ex theoria molis pendulorum aliter adhuc *demonstrari potest*, ut à Cel. Newtono, *in loco supra in proœmio hujus capitis jam indicato*, præstitum. Similem propositionem ex principiis, quibus ad derivanda symptomata motuum acceleratorum gravium utemur, facillimo etiam negotio eliciemus.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [37] - 9
PUBLIC DOMAIN

CAPUT II.

De Solicitationibus quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus.

DEFINITIONES.

I.

Fig 1. 35. CUm quælibet vires, ac per consequens etiam solicitationes sint ex genere quantitatis, per lineas rectas hisce solicitationibus proportionales rectè possunt exponi. Idcirco si puncta A, C, E a rectæ AE solicitationibus secundum directiones AB, CD, EF agentibus urgentur, hæ solicitationes seu potentiæ exprimentur rectis AB, CD, EF in ipsis earundem directionibus homologe sumtis, adeo ut hæ lineæ solicitationes vel potentias earumque directiones simul designent, & hoc in sequentibus tantum non semper observabitur.

II.

Fig. 1. 36. Si plurium solicitationum vel potentiarum, in æquilibrio consistentium, nonnullæ positæ sint ad unam partem corporis ad quod pertinent, reliquæ verò vel reliqua ad partem oppositam, Solicitationes, quæ sunt ad unam partem, reliquis in parte oppositæ *æquipollere* dicentur. Ut si rectæ AE, aut cuilibet alii corpori potentiæ AB, CD, EF applicatæ sint ab una parte, in parte verò oppositâ potentia GH agens ex G in H, & hæc cum reliquis ipsi oppositis in æquilibrio consistat. Potentia unica GH, reliquis omnibus AB, CD, EF æquipollere dicitur. Cæterùm monendus est tyro, quod potentia vel solicitatio, quæ reliquis æquipollere dicitur, ipsis ideo æqualis censenda non sit; etenim *æquipollere* & *æquale esse* in Mechanicis non sunt phrases synonimæ. Unicus enim est
Fig. 2. casus, quo potentia GH oppositis AB, CD, EF æquipollens ipsis simul sumtis æqualis est, tunc scilicet, cum hæ conspirantes sunt (§. 22.) ipsisque altera GH (§. 23.) directè contraria.

III.

37. Producta GH in I, ejus continuatio GI *media directio* vel *axis*

axis æquilibrii deinceps nominabitur potentiarum AB, CD, EF, Fig. 1, 2.
& denique punctum G, in quo media directio corpori occurrit, & cui impedimentum O suppositum potentias ad æquilibrium compositas sustinet, quod impedimentum seu sustinaculum aliàs *hypomochlium* vocari solet, *centrum æquilibrii* posthac appellabitur.

AXIOMA.

38. *Solicitatio quæ ex aliis solicitationibus conspirantibus juxta directiones congruentes nascetur, hisce omnibus æquabitur directionemque habebit congruentem pariter ipsarum directionibus.*

Solicitatio vero ex directè oppositis resultans, æquivalebit excessui quo fortiores superant oppositas debiliores.

PROPOSITIO III. Theorema.

39. *Solicitatio ex duabus non conspirantibus, nec directe oppositis, mobili cuidam impressis, nascens, se habet ad alterutram earum ex quibus resultat, ut diameter parallelogrammi, cujus latera exponunt has solicitationes earumque directiones, ad latus quod solicitationem exponit.*

Citetur mobile A solicitationibus quibuscunque AB, AC qua- Fig. 3.
rum directiones angulum quemcunque CAB contineant: descripto parallelogrammo ABCD, ejus diameter AD directionem & solicitationem exponet, quæ ex lateralibus AC & AB resultat.

Demonstr. Cogitetur mobile A rectæ mobili AB inhærere; sed ita tamen ut in ea liberè moveri queat ex A versus B, lineam verò AB duntaxat motu parallelo sibi ipsi & rectæ CD super AC ferri posse, deinde rectam mobilem AB corpus A secum deferentem urgeri versus CD solicitatione AC; mobile vero A in linea AB urgeri solicitatione AB; & manifestum erit conatum A_2A, quo linea mobilis AB ad rectam ipsi parallelam CD accedere conatur, urgente solicitatione AC, se habere ad conatum $2A_2D$ urgente solicitatione AB corpus A in hac rectâ mobili, ut AC se habet ad AB vel CD; jam quia ex hypothesi $2A_2B$ ipsi CD parallela est, &, ut modo vidimus, $A_2A : 2A_2D = AC : CD$, erit punctum 2D in diametro AD parallelogrammi BC: Porrò, quia mobile A participat motum A_2A, vel potius conatum ad motum lineæ mobilis AB, in qua moveri posse intelligitur, & motum proprium, seu potius conatum, ad hunc motum

tum 2A2D, ac quia, ſi linea mobilis & corpus ſpatiola utlibet parva A2A & 2A2D ſimul deſcribere potuiſſent, idem id fuiſſet quam ſi corpus A ſpatiolum A2D tranſmiſiſſet ; liquet utique, ex conatibus lineæ mobilis & corporis, A2A & 2A2D naſci conatum A2D juxta directionem AD, qui ſe habeat ad A2A vel ad 2A2D ſicut AD ad AC, vel ad AB ; ergo ex ſolicitationibus AC & AB reſultat ſolicitatio AD in directione A2D. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

40. Solicitationes, quæ exponuntur lateribus AC, AB parallelogrammi BC, ideo dici poſſunt ſolicitationes *laterales*. Deinde in communi Mechanicæ ſcriptorum phraſeologia motus vel ſolicitatio juxta diagonalem AD ex motibus ſeu ſolicitationibus lateralibus AC, AB componi dicitur. Sed quia video non deeſſe Autores, qui neſcio quæ difficultatum ſpectra in hac re ſibi ſomnient, perperam exiſtimantes per compoſitionem & reſolutionem, additionem vel ſubductionem motuum vel potentiarum componentium intelligendas eſſe, ne ejusmodi æquivocatio tyronibus negotium faceſſeret, motus vel potentias ex aliis componi dici ſolitas, ex iis naſcentes vel reſultantes appellare, conſultius duxi.

Corollarium I.

41. Producta parallelogrammi diametro in M, ac facta AM = AD, ſolicitatio AM in hac directione AM reliquis AC & AB æquipollebit. Nam ſolicitatio AM alteri æquali & directè contrariæ AD æquipollet, atqui AD naſcitur ex lateralibus AC & AB ; neque plus aut minus præſtare poteſt quam ſolicitationes hæ laterales ſimul agentes, proptereaque perinde eſt ſive mobile A unica ſolicitatione AD, ſive duabus collateralibus AC, AD urgeatur, ergo AM ipſi AD contraria & æqualis lateralibus AC & AB omnino æquipollet.

Corollarium II.

Fig. 4. 42. Hinc ſi tres ſolicitationes eidem mobili impreſſæ AM, AB, AC in æquilibrio conſiſtant, erit quælibet earum ad alterutram ex reliquis, id eſt AM ad AB, ut ſinus anguli BAC à reliquis comprehenſi, ad ſinum anguli MAC à ſolicitatione AM & altera AC ex reliquis formati. Nam (§. 41.) AM = AD, atque adeo AM :

AM : AB ſicut AD ad AB, verum ex trigonometria conſtat, eſſe AD ad AB, ut ſinus anguli ABD ad ſinum anguli BDA, ergo etiam AM eſt ad AB ut ſinus anguli ABD, vel ejus ſupplementi ad duos rectos BAC ad ſinum anguli BDA, vel ejus alterni æqualis DAC, aut etiam hujus ad duos rectos ſupplementi MAC. Et ſic ex ternis ſolicitationibus, ad æquilibrium compoſitis, duæ quælibet ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum, hoc eſt AB : AC = ſin. MAC : ſin. MAB, & AM : AC = ſin. BAC : ſin. MAB. Et ſic ubique.

Elegans hoc theorema à Cel. Petro Varignon primùm, quod ſciam, demonſtratum eſt, cùi ferme totam ſuam novam Mechanicam, anno 1687. Lutetiæ editam, ſuperſtruxit.

Corollarium III.

43. Ex hiſce etiam patet ratio theorematis non inelegantis, quod Robervallius Torricellio quondam propoſuit, ſed ſine demonſtratione, ut videre eſt in Opere Academiæ Regiæ Scientiarum Pariſienſis, quod inſcribitur *Divers Ouvrages de Mathematique & de Phyſique de Meſſieurs de l'Academie Royale des ſciences*, fol. 301. Theorema vero noſtris loquendi phraſibus expreſſum, eſt hujusmodi: Si per terminos rectarum AM, AB, AC trium ſolicitationum eidem puncto A applicatarum, repræſentatricium, ducantur rectæ MB, BC & MC, punctum A, cui ſolicitationes in æquilibrio conſiſtentes impreſſæ ſunt, exiſtet in centro gravitatis trianguli MBC. Circa AM, AB & AM, AC deſcripta ſint parallelogramma AMSB, ARMC, quibus deſcriptis, & quia tres ſolicitationes AM, AB, AC in æquilibrio ſunt, ſecundùm hypotheſin AC æquipollebit (§. 36.) ipſis *AM & AB* atque adeo (§. 41.) *AC = AS*, & hæ duæ in directum poſitæ erunt, unde CA producta latus trianguli MB ſecabit in medio Q, ſimiliter AB producta ſecabit latus trianguli MC in ejus medio P; jam ex ſtaticis conſtat trianguli MBC centrum gravitatis eſſe in ſingulis lineis CQ, BP ex quibusvis trianguli angulis C & B ad puncta Q & P in medio laterum BM ac CM angulis illis oppoſitorum ductis, propterea centrum gravitatis trianguli BMC, eſt in communi interſectione A harum linearum CQ & BP.

Propositio IV. Lemma.

44. *Si ſingula corpora poſitione data* A, B, C, D &c. *in ſuam quod-*

que distantiam à plano positione dato a P d *ducantur, erunt omnium facta æqualia facto ex aggregato omnium corporum in distantiam* E e *centri eorum gravitatis* E *à dato plano, in casu quo omnia corpora ad eandem plani* a P d *partem sita sunt.*

Sin verò nonnulla corpora A, B &c. *posita fuerint ad unam plani* PQ *partem, & reliqua* C, D *ad alteram partem; Excessus, quo facta ex corporibus ad partes centri omnium gravitatis* E *sitis, in suas homologas à plano* PQ *distantias, superant facta ex corporibus reliquis in suas ab eodem plano distantias, æquabitur facto ex omnibus corporibus simul sumtis in distantiam* e P, *communis omnium centri gravitatis* E *à plano* PQ.

Fig. 5. Casu primo ostendi debet, quod, positis A + B + C + D + &c. = M, sit A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee. Et secundo casu, esse C. cP + D. dP − A. aP − B. bP = M. eP, designantibus cP, dP, aP, bP distantias corporum C, D, A, B &c. à plano PQ.

Demonstr. I. Per centrum gravitatis E omnium corporum transeant αδ parallela plano *ae*, & eE parallela plano PQ alteri *ad* recto, & αδ considerari potest tanquam axis æquilibrii ponderum A, B, C, D, atque adeò erit ob casum æquilibrii A. Aα + D. Dδ = B. Bβ + C. Cγ, vel quod eodem recidit, B. Bβ + C. Cγ − A. Aα − D. Dδ = o. Item A. ae + B. be = C. ce + D. de, vel C. ce + D. de − A. ae − B. be = o respectu axis æquilibrii eE.

II. Quia Aa = αa − αA = Ee − Aα, Bb = Ee + Bβ, Cc = Ee + Cγ, & Dd = Ee − Dδ, erit A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee + D. Ee + B. Bβ + C. Cγ − A. Aα − D. Dδ = M. Ee, quia A + B + C + D = M, & (num. 1 hujus.) B. Bβ + C. Cγ − A. Aα − D. Dδ = o. Quod est primùm.

III. Quia aP = ae − eP, bP = be − eP, cP = ce + eP; & dP = de + eP, erit C. cP + D. dP − A. aP − B. bP = C. eP + D. eP + A. eP + B. eP + C. ce + D. de − A. ae − B. be = M. eP, quia (num. 1 hujus.) est C. ce + D. de − A. ae − B. be = o, & C + D + A + B = M ut antea. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

Fig. 6. 45. Si corpora rectà ascendant in lineis Aa, Bb, Cc, Dd &c. horizonti perpendicularibus, eorumque centrum gravitatis E in recta Ee illis parallela, erit A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee. Nam ducta ut libet recta αδ ipsis Aa, Bb &c. perpendiculari, eritque (§. 44.) A. Aα + B. Bβ + C. Cγ + D. Dδ = M. Eε, & A. αa + B.

B. ßb + C. ϰc + D. δd = M. εe, ergo A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee.

Corollarium II.

46. Si omnia corpora A, B, C, D &c. ſint æqualia, omnes eorum diſtantiæ à plano aPd, erunt multiplum diſtantiæ communis eorum centri gravitatis E ab eodem plano ſecundum ponderum numerum. Exceſſusque quo diſtantiæ illorum à plano PQ ſecundi caſus, quæ ad partes centri omnium gravitatis poſita ſunt, excedunt diſtantias illorum, quæ ſunt in parte oppoſita, eſt diſtantiæ centri omnium gravitatis E ab eodem plano PQ multiplum, ſecundùm corporum A, B, C, D &c. numerum. Fig. 5.

Scholion I.

47. Ex hisce nunc tam facile deduci poteſt regula Guldini jam à Pappo diſertè indicata, ut haud abs re futurum exiſtimem, ſi eam hoc loco demonſtratam darem, quanquam ea à pluribus jam demonſtrata ſit. Guldini Regula ita habet: *Figuram ex converſione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam poſitione datam oriundam, æquari facto ex Magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis.* Figura genitrix dicatur F, diſtantia centri ejus gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figuræ y ad axem rotationis, dx elementum axis, ſolidum ex converſione figuræ F circa axem x dicatur S, ejus elementum dS; quibus poſitis per præſentem propoſitionem erit D. F = ſummæ momentorum elementorum magnitudinis $F = \int \frac{1}{2} yydx$, nam elementum ipſius F eſt ydx, & hujus momentum $\frac{1}{2}yydx$. ſit p circumferentia circuli cujus radius eſt I, & ducatur antecedens æquatio in p, ut fiat pD. $F = \int \frac{1}{2} pyydx$. Jam pD eſt circumferentia radii D, & py circumferentia radii y, atque adeò $\frac{1}{2}pyy$ area circuli ejusdem radii y, & per conſequens $\frac{1}{2}pyydx$ cylindrulus ſolido S inſcriptus, ſeu ejus elementum dS; ergo pD. $F = \int dS = S$. Quod erat oſtendendum pro ſolidis rotundis; eadem eſt demonſtratio in aliis.

Scholion II.

48. Quanquam in hac propoſitione gravitas in ſingulis corporibus A, B, C, D eadem ſeu uniformis ſumta ſit, ita ut pondera eorum abſoluta maſſis proportionalia ſint, quoniam tamen gravitas di-

diversa esse posset, & hoc lemma etiam generaliter verum est, scilicet tunc etiam, cum revera gravitatis solicitationes ipsis corporum massis A, B, C, D proportionalia non existunt, id saltem indicandum fuit hoc loco. Nam si per A, B, C &c. non amplius, ut in propositione, massæ horum corporum, sed pondera eorum absoluta intelligantur, canon propositionis adhuc obtinebit. Verum satius foret, per A, B &c, ut in propositione, intelligere massas horum corporum, &, juxta articulum 31, eorum pondera designare per facta ex massis in gravitatis solicitationes P, Q, R, S quibus singula A, B, C, D respectivè urgentur, id est per AP, BQ, CR, & D. S &c. Quod alibi in applicatione observabimus.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

Fig. 7. 49. *Solicitationum quarumlibet* PR, PB, PC, PD &c. *eidem mobili* P *impressarum media directio* PE *est recta jungens centrum gravitatis mobilis* P *& centrum gravitatis* E *omnium punctorum* A, B, C, D &c. *quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur; & solicitatio ex omnibus corpori impressis resultans exponi debet multiplo rectæ* PE, *secundum punctorum seu solicitationum impressarum numerum.*

Per mobilis P centrum gravitatis ducta intelligantur plana PS & *aPd* sibi invicem recta, & per terminos rectarum PA, PB &c. perpendiculares ad planum *ad* demittantur A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, & ex centro gravitatis E punctorum A, B, C &c. normalis E*e*. Solicitationum numerus dicatur N, & in producta PE sumatur PR = N, PE. Dico PR exponere solicitationem ex omnibus mobili P impressis PA, PB, PC, PD &c. nascentem.

I. Per E & R agantur EL & RS plano *aPd* æquidistantes, ob triangulorum PLE & PSR similitudinem, & propter PR = N, PE, erunt PS = N, PL & SR = N, LE.

II. Quia E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D &c. quorum numerus secundum hypothesin est N, erit (§. 46.) $aA + bB + cC + dD +$ &c. $=$ N. *e*E, & $Pc + Pd +$ &c. $- Pa - Pb -$ &c. $=$ N. Pe.

III. Quia singulis solicitationibus obliquis (§. 39.) æquipollent solicitationes earum laterales plano *aPd* perpendiculares & parallelæ, scilicet ipsi PA æquipollent laterales *a*A, P*a*, ipsi PB verò laterales *b*B & P*b* & sic in cæteris, omnibus obliquis æquipollebunt omnes earum laterales solicitationes, id est conspirantes *a*A, *b*B, *c*C,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [44] - 16
PUBLIC DOMAIN

cC, dD, & oppositæ Pa, Pb ex una & Pc ac Pd ex altera plani PS parte; atqui ex conspirantibus resultat solicitatio ipsis omnibus (§. 38.) æqualis id est solicitatio $aA+bB+cC+dD+$&c. (n. 11.) $=N.eE$ (n. 1.) $=PS$, & ex omnibus contrariis (§. 38.) nascitur solicitatio æqualis excessui quo fortiores excedunt debiliores, id est ipsi $Pc+Pd+$&c. $-Pa-Pb-$&c. (num. 11.) $=N.Pe$ (num. 1.) $=SR$, ergo omnibus obliquis PA, PB &c. æquipollent duæ laterales PS & SR, & (§. 39.) hisce unica PR: hæc ergo denotat mediam directionem solicitationum *PA, PB, PC, PD* &c. & solicitationem ex ipsis nascentem, vel quod idem est, ipsis æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Elegans hoc theorema Illustri Leibnitio acceptum est ferendum, utpote quod in aliqua ejus epistola, jam pridem ad Wallisium data, sine demonstratione exhibetur. Vid. Tom. III. Oper. Wallisii fol. 687.

Corollarium I.

50. Hinc punctum P, cui quatuor solicitationes *PA, PB, PC, PT* ad æquilibrium quidem compositæ; sed non in eodem plano existentes, *impressæ sunt*, erit in centro gravitatis pyramidis TAC, in cujus angulis solicitationum repræsentatrices lineæ terminantur. Sit E centrum gravitatis punctorum A, B, C & jungatur PE, quæ media directio erit solicitationum PA, PB & PC, ac hisce æquipollebit solicitatio 3.PE; hinc quia omnes in æquilibrio sunt, erit $PT=3.PE$; atque adeo est $PT:PE=3:1=A+B+C:T$ considerando hæc puncta tanquam ponduscula æqualia, ac proinde P est in centro gravitatis punctorum quatuor angularium pyramidis *A, B, C, T*. Sed idem est centrum gravitatis pyramidis, quod punctorum ejus angularium. Ergo liquet assertio. Fig. 8.

Hoc est alterum theorema, quod Robervallius Torricellio olim proposuerat in loco supra (§. 43.) jam indicato.

Corollarium II.

51. Hinc etiam, si mobile P ad singula superficiei curvæ ABC puncta urgeatur solicitationibus expressis punctorum superficiei distantiis à mobilis centro; media omnium solicitationum directio erit recta PE, jungens centra gravitatis mobilis P & superficiei curvæ ABC, ac solicitatio ex omnibus nascens ipsisque æquipollens Fig. 9.

est, ut factum ex superficie ABC in distantiam EP centri ejus gravitatis à centro corporis P. Nam numerus punctorum seu solicitationum est ipsa superficies ABC, ejusque centrum gravitatis est centrum omnium punctorum, quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur.

Corollarium III.

Fig. 10. 52. Quinimo si idem mobile P, ad singula curvæ ABC puncta urgeatur, sed solicitationibus non ipsis PB distantiis punctorum à mobili, sed ipsis LP in singulis BP sumtis, & in curva quacunque DLH terminatis, proportionalis. Erit etiam nunc omnium solicitationum PL media directio PE recta jungens centra mobilis P & curvæ DLH, ac solicitatio ex illis omnibus resultans, factum ex gravitate curvæ DLH in rectam EP; sed hujus curvæ partes non uniformiter graves intelligendæ, verùm difformiter; ita ut ductis per homologa utriusque curvæ AB & DLH puncta B, L tangentibus BM & LM in puncto M concurrentibus, gravitas puncti B curvæ ABC uniformiter gravis, sit ubique ad homologi puncti L curvæ DLH, gravitatem ut rectangulum MBP ad rectangulum MLP.

Propositio VI. Problema.

Fig. 11. 53. *Invenire mediam directionem solicitationum quarumvis* AG, BG, CG, DG *quibus puncta* A, B, C, D *lineæ rectæ inflexilis* AD *urgentur.*

Ex quolibet extra lineam AD puncto O agantur per singula lineæ puncta A, B, C, D in quibus linea juxta directiones AG, BG &c. urgetur, rectæ indefinitæ OAF, OBF, OCF, ODF, ductisque per singula puncta G in quibus lineæ solicitationum aut potentiarum applicatarum repræsentatrices terminantur rectis indefinitis FG lineæ AD parallelis & lineis OA, OB, OC, OD &c. quantum opus est productis in punctis F occurrentibus. Dehinc singulis AF, BF, CF, DF &c. in suis directionibus transferantur à puncto concursus O, respectivè æquales *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od* &c. punctorumque *a*, *b*, *c*, *d* centrum gravitatis *e* inveniatur atque in linea OM per hoc centrum *e*, & punctum O ducta lineæque AD occurrente in E, sumatur EM, quæ sit ad *Oe* ut numerus punctorum *a*, *b*, *c*, *d* ad unitatem; ductaque per punctum M recta NL æquidistante ipsi AD, assumatur in ea ML omnibus FG inter AF, BG,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [46] - 18
PUBLIC DOMAIN

BG, & BF, BG &c. interceptis, æqualis, eo casu, quo omnes GF conspirantes sunt, vel juxta ordinem literarum ex F versus G sumtæ omnes ad eandem plagam vergunt, tunc enim ML in eandem plagam & omnibus FG æqualis sumenda est; sin vero nonnullæ FG vergerent ad unam plagam, reliquæ vero FG in plagam oppositam, eo casu ML æqualis facienda esset excessui quo fortiores FG simul sumtæ, excedunt reliquas FG in plagam priori oppositam agentes eamque in partem ducenda esset in quam agunt fortiores FG: Linea EL jungens puncta E, L dabit mediam directionem omnium solicitationum AG, BG, CG, DG &c. ejusque longitudo EL exponet solicitationem omnibus applicatis æquipollentem in hac media directione EL, seu etiam onus quod sustinaculum V puncto E subjectum ab iisdem applicatis potentiis AG, BG, CG &c. sustineret. Quod erat inveniendum.

Demonstratio. Quælibet solicitatio vel potentia applicata AG æquipollet (§. 39.) lateralibus AF & FG; atque adeo omnes AG, BG, CG &c. æquipollebunt omnibus AF, BF, CF, DF secundum hypothesin in puncto O convergentibus, omnibusque harum collateralibus FG. Cogitetur jam virga seu linea AD, cui potentiæ applicatæ vel solicitationes AG, BG &c. impressæ sunt, plano gravitatis expers, perinde ac ipsa linea, infixa esse, ita ut linea moveri nequeat, quin planum simul moveatur; hoc enim modo fiet ut potentia AF eandem vim habeat movendi planum, in quocunque directionis OA puncto ipsi plano applicata sit, sive in puncto A, aut in quovis alio *a*, O &c. hoc per se satis evidens est; nam si potentia AF rectæ AD in A applicata in directione OA majorem vim haberet ad movendum planum AODF quam hæc eadem potentia AF ac in eadem directione OA sed plani AOD puncto O applicata, sequeretur potentiam AF cum alia ipsi æquali, puncto O applicata in eadem directione, sed in partem oppositam ex *a* versus O, vel potius in linea AO extrorsum trahent punctum plani O, non esse in æquilibrio, sed ipsi prævalere, aut hanc illa fortiorem existere; atque adeò duæ potentiæ æquales AF & *a*O juxta eandem lineam AO in oppositas partes agentes se mutuo in æquilibrio non tenerent, quod est absurdum. Ergo potentia AF rectæ AD applicata eundem effectum præstat ac potentia O*a* ipsi AF æqualis & in eadem directione OA puncto plani O applicata, quod de reliquis BF, CF &c. etiam intelligendum: ac proinde potentiarum AF, BF, CF, DF eadem est media directio, quæ potentia-

 rum

rum hisce æqualium Oa, Ob, Oc, & Od &c. atqui harum media directio OeM (§. 49.) est linea jungens punctum O & centrum gravitatis e punctorum a, b, c, d &c. & potentia omnibus applicatis puncto O, aut rectæ in punctis A, B, C, D &c. æquipollens est multipla ipsius Oe secundum punctorum a, b, c, d &c. numerum, atque adeo exponitur recta EM, quæ (constr.) est ad Oe ut numerus punctorum a, b, c &c. ad unitatem. Æquipollet ergo potentia EM omnibus AF, BF, CF & DF, ex omnibus vero FG lineæ AD parallelis nascitur solicitatio ipsis omnibus æqualis, si conspirantes fuerint, vel æqualis excessui, quo fortiores FG superant debiliores & oppositas FG, ac proinde utroque casu exponitur recta ML quæ pro varietate circumstantiarum (constr.) æqualis est summæ omnium FG eandem plagam respicientium, vel differentiæ earum quæ in diversas plagas tendunt, unde cum omnibus AF, BF, CF, DF & omnibus FG æquipolleant duæ laterales EM & ML & hisce duabus (§. 39.) unica EL, omnino patet hanc EL etiam æquipollere omnibus AG, BG, CG, & DG, quæ lineæ AD applicatæ sunt. Propterea EL significat mediam directionem potentiarum applicatarum & solicitationem in hac media directione ipsis omnibus æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Fig. 11. 54. Si lineæ AD perpendiculares AH, BH, CH, DH agantur ipsis FG occurrentes in punctis H, hæ perpendiculares totidem potentias lineæ AD applicatas repræsentabunt, momentaque omnium earum, quæ sunt ex una parte puncti E, æquabuntur momentis earum, quæ sunt ex altera parte, id est, AH. AE + BH. BE = CH. CE + DH. DE. Ductis enim af, bh, dg, ci rectæ AD & AI, BI, CI, DI &c. rectæ OM parallelis, eritque propter centrum gravitatis e, $af + bh = dg + ci$, vel adscita communi altitudine OE erunt facta seu rectangula OE. af + OE. bh = OE. dg + OE. ci. Vel Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, quia OE. af = Of. AE propter triangula similia OAE & Oaf, item OE. bh = Oh. BE, ob triangulorum OBE & OBh similitudinem, & quia ob similes rationes rectangula reliqua OE. dg, OE. ci rectangulis Og. DE, OI. CE respective æquantur. Porrò ob AI, BI, CI &c. parallelas (constr.) rectæ OM, & singulas Oa, Ob, Oc, Od æquales singulis AF, BF, CF, DF, æquabuntur etiam Of, Oh, Oi, Og ipsis AI, BI, CI, DI, quia

quia quodvis triangulum *Oaf* respectivè AFI simile & æquale est, propterea substitutis in rectangulis æqualibus *Of*. AE + *Oh*. BE = *Og*. DE + *Oi*. CE, loco rectarum *Of*, *Oh*, *Og* & *Oi*, æqualibus AI, BI, DI ac CI eodem ordine sumtis, fiet AI. AE + BI. BE = DI. DE + CI. CE. Vel substitutis adhuc loco ipsarum AI, BI, CI, DI, aliis rectis AH, BH, CH, & DH, quæ ipsis propter triangula similia AHI, BHI, CHI, DHI analoga sunt, hoc est, proportionalia, erunt tandem AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE. Porrò sicut *EM* = *Of* + *Oh* + *Og* + *Oi*, = AI + BI + DI + CI, ita etiam EN rectæ ML perpendicularis, erit = AH + BH + DH + CH.

Corollarium II.

55. Ex centro æquilibrii E demissis ad directiones potentiarum AG, BG, CG, DG productas perpendicularibus EP, EQ, ER & ES, momenta potentiarum obliquarum ex una parte, æqualia erunt momentis potentiarum in parte altera. Hoc est, AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Nam quia quælibet triangulorum PAE, & HAG paria similia sunt, fient rectangula AH. AE, BH. BE, DH. DE ac CH. CE æqualia homologè rectangulis AG. EP, BG. EQ, DG. ES & CG. ER, unde quia (§. 54.) AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE, erit etiam AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Fig. 12.

Scholion.

56. Casus Corollarii hujus secundi obtinet non solum tunc, cum linea AD est recta, cui potentiæ obliquæ AG, BG &c. applicantur; sed etiam in casu, quo ipsa linea applicatas potentias habens est curva, *imo etiam in rotis aliisque ejusmodi organis*. Uno verbo, si circa aliquod punctum potentiæ aut solicitationes quæcunque in æquilibrio sunt, momenta potentiarum, quæ agunt in unam partem, æqualia sunt momentis potentiarum, quæ agunt in partem oppositam; atque sic inopinatò incidimus in demonstrationem directam & immediatam principii Archimedei de æqualitate momentorum, in casu æquilibrii potentiarum inter se commissarum, quod varii varie demonstrare conati sunt. Cæterum ope Corollarii primi hujus, ipsum problema hujus propositionis multo simplicius jam solvetur, imò plura alia præstabuntur quam antea, ut ex sequentibus facile patescet.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [49] - 21
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VII. Theorema.

57. *Si lineæ inflexili & gravitatis experti (qualis etiam in præcedenti Propositione est ponenda) AD quotcunque solicitationes seu potentiæ obliquæ* A1A, B1B, C1C, D1D *applicatæ, atque hæ potentiæ omnes in suas laterales potentias lineæ* AD *perpendiculares & parallelas resolutæ fuerint, erit, ductis per centrum æquilibrii* H *potentiarum lineæ* AD *perpendicularium* A2A, B2B, C2C, D2D, *rectâ* HI *ipsis omnibus simul sumtis æquali & parallela, & per punctum* I *recta* IK *lineæ* AD *parallela ac æquali excessui, quo potentiæ lineæ æquidistantes, quæ sunt ad unam lineæ* HI *partem ut* 2D1D, *superant eas, quæ ipsi in parte contraria oppositæ sunt* 2A1A, 2B1B, 2C1C, *recta jungens puncta* H, K *erit media directio potentiarum obliquarum virgæ seu lineæ* AD *applicatarum, ejusque magnitudo exponet onus, quo hypomochlion, seu sustinaculum puncto virgæ* H *subjectum, juxta mediam directionem* HK *ab omnibus potentiis urgetur.*

Fig. 13. Cum quælibet solicitatio seu potentia obliqua A1A (§. 39.) spectari possit, tanquam nascens ex suis lateralibus solicitationibus A2A & 2A1A virgæ AD perpendiculari & parallela, omnes potentiæ obliquæ considerari possunt tanquam nascentes ex omnibus perpendicularibus A2A, B2B, C2C, D2D, & ex omnibus parallelis 2D1D, 2C1C, 2B1B, & 2A1A. Atqui (§. 54.) ex omnibus perpendicularibus resultat solicitatio vel potentia ipsis omnibus simul sumtis æqualis & parallela, transiens per earum centrum æquilibrii H, id est (constr.) solicitatio $HI = A2A + B2B + C2C + D2D$, ex parallelis verò nascitur solicitatio æqualis (§. 38.) excessui, quo fortior vel fortiores excedunt debiliores ipsis contrarias, unde cum (constr.) sit $IK = 2D1D - 2A1A - 2B1B - 2C1C$, hæc IK exponet solicitationem ex solicitationibus virgæ parallelis nascentem; adeoque cum ex omnibus potentiis lateralibus virgæ perpendicularibus & parallelis nasci intelligantur, tum omnes obliquæ A1A, B1B &c. tum etiam duæ laterales HI & IK & ex hisce (§. 39.) unica HK, patet hanc solicitationem HK omnibus obliquis æquipollere ejusque directionem harum esse Mediam directionem, atque adeo punctum virgæ H in hac media directione urgeri solicitatione seu onere, quod exponitur magnitudine rectæ HK. Quod erat demonstrandum.

Scho-

Scholion.

58. Eadem methodo, mutatis mutandis, obtinetur media directio potentiarum lineæ curvæ DAA utlibet applicatarum. Nam si potentiæ vel solicitationes applicatæ repræsententur per lineas AB, quarum unaquæque resolvatur in suas laterales potentias AC, axi curvæ DE perpendiculares, & CB eidem æquidistantes, productisque CA ultra axem DE, ut singulæ EF singulis AC æquales fiant, *potentia IN singulis EF simul sumtis æqualis* & per earum centrum æquilibrii ducta axique perpendicularis (§. 54.) erit potentia seu solicitatio omnibus EF æquipollens, unde cum singulæ hæ EF singulis AC æquales atque directæ oppositæ sint, omnes EF cum omnibus AC in æquilibrio manebunt, ergo etiam unica potentia IN universis EF æquipollens cum iisdem AC in æquilibrio consistet; pariter ductis DG axi DE normali, & rectis indefinitis AH eidem axi parallelis, & in iis factis GH singulis CB respectivè æqualibus, erit potentia IL universis GH æqualis & parallela transiens per centrum æquilibrii K harum GH, cum iisdem GH (§. 54.) in æquilibrio, ergo duæ potentiæ laterales IN & IL cum universis AC & universis CB in directionibus AG agentibus, *id est*, universis GH in æquilibrio consistent, atque adeo cum omnibus obliquis; at vero ex potentiis IN & IL (§. 49.) nascitur potentia, cujus directio IO transit per punctum I & centrum gravitatis O punctorum L & N, & quæ exponitur per multiplum rectæ IO secundum punctorum L & N numerum, hoc est per 2.IO; ergo talis potentia sola in æquilibrio erit cum universis AB curvæ DAA applicatis, idcirco (§. 37.) recta OI producta in M, dat mediam directionem IM omnium potentiarum AB, & hypomochlium R curvæ DAA applicatum sustinebit onus æquale 2.OI ab omnibus applicatis potentiis AB. Quod erat inveniendum. Cæterum etsi punctum I, quod est communis intersectio rectarum KL & SN in curva DA esse videtur, in eam tamen incidere non debet; ac propterea puncta I & R sunt semper diversa. Fig. 14.

Constructioni hujus Scholii non multum absimilem etiam reperit Cl. Varignon. Verum in hac constructione non omnia curvæ puncta ab applicatis potentiis urgentur, nam casus quo singulis ejus punctis potentiæ applicantur, pendet à quadraturis & centris gravitatis quarundam figurarum curvilinearum, ut ex sequenti Propositione eluceſcet.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [51] - 23
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VIII. Theorema.

Fig. 15. 59. *Si Vectis curvilineus* ABB, *cujus axis* AT *ordinatas* BC *ad angulos rectos excipit, à potentiis vel ſolicitationibus utlibet obliquis* BG, BG &c. *in ſingulis punctis urgeatur, protracta* GB *in* T, *ductisque per* B *rectis* BS *curvæ* ABB *normali, &* BE *axi* AT *parallela, demiſſaque ex* S *normali* SV *ſuper* BT, *in ordinata* BC *producta ſumatur* CD, *quæ ſit ad* BG *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræſentatricem, ut* BV *ad* BT, *& in recta* BE *producta accipiatur* EF, *quæ ſit ad eandem* BG, *ut rectangulum* BV. CT *ad rectangulum* SC. BT, *& hoc reſpectu cujusvis alius curvæ puncti* B *fieri intelligatur, indeque naſcentur figuræ mixtilineæ* AXDC, AXFE, *quarum centra gravitatis ſint in* R *&* Q, *per quæ agantur* MR *rectæ* AN, *&* QO *axi* AT *æquidiſtantes, ſeque mutuo ſecantes in* M; *ſi rectangulum ſub* MO *& data recta* A *æquale areæ* AXFE, *& rectangulum ſub recta* MR *& eadem data* A *æquale areæ* AXDC *facta fuerint, linea recta* IM *per punctum concurſus* M *rectarum* QO *&* LR, *& per medium* I *rectæ* OR *jungentis puncta* O *&* R *ducta atque verſus* P *protracta, dat mediam directionem* MP, *omnium potentiarum* BG *curvæ* AB *applicatarum, & Onus quod hypomochlion* Z *ab omnibus potentiis ſuſtinebit, exponetur rectangulo* 2MI. A *ſub dupla* MI *& data* A.

Sic B*b* elementum curvæ AB, per cujus terminum *b* ducantur *bd* rectæ BD & *bf* lineæ BF parallelæ, tum etiam per terminum G potentiæ BG recta GH axi parallela, quæ ordinatæ CB productæ occurrat in H, & denique demittatur *ba* perpendicularis ad GT, quibus poſitis,

I. Quia (conſtr.) CD : BG = BV : BT, & propter triangula ſimilia BHG & BCT, eſt BG : BH = BT : BC, erit etiam ex æquo CD : BH = BV : CB. Porrò quia triangula BVS & B*ba*, propter angulos *b*B*a*, VBS recto æquales, atque adeò ipſis VBS & VSB (quî ſimul ſumti etiam recto æquantur) æquales, adeò ut ablato communi VBS remaneant æquales *b*B*a* & VSB, & propter angulos ad *a* & V rectos, ſimilia ſunt; habebimus inſuper BV : BS = *ba* : Bb, triangula verò ſimilia *b*Bβ & BCS præbent BS : BC = B*b* : Bβ, igitur denuo ex æquo BV : BC = *ba* : Bβ. Sed initio hujus inveniebatur etiam BV : BC = CD : BH, ergo CD : BH = *ba* : Bβ, adeoque BH. *ba* = CD. Bβ = rectangulo Cδ areæ AXDC inſcripto.

II. Quoniam (conſtr.) EF : BG = BV. CT : SC. BT, & BG : GH

GH=BT:CT=SC.BT:SC.CT, erit ex æquo EF:GH=BV.CT:SC.CT=BV:SC. Præterea, ut num. 1. oſtenſum, eſt etiam BV:BS=*ba*:B*b*, & BS:SC=B*b*:*bβ*, ergo iterum ex æquo BV:SC=*ba*:*bβ*, at modo habuimus etiam BV:SC=EF:GH, ergo EF:HG=*ba*:*bβ*, atque adeò HG.*ba*=EF.*bβ*=rectangulo Eϕ areæ AXFE inſcripto.

III. Jam quia potentia BG curvæ puncto B applicata (§. 39.) reſultat ex lateralibus BH axi AT perpendiculari, & HG eidem parallela, & ſingula puncta elementi *Bb* ab eadem potentia obliqua BG urgentur, potentia, qua totum elementum afficitur, eſt ut rectangulum BG.*ba* cujus altitudo *ba* multitudinem potentiarum obliquarum omnibus elementi B*b* punctis applicatarum exponit, rectangulum BH.*ba*, exponet potentiam axi perpendicularem, & HG.*ba* potentiam eidem axi parallelam, quæ ex obliqua BG.*ba* ad elementum curvæ B*b* pertinente derivantur, & ex quibus hæc (§. 40.) reſultat. Unde, quia (num. 1. & 11.) oſtenſum BH.*ba*=rec-lo Cδ & HG.*ba*=rec-lo Eϕ, omnes potentiæ BG.*ba* reſultabunt ex omnibus Cδ areæ AXDC inſcriptis, & ex omnibus Eϕ areæ AXFE inſcriptis, cum ſingulæ BG.*ba* ex ſingulis Cδ & Eϕ naſcantur. Atqui ex omnibus potentiis Cδ (§. 54.) reſultat potentia A.MR cum hoc rec-lum (conſtr.) æquale ſit omnibus Cδ, ſeu areæ AXDC, cui inſcripta ſunt, & potentiæ A.MR directio tranſeat per centrum gravitatis areæ AXDC; & ex omnibus potentiis Eϕ reſultat potentia A.OM, quoniam (conſtr.) hoc rec-lum A.MO=AXFE ejusque directio OQ tranſit per centrum gravitatis Q ejusdem areæ AXFE. Propterea potentiæ A.MO & A.MR in directionibus ſuis MO, MR in æquilibrio conſiſtent cum omnibus potentiis obliquis BG, BG, &c. curvæ AB in ſingulis punctis applicatis. Sed ex potentiis A.MO & A.MR reſultat (§. 49.) potentia 2.MI.A cujus directio MI tranſit per centrum gravitatis I punctorum O & R, quorum gravitas fingitur eſſe A. Ergo etiam hæc potentia 2.MI.A in æquilibrio erit cum omnibus BG, &c., atque adeo ejus directio MI in contrariam partem P producta MP (§. 37.) erit media directio omnium potentiarum BG, BG &c. & 2.MI.A exponet onus quod hypomochlium Z in media directione MP à potentiis rectis ſuſtinebit. Quod erat demonſtrandum. In figura male confunduntur puncta Z & M, quorum hoc non in curva AB, ſed intra figuram ABC ſitum eſſe debet.

Corollarium I.

60. Si omnes potentiæ BG curvæ AB perpendiculares ſint, evaneſcent anguli TBS, eritque ubique CD=EF=BG. Nam coincidentibus BF & BS, rectæ BV & BT æquales fient ipſi BS, & CT=CS; unde cum (conſtr.) ſit CD : BG=BV : BT fiet omninò CD=BG. Sic etiam quia TE : BG=BV. CT : SC. BT, & hoc caſu BV=BS, CT=CS, & BT=BS, ratio BV. CT ad SC. BT erit ratio æqualitatis, atque adeo EF=BG.

Corollarium II.

61. Et ſi præterea omnes BG inter ſe æquales fuerint, figuræ mixtilineæ AXCD & AXFE mutabuntur in parallelogramma rectangula CAX & EAX.

Corollarium III.

Fig. 16. 62. Unde ſi ſingulis curvæ AOM punctis potentiæ perpendiculares curvæ, & omnes inter ſe æquales BG applicatæ ſint; vis totalis qua curva AOM urgebitur, eadem erit ac vis totalis, qua urgeretur curvæ baſis AM, ſi etiam ſingulis ejus punctis potentiæ æquales ipſis BG, & baſi AM etiam perpendiculares applicatæ eſſent, atque adeo exponetur rectangulo MAXZ. Nam deſcriptis circa curvam rectangulo ME, EA, cujus latus EE baſi æqualis tangat curvam in O, & ad latera ME, AE rectangulis MXFE, AXFE, conſideretur baſis MA inſtar axis curvæ AOM, & quoniam ſecundùm hypotheſin omnes potentiæ BG curvæ normales ſunt atque inter ſe æquales, erunt (§. 61.) ef=CD=BG & hisce æquales exiſtent homologæ lineæ reſpectu cujusvis alius curvæ puncti B; adeoque omnes potentiæ curvæ parti ABO normales, æquipollebunt duabus potentiis, quarum una axi perpendicularis exponitur rec-lo AXQP, alteraque axi parallela exponitur rectangulo AXFE. Sic etiam omnes curvæ OBM potentiæ æquipollent duabus, quarum una axi perpendicularis alteraque eidem parallela, & quarum hæc rec-lo MXFE, illa verò rec-lo PQZM exponitur. Atqui ob æqualia rec-la MEFX & AEFX, potentiæ axi AM parallelæ & directe oppoſitæ pertinentes ad curvæ partes ABO, MBO, utpote inter ſe æquales, ſe mutuo elidunt, ſolæque potentiæ axi perpen-

pendiculares considerandæ veniunt; illæ scilicet, quæ exprimuntur rec-lis XAPQ, & ZMPQ; ergo vis, qua tota curva AOM ab omnibus ipsi applicatis potentiis BG urgetur, exponitur rectangulo AXZM. Sed eandem vim basis AM quoque subibit, sicubi in singulis suis punctis ejusmodi æqualibus potentiis perpendiculariter premitur vel trahitur. Potentia enim, qua tota basis afficitur, est, ut hæc basis ducta in potentiam, qua singula ejus puncta urgentur, id est ut rectangulum AMXZ.

Corollarium IV.

63. Pariter, si loco curvæ AOM intelligatur superficies cylindri recti, cujus altitudo sit Mm; ac superficiei isti in singulis punctis potentiæ perpendiculares & æquales BG applicatæ cogitentur; tunc potentia, qua cylindrica superficies ab omnibus ipsi applicatis potentiis urgetur, sive id fiat pressione ejus contra planum *m*M, *Aa*, sive tractione ab eodem plano, exponetur per parallelepipedum baseos AZ altitudinisque M*m*; adeoque æquatur potentiæ, qua afficeretur planum *m*MA*a*, si pariter singula ejus puncta æqualium potentiarum impressiones subirent. Nam in superficie cylindrica tot curvæ intelligi possunt ipsi AOM parallelæ similes & æquales, quot puncta sunt in altitudine cylindri vel prismatis *Mm*, quarum quælibet urgetur à potentia exprimenda rec-lo æquali AZ. Adeoque vis, qua omnes curvæ, id est cylindrica superficies, urgentur, exponetur per omnia rec-la ipsi AZ æqualia, quæ in parallelepipedo continentur, id est per parallelepipedum ipsum, sub basi AZ & altitudine M*m*. Et tanta potentia etiam urgetur rec-lum M*ma*A à potentiis æqualibus, singulis ejus punctis applicatis.

Definitiones.

IV.

64. *Solidum patiens* dicitur omne solidum ABCD, cujus singula superficiei curvæ CBAD puncta à potentiis quibuslibet superficiei perpendicularibus, BM, *bu* &c. urgentur, sed ita tamen, ut singula puncta curvæ *cbd*, sectionis solidi basi parallelæ, eadem potentia *bu* vel huic æqualibus afficiatur. Potentiarum verò *actio* in solidum patiens generali nomine *Pressionis* deinceps insignietur. Fig. 19. 20.

V.

65. *Preſſio interna* eſt, cum potentiæ BM, *bu*, &c. cavæ ſuperficiei punctis B, *b* &c. applicatæ, eam extrorſum juxta BM, *bu* premunt.

VI.

66. *Preſſio externa* verò, cum convexæ ſuperficiei puncta B, *b* &c. à potentiis ipſis applicatis introrſum premuntur, juxta MB, *ub* &c.

Ex ordine igitur literarum, quibus lineæ potentiarum applicatarum repræſentatrices ſignantur, ſtatim dignoſci poterit utrum applicatæ potentiæ introrſum, an verò extrorſum premant. Nam ſi litera vel ſignum, quo punctum ſuperficiei ſignatur, cui potentia applicata eſt, primum locum tenet, preſſio eſt interna, externa verò, ſi ſecundum locum. Sic BM, *bu* &c. denotant preſſiones internas, quia puncta applicationis B, *b* &c. primum locum tenent, & MB, *ub*, &c. ſignificant preſſiones externas.

VII.

67. Per *Baſin ſolidi patientis* intelligo quodvis ejus planum vel ſectionem planam CBD horizonti æquidiſtantem.

VIII.

68. *Sectio* verò *recta ſolidi patientis* nobis eſt figura plana CAD ſolidi noſtri, baſi ejus recta, cujus ſectionis rectæ *vertex* eſt punctum curvæ CAD à ſua baſi CD maxime diſtans, & linea AE ex vertice A ad CD perpendiculariter ducta dicetur *axis ſectionis rectæ*, & forte etiam ipſius ſolidi patientis.

IX.

69. *Scala potentiarum* ſolido patienti applicatarum, eſt figura mixtilinea KL*r*QP in plano ſectioni rectæ ſolidi patientis recto, atque per axem ſectionis rectæ AE, tranſeunti, cujus figuræ ordinata quælibet 3*er* ejus axi KP, qui ipſi AE æquidiſtans ponitur, perpendicularis, exponit potentiam, qua unumquodque punctum curvæ *cbd* ſectionis *cbdc* baſi CBDC parallelæ, afficitur. *Origo* ſeu *vertex* hujus curvæ O eſt punctum occurſus curvæ Q*r*L cum ſuo axe KP.

X.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [56] - 28
PUBLIC DOMAIN

X.

70. *Planum ſublime* eſt GFI, quod baſi patientis ſolidi æquidiſtans, per originem O ſcalæ potentiarum tranſit.

XI.

71. *Planum humile* eſt, quod ſublimi parallelum, per maximam ordinatam PQ, ſcalæ potentiarum tranſit.

XII.

72. *Priſma redundans* eſt ſolidum GFBADIG, quod componitur ex ſolido patiente CBAD vertice ejus deorſum reſpiciente, & ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBD & terminato ad planum ſublime GFI. Fig. 19.

XIII.

73. *Priſma deficiens* eſt ſolidum GFBADIG, quod remanet detracto ſcilicet ſolido patiente CBAD, vertice ejus A nunc ſurſum converſo ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBDC, & terminato itidem ad planum ſublime GFI. Fig. 20.

XIV.

74. *Solidum patienti analogum* juxta ſcalam potentiarum eſt ſolidum $2C_2B_2A_2D$, cujus quælibet ſectio *2c2b2d* homologæ ſectioni *cbd* in ſolido patienti ſimilis, æqualis & parallela intervallo $2H_2e$ æquali reſpectivæ ordinatæ *3er* ſcalæ potentiarum à plano humili $2G_2F_2I$ diſtat, dum homologa ſolidi ipſius patientis ſectio cbd, intervallo He æquali abſciſſæ O_3e ad ordinatam *3er* pertinenti, diſtat. Fig. 19, 20.

XV.

75. *Solidum priſmati redundanti analogum* eſt ſolidum $2G_2F_2B_2A_2D_2I$, quod componitur ex ſolido patienti analogo $2C_2B_2A_2D$ & ex Priſmate recto $2G_2F_2B_2D_2I$, ſuper baſi $2C_2B_2D$ atque terminato ad planum humile $2G_2F_2I$. Fig. 19.

XVI.

76. *Solidum priſmati deficienti analogum* eſt ſolidum $2G_2F_2B_2A_2D_2I$, quod relinquitur ablato ſolido $2C_2B_2A_2D$ patienti analogo ex priſmate recto $2G_2F_2B_2D_2I$ ad planum humile $2G_2F_2I$ etiam terminato. Fig. 20.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [57] - 29
PUBLIC DOMAIN

XVII.

Fig.19,20. 77. *Pseudo-cuneus* sectionis rectæ solidi patientis est solidum, cujus sectiones, plano humili vel sublimi parallelæ, sunt rectangula, quorum bases sunt ordinatæ figuræ cujusdam similis & æqualis sectioni rectæ solidi patientis; altitudines verò ordinatis modo nominatis respondentes ordinatæ Scalæ Potentiarum.

Circa axem KP sit figura 3C3A3D similis & æqualis sectioni rectæ CAD solidi patientis, cujus ordinata quælibet 3c3d proinde æquabitur ordinatæ cd transienti per punctum e, quod respondet puncto 3e, per quod ordinata 3c3d ducta est, quæ ordinata in scala potentiarum respondentem habet 3*er*. Pseudo-cuneus sectionis rectæ CAD est solidum, cujus singulæ sectiones plano GFI parallelæ sunt parallelogramma rectangula, quorum bases sunt ordinatæ 3c3d & altitudines ordinatæ 3*er* scalæ potentiarum, in eodem plano secante positarum, id est rectangula 3c3d. 3*er*. &c.

Hi Pseudo-cunei hac etiam ratione generari intelligentur: super figuris 3C3A3D & PLQ, tanquam basibus, erecta intelligantur prismata recta, quæ, ob bases suas ad angulos rectos sibi invicem occurrentes, se mutuo perforabunt. Solidum illud, quod à prismatis ad angulos rectos transversim se invicem perforantibus intercipitur, est Pseudo-cuneus, de quo agitur.

Si scala potentiarum est triangulum vel trapezium, tunc ex Pseudo-cuneo fit verus Cuneus.

XVIII.

78. *Projectio* cujusque figuræ in plano quodam, quod ideo etiam *projectionis planum* audit, est figura, quæ in plano projectionis formatur, demittendo ex singulis figuræ projectæ punctis perpendiculares ad planum projectionis. Sic curvæ *kim* projectio in plano projectionis 2G2F2I est curva 1*p*1*n*1*q*, quæ à perpendiculis ex singulis punctis curvæ *kim* ad planum 2G2F2I demissis, formatur.

PROPOSITIO IX. THEOREMA.

Fig.17,18. 79. *Si in singulis punctis conicæ superficiei* kcbimd *duobus planis* cbd *&* kim, *ad distantiam indefinite parvam* el *vel* ni *aut* pk *à se invicem distantibus, interjectæ, atque lineolis* ck *&* dm *terminatæ, potentia* fg *ad angulos rectos applicata fuerit, pressio, quam universa superficies*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [58] - 30
PUBLIC DOMAIN

ficies conica ſubibit, æquipollebit preſſionibus, quas armilla pbq *duabus curvis* cbd *&* pnq (*quæ alterius* kim *projectio eſt in plano* cbd) *intercepta, & lineolis* cp, dq *terminata; & cylindrica ſuperficies* knm *ad baſin* kigm *& ad altitudinem* el *vel* ni *erectam terminatamque lineolis* pk *&* qm, *paterentur ab eadem potentia* gf, *in ſingulis armillæ & cylindricæ ſuperficiei punctis perpendiculariter applicata.*

Sumatur in curva exteriore *cbd* quilibet arcus infiniteſimus *sx* & per puncta *s*, *x* curvæ perpendiculares ductæ *st*, *xy* intelligantur curvæ interiori *pnq* occurrentes in punctis *t*, *y*. Porrò ſolidum *cbmd* ſectum cogitetur duobus planis per lineolas *st*, *xy* ductis & plano *cbd* rectis, eruntque ſolidi *cbmd*, & planorum ſecantium communes ſectiones triangula rectangula *stg*, *xyh* ac ſolidum hisce triangulis interjectum *txg* priſma erit. Quibus intellectis, preſſiones, quas ſubibunt facies *tghy* & *styx* (quæ conſiderandæ ſunt, tanquam continuam ſuperficiem in *ty* incurvatam *stghyxs* baſin *sghx* habentem) æquipollent (§. 63.) preſſioni, quâ ab eadem potentia *gf* afficietur baſis *sghx*. Et cum hoc accidat, reſpectu cujuslibet alius *sghx* in ſuperficie conica *kbm*, & homologarum areolarum *styx* in armilla, & *tghy* in ſuperficie cylindrica; perſpicuum eſt, preſſiones quas omnes areolæ *sghx* in ſuperficie conica ſubeunt, æquipollere preſſionibus, quas ſuſtinent omnes areolæ *tsxy*, quæ ſunt in armilla, & quas ſuſtinent omnes *tghy*, quæ in cylindrica ſuperficie *knm* continentur. Ac propterea preſſio, quam ſubit zona conica *kbm* ab omnibus ipſi perpendiculariter applicatis potentiis æqualibus *gf*, æquipollet preſſionibus, quas ab omnibus perpendiculariter applicatis potentiis ipſis *gf* æqualibus patientur armilla *pbq* & ſuperficies cylindrica *knm*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X. Theorema.

80. *Si ſingulis punctis ſuperficiei convexæ aut cavæ* CBAD, *qua* Fig. 19, 20. *ſolidum patiens* CBADC *ex parte terminatur, potentiæ inæquales quidem & ſuperficiei perpendiculares* MB, ub &c. *vel* BM, bu &c. *applicatæ ſint, ſed quarum eæ ſaltem omnes, quæ ſingulis punctis cujusque ſectionis* bcd *baſi* CBD *parallelæ applicantur, æquales ſint, & exponantur per homologam ordinatam* 3er *ſcalæ potentiarum; Preſſio, quam ſuperficies curva ſolidi patientis ab omnibus potentiis patietur, æquivalebit preſſioni, qua urgeretur baſis ſolidi patientis* CBD *juxta directionem baſi perpendicularem* αβ *per centrum gravitatis* δ *ſolidi*

2G2F2B2A2D2I *quod prismati redundanti (deficienti)* GFBADI *analogum est, ductam, quam pressionem idem hoc solidum analogum exponat; & simul etiam pressioni, quam exponit pseudocuneus sectionis rectæ in solido patienti, seu solidum* 3C3ALQ3D *exserendæ in sectionem solidi patientis rectam* CAD *juxta directionem* er *huic sectioni perpendicularem, & per centrum gravitatis* ω *pseudocunei ductam.*

Hoc est, si β designet solidum illud prismati redundanti (deficienti) analogum, & ω pseudocuneum memoratum in propositione; Potentiæ β & ω in directionibus αβ, eω, vel in directionibus βα & ωe patienti solido applicatæ, in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis BM, *bu* &c. cavæ superficiei CBAD, vel cum omnibus MB, *ub* convexæ applicatis.

Solidum patiens sectum intelligatur duobus planis *cbd*, *kim* basi CBD æquidistantibus & indefinite vicinis. Portio superficiei curvæ solidi patientis duobus planis secantibus intercepta, quam deinceps per *kbm* designabimus, est instar superficiei conicæ duabus curvis *cbd*, & *kim* atque lineolis *ck*, *dm* terminatæ. Curvæ *cbd* projectio in plano humili 2G2F2I sit 1c1b1d, & curvæ *kim* projectio in eodem plano humili 1p1n1q, in plano vero *cbd*, curva *pnq*.

Jam pressio quam superficies conica *kbm* subibit à potentia *bu* (secundum hypothesin) = 3*er*, in singulis ejus punctis perpendiculariter applicata (§. 79.) æquipollet pressionibus, quas paterentur armilla *pbq* (qualis in præcedenti propositione considerata) & Cylindrica superficies *knm*, si etiam singula armillæ & cylindricæ superficiei puncta eadem potentia *bu* = 3*er* perpendiculariter afficerentur; atqui potentia qua armilla *pbq* afficietur erit, ut hæc armilla ducta in potentiam *bu* vel 3*er*, qua singula ejus puncta urgentur, id est, exponi debet per solidum *pbq*. 3*er*, vel quia armilla *pbq* = suæ projectioni 1p1b1q, ac 3*er* (§. 74.) = 2H2e = 1b2b, per solidum 1p1b1q in 1b2b, id est per semitubum 1p1b2b1q1d, solido 2G2B2A2I inscriptum. Pressio verò quam superficies cylindrica *knm* ab applicatis potentiis pateretur, æqualis (§. 63.) pressioni, quam subiret rectangulum *kpqm*, quod cylindricam superficiem subtendit, exponetur solido seu parallelepipedo *km. el.* 3*er*, vel parallelepipedo 3*k*3*m*. 3*eßl*. 3*er*, quod alteri æquale est atque pseudocuneo inscriptum. Unde, quia pressio, quam quælibet alia zonula conica *kbm* solidi patientis ab applicatis potentiis patietur, similiter æquipollet pressionibus, quibus homologa armilla *pbq*, & homologa superficies cylindrica *knm* ab eadem potentia singulis zonulæ conicæ punctis perpendiculariter

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [60] - 32
PUBLIC DOMAIN

lariter applicata, urgentur: ultrò sequitur fore, ut pressiones, quas subibunt omnes zonulæ conicæ, quæ in universa superficie curva solidi patientis continentur, id est pressio, quam ipsa hæc solidi patientis superficies curva patietur, æquipolleant pressionibus, quas omnes armillæ, & omnes cylindricæ superficies zonulis conicis homologæ ab applicatis potentiis patientur; atqui cum paulo ante ostensum sit, pressionem à qualibet armilla *pbq* exceptam exponi homologo semitubo cylindrico *1p1b2b1q* cujus basis *1p1b1q* duabus curvis *1p1n1q* lineolisque *1c1p* & *1q1d* intercepta æqualis est ipsi armillæ *pbq*, cujus projectio est, altitudo verò *1b2b* (§. 74.) æquatur ordinatæ *3er* scalæ potentiarum, pressionemque cujusque superficiei cylindricæ *knm* exponi parallelepipedo *3k3m. 3el. 3e3l* Pseudocuneo inscripto; pressio omnium armillarum exponetur per omnes semitubos cylindricos *1p1b2b1q*, qui in solido 2G2F2A2D2I prismati redundanti (deficienti) analogo continentur, id est per ipsum hoc solidum analogum, & potentia, quæ ex omnibus illis quæ superficies cylindricas *knm* in solido patienti urgent, nascitur, exponetur per omnia parallelepipeda Pseudocuneo inscripta; seu quia ejusmodi parallelepipeda collective sumta figuræ, cui inscripta sunt, & in quam ultimo evanescunt, (perinde ac omnes semitubi solido analogo inscripti, in hoc solidum prismati redundanti vel deficienti analogum) æquantur, per ipsum Pseudocuneum. Ergo omnes potentiæ singulis punctis universæ superficiei curvæ CBAD applicatæ BM, *bu* &c. vel MB, *ub* &c. æquipollent duabus potentiis, quarum una, per solidum 2G2F2B2A2D2I exponenda, agat juxta directionem *uδ* (§. 54.) basi CBD solidi patientis perpendicularem & transeuntem per centrum gravitatis δ solidi modo nominati, quod brevitatis gratiâ unica litera δ, qua ejus centrum gravitatis signatur, deinceps indicabimus, vel, quod idem est, omnium potentiarum consPirantium planoque CBD perpendicularium, quæ per semitubos *1p1b1q* solido illi δ inscriptos exponuntur; altera verò per Pseudocuneum Q3C3A3D (unica itidem litera ω qua centrum ejus gravitatis signatur posthac indicandum) juxta directionem *re* vel *bγ* per centrum gravitatis ω Pseudocunei ductam, sectionique rectæ CAD solidi patientis perpendicularem, quandoquidem parallelepipeda Pseudocuneo ω inscripta repræsentant potentias consPirantes planoque CAD perpendiculariter applicatas, quarum media directio (§. 54.) per centrum earum gravitatis ω transibit. Propterea potentia δ in directione *uδ* plano CBD perpendiculariter applicata, & po-

tentia ω plano CAD normaliter applicata in directione $e\gamma$, simul agentes eundem effectum præstabunt ac potentiæ BM, *bu* &c. atque adeò eædem potentiæ δ & ω contrario sensu agentes, secundum directiones $\alpha\beta$ & $e\omega$, quæ omninò contrariæ sunt directionibus $\alpha\delta$ & *b* , consistent in æquilibrio cum potentiis BM, *bu* &c. singulis punctis B, *b* universæ superficiei curvæ CBAD applicatis. Sed potentiæ eædem δ & ω agentes juxta directiones $\alpha\delta$ & $e\gamma$ etiam in æquilibrio manebunt cum omnibus potentiis MB, *ub* &c. Quæ erant demonstranda.

Corollarium I.

Fig. 21. 22. 21. Si nunc loco solidi BAE superficie curva BbA duobusque planis AE & BE invicem rectis terminati, intelligatur solidum BAS superficie curva BbAsS unicoque plano BS terminatum, quod totius solidi (§. 67.) basis sit, & planum EA (§. 68.) ejus sectio recta, sitque pro altera solidi parte EA*s*S eadem scala potentiarum, quæ partis solidi patientis EAbD, ita ut potentiæ *bu*, *su* singulis punctis sectionis *bs* parallelæ BS applicatæ inter se æquales sint & ordinatæ 3*er* hujus scalæ potentiarum; signentur, ut in propositione, in solido analogo omnes lineæ iisdem litteris, quibus homologæ lineæ in solido patienti, sed præposito binario tanquam nota diacritica, eruntque adeò solida 2F2B2*b*2A2H, & 2R2S2*s*2A2H analoga prismatis redundantibus (deficientibus) FB*b*AH, RS*s*AH. Analoga illa solida notentur literis δ & ϰ, quibus eorum centra gravitatis signantur, &, ut in præcedenti articulo, ω designet & pseudocuneum sectionis rectæ AE in solido patiente BAS, ejusdemque pseudocunei centrum gravitatis: quibus positis omnes potentiæ SM, *su* solido EAS applicatæ non aliam vim in solidum exserent, quam potentia ϰ trahens curvam AS secundum directionem $\xi\varkappa$ sectioni rectæ AE parallelam & per centrum gravitatis ϰ transeuntem, una cum potentia ω trahente solidum juxta $e\omega$ basi BS parallelam, adeoque omnes potentiæ BM, *su*, *bu*, SM &c. toti solido BAS applicatæ æquivalent potentiis δ, & ϰ solido in directionibus $\alpha\delta$ & $\xi\varkappa$ applicatis, cum ejus vertex A deorsum respicit ut fig. 21, vel in directionibus $\alpha\beta$ & $\xi\theta$ cum solidi vertex sursum conversus est ut fig. 22; ac insuper potentiæ ω solidi alis A*b*B, A*s*S hinc inde applicatæ in directionibus $b\gamma$ $s\omega$ utroque casu. Sed si potentiæ solido patienti applicatæ sunt exterius prementes, eæ spectandæ sunt tanquam agentes juxta MB, *ub*, MS, *us* &c. eoque casu hæ potentiæ æquipollebunt iisdem

iisdem ac prius δ, $\varkappa$, ω sed in directionibus, $\delta\varkappa$, $\varkappa\xi$, γb, & ωs prementibus solidum BAS in casu figuræ 21, & juxta directiones $\beta\varkappa$, $\theta\xi$ in figura 22.

Corollarium II.

82. Adeoque, si solidi BAS partes B*b*A & S*s*A circa verticem A converti atque instar alarum alicujus follis ab invicem diduci atque iterum ad se mutuo constringi queant, erit γ. Ae + δ. αE momentum totale potentiarum γ vel ω, & δ, quæ æquipollent potentiis curvæ superficiei A*b*B in singulis perpendiculariter applicatis BM, *bu*, &c. vel MB, *ub* &c. Et ω. Ae + $\varkappa$. ξE momentum totale potentiarum ω & $\varkappa$ solidi parti A*s*S applicatarum & æquipollentium potentiis SM, *su* &c. vel MS, *us* &c. singulis punctis superficiei curvæ A*s*S applicatis.

Corollarium III.

83. Si nunc solidum patiens *a*BAS unica superficie curva terminatum sit, cujus singula puncta à potentiis ipsi perpendicularibus urgentur & quæ potentiæ determinentur scala potentiarum KLQP, ita ut supremum punctum *a* urgeatur à potentia *ba* = KL, infimum A à potentia 2A2H = PQ, singulaque puncta circumferentiæ sectionis BS à potentia MB = MS = 3*er* & sic de cæteris respective: tale solidum *a*BAS in altum urgebitur juxta directionem planis FO, vel 2FQ perpendicularem, vi quam exponit solidum 2*a*2B 2A2S quod (§. 74.) patienti analogum est. Nam sicut supra (§. 81.) vis seu potentia æquipollens singulis potentiis toti superficiei curvæ BAS (figuris 21. & 22.) perpendiculariter applicatis, constat potentiis contrariis atque æqualibus γ & ω perpetuo in eadem directione $\gamma\omega$ basi BS parallela in contrarias partes agentibus, & potentiis δ & $\varkappa$ conspirantibus atque juxta directiones $\delta\varkappa$, $\varkappa\xi$ basi normales agentibus; quarum potentiæ γ & ω toties se mutuo destruunt, quoties totum corpus BAS firmum est, nec ejus partes BAE, SAE ab invicem deduci possunt, adeo ut solæ potentiæ $\varkappa$ & δ conspirantes supersint considerandæ, reliquis γ & ω, quasi non essent, sepositis; jam hæ potentiæ, quæ potentias efficaces significant, δ & $\varkappa$ simul sumtæ significant totum solidum 2F2B2A2S2R quod prismati redundanti (fig. 21.) vel deficienti (fig. 22.) FBASR analogum est. Ita etiam in solido nostro *a*BAS potentiæ directe contrariæ per pseudocu- Fig. 25.

neum ω expositæ se mutuo elidunt, ipsæ verò, quæ juxta directiones planis BS vel FR perpendiculares agunt, hoc loco considerandæ veniunt; nam pars superior B*a*S solidi nostri deorsum urgebitur vi seu potentia $2F2B2a2S2R$, & inferior BAS potentia, quam exponit solidum $2F2B2A2S2R$, quod prismati redundanti FBASR analogum est, in altum urgetur juxta directionem plano BS rectam. Adeoque (§. 38.) detracta potentia minore, quæ exponitur solido $2F2B2a2S2R$ analogo prismati deficienti FB*a*SR, ex potentia majore, quam solidum redundanti prismati FBASR analogum exponit, quandoquidem minor potentia corpus patiens perpendiculariter deorsum, major verò verticaliter in altum urget; & remanebit vis corpus in altum cogens exponenda solido $2a2B2A2S$, quod patienti solido *a*BAS analogum est.

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis; & de Mediis directionibus harum potentiarum.

EGimus hactenus de potentiis corporibus inflexibilibus applicatis, earum medias directiones assignavimus; in hoc verò capite potentias corporibus cedentibus seu flexibilibus appendemus, quæ circumstantia flexibilitatis duo indaganda jubet. Primum quamnam corpus flexile figuram debeat acquirere ab applicatis potentiis, vel potius, quamnam retinere debeat formam, ubi potentiæ ad æquilibrium sese composuerunt. Secundum respicit mediam directionem ejusmodi potentiarum in æquilibrio consistentium, & vim impulsus secundum hanc mediam directionem.

DEFINITIONES.

I.

84. Corporis perfecte flexilis ZAX terminis suis Z, X alicubi affixi *Figura* ZBABX *manens* dicitur, quam corpus retinet, posteaquam omnes potentiæ BH, βH &c. curvæ, punctis per totam ejus longitudinem quomodocunque applicatæ, ad æquilibrium se composuerunt.

II.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [64] - 36
PUBLIC DOMAIN

II.

85. *Tenacitas* vel *Firmitas* fili aut corporis in quolibet ejus puncto seu elemento curvæ, est vis illa fili aut corporis, qua potentiæ illi aut vi ex omnibus applicatis potentiis nascenti, atque filum in contrarias partes trahendo id dilacerare conanti, resistit; atque adeo æquipollet, vel æquatur, ipsi vi dilaceranti, ex omnibus corpori applicatis potentiis resultanti.

III.

86. *Potentiæ laterales* ex fili aut corporis tenacitate in quolibet ejus elemento, *derivatæ*, sunt duæ potentiæ secundum directiones sibi invicem ad angulum rectum occurrentes, ex quibus conjunctim agentibus resultaret vis aut potentia æqualis corporis tenacitati in dicto ejus elemento, aut etiam vi ejus dilaceranti.

Sic cum filum, vel potius fili elementum B*b*, vi quadam ex omnibus applicatis BH, βH &c. resultante tenditur, idque sua tenacitate æquali vi tendenti impedit ne extendatur aut prorsus rumpatur, hæc tenacitas, aut vis illa tendens tenacitati æqualis, intelligi potest, tanquam potentia resultans ex potentiis lateralibus, secundum BM & B*l* simul agentibus. Et vis qua tenditur elementum Bβ, cui tensioni id sua tenacitate resistit, spectari potest tanquam nascens ex duabus lateralibus potentiis juxta directiones BN & B*k*. Ejusmodi potentias laterales juxta BM vel B*l*, & juxta BN aut B*k* deinceps designabimus per *p*BM, *p*Bl, *p*BN & *p*Bk. Tenacitates vero duorum elementorum contiguorum B*b* & Bβ indicabimus per T & *t*. Fig. 29.

Cæterum in hisce supponimus filum quidem flexile esse in omnibus suis partibus, non vero extensibile.

PROPOSITIO XI. Lemma.

87. *Si fuerint quotcunque decrescentes magnitudines* A, B, C, D, E, *erunt omnium differentiæ simul sumtæ æquales excessui maximæ supra minimam.* Nam ultro liquet, esse A−B, +B−C, +C−D, +D−E=A−E, unde si E=0, erit summa differentiarum maximæ A æqualis.

Scholion.

88. Quanquam hoc lemma ſimplicitate ſua nullius uſus prima fronte videatur, in eo tamen omnes quadraturarum methodi fundantur, quod prolixius quidem oſtendi poſſet tam in antiquorum methodis quam recentiorum; ſed brevitatis gratia id tantum in uſu Calculi integralis uno alteroque exemplo illuſtrabitur. Calculus integralis vel ſummatorius eſt inverſus calculi differentialis, & conſiſtit in eo, ut inveniatur quantitas A ex indeterminata quadam & conſtantibus compoſita, ejus indolis, ut, ſi loco indeterminatæ in ea ſubſtituantur ſucceſſive eadem indeterminata, ſed elemento ſuo ſimplici, ejusve 2plo, 3plo, 4plo, 5plo &c. mulctata inde exſurgant quantitates B, C, D, E &c. quarum differentiæ A—B, B—C, C—D, D—E &c. ſint ejusdem formæ cum elemento ſeu quantitate infiniteſima ſummanda, ita ut prima differentia A—B, exhibeat ipſam quantitatem differentialem, cujus ſumma ſeu integrale quæritur. Ut ſi curva quædam ſit quadranda, cujus axis dicatur x, & ordinatæ ad hunc axem y, ita ut areæ elementum futurum ſit ydx. Area ipſa invenietur, ſi haberi poſſit, quædam quantitas A ex indeterminata x & quantitatibus datis ſeu conſtantibus compoſita, itaque comparata, ut, ſi in ea ſubſtituantur loco indeterminatæ x, aliæ $x-dx$, $x-2dx$, $x-3dx$, $x-4dx$ & ſic deinceps in infinitum, inde proveniant magnitudines B, C, D, E, &c. quarum prima differentia A—B det ydx, ſecunda B—C det ſecundum elementum areæ ydx in quo ordinata y jam reſpondeat non axi x ſed axi $x-dx$, ſuo ſcilicet elemento dx imminuto, atque ſic de reliquis reſpective. Hac enim ratione perſpicuum eſt, omnes A—B, B—C, C—D &c. exhibere aggregatum omnium ydx, quæ in area continentur, ſeu hanc aream ipſam; jam ſi in ſerie quantitatum decreſcentium A, B, C, D, E &c. minima dicatur M, area quæſita, juxta Lemma (§. 87.) perpetuo erit A—M, & ſi contingat, ut aliquando M ſit O, tunc area æquatur ipſi A. Minima verò quantitas M ſemper habebitur ex Maxima A, ſi ſcilicet loco indeterminatæ x ſubſtituatur in ea $x-ndx$, ubi n eſt numerus elementorum, in quæ axis diviſus eſt, adeo ut ndx ſit $=x$, vel quod eodem recidit, ſi loco x ibi ſubſtituatur o, quandoquidem $x-ndx$ eſt o; quantitasque ex hac ſubſtitutione reſultans erit minima M. Unde ſi contigat ut, facta ſubſtitutione ipſius o loco indeterminatæ x in quantitate A, hæc evaneſcat, tunc M erit $=$ o, atque adeo area quæ-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [66] - 38
PUBLIC DOMAIN

quæsita, seu summa omnium ydx, erit A composita ex indeterminata x varie affecta & cum constantibus implicata. Pro inveniendo vero valore ipsius A, ex dato elemento ydx, loco ipsius y substitui debet ejus valor in x & constantibus, quem æquatio curvæ quadrandæ præbet. Quod de quadratura spatiorum seu arearum dictum est, id etiam de dimensione solidorum imò, de omnibus summationibus, pariter est intelligendum.

89. In hisce supposuimus literas A, B, C, D, E &c. usque ad M denotare seriem magnitudinum decrescentium, sed infiniti etiam sunt casus, in quibus eædem literæ iisdem ac præcedenti articulo factis substitutionibus indeterminatarum $x-dx$, $x-2dx$ &c. loco ipsius x in magnitudine A, proveniant B, C, D &c. majores quam A, adeo ut tota earum series repræsentet progressionem earundem crescentem ita ut differentiæ futuræ sint B−A, C−B, D−C, E−D, &c. quo casu M, quæ antea minimam seriei magnitudinem denotabat, nunc sit maxima, & quæ antea erat maxima A nunc sit minima, necesse est. Utriusque casus exemplum est adducendum.

90. *Exempl.* 1. Sit summanda quantitas $mdm : \sqrt{(aa+mm)}$, in qua m est variabilis & a data seu constans. Eritque hoc casu $A = \sqrt{(aa+mm)}$, adeoque $B = \sqrt{(aa+mm-2mdm+dm^2)} = \sqrt{(aa+mm)}, -mdm : \sqrt{(aa+mm)} +$ &c. Hinc $A-B = \sqrt{(aa+mm)} - \sqrt{(aa+mm)}, +mdm : \sqrt{(aa+mm)} = mdm : \sqrt{(aa+mm)}$, unde series magnitudinum A, B, C, usque ad M est descendens: & si loco ipsius m in quantitate A (§. 89.) ponatur o, fiet eo casu $A = a = M$; cum igitur summa omnium A−B, B−C &c. vel omnium $mdm : \sqrt{(aa+mm)}$ sit (87.) A−M, erit $\int mdm : \sqrt{(aa+mm)} = \sqrt{(aa+mm)}, -a$.

91. *Exempl.* 2. Sin detur elementum summandum $\frac{aamdm}{aa+mm\sqrt{aa+mm}}$, tunc erit $A = aa : \sqrt{aa+mm}$, atque adeo $B = aa : \sqrt{aa+mm - 2mdm + dm^2}$ hoc est extrahendo revera radicem ex denominatore $= aa : (\sqrt{aa+mm} - mdm : \sqrt{aa+mm})$ quæ fractio ob denominatorem minorem, quam in fractione A, hac ipsa fractione minor est, atque adeo hoc casu erit $B-A = \frac{aamdm}{aa+mm\sqrt{aa+mm}}$. Hinc progressio quantitatum A, B, C, D &c. est ascendens seu crescens; atque adeo summa omnium (87.) B−A, C−B, &c. est M−A, verum hoc casu M iterum est a, quoniam facta $m = o$ in æquatione $A = \nu\rho$ fiet $\sqrt{(\mu+mm)} = a$, atque adeò $M-A = a, -aa : \sqrt{aa+mm}$.

92.

92. *Exempl.* 3. Pari ratione infinitæ hyperbolæ intra asymptotas possunt quadrari. Sit earum æquatio generalis $x^a y =$, in qua x abscissas à centro in alterutra asymptotarum, & y ordinatas significant; elementum areæ abscissæ adjacentis erit $ydx = x^{-a}dx$. Invenietur verò $A = 1 : \overline{(a-1)}.x^{a-1}$, & $B = 1 : \overline{a-1}.\overline{(x-dx)}^{a-1} = 1 : (a-1).x^{a-1} - \overline{(aa+2a-1)}.x^{a-2}dx +$ &c. hinc B major est quam A ob denominatorem minorem quam in A, atque adeo invenietur $B - A = dx : x^a = x^{-a}dx = ydx$, unde cum A, B, C, D sit series ascendens, fient omnes B − A, C − B, D − C &c. id est omnia ydx, $= M - A$, At verò substituendo in æquatione $A = 1 : \overline{a-1}.x^{a-1}$ vel $= (1 : x)^{a-1} : a-1$, loco x, o fiet $M = (1 : o)^{a-1} : a-1$, at verò $1 : o$ est magnitudo infinita, quam designabimus per ∞, ergo $M = \infty^{a-1} : a-1$, atque adeò M − A seu area hyperbolarum abscissæ adjacens, erit $= \infty^{a-1} : a-1, -1 : \overline{a-1}\,x^{a-1}$, vel quia $1 : x^{a-1} = xy$, erit $M - A = (\infty^{a-1} - xy) : a-1$. Ex quo apparet ejusmodi areas juxta diversos gradus infinite magnas esse, siquidem a sit quilibet numerus positivus & unitate major. Sed de his sufficit.

PROPOSITIO XII. THEOREMA.

Fig. 29. 93. *Tenacitas fili* ZBABX *ad figuram manentem redacti à potentiis* BH, βH &c. *ipsi applicatis, æquatur in quolibet fili elemento* Bb, *tenacitati fili in vertice* A *auctæ omnibus* GH, *quæ ex singulis potentiis* BH, βH &c. *curvæ* AB *applicatis derivantur, resolutione illarum* BH *in æquipollentes potentias laterales* BG *&* GH *singulis curvæ* AB *elementis* Bb *perpendiculares & parallelas. Hoc est exponendo tenacitatem fili in* A; *erit* $T = A + \int GH$.

Et demissa ex elementi curvæ Bb *termino* b *perpendiculo* bg *ad tangentem* Bg *curvæ in* B, *sumatur in hac tangente,* Bh *æqualis elemento curvæ* Bβ, *& agantur* hm *parallela ordinatæ* BC, bf *verò æquidistans axi curvæ* AC, *& per curvæ punctum* B, *indefinita* BME *eidem* AC *etiam parallela, in quam* ME *cadat perpendicularis* HF *ex termino* H *lineæ* BH *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræsentatricis: ac denique jungantur lineola* bh, *atque hisce factis habebitur in angulo contactus* bBg *figura* bfhg *similis, & similiter posita cum figura majore* BFHG, *si elementum* Bb *fuerit ad elementum* Bβ *ut illius tenacitas* T *ad hujus tenacitatem* t; *atque adeo erit quælibet lineola in figu-*

figura bfhg *ad elementum curvæ* Bb, *ſicut homologa linea in figura majore* BFHG *ad lineam* T, *quæ tenacitatem ejusdem curvæ elementi* Bb *exponit.*

Demonſtr. I. Quoniam potentiæ BH (§. 39.) laterales BG & GH æquipollent, & ex hisce potentia GH curvæ puncto B in directione tangentis vel elementi Bβ applicata potentia conſpirans eſt cum potentia, qua idem elementum Bβ tenditur, cui tenſioni (§. 86.) tenacitas elementi *t* æqualis dicta eſt, hæ potentiæ conſpirantes ſcilicet GH & *t* æquales erunt directe contrariæ vel oppoſitæ potentiæ T, qua elementum *Bb* tenſioni reſiſtit, cum (ſecundùm hypotheſin) omnia in ſtatu manenti ſeu æquilibrii exiſtant, atque adeo $T=t+GH$, vel $T-t=GH$. Atqui (§. 87.) omnes differentiæ $T-t$, inter ſingulorum curvæ contiguorum elementorum tenacitates, æquantur exceſſui maximæ T ſupra minimam, quæ eſt tenacitas in vertice, A, ergo $T-A=\int GH$, vel $T=A+\int GH$.

II. Quia (§. 39.) $pBM : pBb$ quæ eſt $T, = BM : Bb$, per hypotheſin verò $T : t = Bb : B\beta$, & $pB\beta$ id eſt t ad $pBk = B\beta : Bk$, erit ex æquo $pBM : pBk = BM : Bk$ vel Bm (quoniam in triangulis ſimilibus βBN & Bhm hypothenuſæ Bh, Bβ æquales ſunt; atque adeo ipſa triangula æqualia), & convertendo $pBM - pBk : pBM = Mm$ vel $bf : BM$. Atqui, quoniam omnia in æquilibrio ſunt, duæ potentiæ conſpirantes pBk & BF, quæ (§. 40.) ex potentia BH derivatur, æquales erunt directe oppoſitæ pBM, unde $pBM - pBk = BF$, atque adeo, ponendo hunc valorem in antecedenti analogia, habebimus $BF : pBM = bf : BM$, ſed $pBM : pBb$, id eſt $T = BM : Bb$ ergo ex æquo $BF : T = bf : Bb$.

Simili prorſus argumento probabitur, quod $pBN - pBl = FH$, & $(pBN - pBl)$ vel $FH : pBl = fh : Mb$; unde quia etiam (§. 39.) $pBl : pBb$ vel $T = Mb : Bb$; erit pariter ex æquo $FH : T = fh : Bb$, vel invertendo $T : FH = Bb : fh$, & quia paullò ante habuimus $BF : T = bf : Bb$, erit denique ex æquo $BF : FH = bf : fh$, atque adeo triangula BFH, *bfh* ſunt ſimilia & propter parallelas *bf* ac BF ſimiliter poſita. Præterea, quia ipſæ BG, & *bg* utpote eidem tangenti Bg perpendiculares inter ſe parallelæ ſunt, æque ac lineæ BH & bh, liquet etiam triangula BGH & *bgh* ſimilia eſſe, ac propterea figuræ BGHF & *bghf* ex triangulis ſimilibus compoſitæ, ſimiles erunt & ſimiliter poſitæ. Porrò cum invenerimus ſupra $FH : T = fh : Bb$, erit permutando $FH : fh = T : Bb$, atque adeo duæ quælibet aliæ lineæ homologæ in figuris ſimilibus BFHG & *bfhg* erunt in hac

eadem ratione T ad Bb, vel permutando, quælibet lineola in figura minore erit ad elementum curvæ Bb, ſicut homologa linea in figura majore ad tenacitatem T ejusdem curvæ elementi. Quæ erant demonſtranda.

Corollarium I.

94. Ducta, ſi placet, per verticem A recta AO arbitrariæ magnitudinis, axi AC perpendiculari, ac ſuper ea deſcripto ſemicirculo APO, agantur AP parallela elemento Bb, & Ap æquidiſtans alteri curvæ & elemento contiguo Bβ, & jungantur cum Po rectam Ap ſecans in Q, tum etiam pO; quibus peractis, erit BG: T = PQ: AP. Nam (§. 93.) eſt BG: T = bg: Bb, atque ob parallelas AP, B*b* & A*p*, Bβ, ſectores ſeu triangula B*bg* & APQ ſimilia ſunt, atque adeo *bg*: B*b* = PQ: AP; ergo etiam BG: T = PQ: AP.

Corollarium II.

95. Quælibet recta in figura BGHF eſt ad homologam in figura *bghf*, ut alterutra ex potentiis pBl vel pBM, quæ elementi Bb tenacitati T æquipollent, ad homologum, id eſt reſpondens latus in triangulo characteriſtico BMb: hoc eſt, quælibet linea in figura majori eſt ad homologam in minori ſicut *p*Bl ad Bl, vel ſicut *p*BM ad BM. Nam quia in utraque figura duæ quælibet lineæ homologæ ſunt inter ſe, ſicut T ad Bb, & quia T ad Bb, ſicut *p*Bl ad Bl vel Mb, aut ſicut *p*BM ad BM, liquet aſſertio hujus corollarii.

Corollarium III.

96. Si omnes applicatæ potentiæ BH curvæ perpendiculares ſint, ut BD; puncta G & H confundentur cum puncto D, evaneſcentibus GH, *gh* in utraque figura majore & minore; atque adeò tenacitas curvæ ubique æqualis erit tenacitati in vertice A, atque adeo conſtans ſeu data. Id eſt habebitur ubique T = A.

Corollarium IV.

97. Idcirco, cum (§. 94.) ſit BG: T = PQ: AP = ſin. anguli PAQ ſeu anguli gBb, id eſt ſinus curvitatis in B ad radium; erit in caſu potentiarum curvæ perpendicularium una earum BD cuilibet curvæ puncto B applicata ad tenacitatem fili (§. 96.) conſtantem

tem A, ſicut ſinus curvitatis in curvæ puncto, cui potentia applicata eſt ad radium; & permutando erit potentia applicata BD ad ſinum curvitatis in B ſicut A ad radium, id eſt, in ratione data.

Elegans hæc proprietas ab Acutiſſimo Geometra Joh. Bernoulli primùm animadverſa eſt; ſed eam, quantum ex Commentariis Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1706. ad diem 12. Maji apparet, ex alio fundamento deduxit.

Corollarium V.

98. Iisdem adhuc poſitis, quæ in duobus proxime antecedentibus Corollariis, quia (§. 93.) HF : hf = BF : bf = T : Bb (vel §. 96.) = A : Bb, erit ſFH : ſfh = ſBF : ſbf = A : Bb, ſi ſingula curvæ elementa æqualia aſſumta fuerint. Atqui (§. 87.) ſhf, ſeu omnes hf vel Nn, poſita Bn = bM, reſpectu curvæ portionis AβB æquantur exceſſui maximæ ordinatarum differentiæ ae (poſito arculo curvæ Aa = Bb = Bβ = Zz) ſupra minimam bM, id eſt, ae − bM (vel etiam, quia ae ac aA æquales fiunt cum axis CA curvæ perpendicularis eſt in A) Aa − bM = Bb − bM; & ſbf = ſMm = BM − Ae (vel quia Ae hoc caſu evaneſcit præ Aa vel Bb) = BM. Ergo ſFH : Bb − bM = ſBF : BM = A : BC. Ubi omnes FH ſeu ſFH, & ſBF pertinent ad arcum curvæ AβB.

Sin verò ſFH & ſBF pertinuerint ad arcum curvæ BZ & tangens hujus arcus in Z axi AC parallela fuerit, erit Zy − o, poſita ut ſupra Zz = Bb = Bβ &c. atque adeo zy = Zz = Bβ; unde ſhf vel ſNn erit hoc caſu (§. 87.) BN − Zy = BN, & ſbf − ſMm = yz − Nβ = Zγ − Nβ = Bβ − Nβ, atque adeò ſFH : BN = ſBF : Bβ − Nβ = A : Bβ.

Corollarium VI.

99. Si potentiæ curvæ applicatæ BH, βH &c. axi AC æquidiſtantes ſunt, coincident BH, BE, & *bh* ac *bf* evaneſcentibus HF, *hf*; atque adeò omnia ordinatarum elementa bM, BN &c. hoc caſu æqualia ſumenda ſunt; ac proinde omnes potentiæ ſecundùm directiones ordinatarum ex tenacitate elementorum curvæ derivatæ in iſta hypotheſi æquales exiſtent. Propterea, vocando unamquamque harum æqualium potentiarum B, fiet nunc (§. 95.) BE : bf vel Mm = B : bM, adeoque cum B & bM conſtantes ſint hoc caſu, erit ſBE : ſMm = B : bM, vel quia (§. 98.) ſMm = BM − Ae = BM evaneſcente Ae præ Aa; fiet ſBE : BM = B : bM & permutando

$\int BE : B = BM : bM$. Porro, quia ordinata *ae* vertici A proxima in ipsam curvam Aa desinit, & B generaliter constantem potentiam juxta ordinatarum directiones denotans, etiam eam, quæ juxta directionem *ea* vel *Aa* agit, exponet, sed potentia juxta *Aa* est tenacitas curvæ in vertice A, ergo $A = B$, atque adeo $\int BE : B = \int BE : A = BM : bM$.

SCHOLION.

100. Ex Corollariis theoremati nostro adjectis satis constare potest quam latè pateat ejus usus, revera enim infinitorum id problematum solutionem continet, quorum Problemata *Catenariæ*, *Velariæ*, & figuræ lintei ab incumbente liquore inflexi nonnisi casus sunt specialissimi nostri theorematis. Sed priusquam ad applicationem ejus nonnullis specialibus ejusmodi casibus accedam, monendum est atque notandum, potentias applicatas BH, βH, etsi simplicibus & finitæ magnitudinis lineis expressas, nonnunquam lineolas tantum infinitè parvas, quandoque etiam rectangula infinitesima significare; & tenacitates fili in singulis punctis ejusdem semper generis magnitudines existere quidem cum potentiis applicatis, sed præ hisce infinitas; ut id ex ipsa applicatione clarius elucescet.

101. Sint ergo $AC = x$, $CB = y$, $BM = dx$, $bM = dy$, $Bb = ds$, $AO = a$, $AP = m$ & $PO = n = \sqrt{(aa - mm)}$. Hinc $PQ = dn$, & $Qp = dm$. Hisce positis, triangula similia BbM, & OAP præbent $ds = adx : n$, & $dy = mdx : n$. Idcirco substitutis his valoribus in analogia $BG : T = PQ : AP$, §. 94. reperta, erit $BG : T = dn : m$, primus Canon. Et $T = A + \int GH$, altera formula generalis.

102. Sint potentiæ applicatæ BH curvæque perpendiculares $= bds$, ubi *b* est magnitudo data, eritque hoc casu (§. 96.) $T = A$, & A (§. 100.) ejusdem generis magnitudo cum potentia applicata, atque adeò dicatur $= ab$. Hinc ex $BG : T$ fiet $bds : ab$, vel $ds : a$ atque adeo $ds : a = dn : m = BG : T$, vel quia (§. 101.) $ds = adx : n$, erit $(adx : n) : a = dn : m$, atque adeò $dx : n = dn : m$ ergo $mdx = ndn = -mdm$, & $dx = -dm$, & integrando $x = a - m$ vel $m = a - x$, ergo $n = \sqrt{(aa - mm)} = \sqrt{(2ax - xx)}$, hinc $dy (= mdx : n) = adx - xdx : \sqrt{(2ax - xx)}$, ergo $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ quæ est æquatio ad circulum.

103. Si potentia curvæ perpendicularis BD vel BG aut BH (hæ tres in hoc casu unum idemque significant) sint $= dy^2 : ds$, qui est

casus

casus *Velariæ*, ut suo loco plenius ostendetur, erit, factis debitis substitutionibus, $BD = mmdx : an$, atque posita $A(=T.) = a$, analogia (§. 101.) $BG : T = dn : m$, nunc fiet $mmdx : aan = dn : m$, hinc $aandn = m^3 dx$ & $m^3 dx = aamdm$ vel $dx = -aadm : mm$, hinc $x = aa : m, -a$ atque $m = aa : a + x$ & $n = \sqrt{(aa - mm)} = a\sqrt{(2ax + xx)} : a + x$, ergo $dy (= mdx : n) = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Pro æquatione *Velariæ*.

104. Si potentia applicata curvæ itidem perpendicularis BD sit kds, ubi k denotat quantitatem utlibet datam in x & constantibus, ponatur juxta superiorem (§. 100.) notam $T = A = \frac{1}{2}aa$; factisque ex (§. 101.) convenientibus substitutionibus analogiâ $BG : T = dn : m$, mutabitur in $2kdx : an = dn : m$, hinc $2kdx = andn : m = -adm$, vel $2kdx = adm$. Ponatur $x + u =$ constanti b, ergo $du = -dx$, & $2kdu = -2kdx = adm$. Unde si fiat $2kdu = adp$, erit $dp = dm$, atque adeo $p = m$ & $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$. Quæ ex aliis principiis reperta est à Celeberrimis Bernoulliis. Si $k = u$, fiet $dy = -uudu : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ pro æquatione figuræ lintei vel Elasticæ Acutissimi Jac. Bernoullii.

105. Si applicatæ potentiæ BH sunt axi AC parallelæ, ut BE; ducatur EI perpendicularis ad BD; unde si $BE = dq$, propter triangulorum BIE, APO similitudinem invenietur latus $EI = ndq : a$, & $BI = mdq : a$. Idcirco loco BG nunc est sumenda BI, in analogia $BG : T = dn : m$, fietque $(mdq : a) : t = dn : m$, vel $atdn = mmdq$, sed $a + \int IE = a + \int ndq : a = T = t$, & differentiando $ndq : a = dt$, vel $dq = adt : n$, quod in æquatione $atdn = mmdq$ suffectum, præbet $atndn = ammdt$ vel $dt : t = ndn : mm = -mdm : mm = -dm : m$; hinc $t = aa : m$, quod in superiori analogia substitutum, dat $(mdq : a) : (aa : m) = dn : m$, ex quâ elicitur $dq = a^3 dn : m^3$ (vel propter $aa = mm + nn$) $= ammdn + anndn : m^3 = ammdn - amndm : m^3 = amdn - andm : mm$; unde, facta summatione, invenietur $q = an : m$, id est $mq = an$, vel substitutis loco m & n ipsarum proportionalibus dy, dx; reperietur $dy = adx : q$. Quæ æquatio omnis generis *Catenarias* continet.

Etsi vero modo inventa æquatio jam continetur in Corollario sexto, quod dat analogiam $\int BF : A = BM : bM$, in qua si $\int BF = \int dq = q$, $A = a$, $BM = dx$, & $bM = dy$, habebitur $q : a = dx : dy$, atque adeò $dy = adx : q$. Non tamen absre mihi visum est, si usum analogiæ $BG : T = dn : m$ etiam hoc casu illustrarem.

106. Sit $q = s$, per s intelligendo curvam $A\beta B$, erit $dy = adx : s$, qui casus est simplicissimus problematis *Catenariæ*. Foret enim

$ms = an$, & $s = an : m$, ac $ds = \frac{amdn - andm}{mm}$, vel quia $ds = adx : n$, erit $dx = mndn - anndm : mm = -mmdm - nndm : mm = -aadm : mm$, ergo ut supra (§. 103.) invenietur $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, æquatio *Catenariæ*, quæ eadem prorsus est cum *Velaria*. Sin verò gravium directiones in puncto ad distantiam finitam ponantur convergere, *Catenaria* erit *hyperbola æquilatera*, cujus demonstratio brevitatis gratia aliis relinquenda est, quanquam cæteroquin non longa sit, sed ferme una linea & absque calculo potest perfici.

PROPOSITIO XIII. Problema.

107. *Inventa curva manente, in quam velum, linteum, aut quodvis aliud corpus flexile à potentiis applicatis arcuatur, assignare mediam directionem potentiarum & impressionem earum, juxta hanc mediam directionem.*

Fig. 30. Sit AeD inventa curva terminis suis tigillo seu lineæ inflexili ACD alligata, quæritur media directio omnium potentiarum *eb*, *db* &c. curvæ applicatarum, & quantitas impulsus, seu impressionis, quæ secundùm mediam directionem CB in tigillum DCA exeri debet.

Solutio. Per terminos curvæ A, D ductæ sint tangentes curvæ AB, DB convenientes in puncto B, in quarum alterutra, ut AB, capiatur segmentum AF, quod sit ad reliquam tangentem totam DB, ut tenacitas curvæ in A ad tenacitatem ejus in D, quæ tenacitates ex superius (§. 93.) demonstratis habentur. Per puncta A & D agantur perpendiculares AG, DM, rectæ DA, & per F ac B eidem AD æquidistantes FG, BE perpendicularibus occurrentes in G & E. Dividatur AD in C, ut sit $AC : DC = DE : AG$, & in perpendiculari lineæ AD per punctum C sursum ducta sumatur portio $CH = AG + DE$, & in parallela eidem AD per punctum H ducta sumatur $HI = BE - FG$, & jungatur denique IC, ejusque continuatio CB erit media directio quæsita, impulsus vero ex omnibus curvæ applicatis potentiis resultans, secundùm hanc mediam directionem, erit ad tenacitatem fili in A vel D, sicut IC est ad AF vel ad DB.

Demonstr. Linea AD non aliam à potentiis *eb*, *db* &c. curvæ AeD applicatis impressionem subire potest, quam quæ resultat ex potentiis, quibus in directionibus tangentium curvæ AB, DB urgetur, seu ex tenacitatibus curvæ in A & D, quandoquidem in his tan-

tantum punctis curva AeD lineæ inflexili ACD alligata est. Verùm resolvendo potentias AF & DB in suas æquipollentes laterales AG & GF, atque DE & EB, quia ex conspirantibus AG & DE (§. 54.) nascitur potentia ipsis æqualis AG + DE in directione per C transeunte scilicet per ipsarum AG & DE centrum gravitatis, & rectæ AD perpendiculari, & quia potentia CH = AG + DE per constructionem contrario sensu agit, hæc CH in æquilibrio consistet cum potentiis AG & DE. Potentia vero, quæ ex contrariis EB, & GF resultat (§. 38.) æquabitur excessui majoris EB supra minorem GF, atqui etiam (constr.) HI = EB − GF, ergo ex contrariis & lineæ AD parallelis potentiis resultat potentia HI, quæ in recta AD agens ex C versus D in æquilibrio foret cum contrariis EB & GF, ergo duæ potentiæ CH & HI in æquilibrio consisterent cum potentiis AG, DE; GF & EB, quibus obliquæ AF & DB æquipollent atque adeo cum hisce obliquis, vel quia (§. 39.) ex lateralibus CH & HI unica potentia CI nascitur, hæc etiam in æquilibrio maneret cum potentiis obliquis AF & DB. Hinc (§. 37.) rectæ IC continuatio CB dat mediam directionem obliquarum AF, DB, vel, quod idem est, omnium potentiarum *eb*, *db* curvæ AeD applicatarum; ipsa vero IC exponit impressionem secundùm mediam directionem CB ex omnibus applicatis potentiis provenientem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

108. Recta IC producta transit per concursum B tangentium AB, & DB. Protrahatur enim AB in N ut fiat BN = AF, ostendetur DN æqualis & parallela ipsi IC. Nam si per punctum N agantur NM, NO rectis DA vel BE & DE æquidistantes, propter parallelas NO, AG & OB, FG ac (constr.) BN = AF, erunt triangula AFG, NBO similia & æqualia, adeoque NO = ME = AG, totaque DM = DE + AG (constr.) = HC; sic etiam MN = EO = EB − OB = EB − FG (constr.) = IH; idcirco etiam DN = CI, atque propter parallelas DM & CH atque angulos æquales MDN & ICH ipsæ DN & IC parallelæ erunt. Porro quia (constr.) AC : DC = DE : AG vel EM (& propter parallelas EB ac MN) = AB : BN, atque adeo AC : DC = AB : BN, lineæ DN & CB non tantùm sunt æquidistantes, sed etiam DN & IC parallelæ ostensæ sunt; ergo IC & CB in directum positæ sunt, ac proinde ipsa IC producta per concursum B tangentium AB & DB transibit.

Co-

Corollarium II.

109. Hinc AF est ad DB, sicut sinus anguli ABC ad sinum anguli DBC. Nam in triangulo DBN, sinus angulorum NDB, DNB lateribus oppositis NB, DB sunt proportionales, & anguli illi propter parallelas DN & CB angulis DBC, ABC æquantur. Propterea præcedens, & hoc alterum corollarium, hanc facillimam problematis suppeditant constructionem. Producta tangente AB in N, ut ejus continuatio BN sit ad alteram tangentem totam DB, sicut tenacitas curvæ in A, quæ exponitur per rectam AF, ad tenacitatem ejusdem in D, quam exponit DB, recta BC per punctum concursus B tangentium AB, DB transiens & parallela lineæ DN, jungenti puncta D & N, erit media directio quæsita.

Corollarium III.

110. Si tenacitates fili in A & D æquales sint, media directio BC angulum tangentium ABD bifariam dividit. Nam quia AF æqualis DB hoc casu, & AF ad DB, ut sinus anguli DBC ad sinum anguli ABC per præcedens Corollarium, erit omnino anguius ABC æqualis angulo DBC.

Scholion.

111. Corollarium tertium nos manuducit ad novum illud curvarum genus, quod apud Cel. Jac. Bernoulli in Act. Lipsi. 1695. Fig. 31. pag. 548. *Linearum mediarum directionum* nomine venit. Nam si filum aliudve corpus flexile à potentiis *ae*, *Re* &c. in singulis punctis ipsi perpendiculariter applicatis in lineam ERA arcuatur, recta BD angulum ABE à tangentibus curvæ in utroque sui termino formatum bifariam dividens (§. 110.) est media directio omnium potentiarum *ae* &c. toti curvæ ERA applicatarum, & ducta tangente ab per punctum aliud curvæ *a*, recta *b*D, angulum abE bifariam dividens, est media directio potentiarum arcui ERa applicatarum. Jam omnes mediæ directiones BD, bD &c. contingent aliquam curvam CVD, quæ ideò *Linea mediarum directionum* vocatur.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [76] - 48
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XIV. Theorema.

112. *Recta* AD *curvæ* ERA *perpendicularis, mediæ directioni* BD *potentiarum curvæ perpendiculariter applicatarum, occurret in puncto* D *lineæ mediarum directionum* CVD. Fig. 31.

Sit Aa curvæ elementum, & *ab* tangens curvæ in *a*, & bD linea bisecans angulum, *ab*E erit media directio potentiarum arcui curvæ ER*a* applicatarum: unde cum *b* ipsi B infinite vicinum sit, sequitur unam *b*D alteram BD secare in puncto D curvæ quæsitæ. Igitur probandum tantum restat, perpendicularem curvæ AD transire per punctum illud intersectionis D, duarum infinite vicinarum BD, *b*D. Centro quolibet F in tangente BE assumto, & radio FE descripto semicirculo EGH, agantur radii FG tangenti AB, & F*g* tangenti *ab* paralleli, junctisque EG, E*g*, agatur G*m* radio FE parallela, rectæ E*g* productæ occurrens in *h*, & radio Fg prolongato in *m*: denique ductæ sint semicirculi tangens GK in puncto G, & EM eidem tangenti parallela, quæ proinde radio FG perpendicularis erit. Jam quia FG tangenti *AB* parallela est, erit angulus ABH = EFG, & duo FEG & FGE simul æquales angulo *ABE*, seu duplo anguli DBE, quandoquidem BD angulum ABE bifariam dividit, igitur FEG = DBK, unde rectæ BD & GE sunt parallelæ. Pari argumento probatur, parallelas esse *b*D & *g*E. Igitur ducta *m*L parallela ipsi *h*E, vel *g*E, figura AB*b*D & FG*m*L erunt similes, cum compositæ sint ex triangulis similibus AB*b*, BD*b*, & FG*m*, GL*m*. Hisce positis, parallelæ FK & G*m* à media E*h* proportionaliter dividentur, atque adeò G*m* : G*h* = FK : EK (vel propter parallelas ME & GK) = FG : MG. Triangula vero similia GE*h*, & GL*m* (nam per constr. E*h* & L*m* parallelæ sunt) præbent, G*m* : G*h* = GL : GE. Igitur FG : MG = GL : GE; atque adeo FL jungens puncta F, L parallela est rectæ ME, ac proinde LFG est rectus, cum EM perpendicularis sit ipsi FG. Unde propter similitudinem figurarum AB*b*D, & FG*m*L, erit AB : BD = FG : GL, hinc, quia angulus LFG rectus est, angulus DAB itidem rectus erit, atque adeo AD curvæ ERA perpendicularis in A. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

113. Adeoque etiam triangula ADB & MEG similia sunt, ex

quo facile elicitur valor lineæ AD. Nam si FE $= a$, AP $= y$, Af $= dy$, EP $= x$, Pp $= dx$, & Aa $= ds$: erit AB $= xds : dx$; & quia angulus MFE $= a$Af, atque adeò triangula rectangula FME, & Aaf similia sunt, invenietur FM $= ady : ds$; & MG $= (ads - ady) : ds$, tum etiam ME $= adx : ds$; hinc quia MG : ME $=$ AB : AD, invenietur AD $= xds : ds - dy$.

Cl. Jac. Bernoullius (Act. Lipsi. loco supra citato) calculo analytico usus, quem tamen illic non apposuit, reperit AD $= xds^2 + xdyds : dx^2$, ex qua formula nostra paulò simplicior & nonnihil diversa ratione à Bernoulliana ex præcedentibus elicita, nullo negotio derivatur, substituendo tantum loco dx^2 æqualem quantitatem $ds^2 - dy^2$, & numeratorem ac dominatorem dividendo per $ds + dy$.

SECTIO II.

POsteaquam ea, quæ ad æquilibria solicitationum, quibus unum idemque mobile urgeri potest, spectant, excussimus: ipsi etiam motus varie accelerati atque retardati examinari debent, qui ex solicitationibus continue replicatis, & utlibet variabilibus, resultare possunt. Propterea in hac secunda Sectione Motus Corporum acceleratos & retardatos generalissime contemplabimur tanquam oriundos ex solicitationibus continue quidem replicatis, non tamen utique uniformiter, ut in Galilæi systemate, in quo gravia in quacunque distantia à centro gravium eadem gravitatis solicitatione urgeri intelliguntur; sed quacunque ratione variabilibus, sive corpora rectà ad centrum gravium seu solicitationum acceleratricium ferantur, sive in lineis curvis incedant. Hæc igitur Sectio complectetur quæcunque ad motus acceleratos, retardatos, ad motus projectorum in vacuo, quæ ad isochronismum motus corporum in lineis quibuscunque curvis, quæ ad motus pendulorum &c. pertinent, in omni possibili gravitatis, seu solicitationum centralium, hypothesi, demonstrata, methodo non minus universali, quam perspicua atque facili: nam præter solutionem generalem Problematis inveniendi ex lege gravitatis, utlibet variabilis, semitam curvilineam projectorum in spatiis resistendi vi carentibus, tradet etiam hæc secunda Sectio regulam generalem, secundum quam gravitatem variare oportet ad id, ut curvæ projectorum semper algebraicæ, atque adeò geometrica constructibiles evadant, ex qua multa deinceps curiosa atque utilia deducentur.

tur. Theoriam centri oscillationis proponet multo magis quam antea generalem, iis namque corporibus applicabilem, quæ in diversis fluidis oscillantur, vel in quocunque systemate gravitatis variabilis; loco ejus, quod Hugenius, & qui eum sequuti sunt, tantum egerunt de centro oscillationis in casu speciali gravitatis uniformis, excepto solo, quod sciam, Cel. Joh. Bernoulli qui nobis in Act. Lipsi. 1713. pag. 88. regulam generaliorem ex suis principiis eliciendam promittit, sed quæ nondum, ni fallor, lucem publicam aspexit, quamque ex fundamentis, *à nostris diversis*, aut saltem diversa methodo ab incomparabili Geometra erutam existimo, tametsi ipsam regulam nondum vidi. Nec reticendum hanc Sectionem secundam etiam acturam de solicitationibus requisitis ad id, ut mobilia in orbibus mobilibus revolvi queant, & de motu qui dicitur Apsidum; sed diversa ratione ab ea, qua Ill. Newtonus Sect. IX. Lib. I. Princip. Phil. Nat. Math. usus est. Sectionem denique claudet dissertatio de regulis motus ex percussione, quas ex unico fundamento æqualitatis virium ante & post conflictum corporum, nova, ut nobis videtur, ratione deducemus.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis.

DEFINITIONES.

I.

114. PEr vacuum designatur omne medium, quod corpora absque impedimento aut adjumento liberè trajicere possunt, solo suo motu à vi motrice accepto.

II.

115. Si mobilia quæcunque, quæ in lineis rectis feruntur, aut in curvis lineis incedunt, solicitationibus citantur, quarum directiones in aliquo puncto, positione dato, concurrunt, solicitationes ejusmodi vocentur centrales, vel etiam solicitationes gravitatis variabilis. Et punctum positione datum ad quod gravia solicitantur, centrum solicitationum. Solicitationes centrales ab Ill. Newtono vires centripetæ vocantur.

III.

116. Solicitationes continuari vel continue mobili applicari dicuntur, cum corpus in ſingulis ſpatii percurrendi punctis ad motum recens citatur, ſeu, quod idem eſt, à quadam ſolicitatione urgetur.

IV.

117. *Scala ſolicitationum centralium* ſeu *gravitatis variabilis* appellatur quælibet linea curva, ad aliquem axem per centrum ſolicitationum transeuntem relata, cujus ordinatæ axi rectæ ſolicitationes exponunt, quibus mobile in illis axis punctis, per quæ ordinatæ ductæ ſunt, verſus centrum urgetur, ſi ſcilicet corpus in axe feratur; vel, ſi ipſum in curva aliqua incedat, in illis curvæ punctis, quæ cum punctis in axe, per quæ ordinatæ transeunt, à centro ſolicitationum æque diſtant.

V.

118. *Solicitatio* gravitatis *tangentialis* vocatur quælibet ſolicitatio ex centrali derivata, qua mobile, in qualibet curva delatum, juxta directionem tangentis curvæ ſolicitatur.

VI.

119. *Solicitatio* gravitatis curvæ mobili deſcribendæ *perpendicularis*, eſt ea, quæ ex centrali derivatur, cujusque directio ubique curvæ perpendicularis eſt. Hæc ſolicitatio perpendicularis conatui mobilis à directione tangentis recedere nitentis ubique æqualis eſt, alioquī corpus non moveretur in curva, quam deſcribere ponitur, etenim, ſi hac vi perpendiculari conatus à curva receſſorius major eſſet, mobile revera à curva recederet, recederet itidem accedendo magis quam par eſt ad centrum ſolicitationum, ſi minor exiſteret, utrumque contra hypotheſin. Igitur ut conatus receſſorius à curva retundatur & inutilis reddatur, tantam ſolicitationem coërcentem mobili applicari oportet, quantus eſt conatus deſtruendus; adeo ut ejusmodi conatus & ſolicitatio, juxta eandem directionem curvæ perpendicularem, ſed in oppoſitas partes agentes in æquilibrio detineantur impedianturque quominus alterutra ejusmodi ſolicitationum ſuper alteram effectum aliquem ſortiatur, atque adeò mobile curvam, in qua incedere debet, deſerat.

VII.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [80] - 52
PUBLIC DOMAIN

VII.

120. *Scala* ſolicitationum *tangentialium* eſt curva quælibet ad axem per centrum ſolicitationum centralium transeuntem relata, cujus ordinatæ ſolicitationes tangentiales exponunt in curvæ punctis, à centro ſolicitationum tantundem diſtantibus, ac ordinatæ.

121. Feratur mobile M in curva MON, alterumque A in recta AD per centrum D, ad quod ſolicitationes gravitatis centrales diriguntur, atque mobile M ad quodlibet curvæ punctum N delatum urgeatur verſus D ſolicitatione centrali $N\alpha$, & hac eadem ſolicitatione urgeatur etiam mobile A delatum in punctum E rectæ AD, quod punctum E tantum diſtet à centro D, quantum curvæ punctum N, adeo ut ambo puncta N & E reperiantur ubique in aliquo arcu circulari EN centro D deſcripto, ductisque per ſingula puncta axis E, perpendicularibus EB ipſi AD & æqualibus ubique homologis lineis $N\alpha$, per ſingularum puncta B transibit curva ABC, quæ vocatur ſcala ſolicitationum centralium, quoniam quælibet ejus ordinata BE reſpectivæ $N\alpha$ (ſecundùm hypotheſin) æqualis repræſentat ſolicitationem centralem in rectæ AD & curvæ MO punctis E & N centro D æquidiſtantibus. Porrò, quia ſolicitatio cantralis $N\alpha$ in quolibet curvæ MO puncto N (§. 39. 40.) æquipollet lateralibus $N\beta$ & $\beta\alpha$, quarum hæc ſit in directione tangentis curvæ Nq, alteraque eidem perpendicularis $\beta\alpha$, per ſe patet illam, ſcilicet $N\beta$, vocandam eſſe ſolicitationem tangentialem ex centrali $N\alpha$ derivatam; propterea ſi in qualibet ordinata BE reſpondenti cuique $N\alpha$, ſumatur $SE = N\beta$, & idem factum intelligatur reſpectu omnium reliquorum curvæ MON punctorum, reſultabit inde curva RSC, quæ ſcala ſolicitationum tangentialium mobilis M in curva MON audit. Solicitatio perpendicularis $\beta\alpha$ nullam habet ſcalam, vel ſaltem nulla indigemus, quandoquidem in ſingulis punctis deſtruendo conatui receſſorio mobilis M à curva (§. 119.) adhibetur, nec proinde alia ſub ratione in conſiderationem venit. Fig. 32.

VIII.

122. Quoniam ſolicitationes centrales BE æque ac tangentiales SE continuantur, atque in mobili continue replicantur effectu præcedentium in ſuccedentibus non ſublato, quandoquidem per ſingula rectæ AD puncta ordinatæ ejusmodi BE transeunt: neceſſe eſt, ut ab hujusmodi ſolicitationibus indeſinenter replicatis proveniant

motus continue *accelerati*, cum mobilia A, M in recta AD & curva MON descendentia ad solicitationum centrum D accedunt; *retardati* verò cum certis quibusdam celeritatibus, quas *initiales* deinceps nominabimus, ex punctis E & N ascendere incipientia in recta & curva ab eodem centro D recedunt. Propterea solicitationes gravitatis centrales vel tangentiales vocantur *acceleratrices* mobilis in recta vel curva descendentis; eædemque solicitationes vocantur *retardatrices* mobilis ascendentis, vel à solicitationum centro recedentis.

IX.

123. *Momentum cujusque solicitationis* quocunque hæc nomine veniat, est rectangulum sub recta, quæ solicitationem exponit, & elemento spatii quod mobile ejusmodi solicitatione continue urgente transmittit. Sic rec-lum BEe est momentum solicitationis acceleratricis BE vel Nα, durante descensu mobilis A in spatiolo E*e* ordinatæ BE adjacente; rec-lum verò *be*E momentum solicitationis retardatricis *be* mobilis ejusdem in spatiolo eE ascendentis. Sic etiam facta E*m* = N*n* elemento curvæ MON, rec-lum SE*m* vel SE. N*n*, est momentum solicitationis tangentialis & acceleratricis SE vel Nβ; cum mobile in curva per ejus arculum N*n* descendit, & rec-lum *se*. *m*E vel *se*. *n*N est momentum solicitationis tangentialis retardatricis *se*, cum mobile in curvæ arculo *n*N ascendit.

X.

124. *Scala celeritatum* est curva circa axem scalæ solicitationum centralium, vel saltem huic parallelum descripta, cujus ordinatæ ordinatis in scala solicitationum in directum positæ, vel iisdem saltem respondentes, celeritates mobili in illis rectæ *AD*, vel curvæ MON punctis, ad quæ ordinatæ scalæ solicitationum respiciunt, acquisitas exponunt. Sic, si ordinatæ PV, EF &c. scalæ solicitationum ordinatis ZP, BE in directum positæ, significant celeritates acquisitas, vel residuas mobilis descendentis accelerato, vel ascendentis retardato motu in punctis P, E rectæ AD, vel in punctis curvæ O & N &c. Curva AVF erit Scala celeritatum mobili A in recta AD, vel Mobilis M in curva MDN descendentis, vel ascendentis.

XI.

125. *Momentum celeritatis* est factum ex celeritate mobilis in recta

cta vel curva incedentis in celeritatis crescentis vel decrescentis elementum. Si in scala celeritatum AVF, rectangulum EF. *af*, vel rec-lum *eaf* est momentum celeritatis EF elemento *af* crescentis, qua mobile spatiolum E*e*, transmittit, & rectangulum *ef*. *fa* est momentum celeritatis decrescentis *ef*, qua mobile A ex puncto axis *e*, vel in curva MON mobile M ex puncto *n* in altum feruntur retardato motu, & *fa* decrementum infinitesimum celeritatis decrescentis *ef*, cum mobilia ascendunt in spatiolis *e*E & *n*N, & EF celeritas residua erit in rectæ puncto E aut curvæ puncto N.

XII.

126. Ad designandum tempus quo unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristica temporis *t* spatio percurso aut conficiendo præfigenda. Sic *t*AE denotabit tempus, quo mobile A spatium AE accelerato suo motu cadendo absolvit, & *t*E*e* significabit tempus quo elementum E*e* axis AD uniformi motu percurritur. Et sic de reliquis.

POSTULATUM.

127. Petitur ut concedatur, motum descensus ascensusve per axis elementum E*e*, vel curvæ N*n*, sumi posse tanquam uniformem & æquabilem, quoties mobilia A & M hæc spatiorum elementa celeritate finitæ magnitudinis, præ incremento vel decremento ejus infinitesimo percurrere incipiunt, licet motus in iisdem spatiis reapse variati sint, quoniam celeritatum incrementa vel decrementa infinitesima, durante descensu vel ascensu mobilibus A & M superaddita vel ademta, evanescunt præ velocitatibus finitis, quibus corpora *spatiola E*e, *N*n *transmittunt*.

Corollarium.

128. Hinc quia spatia æquabili motu percursa sunt in composita ratione temporum & velocitatum, ipsa tempora, quibus prædicta rectæ vel curvæ elementa percurruntur, erunt, ut hæc elementa applicata ad celeritatem, quâ percurruntur; sic tEe = Ee : EF, & tNn = Nn : EF; unde Ee = EF. tEe, & Nn = EF. tNn.

PRO-

PROPOSITIO XV. Lemma.

Fig. 33. *Anguli rectilinei* VDF *&* TD*m sunt directe ut arcus* VF *&* Tm *qui angulos subtendunt, & reciproce ut arcuum radii* DV *&* DT. Hoc est angulus VDF : ang. $TDm = \frac{VF}{DV} : \frac{Tm}{DT}$. Est enim ang. VDF : ang. TDm = (Tg : DT) : (Tm : DT), atqui ob arcus similes VF & Tg, erit Tg : DT = VF : DV, ergo angulus VDF : angulum FD*m* = (VF : DV) : (Tm : DT). Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

129. Hinc 1°. quilibet angulus VDF exprimi potest arcu VF, qui ipsum subtendit, diviso per radium DV, id est fractione VF : DF. 2°. Quilibet arcus VF est ut factum ex angulo VDF in radium DV, atque adeo hoc facto exprimi potest.

PROPOSITIO XVI. Lemma.

130. *Omnis solicitatio uniformiter agens æquivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iste producitur.*

Dicantur massa corporis movendi M, celeritas acquirenda V, adeoque motus generandus MV, tempus quo produci debet T, solicitatio, à qua uniformiter hoc tempore agente generari debet G, ostendendum, fore G = M. V : T. Cum solicitatio (§. 9.) utpote ex genere vis mortuæ nullum motum producat, nisi aliquo tempore in corpore continuata vel replicata fuerit, atque nunc solicitatio uniformiter agere ponatur, ita ut temporibus æqualibus æquales motûs quantitates in corpore producat, atque adeo motus geniti sint ut tempora, quibus generantur, ex se ipso clarum est, id quod in tempus T ductum producit motum M. V. æquivalere solicitationi G, unde cum M. V : T ductum in T producat M. V, sequitur G = MV : T. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

131. Res universaliter se habet, ut propositio indicat, sive velocitas acquisita & tempus finita aut infinite parva fuerint, modò solicitatio G toto tempore uniformiter agat. Sin verò ea difformiter operetur, propositio generaliter respectu cujuscunque temporis non am-

amplius obtinet; sed duntaxat per temporis tractum indefinite parvum dT, quo mobili tantum celeritas infinitesima dV acquiritur, quia non nisi per tempusculum ejusmodi infinitesimum dT solicitatio variabilis G (§. 127.) tanquam uniformis spectari potest; est ergo hoc casu G = MdV : dT, atque adeò dT = MdV : G. Ubi G significat pondus seu gravitatem utcunque variabilem massæ M.

PROPOSITIO XVII. Theorema.

132. *Momentum solicitationis cujusque æquale est momento celeritatis mobilis ducto in corporis massam.*

Positis iis, quæ in §§. 121, 123 & 125 dicta sunt, ponatur mobile M descendere super curva MON, atque per initium A scalæ celeritatum AVF ducta sit recta AH indefinita, angulum semirectum HAG continens, cum indefinita AG axi AD normali, & per puncta F, f &c. scalæ celeritatum agantur *a*H, *fh* eidem axi æquidistantes rectæ AH, occurrentes in punctis H, *h*, alteri vero AX in punctis G, *g*; ductaque H*i* parallela AG, propter angulum semirectum HAG erunt HG & AG; atque adeò EF æquales, & rec-lum Hg = EF. *af* seu momento celeritatis crescentis. Probandum est, fore M. EF. *af* = N*n*. ES seu momento solicitationis tangentialis ES vel Nβ.

Demonstr. Per §. 131. est *t*N*n* = M. *af* : ES; nam, quæ ibi sunt dT, dV & G, hoc loco dicuntur t*Nn*, *af* & ES vel N$_\beta$, ergo ES. *t*N*n* = M. *af*, vel etiam ES. EF. *t*N*n* = M. EF. af; atqui (§. 128.) EF. *t*N*n* = N*n*, ergo ES. N*n* = ES. E*m* = M. EF. *af* = M. HG*g*. Quod erat demonstrandum.

Similiter si grave A in recta AD deorsum feratur, erit BE. E*e* = A. 2H$_2$G$_2$*g*, ponendo *A* denotare massam corporis, & 2H$_2$G celeritatem in E acquisitam post casum ex altitudine AE, & rectangulum 2H$_2$G$_2$*g* triangulo rectangulo isosceli 2H$_2$A$_2$G inscriptum; momentum velocitatis 2A$_2$G vel 2H$_2$G.

Ratione solicitationum retardatricium habetur etiam *se.n*N = M. *ef.fa* = M. *h*gG, & *be*E = A. 2h$_2$g$_2$G.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

133. *Si duo mobilia* A, M *æqualia, quorum hoc in curva* MON, *illud in recta* AD *feratur, in singulis punctis* E & N *à centro* D *æ-*

qualiter distantibus eadem solicitatione centrali BE *urgentur, erit ubique momentum solicitationis centralis seu rectangulum* BEe *æquale homologo rectangulo* Nn. SE *vel* Nn. Nβ, *quod exponit momentum solicitationis tangentialis in curvæ puncto quolibet* N.

Arcus circuli *epn* centro D descripti secet rectam DN, in puncto *p*, & triangulum N*np* tanquam rectilineum ob suam infinitam parvitatem spectari potest rectangulum ad *p*, atque adeo simile triangulo Nαβ. Idcirco erit Nα vel BE : Nβ (SE) = Nn : Ee (N*p*), & BE. Ee = Nβ. Ee = SE. N*n* = Nβ. N*n*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

134. Hinc si scalæ celeritatum AVF ad punctum F perpendicularis FT ducatur axi occurrens in T, subnormalis ET æqualis ubique erit respectivæ BE, quæ solicitationem centralem exponit in distantiis ED, ND à centro D æqualibus; nam quia TFf rectus est, triangula FTE & F*f*a similia erunt, atque adeò FE : ET = F*a* (Ee) : *af*. Ergo EF. *af* = TE. Ee; atqui (§. 133.) SE. N*n* = BE. Ee & (§. 132.) SE. N*n* = M. EF. af, aut sumta M instar unitatis, = EF. *af*, erit TE. Ee = BE. Ee atque adeò TE = BE.

Corollarium II.

135. In quibuslibet punctorum E, N distantiis æqualibus ED & ND à centro D, momenta celeritatum cadendo acquisitarum erunt æqualia. Nam sicut (§. 132.) AG vel GH celeritatem acquisitam mobilis M in curva MON descendentis, & rectangulum Hg triangulo HAG inscriptum celeritatis momentum in N exponunt, ita etiam 2A2G & rectangulum 2H2*g* triangulo 2H2A2G inscriptum, exponent celeritatem ex descensu mobilis A per spatium AE in puncto E acquisitam, ejusque momentum. Verum (§. 132.) est SE. N*n* = M. EF. *af* = M. HG*g*, item BE. Ee = A. 2H2G2*g*. atque (§. 133.) SE. N*n* = BE. Ee; propterea fiet M. HG*g* = A. 2H2G2*g*, vel quia (secundùm hypothesin) ipsæ M & A æquales HG*g* = 2H2G2*g*.

Propositio XIX. Theorema.

Fig. 32. 136. *Si mobilia* M *&* A *ex punctis* M *&* A *in curva* MON *&* *recta* AD *à quiete cadere incipiant, celeritates ipsorum in punctis* N *&*

& E acquisitæ erunt æquales distantiis punctorum à centro D positis æqualibus, celeritasque uniuscujusque mobilis poterit duplum areæ AZBEA.

Totum spatium AE in innumera elementa, quale est E*e*, divisum cogitetur, & per singulorum terminos arcus ex centro D descripti intelligantur; adeo ut singulis elementis rectæ AE totidem elementa curvæ MON respondeant. Jam cum (§. 135.) ubique momentum celeritatis in curvæ puncto N æquetur momento celeritatis in rectæ puncto E, alteri N à centro D æquidistanti, habebitur semper & ubique $HGg = 2H2G2g$, ergo omnia HG*g*, quæ in triangulo HAG continentur æqualia omnibus $2H2G2g$, quæ in triangulo $2H2A2G$, id est triangulum HAG triangulo $2H2A2G$ æquabitur. Unde cum hæc æqualia triangula similia sint, sequitur latera in illis homologa æqualia esse, atque adeò $AG = 2A2G$; id est celeritates in E & N acquisitæ, quæ per æquales $2A2G$ & AG exponuntur, æquales sunt.

Porrò, quia (§. 132.) $HGg = BE.Ee$ & sic ubique, erunt omnia $HGg =$ omnibus BE.E*e*, atqui omnia rectangula HG*g* componunt triangulum HAG, vel *b*A*g*, quandoquidem motus in A & M punctis nullus est, atque adeò etiam momenta celeritatum in illis punctis nulla sunt, id est cum triangulorum HAG, & $2H2A2G$ verticibus A & 2A confunduntur, & in illis, ut ita dicam, nullescunt: omnia verò rectangula elementaria BE*e*, quæ in tota area AAZBE continentur, huic areæ ultimò æqualia fiunt, atque adeò area AAZBE æquatur ubique triangulo homologo HAG, & duplum areæ illius duplo hujus trianguli, sed hoc trianguli duplum æquale est quadrato lateris AG vel GH, quoniam hoc triangulum rectangulum *isosceles* est; ergo $AG^2 = 2.AAZBE$, vel quia AG æqualis est EF, $EF^2 = 2.AAZBE$, id est celeritas in E vel N acquisita potest duplum areæ AAZBE. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

137. Pariter si corpora A & M in curva & recta ex punctis O & P celeritate æquali cadere incipiant, & quidem ea, quam mobile A spatium AP à quiete perlabens in puncto P acquirere potest; eadem corpora in quibusvis aliis punctis N & E, à centro sollicitationum æquidistantibus, æqualem celeritatem acquirent, tantam scilicet quantam mobile A, in hoc puncto A casum à quiete incipiens,

lapsu accelerato per spatium AE in puncto E acquirere posset. Nam quia (§. 135.) generaliter est $HGg = 2H_2G_2g$, erunt etiam nunc omnia HGg æqualia omnibus $2H_2G_2g$, verùm hoc casu omnia HGg sunt ea, quæ soli trapezio YXGH inscripta sunt, ducta scilicet per V recta VY axi AD parallela, quia celeritas, qua mobile M ex curvæ puncto O moveri incipit, non est nulla; sed (secundùm hypothesin) æqualis PV seu AX vel XY, atque adeo nunc omnia HGg æquantur trapezio YXGH, & eandem ob rationem omnia $2H_2G_2g$ æquantur trapezio $2Y_2X_2G_2H$, quoniam mobile A casum suum in puncto P cum celeritate $2X_2Y$ (secundùm hypothesin) æquali XY vel AX incipit; æquantur igitur hæc trapezia YXGH & $2Y_2X_2G_2H$; verùm quia (secundùm hypothesin) celeritas in P eadem est cum celeritate in O, & illa tanta est quanta mobili ex A in P cadenti illic in P acquiri potest, sequitur triangula AXY & $2A_2X_2Y$ itidem æqualia esse, & addendo hisce æqualibus triangulis trapezia illa æqualia YXGH, & $2Y_2X_2G_2H$, fient etiam triangula AGH & $2A_2G_2H$ æqualia; unde cum eadem & similia sint, necessum est, ut latera AG & $2A_2G$ æquentur, atque adeò liquet celeritates in N & E acquisitas mobilibus ex punctis O & P, à centro D æquidistantibus cum celeritate PV vel AG casum incipientibus, æquales esse cum inter se, tum celeritati EF in E acquisitæ (§. 136.) post casum à quiete in A, per spatium AE, quæ potentiâ æquetur duplo areæ AAZBE.

Corollarium II.

Fig. 37. 138. Propterea, si mobile quoddam A secundum quamlibet directionem datam AR impulsum celeritate ea, quam idem mobile spatium HA à quiete in H perlabens acquireret in A, & solicitationibus ordinatis curvæ GBb expressis ad centrum D continue ipsum urgentibus curvam AN*n* in vacuo describat, celeritas ejus in quolibet curvæ projectionis puncto N ea erit, quam corpus ex H à quiete cadere incipiens in linea recta HD accelerato suo motu acquirere posset in puncto E, cum altero in curva N æqualiter à centro D distanti.

Corollarium III.

Fig. 32. 139. Si corpora ex curvæ & rectæ punctis *n* & *e* à centro D æquidistantibus celeritate initiali *ef*, quam post descensum per curvam

vam MO*n* & rectam A*e* in punctis M & A motum à quiete incipientia accelerato motu illic in *n* & *e* acquirere queunt, in altum ferantur; illa in quibusvis aliis punctis O & P eidem centro D æquidistantibus celeritates residuas æquales habebunt, tantam scilicet, quantam in illis punctis O & P acquisivissent, si accelerato motu à quiete in M & A incipiente in curvæ arcu MO & recta AP descendissent. Nam quia mobilia ascendunt, atque adeò à centro solicitationum BE deorsum ad hoc centrum urgentium recedunt, tam hæ *solicitationes centrales BE*, quam tangentiales SE vel *N*β, quæ ex illis derivantur (§. 122.) nunc spectandæ sunt tanquam solicitationes *retardatrices*. Earum tamen momenta *be*. *e*E & *se*. *n*N (§. 133.) erunt æqualia, & per §. 132. huic æquatur suum momentum *hg*. *g*G celeritatis decrescentis *hg*, illi verò celeritatis 2*h*2*g* momentum 2*h*2*g*. 2*g*2G, propterea hæc ipsa celeritatis decrescentis momenta sunt æqualia, & hoc respectu cujuslibet alius curvæ elementi *n*N omnium eorum, quæ in curvæ arcu *n*O, & homologi elementi *e*E rectæ DA, omnium eorum, quæ in hujus rectæ segmento *e*P continentur. Hinc etiam universa *hg*. *g*G, quæ in trapezium *hg*XY desinunt, æquabuntur universis 2*h*2*g*. 2*g*2G, quæ trapezio 2*h*2*g*2X2Y circumscripta in hoc trapezium desinunt, id est, hæc duo trapezia æqualia erunt. Unde, si ex triangulis *hg*A & 2*h*2*g*2A, quæ ob celeritates initiales *Ag* & 2A2*g* in *n* ac *e* (secundùm hypothesin) inter se æquales etiam æqualia sunt, auferentur trapezia illa æqualia *hg*XY & 2*h*2*g*2X2Y, remanebunt triangula æqualia YAX & 2Y2A2X, in quibus, utpote similibus, latera homologa AX & 2A2X æqualia existent, atqui hæc æqualia latera celeritates in O & P mobilibus ascendentibus residuas exponunt, quæ velocitates proinde æquales sunt, & unaquæque earum (§. 136.) ea est, quæ mobili ex A à quiete descensum incipienti acquireretur in P, utpote quæ potest duplum areæ AAZP, dum celeritas initialis *ef* potest duplum areæ AAZ*be*. Propterea GX & 2G2X sunt initialis velocitatis partes *amissæ*, vel à solicitationibus centralibus Be, BE &c. in ascensu mobilium *absorptæ*, adeò ut corporum ad curvæ & rectæ puncta M & A ascendendo delatorum motus ascensionalis penitus extinguendus sit, cum celeritates *absorptæ g*A & 2*g*2A initialibus æquales sint.

Corollarium IV.

140. Hinc mobilia ascendentia cum celeritatibus initialibus quibuscunque successive omnes celeritatis gradus servant in illis ipsis lineæ percurrendæ punctis, in quibus cadendo hos celeritatis gradus acquisiverunt. Sic mobile cum celeritate *ef* ascensum in *e* incipiens, in reliquis spatii *e*A ascensu conficiendi punctis E, P, A easdem celeritates retinet, quas in puncto A casum inchoans descensu suo accelerato acquisivisset, in iisdem punctis scilicet, celeritates EF, PV & o. Quod etiam de mobili in curva MON ascendenti intelligendum est.

Corollarium V.

141. Hinc etiam in omni possibili solicitationum centralium hypothesi; *corpora rectà in altum lata, vel in curvis quibuscunque ascendentia, ad eam ipsam altitudinem in vacuo assurgunt, quam, ubi descendendo percurrunt, celeritatem acquirunt initiali æqualem.*

Corollarium VI.

142. Si centrum solicitationum gravitatis D infinite distat à recta AG, arcus concentrici AM, PO, EN &c. abibunt in lineas rectas in directum positas ordinatis AA, ZP, BE scalæ solicitationum centralium, unde quæ universaliter in antecedentibus ostensa sunt, etiam obtinebunt in hoc casu, quo gravium directiones rectæ AG perpendiculares vel axi AD parallelæ sunt. Adeoque *celeritates in diversis planorum* (adde & *curvarum* continuam curvaturam habentium) *inclinationibus descensu acquisitæ, æquales sunt in omni gravitatis variabilis & uniformis hypothesi, si planorum vel curvarum elevationes æquales fuerint, vel quod idem est, si planorum horizontalium per terminos planorum inclinatorum vel curvarum transeuntium distantiæ æquales fuerint.*

Hoc ipsum corollarium Torricellius primus geometrice suo more demonstravit, & post ipsum Hugenius in suo Horologio Oscillatorio Parte secunda Prop. VI. sed ambo tantum in Galilæana hypothesi gravitatis uniformis atque demonstrationibus indirectis. Galilæus vero id in prima Dialogorum editione tanquam per se evidens sibi concedi postulavit; sed quia hoc forte magnum postulatum ipsi postea visum, id in posteriori operum suorum editione 1656. Bo-

no-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [90] - 62
PUBLIC DOMAIN

noniæ facta utcunque demonstrare tentavit; sed ejus demonstratio, quæ ibi affertur, Hugenii judicio parùm concludit.

Scholion I.

143. In hac propositione, perinde ac in antecedente XVIII. mobilia æqualia ponuntur tam ratione quantitatis materiæ quam ratione texturæ particularum, vel quod idem est, corpora M & A, quoad volumen & massam, æqualia esse debent, ut recensitæ propositiones generaliter obtineant, scilicet eo etiam casu, quo eorum pondera in æqualibus à centro solicitationum D distantiis proportionalia non sunt. Semper enim verum erit celeritates in E & N acquisitas post descensus corporum à quiete in A & M, per spatia AE & MON æquales esse, sive massæ corporum eorum gravitatibus seu solicitationibus centralibus aut ponderibus proportionales sint, sive non.

144. Sed si mobilia M & A massas non habent ponderibus suis proportionatas, nec pondere & massa æqualia sunt, propositio præsens ad talia corpora non est extendenda; hoc enim casu prædictæ celeritates, in punctis illis N & A acquisitæ, non sunt æquales, sed velocitas in curvæ puncto N se habebit ad velocitatem in rectæ puncto E acquisitam, ut latus quadratum areæ AABE, cujus ordinatæ BE gravitates seu solicitationes centrales mobilis M, in curva MON discurrentis, exponunt in homologis punctis N, applicatum ad radicem massæ mobilis M; ad latus quadratum areæ A_3A_3BE, cujus ordinatæ E_3BE exponunt gravitates corporis A in locis quibusvis E, per quæ ordinatæ transeunt, applicatum ad radicem massæ seu quantitatis materiæ mobilis A, quod in recta AD fertur. Nam si, ut supra, latus AG vel æquale GH in triangulo rectangulo isosceli HAG, celeritatem mobili M ex descensu per arcum curvæ MON in puncto N acquisitam, & latera æqualia $2A_2G$ vel $2H_2G$ trianguli rectanguli isoscelis $2H_2A_2G$ celeritatem mobilis A ex casu ejus per spatium AE in puncto rectæ E acquisitam, exponant, erunt velocitatum AG, $2A_2G$ momenta rectangula HGg & $2H_2G_2g$ triangulis illis inscripta &, per §§. 132. 133, erit $BE.Ee = SE.Nn = M.HGg$, ergo omnia $BE.Ee$, hoc est, ut in demonstratione articuli 136. ostensum, area AAZBE æquatur omnibus $M.HGg$, id est facto ex massa corporis M in triangulum, atque adeò $AG^2.M = 2.AAZBE$ & $AG = GH = EF = \sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$. Et (§. 132.) est pariter $3BE.Ee = A.2H_2G_2g$, atque adeo omnia $3BE.Ee$,

Ee vel omnia $E_3B.Ee$, hoc eſt, area A_3A_3BE æquatur omnibus A. $2H_2G_2g$ id eſt facto ex triangulo $2H_2A_2G$ in corporis maſſam A; ergo etiam $2A_2G = 2H_2G = \sqrt{(2.A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$. Adeoque AG eſt ad $2A_2G$, hoc eſt, celeritas acquiſita mobili M in curvæ puncto N eſt ad celeritatem mobili A in rectæ puncto E alteri à centro D æquidiſtanti acquiſitam, ſicut $\sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(2.A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$, vel etiam, ſicut $\sqrt{(AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(A_3A_3BE)} : \sqrt{A}$, hoc eſt, dictæ velocitates ſunt in compoſita ratione ex directa ſubduplicata proportione areæ AAZBE ad aream A_3A_3BE, & ex reciproca ſubduplicata ratione maſſæ M ad maſſam A. Atqui hæc ratio compoſita æqualitatis ratio fieri non poteſt, niſi area AAZBE fuerit ad aream A_3A_3BE, ut maſſa M ad maſſam A; id eſt, niſi pondera mobilium ipſorum maſſis proportionalia fuerint. Etenim area AAZBE ad aream $A_3A_3Z_3BE$ in eadem altitudine AE non poteſt eſſe in data ubique ratione maſſæ M ad maſſam A, niſi ſingulæ ordinatæ BE ſint ad ſingulas homologas ordinatas 3BE in eadem ratione M ad A, atque adeò cum BE & 3BE exponant pondera corporum M & A, in diſtantiis ND & ED à centro D æqualibus, liquet celeritates in N & E acquiſitas æquari non poſſe, niſi pondera corporum M & A in æqualibus à centro gravium diſtantiis maſſis ipſorum proportionalia ſint.

Scholion II.

145. Hactenus oſtenſa circa motus gravium adeò generalia ſunt, ut ea non ſolum omnia, quæ circa motus quomodocunque acceleratos excogitari poſſunt, attingant; ſed etiam facili negotio oſtendant quænam hypotheſes poſſibiles ſint, & quas vice verſa natura ferre recuſet. Nam, ut ab his incipiam, *omnis ſolicitationum ſeu gravitatis hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt*, cujus ſcala per deſcenſus initium tranſit, adeo ut illic ordinata ejus nulla ſit; cujus rei ratio, me etiam tacente, ſatis in propatulo eſt. Mobile enim quieſcens, quod grave non eſt, ſeu à nulla ſolicitatione centrali citatur (quod contingit in puncto, in quo ſcala ſolicitationum rectæ, in qua mobile cadere deberet, occurrit) non poteſt ſe ipſum movere. Verum hæc ipſa impoſſibilitas etiam in conſideratione temporis ſe manifeſtat, quo aliquod ſpatium deberet percurri in imaginariis ejusmodi hypotheſibus, quandoquidem ad percurrendum ſpatium quantumlibet parvum requireretur in hisce hypotheſibus tempus infinitum,

tum, quod usu formularum ex præcedentibus mutuo sumendarum quilibet poterit experiri. Gravitas utlibet variabilis dicatur g, spatium perpendiculariter à corpore cadente describendum x, tempus quo percurri debet t, velocitas in fine hujus temporis acquisita u; elementa spatii, temporis, & velocitatis dx, dt & du, quibus positis (§. 132.) erit prima formula $gdx = udu$, & (§. 131.) habetur $dt = mdu : g$, ubi m significat massam mobilis & g ejus pondus: quoniam vero mobile cum nullo alio comparatur, sed ejus tantum motus exquiruntur, loco ipsius m unitas poni potest, eritque $dt = du : g$. Secunda formula.

146. Sint nunc celeritates acquisitæ, ut spatia confecta, ut vult Balianus, id est $u = x$, & $uu = xx$ ac $udu = xdx$, eritque propter $gdx = udu$, etiam $gdx = xdx$ id est $g = x$, ergo existente $x = 0$ erit etiam $g = 0$, ergo in principio descensus gravitas mobilis nulla foret, atque adeò ipsum per spatium x nunquam delabi posset. Porro, quia secunda formula $dt = du : g$ & $g = x$, præbent $dt = dx : x$, unde $t = \log. x$, jam existente $x = 0$, & log. ipsius 0 infinito, quod per ∞ significabimus, erit $t = \infty$, hoc est, infinitum tempus requiritur ad percurrendum ab initio nullum spatium, adeoque grave ibi perpetuo quiescet, & consequenter Baliani hypothesis impossibilis & imaginaria est. Hoc ipsum alia adhuc ratione ostendi in Actis Lipsi. 1709. pag. 404. seq.

147. Si celeritates acquisitæ u sunt ut x^m, ubi m est quilibet numerus integer & positivus index potestatis spatii, cui celeritas proportionatur, fiet $uu = x^{2m}$ & $udu = mx^{2m-1}dx = gdx$, atque adeò $g = mx^{2m-1}$, atqui existente $x = 0$, erit etiam $mx^{2m-1} = g = 0$, ergo ejusmodi hypothesis impossibilis & imaginaria est.

Porrò $dt (= du : g = mx^{m-1} : mx^{2m-1}) = dx : x^m$. Verum juxta articulum 92. summationem ineundo, invenietur $t = (\infty^{m-1}, -x^{1-m}) : m-1 = \infty^{m-1} : m-1$. Hoc est, tempus descensus per minimam quamcunque altitudinem est in hac hypothesi, ut potestas infiniti ∞, cujus exponens est numerus integer $m-1$. Ergo hæc hypothesis, multo magis quam præcedens, imaginaria est & impossibilis.

Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus, dispiciendum restat, quid ex una alteraque gravitatis hypothesi sequi debeat.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [93] - 65
PUBLIC DOMAIN

HYPOTHESIS I.

Fig. 33. 148. *Si ſolicitationes gravitatis ſint ut diſtantiæ à centro gravium* D, *earum ſcala erit linea recta* QCD *per centrum* D *ducta cum axe* AD *angulum quemlibet* QDA *continens, & ſcala celeritatum linea elliptica* ASR, *cujus ſemiaxis transverſus eſt* AD, *& ſemiſſis axis conjugati* DR *par mediæ proportionali inter* DA *vel æqualem* Aa, *&* QA. Nam deſcripto circa centrum D quadrante circuli AVL, ductisque aL, & BEF parallela DL vel aA; quia DR (conſtr.) media eſt proportionalis inter DL vel aA & QA, erit propter Ellipſin ASR; $EF^2 : ES^2 (= aA : QA) = 2$. trapezii aBEA ad 2. trap. QCEA; atqui duplum trapezii aBEA eſt exceſſus quadrati AD vel DF ſupra quadratum DE, atque adeo æquatur EF^2; ergo æquantur etiam duplum trapezii QCEA, quod eſt duplum areæ in ſcala ſolicitationum centralium QCD, & quadratum ES, atque adeò (§. 136.) ES exponit celeritatem acquiſitam in E ex deſcenſu per AE; ergo ellipſis ASR eſt ſcala celeritatum acquiſitarum. Quod erat demonſtrandum.

149. *Si fiat angulus* X *ad angulum* ADF, *in ratione* DL *ad* DR, *ipſe angulus* X *exponet tempus deſcenſus mobilis per* AE, hoc eſt $X = tAE$. Sit enim x elementum ipſius X homologum elemento anguli ADF, quod eſt angulus FDf, ducta ſcilicet *bf* alteri BF indefinite vicina. Erit ergo x : FDf = DL : DR = EF : ES, ergo x. ES = EF. ang. FAf, vel x. ES. DF = EF. DF. ang. FDf, atqui (§. 129.) DF in ang. FDf exprimit arculum Ff, ergo x. ES. DF = EF. Ff, at verò FE. Ff = DF. Ee, quod ex ſimilitudine triangulorum Ffa & FDE facile colligitur, igitur x. ES. DF = DF. Ee, vel deleta DF, erit x. ES = Ee, & x = Ee : ES. Verum (§. 128.) Ee : ES = tEe, ergo x = tEe, atque adeò omnes x hoc eſt X = omnibus tEe, hoc eſt tAE. Quod erat demonſtrandum.

Hinc ducto quolibet radio DV, qui quadrantes concentricos AVL & ETK ſecet in V & T, ductisque arcuum AV & ET ſinibus VW & Te (per accidens eſt, quod Te cadat ſuper *bf*, res utcunque aliter ſe habere poteſt) ſpatia AW & Ee eodem tempore à mobilibus æqualibus A & E ſimul cadere incipientibus, deſcribentur; eodemque tempore ambo ad centrum D pervenient.

HY-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [94] - 66
PUBLIC DOMAIN

HYPOTHESIS II.

150. *Si Gravitas corporum ubique uniformis est, ut in Galilei hypothesi, scala Celeritatum erit Parabola conica, cujus abscissæ axis spatia mobili percurrenda, & ordinatæ celeritates acquisitas exponunt: Eruntque propterea celeritates in subduplicata ratione spatiorum confectorum.* Fig. 34.

Nam scala solicitationum gravitatis erit, hoc casu, recta βC axi AC parallela, atque adeò (§. 144.) $2.A\beta.AE:M=EF^2$, ubi M denotat massam mobilis, $A\beta$ ejus pondus, & AE spatium cadendo confectum, atque EF celeritatem acquisitam. Unde ob constantem $A\beta$ scala celeritatum est parabola conica, atque adeo spatia mobili descripta sunt ut quadrata celeritatum acquisitarum, & hæ velocitates in subduplicata ratione spatiorum. Parameter verò Parabolæ est $2.A\beta:M$.

151. *Tempus verò quo spatium quodlibet* AE *cadendo conficitur est* 1°. *ut duplum spatium* AE *applicatum ad celeritatem* EF *hoc tempore acquisitam.* 2°. *Ut radix ex facto massæ corporis in duplum spatium applicato ad mobilis pondus seu gravitatem. Et denique* 3°. *ut factum ex Massa corporis in celeritatem acquisitam applicatum ad gravitatem ejusdem corporis.* Signetur, ut antea, tempus per AE, per tAE.

Jam (§. 131.) $tEe=M.af:A\beta$, ergo summando $tAE=M.EF:A\beta$, quod est tertium. Porrò quia $tAE=M.EF:A\beta$, erit etiam $=M.EF^2:EF.A\beta$ (§. 150.) $=2.A\beta.AE:A\beta.EF=2.AE:EF$. Et hoc est primum. Denique, quia ordinata parabolæ est ad dimidium parametrum in subduplicata ratione dupli abscissæ ad semissem parametri, erit $tAE(=M.EF:A\beta)=\sqrt{(M.2AE:A\beta)}$. Quod erat secundum.

152. Idcircò, vocando duorum mobilium massas M, *m*; gravitates seu pondera G, *g*; spatia cadendo descripta S, *s*; & denique tempora descensuum T, *t*. Erit $T=\sqrt{(2MS:G)}$ & $TT=2MS:G$, vel $G.T^2=2.M.S$; & $gtt=2ms$. Adeoque, si spatia ab ambobus mobilibus diversis temporibus confecta sunt in duplicata ratione temporum, corporum pondera massis eorum proportionalia erunt; nam si $TT:tt=S:s$ erit $T.^2s=tt\,S$; adeoque $G.T^2=2.MS$ fiet $tt.GS:s=2.MS$, vel $Gtt=2.Ms$, seu $gtt=\frac{2.gM}{G}=2ms$, adeoque $gM=Gm$, vel $G:g=M:m$.

Propterea hujus paragraphi ope secunda Propositio per experimenta confirmari potest. Videatur §. 30.

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypothesi.

PROPOSITIO XX. Lemma.

153. *Si magnitudinis continue crescentis (cujus prima magnitudo* AI *ea dicitur, à quâ crescere incipit) incrementum infinitesimum* Ff *semper fuerit ad decrementum* qr, *alterius decrescentis* Dq, *cujus prima magnitudo, à qua scilicet decrescere incipit, sit* DR, *sicut crescens* EF *ad decrescentem* Dq, *erit crescens* EF *ad suam primam magnitudinem* AI, *ut decrescentis prima magnitudo* DR *ad ipsam decrescentem* Dq.

Fig. 35.

In Fig. 36. circa axem DR descripta sit aliqua curva IF, cujus abscissæ Dq, DR decrescentem primamque ejus magnitudinem referant, ordinatæ verò FE & IA, crescentem ejusque primam magnitudinem, ut adeò signa q, E ad idem punctum pertineant perinde ac signa A, R. Per curvæ punctum F tangens FO ducta sit axi occurrens in O, factaque ordinata *fe* alteri FE infinite vicina, erit *fa* crescentis FE incrementum, & *Fa* vel *qr* seu *Ee* decrementum infinitesimum decrescentis Dq. Eritque adeo (secundùm hypothesin) $fa : qr = FE : Dq$. Verùm triangula similia faF, FEO præbent etiam $fa : qr = FE : EO$, ergo $FE : Dq = FE : EO$, atque adeo $Dq = EO$; hinc producta tangente OF, erit etiam $OF = FS$. Est ergo punctum contactus F ubique in medio rectæ OS, angulum rectum SDO subtendentis, ut adeò per conversam Prop. III. Secundi Conicorum Apollonii curva IF Hyperbola sit inter asymptotas SD & DO, atque adeo EF sit ad AI, sicut DR ad Dq. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

154. *Existentibus* GBb *scala solicitationum centralium &* AIF *scala celeritatum mobili, ex quiete in* H *in recta* HD *cadere incipienti, acquisitarum; atque hoc ipsum mobile in directione* AR *celeritate* AI *propulsum, quam grave post casum ex altitudine* HA *in* A *acquirere potest, urgentibus solicitationibus illis centralibus per ordinatas curvæ* GB *significatis, curvam quandam* AN *in Vacuo describat. Erit* FE

seu

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [96] - 68
PUBLIC DOMAIN

seu celeritas mobilis in quolibet curvæ puncto N *potentia æqualis rectangulo sub radio* nZ *circuli osculatoris in hoc puncto, & sub* $\beta\alpha$ *quæ solicitationem curvæ perpendicularem ex centrali* Nα *vel* BE *derivatam significat.* Hoc est, $EF^2 = nZ.\beta\alpha$.

Fig. 37.

Mobile A projectum secundum AR celeritate AI describens curvam AN in ejus puncto N (§. 138.) acquiret celeritatem EF, quam idem mobile in puncto E, æque remoto à centro D, ac curvæ punctum N, consequutum esset post lapsum ex altitudine HE, atque hac celeritate EF *in directione tangentis* curvæ Nq æquabili motu incedere conatur, verùm à solicitatione centrali Nα vel EB durante tempusculo quam minimo uniformiter agente indesinenter à directione Nq retractum in curva N*n* detinetur, adeò quidem ut lineola *gn* ipsi ND parallela sit spatiolum à solicitatione respectu curvæ elementi N*n* uniformi Nα vel BE genitum, atque adeo (§. 151.) tempus, quo grave quoddam tale spatiolum à gravitate Nα conficeret, foret $\sqrt{(2gn : N\alpha)}$ sumta mobilis massa A instar unitatis; at verò eo tempore, quo *gn* à solicitatione centrali generatur, mobile in tangente describit æquabili motu celeritate EF spatiolum Ng vel N*m*; quod tempus (§. 128.) est etiam $Nm : EF$; ergo $\sqrt{(2gn : N\alpha)} = Nm : EF$, atque adeò $2gn : N\alpha = Nm^2 : EF^2$, vel etiam $2gn.nZ : N\alpha.nZ = Nm^2 : EF^2$, & permutando, $2gn.nZ : Nm^2 = N\alpha.nZ : EF^2$. Atqui considerando elementum curvæ N*n* instar arculi circuli osculatoris centri Z, cujus N*m* tangens, erit $Nm^2 = 2nZ.nm$ vel $= 2mn.nZ$, ergo $2gn.nZ : 2mn.nZ\ (Nm^2) = gn.nZ : mn.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$; vel substitutis loco lineolarum *gn*, & *mn*, rectis Nα, $\beta\alpha$, quæ ipsis propter triangulorum N$\alpha\beta$ & *gnm* similitudinem proportionales sunt, fiet $N\alpha.nZ : \beta\alpha.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$. Ergo $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII. Theorema.

155. *Iisdem positis, erit celeritas projectionis* AI *ad celeritatem mobilis in curvæ puncto* N, *reciproce, ut perpendicularis* Dq *super tangente* Nq *in curvæ puncto* N, *ad perpendicularem* DR *ex centro* D *ad directionem jactus* AR *ductam. Atque adeò singula rectangula* Dq.EF; *dato rec-lo* DR. AI *æquabuntur.*

Fig. 37.

Nam ductis per punctum *n* tangente *ns*, & arcu circulari *ne* ex centro D descripto, ac denique ordinata *ef*, jungatur NZ, & ad tangentem curvæ *ns* demittatur perpendicularis Ds. Quibus positis,

erit Nβ solicitatio tangentialis, ejusque momentum (§. 132.) æquatur momento velocitatis in N acquisitæ, atque adeò Nβ. Nm vel Nn = EF. af; & quia (§. 154.) $EF^2 = nZ.\beta\alpha$, fiet EF. af : EF^2 = Nβ. Nm : nZ. βα. vel substitutis loco Nβ, & βα proportionalibus Nq & Dq, & loco Nm & mZ vel nZ proportionalibus qr & hq vel Nq, invenietur EF. af : EF^2 = Nq. qr : Nq. Dq. Nam quia ZN & Zn tangentibus Nq & ns perpendiculares sunt, anguli NZn & ghs, quem tangentes continent, necessariò æquales sunt; atque adeò triangula NZm & qhr ad N & q rectangula similia sunt, ac lateribus Nm & NZ vel nZ proportionalia, latera homologa qr & hq, vel Nq in triangulo qhr. Verum in postrema analogia deletis EF ex primo & secundo, & Nq ex tertio & quarto terminis, fit af : EF = qr : Dq & permutando af : qr = EF : Dq, id est incrementum crescentis FE est ad decrementum decrescentis Dq, sicut ipsa crescens ad decrescentem, adeóque erit (§. 153.) crescens FE ad suam primam magnitudinem AI, sicut decrescentis Dq prima magnitudo DR ad decrescentem, & invertendo, AI celeritas jactus est ad EF celeritatem mobilis in quolibet curvæ puncto N, ut perpendicularis Dq ad DR. Propterea erunt singula rectangula FE. Dq æqualia dato AI. DR. Quæ erant demonstranda.

Corollarium I.

156. Quia EF : AI = DR : Dq, vel $EF^2 : AI^2 = DR^2 : Dq^2$, & $EF^2 = \beta\alpha . nZ$, erit $\beta\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 : Dq^2$. sed $\beta\alpha . nZ : N^\alpha . nZ = \beta\alpha : N\alpha = Dq : DN$ vel invertendo, $N\alpha . nZ : \beta\alpha . nZ = DN : Dq$: ergo ex æquo & per compositionem rationum invenietur $N\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 . DN : Dq^3$, atque adeò $N^\alpha = AI^2 . DR^2 . DN : nZ . Dq^3$; ergo solicitatio centralis in quolibet curvæ puncto N est ut $DN : nZ . Dq^3$. Ut Celeberrimi viri Joh. Bernoulli, Abr. Moyvræus, & Guido Grandus invenerunt, insistentes omnes principio isti, quòd tempora lationum in curvis sunt areis proportionalia, quod nos nondum supposuimus; sed in sequenti Corollario ex positis fundamentis nostris deducemus.

Corollarium II.

157. Erit jam tempus, quo quilibet arcus curvæ AN describetur, id est tAN = areæ ADN : ½ AI. DR. Nam (§. 128.) est EF. tNn = Nn; & Dq. EF. tNn = Dq. Nn = 2. trianguli NDn, atqui (§. 155.)

Dq.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [98] - 70
PUBLIC DOMAIN

$Dq.EF = AI.DR$, ergo $AI.DR.tNn = 2$ trian. NDn atque adeo $\int AI.DR.tNn = AI.DR.tAN = 2\int NDn = 2$. areæ ADN, hinc tAN = areæ $ADN : \frac{1}{2} AI.DR$. Atque hinc liquet tempora quibus diversi arcus AN, An describuntur, areis homologis AND, $ANnD$ proportionalia esse; prout Illustris Newtonus id primus demonstravit Prop. I. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* sed ex diversissimo fundamento.

Scholion.

158. Elegans est formula corollarii ~~secundi~~ primi, quod valorem solicitationis centralis in qualibet curva exhibeat quantitatibus finitis expressum; sed quia valor radii evolutæ eandem ingreditur, id efficit, ut nonnunquam paulo prolixior evadat calculus. Propterea mallem in praxi sequi canonem $g = dp : p^3 dz$, in quo g significat gravitatem seu solicitationem centralem, p perpendicularem ex centro solicitationum ad tangentem curvæ in dato puncto demissam, & z radium rectorem, seu distantiam puncti curvæ, in quo solicitationis centralis quantitas quæritur à centro. Demonstratio ejus facilis est, etenim ponendo rectangulum $AI.DR = 1$, fiet etiam $FE.Dq = 1$, id est vocando insuper FE, u, cum Dq jam dicta sit p, erit $pu = 1$ & $ppuu = 1$, vel $uu = 1 : pp$, atque adeò $udu = -dp : p^3$. Jam quia momentum celeritatis æquatur momento solicitationis centralis $-gdz$ (pono autem $-dz$, quia crescente u decrescit p, & per consequens z, atque adeò ipsi $+du$ homologa dz debet habere signum privativum) hinc $-gdz = -dp : p^3$, & $g = dp : p^3 dz$.

159. Usus hujus formulæ satis expeditus est; nam ex æquatione curvæ datæ quæritur valor ipsius p in z & constantibus; cujusmodi determinatione etiam opus est in formula supra laudata. Exempli gratia in hyperbola & ellipsi reperitur sequens æquatio $pp = ccz : 2a \pm z$, ubi a denotat semilatus transversum, b distantiam centri sectionis ab alterutro foco, & $cc = bb - aa$ in hyperbola, & $cc = aa - bb$ in ellipsi. In denominatore fractionis superius signum hyperbolam, ellipsin vero inferius respicit. Igitur $1 : pp = (2a \pm z) : ccz = 2a : ccz, \pm 1 : cc$, & differentiando, erit $-2dp : p^3 = -2adz : cczz$, & $g = 2dp : 2p^3 dz = a : cczz$; vel omissa data $a : cc$, erit g ut $1 : zz$; hoc est solicitatio centralis, ad focum sectionum Conicarum directa, est ubique ut quadratum distantiæ mobilis à foco inverse, quod jam passim constat ex aliis.

160. Porro si elementum curvæ Nn dicatur ds, arculus pn, dt, reli-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [99] - 71
PUBLIC DOMAIN

reliquis manentibus, ut supra, (§. 158) Triangula similia Nnp & NDq suppeditant $p = zdt : ds$, atque adeò $g = dp : p^3dz = (ds^2dtdz + zds^2ddt - zdsdtdds) : z^3dt^3$. Quæ formula non, nisi in nominibus, differt à formulis Varignonianis, quales in Commentariis Academiæ Regiæ Paris. Scientiarum 1701. & 1706. habentur, in quibus non magis quam in præsenti ullum differentialium dt, dz, ds constans assumtum est, sed omnia variabilia.

161. Eadem facilitate habetur, aut saltem invenitur insistendo principiis supra positis, formula admodum expedita & generalis pro radiis evolutarum. Nam triangula NZm & qhr, quæ supra (§. 155.) similia esse ostensa sunt, præbent hq vel $Nq : qr = NZ : Nm$, & triangula similia Nnp, ac NqD hanc alteram analogiam $ND : Nq = Nm : Np$, ergo ex æquo $ND : qr = NZ : Np$, atque adeò $NZ = ND \cdot Np : qr$, id est in symbolis supra assumtis, & vocando insuper NZ, r; erit $r = zdz : dp$, nam qr in figura est dp in hisce symbolis; unde cum p sit $= zdt : ds$, invenietur $r = zdz : dp = zdzds^2 : dsdtdz + zdsddt - zdtdds$ formula generalis radii osculatoris, in qua nullum differentiale constans assumtum est, quæ proinde in infinitas alias facile transformari potest. Atque deleto membro in denominatore $dsdtdz$, habebitur $r = ds^2dz : dsddt - dtdds$ formula itidem generalis pro curvis quarum ordinatæ parallelæ axique perpendiculares sunt, in quibus dt sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO XXIII. Problema.

162. *Datis scala solicitationum centralium* GBb, *celeritate* AI, *& directione jactus* AR, *definire & construere curvam, quam missile in vacuo describet, concessis figurarum quadraturis.* Fig. 37.

I. Centro D intervalloque arbitrario DP describatur circulus PO, radios DN, Dn secans in punctis O, o; assumaturque Q quarta proportionalis ad DN, DR, & AI, ita ut DN. Q (= DR. AI) = EF. Dq, hoc est DN : Dq = EF : Q, & $DN^2 : Dq^2 = EF^2 : QQ$; ut dividendo habeatur $Nq^2 : Dq^2 = EF^2 - QQ : QQ$, atque adeò $Nq : Dq = \sqrt{(EF^2 - QQ)} : Q$, sed $Nq : Dq$ sicut radius ad tangentem anguli DNq, quæ tangens dicatur T, & radius DP vel DO, hinc $\sqrt{(EF^2 - QQ)} : Q = DP : T$ atque adeò $T = Q \cdot DP : \sqrt{(EF^2 - QQ)}$.

II. Propter arcus similes np & Oo, est $Oo : pn = DP : DN$, & $pn : Np = T : DP$, ergo ex æquo $Oo : Np = T : DN$, hinc $Oo = T \cdot Np :$

Np: DN (num. 1.) = Q. DP. Np: DN $\surd(EF^2 - QQ)$, ergo PO = $\int$DP. Q. Np: DN $\surd(EF^2 - QQ)$. Hoc est, si intelligatur aliqua curva, cujus abscissa DN, ordinata DP^2. Q: DN $\surd(EF^2 - QQ)$ area, hujus curvæ ordinatis abscissarum DA & DE interjecta ad datam lineam DP applicata præbebit lineam, cui si æqualis ubique factus fuerit arcus PO, recta DON per hujus arcus terminum O ducta æqualis abscissæ DE sua extremitate N in curva quæsita erit. Jam quia quadratum ordinatæ EF æquatur duplo areæ GBEH datæ per abscissam *DE vel DN* & constantes, si non algebraicè, saltem transcendenter, atque Q est quarta proportionalis ad DE vel DN, & datas DR, AI, ea pariter data erit in DE & constantibus, unde cum omnes quantitates, quæ ipsam DP^2. Q: DN $\surd(EF^2 - QQ)$ ordinatam scilicet figuræ quadrandæ ingrediuntur, dentur in DN & constantibus, & figurarum quadraturæ concessæ sint; factum esse liquet, quod erat faciendum.

Corollarium.

163. Si nunc dicantur DR, b; AI, c; DE vel DN, z, velocitas in curvæ puncto N, seu FE, u; arcus circuli PO, θ; ejus radius DP, r; at elementum arcus crescens OO, $+d\theta$, elementum verò decrescens Np, indeterminatæ ND, $-dz$. Adeoque $Q = cb : z$ & tota formula $Oo = Q. DP. Np : DN \surd(EF^2 - QQ)$ mutabitur factis debitis substitutionibus in $d\theta = -bcrdz : z\surd(uuzz - bbcc)$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ANn.

Scholion.

164. *Hoc problema primùm solutionem accepit à* Cel. Newtono Prop. 41. Lib. Princ. Phil. Nat. Math. & postea à Perspicacissimo Geometra Joh. Bernoulli gemino modo, tum etiam à Cl. Viro P. Varignon diversis modis, quo etiam referri posset & nostra solutio quam in Diario Veneto Tom. V. pag. 318. seq. exhibui cum nonnullis aliis, & Tom. VII. pag. 194. Præsens nostra solutio à Newtoniana non differt, nisi in levibus nec essentialibus circumstantiis, nam nostra EF significat latus quadratum areæ apud Newtonum ABFD bis sumtæ, quam tamen ille semel tantum accipit, ejusque Q nobis est rectangulum sub datis DR & AI in nostra figura, Q verò nobis est idem quod illi Q: A seu Z.

Cæterum, quia generalis hæc ſolutio quadraturas præſupponit earum etiam curvarum, quæ quadrabiles non ſunt, ideo problema iſtud generaliter ſumtum eſt transcendens, nec algebraicum fit, niſi pro certis legibus ſolicitationum centralium. Quænam vero debeant eſſe in genere hæ leges gravitatis variabilis, ut illis poſitis curvæ projectorum algebraicæ evadant, problema eſt ſatis curioſum & elegans, ſed prima fronte admodum difficile, de quo, quod ſciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo verò debeat expediri, id in ſequenti apparebit propoſitione, poſt lemma mox afferendum.

PROPOSITIO XXIV. LEMMA.

165. *Elementum* Ss *tangentis* LS *arcus circularis* LM *eſt ad elementum hujus arcus* Mm, *ut* AS^2 *quadratum ſecantis ad* AM^2 *quadratum radii, vel etiam, ut* AL^2 *quadratum radii, ad* AG^2 *quadratum ſinus complementi arcus* LM.

Fig. 38.

Nam, quia triangula SA*s* & MA*m* communem angulum MA*m* continent, erit triangulum SA*s* ad triangulum MA*m*, ut rec-lum SA.*s*A ad rec-lum MA.*m*A, id eſt, ut quadratum SA ad quadratum MA. At quia trianguli SA*s* altitudo eſt AL, exiſtente baſi S*s*, & trianguli MA*m* baſin M*m* habentis altitudo eſt MA æqualis alteri AL, liquet triangulum SA*s* ſe habere ad triangulum MA*m*, ut baſis S*s* ad baſin M*m*, ergo etiam S*s* ad M*m* ut AS^2 ad AM^2, vel propter parallelas SL & MG, ſicut AL^2 ad AG^2. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

166. Idcirco, ſi dicantur radius AL, r, tangens LS, t; arcus LM, α, erit ſecans $AS = \sqrt{(rr+tt)}$, atque adeo $d\alpha = rrdt : rr+tt$. Et converſa hac æquatione in ſeriem, ſingula ſeriei membra erunt ſummabilia, adeò ut ſummatione eorum actu inſtituta habeatur expreſſio arcus circularis α, ſerie infinita tangente & radio expreſſa.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

167. *Invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis ſeu legis ſolicitationum centralium, pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expreſſum.*

Fig. 37, 38.

I. In figura 38. fiat AD æqualis AD in fig. 37, atque in fig. 38.

circa

circa axem DA descripta intelligatur curva quæcunque algebraica LHh: descriptoque super ordinata ejus AL quadrante LMΘ circuli, ex quolibet hujus circumferentiæ puncto M agatur quædam MH parallela axi AD, curvæ LH alicubi occurrens in H subter ordinatam AL, per curvæ LH punctum H tangens Hδ ducta intelligatur axi occurrens in δ, & ordinata HE axi AD perpendicularis, in qua, ordinata HE ad alteram axis partem protracta, sumatur ubique Eλ = subtangenti Eδ, adeò ut puncta λ futura sint in quâdam curva λΞ, *cujus subtangens sit in ejus puncto* λ linea EΩ, ducta scilicet tangente λΩ. Quibus positis, si in altera figura (37.) angulus ADN ubique fuerit ad angulum MAL, ut unitas ad quemlibet numerum positivum & rationalem *n*, atque in figura 37. longitudo DN semper æqualis fuerit abscissæ DE in figura 38. manifestum, singula puncta N locatum iri in curva algebraica AN*n*; quandoquidem omnia hæc puncta algebraice definiri possunt, cum sectio anguli in ratione numeri ad numerum omnino geometrice fieri possit. Jam, sicut ex alia atque alia curva LH alia atque alia AN oritur, ita quælibet curva AN aliquam generatricem LH admittet, adeo ut hac curva considerata duntaxat *in genere*, absque ulla attentione ad particularem aliquam speciem, etiam suppeditare possit *omnes possibiles curvas ANn*. Idcirco, cum canon generalis quæritur, quo lex gravitatis variabilis in omnibus curvis algebraicis determinetur, res eò deducetur, ut inveniatur formula solicitationum centralium G pro hac curva generali AN, quatenus ea ex curva itidem generali & algebraica LH resultat. In hac verò disquisitione ita porrò est procedendum.

II. Assumto scilicet in curva LH ejus elemento H*h*, per punctum *h* agantur *hλ* & *hm* rectis λH & HM æquidistantibus, ac ductis per puncta *M*, *m* *secantibus AS*, *As*; centro A & radio AX = DP in figura 37, descriptus sit arculus X*x*, quo fiet ut, quoniam (secundùm hypothesin) ang. ADN : ang. MAL = 1 : *n*, etiam O*D*o : M*A*m vel X*A*x, hoc est arculus *Oo* sit ad arculum X*x* sicut 1 ad *n*. Quibus positis sic arguo.

III. Triangula similia H*ih* & HEδ præbent Ee (ih) : Gg (Hi) = Eδ : AG (EH), & triangula similia AMG & M*mμ*, dant Gg (M*μ*) : M*m* = GM : AL (AM) & M*m* : X*x* = AL (AM) : AX (DP), ac denique, num. 1. hujus X*x* : O*o* = *n* : 1, ergo ex æquo & per compositionem rationum, fiet Ee : O*o* = n. Eδ. GM : AG. DP (vel quia ob triangulorum AGM & ALS similitudinem GM : AG = LS : AL) = n.

$= n.E\Delta.SL : DP.AL$. Atqui (§. 162. n. 11.) erat etiam Ee (ibi Np): $Oo = DE : T$, ergo $n.E\Delta.SL : DP.AL = DE : T$, atque adeò fiet $T = DP.AL.DE : n.E\Delta.SL$. (§. 162. n. 1.) $= Q.DP : \sqrt{(EF^3 - QQ)}$ atque adeo $\sqrt{(EF^3 - QQ)} = n.Q.E\Delta.SL : AL.DE$, ac denique $EF^3 = (nn.E\Delta^2.SL^2 + AL^2.DE^2).QQ : AL^2.DE^2$, vel quia $Q = DR.AI : DE$, & omittendo instar unitatis factum constans DR, AI, est $QQ = 1 : DE^2$, fiet etiam $EF^3 = nn.E\Delta^2.SL^2 : AL^2.DE^4 ; + 1 : DE^2$.

IV. Sumantur elementa *singulorum membrorum hujus* ultimæ æqualitatis, atque singulis elementis per 2 divisis (bifariam ea dividi posse ex calculo ilico patet) proveniet $EF.af = (nn.E\Delta.SL^2.\Delta\xi : AL^2.DE^4) + (nn.E\Delta^2.SL.Ss : AL^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : AL^2.DE^5) + (Ee : DE^3)$. Verum quia (§. 165.) $Ss : Mm = AL^2 : AG^2$, nec non $Mm : Gg = AL : MG$ ac denique $Gg : Ee = AG : E\Delta$, erit $SL.Ss = AL^4.Ee : AG^2.E\Delta$, triangulaque similia $\Delta\xi\lambda$, ac $\Delta E\Omega$ suppeditant $E\Delta(\Delta E).\Delta\xi = \Delta E^2.Ee : E\Omega$, quibus valoribus in superiore æqualitate $EF.af = (nn.E\Delta.SL^2.\Delta\xi : AL^2.DE^4) +$ &c. substitutis, proveniet $EF.af$ (§. 132.) $= BE.Ee = G.Ee = (nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : E\Omega.AL^2.DE^4) + (nn.E\Delta.AL^2.Ee : AG^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : AL^2.DE^5) + (Ee : DE^3)$. In qua, si loco rationis $SL^2 : AL^2$ substituetur æqualis ratio $MG^2 : AG^2$, atque omnia ad Ee applicentur, erit BE seu $G = (nn.E\Delta^2.MG^2 : E\Omega.AG^2.DE^4) + (nn.E\Delta.AL^2 : AG^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.MG^2 : AG^2.DE^5) + (1 : DE^3)$, formula generalis solicitationis centralis in puncto curvæ N, quæ rite ordinata reductis scilicet tribus primis fractionibus ad idem nomen, demum erit $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2).nn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^5}$. In qua existente curva LH algebraica, altera $\Delta\Xi$ algebraica erit, atque adeò omnes $E\Omega$, $E\Delta$, EH & GM algebraice dabuntur; *hinc* etiam, juxta dicta numero 1. hujus, altera curva AN algebraica sit, necesse est; & quia cuilibet curvæ algebraicæ imaginabili AN aliqua LH respondet, & hæc LH omnes curvas generaliter repræsentat, quæ ex omnibus ANn resultare queunt; ideò præcedens canon exhibet formulam generalem solicitationum centralium pro omnibus, quæ concipi possunt, curvis algebraicis ANn in infinitum. Quæ erat invenienda.

Co-

Corollarium I.

168. Si nunc præterea ponatur $1 : n = \mu : \nu$, ita ut μ & ν significent quoslibet numeros integros & positivos, dicanturque tangens anguli MAL, T, ejus secans S, in fig. verò 37, coordinatæ DQ & QN, x & y respective, & $DN = z = \sqrt{(xx+yy)}$; quibus positis erit tangens anguli $ADN = ry : x$, & secans $= rz : x$, existente radio $DP = r$. Eritque adeò per regulam generalem multisectionis anguli vel arcus per secantes in Act. Erud. Lipsi. 1706. pag. 263. traditam, secans anguli ν. $ADN = rz^\nu : (x^\nu - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 - 06\nu x^{\nu-6} y^6 + \&c.)$ & secans anguli μ. $MAL = S^\mu : (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.$ in quibus numeri ficti 02ν, 04ν, 06ν, &c. significant, $\frac{\nu.\nu-1}{1.2}$; $\frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3.\nu-4.\nu-5}{1.2.3.4.5.6}$ seu coëfficientes membrorum binomii ad potestatem ν sublati, per saltum excerptas; & numeri 02μ, 04μ, 06μ, &c. significant ordine, $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}$; $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4.\mu-5}{1.2.3.4.5.6}$; &c. coëfficientes binomii cujusdam ad potestatem μ evecti, itidem per saltum excerptas.

Jam, quia (secundùm hypothesin) ang. ADN est ad ang. MAL, sicut 1 ad n seu μ ad ν, erit omninò multiplicando extrema & media μ. $MAL = \nu$. ADN, ergo horum secantes æquales erunt. Propterea multiplicatione in crucem instituta, erit $S^\mu . (x^\nu - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 + \&c.) = rz^\nu . (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ generalis æquatio curvarum algebraicarum AN, nam existentibus μ & ν numeris integris & positivis, hæ series indefinitæ semper abrumpentes erunt, atque adeo finito terminorum numero constabunt.

Corollarium II.

169. Si in Canone articuli 167. loco ordinatæ EH ponatur ..e...A, quælibet quantitas composita ex data seu constante e, & variabile A, data tamen utlibet in z, & quantitatibus constantibus, adeo ut A, infinitas numero diversas quantitates ex z & datis quomodocunque compositas, immò omnes, quæ cogitari possint significet. Puncta quantitatibus præfixa omnem possibilem signorum + & − ad quantitates illas respicientium variationem denotant, adeò Fig. 38.

ut per quantitates punctis invicem adjunctas non solum summa quantitatum; sed etiam differentia earundem intelligenda sit in genere, hoc est differentia ipsarum, sive e excedat alteram A, sive ab eadem deficiat. Data ordinata EH, in quantitatibus algebraicis, facile invenietur subtangens EΔ curvæ LH, seu ordinata ΛE alterius curvæ ΛΞ, cujus subtangens EΩ etiam habebitur in quantitatibus algebraicis. Idcirco substitutis valoribus subtangentium EΔ, EΩ, ordinatæ EH vel æqualis AG, tum etiam rectæ GM, quæ ex altera AG & data AL facile reperitur, *in canone supra citato* & habebitur generalis formula solicitationum centralium in omnibus curvis algebraicis. Ponendo igitur elementum ipsius A seu dA esse Bdz, & elementum dB quantitatis B esse cdz, existente $DE = z$, item $AL = r$, & $rr - ee = ss$. Si calculus recte initus fuerit, reperietur pro solicitatione centrali G in quolibet curvæ AN puncto N,

$$G = \frac{1}{z^2} + \frac{(2ssB + ssCz \mp eB^2z \mp 4eAB \mp 2eACz + AB^2z - 2A^2B - A^2Cz).\ nn}{B^3z^5}.$$

Quam late pateat usus hujus formulæ exinde potest colligi, quod, præterquam quod quantitas A omnem quantitatem per z & constantes datam designet, numerus n omnes numeros rationales atque positivos integros & fractos significet.

SCHOLIUM.

170. Ut appareat usus insignis nostræ formulæ, exemplo cuidam particulari eandem applicare libet. Sic si fuerit $A = z^m : a^{m-1}$ ubi m significet quemlibet numerum rationalem, fractus ne sit an integer nil refert, eritque $B = mz^{m-1} : a^{m-1}$, & $C(= mm - m)\, z^{m-2} : a^{m-1}$. Qui valores, in formula superioris Corollarii substituti, dabunt formulam quæ etsi particularis est alterius respectu, ex qua deducta est, infinitas tamen diversas curvas algebraicas suppeditare potest, immò infinities infinitas. Formula autem ipsa erit talis quæ sequitur

$$G = \frac{mm - nn}{mmz^3} \pm \frac{\overline{m \mp 2}.nnea}{mmz^{m+3}} + \frac{\overline{m+1}.nnsa}{mmz^{m+3}}^{\frac{m-1}{2m-2}}.$$

Hinc 1°. Si $m = -1$, & $n = 1$, erit $G = \pm e : aazz$, atque adeò solicitatio gravitatis ubique in reciproca duplicata ratione distantiæ mobilis à centro D. Videamus quænam curva ex ista hypothesi debeat resultare. In corollario primo fecimus $1 : n = \mu : \nu$, unde cum hoc casu sit $n = 1$, erit etiam $\mu = \nu = 1$, unde si valores hosce

Fig. 37.

hosce in æquatione generali §. 168. circa finem, ſubſtituas, evaneſcent omnes coëfficientes 02μ, 04μ, &c. & omnes 02^{ν}, 04^{ν}, 06^{ν}, &c. adeò ut hoc caſu curvæ æquatio ſit $Sx = rz$. Jam quia $A (= z^m : a^{m-1})$ hoc caſu eſt $= aa : z$, atque adeò in fig. 38, ordinata EH, quæ aſſumenda eſt æqualis differentiæ quantitatum e & A, non ſummæ, quia in ambiguo ſigno ſuperius in formula retinuimus quod indicat talem differentiam, atque inferius ſummam; ordinata inquam EH hoc caſu erit $= \pm e \mp A = \pm e \mp \frac{aa}{z} = (\pm ez \mp aa) : z$, atqui S, ſeu ſecans anguli MAL, eſt tertia proportionalis ad AG ſeu EH, & radium AM vel $AL = r$, ergo $S = rrz : \pm ez \mp aa$, adeoque æquatio $Sx = rz$, mutatur in $\frac{rrzx}{\pm ez \mp aa} = rz$, ex quâ elicitur $rx = \pm ez \mp aa$ vel potius $ez - aa = +rx$, aut $ez = aa + rx$, quæ eſt æquatio *Sectionum Conicarum*, in quibus abſciſſæ x ſumuntur ſurſum & deorſum à foco. Ergo in hac hypotheſi centrum virium, ſeu ſolicitationum gravitatis, ſunt umbilici ſectionum conicarum, quod jam omnibus conſtat egregie conſpirare cum iis, quæ demonſtrata ſunt ab Illuſtr. Newtono, Leibnitio, Varignonio & aliis, circa vires, quas vocant centripetas in ſectionibus conicis methodis directis.

2°. Sit $m = -2$, & $n = 2$, atque e major quam r, ita ut $ss = rr - ee$ ſit quantitas negativa, erit $G = -ssz : a^6$, atque adeò ſolicitationes erunt ut diſtantiæ à centro. Æquatio curvæ pro hac hypotheſi ſic indagabitur. Quoniam $n = 2$, & $1 : n = \mu : \nu$ erit $\nu = 2\mu$, atque adeò æquatio generalis (§. 168.) huic caſui applicata mutabitur in hanc ſequentem $Sxx - Syy = rzz$. ſeu, quia $A (= z^m : a^{m-1})$ hoc caſu eſt $= a^3 : zz$, & $S = rr : e - A = rrzz : ezz - a^3$, fiet $(rrxzz - rryzz : ezz - a^3 = rzz$, atque adeò $rxx - ryy = ezz - a^3 = exx + eyy - a^3$; hinc $a^3 + \overline{r - e}.xx = \overline{e + r}.yy$. Jam quia e (ſecundum hypotheſin) major eſt quam r, quantitas $r - e$ erit negativa, atque adeò æquatio erit ad ellipſin, cujus axis transverſus eſt ad conjugatum ſicut $\sqrt{(e + r)}$ ad $\sqrt{(e - r)}$; & in qua abſciſſæ x originem in centro habent. Idcirco ſolicitationes gravitatis, quæ in ellipſi ſunt ut diſtantiæ à centro ſolicitationum, diriguntur ad centrum ellipſeos, quod iterum ex demonſtratis Newtonianis conſtat verum eſſe; nam ſi, ut Excell. hic Autor, & poſtea Cl. Varignon fecerunt, quæratur qualem gravitates mobilis, perimetrum ellipſeos circumeuntis, legem ſequi debeant, ſi earum directiones in centro ellipſeos concurrant, repe-

perietur ejusmodi solicitationes distantiis mobilis à centro ellipseos proportionales esse. Sin verò r major sit quam e, inventa nostra æquatio erit ad hyperbolam, & solicitatio centralis erit negativa atque adeò centrifuga.

3°. Si $m=1=n=\mu=\nu$, & $e=0$, erit $G=2ss:z^5$. Atque æquatio generalis (§. 168.) mutabitur in hanc particularem $Sx=rz$, in qua erit $S=rr:z$, hinc $rrx:z=rz$, vel $rx=zz=xx+yy$. Ergo hoc casu centrum solicitationum est in circumferentia circuli, curvaque quæsita ipsa *circuli circumferentia*, *quod à posteriori* hactenus laudati viri Newtonus atque Varignonius ostenderunt. Vid. Lib. I. *Pr. Phil. Nat. Math.* Prop. VI. & Comm. Acad. Reg. Sc. Par. 1700. die 31. Martii art. XI.

4°. Generaliter, si G sit ut z^p, ubi p est quilibet numerus rationalis positivus vel negativus, excepto solo -1, curva semper algebraica haberi potest tali solicitationum centralium legi satisfaciens, in qua tamen vel e aut s evanescunt seu nihil sunt, alioqui nullæ curvæ algebraicæ talibus hypothesibus inveniri possent satisfacientes, exceptis casibus ipsius p significantis numeros 1 & -2, quibus sectiones conicas convenire in præcedentibus exemplis ostensum. Si $p=0$, reperietur curvæ ANn æquatio $x^3-3xyy+z^3=\frac{2a^3}{rr}$, in cujus curvæ singulis punctis solicitatio centralis constans quidem sed negativa est, mobile à centro repellens. Sin verò ponatur in formula §. 170, $m=-1$, & $e=0$, fiet G ut $\frac{1-nn}{z^3}$, hoc est reciproce, ut cubus distantiæ mobilis à centro solicitationum, & huic casui infinitæ conveniunt curvæ, infinitæ scilicet geometricæ infinitiesque infinitæ Mechanicæ seu transcendentes, prorsus ut à Cel. Joh. Bernoullio animadversum in *Act. Lipsi.* 1713. Mens. Mart. p. 129, ubi infinitas exhibet diversas spiralium species, quarum unæ continent curvas algebraicas, aliæ vero transcendentes. Nam quia (secundùm hypothesin) $m=-1$, erit $A(=z^m:a^{m-1})=aa:z$, ideoque curva LH erit hoc casu hyperbola inter asymptotas per centrum solicitationum, vel potius per punctum D ad angulos rectos ductas; ita ut una earum existente DA altera sit ipsi AL parallela. Adeoque cum secans AS sit tertia proportionalis ad AG, vel $EH=aa:z$, & radium AL, erit $AS=rrz:aa=z$ si AL sit $=a$. Unde si in fig. 37. fiat angulus ADN ad angulum MAD (§. 167.) sicut 1 ad n, atque in recta Dp sumatur ubique DN æqualis secanti

Fig. 38.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [108] - 80
PUBLIC DOMAIN

canti AS, punctum N erit in curva quæsita ANn, quæ proinde erit algebraica quoties *n* numerus fuerit rationalis & affirmativus, atque talis constructio coincideret fere cum eâ quam Celeb. Newtonus dedit in Corollario 6. post Prop. 44. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* Imò etiam cum Bernoulliana, quæ habetur loco supra citato, quanquam ejusmodi curvæ apud Acutissimum Virum aliter positæ sint, quam in Newtoniana vel nostra constructione. Nam ducta in figura 37. linea Dd axi DA normali, si jam ubique fiat angulus dDN ad *angulum* ΘAM, sicut 1 ad *n*, atque ut antea, in recta Dp sumatur DN æqualis ipsi DS, punctum N etiam nunc erit in curva optata, quæ asymptotam habebit ipsi Dd parallelam, cujus ab hac Dd distantia erit ad DP, ut 1 ad *n*: curva verò per punctum A non transibit; in altera vero constructione nostra curva transit per A, atque asymptotam habebit per D transeuntem, facientem cum DA angulum, qui se habet ad angulum rectum, ut 1 ad *n*. Et quidem hæc pauca exempla ad illustrationem formulæ ab initio hujus articuli allatæ adduxisse sufficiat; ex quibus satis jam perspicax Lector animadvertere potest, quam immensi pene usus sit generalis solutio problematis articulo 167. propositi & soluti, quandoquidem sola formula particularis articuli 170. paulo ante memorata justo tractatui conscribendo abundantem materiam subministrare posset.

CAPUT III.

De Motu Isochrono corporum in curvis descendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypothesin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum

DEFINITIO.

CUm corpus grave motu suo ex quiete arcus quoscunque inæquales alicujus curvæ, sed terminatos tamen omnes ad infimum curvæ punctum eodem vel æquali tempore, perlabitur, talis linea curva *Isochrona* dici solet. Ut si grave A, ex quolibet curvæ BFA puncto B, F, E &c. à quiete descensum incipiens motu suo quomodocunque accelerato, eodem seu pari tempore arcus utlibet inæ- Fig. 40.

quales BcA, FeA, EXA, sed terminatos omnes ad infimum curvæ punctum A, absolvat; curva hæc BEA Isochrona vocabitur.

PROPOSITIO XXVI. LEMMA.

171. *In quolibet triangulo rectilineo, cujus basis à linea intra triangulum ex angulo basi oppositò ducta, pro libitu in duo quæcunque segmenta dividitur, solida quæ fiunt ex quadratis laterum in alterna baseos segmenta simul sumpta æquantur duobus solidis, quorum unum fit ex quadrato lineæ basin dividentis in hanc basin, alterum ex rectangulo segmentorum basis in totam pariter basin.*

Fig. 39.

Sit triangulum quodvis ABC, cujus basis BC dividatur in D à recta AD pro libitu intra triangulum ducta. Probari debet esse $AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC + BD.DC.BC$.

Demonst. I. Descripto circa triangulum circulo ABE, producatur AD in E, & jungantur BE, CE, & triangula similia BAD ac ECD præbent analogiam AB : AD = EC : DC atque adeò AD. EC = AB. DC. Atque à triangulorum ACD, BED similitudine elicitur AC : AD = BE : BD, & rec-lum AD. BE æquale rec-lo AC. BD.

II. In quadrilatero ABEC circulo inscripto, est AB. EC + AC. BE = AE. BC = AD. BC + DE. BC. Vel ascita communi altitudine AD, fiet AB. EC. AD + AC. BE. AD = AD^2. BC + AD. DE. BC. Adeoque subrogando loco rectangulorum EC. AD & BE. AD hæc rec-la AB. DC & AC. BD quæ illis (num. 1) æqualia ostensa sunt, & loco rectanguli AD. DE æquale rec-lum BD. DC ; erit AB^2. DC + AC^2. BD = AD^2. BC + BD. DC. BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA.

Fig. 40.

172. *Si gravium directiones convergant in centro* O, *atque circa axem* OC *descriptæ sint tres curvæ, scilicet scala solicitationum gravitatis variabilis* cha, *deinde curva* ARD, *cujus quælibet ordinata* HR *possit duplum homologæ areæ* AHha *in scala gravitatis, at denique tertia curva* AEB, *cujus arcus quilibet* AXE, *à circulo* HE *radio* OH *descripto, terminatus sit ad homologam ordinatam* HR *in curva* ARQ, *ut aliquis datus numerus* N, *ad unitatem, erit hæc tertia curva* BEA, isochrona.

Pona-

Ponatur grave delapsum esse per arcum curvæ *BEA* motum à quiete in *B* incipiendo; atque *Ee* elementum esse curvæ *AE*, per cujus terminum e descriptus centro *O* arcus *eV* axi occurrat in *V*, per quod punctum ducatur ordinata *Vr* in curva *ARD*, atque super hujus curvæ basi *CD* descripto quadrante circuli *CDIK*, per puncta *R*, *r* agantur *RI*, & *ri* circulo occurrentes in *I*, *i*, ejusque radio *DP* in punctis *P*, *p*, ductaque per *I* lineola *Io* parallela *CD*, jungantur denique *CI*, *Ci*. Quibus positis

I. *Quia (secundùm hypothesin) CD²=2.ACchaA*, & *HR²=2.AHhaA*, erit CD^2-HR^2, hoc est CD^2-CP^2, vel CI^2-CP^2, id est $IP^2=2.CHhgc=2.ACchaA-2.AHhaA$, ergo $IP=\sqrt{(2.CHhgc)}$ Item quia (secundum hypothesin) $AE:HR=N:1$, erit $AE=N.HR$, adeoque $Ee=N.pR=N.Pp=N.Io$.

II. Supra (§. 136.) ostensum, eandem vel æqualem acquirere celeritatem duo mobilia pondere & massa æqualia in duobus punctis *E*, *H* centro *O* æquidistantibus, si ex punctis pariter æque altis *B*, *C* unum in curva *BEA* alterumque in recta *CA* à quiete moveri cœperint, atque spatia *BE* & *CH* descripserint. Et vocando corporis *A* massam per hanc eandem literam *A*, celeritas acquisita in *H* ex descensu per *CH*, vel in *E* ex descensu per *BE* (§. 144.) erit $\sqrt{(2.CHhc)}:\sqrt{A}$, seu (num. 1 hujus) $=IP:\sqrt{A}$. Unde, quia (num. 1) $Ee=N.Io$ atque spatiolum *Ee* applicatum ad velocitatem qua percurritur, denotat tempus quo absolvitur seu *tEe*, erit propterea $tEe=N.Io.\sqrt{(A)}:IP$. Atqui propter triangula similia *CIP*, & *Iio*, ratio *Io* ad *IP* æqualis est rationi *Ii*: *CI*, hoc est (§. 129.) angulo *ICi*; idcirco $tEe=N.\sqrt{A}$. ang. *ICi*: ergo omn. *tEe*, hoc est, $tBE=N.\sqrt{A}$. omn. *ICi* seu *ICD*, atque adeo $tBE=N.\sqrt{A}$. ang. *ICD*. & $tBEA=N.\sqrt{A}$. ang. *KCD*.

III. *Si jam mobile non amplius in B, sed in alio quocunque curvæ puncto F descensum incipiat*; centro *O* per hoc punctum *F* ducatur circulus *FG* & per *G* ordinata *GQ* curvæ *ARD* occurrens in puncto *Q*, per quod agatur *QN* axi *AC* parallela ac denique radio *CN* descripto quadrante *MLN*, jungatur *LC*; atque hisce positis eodem quo in antecedente numero, conficitur argumento existere $tFE=N.\sqrt{A}$. ang. *LCN*. Cogitatione tua abscinde vel aufer totum spatium, quod est inter lineas mixtas *BCD* & *FGQ*, ac quadrantem *MCN* admove pariter ordinatæ *GQ*, & hac ratione hunc casum, quo mobile ex *F* descendere incipit, reducis præcise ad casum præcedentem; cum *AEF* nunc spectetur velut integra

curva, ex cujus principio F proficiſcatur mobile & analogæ curvæ ARQ baſis GQ quadrantem habet ſibi inſiſtentem, quemadmodum baſis CD ſuum quadrantem KID, idcirco tempus per FE, hoc eſt $tFE = N.\sqrt{A}$. ang. LCN, atque adeo $tFEA = N.\sqrt{A}$. ang. MCN. Eſt ergo tBEA ad tFEA, ut $N.\sqrt{A}$. ang. KCD ad $N.\sqrt{A}$. ang. MCN hoc eſt, ſicut angulus rectus KCD ad angulum rectum MCN, atque adeo in ratione æqualitatis; ergo æquali tempore omnes arcus BA, FA, XA &c. percurrentur, atque adeò curva propoſitionis noſtræ BEA eſt iſochrona. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

173. Si ΘA fuerit radius oſculi ſeu curvaturæ iſochronæ in vertice A, erit generaliter $N = \sqrt{(\Theta A.OA : \Theta O.Aa)}$. Sumto enim arculo AX indefinite parvo vertici contiguo, ductisque ex centro O arculo XY, & per Y ordinata Yy curvam AR ſecante in z. Jam quia (ſecundùm hypotheſin) $AX = N.YZ$, vel $AX^2 = NN.YZ^2$ (ſecundùm hypotheſin) $= NN.$ dupl. areæ $AYya = 2NN.AY.Aa$; & quia AY eſt aggregatum ſinuum verſorum arculorum AX & XY inſtar æqualium accipiendorum, quorum centra ſunt Θ & O, fiet $AY = \frac{AX^2}{2\Theta A} + \frac{AX^2(XY^2)}{2OA}$, atque adeò $2AY = AX^2.\Theta O : \Theta A.OA$, ac proinde ſubſtitutione facta, proveniet $AX^2 = NN.AX^2.\Theta O.Aa : \Theta A.OA$, ex qua facile elicitur $NN = \Theta A.OA : \Theta O.Aa$, & $N = \sqrt{(\Theta A.OA : \Theta O.Aa)}$.

Corollarium II.

174. Si jam minimus iſochronæ arculus XA vertici A adjacens conſideretur inſtar arcus circularis radii ΘA à pondere A filo ΘA appenſo deſcripti; erit tempus, quo arculus XA vel tota curva BEA deſcribi poteſt, ſemiſſis unius oſcillationis penduli ΘA. Unde, quia (§. 172.) $tXA = N.\sqrt{A}$. ang. rectum, erit $4tXA$, ſeu duratio duarum penduli cujusque oſcillationum minimarum, quod deinceps dicatur T, erit inquam $T = N.\sqrt{A}.4$ rectos ſeu nominando peripheriam p, cujus radius I erit $T = pN.\sqrt{A}$, vel ſubſtituendo valorem ipſius N articulo præcedenti definitum, reperietur $T = p\sqrt{(A.\Theta A.AO : \Theta O.Aa)}$. Qui eſt canon valde generalis, in quo ΘA ſignificat longitudinem penduli, AO ponderis minimam diſtantiam à centro

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [112] - 84
PUBLIC DOMAIN

tro gravium O, ΘO distantiam puncti suspensionis Θ ab eodem centro O, Aa pondus corporis oscillantis A in infimo loco positi, & T tempus duarum penduli ΘA vibrationum minimarum. Hæc determinatio probe consentit cum assertionibus paulo specialioribus Newtoni Prop. 52. *Lib. I. Pr. Ph. Nat.*

Corollarium III.

175. *Si centrum O sit infinite distans à puncto Θ, æquabuntur ipsæ ΘO & AO, atque formula præcedentis corollarii mutabitur in sequentem* $T = p\sqrt{(A.\Theta A : Aa)}$. Hinc 1°. tempora oscillationum diversorum pendulorum sunt in composita ratione ex subduplicata massarum & longitudinis pendulorum directe & subduplicata itidem sed inversa ponderum. 2°. Tempora oscillationum pendulorum æqualium sunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione massæ corporum & subduplicata inversa ratione ponderum. 3°. Si solicitationes, quibus pendula agitantur, id est pondera corporum longitudini pendulorum proportionalia sint, tempora oscillationum erunt in subduplicata ratione massarum corporum agitatorum, & hæc tempora erunt æqualia, si, iisdem positis, massæ insuper corporum ponderibus proportionales fuerint. 4°. Massæ vero, seu materiæ quantitates, erunt in composita ratione ex ponderum ratione pendulis æqualis longitudinis appensorum, & ex duplicata ratione temporis oscillationum. Atque hoc ipsum est Prop. 27. *Lib. II. Pr. Ph. Nat.* qua usus est Cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipsorum massis proportionalia sint, nec ne; ac reperit hic Author experimentis, accuratissime pendulorum ope sumtis, pondera corporum massis constanter proportionata esse. Sed hoc loco sermo est de ponderibus absolutis corporum; non vero de relativis, qualia habent cum fluidis diversis demersa sunt; hoc enim casu pondus portionis cujusdam fluidi volumine æqualis corpori demerso à pondere absoluto hujus corporis debet auferri, ut habeatur ejus pondus relativum, quod intra fluidum, cui immersum est, habet.

Corollarium IV.

176. Cum multitudines oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sint in contraria ratione temporum, quo unumquodque pendulum unam oscillationem peragit, multi-

tudines oſcillationum æqualibus temporibus peractarum erunt proinde in compoſita ratione ex ratione ſubduplicata directa ponderum & ſubduplicatis rationibus inverſis maſſarum & longitudinum pendulorum. Aut, ſi pondera maſſis proportionalia ſint, ut tuto id aſſumi poteſt; erunt prædictæ oſcillationum multitudines, ut radices ex lineis, quæ pondera ſeu vires gravitatis exponunt, quibus pendula agitantur, applicatis ad pendulorum longitudines. Atque adeò, 1°. pendulorum inæqualium, ſed eadem gravitatis ſolicitatione agitatorum, vibrationes eodem tempore abſolvendæ ſunt in reciproca ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum. 2°. Numerus oſcillationum unius penduli erit ad numerum oſcillationum eodem tempore peractarum in alio pendulo ejusdem longitudinis cum primo, in ſubduplicata ratione ſolicitationis gravitatis, qua primum ad ſolicitationem gravitatis, qua alterum pendulum primo quoad longitudinem æquale agitatur. Atque hoc poſterius ad amuſſim convenit cum regula quam Bernoullius in elegantiſſimo ſuo ſchediasmate Act. Lipſ. 1713. M. Februario inſerto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates ſpecificas eruere docet ex pendulorum experimentis modo plane novo nec antea cognito.

Scholion.

177. Ex corollariis proxime antecedentibus ſatis elucere exiſtimo, quantæ utilitatis ſit theorema noſtrum generale iſochroniſmi corporum in curvis, aſſignata lege deſcriptis, deſcendentium, cum ex ea omnia, quæ ad pendulorum motus ſpectant, tanta facilitate deducantur: interim oſcillationes pendulorum quam minimas conſiderare convenit propter rationes §. 174. indicatas, ſcilicet quia tum demum pendulum vel penduli pondus arculum iſochronæ, cujus tempus dimenſi ſumus, percurrere cenſetur, cum minimum arculum circularem ipſum deſcribit, quoniam, eo caſu, talis arculus circularis oſculatur arculum iſochronæ duplum ipſius XA ſeu arculum XAX; poſito arcu AX in curva BEA, ex altera axis AC parte conſtituta æquali arculo AX, & quia oſculari atque congruere in Geometria unum idemque ſignificant, ſaltem in ea parte, in qua oſculum contingit. Sin verò arculi AX non ſunt minimi, hæc tamen omnia adhuc ſubſiſtent, ſi pendula inter ſe collata vel eorum pondera curvas ſimiles deſcripſerint.

178. Ut igitur quæ in antecedentibus corollariis ſparſim dicta ſunt

sunt in compendium colligantur; nominentur numerus oscillationum aliquo tempore peractarum à primo pendulo N, ejus longitudo L, quæ in schemate repræsentatur linea ΘA, corporis A gravitas absoluta G, ejus massa M, adeoque M nunc significat idem ac A, & G idem ac linea A*a* in schemate; atque retenta T pro designando tempore duarum oscillationum minimarum hujus penduli. In secundo pendulo eædem res iisdem, ac in primo, literis; sed minusculis exprimantur, atque adeò corollarium 3. præbebit has regulas $T = p\sqrt{(M.L:G)}$ & $t = p\sqrt{(m.l:g)}$. Corollarium vero 4. exhibet $N:n = t:T$, vel $NT = nt$. Unde quot diversis modis singulæ literæ T, G, L, M, N & homologæ *t*, *g*, *l*, *m*, *n* inter se conferri possunt, tot inde resultabunt alia atque alia theoremata, à quibus omnibus sigillatim recensendis brevitatis gratia abstineo. Hactenus isochroniam tantum in genere consideravimus nulli particulari hypothesi gravitatis inhærentes. Quid verò ex una alterave ejusmodi hypotheseon resultare debeat, indagabimus in sequentibus problematibus.

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

179. *Invenire isochronam in hypothesi gravitatis uniformis atque directionum gravitatis inter se parallelarum seu in centro infinite distanti coeuntium.* Fig. 41.

Quoniam centrum solicitationum gravitatis O infinite distat à basi CD curvæ ARD, lineæ BC, EH, quæ antea (§. 172.) erant arcus circulares centro O descripti, nunc fient rectæ inter se parallelæ & axi AC perpendiculares: & quia (secundùm hypothesin) gravitas uniformis, ejus scala erit linea recta *cha* axi AC parallela, & quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah$, curva ARD hoc casu parabola erit, cujus parameter 2Aa. At propter ΘO & AO æquales, fiet $N = \sqrt{(\Theta A:Aa)}$. Jam quia (§. 172.) $AE = N.HR = N.\sqrt{(2Aa.AH)} = \sqrt{(2\Theta A.AH)}$, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(\frac{1}{2}\Theta A.AH)}$, vel bisecta ΘA in C, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(AC.AH)}$, id est, super diametro AC descripto semicirculo ASC, lineam EH secante in S, = subtensæ AS, quandoquidem hæc media est geometrica inter diametrum AC & abscissam AH. Sic etiam $\frac{1}{2}Ae = As$, atque adeo $\frac{1}{2}Ee = AS - As$, id est demissa S*m* perpendiculari super *As* productam, = *sm*, adeoque $Ee = 2.sm$, in suppositione infinitæ parvitatis arculi Ee, quo casu *sm* est differentia seu excessus subtensæ AS supra subtensam minorem

rem As. Verum quia ductis per puncta A & S tangentibus AT & ST occurrentibus in T, hæ tangentes erunt æquales, etiam *u*S æquabitur *Ss*, atque adeò perpendicularis *Sm* bifariam dividet basim *su* trianguli isoscelis *sSu*, adeò ut *su* sit = 2*sm*, atque adeo E*e* = *su*; idcirco quadrilaterum E*esu*, in quo latera opposita E*u* & *es* sunt æquidistantia & reliqua opposita latera E*e*, *us* æqualia, erit parallelogrammum, atque adeò ES − *es* = *u*S = S*s*, hinc (§. 87.) omnes differentiæ ES − *es* seu excessus maximæ ES supra minimam, quæ in vertice A nulla est, *hoc est sola ES æquatur omnibus Ss* seu arcui circuli AS & sic ubique, propterea Isochrona quæsita BEA est *Cyclois* ordinaria, cujus semibasis BC æquatur peripheriæ semicirculi ASC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

180. Tempus descensus per cycloidis arcum BE, erit ad tempus per axis partem æquealtam CH, sicut arcus CS circuli generatoris interceptus inter parallelas BC & EH, ad subtensam CS ejusdem arcus. Nam propter parabolam ARD & circulum ASC, est CI(CD) : CP(HR) = CA : AS, atque adeò anguli ICP & CAS vel CSH æquales sunt, adeò ut SC & CI *in directum* jaceant. Jam quia (§. 172. n. 11.) tBE = N. ang. ICD erit etiam tBE = N. ang. SAC, atqui (§. 129.) angulus SAC = ½ arc. SC : ½ CA = arc. CS : CA, ergo tBE = N. arc. CS : CA, vel quia N = √(ΘA : Aa), erit tBE = arc. CS. √ΘA : CA√Aa, aut quia ΘA = 2CA, fiet tBE = 2. arc. CS : √(2CA. Aa) = 2arc. CS : CD, propter parabolam ARD; & tCH (§. 151.) = √(2CH : Aa) nulla habita ratione massæ corporis, cum hoc loco mobile non conferatur cum aliis, sed unum idemque corpus tantum in linea curva BEA vel in axe CA moveri intelligatur, adeò ut loco ipsius *M*, quæ formulam articuli citati 151. ingreditur, poni possit unitas. Sed tCH = √(2CH : Aa) reducitur ad tCH = √(4AC. CH : 2CA. Aa) = 2CS : CD; ergo tBE : tCH, ut fractio $\frac{2\text{arc. CS}}{\text{CD}}$ ad $\frac{2\text{subt. CS}}{\text{CD}}$; atque adeò tempus per BE est ad tempus per CH sicut arcus CS ad ejus subtensam CS.

Propterea tempus per totam semicycloidem BEA ad tempus descensus mobilis per axem ejus CA se habet, ut semicircumferentia CSA ad diametrum CA. prout primùm ab Hugenio, dein à multis aliis demonstratum est; sed ex fundamentis ab hisce nostris multum diversis.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [116] - 88
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXIX. Problema.

181. *Si ſcala ſolicitationum gravitatis centralium fuerit linea recta* Fig. 42.
h a, *quæ deorſum producta transeat per centrum* O *ſolicitationum gravitatis; invenire iſochronam* BEA *in hac hypotheſi.*

Quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah = (HO^2 - AO^2).Aa : AO$ propter trapezium $HAah$, curva AR invenitur hyperbola eſſe, in quâ $HR^2.AO : Aa = HO^2 - AO^2$.

II. Ex aliquo axis puncto G, tanquam centro, deſcriptus circulus AMN ab arcubus concentricis indefiniteque vicinis EH, *e*K ſecetur in punctis I & *q* actisque ex centro G ad hæc puncta radiis GI & G*q*, tum etiam rectis AI & A*q*, illa ſeu AI ſecet arcum *e*K in *p*, ſitque arculus *qr* centro A deſcriptus, junganturque demum IO, *q*O & *p*O.

Jam in triangulo IGO, ſi GO conſideretur inſtar baſeos, erit ut ſupra (§. 171.) oſtenſum $IG^2.AO + IO^2.AG = AI^2.GO + GA.AO.GO$, atque adeo $AI^2.GO = IO^2.AG + IG^2.AO - GA^2.AO - AO^2.AG = HO^2.AG - AO^2.AG$, & per conſequens $HO^2 - AO^2 = AI^2.GO : AG$ (vel num. 1. hujus) $= HR^2.AO : Aa$; hinc fiet $HR^2 : AI^2 = Aa.GO : AG.AO$, & (§. 172.) $AE^2 : HR^2 (= NN : I) = \Theta A.OA : \Theta O.Aa$, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum fiet $AE^2 : AI^2 = Aa.GO.\Theta A.OA : AG.AO.\Theta O.Aa = \Theta A.GO : \Theta O.AG$, hinc $AE : AI = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$ atque adeò eſt curva AE ad homologam AI in data ratione, ac propterea $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$.

III. Ergo inter circulos concentricos EH & *eq*K ad punctum I aptanda eſſet quædam lineola, quæ ſit ad I*r*, differentiam inter ſubtenſas I*A* & *qA*, in data ratione $\sqrt{(\Theta A.GO)}$ ad $\sqrt{(\Theta O.AG)}$. Verum quia facile videtur eſſe I*p* portiunculam ſubtenſæ AI à præfatis circulis concentricis interceptam ad prædictam ſubtenſarum differentiam I*r* in data ratione duplæ GD ad CF, demiſſis ſcilicet ex punctis G & C perpendicularibus ad lineam OI productam, vel duplæ GO ad CO; elementum ergo curvæ *Ee* lineolæ I*p* æquale poni poteſt ex eo ipſo, quòd I*p* & *Ee* habeant ad I*r* datam rationem, quod reſpectu rationis I*p* ad I*r* ita eſſe demonſtrandum eſt. Agantur MC, IC, & MN, quo facto, erunt primum triangula I*pi* & CIF ſimilia, quandoquidem angulus CIA in ſemicirculo rectus efficit, ut duo *pI i* & CIF ſimul rectum æquent, ut adeò angulus *pI i*

æqualis sit angulo FCI & cum anguli ad *i* & F sint (secundùm hypothesin) recti, necesse est, ut tertius tertio atque adeo triangulum triangulo simile sit. Secundo, quia angulus qIi sub tangente Iq & secante IO, vel ejus verticaliter oppositus æqualis angulo MNI, in alterno segmento ipsius IM, angulique i & IMN recti sunt, triangula ipsa INM & *q*I*i* similia existent. Tertiò, triangula etiam I*qr* & CAI similia erunt, quoniam angulus *q*IA sub tangente I*q* & secante IA æquatur angulo ICA in alterno segmento, & anguli ad *r* & AIC recti; adeoque *tria hæc triangulorum similium paria* suppeditabunt has analogias I*p* : I*i* = IC : CF, item I*i* : I*q* = MN : IN, & denique I*q* : I*r* = AC vel IN : IC; ergo ex æquo fiet Ip : Ir = MN : CF = 2DG : CF = 2GO : CO.

IV. Adeoque, cum sit (num. 11.) Ee : Ir = $\sqrt{}$(ΘA. GO) : $\sqrt{}$(ΘO. AG) & num. 111. Ip : Ir = 2GO : CO, erit Ee = Ip, si fuerit $\sqrt{}$(ΘA. GO : ΘO. AG) = 2GO : CO; hæc ergo rationum æqualitas assumatur, quoniam recta ΘA ad nullam adhuc magnitudinem est restricta, suamque magnitudinem etiam ad diametrum circuli CA relatam habere debet; fietque hoc casu ΘA = 2OG. AC : AO; nec non Ip = E*e* atque adeo *ip* = *fe*; porro (§. 129.) est *qp* = *p*O. ang. *pOq*, & *qr* = A*q*. ang. *q*AI = A*q*. ½ ang. I*Gq*. Verùm quia *pq* : *qr* (= I*p* : I*i* = IC : CF) = AC : MC, ideò MC. *pq* = AC. *qr*, vel *p*O. MC. ang. *pOq* = A*q*. AC. ang. *q*AI = AI. AC. ½ I*Gq* = AI. AG. I*Gq*, ergo *pOq* = AI. AG. I*Gq* : KO. MC, sed propter triangula similia OIA & OCM, erit IA : MC = IO : CO = HO vel KO : CO; propterea ponendo loco AI & MC, homologas proportionales KO & CO, fiet ang. *pOq* = KO. AG. ang. I*Gq* : KO. CO = AG. I*Gq* : CO, atque adeò omnes *pOq*, qui singulis I*Gq* respondent = AG. omn. I*Gq* : CO = AG. ang. IGA : CO, aut posito angulo SOC = omnibus *qOp*, fiet SOC = AG. IGA : CO, seu CO. ang. SOC = AG. ang. IGA, verùm (§. 129.) CO. ang. SOC = arcui SC, & AG. ang. IGA = arcui IA; ergo arcus SG = arcui IA, atque BC = AIMC. Jam EO*e* = IO*p* = IO*q* + *q*O*p*; ergo $\int$EO*e* = $\int$IO*q* + $\int$*q*O*p*, id est, EOA = IOA + SOC, sed EOA = EOT + SOC, ergo EOT + SOC = IOA + SOC, atque adeò EOT = IOA; idcirco super diametro ST = CA descriptus semicirculus SET transibit per curvæ AB punctum E, eritque arcus SVE = arcui SB, quandoquidem jam arcus AI vel TE ipsi CS, & AMC vel TVS toti CSB æquales sunt ostensi. Propterea curva quæsita in hac hypothesi particulari BEA est *Epycyclois* quæ describitur motu puncti in circumferentia circuli SVT fixi E, cum scilicet

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [118] - 90
PUBLIC DOMAIN

licet hic circulus in cava parte alterius circuli BSC ex B per S versus C volvitur; ita tamen ut initio motus punctum describens E in circulo mobili SVT punctum B immobilis tetigerit, atque ab hoc puncto B moveri cœperit, curvam BEA deinceps descripturum rotatione circuli SVT super BSC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

182. *Si diameter circuli generatoris AC fiat infinita*, cyclois *BEA* mutabitur in lineam rectam axi *OC* perpendicularem, idcirco etiam in hac recta corpora eodem tempore ad punctum A appellent, sive initium motus puncto A viciniſſimum ſit, ſive etiam ab eodem remotiſſimum fuerit.

Scholion.

Poſt Propoſitionem XXI. commodus locus fuiſſet de conatu centrifugo ex motu circulari oriundo aliqua adjiciendi: ſed quia ejusmodi conatuum centrifugorum theoria nonnulla circa motum pendulorum præſupponit, ſiquidem plene ſit tractanda, ideo etiam in hunc locum erat differenda. Poſtquam Hugenius veras horum conatuum leges aperuit ad calcem Horologii ſui Oſcillatorii, Illuſtr. Marchio Hoſpitalius Hugeniana theoremata, absque demonſtratione ab Autore ſuo propoſita, demonſtrata dedit in Actis Acad. Reg. Par. Scient. 1700, loquor de omnibus Hugenianis theorematibus de vi centrifuga: nam diu ante Hoſpitalium Newtonus nonnulla eorum demonſtraverat in *Philoſoph. Nat. Princ. Math.* viamque aperuerat, cui inſiſtendo reliqua omnia poſſent expediri; poſt laudatiſſimos *hosce Geometras plures alii Autores* Hugenii 13. theoremata de vi centrifuga demonſtrare conati ſunt, nonnulli laudabili ſucceſſu, alii vero non item, utpote qui paralogismis nonnullis demonſtrationes ſuas fœdarunt, ut facile oſtendi poſſet, ſi modo id è re eſſet. Sed ad rem: cum filum quoddam alicubi affixum alterique ſuo capiti annexum habens pondusculum, circa punctum fixum converſum deſcribit circulum, id in plano moveri dicetur, cum reapſe in plano circuli moveatur; ſin verò filum motu ſuo ſuperficiem conicam deſcribit; id *Pendulum conicum* deinceps dicetur.

183. Sit ergo filum DM clavo in D affixum, in cujus extremitate annexum ſit corpus M, atque filum circa punctum D in plano Fig. 43.

converſum deſcribat circulum RQM, cujus radius DM dicatur ſimpliciter R, conatus centrifugus C, velocitas qua mobile M in ſua circumferentia æquabiliter revolvitur, V, & hæc velocitas, tanta ſit quantam idem mobile M acquireret motu naturaliter accelerato à quiete in F poſt caſum perpendicularem ex altitudine FM, quam *Altitudinem determinatricem* poſthac vocabimus, atque litera D inſigniemus. Tempus, quo mobile circumeundo peripheriam RQM unum circuitum abſolvit, ſit T; ac denique ratio peripheriæ ad ſemidiametrum ſit ut p ad 1, adeò ut peripheria radii R, ſit pR. Ipſa vero gravitas, ut jam alibi factum, dicetur G, quæ in præſenti materia non variabilis ſed uniformis eſt conſideranda.

Hisce jam poſitis, ſupra (§. 119.) dictum eſt ſolicitationem gravitatis cuilibet curvæ normalem coërcere conatum mobilis à curva juxta directionem tangentis recedendi, atque adeo ejusmodi conatui generaliter æqualem eſſe in omni curva; ac propterea etiam in circulo. Generaliter itidem (§. 154.) demonſtratum eſt, reſpectu cujuslibet curvæ à mobili quodam deſcribendæ, quadratum celeritatis in quolibet curvæ puncto æquivalere rectangulo ſub radio oſculi ſeu curvaturæ & rectæ, quæ ſolicitationem curvæ perpendicularem ex centrali derivatam exponit; neceſſe eſt ut hoc idem etiam valeat in circulo in *ſpecie*; verum in circulo radius curvaturæ eſt ejus radius R, & ſolicitatio circumferentiæ perpendicularis conatui centrifugo C æqualis eſt, ac velocitas in quolibet peripheriæ puncto nobis dicitur V. Propterea vi citati theorematis (§. 154.)

Æq. I. $V^2 = R.C$. . 1. Deinde quia motus æquabilis eſt in circulo erit $T = pR : V$, hoc eſt, tempus innoteſcit applicando peripheriam tanquam ſpatium transmiſſum ad velocitatem, qua id percurritur, ergo etiam

Æq. II. $T = pR : \sqrt{RC} = p.\sqrt{(R:C)}$. . Denique, ſi conatus centrifugi conferendi ſint cum gravitate G, tertia formula opus

Æq. III. eſt, quam articulus 150. ſuppeditat 2. D. $G = V^2$. .

Hinc 1°. formulæ prima & tertia efficiunt $R.C = 2D.G$ atque adeò $C : G = 2D : R$ hoc eſt, conatus centrifugus ſe habet ad gravitatem, ut dupla lineæ determinatricis ad radium circuli; atque adeò ubi hæc determinatrix altitudo D ſemiſſem radii R æquaverit, conatus centrifugus gravitati æqualis erit. Quod eſt theor. 5. Hugenii.

2°. Si in diverſis circulis tempora periodica T ſunt æqualia etiam ipſæ $p\sqrt{(R:C)}$ æquabuntur, atque adeò conatus centrifugi radiis directe proportionales erunt.

3°. Si T ut R^n, erit V ſeu $pR : T$, ut R^{n-1} inverſe, atque adeò

C

C seu $ppR:T^2$ erit reciproce ut R^{2n-1}. Proinde si conatus centrifugus fuerit reciproce ut T^2, erit tempus periodicum in ratione sesquiplicata radii R, & in hoc consistit celebre Kepleri theorema. Reliqua, quæ eadem facilitate ex tribus præcedentibus formulis elici possunt, Lectoris industriæ relinquimus, atque adeò ad contemplationem pendulorum conicorum absque ulterioribus ambagibus accedimus.

184. Si filum AM motu conico moveatur circa axem AD horizonti rectum, adeo ut pondus ipsi annexum M circumferentiam circuli MQR describat; id fieri non potest, quin præter gravitatem secundùm directionem ipsi AD parallelam in corpus M agentem eidem mobili insit conatus alius secundùm directionem DM agens. Nam ut filum AM in situ hoc sub angulo DAM ad axem inclinato detineatur duabus viribus aut solicitationibus lateralibus AB & BC opus est, quarum prior gravitatem exponit, altera verò BC nonnisi à motu circulari provenire potest, ex motu vero centrali resultat conatus centrifugus, ergo BC repræsentat ejusmodi conatum centrifugum. Agatur igitur BE æquidistans lateri AM, fietque $EM=BC$. Ponantur insuper $AD=A$, $AM=L$, $AB=G$, & $BC=EM=C$, radius $DM=R$, peripheria $MRQ=pR$, & perinde ac supra V celeritas mobilis in circumferentia MQ; quibus præsuppositis, erit iterum, ut in antecedenti paragrapho, tempus unius circuitus T mobilis M in peripheria MQR, dum filum AM superficiem conicam describit $=p\sqrt{(R:C)}$ verum ob parallelas AM & BE, est $AD:AB=DM:EM$, hoc est; $A:G=R:C$, ergo etiam $T=p\sqrt{(A:G)}$, hæc verò expressio etiam significat (§. 175. 178.) tempus duarum oscillationum minimarum lateralium penduli cujus A sit longitudo; magnitudo vero $\sqrt{(A:G)}$ significat tempus descensus perpendicularis alicujus gravis ex altitudine $\frac{1}{2}A$. Propterea tempora circuitus pendulorum conicorum sunt in subduplicata ratione altitudinum A conorum. Superfluum duco reliqua, circa ejusmodi pendula ab Hugenio indicata, theoremata operose demonstrare, cum ex hisce positis principiis sponte sua facillime fluant, ceu quilibet videbit, qui animum iis advertere velit. Priusquam tamen ad alia transeam, contemplabimur paulisper problema ab ingeniosissimo Joh. Bernoullio olim propositum quodque ab Illustr. Hospitalio solutionem nactum est; sed quoad arguendi formam à nostra differentissimam.

PROPOSITIO XXX. Problema.

Fig. 44. 185. *Invenire curvam* ABN *ejus conditionis, ut in ea descendens grave A motu naturaliter accelerato, eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto.*

I. Sint CD axis curvæ quæsitæ, CA prima ordinata in cujus continuatione AF exponat gravitatem seu pondus absolutum mobilis A, atque super ea descripto semicirculo AGF, agantur FG tangenti curvæ in puncto B, & Fg tangenti in *b* æquidistantes, junganturque AG, *Ag*. Radius deinde circuli osculatoris curvæ in puncto B, id est, BZ producatur in L, usquedum BL = AF = BI quæ sumta est in ordinata curvæ DB ultra curvam prolongata. Ipsis AG, Ag fient æquales AM, A*m*, & denique ex puncto I demittatur perpendicularis IK ad lineam BL, eritque BK = AG = AM, atque adeò MF = KL.

II. Quoniam BI exponit pondus absolutum mobilis A vel B, ipsa BK exponet pressuram, quam pondus in curvæ punctum B exeret secundum directionem BL, sed præter hanc pressionem aliam insuper sustinebit idem curvæ punctum B à conatu centrifugo mobilis, ac per consequens hic conatus exponi debebit per KL, quandoquidem pressio totalis BL æquari debet (secundùm hypothesin) ipsi AF vel BI. Dicatur celeritas acquisita in B, V; eritque (§. 154.) $V^2 = BZ.KL = BZ.MF$, verùm (§. 150.) est etiam $V^2 = 2AF.DB$, ergo $BZ.MF = 2AF.DB$; hinc $B\beta.MF : BZ.MF = Bb.MF : 2AF.DB$. Atqui similitudo sectorum BZ*b*, GA*h*, & *g*F*h* præbet Bb : BZ = M*m* (*gh*) : *g*F, atque ex similitudine triangulorum B*b*E, & FAG elicitur B*b* : AF = E*b* : FG; propterea subrogando in antecedenti analogia loco Bb, & BZ proportionales *Mm* & FG, atque loco B*b* & AF, proportionales E*e* & FG, eaque mutabitur in hanc alteram $Mm.MF : FG.MF = E\beta.MF : 2DB.FG$, vel $2MF.Mm : FG.ME = 2E\beta.MF : 2DB.FG$ vel ductis consequentibus in MF : FG, erit $2MF.Mm : MF^2 (= 2E\beta.MF : 2DB.MF) = E\beta : DB$. Unde, quoniam decrementum $2MF.Mm$ est ad decrescentem MF^2 sicut incrementum E*b* crescentis DB ad hanc crescentem, erit (§. 153.) crescens DB ad suam primam magnitudinem CA, ut decrescentis prima magnitudo, quæ est FA^2 ad decrescentem MF^2; adeoque sumta P media proportionali inter AC & DB, fiet $P^2 : AC^2 = AF^2 : MF^2$ vel P : AC = AF : MF, & convertendo P − AC :

P

$P = AG : AF$, hinc $AF^2 : AG^2 = P^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & dividendo $FG^2 : AG^2 = 2AC.P - AC^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC = Eb : BE$: adeoque, si dicantur AC, a; CD, x; DB, y; Eb, dy, erit $p = \sqrt{ay}$, & $2pdp = ady$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC$, fiet in his symbolis $dy : dx = \sqrt{(2ap - aa)} : p - a$, ergo $pdy - ady = dx\sqrt{(2ap - aa)}$, vel $apdy - aady = 2ppdp - 2apdp = adx\sqrt{(2ap - aa)}$, atque adeò $dx = (2ppdp - 2apdp : a\sqrt{(2ap - aa)})$ quæ mutatur in $dx = (q^4dq - a^4dq) : 2a^4$, cujus integralis est $10a^4x = q^5 - 5a^4q + 4a^5$ si scilicet positum fuerit $q = \sqrt{(2ap - aa)}$, atque retrogradiendo invenietur $q = \sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)}$ atque adeò æquatio curvæ quæsitæ $(aa, + (y - a - \sqrt{ay})$ in $\sqrt{(2a\sqrt{ay}, - aa)} = \frac{1}{2}ax$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

186. Quoniam invenimus $BZ : DB = 2AF : MF$ & $P : CA = AF : MF$, vel $2P : CA = 2AF : MF$, erit pariter $2P : CA = BZ : DB$ & invertendo $CA : P = DB : BZ$, atque adeò radius evolutæ in quolibet curvæ puncto ope hujus analogiæ innotescit, quæ analogia consentit cum ea, quam Ill. Marchio Hospitalius tradidit in Actis Acad. Reg. Scient. Paris. 1700. ab initio.

Caput IV.

De Solicitationibus centralibus quibus corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de motu Apsidum.

Definitio.

187. Sit ABE quilibet orbis *immobilis*, cui figura *abe* similis & æqualis dicatur orbis *mobilis*, quia circa punctum C ad quod solicitationes centrales diriguntur, reapse moveri intelligendus est; ea tamen ratione ut angulus ACa, quem axis ejus *ae* aliquo tempore descripsit, sit ad angulum aCb, quem arcus curvæ mobilis *ab* à mobili in curva incedente eodem hoc tempore descriptus subtendit, in ratione data. Axis *ae* motus, dicitur motus Apsidum. Fig. 45.

Co-

Corollarium I.

188. Quia angulus *a*CA ponitur ubique ad angulum *b*C*a* in data ratione, erit etiam componendo angulus *b*CA ad angulum *b*C*a*, vel descripto per orbis mobilis punctum *b* circulo *b*B immobilem orbem secante in puncto B, angulus *b*CA ad angulum BCA in data ratione. Cum Illustri Newtono nominemus rationem anguli BCA ad angulum *b*CA æqualem datæ F ad G.

Corollarium II.

189. Cum mobile *a*, orbem mobilem *abe* circumeundo describens, duplicem habeat motum, scilicet eum, quo in suo orbe mobili incedit, tum etiam motum ipsius orbis, ex gemino hoc motu liquet compositum iri motum secundum lineam curvam AN*b*. Idcirco idem est, si mobile in curva immobili AN*b* movetur, quam si in orbe mobili *abe* incederet, & vis centripeta aut solicitatio centralis in curvæ AN*b* puncto *b* requisita prorsus eadem erit cum ea qua opus est ut mobile in curva mobili *abe* semper incedere possit absque eo, ut unquam à curva *ab* recedat, durante motu plani ejusdem *abea*. Propterea ad determinationem solicitationis centralis, quæ corpus semper in perimetro orbitæ mobilis retinere possit, tantum quærenda esset expressio solicitationum centralium pro singulis curvæ immotæ AN*b* ex duplici motu resultantis, scilicet ex motu orbitæ & ex motu corporis in orbita, punctis; ut Cel. Varignon id egit in Actis Acad. Scient. Paris. 1705. ad d. 5 Dec. Verum, quia tota res non ineleganter ex theoria conatuum centrifugorum derivari potest, id paucis ostendere libet.

PROPOSITIO XXXI. Theorema.

Fig. 45. 190. *Excessus solicitationis centralis requisitæ ad id ut corpus aliquod in orbita mobili circa punctum* C, *ut* abe *revolvi queat, supra solicitationem centralem, qua idem corpus in orbe immobili* ABE *delatum in pari distantia* BC, *vel* bC *urgetur, æquatur excessui conatus centrifugi puncti* b, *in orbe mobili arculum* bh *describentis, supra conatum centrifugum mobilis cujusdam extremitati* B *radii vectoris* CB *annexi atque arculum* BH *describere nitentis eo tempusculo, quo punctum* b *suum arculum* bh *conficeret.*

Quia

Quia corpus in orbita mobili movendum à rotatione seu motu circulari plani *abe* acquirit conatum recedendi à centro C, atque adeò à curva ipsa *ab*, necessum est, ut quædam solicitatio ad punctum C directa conatum ejusmodi excussorium retundat, ad id ut corpus in orbita mobili gyrari queat, nec extra eam vagetur; hancque solicitationem præcise æqualem esse oportet conatui illi centrifugo à solo plani motu orto, alioqui corpus in orbita mobili non detineretur, si solicitatio conatu centrifugo major vel minor esset: sed conatus centrifugus à motu plani *abe* oriundus est excessus conatus centrifugi puncti *b*, à motu radii vectoris *b* angulum *b*C*h* describere molientis, supra conatum centrifugum puncti B in orbita quiescenti ABE, arculum BH describere conantis; nam motus angularis *b*C*h* non solum involvit motum angularem BCH radii vectoris BC in orbita quiescenti alteri *b*C*h* contemporaneum, sed etiam motum ipsius orbitæ plani, ac propterea conatus centrifugus, qui resultat à motu puncti *b* in radio vectore *b*C, angulum *b*C*h* describente, non solum in se continet conatum centrifugum puncti B in radio vectore BC orbitæ quiescentis, angulum BCH describente, sed etiam conatum centrifugum, qui provenit à motu plani *abe*, adeoque hic conatus æquivalet excessui conatus centrifugi puncti *b*, supra conatum centrifugum puncti B in orbita immobili; atqui idem conatus centrifugus à motu plani *abe* ortus æqualis est solicitationi centrali, à qua retundi debet; & hæc solicitatio coërcens conatum centrifugum æquatur excessui solicitationis centralis in puncto orbitæ mobilis *b* supra solicitationem centripetam in orbitæ immobilis puncto B cum altero *b* æquè alto. Ergo hic excessus solicitationum centripetarum æquatur excessui conatuum centrifugorum in *b* & B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

191. *Iisdem positis, excessus solicitationis in orbitæ mobilis puncto* b, *supra solicitationem centripetam in orbitæ quiescentis puncto* B *æqualto, erit ad solicitationem centripetam in puncto* A *orbitæ immobilis in composita ratione ex ratione* $F^2 - G^2$ *ad* G^2 *& ratione solidi* $AC^2 \cdot AO$ *ad solidum* BC^3; *existente* AO *radio circuli ejusdem curvitatis cum curva* ABE *in* A, *seu radio circuli curvam osculantis in* A.

Compendii gratia velocitates circulationis radiorum *b*C, BC, AC designabimus respective per *u*b, *u*B, *u*A; conatusque centrifugos Fig. 45.

punctorum b, B, A; gyrantium per cfb, cfB, cfA, ac denique solicitationes centripetas in iisdem punctis per, cpb, cpB, cpA.

Jam I. quia velocitates radiorum Cb, CB sunt ut anguli eodem tempore ab ipsis descripti, erit ub : uB = ang. bCb : ang. BCH (§. 188.) = F : G, ergo $(u\text{b})^2 : (u\text{B})^2 = F^2 : G^2$. Atqui in circulis æqualibus conatus centrifugi sunt in duplicata ratione velocitatum, ergo cfb : cfB = $F^2 : G^2$, & dividendo cfb − cfB : cfB = $F^2 - G^2 : G^2$.

II. Porro cum in orbita quiescenti æqualibus temporibus æquales areolæ BCD vel BCH, & ACα describantur, velocitates radiorum BC, AC hisce radiis erunt reciproce proportionales, hoc est uB : uA = AC : BC, & $(u\text{B})^2 : (u\text{A})^2 = AC^2 : BC^2$. atqui (§. 183. æqu. 1.) est $(u\text{B})^2 = BC.cf\text{B}$, & $(u\text{A})^2 = AC.cf\text{A}$. Ergo BC. cfB : AC. cfA = $AC^2 : BC^2$, vel etiam ductis in hac ultima analogia antecedentibus in AC & consequentibus in BC, eritque AC. BC. cfB : AC. BC. cfA = cfB : cfA = $AC^3 : BC^3$, verum (num. 1.) erat cfb − cfB : cfB = $F^2 - G^2 : G^2$, ergo per rationum compositionem & ex æquo fiet cfb − cfB : cfA = $(F^2 - G^2).AC^3 : G^2.BC^3$. Porrò quia (§. 183.) $(u\text{A})^2 = AC.cf\text{A}$, & (§. 154.) $(u\text{A})^2 = AO.cp\text{A}$, existente AO radio circuli curvam ABE in puncto A osculantis, erit AC. cfA = AO. cpA, atque adeò cfA : cpA = AO : AC; ergò denuo ex æquo cfb − cfB : cpA = $(F^2 - G^2).AC^2.AO : G^2.BC^2$; atqui per Prop. præc. est cfb − cfB = cpb − cpB, ergo excessus solicitationis centripetæ in b solicitationem in B, est ad solicitationem centripetam in A, in composita ratione, ex ratione $F^2 - G^2$ ad G^2 & ratione solidi $AC^2.AO$ ad solidum BC^3. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

192. Adeoque in quolibet puncto b orbitæ mobilis abe, solicitatio centralis erit ut cpB, + $(F^2 - G^2).AC^2.AO.cp\text{A} : G^2.BC^3$.

Corollarium II.

193. Hinc si orbita ABE, *abe*, fuerit elliptica, ita ut cpB : cpA = $AC^2 : BC^2$, atque adeò cpB = $AC^2.cp\text{A} : BC^2$, erit cpb = $AC^2.cp\text{A} : BC^2$, + $(F^2 - G^2).AC^2.AO.cp\text{A} : G^2.BC^3$.

Scholion.

194. Inventa jam generali lege solicitationum centralium in orbitis

bitis mobilibus, problema, inveniendi ex data lege ſolicitationum centripetarum rationem F ad G, qua motus apſidis *ae* determinatur, ſolutu difficile non erit per methodum mox exponendam. Ingenioſa eſt via & oppidò elegans quam Cel. Newtonus ſequutus eſt in ſolutione ejusdem Problematis, ſupponens orbitas propemodum circulares, quamque fuſius explicat Sect. IX. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* & poſtea prolixo commentario illuſtravit Dav. Gregorius in ſuis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ Elementis Lib. IV. Sect. II. Laudata *Newtoni methodus conſiſtit in comparatione* terminorum alicujus ſeriei infinitæ cum homologis terminis in Canone pro determinatione ſolicitationum centripetarum in orbita mobili, eaque pro ſingulis novis exemplis novas ſeries novumque calculum ſubducendum depoſcere videtur. Sed quid, ſi modum facillimum aperuero, quo idem absque ullo ſerierum infinitarum auxilio obtineri queat, imo longe plura, quandoquidem præbet canonem generalem, quæcunque ſolicitationis centripetæ ſit lex, rationem F ad G manifeſtantem?

195. Sit generaliter ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut $P : BC^3$, eritque (§. 193.) $P = AC^3 . BC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^3 . AO . cpA : G^2$, &, ſi decrementum infiniteſimum magnitudinis P, dicatur $Q . bm$; formula determinans ſolicitationem centripetam in orbitæ mobilis puncto d, erit $P, - Q . bm = AC^3 . dC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^3 . AO . cpA : G^2 = AC^3 . BC . cpA - AC^3 . bm . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^3 . AO . cpA : G^2$, quæ ex priore ſubducta relinquet $Q . bm = AC^3 . bm . cpA$, vel $Q = AC^3 . cpA$; qui valor in prima hujus articuli æquatione ſubſtitutus, efficiet $P = Q . BC + (F^2 - G^2) . Q . AO : G^2$, ex quâ elicietur $F : G = \sqrt{(P - Q . BC + Q . AO : Q . AO)}$. Verum, quia ellipſin ABE ad formam circularem quam proxime accedere *cum Newtono ſupponimus*, ideo ipſæ BC, AC & AO tanquam æquales tractandæ ſunt, nam ſemiſſis parametri ellipſeos, ſeu AO, à ſemidiametro AC vel BC circuli in quem deſinit, non differet; ac propterea præcedens analogia abit in hanc ſimplicem $F : G = \sqrt{P} : \sqrt{Q . AO}$. Qui eſt Canon generalis, qui quærebatur atque promittebatur ſupra, pro orbita mobili elliptica.

196. Regulam præcedentem unico exemplo illuſtrare libet, quod nobis omnium inſtar erit, idque ab Illuſtri Newtono mutuabimur. Sit ergo ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut quantitas $\frac{az^n + bz^n}{z^3}$, ubi z ſignificat bC vel BC in fig. 45, eritque proin-

de $P = az^m + bz^n$, & $Q.bm = Q.dz = amz^{m-1}dz + bnz^{n-1}dz$, hoc est $Q = amz^{m-1} + bnz^{n-1}$, hinc $F:G (= \sqrt{P}:\sqrt{Q}.AO) = \sqrt{(az^m + bz^n : amz^{m-1}AO + bnz^{n-1}AO)}$. Verùm, quia juxta monita in articulo præcedenti, z vel $bC = AC = AO$; cum Newtono æquales unitati poni possunt, reperitur $F:G = \sqrt{(a+b : am+bn)}$ prorsus ut habet Newtonus in exemplo 3. post Prop. 45. *Lib. I. Princ. Phil. Nat.* Sin vero fuisset $P = az^m - bz^n$, invenissemus pariter ut Laudatiss. Vir, $F:G = \sqrt{(a-b : am-bn)}$.

Denique si solicitatio centralis $P:BC^1$ fuerit ut BC^m, atque adeò $P = BC^{m+3}$, ex motu apsidum, seu ex ratione $F:G$, invenietur index m potestatis BC^m. Nam reperietur hoc casu $Q = \overline{m+3}\,BC^{m+2}$, unde si $AO = AC = BC = 1$, erit $F:G = \sqrt{(1:m+3)}$ atque adeò $m = (G - 3F^2):F^2$.

CAPUT V.

De Motibus gravium inter se connexorum atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; seu de motu Pendulorum compositorum eorumque centro oscillationis in omni possibili gravitatis variabilis hypothesi.

THeoriam centri oscillationis Hugenius primus, quod sciam, aperuit in parte quarta eximii Tractatus de Horologio Oscillatorio. Sed quia is principio instítit, quod indemonstratum supposuit, verissima ejus doctrina ab omnibus integrum assensum non impetravit. Petebat enim, ut sibi concedatur, fore ut centrum commune gravitatis omnium, compositi cujusque penduli, partium non possit altius assurgere, cum unaquæque particula diffracto vinculo, quo cum reliquis connexa erat, ea celeritate ascensum suum liberum incipiet, quam junctim cum reliquis descendendo acquisiverat, quin unde delapsum erat descensu totius penduli compositi. Celeb. Jac. Bernoulli alia via longitudinem penduli simplicis composito isochroni generaliter determinans, demonstrationem postulati Hugeniani inde deduxit, sed tantum in hypothesi gravitatis in singulas penduli partes uniformiter agentis. Nos verò rem generalius concipiemus, fingentes gravitatem in partes illas utcunque difformiter agere atque

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [128] - 100
PUBLIC DOMAIN

que hoc non obstante methodo directa & facili memorabilem naturæ legem demonstrabimus; ascensum scilicet centri gravitatis omnium penduli compositi partium, modo paulo supra memorato, æqualem esse descensui ejusdem, tametsi, pro variante in singulis penduli partibus gravitate, centrum earum gravitatis multum diversum sit ab eo, quod est in hypothesi communiori gravitatis uniformis & proportionalitatis ponderum cum massis corporum.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum compositum vocatur, quod pluribus corporibus seu partibus inter se connexis instructum est. Simplex verò quod unico pondere constat.

II.

Axis penduli compositi est recta, quæ ex puncto suspensionis immobili, circa quod scilicet totum pendulum reciproco motu eundo & redeundo oscillatur, per commune centrum gravitatis omnium partium penduli compositi transit.

III.

Axis oscillationis est linea penduli axi perpendicularis per punctum suspensionis transiens, circa quam pendulum vibrationes suas peragit.

IV.

Centrum oscillationis est punctum in axe penduli, cujus distantia ab axe oscillationis æquatur longitudini penduli simplicis compositi synchroni.

V.

Pendulum simplex composito synchronum dicitur, cum hujus axis & illud ex situ horizontali, vel quolibet alio ad horizontem similiter inclinato, simul exire incipientes æquales constanter angulos simul oscillando conficiunt.

197. Penduli compositi CPQ, circa punctum suspensionis C convertibilis, lineæ omnes CP, CM, CQ, PQ gravitatis expertes sint; in terminis vero rectæ PQ ponduscula quæcunque P, Q affixa existant, quorum commune centrum gravitatis sit M, recta CM per Fig. 46.

punctum ſuſpenſionis C & centrum gravitatis ponderum M ducta, vocatur *axis* penduli compoſiti PQC, recta vero CW axi CM perpendicularis per ſuſpenſionis punctum C ducta, eſt axis oſcillationis. Porro ſi penduli compoſiti axis CM ex ſitu horizontali CA delapſus venerit in ſitum CN eo tempore, quo pendulum ſimplex etiam ex ſitu horizontali in CN ceciderit, angulosque perpetuo æquales ACM & ACN confecerint compoſitum CPQ & ſimplex pendulum CN, hoc illi *ſynchronum*, vel ſubinde etiam *iſochronum* dicetur; pondusculum verò in pendulo ſimplici N, inſtar puncti gravis conſideratum, ad axem penduli compoſiti adductum atque applicatum, in eo ſignat *centrum oſcillationis* N.

VI.

198. *Solicitationes vicariæ* ſolicitationum gravitatis centralium ſunt ſolicitationes tangentiales loco centralium gravitatis cogitatione ſubſtituendæ, atque ſolicitationibus hisce æquipollentes. Sic ſolicitationes tangentiales expoſitæ per facta ex magnitudinibus R, S, &c. & V in maſſas P, Q &c. & N, hoc eſt ſolicitationes R. P, S. Q, &c. & V. N in directionibus PR, QS &c. & NV, quæ tangentes ſunt arcuum *Pe*, *Qf*, &c. *Nn* à corporibus P, Q &c. & N oſcillando deſcriptorum, in ſua reſpectiva corpora agentes, ſunt vicariæ ſolicitationum gravitatis centralium ſecundum directiones horizonti normales AP, BQ &c. YN in corpora P, Q, &c. & N agentium, ſi eundem cum hisce effectum producere valent, atque adeò in oppoſitas partes ſecundum *Pr*, *Qs* &c. & *Nu* agentes in æquilibrio conſiſtunt cum ſolicitationibus gravitatis centralibus, quas deinceps etiam exponam per facta E. P, F. Q &c. & G. N ex magnitudinibus E, F, &c. & G in maſſas P, Q, &c. & N.

VII.

199. Ac denique *Solicitationes vicariæ ſimiles* dicentur, quoties magnitudines R, S, &c. & V, homologis diſtantiis PC, QC &c. & NC proportionales erunt.

VIII.

200. Motus penduli compoſiti CPQ & ſimplicis CN ſimiliter accelerari dicuntur, cum celeritatis incrementa infiniteſima à ſolicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempusculo minimo in ſingulis penduli particulis P, Q &c. & ſimplicis pondusculo N ſimul

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [130] - 102
PUBLIC DOMAIN

mul producta, ubique proportionalia sunt homologis distantiis PC, QC &c. & NC particularum oscillantium & corpusculi N ab axe oscillationis.

201. Celeritates actuales & jam acquisitas particularum P, Q &c. penduli compositi, deinceps vocabimus *p*, *q* &c. respective, earumque elementa seu incrementa momentanea *dp*, *dq* &c. Celeritatem verò corpusculi N penduli simplicis nominabimus *n*, ejusque incrementum momentaneum *dn*. Ac tandem solicitatio gravitatis centralis, qua particula P in directione AP urgetur, sit E. P, solicitatio verò centralis particulam Q secundum directionem BQ urgens dicatur F. Q; ac solicitatio gravitatis, qua particula N in directione YN afficitur, G. N.

PROPOSITIO XXXIII. Lemma.

202. *Solicitationes vicariæ* R, S, &c. *juxta directiones* PR, QS, &c. *in particulas* P, Q, &c. *penduli compositi agentes eadem velocitatis incrementa singulis hisce particulis imprimere valent, quæ solicitationes gravitatis centrales* E, F, &c. *juxta* AP, BQ, &c. *in easdem particulas* P, Q, &c. *agentes; atque adeo vicariæ illæ eodem, quo hæ centrales solicitationes, modo penduli compositi motum accelerabunt.* Fig. 46.

Quia compositi penduli partes inter se connexæ sunt, similes arcus simul cunctæ describent, atque suum motum semel conceptum absque ulla mutatione continuarent, nisi gravitas indesinenter in eas agens motum penduli acceleraret. Ad rem nostram motus actualis consideratio nihil confert, quandoquidem in præsenti negotio hic motus jam acquisitus tanquam motus *communis* considerari debet, quo singulæ penduli particulæ abripiuntur; sed celeritatis incrementa particulis istis recens imprimenda tanquam motum earundem particularem nunc spectabimus, & hunc motum nascentem perinde oriri posse à solicitationibus vicariis R, S, &c. ut à centralibus gravitatis E, F, &c. probandum.

Etenim si hoc negetur, imprimant, si fieri potest, gravitatis solicitationes E, F, &c. particulis P, Q, &c. majorem celeritatem quam solicitationes vicariæ R, S, &c. ergo hæ solicitationes, secundum Pr, Qs, &c. agentes, non consisterent in æquilibrio cum solicitationibus E, F, &c. iisdem particulis P, Q, &c. applicatis, quod est contra hypothesin. Idem absurdum sequetur, si dicatur solicitationes gravitatis E, F, &c. minores particulis P, Q, &c. celeritates imprimere posse quam vicariæ. Ergo &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. LEMMA.

203. *Si ſingulæ particulæ* P, Q, &c. *alicujus penduli compoſiti à ſolicitationibus* P.R, S.Q, &c. *quarum* R, S, &c. *ſimiles ſint ipſi* V, *denotante* V. N *ſolicitatione tangentiale mobilis* N, *juxta directiones* PR, QS, &c. *urgentur, celeritates infiniteſimæ* dp, dq, &c. *&* dn *ipſis* P, Q, &c. *&* N *impreſſæ erunt ſimiles, hoc eſt radiis* PC, QC, &c. *&* NC *proportionales.*

I. Sint radii NC, PC, QC &c. libere atque independenter alii ab aliis volubiles circa axem C, & quia (§. 131.) quælibet ſolicitatio æquivalet motui genito applicato ad tempusculum infiniteſimum, quo motus iſte producitur, & quia in caſu noſtro omnes ſolicitationes vicariæ R, S, V, ſimul ſeu eodem tempore agunt, erunt hæ ſolicitationes ut motus P.*dp*, Q.*dq* &c. & N.*dn*; atque adeò ipſæ R, S, ϱ & V, ut *dp*, *dq* &c. & *dn*, atqui ipſæ R, S, &c. & N, (ſecundùm hypotheſin) ſunt, ut radii PC, QC, &c. & NC, ergo & celeritates naſcentes *dp*, *dq*, &c. & *dn* iisdem PC, QC, &c. & NC proportionales ſunt.

II. Cum igitur celeritates *dp*, *dq*, &c. & *dn* ſimiles ſint; motus angulares PC*e*, QC*f*, &c. & NC*l* æquales, hoc eſt anguli ſimul deſcripti PCQ & *e*C*f* æquales erunt, perinde ac rectæ PQ & *ef* particulas PQ connectentes; adeò ut tali motu nulla variatio ratione mutuæ poſitionis particularum P, Q, &c. accidere poſſit. Propterea ſolicitationes tangentiales ſimiles R, S, &c. & V particulis P, Q, &c. ſimiles motus impriment, ſive particulæ illæ P, Q, inter ſe connexæ ſint, ut in pendulis compoſitis, ſive non. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

204. Hinc quia (§. 202.) ſolicitationes vicariæ ſimiles R, S, &c. & V in directionibus PR, QS, &c. & NV corporibus P, Q, &c. & N applicatæ eodem modo pendulorum ſimplicis CN & compoſiti CPQ motus accelerant, quo fieret à ſolicitationibus gravitatis E, F, &c. & G in particulas P, Q, &c. & N agentibus; liquet omninò ambo pendula ſimplex & compoſitum, ex ſimili ſitu reſpectu horizontis moveri incipientia, ſimiliter deinceps & conſtanter motum iri, ita ut æquales ſemper angulos YCN, ACM ſimul conficiant,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [132] - 104
PUBLIC DOMAIN

ficiant atque adeo (§. 197.) unum CN alteri CPQ *ſynchronum* aut *iſochronum* ſit; & converſim, ſi hæc pendula ſynchrona ſint, ſolicitationes vicariæ R, S, &c. & V ſimiles erunt.

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

205. *Si ſingulæ particulæ cujusque penduli compoſiti derepente alicubi vinculo ſolutæ motum in altum convertant, unaquæque ea celeritate quam cum reliquis connexa oſcillando acquiſivit, commune omnium penduli partium gravitatis centrum ad eam ipſam altitudinem aſcendet, ex qua delapſum erat deſcenſu totius penduli compoſiti, cum ſcilicet omnes penduli partes adhuc connexæ eſſent.*

I. Axiom. penduli compoſiti ex ſitu horizontali CA in ſitum CM delapſum eſſe ponamus motu accelerato, particulas vero P, Q, &c. vinculis ſolutas aſcendere in rectis P_2P, Q_2Q, &c. unamquamque celeritate initiali, quam cum reliquis oſcillando acquiſivit; ita ut commune omnium gravitatis centrum M aſcendat per lineam M_2M. Probandum eſt hanc M_2M æqualem fore ipſi DM, quæ profunditatem denotat, ex qua omnium penduli partium centrum gravitatis cecidit motu totius penduli compoſiti. Quia nunc P, Q, N denotant maſſas corporum & E. P, F. Q, &c. G. N eorundem pondera, horum ſumma, excepto pondere N, dicatur M, hoc eſt, M = E. P + F. Q + &c., eritque (§. 48.) propter centrum gravitatis M; E. P. AC + F. Q. BC = M. DC, nec non E. P. AP + F. Q. BQ + &c. = M. DM; ac denique E. P. P_2P + F. Q. Q_2Q + &c. = M. M_2M.

II. Sit inſuper pendulum ſimplex CN compoſito *ſynchronum*, adeò ut id cum CM congruat atque celeritates pondusculorum N, P, Q, &c. *ſimiles ſint*; eruntque adeò (§. 204.) ſolicitationes vicariæ R, S, &c. V ſimiles, verùm quia (§. 198.) ſolicitationes vicariæ ſolicitationibus gravitatis centralibus E, F &c. G æquipollent, atque cum hisce in æquilibrio conſiſtere queunt, erit (§. 56.) E. P. AC + F. Q. BC + &c. id eſt (num. 1.) = M. DC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. & G. N. YC = V. N. NC, atque hinc reſultat analogia M. DC : G. N. YC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC (vel quia R, S, &c. & V radiis PC, QC, &c. NC proportionales ſunt) = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2; at celeritates p, q, &c. n corpusculorum P, Q, N etiam radiis PC, QC, NC proportionantur, ergo M. DC : G. N. YC, vel (propter triangula

similia CDM & CYN) ratio $M.DM : G.N.YN = P.pp + Q.qq +$ &c. : $N.nn$.

III. Quoniam (secundùm hypothesin) corpuscula P, Q, &c. celeritatibus initialibus p, q, ascendentia spatia $P2P$, $Q2Q$ ascendendo emetiri possunt, (§. 141.) eadem corpuscula spatia $2PP$, $2QQ$ à quiete perlabentia celeritates suas p, q &c. acquirere queunt, adeò ut (§. 150.) $2E.P2P = pp$; $2.F.Q2Q = qq$, & $2.G.NY = nn$; loco pp, qq, nn substituendo valores inventos in ultima analogia numeri secundi hujus, erit $M.DM : G.N.YN = 2.E.P.P2P + 2.F.Q.Q2Q +$ &c. hoc est (num. 1. hujus) $2M.M2M : 2G.N.NY = M.M2M : G.N.YN$. Ergo cum consequentes primæ & ultimæ rationis æquales sint, antecedentes etiam æquabuntur; atque adeò $M.DM = M.M2M$, vel $DM = M2M$. Id est centrum gravitatis ad eandem altitudinem ascendit, ex qua delapsum erat. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

206. Resumendo ex num. 11 articuli præcedentis analogiam $M.DC : G.N.YC (= R.P.PC + S.Q.QC +$ &c. : $V.N.NC) = P.PC^2 + Q.QC^2 +$ &c. : $N.NC^2$, si loco rectarum DC, YC earum proportionales MC & NC in eadem analogia substituantur, fiet $M.MC : G.N.NC = P.PC^2 + Q.QC^2 +$ &c. : $N.NC^2$, ex quâ facile elicitur sequens formula generalis $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 +$ &c.$) . G : M.MC$ pro determinatione penduli simplicis CN compositi CPQ *isochroni*, in qua formula $M = E.P + F.Q +$ &c. & $E.P, F.Q$ &c. pondera corporum P, Q &c. denotant, ac punctum M ipsorum centrum gravitatis.

Corollarium II.

207. Si singulæ E, F, &c. & G æquales fuerint, formula præcedentis corollarii fit $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 +$ &c.$) : M.MC$, ubi nunc $M = P + Q +$ &c. Atque hæc foret generalis formula pro omnibus figuris in systemate vulgari gravitatis uniformis in omnibus penduli partibus, quod secuti sunt Celeberrimi Geometræ Hugenius & Jac. Bernoullius sua methodo particulari.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [134] - 106
PUBLIC DOMAIN

Corollarium III.

208. Iisdem positis, quæ in corollario antecedenti, si duæ tantum particulæ P, Q penduli compositi spectentur, quarum M etiamnunc centrum gravitatis & aggregatum designet. Habetur (§. 171.) $PC^2 . MQ + QC^2 . MP = MC^2 . PQ + MP . MQ . PQ$. Vel substitutis loco rectarum MQ, MP, & PQ ipsarum proportionalibus, quæ propter centrum gravitatis M particularum P, Q, eodem ac illæ ordine sumta, sunt P, Q, & P + Q seu M; fiet $P . PC^2 + Q . QC^2 = M . MC^2 + M . MP . MQ$, atque adeò formula præcedentis corollarii $CN = (P . PC^2 + Q . QC^2) : M . MC$, nunc fiet $CN = (M . MC^2 + M . MP . MQ) : M . MC$. Adeoque, si innumera sumantur particularum P, Q paria, quibus totum pendulum compositum sit, longitudo penduli simplicis CN composito isochroni tunc erit $\int (M . MC^2 + M . MP . MQ) : \int M . MC$, ubi $\int$ significat summam seu integrale illius quantitatis, cui litera $\int$ præfixa est. Idcirco, si cum Cel. Jac. Bernoullio particulæ P, Q inter se æquales, dicantur dp, & CM, x; MP verò vel MQ, y, hæ enim æquales erunt cum ipsæ P & Q æquentur, earumque centrum gravitatis sit in puncto M; erit $CN = \int (2xxdp + 2yydp) : \int 2xdp = \int (xx + yy) . dp : \int xdp$; quæ est ipsissima formula, quam Acutiss. Vir in Actis Academiæ Reg. Paris. Scient. 1703. ad diem 25. Apr. ex sua methodo elicuit. Quomodo vero formula hæc figuris & solidis debeat applicari, non est hujus loci ostendere, cum id pendeat à calculo summatorio, quem non patitur institutum nostrum prolixius exponere; legi interim possunt, quæ habet super hanc rem Vir laudatissimus loco modo indicato.

Scholion.

209. Universalitas Canonis in corollario primo (§. 206.) exhibiti melius non poterit probari, quam si ostendatur illum jam continere regulam definiendi centrum oscillationis in quolibet pendulo composito, cujus partes diversæ specificæ gravitatis oscillentur in fluido quodam homogeneo, aut, quod eodem recidit, cujus particulæ ex materia eadem ejusdemve specificæ gravitatis vibrationes suas in fluido diversæ densitatis peragant; qualem regulam nobis promittit Celeb. Joh. Bernoullius Act. Lipsi. 1713. pag. 88. Nam si ratio gravitatis specificæ pondusculi P ad fluidum, in quo oscil-

latur, sit ut G ad G−E, & ratio gravitatis specificæ pondusculi Q liquorisque ut G ad G−F, prædicta formula articuli 206. exhibebit longitudinem penduli simplicis CN in vacuo oscillantis atque composito CPQ, quod in fluido vibrationes suas peragit, isochroni.

Exempli causa sit P globulus aureus, Q ferreus, atque pendulum CPQ oscilletur in aqua; & quia gravitates auri, ferri & aquæ sunt ut numeri 100, 42 & 5 ad invicem quam proxime, erit $G:G-E=100:5$, atque adeo $E=\frac{95}{100}G$; & $G:G-F=42:5$, adeoque $F=\frac{37}{42}G$; hinc quia (secundùm hypothesin) $M=E.P+F.Q$, erit M hoc casu æquale $(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G$; atque adeo formula generalis corollarii primi substitutione valoris M, fiet $NC=(P.PC^2+Q.QC^2).G:(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G=(P.PC^2+Q.QC^2):(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q)$. In qua P & Q denotant massas harum particularum, seu etiam pondera earum absoluta, quæ (§§. 30, 152, 175.) massis semper proportionalia sunt. Punctumque M est centrum gravitatis, non ipsorum corpusculorum P, Q sed eorum partium $\frac{95}{100}P$ & $\frac{37}{42}Q$. Hinc ergo liquet, centrum percussionis differre in hoc casu à centro oscillationis. Errant ergo, qui nulla habita ratione gravitatis subitò identificant, atque confundunt hæc duo centra oscillationis & percussionis.

Si formula corollarii primi applicetur corporibus P, Q, quæ liquore specificè leviora sunt, totus formulæ denominator migrabit in quantitatem negativam, quod indicat pendulum situ inverso respectu præcedentis casus oscillationes suas intra liquorem absolvere describendo arcus versus fundum vasis cavos existente oscillationis axe prope fundum. Quomodo prædicta formula pendulis compositis debeat applicari, in quibus singulæ partes in una eademque linea recta dispositæ sunt, nimis planum esse existimo, quam ut ulla explicatione indigeat.

PROPOSITIO XXXVI. Theorema.

Fig. 47. 210. *Identitas centri oscillationis & percussionis eo casu, quo singularum penduli compositi partium pondera massis earundem proportionalia sunt.*

Si

Si particulæ P, Q &c. virgis inflexilibus CP, CQ, PQ inter se connexæ convertantur circa axem CW, punctum in axe CN penduli N, in quo maxima vis in obstaculum ipsi objectum eo exeretur, vocatur centrum percussionis, ostendendumque est hoc punctum tantumdem ab axe oscillationis CW distare, quantum centrum oscillationis in casu Coroll. 2 Prop. anteced. (§. 207). Radiis CP, CQ agantur normales PB, QE axi CM occurrentes in punctis A & D, per quæ & per centra corpusculorum P, Q ducantur normales *AO, DF, PG & QH ad axem CM.* Atque hisce positis statim manifestum est conversione totius figuræ CPQ circa axem CW, particulas P, Q motum iri celeritatibus proportionalibus earum distantiis PC, QC ab hoc axe; atqui juxta ea, quæ supra (§. 53.) dicta sunt, axis penduli CM eandem à particulis P, Q circa C in gyrum actis impressionem accipiet, quam si ejus puncta A & D, in quibus scilicet directiones ponderum in quolibet arcus ab ipsis describendi puncto motum suum prosequi nitentium axi occurrunt, juxta directiones AB & DE illis ipsis celeritatibus impellantur, quas particulæ P & Q &c. habent; propterea factis AB, DE &c. æqualibus vel saltem proportionalibus homologe radiis CP, CQ qui velocitates exponunt, quibus particulæ P, Q in gyrum aguntur, quæstio reducetur ad id, ut inveniatur centrum æquilibrii potentiarum P. AB & Q. DE; sit N hoc centrum, quod ita comparatum esse debet, ut ductis ex eo ad singulas PB, DE, &c. perpendicularibus N*a*, N*d* &c. omnia facta P. AB. N*a* æqualia sint omnibus factis Q. DE. N*d*. Sed ductis BO & EF parallelis CM, triangula AOB, N*a* A similia præbent AB. N*a* = AO. AN & triangula similia DFE & N*d*D efficiunt DE. N*d* = DF. DN; oportet ergo ut omnia P. AO. AN sint æqualia omnibus Q. DF. DN; considerentur tantum duæ P, & Q, eritque P. AO. AN = Q. DF. DN, vel P. AO. AC − P. AO. NC = Q. DF. NC − Q. DF. DC, atque adeò P. AO. AC + Q. DF. DC = (P. AO + Q. DF). NC; verum quia AO = CG & DF = CH propter triangula similia & æqualia ABO & CPG, utpote in quibus hypothenusæ AB & CP æquantur, ac propter similia & æqualia triangula DEF & CQH, in quibus pariter DE & CQ sunt æquales, fiet P. AO. AC + Q. DF. DC (= P. GC. AC + Q. HC. DC) = P. PC^2 + Q. QC^2; & P. AO + Q. DF = P. GC + Q. HC, hoc est (§. 44) = M. MC; existente puncto M centro gravitatis particularum P, Q & M = P + Q. Idcirco factis substitutionibus debitis in P. AO. AC + Q. DF. DC = (P.

$AO + Q.DF). NC$, habebitur $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC.NC$, atque adeo $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$. Quæ expreſſio prorſus eadem eſt cum ea, quam ſupra (§. 207.) reperimus pro centro oſcillationis in hypotheſi communi, qua particularum P, Q pondera maſſis ipſarum proportionalia ſunt, vel, quod eodem recidit, in qua ſingulæ E, F, G &c. quales ſupra (§. 198.) pro ſignificandis juxta maſſas P, Q, N gravitatis ſolicitationibus centralibus adhibuimus, æquales ſunt. In omni verò alia gravitatis hypotheſi different ab invicem centra *oſcillationis* & *percuſſionis*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

211. Hinc ſi fuerint infinita particularum æqualium P, Q paria, tunc fiet $CN = \int(P.PC^2 + Q.QC^2) : \int M.MC$, adeoque nominando CN, t, atque retentis ſymbolis paragraphi 208. fiet $t = \int(xx + yy.dp) : \int x dp$, quæ eſt ipſiſſima iterum formula, in quam dicto loco incidimus, quamque alia methodo etiam reperit Cl. Jac. Bernoulli in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. Acad. 1704. ad diem 14 Apr.

CAPUT VI.

De Regulis motus in colliſione Corporum.

DEFINITIONES.

I.

Corpora duo ſibi directe occurrere dicuntur cum moventur in lineâ rectâ centra gravitatis jungente, atque per contactum eorumdem corporum transeunte.

II.

Velocitates corporum *propriæ* ſunt illæ, quibus corpora moventur. *Velocitas* vero eorundem *relativa* eſt ea, qua cum ad ſe mutuo accedunt. Idcirco celeritas relativa corporum ex oppoſitis plagis ſibi mutuo obviam venientium eſt *aggregatum* celeritatum eorundem propriarum. Sin vero velocius corpus alterum tardius ad eandem partem latum inſequatur, velocitas eorum relativa erit *exceſſus* velocitatis majoris propriæ ſupra minorem.

III.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [138] - 110
PUBLIC DOMAIN

III.

212. Corpora A, B in planis horizontalibus moveri atque inter se collidi intelliguntur ad id, ut motus eorum ante & post occursum æquabiles evadant, nec iidem motus à gravitatis actione à plano utpote sufflaminanda, in quo mobilia incedunt, quicquam alterentur. Celeritates mobilium propriæ ante occursum designabuntur posthac per lineas rectas AD, BD in ipsorum directionibus sumtas, adeò ut quocunque modo mobilia *A*, *B*, incedant, dummodo non in rectis angulum continentibus ferantur, ipsorum celeritas relativa futura sit *AB*. Directiones verò particulares corporum, aut potius directionum plagæ, designentur deinceps per ordinem, quo literæ A, D & B, D scribuntur. Proinde AD significat mobile A ferri celeritate uniformi AD ex A versus D, & B ferri velocitate hac linea BD expressa ex B etiam versus D. Adeoque quoties signum D inter A & B cadit, toties ambo hæc corpora contrario sensu moventur, id est, ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniunt celeritate relativa AB, quæ hoc casu composita est ex particularibus AD, BD; sin vero signum D cadit extra *AB*, ambo corpora movebuntur ad eandem partem, in qua signum D positum est celeritate relativa *AB* æquali in tali casu excessui velocitatis propriæ alterutrius mobilis supra celeritatem propriam alterius. Fig. 48.

213. Et quia motuum plagæ etiam per signa + & − subinde designari solent, probe sciendum + AD idem esse ac − DA, & + DA idem ac − AD, & sic de ceteris. Nam motui + AD contrarius est, seu in plagam contrariam dirigitur, tum − AD, tum etiam DA, atque adeo hæ duæ expressiones sunt æquivalentes; pariter quia & + *DA* & − *AD* eidem motui + AD contrarii sunt, notationes + *DA* & − *AD unum idemque significant*, adeò ut una alteri semper sufficere liceat, quod aliquando bene notatum, utile esse comperietur.

IV.

214. Celeritates corporum inter se collisorum ante conflictum considerabimus quandoque tanquam acquisitas lapsu verticali à quiete incepto motu gravium naturaliter accelerato; & celeritates eorundem post occursum tanquam velocitates initiales corporum, quæ verticaliter in altum lata motu naturaliter retardato certas altitudines emeteri valent priusquam motus eorum ascensionalis penitus extinguatur.

V.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [139] - 111
PUBLIC DOMAIN

V.

215. Vis corporum abſoluta ante conflictum eſt altitudo, quam centrum gravitatis commune mobilium perlabi poteſt, quando unumquodvis corpus per ſuam altitudinem cadendo velocitatem ſuam propriam acquirit. Visque mobilium abſoluta poſt colliſionem, eſt altitudo, ad quam aſſurgere poteſt idem commune centrum gravitatis corporum, quando unumquodque horum corporum celeritate initiali ea, quam in conflictu acquiſivit, ſuam altitudinem aſcendendo abſolvit.

Fig. 50. 216. Sic poſito mobile A acquirere celeritatem ſuam propriam *AD* lapſu accelerato ex altitudine EA, & B ſuam celeritatem propriam deſcenſu accelerato ex altitudine FB, centrum gravitatis G mobilium A, B in punctis E, F exiſtentium cadet ex altitudine GC. Et ſi mobilis A poſt conflictum celeritas uniformis ſit D*a* talis, ut eâ tanquam velocitate initiali rectam *ae* aſcendendo confice-re poſſit mobile A, alterumque B altitudinem *bf* celeritate initiali D*b*, quæ eſt velocitas uniformis, quam mobile iſtud B, in ipſo conflictu acquiſivit; commune corporum A, B gravitatis centrum *c* cenſetur aſcendere poſſe vi abſoluta mobilium poſt conflictum in recta verticali *cg* uſque ad *g*.

VI.

217. Corpora, quæ nonniſi vi inertiæ materiæ prædita ſunt, dicantur deinceps corpora inertia. Corpora verò, quæ vim actuoſam habent repellendi corpora ea ipſa vi qua impulſa fuerunt, dicantur corpora actuoſa. Corpora inertia alias etiam nominari ſolent *non elaſtica*, ac corpora actuoſa *elaſtica*.

HYPOTHESIS.

218. *Cum corpora actuoſa inter ſe colliduntur eadem manet vis eorum abſoluta poſt conflictum, quæ erat ante eundem conflictum.*

Excipimus corpora inertia, quorum vis abſoluta poſt colliſionem nunquam eadem eſt, quæ erat ante concurſum, quandoquidem hæc vis in ipſo conflictu quandoque penitus abſorbetur, ſcilicet cum mobilia celeritatibus maſſis ſuis reciproce proportionalibus ſibi invicem obviam veniunt. Sed ejusmodi corpora penitus inertia forte nulla dantur, nam etiamſi pleraque corpora perfecta actuoſitate vel elaſti-

elasticitate prædita non sunt, quod particulæ eorum cõmpressæ sese in pristinum statum restituere non valeant, eorum saltem elementa perfecte elastica esse queunt, à quo statuendo nullus ex præstantioribus Geometris hujus ævi abhorrere videtur. Verum quicquid rei sit, revertor ad corpora actuosa, quorum vis absoluta eadem manet vi hujus hypotheseos, si commune eorum centrum gravitatis ad eandem altitudinem *cg* ascendit post conflictum, ex qua delapsum erat ante occursum eorum, hoc est, positis quæ supra (§. 216.) si $cg = GC$.

219. *Vires absolutas corporum æstimamus juxta altitudines, ad quas retardato suo à gravitate motu pertingere possunt, vel accuratius per facta ex his altitudinibus in massas corporum; in hac virium æstimatione præeuntem habemus Illust. Leibnitium, qui eandem non uno loco in Actis Eruditorum Lipsi. indicavit quidem, non tamen demonstravit, etsi apodictice demonstrari potest, ut forte alia id occasione ostendemus. Non ignoro perplures esse insignissimos viros, quibus talis vires æstimandi ratio non arrideat, existimantes eam à quantitatibus motus petendam esse. Celeb. Papinus sane diu multumque cum Leibnitio disputans rotunde negavit corporum vires altitudinibus, quas corpora ascendendo conficere possunt, proportionales esse; quin imo vires eas temporibus proportionari putat, quibus altitudines modo nominatæ absolvuntur vel etiam celeritatibus initialibus mobilium æqualium.* Sed in probando hoc suo asserto incautus labitur ipse, principium assumens aperte falsum; & hoc principium falsum est, quod existimet corpora cum diversis velocitatibus initialibus ascendentia æqualem à gravitate ipsis resistente ictuum numerum exceptura esse temporibus æqualibus. Sed si plures docti Geometræ, præjudicatâ opinione communis *vires æstimandi rationis per quantitatem motus* detenti, à nobis diversa sentiunt, adsunt tamen alii acutissimi Geometræ, qui Leibnitianam ultro admittunt, quin imo jam ante complures annos Nob. Hugenius eadem quodammodo usus est in demonstrationibus suarum regularum motus ex percussione, principii loco in iis assumens, non posse commune centrum gravitatis corporum inter se collisorum altius ascendere post occursum, quam descenderat ante conflictum; non tamen supponit ascensum centri gravitatis descensui ejusdem æqualem esse; alias vero assumsit hypotheses, quæ æquivalentes sunt nostræ de æqualitate ascensus atque descensus centri gravitatis post & ante conflictum corporum. Idcirco hac nostra hypothesi posita

regulas motus corporum actuoſorum facili ratione inde derivabimus; ſed priusquam hanc tractationem aggrediamur, unicam propoſitiunculam præmittere libet circa motum corporum inertium poſt conflictum.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA.

220. *Corporum inertium, atque ſibi invicem directe occurrentium, celeritas & directio poſt conflictum eſt eadem, quæ erat ante communis ipſorum centri gravitatis occurſum.*

Fig. 48. Sint AD celeritas uniformis corporis A, & BD velocitas corporis B ante conflictum, probandum eſt utrumque corpus A & B motum iri poſt occurſum celeritate CD, quæ eſt celeritas, qua centrum gravitatis C mobilium A, B ferebatur ante colliſionem, exiſtente AC ad BC, ſicut maſſa B ad maſſam A, ſeu ut pondus B ad alterius A pondus.

Demonſtr. Quia motus corporum in colliſione aliter non variantur quam pro ratione inertiæ materiæ, in ipſo conflictu res eodem recidit, ac ſi corpora conjuncta, ac velut ſibi invicem agglutinata movenda eſſent quantitate motus æquali exceſſui, quo motus major alterutrius ex mobilibus minorem alterius excedit, ſi corpora ex oppoſitis partibus ſibi invicem obviam veniant, vel etiam æquali aggregato quantitatum motus utriusque corporis, ſi ambo ad easdem partes tendant. Unde cum in motus oppoſitione & caſu, quo corporum centrum gravitatis C cadit inter puncta D & B (§. 44.) ſit $B.BD - A.AD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, cumque $B.BD - A.AD$ ſit exceſſus, quo motus B. BD fortioris B excedit motum alterius A, patet ambo corpora A & B poſt contactum celeritate æquali CD latum iri ex C verſus O, id eſt celeritate & directione, qua centrum eorum gravitatis ante impactum ferebatur.

Sin vero ambo corpora A, B ad eandem partem verſus O ſuis celeritatibus particularibus AD, BD moveantur, erit $A.AD + B.BD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, hoc eſt aggregatum motuum corporum A, B ante conflictum æquatur quantitati motus eorundem, ſed celeritate CD centri gravitatis ante ictum movendorum; feretur ergo utrumque hac celeritate CD verſus O. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [142] - 114
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

221. *Si mobilia* A, B *in directionibus obliquis* AD, BD *quemlibet angulum* ADB *continentibus, atque celeritatibus hisce ipsis lineis* AD, BD *expressis sibi mutuo occurrant, commune illorum gravitatis centrum* C *eadem velocitate cum* CD *atque in directione hujus* CD *productæ in* d *post conflictum feretur.* Fig. 49.

Sit MN linea jungens centra mobilium A, B in casu contactus, atque ad eam demissæ sint ex centris corporum A, B eorumque communi centro gravitatis C normales Aa, Bb, & Cc, motus juxta AD resolvetur in laterales Aa, & aD, motusque BD in laterales Bb, bD; at verò, cum motus juxta Aa & Bb paralleli sint, corpora hisce motibus in se invicem agere nequeunt, restant ergo soli motus aD & bD, quibus in se mutuo agunt. Jam si corpora A & B existerent in a & b, atque celeritatibus aD, bD sibi mutuo obviam venirent, post contactum utrumque moveretur (§. 220.) celeritate $D\varkappa = cD$, existente c eorum centro gravitatis, cum sit $AC : BC = ac : bc = B : A$, unde quia motus aD & bD in obliquis virtualiter continentur, ideo hæc motuum modificatio etiam in conflictu virtualiter accidisse censenda est: propterea ducta per punctum $\varkappa$ indefinita $\varkappa P$, in ea sumantur $\varkappa\alpha = Aa$ & $\varkappa\beta = Bb$, ac quia motus Aa, Bb in ipso conflictu nullam mutationem subierunt, mobile A post conflictum movebitur, aut moveri nitetur, motibus lateralibus $D\varkappa$, & $\varkappa\alpha$, ex quibus resultat motus $D\alpha$; alterum verò B motibus lateralibus $D\varkappa$ & $\varkappa\beta$, ex quibus nascitur motus $D\beta$. Sit d centrum gravitatis corporum A, B in α & β existentium, eritque (§. 44.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = (A+B).\varkappa d$. item $A.Aa + B.Bb = (A+B).Cc$, & (constr.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = A.Aa + B.Bb$, ergo etiam $(A+B).\varkappa d = (A+B).Cc$, vel $\varkappa d = Cc$: atqui per præcedentem est etiam $Cc = D\varkappa$, ergo $Dd = CD$, atque adeò post conflictum centrum gravitatis mobilium A, B movetur celeritate Dd æquali illi Cc, quà ante occursum incedebat. Quod erat demonstrandum.

Tantum de corporibus inertibus seu vi elastica carentibus, sequuntur leges motus corporum elasticorum.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

222. *Posita eadem quantitate vis absolutæ corporum inter se collisorum ante & post occursum eorum directum, facta ex massis corporum*

in quadrata velocitatum collective ſumta ante & poſt conflictum æquantur.

Hoc eſt $A.AD^2+B.BD^2=A.Da^2+B.Db^2$, exiſtentibus Da, Db celeritatibus corporum A, B poſt colliſionem, & AD ac BD velocitatibus ante conflictum.

Demonſtr. Poſito A acquiſiviſſe celeritatem ſuam AD caſu ex altitudine EA, alterumque B ex altitudine FB, diviſaque recta EF jungente puncta E, F in ratione reciproca ponderum A, B, linea GC denotabit deſcenſum centri gravitatis mobilium A, B; & ea, fb denotent altitudines, quibus accelerato motu transmiſſis mobilibus acquiruntur celeritates Da, Db, cum quibus deinceps in altum ferri incipientia iterum ad easdem altitudines ae, bf aſſurgere poſſunt; quo motu aſcenſionali eorum centrum gravitatis c aſcendet per altitudinem cg. Jam quia (§. 218.) eadem manet vis abſoluta corporum A, B ante & poſt conflictum eorum, erit $GC=cg$, vel poſito C ſignificare $A+B$, erit $C.GC=C.cg$; atqui (§. 44.) $C.GC=A.EA+B.FB$, & $C.cg=A.ae+B.bf$, ergo etiam $A.EA+B.FB=A.ae+B.bf$; verum (§. 150.) rectis EA, FB, ae, bf proportionalia ſunt AD^2, BD^2, Da^2, & Db^2, unde ſufficiendo hæc illarum loco in proxime antecedenti analogia, reperietur $A.AD^2+B.BD^2=A.Da^2+B.Db^2$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

223. Idcirco erit etiam $A.AC.AB+C.CD^2=A.ac.ab+C.Dc^2$. Nam $A.AD^2=A.AC^2+2.A.AC.CD+A.CD^2$, & $B.BD^2=B.BC^2-2.B.BC.CD+B.CD^2$, ergo $A.AD^2+B.BD^2=A.AC^2+B.BC^2+(A+B).CD^2,+2.A.AC.CD-2.B.BC.CD$ (vel quia centrum gravitatis C efficit $A.AC=B.BC$ vel $2A.AC-2B.BC=0$, & $C=A+B$, erit) $=A.AC^2+B.BC^2+C.CD^2$ (ſeu quia $B.BC=A.AC$ vel $B.BC^2=A.AC.BC$, etiam) $=A.AC.AB+C.CD^2$. Pari argumento inferetur $A.Da^2+B.Db^2=A.ac.ab+C.Dc^2$. Adeoque cum habeamus $A.AD^2+B.BD^2=A.Da^2+B.Db^2$; erit etiam $A.AC.AB+C.CD^2=A.ac.ab+C.Dc^2$.

Propositio XL. Theorema.

224. *Centrum gravitatis corporum actuoſorum inter ſe colliſorum eadem poſt occurſum celeritate ac directione feretur, qua ante incedebat, ea-*

eademque erit post impulsum à se mutuo recedentium corporum celeritas relativa, quæ ante conflictum erat accedentibus.

Positis quæ in præcedenti propositione, probandum est fore Fig. 50. $Dc = CD$ & $ab = AB$, nam AB est celeritas relativa ante, & *ab* celeritas relativa eorundem corporum A, B, post occursum, punctaque C, *c* centra gravitatis indicant in utroque casu.

Demonstr. Fingatur lineam rectam, in qua corpora moventur, in- Fig. 51. finite longam esse, atque moveri versus *m* velocitate infinite parva *Am*, huncque motum communem etiam corpora A, B in linea infinita incedentia participabunt; unde factis singulis $D\delta$, $a\varkappa$, $c\varkappa$, $b\beta$ æqualibus *Am*, globus A movebitur tantum celeritate absoluta $A\delta$ loco ipsius AD ante occursum; quandoquidem ex motu ejus proprio AD communis $D\delta$ utpote contrarius est auferendus: B verò incedet velocitate $B\delta$ ante conflictum, accedente ejus motui proprio BD communi $D\delta$ alteri BD conspirante. Post conflictum autem celeritates Da, Db, mutabuntur in $D\varkappa$ & $D\beta$; verùm quia omnes $b\beta$, $c\varkappa$, $a\varkappa$, $D\delta$ (secundùm hypothesin) æquales, erunt $\varkappa\varkappa = ac$, & $\varkappa\beta = ab$; atque adeò velocitates AC, *ac*, nec non AB & *ab* inalteratæ manent in æqualitate superiore (§. 223.) solis CD & *Dc* variationem subeuntibus. Idcirco si in ea æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ loco CD & *Dc* substituantur $C\delta$ & $D\varkappa$, fiet $A.AC.AB + C.C\delta^2 = A.ac.ab + C.D\varkappa^2$, quæ ex altera subducta relinquet $C.CD^2 - C.C\delta^2 = C.Dc^2 - C.D\varkappa^2$, vel $CD^2 - C\delta^2 = Dc^2 - D\varkappa^2$, aut etiam $2CD.D\delta - D\delta^2 = 2Dc.c\varkappa - c\varkappa^2$, hoc est quia $D\delta = c\varkappa$, erit $2CD.D\delta = 2Dc.c\varkappa$, atque adeò $CD = Dc$.

Porrò ex æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ abjectis æqualibus $C.CD^2$ & $C.Dc^2$, restabit $A.AC.AB = A.ac.ab$, vel $AC.AB = ac.ab$. Verum est $AB : AC = ab : ac$, vel $AB^2 : AC.AB = ab^2 : ac.ab$, igitur propter $AC.AB = ac.ab$, erit $AB^2 = ab^2$ atque adeò $AB = ab$. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XLI. Problema.

225. *Datis corporibus* A, B *utcunque inæqualibus sibi directe occurrentibus cum datis celeritatibus, invenire velocitates eorumdem corporum post conflictum.* Fig. 52.

Ex præcedenti propositione hujus Problematis solutio facillima est. Nam factis $Dc = CD$, item $ca = CA$, & $cb = CB$, ubi observandum punctum D, quo rectæ velocitatum ante occursum repræ-

ſentatrices terminantur, ſemper cadere debere inter puncta C, *c*, quibus centrum mobilium ante & poſt occurſum ſignatur, punctaque *a* & *b* reſpectu puncti *c*, eodem ordine poſita eſſe, quo alterum C ſitum eſt reſpectu corporum A, B. Quibus obſervatis erit ſemper D*a*, velocitas corporis A, & D*b* corporis B poſt conflictum.

Demonſt. Quia (conſtr.) $ac = AC$, & $bc = BC$, erit $ab = AB$, & quia porrò (conſtr.) $Dc = CD$, hoc eſt, quia celeritas relativa corporum poſt colliſionem æqualis relativæ ante eandem, & pariter celeritas atque directio centri gravitatis utroque caſu eadem eſt, per præcedentem corpora A, B non aliis quam velocitatibus D*a*, D*b* moveri poſſunt poſt colliſionem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

226. Hinc 1°. ſi mobilia A, B ad eandem partem ferantur, adeò ut punctum D cadat extra AB, ſed ad partes corporis B; erit $Da = CD - AC$ & $Db = CD + CB$. Sin verò punctum D ad partem corporis A extra AB cadat; fient $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$. 2°. Si corpora A, B ex adverſis partibus venientia inter ſe collidantur, ita ut D cadat inter A & B, & punctum C ſit inter D & A, erit $Da = CD - AC$, & $Db = CD + CB$. Ac vice verſa erit $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$, quoties centrum gravitatis corporum ſitum eſt inter D & B.

Corollarium II.

227. Adeoque ſi corpus A celeritate AD impingatur in quieſcens B, ita ut puncta D & B confundantur, huic quieſcenti B dabit impellens A celeritatem duplam ipſius CB. Atque adeò ſi ambo A & B fuerint æqualia, in ipſo conflictu ſiſtetur motus corporis impellentis A, alterumque B tota velocitate AB deinceps feretur, qua agens A in ipſum impegerat.

Corollarium III.

228. Sin vero corpora ex oppoſitis partibus obviam veniant celeritatibus propriis AD, BD corporibus B, A reciproce proportionalibus, ita ut D incidat in C, utrumque corpus, qua advenerat velocitate, reſiliet. Etenim hoc caſu evaneſcit CD.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [146] - 118
PUBLIC DOMAIN

Corollarium IV.

229. Generaliter, si corpora A, B dicantur m, n, eorum velocitates propriæ ante occursum u & r, invenietur Da celeritas corporis A post conflictum $= (mu - nu + 2nr) : m+n, = u, + (u-r).2n : m+n$, & Db vel celeritas corporis B post conflictum $= (2mu + mr - nr) : m+n, = r, + (u-r).2m : m+n$. Hæ expressiones elicitæ sunt ex debitis substitutionibus valorum linearum CD, AC & BC in expressionibus Corollarii I. $Da = CD - AC$, & $Db = CD + CB$, pro casu, quo mobilia ante concursum ad easdem partes moventur. Formulæ pro altero casu corporum ex oppositis partibus in se mutuo irruentium ex hisce jam exhibitis elicientur mutando duntaxat signa quibus litera r affecta est, eritque $Da = u, + (u+r).2n : m+n$, & $Db = -r, + (u+r).m+n$.

Propositio XLII. Theorema.

230. *Corpus* A *celeritate* AD *latum interventu corporis medii* X *eandem corpori quiescenti* B *velocitatem dabit, quam interventu alterius cujusdam corporis medii* Y, *si ipsum impellens* A *fuerit ad* X *sicut alterum* Y *ad quiescens corpus* B.

fig 53

Hoc est, si corpus A celeritate AD primum in corpus X irruat, & hoc celeritate ab impellente accepta deinceps incurrat in corpus quiescens B; dico hoc corpus B eandem celeritatem accepturum, quàm si ab alio corpore Y impulsum fuisset celeritate ea, quam Y pariter quiescens à corpore A itidem celeritate AD ipsi occurrente accepisset, existente scilicet A ad X ut Y ad B. Ut propositum demonstretur, constructio Propositionis XL. est geminanda, & pro utroque corpore intermedio X & Y seorsim ponenda: propterea figura, in qua lineæ majusculis litteris signantur, respicit corpus intermedium X, & quæ iisdem, sed minusculis literis notantur, pertinent ad figuram corporis alterius intermedii Y,

Jam ex §. 227. constat corpus X accepturum ab impellente A celeritatem DB duplam ipsius CD, existente C centro gravitatis corporum A, X, atque adeò AC ad CD in ratione corporis X ad corpus A; ac divisa DB in puncto E, ita ut DE sit ad EB sicut corpus B ad medium X, mobile X daturum alteri quiescenti B, in quod impingat velocitate DB, celeritatem duplam ipsius EB. Similis con-

conſtructio, ſed reſpectu corporum *a*, Y & *b*, inter quæ ipſa *a* & *b* corporibus A & B æquantur, repetita intelligatur, accipietque corpus *b* à medio Y celeritatem 2*eb*. Probandum fore EB = *eb*.

Demonſtr. Quia (ſecundùm hypotheſin) eſt A : X = Y : B, & propter centrum gravitatis C, A : X = CD : AC ; nec non Y : *b*(B) = *be* : *de*, erit CD : AC = *be* : *de*, vel invertendo & componendo AD : CD = 2.*cd*(*db*) : *be*; adeoque etiam duplicatis conſequentibus AD : DB (2.CD) = 2*cd* : 2.*be* = *cd* : *be*. Verùm eſt etiam B : X = Y : A, hoc eſt DE : BE = *ac* : *cd*, ergo & componendo DB : BE = *ad* : *dc*, hinc etiam *ad* (AD) : DB = *cd* : BE, ſed paulò ante erat AD : DB = *cd* : *be*; ergo etiam *cd* : *be* = *cd* : BE, atque adeò *be* = BE. Quod erat demonſtrandum.

231. *Aliter.* Sint LN = AD = *ad*, PN = CD; *ac* pN = *cd*, & denique dividatur LN in Q & *q*, ut LN ſit ad QN ſicut B + X ad X, & LN ad *q*N ut B + Y ad Y, & oſtendetur puncta P, *q*, item & *p*, Q coincidere. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) A : X = Y : B, erit A + X : A = B + Y : Y, id eſt AD : CD = LN : PN = LN : *q*N, ergo PN = *q*N atque adeo coincidunt puncta P & *q*. Item quia B : X = Y : A, & B + X : X = A + Y : A, erit (conſtr.) LN : QN (= *ad* : *cd*) = LN : *p*N, ac proinde etiam QN = *p*N; coincidunt ergo puncta *p*, Q. Hisce poſitis, & quia AD : DB (2.CD) = LN : 2.PN; & DB : 2.EB = LN : 2.QN; erit ex æquo AD : 2.EB = LN² : 4.PN.QN. Eodem argumento invenietur *ad* : 2.*eb* = LN² : 4.*p*N.*q*N, ergo invertendo erit ex æquo 2.*eb* : 2.EB = 4.*p*N.*q*N : 4.PN.QN, vel *eb* : EB = *p*N.*q*N : PN.QN : unde cum oſtenſum ſit eſſe *p*N = QN & *q*N = PN, erit omninò *eb* = EB. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

232. Si loco alterutrius ex mediis X, Y ſumatur corpus M medium proportionale inter A & B, atque adeo inter X, & Y, cum A ſit ad X = Y : B; atque LN dividatur in R, ut tota LN ſit ad RN ſicut A + M ad A, celeritas initialis mobilis A erit ad celeritatem corpori B interventu medii M acquiſitam, ſicut LN² ad 4.RN². Atque adeò celeritas, quam acquiret corpus B interventu alterutrius X vel Y erit ad celeritatem, quam acquiret interventu medii M, ſicut 4.PN.QN ad 4.RN², vel ſicut PN.QN ad RN². Nam quia A + M : M = LN : RN, & A + M : A = B + M : M, erunt

hoc

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [148] - 120
PUBLIC DOMAIN

hoc casu ambæ PN, QN cum inter se, tum etiam RN æquales, unde cum generaliter sit $AD : 2EB = LN^2 : 4.PN.QN$, erit in hoc casu particulari celeritas corporis A, ad celeritatem ipsius B abs M acceptam $= LN^2 : 4.RN^2$, & quia (§. 231.) velocitas ipsius B ab alterutro X vel Y accepta, est ad celeritatem initialem corporis A, sicut $4.PN.QN$ ad LN^2; erit ex æquo celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ad celeritatem ejusdem à corpore M acquisitam sicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$ hoc est, sicut $PN.QN$ ad RN^2.

Corollarium II.

233. Quia (constr.) $PN : LN = A : A + X$, & $LN : RN = A + M : A$, erit ex æquo $PN : RN = A + M : A + X$. Similiter invenietur $QN : RN = A + M : A + Y$, ergo per compositionem rationum erit $PN.QN : RN^2 = (A + M)^2 : (A + X.A + Y) = AA + 2.AM + MM : AA + (X + Y).A + XY = AA + 2.A.M + AB : AA + (X + Y).A + AB = A + 2M + B : A + X + B$, nam $A.B = MM = XY$, adeoque unum alterius loco, ut factum est, substituere licet. Jam quia X, M & Y sunt in ratione continua, erit $X + Y$ major quam $2.M$ atque adeo $A + X + Y + B \succ A + 2M + B$; hinc erit $RN^2 \succ PN.QN$; unde cum (§. 232.) celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, sit ad ejusdem celeritatem a corpore M ipsi impressam, sicut $PN.QN$ ad RN^2, liquet hanc celeritatem illa perpetuo majorem esse. Imò hæc velocitas mobili B a corpore M collata major erit ea, quam idem B a corpore A celeritate AD ipsum impulisset, nam loco corporis X intelligi potest quodvis corpus; atque adeo unum ipsi A æquale, quod ab impellente A totam celeritatem (§. 227.) CD accipiet, adeò ut idem sit, sive mobile A cum sua celeritate AD immediate impingat in quiescens B, sive id impellat ope intermedii ipsi A æquali, cui totam suam celeritatem contulerit; unde cum generaliter ostensum sit, interventu cujusvis corporis X, diversi ab M, minorem corpori B velocitatem collatum iri quam a medio proportionali M inter extrema A, & B; sequitur necessario etiam corpus A alteri B minorem daturum esse celeritatem quam M, etiamsi immediate in id impingat. Atque hoc corollarium continet demonstrationem facilem Propositionis penultimæ tractatus *Hugenii* de Motu corporum ex Percussione.

Corollarium III.

234. Hinc primum ex corporibus continue proportionalibus ultimo majorem celeritatem dabit per corpora quotcunque interposita continue proportionalia, quam si eidem quiescenti immediate occurrisset.

Scholion.

Fig. 54. 235. Ex præcedentibus jam facile elicietur regula determinandi velocitatem, quam ultimum corpus quiescens ex serie quotcunque continue proportionalium accipiet transmisso motu à primo in secundum, tertium, quartum &c. Primum corpus dicatur A, ejusque celeritas ab initio AD, ultimum V: dividatur celeritas initialis AD in puncto C, in reciproca ratione secundi corporis ad primum, vel, quod idem est, in ratione cujuslibet corporis in serie proportionalium ad corpus, quod illud in eadem serie proxime præcedit, ita ut AC ad CD sit in hac eadem ratione, deinde ratio totius AD ad duplam CD continuetur in tot terminis uno minore quot sunt seriei corporum proportionalium, quorum ultimus sit Q, dico hanc Q exponere celeritatem ultimo corpori V collatam ab omnibus præcedentibus. Adeoque si numerus terminorum fuerit $n+1$, celeritas initialis AD primi corporis erit ad Q celeritatem ultimo U acquisitam, sicut AD^n ad $(2CD)^n$, hinc habebitur $Q=(2CD)^n : AD^{n-1}=(2CD)^n$, sumta scilicet AD instar unitatis, quod hoc loco fieri licet.

236. *Exempl.* Sint centum corpora in continua ratione dupla, motusque primum incipiat à maximo, quæritur Q seu celeritas minimo V conferenda. Hoc casu erunt $AC=\frac{1}{2}$, et $CD=\frac{1}{4}$, atque adeo $(2.CD)^n=(\frac{4}{3})^{99}$, est enim $n=99$. Igitur habemus $Q=(\frac{4}{3})^{99}$, & Log-us $Q=99$. Log-um $\frac{4}{3}$; atqui Log-us $(4:3)=0.1249388$ qui Logarithmus ductus in 99 dat 99. Log. $(4:3)=12.3689412=$ Log. Q, ergo $Q=2338520732310$ quam proxime, nam hic numerus log-mo illi, cujus characteristica est 12. proxime convenit; atque adeo celeritas, quam corpus centesimum accipere debet, est ad celeritatem primi A ut 2338520732310 ad 1 proxime.

Sin vero motus a minimo incipiat, erit hujus celeritas ab initio ad velocitatem, quam centesimo & maximo dabit interpositis 98. reliquis continue proportionalibus, sicut numerus 2710371348314606 7 ad

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [150] - 122
PUBLIC DOMAIN

ad unitatem proxime. Hugenius in postrema propositione tractatus supra (§. 233.) laudati numeros pro hisce casibus nostris minores exhibet, transscriptorum forte aut calculi lapsu.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

237. *Centrum gravitatis duorum corporum sphæricorum elasticorum sibi invicem oblique occurrentium, eadem directione & celeritate feretur post conflictum, quibus ferebatur ante concursum.* Fig. 55.

Globi elastici P, Q sibi mutuo occurrant in D celeritatibus propriis PD, QD, & post occursum resiliant celeritatibus propriis D*p*, D*q*, ita ut hæ lineæ eodem tempore æquabili motu absolvantur, quo rectæ PD, QD ante synodum; sintque puncta M & m centra gravitatis globorum in P & Q, item in *p*, *q* existentium; probandum est rectas MD & D*m* tum æquales, tum etiam in directum positas esse; quandoquidem MD exponit velocitatem & directionem centri gravitatis M ante conflictum, D*m* vero velocitatem & directionem centri communis gravitatis post collisionem. Sit D punctum contactus globorum, & BA recta jungens centra eorundem, quæ, ubi globi se mutuo contingunt, per punctum contactus transibunt; ex centris Globorum P, Q demissæ sint ad AB perpendiculares PA, QB, & ex M recta MC reliquis QB, AP parallela, quibus positis, manifestum est ex art. 29, motui juxta PD æquipollere laterales PA & AD, & motui QD laterales QB & BD. Jam quia motus juxta PA & QB paralleli sunt, globi quatenus motibus hisce agitantur, in se mutuo agere non possunt, sed soli motus juxta AD & BD, utpote directe contrarii, in casu conflictus considerandi veniunt reliquis tantisper sepositis & postea iterum resumendis. Porrò quia M est centrum gravitatis globorum in P & Q existentium, etiam C eorundem globorum in A & B positorum erit centrum gravitatis; adeoque factis Dc = CD, nec non ca = CA & *cb* = CB, erit (§. 225.) D*a* celeritas propria globi A, & D*b* celeritas alterius B, post collisionem in indefinita linea *ab*. Porro per *a* & *b* ductæ sint rectæ *ap* = AP, & *bq* = BQ ipsi AB normales, quo posito & quia in ipso conflictu motus juxta PA & QB, utpote paralleli, nullam mutationem subire potuerunt, hi motus post impulsum illibati sunt conservandi; atque adeo post congressum corpus P à puncto D recedet motu D*p* resultante ex lateralibus D*a* & *ap*, alterumque Q motu D*q* nascente ex lateralibus D*b* & *bq*. Verum

quia (constr.) $ca = CA$; $cb = CB$; $ap = AP$; & $bq = BQ$, figura $abqp$ similis & æqualis erit figuræ alteri ABQP , atque adeo $cm = CM$: unde cum (constr.) etiam sit $De = CD$, triangulum Dem simile & æquale erit triangulo DCM, atque adeo lineæ MD & Dm in directum positæ erunt, hinc centrum gravitatis globorum P, Q post conflictum eadem celeritate & directione quâ ante, progredietur. Quod erat demonstrandum.

DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO I.

De Viribus Fluidorum à Gravitate.

SI corpora fluida cum duris & consistentibus in hoc conveniunt, quod extensa sunt & particulis seu moleculis duris componuntur; ab iisdem tamen differunt, quod moleculæ fluidorum non solum exilissimæ sunt eousque, ut omnem oculorum etiam microscopiis armatorum aciem fugiant, sed etiam disjunctæ & valde mobiles, quæ cuilibet corpori solido trajicienti facile cedere atque varie inter se agitari queunt: cum ex adverso dura corpora constent partibus sibi invicem varie implexis atque adeo ægre separandis, ita ut nulla particularum sensibiliter moveri possit, quin totum partium aggregatum, hoc est corporis Massa eundem motum participet.

238. Est igitur *Corpus Fluidum, cujus elementa* (§. 14.) *à vi quacunque in ea agente commoveri possunt quantumque tota fluidi Massa oculorum judicio quiescere videatur*, ut jam supra §. 25. dictum. Sic Aqua, Aer, Oleum, Hydrargyrus &c. sunt corpora fluida, item metalla fusa, quandiu in fluore sunt.

Adeoque distinctus fluidorum corporum conceptus summam involvit molecularum exilitatem, talemque earum configurationem,

ut par inde agilitas provenire queat. Et hisce ſpecificis proprietatibus fluida diſtinguuntur à ſolidis in minutiſſimas itidem particulas diſcerptis, non tamen tantæ agilitatis nec parvitatis, ut eadem qua fluidi elementa inter ſe agitari queant facilitate. Sic frumenta in ſubtiliſſimum pollinem contrita in corpus fluidum ideo non abeunt, quia hujusmodi pollinis particulæ ad eam exilitatem non accedunt; nec proinde ad eam mobilitatem perveniunt quam fluidorum natura requirit.

239. Cum de fluidorum viribus agere ſuſcipimus, non ea nobis eſt mens, ac ſi particularum ſeu elementorum figuras definiri atque digito, ut ita dicam, monſtrari poſſe crederemus, nec proinde curioſius in has elementorum corporum figuras inquiram, quia hæ nimis forte variare ſolent quam ut commode redigi poſſint ſub mathematicos conceptus; nil enim impedire exiſtimo, quominus unius ejusdemque fluidi particulæ tam ratione magnitudinis, quam ratione figuræ, infinitis modis variare poſſint. Idcirco figurarum indagationem, quibus cujuslibet fluidi particulæ circumſcriptæ eſſe debent, Phyſicis relinquam, mihique deinceps ſufficiet noſſe, figuras particularum cujusque fluidi, qualescunque eæ fuerint, mobilitati earum nihil officere ipſo facto, cum particulæ ſint (ſecundùm hypotheſin) alicujus fluidi, id eſt ſumme mobiles.

240. Nec etiam ad inſtitutum noſtrum pertinet anxie disquirere, num vera ſit illorum opinio, qui fluidis quibuslibet motum quendam, quem *inteſtinum* vocant, tribuunt, quo fluidi particulæ variis irregularibus motionibus ultro citroque cieri finguntur; ad diſtinctionem motus progreſſivi fluidi, quo tota ejus maſſa de loco in locum transfertur. Sic cum labitur amnis, motus quo aqua in alveo ſuo ad inferiora devolvitur, eſt progreſſivus; motus vero aquæ calidæ, id eſt internus motus ejus molecularum, vocatur motus inteſtinus: exemplum adduco aquæ calidæ, quia certo certius ejusmodi motu inteſtino particulæ ejus agitantur, etſi motus ipſe in oculos non incurrit; atque adeo tota aquæ maſſa quieſcere videtur. Num vero omnia omnino fluida tali motu inteſtino agitentur philoſophis pariter, ut dixi, expendendum relinquam; nec enim animus mihi eſt Philoſophicis controverſiis me quoquo modo irretire.

241. Corpora fluida à liquidis differunt ut genus à ſpecie, cum liquida quidem fluida ſint, non tamen vice verſa. Liquida enim ſunt, quæ in volumine non nimium exiguo fluunt donec eorum ſuperficies in ſitum horizontalem ſe compoſuerit; unde, quia hæc proprie-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [154] - 126
PUBLIC DOMAIN

prietas non flammæ nec aëri aut ætheri competit; ideo hæc corpora tantum fluida, non vero liquida dicuntur. Nos in sequentibus etiam liquoribus fluidi nomen tribuemus, quia revera liquores sunt corpora fluida: idcirco

242. *Fluida homogenea*, seu *uniformiter gravia* sunt, quorum densitas per universam massam uniformis est, adeo ut pondera ipsorum absoluta massis eorum proportionalia sint. Talia sunt præterpropter omnes liquores nobis cogniti.

243. *Fluida heterogenea*, seu *difformiter gravia*, sunt, quorum densitas per universam fluidi massam non eadem est nec propterea pondera fluidi massis proportionantur. Tale fluidum est athmosphæra, cujus partes altiores, hoc est à terræ superficie remotiores rariores comperiuntur; etenim experimenta aëra in montium editiorum jugis rariorem produnt quam in vallibus. Variæ vero athmosphæræ densitates variis lineis exprimi possunt, atque hinc nascuntur,

244. *Scala densitatum* cujusque Fluidi heterogenei est figura mixtilinea, cujus ordinatæ horizonti parallelæ fluidi densitatem exponunt in planis illis, in quibus ordinatæ existunt. Idcirco axis scalæ, ordinatas ad angulos rectos excipiens, horizonti perpendicularis erit.

245. *Densitas media* cujusque fluidi heterogenei est densitas uniformis alicujus fluidi homogenei, quod in eadem altitudine cum fluido heterogeneo eandem pressuram exerere valet in subjectum sibi planum horizontale ac fluidum heterogeneum. Talis media densitas innotescit applicando aream scalæ densitatum ad ejus axem, seu fluidi altitudinem super plano, quod ejus pressuram subit.

246. *Scala pressionum* seu *gravitationum* liquoris heterogenei est figura, cujus ordinatæ exponunt gravitationes seu pressuras fluidi in plana horizontalia exercitas, in quibus ordinatæ positæ sunt, abscissæ vero ordinatis respondentes designant distantias planorum, quæ pressiones subeunt à suprema liquoris superficie. Scala pressionum etiam definiri posset, quòd sit quadratrix scalæ densitatum; quandoquidem postmodum (§. 258.) demonstrabitur areas scalæ densitatum homologis ordinatis scalæ gravitationum proportionales existere.

247. *Liquores in statu manente*, seu *in æquilibrio consistere* dicuntur, cum nulla liquoris pars vicinarum actione situ suo expellitur, sed omnes partes perfectum inter se æquilibrium servant.

248. Infinitesimæ plani cujusque aut etiam superficiei particulæ gra-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [155] - 127
PUBLIC DOMAIN

gravitationem vel preſſuram cujusvis liquoris ſubeuntes *puncta* deinceps à nobis compendii gratia nominabuntur.

Preſſionis verò vel *gravitationis* nomine intelligimus impreſſionem, quam fluidum gravitate ſua in ſibi ſubjectum planum exerit. Idcirco, ut rem generaliter poſſimus tradere, prout in primo libro tantum non ubique id fecimus, fluida utcunque heterogenea eſſe concipimus, atque quænam preſſiones atque effecta ab ejusmodi fluidis reſultare debeant, generalibus theorematibus complectemur; ex quibus deinceps omnia derivari poterunt, quæ ad liquores homogeneos ſpectant.

CAPUT I.

De generalibus legibus gravitationis Liquorum in ſubjecta plana.

PROPOSITIO I. Lemma.

249. *Preſſiones, quas corpora quæcunque ſolida vel fluida in ſe invicem exercent, fiunt juxta directiones communi plano contingenti corpora perpendiculares, atque transeunt per contingentiæ punctum eorundem corporum.*

Fig. 36.

Sit MN corpus quodcunque, in quod aliud corpus CD juxta directionem FC impingat; per commune contingentiæ punctum D utriusque corporis transeat planum AB, ambo corpora in hoc eodem puncto D tangens, quod ideo commune eorum contingentiæ punctum vocatur. Dico impreſſionem impellentis CD in patiens MN exeri tantum juxta directionem CE plano contingentiæ AB perpendicularem, quæ per commune utriusque corporis punctum contactus D transeat.

Demonſtr. Producatur FC usque ad occurſum H cum plano AB, & circa diametrum CH deſcriptum intelligatur parallelogrammum rectangulum CDHI, cujus latera CD, IH plano AB normalia & CI eidem æquidiſtans ſunt. Jam (§. 39.) conatus ſeu preſſio juxta CH æquipollet impreſſionibus juxta CD & CI. Verum, quia CI plano AB parallela eſt, nulla in planum iſtud impreſſio juxta hanc directionem exeri poteſt, ſed duntaxat impreſſio juxta CD plano perpendicularem tota in hoc planum redundabit. Ergo impreſſio, quam corpus impellens C, in planum AB ſeu in corpus MN exerit

rit tantum fieri potest juxta directionem CD plano AB perpendiculârem, quæ per punctum contactus D transit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II. Theorema.

250. *Liquor vasi cuicunque inditus non potest in statu manenti consistere, priusquam ejus superficies situm horizontalem acquisiverit.* Fig. 57.

Sit vas BAC figuræ cujuscunque & quomodocunque positum; dico liquorem ei infusum HGIA non posse situm manentem habere, nisi superficies ejus HGIF horizontalis fuerit. Habeat enim hæc superficies in statu manenti positionem EGCF horizonti inclinatam: quo posito, quia liquidi moles GCIF plano horizontali HGIF imminens gravis est, atque in spatium GHEF defluere potest, nec quicquam adest quod hunc fluxum impedire queat, ea actu defluet spatium illud GHEF repletura; idcirco cum liquoris superficies GCE plano horizontali HGF inclinata est, non est in statu manenti, contra hypothesin.

Corollarium.

251. Hinc si universa terra Oceano circundata esset, nec in se ipsam converteretur, ejus superficies perfecte sphærica foret. Sed quia motu diurno circa centrum suum revolvitur, aquæ superficies sphærica non erit, sed figuram habebit sphæroidis latæ, quia aquæ partes quo propiores sunt æquatori, eo majorem habent conatum à centro recedendi, atque adeo minus graves sunt, quandoquidem conatus centrifugi tanto magis de corporum gravitate detrahunt quanto majores sunt. Ob hanc vero gravitatis inæqualitatem accidit, ut ad obtinendum partium æquilibrium, ad eandem ubique altitudinem aquæ pervenire nequeant, ut aliàs fieret, si terra motu illo diurno, ex quo conatus centrifugi partium aquæ resultant, careret, sed sub Æquatore altissima & in polis maxime depressa existat. Hinc est, quod Newtonus, Hugenius aliique telluris superficiei figuram alicujus sphæroidis assignarint, oriundæ ex revolutione alicujus Ellipseos circa axem minorem, existente axe majore diametro æquatoris terrestris. Sed de hisce suo loco sermo recurret.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [157] - 129
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO III. THEOREMA.

252. *Partes æquales* (HI, IK) *cujuslibet plani horizontalis* (FG) Fig. 58. *intra liquorem quemcunque* (DBCE) *in ſtatu manenti conſiſtentem, vaſique, ut libet irregulari,* (ABC) *inditum, æquales preſſiones ſubeunt ab imminente liquore* (DFGE). *Et partes minimæ laterum vaſis* (LF, MG) *ad idem planum horizontale* (FG) *terminatæ easdem pariter preſſiones ab incumbente liquore patientur juxta directiones* (FP, GQ) *iisdem partibus* (FL, GM) *perpendiculares, quas patiuntur æquales particulæ* (FR, GK) *plani horizontalis juxta directiones ipſis normales.*

I. Quoniam (ſecundùm hypotheſin) liquor vaſis eſt in ſtatu manenti, ſuperficies ejus DE (§. 251.) horizontalis ac proinde plano FG parallela erit, & remoto cogitatione liquore DFG plano FG incumbente, reſidui in vaſe FBCG ſuperficies FG etiamnunc in ſtatu manenti conſiſtet, quia horizontalis eſt. Adeoque ſi, reſtituto quem cogitatione removimus liquore DFGH, pars aliqua IK plani FG minorem preſſionem ſubiret quam contigua & æqualis particula HI, liquor in loco IK deberet attolli, aut deprimi, vel ad latera dextrorſum aut ſiniſtrorſum deflecti ſive alicubi condenſari, quandoquidem vis minor majori ſemper cedere debet, & aquæ vel liquoris particulæ per naturam fluidi cedere poſſunt, atqui talia ſine motu partium, quo unæ ab aliis ſitu ſuo pelluntur, contingere nequeunt, ergo liquor non maneret in ſtatu manenti, contra hypotheſin. Partes igitur HI, IK omnesque reliquæ æquales plani FG, æquales preſſiones ſuſtinent. Quod eſt primùm.

II. Sit planum LM alteri FG æquidiſtans, & (§. 250.) omnes ejus æquales particulæ NO, OM æquales itidem preſſuras ab imminente liquore DLME ſubibunt. Idcirco liquor inter duo plana æquidiſtantia LM & FG, velut in prælo, fortiter conſtringitur & quidem viribus æqualibus in partes oppoſitas, ſcilicet à liquore incumbente DLME perpendiculariter deorſum atque à reactione plani inferioris FG perpendiculariter in altum; nam quanta vi planum iſtud premitur, tanta vi in rem prementem reagit. Unde cum plana NO & IK æqualibus viribus in oppoſitas partes urgeantur, neceſſe eſt ut in quolibet plano NI vel OK tantam preſſuram ſubeat quantam in NO vel IK, alioqui ſi minorem pateretur, ibi elaberetur per planum NI liquor ONIK contra hypotheſin. Et quia ob con-

contiguitatem partium aquæ particulæ laterales LF & MG vasis preſſuras ſubire debent æquales illis, quas ſubeunt plana NI vel OK, & hæc preſſiones pares illis, quas plana NO, IK, &c. patiuntur, liquet preſſuras liquoris DFGE in particulas laterales vasis FL & MG æquales eſſe preſſionibus, quas ab eodem liquore patiuntur particulæ illis æquales HI, IK plani horizontalis FG, (§. 249.) juxta directiones FP, GQ particulis illis FL & GM perpendiculares, perinde ac particulæ HI & IK, &c. itidem perpendicularibus plano FG directionibus urgentur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV. Theorema.

253. *Preſſiones ſeu Gravitationes cujuslibet liquoris homogenei in quæcunque plana horizontalia proportionales ſunt altitudinibus liquoris ſuper his planis.* Fig. 59.

Sit DE ſuperficies liquoris DBCE vaſi cuilibet ABC infuſi, fundoque vaſis BC horizontali, quantum opus eſt, protenſo, demittatur ad eum perpendicularis ET, intelligatur inſuper quodvis planum FG fundo BC & DE æquidiſtans, quod productum occurrat rectæ ET in puncto S. Preſſiones liquoris in plana FG & BC exercitæ deſignentur per *pr.* FG & *pr.* BC, probari debet fore *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET. Nam ES eſt altitudo liquoris DFGE ſuper plano FG, & ET altitudo liquoris ſuper BC.

I. Sit ES alteri ET commenſurabilis, & E*p* communis utriusque menſura tantæ magnitudinis, ut ducto per punctum *p* plano *dp*, intra ſpatium vaſis D*de*E duci queat rectula *e o* parallela E*p* vel perpendicularis ipſis DE & *de*, quod ſemper fieri poteſt quantumvis irregulare & ſuperius anguſtum eſſe queat ipſum vas ABC. Factis porro ſingulis *p*2*p*, 2*p*3*p*, &c. æqualibus ipſi E*p*, ductisque per ſingula diviſionis puncta 2*p*, 3*p*, &c. planis 2*d*2*p*, 3*d*3*p*, &c. quibus poſitis, & quia puncto *e* primi ſtrati liquoris imminet *e o*, hoc punctum *e* tantam preſſuram ſuſtinebit, quantum eſt pondus columnulæ *e o*, & (§. 252.) omnia reliqua plani *de* puncta preſſionem patientur æqualem preſſioni puncti *e*; punctum 2*f* in baſi 2*d*2*e* ſecundi ſtrati *e*2*d* patietur preſſionem compoſitam ex preſſione, qua punctum ejus ſupremum d urgetur, & ex pondere columnulæ *d*2*f* æqualis ipſi *o e*, atque adeo gravitatio liquoris in punctum 2*f* & omnia reliqua plani 2*d*2*e* erit dupla ipſius in plano *de*, & propterea æquivalet ponderi columnarum *o e* + *d*2*f*, hoc eſt E2*p*; ſimili argumento

conficietur preſſionem liquoris in quodlibet punctum plani $3d3e$ æquivalere ponderi columnæ ipſi $E3p$ æqualis in altitudine; hinc preſſiones ſeu gravitationes liquoris in plano FG & BC æquivalebunt columnis, quarum altitudines ſunt æquales lineis ES & EF, ergo erit omnino *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET.

II. Sit ES alteri ET incommenſurabilis, &, ſi fieri poteſt, ratio *pr.* FG ad *pr.* BC major quam ES ad ET, puta æqualis rationi ES : EX cujus conſequens EX minor quam ET defectu XT, ex quo defectu auferri poterit quædam TV minor quam XT, ita ut EV commenſurabilis fiat ipſi ES. Quo poſito, per punctum V planum *b*V transire intelligatur, eritque pr. *bc* minor quam *pr.* BC, cum EV minor ſit quam ET, & pr. FG : pr. bc > pr. FG : pr. BC. Jam quia (conſtr.) EV commenſurabilis eſt ipſi ES, erit per partem primam hujus, pr. FG : pr. bc = ES : EV, & (ſecundùm hypotheſin) eſt pr. FG : pr. BC = ES : EX, ergo ES : EV > ES : EX, atque adeo EX major quam EV, contra hypotheſin. Adeoque nequit pr. FG : pr. BC major eſſe quam ES : ET.

Sit igitur ratio pr. FG : pr. BC minor quam ES : ET, ſcilicet æqualis cuidam ES : EY cujus conſequens EY major quam ET, exceſſu TY, auferatur iterum ex hac TY portio YZ talis ut reſidua EZ alteri ES commenſurabilis evadat, per Z transire fingatur planum Z$\varkappa\beta$ fundo BC parallelum in quo $\varkappa\beta$ inſtar fundi nunc conſiderabimus. Unde quia EZ (conſtr.) major eſt quam AT, erit pr. $\beta\varkappa$ > pr. BC, adeoque pr. FG : pr. $\beta\varkappa$ < pr. FG : pr. BC; & quia (conſtr.) EZ commenſurabilis eſt ipſi ES, erit (num. 1 hujus) pr. FG : pr. $\beta\varkappa$ = ES : EZ, ex hypotheſi verò eſt pr. FG : pr. BC = ES : EY, ergo ES : EZ < ES : EY, eritque adeo EZ major quam EY, iterum contra hypotheſin, nam EZ neceſſario minor erat quam EY, quandoquidem ex hac EY ablata ZY relinquebatur EZ; nequit ergo ratio pr. FG : pr. BC minor eſſe quam ratio ES : ET & quia nec major, ſequitur pr. FG : pr. BC = ES : ET. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

254. Hinc ultrò ſequitur, quod quælibet portio FM plani cujuslibet horizontalis FG ab incumbente liquore DFGE tantam preſſionem ſubire debeat, quantam ſuſtineret à columna ejusdem liquoris portioni illi FM ad altitudinem ES perpendiculariter imminentis. Nam, quod in propoſitione univerſaliter oſtenſum eſt, nulla habita

bita ratione figuræ vasis, idem valet etiam de vasis cylindricis, in quibus illicò liquet gravitationes liquoris altitudinibus ejus proportionales esse. Unde, si altitudines liquoris super plano aliquo horizontali in vase prismatico & in vase irregulari utrinque æquales sint, æquales utriusque plani partes æquales pressiones sustinebunt. At in vase prismatico quælibet cujusque horizontalis plani portio sustinet pondus totius columnæ ipsi perpendiculariter imminentis; atque adeo portio quæcunque FM plani FG tantum onus sustinebit, quantum est pondus alicujus prismatis, cujus basis FM & altitudo ES. Adeoque totum planum FG sustinebit onus æquale massæ liquoris in prisma conformatæ, quæ planum FG pro basi habeat & ES pro altitudine.

Corollarium II.

255. Et quia supra (§. 252.) demonstratum est, æquales particulas quam minimas FM & FL plani FG & lateris vasis, æquales pressiones sustinere, unamquamque juxta directionem sibi normalem, scilicet FM verticaliter deorsum, & FL juxta FR superficiei BFD in F perpendicularem, hinc sequitur *quamlibet particulam minimam in vasorum lateribus pressuram subire debere ab incumbente liquore æqualem ponderi columnæ, cujus basis est particula, quæ pressionem sustinet, & altitudo est distantia particulæ à liquoris superficie.*

Atque hæc est generalis hydrostaticæ regula ex suis genuinis principiis eruta, quæ etsi tantum in liquoribus homogeneis valere videtur, sese tamen ad quoscunque liquores, etiam heterogeneos, extendere in sequentibus probabitur.

Scholion.

256. Ex his ergo liquet, quod liquores homogenei gravitant in sua subjecta plana pro ratione altitudinis eorum super planis, in quæ gravitant. Ex qua fluidorum proprietate sequens nascitur paradoxum; quod scilicet parva liquoris cujusque copia tantundem in sibi subjectum planum gravitet, quantum ejusdem liquoris massa centies imo millies major in eadem altitudine. Etenim si vasi acuminato BAC, cujus basis BC notabilis sit amplitudinis, aqua infundatur pertingens usque in A, & per Corollarium I. hujus, aqua tantam pressionem in fundum BC exeret, quantam exereret cylindrus aqueus Fig. 60.

IBCK in eadem altitudine cum vasis liquore. Idcirco pauxilla aqua in tubo acuminato gracilique ABC tantum effectum præstare potest, quantum aquæ moles centuplo, imo pluries, major in eadem altitudine; quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur. Ejus tamen veritas ipsa experientia comprobata est, atque deinceps probari potest; nam si fundo vasis stricti ABC orbiculus *a*BC*f* inditus sit vasi tam accurate quadrans, ut nullas rimas relinquat, per quas infusa aqua infra orbiculum transire queat, in centro Q affixum habens filum QM quo attolli possit, cujus fili alterum caput stateræ MDO annexum sit in M; ex altera bilancis parte applicetur pondus P eousque augendum minuendumve dum orbiculus B*f* nonnihil attollere incipiat stateram MO eam in partem flectendo, cui pondus appensum est; reperieturque hoc pondus P orbiculum paulisper attollere valens satis accurate æquari ponderi cylindri aquei BIKC, existentibus jugi brachiis DM, DO æqualibus. Unde cum pondus P tantillo majus esse debeat resistentia, quam in parte opposita superare potest, & hæc resistentia sit ipsa paucæ aquæ ABC gravitatio in orbiculum *a*BC*f*, omninò concludi debet hanc aquæ ABC gravitationem æquivalere gravitationi cylindri aquei I*af*K.

257. Sed inquies forte, si aqua ABC tantam gravitationem in suam basim exerceret, sequeretur fore, ut vas cum infusa aqua tantum ponderare debeat, quantum cylindrus aqueus IC auctus pondere vasis. Nam vas cum infusa aqua lanci impositum atque erecto situ detentum tantum ponderare debet, quanta vi lancem premet; sed lancem urgebit ea vi, qua basis vasis ab interno liquore urgetur aucta pondere vasis, hoc est pondere cylindri KB & vasis simul: interim tamen, si experimentum capiatur, comperietur semper pondus totius non fore majus quam infusæ aquæ & vasis pondera simul sumta, atque adeo regula nostra hydrostatica phænomenis adversari videtur. Sed objectio falsæ innititur hypothesi, quasi liquoris ABC in basin gravitatio etiam tota redundare atque exeri debeat in libræ lancem; quod tamen est falsum, nam si fundus BC urgetur onere IBCK à solo liquore ABC etiam latera tubi acuminati BRA & CSA in altum prementur, nam unumquodque horum laterum punctum tanta vi premitur (§. 255.) quantum est pondus filamenti aquæ æqualis distantiæ puncti ab aquæ superficie, juxta directionem superficiei vasis perpendicularem, adeoque applicando ea, quæ supra (§. 81.) generaliter & in abstracto ostensa sunt, casui præsenti, comperietur prædicta illa latera BRA, CSA vel potius inter-

ternam tubi acuminati ſuperficiem convexam, tanta vi à liquore verticaliter in altum agi, quantum eſt pondus aquæ illius, qua cylindrus *IC* aquam in tubo ABC excedit. Unde, quia latera vaſis & *fundus* cohærent, ea ſola vis in lancem libræ MO redundare poteſt, quâ gravitatio aquæ ABC in baſin BC excedit vim attollere conantem latera BRA & CSA vaſis ABC ab aquæ preſſionibus provenientem, aucta pondere vaſis, vis vero illa, ſeu exceſſus cylindri IC ſupra maſſam aquæ, quæ modo nominatam vim attollentem exponit, eſt pondus ſolius aquæ in tubo acuminato ABC, ergo vis, qua lanx deprimi atque urgeri debet, eſt ſolum pondus aquæ ABC auctum pondere vaſis, prorſus ut experientia id manifeſtat. Idcirco tantum abeſt, ut objectio ab experientia petita vim propoſitionis noſtræ quicquam infringat, ut eam potius egregie confirmet.

PROPOSITIO V. Theorema.

258. *Gravitationes quorumcunque liquorum in ſubjecta plana horizontalia, ſunt areis homologis in ſcala denſitatum vel etiam ordinatis ſcalæ preſſionis liquorum proportionales.* Fig. 61.

Sit vas quodcunque irregulare ABC liquoris heterogenei plenum usque ad DE, & circa axem ET ſuperficiei liquoris DE fundoque BC perpendicularem, atque adeò fluidi altitudinem ſuper fundo deſignantem, extructæ ſint curvæ HKN & EIX, quarum illa ſit ſcala denſitatum liquoris, utpote cujus ordinatæ EH, $3p3h$, SK, TN denſitates liquoris exponunt in illis planis, in quibus ordinatæ reperiuntur, hæc vero EIX ſcala preſſionis liquoris, cujus ſcilicet ordinatæ $3p3q$, SI, &c. gravitationes liquoris denotant in plana $3d3e$, FG, &c. Ac denique area EHKNT applicata ad ejus altitudinem *ET* præbet *mediam denſitatem TV* fluidi heterogenei. Ordinatæ verò ſcalæ gravitationum EIX (§. 246.) areis homologis ſcalæ denſitatum HKN proportionales ſunt, ultimaque TX toti axi AT æqualis eſſe ponitur. Quibus intellectis probandum eſt, fore gravitationem liquoris DFGE in planum FG ad gravitationem liquoris DBCE in fundum BC, ut area ESKH ad aream ETNKH, vel ſicut SI ad TX, &c.

Vaſis liquor diviſus intelligatur, ut in præcedenti, in ſua ſtrata horizontalia æque alta quidem omnia, ſed infiniteſimæ altitudinis, per plana *de*, $2d2e$, $3d3e$, &c. fundo BC æquidiſtantia. Quia igitur cujusque ſtrati altitudo inſenſibilis ſeu indefinite parva eſt, den-

denſitas liquoris per totum ſtratum tanquam uniformis ſpectari poteſt, ſcilicet EH ſignificabit denſitatem primi ſtrati *de*ED, ordinata *ph* denſitatem uniformem ſecundi 2d2ed, atque ita porrò de reliquis. Jam puncto e primi ſtrati perpendiculariter imminet columnula ſeu filamentum e o, ejusque adeò pondus ſuſtinebit: atqui pondus ipſius *e o* (§. 33.) eſt ut ejus volumen & denſitas ſeu gravitas ſpecifica conjunctim, hoc eſt = *eo*. EH = E*p*. EH ſeu = rec-lo ω areæ SHK inſcriptum ordinatæ EH adjacens, eademque eſt preſſio, quam ſubeunt omnia reliqua puncta plani *de*; preſſio verò, quam ſuſtinebunt puncta baſeos 2*d*2*e* ſecundi ſtrati 2*d*2*ed*, erit aggregatum ponderum filamenti cujusdam ſecundi ſtrati, & æque alti filamenti *eo* in primo, quorum hoc, ut modo dictum, exponitur rec-lo ω, illud verò rec-lo 2ω ſeu *p*2*p*. *ph*: atque adeò erit talis preſſio in 2*d*2*e*, = $\omega + 2\omega$. Eodem argumento conficietur gravitationem liquoris in tertium planum 3*d*3*e* exponi aggregato rectangulorum $\omega + 2\omega + 3\omega$; atque adeo preſſio, quam plani FG puncta ſuſtinebunt, exponetur omnibus rectangulis $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ quæ areæ ESKH inſcripta ſunt, atque ob infiniteſimam cujusque altitudinem in hanc aream evaneſcunt, ita ut loco aggregati omnium area ipſa ESKH intelligenda ſit, ac propterea preſſio, quam planum FG à liquore incumbente ſubire debet, exponitur area homologa ESKH, & gravitatis liquoris in fundum BC per aream ETNKH; eſt ergo omnino *pr*. FG: *pr*. BC = ESKH: ETNKH = SI: TX per §. 246. Quæ erant demonſtranda.

COROLLARIUM I.

259. Hinc preſſio, quam particula quævis FR plani FG ab imminenti liquore patitur, æquivalet ponderi abſoluto maſſæ liquoris cujusdam homogenei, cujus denſitas æqualis ſit denſitati mediæ TV liquoris heterogenei, volumen vero prisma rectum ſuper baſi FR & altitudine æquali SI homologæ ordinatæ ſcalæ preſſionum SIX. Nam, juxta Propoſitionem præſentem, preſſio, quam ſubit particula FR, exponi debet facto ex area SEHK in particulam FR plani FG; & (ſecundùm hypotheſin) SEHK: TEHKN = SI: TX = SI. TV: TX. TV, atque (§. 245.) area ETNKH = ET. TV, cum ipſa TV ſeu media liquoris denſitas ſit ea, quæ oritur applicando dictam aream ad altitudinem ET, atque adeò facta, uti poſthac ſemper factum ſupponemus, TX æquali ET, etiam rectangulum TX. TV

areæ

areæ ETNKH æquetur; reperietur rectangulum SI. TV ubique æquale homologæ areæ ESKH, & factum ex hac area in FR, exponens gravitationem seu pressionem in hanc particulam, erit æquale facto SI. TV. FR, quod designat prisma, cujus basis FR est planum pressionem sustinens; altitudo verò SI ordinata scalæ gravitationum, ductum in mediam densitatem TV liquoris heterogenei: atqui (§. 33.) prisma SI. FR ductum in TV exponit pondus liquoris homogenei, cujus densitas est TV & volumen ipsum prisma SI. FR; ergo particula FR plani FG ab incumbente liquore heterogeneo pressionem subit æqualem ponderi prismatis fluidi, cujus basis sit ipsa particula pressionem sustinens, altitudo ordinata homologa SI scalæ pressionum, & densitas uniformis TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium II.

260. Unde, quia æquales & minimæ particulæ lateris FL & contigua FR in plano horizontali FG (§. 252.) æquales ab imminente liquore heterogeneo pressiones sustinent, quælibet, juxta directionem ipsi perpendicularem, etiam FL pressionem subibit æqualem ponderi prismatis liquidi, cujus basis sit particula hæc ipsa FL fluidi impressionem excipiens; altitudo vero SI ordinata homologa scalæ pressionum & denique TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium III.

261. Si liquor est homogeneus, cujus densitas sit HE scala densitatum fiet recta axi ET parallela per punctum H ducta, eritque adeo hoc casu TV = EH, & curva EIX mutabitur in lineam rectam angulum semirectum cum axe ET continentem; adeò ut iterum hinc liqueat, cujusque liquoris homogenei gravitationes altitudinibus liquoris super planis, quæ pressiones subeunt, proportionales esse. Nam in triangulo rectilineo ETX ordinatæ SI, TX, quæ gravitationes liquoris in plana FG, BC significant, abscissis ES, ET proportionales erunt existente linea EIX recta, qualem nunc esse supponemus, ne pro hoc casu particulari novum schema delineare necessum habeamus.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [165] - 137
PUBLIC DOMAIN

Corollarium IV.

262. Sed si liquores homogenei diversæ densitatis vel gravitatis specificæ inter se conferuntur, gravitationes sunt in composita ratione densitatum & altitudinem; adeoque si in syphonis AB*d* crure ABC insit liquor DC cujus densitas uniformis sit EH, & altitudo super fundum æqualis HN; alteri verò cruri *ab* insit liquor *dt* densitatis *eh* vel *nc* ad altitudinum *ce* in crure assurgens, erit hujus liquoris gravitatio exprimenda rectangulo *he. et*, & liquoris DEC gravitatio exponi debet rectangulo EH. HN, adeoque, si tubi per horizontalem *b*B communicantes, atque rectangula EH. HN, *he. et* æqualia fuerint, liquores in æquilibrio consistent; quod proinde continget, ubi altitudines liquoris EC, *ec* densitatibus seu (§. 33.) gravitatibus specificis *he*, HE fuerint reciproce proportionales.

Fig. 62.

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de Tuborum firmitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones.

In Capite proxime antecedenti eas solùm gravitationes liquorum contemplati sumus, quæ in plana horizontalia exeruntur; in hoc verò examinandæ veniunt pressiones liquorum laterales, quibus parietes seu spondæ vasorum afficiuntur. Talis enim indago præbebit regulam pro definiendis tuborum firmitatibus ad resistendum aquæ pressionibus & viribus, quibus liquores vasorum latera ab invicem diducere conantur.

Propositio VI. Theorema.

263. *Vasis vel tubi* EAQP *ex utraque parte* ETPS *&* AYQV *aperti, & liquori* βαδδ *immissi usque ad* ETP, *superficies externa & convexa ab ambiente liquore eadem vi introrsum versus axem premetur, qua cava vasis superficies extrorsum urgetur ab interno vasis liquore.*

Fig. 63.

Nam si loco vasis EAQP intelligatur moles liquoris ejusdem constitutionis cum liquore ambiente, ejusdemque figuræ, magnitudinis

dinis & positionis cum vase; quia (secundùm hypothesin) omnia sunt in statu manenti, massæ liquidæ EAQP superficies externa eadem vi ab ambiente liquore βαθδ urgebitur, quâ superficies ejus cava à liquore EAYQP; alioqui, si alterutra pressio alteri prævaleret, partes liquoris ad motum concitarentur, nec proinde aqua vel liquor foret in statu manenti, contra hypothesin. Jam eandem impressionem exercebit liquor ambiens in superficiem vasis rigidam convexam, quam in similem æqualem & similiter positam superficiem aquæ EAYQP; ac pariter hic liquor vel aqua in suam cavam superficiem eandem impressionem exseret, quam exsereret in similem & æqualem superficiem cavam, sed rigidam vasis. Ergo externa & interna vasis superficies à liquore ambiente & interno, in vasis cavitate existente, æqualibus viribus in oppositas partes, juxta directiones superficiei vel superficiebus perpendiculares, urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

264. *Si Prisma rectum* NEABL *terminatum superficie curva* NCEBL, *rectangulo* NLBC *& duabus figuris similibus ac æqualibus quibuscunque* BAC, LEN, *cujuslibet liquoris heterogenei plenum sit, & planum* cba *basi* CAB *parallelum, ab eadem distet intervallo* Aa, *insensibili respectu totius liquoris altitudinis* EA *vel* MD. *Superficies cava* CcaABb *& rectangulum* BCcb *viribus æqualibus in partes directe oppositas prementur; ipsaque potentia, qua superficies & rectangulum afficiuntur, æquabitur ponderi prismatis liquidi, cujus basis est rectangulum* BbcC, *& altitudo ordinata* af *scalæ gravitationum* EZ *liquoris heterogenei, densitas verò uniformis* Aα *eadem cum media densitate ejusdem liquoris heterogenei.* Fig. 63.

Singula curvæ *cab* puncta eandem pressionem sustinent, æqualem (§. 260.) scilicet ponderi filamenti liquoris homogenei, cujus altitudo est *af* ordinata scalæ gravitationum, & densitas uniformis recta Aα, quæ liquoris heterogenei mediam densitatem repræsentat: & singula puncta curvæ CAB pressionem subeunt æqualem ponderi (§. 260.) filamenti ejusdem ac modò liquoris homogenei, cujus densitas uniformis sit iterum Aα, altitudo verò Aa homologa ordinata scalæ pressionum. Verum, quia differentia αg ordinatarum *fa*, αA (secundùm hypothesin) insensibilis est atque adeo contemnenda præ his ordinatis, singula puncta superficiei cavæ CaB una eademque

potentia, quam exponit pondus filamenti liquidi altitudinis *af* vel $A\alpha$ & denſitatis $A\omega$ affici cenſeri debent, adeoque impreſſio, quam à fluido vaſi indito patietur dicta ſuperficies curva & cylindrica (§. 63.) æquivalet preſſioni, quam ſubiret rectangulum BC*cb*, ſi etiam ſingulis ejus punctis potentia *af* applicata eſſet, atque gravitatio in hoc rectangulum eſt ut *af*. BC. B*b*, vel *af*. BC. A*a*, ductum in $A\omega$, cum pondus cujusque filamenti *af* ſit ut hoc filamentum, tanquam volumen, ductum in denſitatem ſeu ſpecificam gravitatem $A\omega$. Atqui ſolidum *af*. BC. Bb ductum in $A\omega$ denotat (§. 33.) pondus maſſæ fluidæ ſolido iſti quoad volumen æquali, cujus uniformis denſitas æquetur mediæ denſitati $A\omega$ liquoris noſtri heterogenei. Ergo ſuperficies cava C*a*B & rectangulum C*b* æquali vi in oppoſitas partes urgentur, & tanta quantum eſt pondus prismatis liquoris homogenei, cujus prismatis baſis ſit ipſum rec-lum B*c* ſuperficiem curvam C*a*B ſubtendens, altitudo verò *af* ordinata ſcalæ gravitationem $EZ\alpha$; & liquoris homogenei denſitas ſit media denſitas $A\omega$ liquoris heterogenei. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

265. Vires, quibus altera ſuperficies cava C*cqyb*B & rectangulum ipſam ſubtendens CBb in oppoſitas partes urgentur, etiam æquales erunt, ſi toti prismati EAQP idem liquor heterogeneus inditus fuerit, utpote quæ vires exponuntur una eademque re, ſcilicet pondere prismatis liquidi baſin rectangulam CBb & altitudinem *af* habentis, cujus denſitas uniformis eadem eſt ac prius, media denſitas $A\omega$ fluidi heterogenei.

Corollarium II.

266. Propterea gravitatio liquoris heterogenei in totam ſuperficiem cavam CNEABL vel in rec-lum NCBL, item in ſuperficiem NCVQPTLB & idem rectangulum NCBL æquivalebit ponderi prismatis recti & liquidi, cujus baſis ſit area ſeu trilineum $EZ\alpha AE$ altitudo CB, denſitasque uniformis $A\omega$.

Nam ſi altitudo AE vaſis in innumeras particulas indefinite parvas qualis A*a* diviſa, & per ſingula diviſionum puncta *a* plana horizonti parallela, quale *acqb*, ducta intelligantur, per art. 264. quælibet ſuperficiecula cava *c*A*b* vel *c*Q*b* & rec-lum CB*b* preſſionem ſubibunt

bunt æqualem ponderi liquoris homogenei, cujus volumen sit parallelepipedum seu prisma rectum, cujus basis rec-lum CB*b* ac altitudo *af*, scilicet homologa ordinata scalæ pressionum EZ*a*, & cujus liquoris homogenei densitas sit A*ω* par mediæ densitati liquoris heterogenei vasis EQ vel ECB, atque pondus liquoris homogenei sub dicto volumine (§. 33.) exponitur facto & volumine in densitatem liquoris, quæ est A*ω*, seu media densitas liquoris heterogenei, hoc est per *af*. BC. Dd. A*ω*, = A*ω*. BC. rec-lum *f*A; & pressio omnium superficiecularum C*a*B vel omnium C*q*B, quæ in tota CNELB, vel in tota CNPLB continentur, exponetur per factum ex A*ω*. BC in omnia rec-la *f*A, quæ areæ Ez*a*A inscribi possunt, vel quia hæc rec-la areæ inscripta in hanc ipsam aream desinunt, per factum ex A*ω*. BC in aream EZ*a*A. Atqui hoc factum (§. 33.) æquivalet ponderi quam habet massa liquoris homogenei, cujus densitas est A*ω* & volumen est prisma ex basi EZ*a*A & altitudine BC. Ergo etiam pressio liquoris heterogenei in superficiem curvam CNELB, vel in CNPLBQ æquivalet ponderi ejusdem liquoris homogenei massæ.

267. Zonæ vero C*cab*B vel C*cqb*B, quorum communis altitudo A*a* nunc ponatur finitæ magnitudinis, pressionem subibunt exponendam pondere prismatis liquidi, cujus basis sit trapezium vel quadrilineum *af*z*a*A, altitudo BC, & densitas uniformis A*ω*.

Corollarium III.

268. Unde si planum EMDA rectangulo NCBL in medio MD occurrat ad angulos rectos, in hoc plano reperietur media directio pressionum, quas singula puncta superficierum NAL & NQL subeunt à liquore heterogeneo, cum in dicto plano EMDA media sit *directio pressionum, quas singula puncta* rectanguli NCBL ab eodem *in* vase liquore heterogeneo sustinent, & pressiones hujus liquoris in superficies curvas NAL & NQL eædem sint cum pressione, quam sustinere debet rectangulum NCBL. Idcirco, si per centrum gravitatis areæ EZ*a*A planum rec-lo NB perpendiculare ductum intelligatur, cujus & plani EMDA prolongati communis sectio sit ZK, hæc KZ (§. 54.) erit media directio gravitationum liquoris in superficiem cavam NAL. Et punctum K vocari nunc potest *Centrum pressionum* vel *gravitationum* liquoris heterogenei.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [169] - 141
PUBLIC DOMAIN

Corollarium IV.

269. Hinc liquoris heterogenei preſſio lateralis, quam ſuſtinent ſuperficies cavæ NAL vel NQL aut etiam rec-lum æquealtum CBL, eſt ad pondus abſolutum liquoris heterogenei NLBCE, ſicut factum ex prismate recto, cujus baſis eſt figura Ez«A, & altitudo BC in A« ad factum ex prismate NEABL in A«, vel omiſſa hac A«, velut prisma illud ex EZ«A in BC ad hoc prisma NEABL. Nam (§. 266.) prisma EZ«A. BC ductum in A« ſignificat preſſionem, quam ſuperficies curva CEB vel CQPB ab interno liquore heterogeneo patitur, & prisma NEABL ductum in eandem A« (§§. 245. & 33.) ſignificat pondus abſolutum liquoris heterogenei ſub volumine NEABL. Propterea, ſi area A«ZE fuerit ad bilineum BACB, baſin prismatis ſeu vaſis NEAB, ſicut AE ad BC, preſſio lateralis, quam ſuperficies cava NAL vel NQL ſive rectangulum NCB ſubeunt, æquabitur ponderi abſoluto maſſæ liquoris heterogenei NEAB; & preſſio illa lateralis hoc pondere abſoluto major minorve exiſtet, prout ratio trilinei EZ«A ad bilineum BACB major aut minor fuerit ratione AE ad BC.

Corollarium V.

270. Adeoque, ſi vas noſtrum ponatur eſſe tubus SAYPQ, in quo rectangulum SVYT ſit maxima ſectio baſi AYQV recta, duæ partes ſuperficiei cavæ SEAT & SPQT, rectangulo SVYT adjacentes, *maximam* preſſionem à liquore heterogeneo, tubo indito, patientur, atque adeò hic liquor, recenſitas tubi partes à ſe invicem avellere conans, *maximam* impreſſionem in lineas SV & TY, in quibus duæ partes SEAT & SPQT ſibi invicem adhærent, exſeret; adeò ut, ni tubus ſatis firmus ſit, qui liquoris preſſionibus reſiſtere valeat, in loco infimo linearum SV vel TY rumpi, vel ſaltem rimis pertundi debeat à liquoris preſſurâ. Nam quia factum EZ«A. VY. A« exponit preſſuram, quam ſemitubus SAT vel SQT à latere ſubit, & propter maximum rectangulum SVYT, baſis ejus VT major eſt baſi CB cujuslibet alius rectanguli NCBL, ultrò liquet veritas aſſerti.

Co-

Corollarium VI.

271. Si ergo semel constiterit juxta quam proportionem procedant firmitates tuborum varias crassities habentium, ex collatione harum firmitatum cum liquorum gravitationibus innotescent facili negotio crassities tubi seu spissitudo materiæ, ex qua tubus paratus est, quæ requiritur ad id, ut tubus citra sui rupturam liquoris ei inditi pressionem perferre possit. Firmitatum vero ratio, quibus duo diversi tubi pollent, demonstrabitur in sequenti propositione.

Propositio VIII. Theorema.

272. *Resistentiæ seu firmitates tuborum sunt in composita ratione ex ratione tenacitatis materiæ unius ad tenacitatem materiæ alterius tubi, ex ratione crassitiei ad crassitiem, & denique ex altitudinis tubi unius ratione ad altitudinem alterius.* Fig. 64.

Sit tubus, cujus orificium figura interior AVQY, crassities materiæ, ex qua tubus paratus est, VV vel AA aut QQ, & altitudo tubi V*u* seu Y*y*; erunt rectangula *u*VV & *y*YY partes, in quibus semitubi *u*A*y* & *u*Q*y* à se invicem avellendi juxta directiones VF & YF à potentiis in contrarias partes agentibus, sibi mutuo adhærent. Jam quia tot vinculis semitubi conjunguntur, quot sunt puncta physica in rectangulis illis uVV & yYY, manifestum est resistentiam tubi æqualem esse vi requisitæ ad omnia vincula seu fibras dilacerandas, atqui vis ejusmodi seu resistentia tubi est ut vis, qua unum vinculum seu una fibra rumpi potest & numerus fibrarum conjunctim; vis verò, qua opus est ad rumpendum unam fibram, est nobis tenacitas materiæ tubi vel saltem huic tenacitati proportionalis; numerus verò fibrarum est ut summa rectangulorum *u*VV & *y*YY, ergo vocando tenacitatem materiæ tubi T, erit ejusdem tubi resistentia sicut factum ex T in duplum rectangulum *u*VV, hoc est ut 2.T.VV.V*u*, vel etiam ut 2.A.C.T, vocando altitudinem tubi V*u*, A & crassitiem materiæ seu VV vel YY, C. Sic etiam in alio tubo, cujus firmitas, crassities materiæ ejusdemque tenacitas, ac denique tubi altitudo dicantur, *f*, *c*, *t* & *a*, & F indicet pariter firmitatem primi tubi, erit *f* ut 2*act*, & cum paulo ante fuerit F ut 2ACT erit omnino F : *f* = TCA : *tca*. Quod erat demonstrandum.

Co-

Corollarium I.

273. Hinc figuras 63 & 64, junctim inſpiciendo, quia (§. 267.) preſſio liquoris heterogenei, quæ in partes *u*Ay & *u*Q*y* exſeritur, eſt *af*ω A. VY. Aω, hæc preſſio etiam erit = AMDS, nominando altitudinem zonæ *q u a* ABQ, quæ eſt A*a* ut ſupra, A, quadrilineum *af*ω A = A. M, diametrum VY vel AQ = D. adeoque pr. *u*Ay + pr. *u*Q*y* = 2AMDS, exiſtente Aω = S. Ponendo igitur liquoris preſſionem in zonam aAQq præciſe æqualem eſſe ejus firmitati, ſeu F = pr. *u*Ay + pr. *u*Q*y*, erit (§. 272.) 2. TCA = 2. AMDS, vel CT = MDS, & in alio tubo *ct* = *mds*, indicando ſimiles res per ſimiles litteras in utroque tubo majusculis in primo, & minusculis in altero. Ergo CT : *ct* = MDS : *mds*.

Corollarium II.

274. Habeant inſuper tubi noſtri orificia circularia, atque contineant liquores homogeneos, eritque eo caſu linea EZω recta angulum ſemirectum continens cum EA, adeo ut ſit *af* = E*a*, Aω verò, quæ dicta eſt S, deſignat denſitatem ſeu gravitatem ſpecificam liquoris, & M erit E*i* biſecta ſcilicet A*a* in *i*; quandoquidem M. A*a* = *af*ω A, & hoc caſu hoc quadrilineum abit in trapezium æquale rectangulo ſub E*i* & A*a*. Hisce poſitis analogia corollarii præcedentis transformabitur in ſequentes I°. C : *c* = (M. S. D : T) : (*m. s. d* : *t*.). Hoc eſt, craſſities materiæ in ambobus tubis firmitates habentibus liquorum preſſionibus æquipollentes, ſunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorundem ſpecificis in diametros orificiorum applicata ad tenacitatem materiæ, ex qua tubi fabrefacti ſunt.

275. Adeoque ſi liquores ejusdem ſpeciei & tubi ex eadem materia facti fuerint, craſſities tuborum æqualiter firmorum erunt in compoſita ratione altitudinum, liquorum, & diametrorum tuborum, hoc eſt in ratione rectangulorum per axem tuborum.

276. II°. T : *t* = (M. S. D : C) : (*m. s. d* : *c*). Hoc eſt tenacitates materiæ tuborum æqualis roboris, ſunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorum ſpecificis in diametros tuborum applicata ad craſſities materiæ, ex qua tubi parati ſunt.

Scho-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [172] - 144
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

227. Ut usus præcedentium regularum innotescat, unum atque alterum exemplum afferre libet. *Exempl.* I. Ad Calcem Operis nonnullorum Academiæ Reg. Paris. Scientiarum sociorum, quod inscribitur, *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique de Messieurs de l'Academie Royale des sciences*, extat dissertatiuncula Celeb. Olai Romeri Pani De Crassitie & Viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines, diversasque tuborum diametros, in qua dissertatione fol. 517. relatum legitur, tubum plumbeum diametri 16 pollicum, cum crassitie $6\frac{1}{4}$ linearum (linea ipsi est 12^a. pollicis vel 144^a. pedis Parisiensis pars) pressioni aquæ 50 pedum in altitudine sufficienter restitisse in experimento quodam Versaliis olim sumpto, qua observatione posita, quærit Autor qualis crassities alii tubo plumbeo tribui debeat orificium habenti 10 digitorum, ut aquæ pressionem 40 pedum perferre queat. Canon articuli superioris 275 quæstioni illico satisfaciet, cum hoc casu crassities sint ut rectangula per axem, nam in tubo observationis multiplicando aquæ altitudinem 50 pedum in diametrum tubi 16 pollicum, productum 800 denotat rectangulum per axem in tubo observationis, & ducendo altitudinem aquæ 40 pedum in diametrum 10 pollicum alterius tubi proveniet 400 pro rectangulo per axem in hoc tubo, quod cum illius 800 tantum dimidium sit, hujus tubi crassities juxta canonem tantum dimidia erit crasitiei in tubo observationis, quæ erat $6\frac{1}{4}$ linearum, ergo quæsita alterius tubi crasities erit tantum $3\frac{1}{8}$ linearum, loco $4\frac{1}{2}$ lin. circiter, quam Dn. Romerus repererat, quia resistentias tuborum statuit esse in duplicata ratione crassitierum cæteris existentibus paribus, quas supra in propositione apparet esse in simplice non duplicata illa ratione.

278. *Exempl.* II. Mariottus censet, ut habetur in eodem Opere quod in antecedenti exemplo memoravi fol. 513, tubum cupreum sex pollicum in diametro aquæ presionem 30 pedum perferre posse cum crasitie dimidiæ lineæ. Ponamus has tuborum plumbei & cuprei resistentias aquæ presionibus præcise æquari, inveniendaque sit proportio tenacitatis plumbi & cupri. In formula superiore (§. 276.) elisis S & s utpote æqualibus provenit $T : t = (M.D : C) : (m.d : c)$. ubi majusculæ ad tubum plumbeum, minusculæ verò ad cupreum pertinent, hinc subrogatis ordine loco M, D, C, numeris

meris 50, 16, $6\frac{2}{3}$; & loco m, d, c, numeris 30, 6 & $\frac{1}{2}$; invenietur $T : t = \frac{2400}{19} : 360 = 240 : 684 = 20 : 57$, atque adeo tenacitas plumbi foret, juxta has observationes, paulo major quam subtripla tenacitatis cupri.

PROPOSITIO IX. Theorema.

279. *Si vasis* BAS, *liquoris cujuscunque heterogenei pleni, partes* BAE, SAE *instar alarum follis circa verticem* A *ab invicem diduci queant, earundemque partium vel complementorum* OBbA, OSsA *solida analoga* 2B2A2E, 2S2A2E, *vel* B2B2b2A, S2S2s2A *indicentur iisdem signis* δ, κ, *quibus eorundem solidorum analogorum centra gravitatis signantur, signoque* ω *pseudocuneus* LPQ *scalæ gravitationum* LrQ *utrique vasis alæ communis, quo ejusdem pseudocunei centrum gravitatis signatur, potentiæ quædam æquales ponderi massarum* δ, κ *liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas eadem sit cum* PV *media densitate liquoris in vase heterogenei, in directionibus suis homologis* αδ, ξκ *vel* δω & κξ *per centra gravitatis solidorum* δ, κ *transeuntibus planisque* BS *normalibus vasi applicatæ, & aliæ potentiæ* γ & ω *inter se æquales, utpote singulæ æquales ponderi molis liquidæ* ω, *cujus densitas uniformis etiam sit* PV *æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, vasi applicatæ in directionibus* bγ, sω, *plano* BS *æquidistantibus, & per centrum gravitatis* ω *pseudocunei scalæ gravitationum transeuntibus; hæ quatuor potentiæ* δ, κ, γ & ω *simul agentes, quælibet scilicet secundum suam directionem, eadem vi pollent ad diducendas vasis alas, quam habet eidem vasi inditus liquor heterogeneus.*

Fig. 23, 24.

Hæc propositio tantum est casus particularis corollarii primi Propositionis X. libri primi, nam quæ in hac propositione generaliter dicitur scala potentiarum solido parienti perpendiculariter applicatarum, nunc est scala gravitationum LrQ, quandoquidem quodvis punctum *b* in superficie A*b*B urgetur juxta directionem *bu* superficiei perpendicularem (§. 260.) potentia æquali ponderi filamenti liquidi voluminis 3*er* & densitatis PV æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, quod pondus filamenti *r*3*e* exponitur (§. 33.) facto *r*3*e*. PV ex volumine scilicet in densitatem liquoris, atque adeò liquoris gravitationes in cavam vasis BAS superficiem idem præstant ac potentiæ singulis punctis cavæ isti superficiei applicatæ, quas designant ordinatæ respectivæ *r*3*e* scalæ gravitationum LrQ ductæ in datam PV. Propterea (§. 81.) liquor heterogeneus vasis

vasis eundem effectum præstabit, quem potentiæ expressæ per solida $\delta, \varkappa$, & ω ducta in PV, atque adeò æquales ponderi liquoris homogenei densitatis PV sub voluminibus illis $\delta, \varkappa, \omega$, applicatæ solido BAS in directionibus $\alpha\delta$, $\xi\varkappa$ vel $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$ & $b\gamma$, $s\omega$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

280. Adeoque momenta fluidi heterogenei vasis alas diducere conantis circa hypomochlion A (§. 82.) pro ala BAE erunt $PV.\delta.\alpha E + PV.\gamma.Ae$, & pro ala SAE erunt $PV.\varkappa.\xi E + PV.\omega.Ae$. Hæc enim facta $PV.\delta, PV.\gamma, PV.\omega, PV.\varkappa$ significant pondera liquoris densitatem PV habentis sub voluminibus δ, γ, ω, & $\varkappa$.

Corollarium II.

281. Antecedens corollarium juxta §. 263. etiam obtinet, cum vasis alæ ab aliquo fluido ambiente extus premuntur, sed permutatis gravitationum directionibus, hoc est, sicut interni liquoris gravitationes vasis alas ab invicem diducere conantur, ita vice versa ambientis fluidi pressione fit, ut eædem alæ ad se invicem constringantur fortiter. Unde eædem formulæ, quæ in corollario præcedenti momenta liquoris interni vasis alas dilatare conantis designabant, momenta pariter liquoris ambientis alasque constringere conantis expriment, sed scalæ gravitationum liquoris exterioris applicatæ.

Scholion.

Adeoque, ad æstimandas liquoris pressiones in vasis diducibilibus, tota difficultas eo reducitur, ut habeatur regula calculum subducendi pro inventione momentorum solidorum δ & $\varkappa$ respectu plani recti AE, & pseudocunei ω respectu plani PQ, vel subinde etiam respectu plani OAO figuræ 24, quoties scilicet vasis vertex A sursum respicit. Calculus vero facile reduci potest ad quadraturas figurarum, ut ex sequentibus duobus theorematibus haud difficulter perspicietur.

PROPOSITIO X. Theorema Geometricum.

Fig. 27. 282. *Solidi cujusvis* CBAD, *cujus sectiones* cbd *basi* CBD *parallelæ sint, figuræ similes & similiter positæ, momentum respectu plani* CAD *basi* CBD *recti, æquabitur facto ex trilineo quodam* AEFfA *in rectangulum sub* EF, *quam ipsi* BE *rectæ* CD *normali æqualem ponimus, & data recta* D *ejus magnitudinis, ut parallelepipedum sub quadrato rectæ* BE *vel* EF *& hac data* D, *æquale fiat solido ex bilineo* CBD *in* XE, *existente hac* XE *distantia centri gravitatis* X *bilinei* CBD *ab ejus basi* CD, *ipsum verò trilineum ea lege descriptum sit, ut ejus ordinatæ* EF, ef *sint in triplicata proportione ordinatarum ipsis in directum positarum* BE, be, *in figura* AbBE, *quæ plano* CAD *recta est, & per axem* AE *figuræ* CAD *transit.*

Sit *x* centrum gravitatis figuræ *cbd*, eritque *xe* distantia hujus centri à basi *cd* bilinei *cbd* in plano figuræ AbBE, quandoquidem figuræ CBD, *cbd* (secundùm hypothesin) similes & similiter positæ sunt, eritque adeò CBDC. XE : *cbdc*. xe = BE^3 : be^3 id est constr. = EF : ef = D. EF^2 : D. EF. ef; atqui (constr.) est D. EF^2 vel D. BE^2 æquale solido ex CBDC in XE, ergo etiam D. EF. *ef* æquabitur solido ex *cbdc* in *xe*, seu momento bilinei *cbd* axi *cd* appensi. Jam, quia momentum solidi totius CBAD respectu plani CAD æquatur momentis omnium bilineorum *cbdc*, quæ in hoc solido continentur, id est, omnibus *cbdc* in *xe*, idem solidi momentum etiam æquale erit omnibus D. EF. *ef*, quorum singula singulis *cbdc*. *xe* æqualia sunt; atqui omnia D. EF. *ef* = D. EF. omn. *ef* = D. EF. aream EAfF. Ergo momentum solidi CBAD æquatur facto ex area EA*f*F in rectangulum D. EF. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

283. Adeoque momentum complementi solidi CBAD respectu ejusdem plani CAD, seu solidi residui post detractionem ipsius CBAD à prismate recto & æquealto CDBG, æquabitur facto ex trilineo AFH in rec-lum D. EF. Nam momentum prismatis CDBG est factum ex rec-lo EH in rec-lum D. EF, & solidi CBAD momentum æquatur facto AEF*f*A. D. EF, adeoque momentum complementi hujus solidi CBAD æquatur omninò facto ex rec-lo EH, demto trilineo EAF, in rectangulum D. EF, hoc est facto ex AFH in D. EF.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [176] - 148
PUBLIC DOMAIN

Corollarium II.

284. Unde, si solidum nostrum CBAD fuerit analogum solido patienti BAE propositionis præcedentis, atque adeò idem sit cum solido δ, erit hoc casu $\delta.\alpha E$ seu momentum solidi $\delta = EAfF, D.EF$, in casu figuræ 23. quo vertex solidi BAS deorsum respicit, & $\delta.\alpha E = HFfA.D.EF$ in casu figuræ 24., quo vertex sursum respicit.

PROPOSITIO XI. Theorema Geometricum.

285. *Si prisma rectum super basi* CAD *sectum intelligatur superficie quadam curva* QrLCD, *nascetur inde cunei species* QACD, *cujus acies erit in linea* CD, *ejusque facies curva aciei* CD *adjacens oritur motu parallelo lineæ* CD, *ita ut fixum in ea punctum* E *semper in curva* LrQ *existat inter movendum, lineaque* CD *plano* LPQ *perpendicularis sit, hujus cunei momentum respectu plani* PQ *alteri* CAD *recti æquabitur facto areæ seu bilinei* EiA *in rec-lum* AE. CD; *ubi bilinei ordinata quæcunque* ei *fuerit ad ordinatam homologam* er *figuræ* PLQ, *sicut rectangulum coordinatarum* Ae, cd *in figura* CAD, *ad rectangulum ex datis* AE, CD. Fig. 28.

Nam quia (secundùm hypothesin) *ei* : er = *Ae. cd* : AE. CD, erit *Ae. cd. er* hoc est momentum rec-li cd. er ad distantiam Ae plano PQ appensi = solido AE. CD. *ei*. Atqui momenta omnium rectangulorum *cd. er* contentorum in pseudocuneo æquivalent momento istius pseudocunei, ergo etiam omnia EA. CD. *ei*, hoc est, factum ex rec-lo AE. CD in bilineum E*i*A, æquantur momento pseudocunei QACD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

286. Quoties figuræ CAD vertex A deorsum conversus est, atque adeo cum puncto P congruit, toties curva E*i*A per puncta L & P transibit, adeo ut ordinatæ ejus in his punctis nullæ sint. Sed si vertex A ejusdem figuræ CAD sursum respicit, adeo ut basis CD per punctum P transeat & vertex cum puncto L confundatur, curva L*n*I transibit quidem per punctum L, non verò per punctum P, cum ordinata ejus in hoc puncto PI ipsi PQ seu PL æqualis futura sit; nam si CD est in P & A in L, analogia *en* : *er* = *Ae. cd* : AE. CD, fiet

fiet PI : PQ = AE. CD : AE. CD, atque adeò PI = PQ = PL, ubi ſcilicet *Ae* facta fuerit AE. Hocque caſu erit momentum ſolidi reſpectu plani per L transeuntis alterique PQ æquidiſtantis, æquale facto ex rec-lo AE. CD in aream PL$_{\eta}$I.

Corollarium II.

287. Hinc, ſi figura CAD fuerit ſectio recta in ſolido patiente BAS figurarum 23 & 24, & curva LrQ ſcala gravitationum liquoris heterogenei, ſolidum QPCD erit pſeudocuneus ſcalæ gravitationum, & momentum ejus, ſeu ω. *Ae*, in caſu figuræ 23 = AE. CD. L$_{i}$PL, & ω. *Ae* in caſu figuræ 24, = AE. CD. L$_{\eta}$IP.

Scholion.

288. Patet ergo computum momentorum liquorum in vaſis diducibilibus gravitantium totum deduci ad inveſtigationem arearum AEF*f*A, L$_{i}$P & L$_{\eta}$IP in figuris 27, 28. quæ in particularibus exFig. 23, 24. emplis ſemper haberi poſſunt, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter. Sit enim vas BAS conicum liquore homogeneo plenum, adeò Fig. 27. ut curva LrQ abeat in lineam rectam, quo caſu ſolida δ & $\varkappa$ erunt ſimilia & æqualia ſolidis BAE & SAE, & ſolidum CBAD erit ſemiſſis coni recti, in quo cum ſit EA^3 : eA^3 (= BE^3 : be^3) = EF : ef, liquet curvam A*f*F fore hoc caſu parabolam cubicam, atque adeo trilineum EAF erit = $\frac{1}{4}$ AE. EF, & AFH = $\frac{1}{4}$ AE. EF. Et quia CBD eſt ſemicirculus, cujus centrum in E, erit CBDC. XE = $\frac{1}{3}$ BE^3 = D. BE^2, atque adeo D = $\frac{1}{3}$ BE. Hinc (§. 284.) δ. α E = $\varkappa$. $\frac{1}{3}$E = D. EF. AEF = $\frac{1}{3}$ BE. EF. AEFA = $\frac{1}{3}$ BE. EF + $\frac{1}{4}$ AE. EF = $\frac{1}{12}$ AE. BE^3.

Fig. 28. Porrò exiſtente linea LrQ recta & LP = PQ, erit etiam Le = *er*, & ſic ubique: unde cum (§. 285.) *ei* ſit ad *er* ut *Ae*. *cd* ad AE. CD, erit ubique ordinata *ei* = Ae. eE. *cd* : AE. CD = Ae^3. eE : AE^3, ſubſtituendo loco rationis *cd* : CD æqualem rationem Ae : AE propter ſimilitudinem triangulorum *Acd* & ACD, quandoquidem in præſenti caſu figura ACD eſt triangulum. Hinc reperietur per notiſſimas quadraturarum methodos bilineum E*i*A = $\frac{1}{12}$ AE^2 : hinc in caſu figuræ 23. habebitur (§. 287.) ω. *Ae* (= AE. CD. LiAL) = AE. CD. $\frac{1}{12}$ AE^2, ſeu, quia CD tantundem eſt ac 2BE, = $\frac{1}{6}$ BE. AE^2.

Erit

Erit ergo PV. δ. αE + PV. ω. Ae = ¼. PV. AE. BE² + ¼. PV. BE. AE² = ¼ PV. AE. BE. AB² = PV. κ. ξE + PV. ω. Ae quia in præsenti casu alæ BAE & SAE, utpote semisses coni recti BAS, similes & æquales sunt. Fig. 23.

289. Si conus BAS ab aëre etiam extus premi ponatur, & quæratur altitudo AE ipsius coni, in suppositione æquilibrii internæ liquoris pressionis in cavam coni superficiem cum externa aëris in convexam, erit hoc casu scala gravitationum LrQ linea recta axi LP seu AE parallela, cujus ab hac AE distantia sit PQ in figuris 23, 24, & 28, & EM vel AN in figura 27. Hoc casu solidum δ vel κ erit prisma baseos CBDC & altitudinis EM seu PQ, hujusque prismatis momentum seu δ. αE nunc fiet = CBDC. XE. EM (vel quia supra inventum est CBDC. XE = ⅓ BE³) = ⅔ EM. BE². Loco pseudocunei ω nunc habebimus prisma ex basi CAD & altitudine PQ, unde, quia generaliter est ei : er = Ae. cd : AE. CD (vel propter triangula similia CAD & cAd) = Ae² : AE², & propter æquales er & PQ, cum linea LrQ ipsi EA parallela supponenda sit, atque per Q transiens, erit ei = Ae². PQ : AE², hocque casu foret curva EiA parabola conica, cujus parameter est AE² : PQ, adeò ut area EiAE hoc casu futura sit = ⅓ AE. PQ = ⅓ AE. EM; atque adeò γ. Ae = ω. Ae (= AE. CD. EiAE) = ⅓ AE². CD. EM = ⅔ BE. EM. AE². Idcirco vocando athmosphæræ densitatem mediam Z, erit summa momentorum pressionis aeris, seu Z. δ. αE + Z. ω. Ae = ⅔ Z. BE. EM. BE² + ⅓ Z. BE. EM. AE² = ⅔. Z. BE. EM. AB². Hinc, quia (secundùm hypothesin) in casu æquilibrii PV. δ. αE + PV. ω. Ae = Z. δ. αE + Z. ω. Ae, erit etiam ¼ PV. AE. BE. AB² = ⅔ Z. BE. BM. AB², adeoque PV. AE = 4. Z. BM. Invenimus enim supra, PV. δ. αE + PV. ω. Ae = ¼ PV. AE. BE. AB², & paulò ante pro momentis aeris extus prementis, seu pro Z. δ. αE + Z. ω. Ae invenimus ⅔ Z. BE. BM. AB². Atqui PV. AE denotat pondus columnæ liquidæ, cujus altitudo AE & media densitas PV, & Z. BM gravitationem totius athmosphæræ, quam simplicius per p indicabimus; ergo si vas conicum BAS hydrargyri plenum sit, oportet altitudinem AE quadruplo majorem esse altitudine columnæ mercurialis æquivalentis athmosphæræ pressioni, atque adeò minimum 120. digitorum, cum athmosphæræ gravitatio æquivaleat 30. digitis Mercurii, ad obtinendum æquilibrium inter externam athmosphæræ pressionem & internam Mercurii gravitationem follis conici alas ab invicem diducere conantem.

Sin

Sin vero coni vertex ſurſum converſus eſſet, ut in fig. 24. eo caſu præcedentia theoremata præberent PV. AE = ⅔ Z. BM pro caſu æquilibrii inter preſſuram externam aëris & internam Mercurii, atque adeò pro hoc æquilibrio obtinendo nunc ſufficeret altitudo AE 60. digitorum. Atque hæ determinationes ad amuſſim conſentiunt cum iis, quæ Celeb. Jac. Bernoullius ſuper hac re prodidit in Actis Erudit. Lipſ. 1686. & 1687. occaſione alicujus perpetui Mobilis in Novellis Reipublicæ literariæ D. Bælii 1685. propoſiti, quod conſiſtebat in quadam follis ſpecie triangularis, circa axem horizontalem alterutrius alæ medio affixum mobilis, Mercurio modo implendi, modoque etiam in ſitum rectum deducti iterum aliquo usque deplendi &c. Hujus machinæ ſucceſſum irritum fore ex principiis hydroſtaticis & vectis natura oſtendit eleganter modo laudatus Bernoullius. Papinus verò, etſi ſucceſſum pro dubio habuiſſe videtur atque imperfecta preſſionum æſtimatione impoſſibilitatem motus ejus utcunque oſtenderit, nihilominus tamen Bernoullianam machinæ diſcuſſionem eludi poſſe exiſtimavit, motum parallelum alis tribuendo, quo vectis rationem, in qua Bernoullii impugnatio fundata erat, ceſſaturam eſſe confidebat perperam. Ea vero, quæ ſuper prædictam machinam in utramque partem agitata fuere, legi poſſunt in Actis Lipſ. ſupra citatis.

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum ſolidorum in Fluidis quibuscunque demerſorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

PROPOSITIO XII. Theorema.

290. *Omne fluidum heterogeneum corpus quodcunque ſolidum in ipſo demerſum, vel eidem innatans, tanta vi in altum pellere conatur, quantum eſt pondus maſſæ liquoris cujusdam homogenei ſub volumine ſolidi analogi corpori demerſo ejusve parti immerſæ, cujus denſitas æquet mediam denſitatem fluidi heterogenei, ſecundum directionem fluidi ſuperficiei normalem per centrum gravitatis ſolidi analogi transeuntem.*

Fig. 25. Generale iſtud theorema aliud non eſt quam §. 83. in concreto ſumtus; idcirco reſumendo ſchema dicti paragraphi ponendoque lineam OLQ, quæ illic dicebatur ſcala potentiarum ſolido patienti appli-

applicatarum nunc esse scalam pressionum seu gravitationum fluidi heterogenei, planumque FO, quod supra in citato loco planum sublime vocabatur, nunc in concreto erit superficies fluidi, in quo corpus ABaS demersum est, & ex dicto paragrapho 83. illicò liquebit solidum corpus aBAS ea vi in altum urgeri, quæ æquetur ponderi massæ liquidæ 2a2B2A2S sub volumine solidi demersi corpori analogi, cujus densitas uniformis æqualis sit PV seu mediæ densitati fluidi heterogenei. Nam (§. 260.) singula puncta superficiei corporis aBAS pressionem subeunt æqualem gravitati seu ponderi filamenti cujusdam fluidi homogenei, cujus filamenti longitudo eadem est cum homologa ordinata scalæ gravitationum OLQ, & fluidi homogenei densitas uniformis æqualis mediæ densitati PV fluidi heterogenei in quo corpus aBAS demersum est, quod pondus filamenti (§. 33.) æquatur perpetuo facto ex volumine ejus exposito per ordinatam scalæ gravitationum in densitatem ejus PV, unde, quia in casu præsenti potentiæ singulis punctis superficiei aBAS perpendiculariter applicatæ sunt ordinatæ respectivæ scalæ OLQ in datam PV ductæ, liquet (§. 83.) potentiam corpus aBAS in fluido heterogeneo attollere conantem facto ex solido 2a2B2A2S in PV exponendam esse, hoc est (§. 33.) pondere massæ liquoris homogenei, cujus densitas PV & volumen sit modo recensitum solidum, dictæque potentiæ directionem xy plano FO, hoc est fluidi superficiei normalem, transire per centrum gravitatis solidi 2a2B2A2S. Quod primùm de corpore demerso aBAS erat demonstrandum.

Non diversa erit demonstratio circa corpus aBAS fluido heterogeneo XZ innatans. Sit enim hujus fluidi scala gravitationum curva LQ, & 2B2A2S solidum analogum parti immersæ BAS, potentia solidum aBAS attollere connitens etiamnunc erit pondus molis fluidæ 2B2A2S, cujus densitas uniformis PV æquatur mediæ densitati liquoris heterogenei, ejusque directio superficiei liquoris heterogenei FL perpendicularis, transibit per centrum gravitatis ejusdem solidi 2B2A2S per §. 83. Quod erat demonstrandum. Fig. 26.

Corollarium I.

291. Hinc corpora in fluidis existentia non gravitant totâ suâ absolutâ gravitate, seu pondere absoluto, sed duntaxat pro quantitate, qua pondus illorum absolutum superat pondus massæ fluidi homogenei, cujus volumen sit solidum corpori dato analogum, densitas-

que par mediæ denſitati fluidi, in quo corpus demerſum eſt. Adeoque, ſi pondus maſſæ fluidæ modo dictæ æquetur ponderi abſoluto corporis, hoc corpus in fluido non gravitabit, hoc eſt, non deſcendet nec aſcendet, & tantum negative gravitabit, hoc eſt, in fluido aſcendet, ſi nominata fluidi moles gravior fuerit quam demerſum corpus, vi æquali exceſſui, quo fluidi pondus ſub volumine ſolidi, dato corpori analogi, hujus pondus excedit.

Corollarium II.

292. In corollario præcedenti jam ſupponitur lineam jungentem centra gravitatis corporis dati & ſolidi eidem analogi, juxta ſcalam gravitationum, fluidi ſuperficiei normalem eſſe, alioqui corpus in fluido demerſum in omni caſu circa ſeipſum convertetur, usque dum dicta linea centra gravitatis conjungens fluidi ſuperficiei perpendicularis facta fuerit. Fig. 25. Nam ſi linea *xy* producta ſuperficiei fluidi FO ad angulos rectos occurrat, atque per centrum gravitatis ſolidi 2*a*2B2A2S tranſeat, vi præſentis propoſitionis ſolidum *a*BAS juxta directionem hanc *xy* ſurſum agetur, ipſum verò proprio pondere deſcendere nititur juxta directionem *tu* parallelam *xy* per centrum gravitatis corporis *a*BAS tranſeuntem. Jam, ſi linea connectens centra gravitatis corporum *a*BAS & 2*a*2B2A2S plano FO obliqua ſit, neceſſe eſt ut directio *tu* corporis *a*BAS deſcendere conantis & *xy* directio potentiæ attollentis ſint diverſæ, ſeu non congruentes, unde, quia idem corpus *a*BAS à duabus potentiis oppoſitas in partes agentibus juxta *tu* & *xy* urgetur, liquet id in ſe ipſum converſum iri juxta ordinem literarum *a*BAS, nec motum ejusmodi converſionis prius poſſe ceſſare, quam corpus eum intra fluidum ſitum nactum ſit, quo directiones *tu* & *xy* ſibi invicem congruant, atque adeò linea jungens centra gravitatis ſolidorum *a*BAS & 2*a*2B2A2S plano FO perpendicularis facta ſit.

Hactenus generalia circa æquilibria & motus corporum in omnis generis fluidis poſitorum, ſequuntur unum alterumve corollarium circa fluida homogenea, & faciliora aliquot problemata.

Corollarium III.

293. Si corpus *a*BAS fluido homogeneo immerſum eſt, fluidi ſcala gravitationum erit triangulum rectangulum iſoſceles OPQ, &

& ſolidum $2a2B2A2S$, corpori $aBAS$ analogum, eidem ſimile & æquale erit; atque adeò fluidum homogeneum tanta vi ſeu potentia corpus in ipſo demerſum vel innatans attollere conatur, quantum eſt pondus maſſæ liquoris ſub volumine corporis demerſi ſimili & æquali vel partis fluido immerſæ. Idcirco cuilibet corpori tantum de ſuo pondere intra ejusmodi fluidum decedit, quantum ponderat maſſa fluidi modo recenſita. Atque in hoc corollariolo fundantur ferme omnes regulæ, quas Autores circa æquilibria ſolidorum cum fluidis homogeneis ſubinde tradunt.

Corollarium IV.

294. Hinc etiam (§. 292.) linea jungens centra gravitatis corporis cujusque fluido homogeneo innatantis & in eo in æquilibrio conſiſtentis, ejusque partis fluido immerſæ ſuperficiei fluidi normalis exiſtet. Alioqui corpus fluido innatans hinc & inde vacillaret, donec in hunc ſitum ſe compoſuerit.

Corollarium V.

295. Diverſæ partes unius ejusdemque corporis diverſis liquoribus homogeneis immerſæ in caſu æquilibrii, ſunt in reciproca ratione denſitatum ſeu gravitatum ſpecificarum liquorum, quibus idem corpus ſucceſſive immerſum eſſe ponitur.

Dicantur liquores L, l, eorum gravitates ſpecificæ S, s, corporis liquoribus ſucceſſive immiſſi partes immerſæ P, p; & dico fore $P:p=s:S$. Nam quia corporis liquori L immerſa pars eſt P & S ſpecifica gravitas liquoris, factum ex P in S (§. 33.) exprimet pondus abſolutum maſſæ liquidæ ſub volumine P, & eandem ob rationem $p.s$ denotabit pondus maſſæ liquoris l ſub volumine p; ſed pondera $P.S$ & $p.s$, quæ in caſu æquilibrii uni eidemque corpori liquoribus L, l immerſo æqualia ſunt, etiam inter ſe æquabuntur; adeò ut $P.S=p.s$, & per conſequens $P:p=s:S$.

Scholion.

296. Corollarium præcedens fundamentum continet diverſarum machinularum hygroſtathmicarum, quibus diverſorum liquorum ſpecificæ gravitates explorari ſolent. Uſitatiſſima conſtat bulla vitrea M collo tereti & cavo MA inſtructa, cui ſubinde pauxillum Mercu- Fig. 67,

rii infundi ſolet, ut machinula in liquoribus ſitu ſemper erecto conſiſtat; bulla verò M ut plurimum deſinit in ſacculum N, in quo infuſus Mercurius ſe colligere poſſit. Machinulæ collum MA ab artificibus in partes æquales dividi ſolet, ſed perperam, ad indicandas æquales gravitatis liquorum differentias. Verùm quâcunque ratione collum diviſum ſit, ope nonnullarum obſervationum machinula apta redditur indicandis omnium liquorum ſpecificis gravitatibus. Ipſæ vero obſervationes ſequenti ratione peragi debent.

Fig. 67. Notetur primùm totius machinulæ cum indito Mercurio pondus, quod nominabimus P, idque granis expreſſum ſupponemus. Machinula deinde liquori cuidam L immiſſa mergatur usque ad primam diviſionem, ſeu usque ad GG, quod ſemper fieri poteſt addendo vel demendo nonnihil Mercurii. Appendantur porro machinulæ ſucceſſivis vicibus tot grana, usque dum eadem liquori L immergatur ad diviſiones omnes ſequentes 2, 3, 4, 5, 6, ponderaque totalia, quæ machinulam in eodem liquore usque ad dictas diviſiones deſcendere faciunt, ſint P, P+a, P+b, P+c, &c. qualia in adjecto latere culo conſpiciuntur, & quæ pondera in hoc laterculo etiam ſignantur per P, 2P, 3P, 4P reſpective; *in quibus expreſſionibus numeri literæ P præfixi non denotant multipla ponderis P*, ſed ſunt duntaxat notæ generales characteriſticæ ſignificantes ad quamnam colli diviſionem referendus ſit granorum numerus per literam P cum ſuo præfixo numero ſignificatus. Adeoque P, 2P, 3P, 4P &c. ſignificant quidem diverſos numeros granorum P, P+a, P+b, P+c qui ex obſervatione innoteſcunt, atque adeò in tabella quadam, ut in ſuperiori laterculo, diligenter notandi ſunt, ſed minime progreſſionem arithmeticam, qualem ſeries P, 2P, 3P, &c. exhibere videtur; ex ejusmodi obſervationibus parata tabella machinulam omnium reliquorum liquorum gravitati inveſtigandæ aptam reddunt; nam remotis omnibus granis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ut ſola machinula cum indito Mercurio remaneat, immergatur ea in liquore quodam A, usque in BB, id eſt ad quartam colli diviſionem, & in alio liquore O immergatur usque ad 6 ſeu in CC, eritque gravitas ſpecifica liquoris A ad gravitatem ſpecificam alterius O, ut numerus granorum 6P conveniens ſextæ colli diviſioni ad numerum granorum 4P, qui convenit quartæ diviſioni; id eſt gravitates ſpecificæ liquorum ſunt in

Diviſiones colli.	Pondera machinulam liquori immergentia.
1 . . .	P = P
2 . . .	2P = P+a
3 . . .	3P = P+b
4 . . .	4P = P+c
5 . . .	5P = P+d
6 . . .	6P = P+e
&c.	&c.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [184] - 156
PUBLIC DOMAIN

in reciproca ratione numerorum ex conſtructa tabula excerptorum, qui colli diviſionibus, ad quas in liquoribus machinula deſcendit, conveniunt. Demonſtratio facilis eſt; nam (§. 295.) gravitas ſpecifica liquoris A eſt ad gravitatem ſpecificam alterius O ſicut N6 ad N4 hoc eſt, in reciproca ratione partium machinulæ liquoribus immerſarum, atqui N6 eſt ad N4, ut maſſa liquoris L cujus volumen eſt N6 ad maſſam ejusdem liquoris cujus volumen eſt N4; hæ verò maſſæ N6 & N4 liquoris L ponderabunt 6P & 4P grana reſpective, cùm tot grana cum fluidi L maſſis modo indicatis in æquilibrio fuerint vi obſervationis paulo ante deſcriptæ; ergo gravitas ſpecifica liquoris A eſt ad gravitatem ſpecificam liquoris O, ut 6P ad 4P, prout dicebatur. Hujus generis aliæ machinæ ex iisdem principiis conſtrui poſſunt.

Scholion II.

297. Etſi me non lateat æquilibria fluidorum cum inter ſe, tum etiam ſolidorum corporum cum fluidis homogeneis ex aliis principiis nonnihil brevius poſſe deduci, ſcilicet ex fundamento maximi deſcenſus centri gravitatis, quem omnia corpora inter ſe commiſſa affectant; ſeu, quod ferme eodem redit, ab æqualitate momentorum corporum inter ſe agitandorum, cujusmodi principiis Paſcalius aliique uſi ſunt. Verùm, præterquam quod talia principia indirecta ſunt, ea vix ac ne vix quidem absque longis ambagibus fluidis heterogeneis applicari poſſe videntur in ea univerſalitate, in qua præcedentes propoſitiones ex principiis ſuis proximis directe deduximus; malui methodo & fundamentis circa potentias ſingulis punctis cujusque corporis applicatis, quæ in primo libro expoſuimus, inſiſtere, utpote quæ modum non inelegantem ſubminiſtrarunt preſſiones fluidorum heterogeneorum ad æquivalentes preſſiones fluidorum homogeneorum reducendi.

PROPOSITIO XIII. Problema.

298. *Datis diametro alicujus pilæ metallicæ cavæ, & ratione ſpecificæ gravitatis metalli, ex quo pila parata eſt, ad aliquem liquorem homogeneum, invenire diametrum cavitatis pilæ ad id requiſitæ, ut pila in liquore illo homogeneo ad datam profunditatem immergatur.*

Sit pila FDE, & ex diametro ejus FM, profunditate LM, ad quam pila liquori APB immergi debet, & ex ratione 1 ad *n* ſcili-

cet gravitatis ſpecificæ metalli ad liquoris gravitatem, invenire oportet diametrum HN cavitatis pilæ HIK ſuperficiei FDE concentricæ.

Quia in caſu æquilibrii pilæ cum liquore pondus pilæ (§. 293.) æquari debet ponderi, ſeu gravitati maſſæ fluidæ DME, atqui pilæ gravitas eſt factum ex ſphæra FDE − ſphær. HIK in ſpecificam metalli gravitatem, quæ eſt ut 1, & gravitas maſſæ liquoris, eſt ut factum ex ejus volumine DME in gravitatem ejus ſpecificam n, ergo ſphær. FDE − ſph. HIK = n. ſegm. DME. Dicantur FM, a; circumfer. FDE, b; LM, c & denique HN, x; eritque ſphæra FDE − ſph. HIK = $(a^3b - bx^3) : 6a$; & ſegmentum ſphæricum DME = $(3abcc - 2bc^3) : 6a$, quod ſegmentum ductum in n, præbet $(3abccn - 2bcn^3) : 6a = (a^3b - bx^3) : 6a$, ex qua elicitur $x^3 = a^3 - 3accn + 2c^3n$, vel $\sqrt[3]{(a^3 - 3accn + 2c^3n)} = x$, ſeu poſita $c = a : m$, exiſtente m numero quocunque, erit etiam $x = a\sqrt[3]{(m^3 - 3mn + 2n : m^3)}$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

299. Hinc, ſi tota pila fluido debet immergi, fiet $c = a$, ſeu $m = 1$, & poſtrema æquatio mutabitur in $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$. Idcircò, ſi pila ænea in aëre octingenties aquâ leviore natare ponatur, erit, poſita gravitate ſpecifica æris noncupla gravitatis aquæ, $n = 1 : 7200$, atque adeò formula $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$ abit in $x = a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$, atqui per compendium logarithmorum invenietur valor rationalis ipſius $a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$ inter fractiones decimales 0. 99995a & 0. 99996a, adeòque $a - x$ ſeu dupla metalli craſſities eſt minor quinque centies milleſimis diametri FM, atque adeò craſſities ipſa FH vel MN minor una quadrageſies milleſima ejusdem diametri FM particula. Unde, ſi globus æneus cavus parari deberet, cujus craſſities MN tantum ſit unius ſcrupuli ſeu $144^{mæ}$ pedis partis, pilæ diametrum majorem 277 pedibus eſſe oporteret, ut in aere librata conſiſtere poſſit. Sin vero cum P. Franciſco de Lanis Pilæ æneæ diametrum 8. pedum aſſumere velimus, ejus craſſities minor requireretur, quam una quinquies milleſima pedis pars; ac denique ſi diameter ſtatuatur cum eodem Autore Tom. II. fol. 291. *Magiſterii Naturæ & Artis*, 25 pedum, craſſities metalli foret minor quam tres quadringenteſimæ pollicis partes. Hisce ſimilia etiam exhibere digna-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [186] - 158
PUBLIC DOMAIN

dignatus est Illustris Leibnitius Tom. I. *Miscellaneorum Berolinensium* pag. 127. ex quibus omnibus abunde liquet, spem abjiciendam esse omnem, fore ut navigatio aërea fortunato aliquando eventu suscipi queat, in quam egregius ille de Lanis nos erigere voluisse videtur.

PROPOSITIO XIV. Problema.

300. *Data specificâ gravitate bacilli teretis & gracilis* AB *& liquoris cujusque homogenei, determinare quousque bacillus extremitate sua* A *è filo suspensus, ita ut altera extremitate* B *libere pendeat, liquori debeat immergi.* Fig. 68.

Ponatur gravitatem specificam bacilli AB se habere ad gravitatem specificam liquoris ENF ut BD ad bacilli longitudinem AB, atque bacilli partem BC liquori immergi, quæritur magnitudo ipsius AC vel BC ex datis AB & DB.

Analysis Geometrica. Per §. 293. bacillus liquori immersus usque ad C perpendiculariter sursum agitur vi æquali ponderi liquoris sub volumine BC partis bacilli liquori immersæ juxta directionem IK per centrum gravitatis, seu per medium I ejusdem BC transeuntem liquorisque superficiei EF normalem; adeoque si filo IKP trochleam K amplectens appensum fuerit pondus P, æquale gravitati massæ liquidæ BC, hoc pondus P in directione KP descendere nitens eandem vim in bacillum juxta directionem IK exeret ac fluidum ENF bacillum attollere connitens; ipse vero bacillus proprio suo pondere descendere conatur juxta directionem OQ superficiei liquoris EF itidem perpendicularem & per centrum gravitatis bacilli, quod est in ejus medio O transeuntem; idcircò liquor baculum attollere conans & gravitas eundem effectum præstabunt, quem præstarent pondera P & Q, quorum hoc bacilli gravitatem absolutam, illud verò, ut jam dictum, pondus liquoris sub volumine BC designant, lineæ inflexili & gravitatis experti AB in directionibus IK & OQ inter se parallelis ac superficiei liquoris EF normalibus, applicata; unde, cum bacillus liquori aliquousque immersus (secundùm hypothesin) in statu manenti, seu in æquilibrio, consistat, ex principio vectis erit (§. 55.) P. SU = Q. TV, demissa scilicet ex A normali AU super EF, vel P : Q = TV : SV = 2OA : 2JA (seu producta BA in M, ut AM æqualis sit CA) = BA : BM. Nam, quia IA est media arithmetica inter BA & CA vel AM, ejus dupla seu 2IA æquabi-

tur

tur aggregato extremarum BA & CA vel AM, hoc est rectæ BM, & dupla ipsius OA est BA. Verùm pondus P est ad pondus Q (§. 33.) ut factum ex illius volumine BC in gravitatem ejus specificam AB ad factum ex volumine alterius Q seu AB in densitatem seu gravitatem specificam ejusdem BD, hoc est P : Q = BC. BA : AB. BD = BC : BD. Atqui paulo ante habuimus P : Q = BA : BM, ergo inde nascitur BA : BM = BC : BD; & BM. BC = BA. BD. Hinc si centro O & intervallo OB vel OA descriptus semicirculus BNA, atque per punctum in ejus diametro datum D perpendicularis diametro DN ducta sit semicirculum DNA secans in N, erit BN^2 (= BA. BD) = BM. BC, atque adeò recta BN tanget semicirculum CNM centro A & intervallo AC vel AM descriptum in puncto N, quod proinde communis erit intersectio semicirculorum BND & CNM; atque adeò æquales existent AC & AN; atqui hæc AN est media proportionalis inter datas BA & DA, ergo etiam AC, atque adeò hæc AC data est. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

301. Adeoque etiam ex parte bacilli BC cuilibet liquori immersa & bacilli ipsius longitudine AB, semper innotescet ratio gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam bacilli; etenim ad longitudinem bacilli BA ejusque partem CA extra liquorem extantem duntaxat sumenda est tertia proportionalis DA, eritque BA ad BD semper ut gravitas specifica liquoris ad gravitatem specificam bacilli liquori aliquousque immersi. Atque adeò portiones diversæ BD, quæ resultant à diversitate liquorum, quibus bacillus successive immergi potest, erunt in reciproca ratione gravitatum specificarum ipsorum liquorum. Liquet ergo talem bacillum aptum exhibere instrumentum hygrostathmicum (Gallis *Pese-liqueur* dici solitum) quo liquorum specificæ gravitates examinari queant. Qua ratione bacillus dividi debeat, ut ex partibus ejus immersis gravitates liquorum dignosci queant, facile colligitur ex hoc corollario, adeoque eidem ulterius explicandæ superfedeo.

Hactenus aliquot exemplis illustravimus hydrostaticæ regulam indicantem quousque corpora solida liquidis immergi debeant, ut cum hisce liquidis æquilibrium faciant; restat adhuc unicum exemplum adducendum, quo alia hydrostaticæ regula, situm corporum solidorum in fluidis consistentium respiciens, illustretur, hunc in finem

finem facillimum omnium eligemus propositione sequenti excutiendum.

PROPOSITIO XV. Problema.

302. *Datâ ratione specificæ gravitatis prismatis triangularis* ABG *ad gravitatem alicujus liquoris* XBZ, *determinare situm prismatis, in quo præcedente vertice* B *trianguli* ABG, *id liquori immissum cum eo in æquilibrio maneat.* Fig. 65.

Sit *MBN* pars liquori immersa & punctum D ejus centrum gravitatis, C vero centrum gravitatis trianguli totius *ABG*, adeoque (§. 294.) lineam DC, jungentem centra gravitatis totius & partis immersæ triangulorum, oportet esse liquoris superficiei XZ perpendicularem in casu æquilibrii. Jam ex centrobaricis constat, centra gravitatis C, D triangulorum ABG & MBN reperiri in lineis BP & BQ, bases AG & MN triangulorum bifariam dividentibus in punctis P & Q, lineasque vel intervalla PC, QD trientes esse totarum PB & QB; hinc ductis PQ, PM & PN, ipsæ PQ & CD æquidistantes erunt, cum PC & QD sint partes similes ipsarum PB & QB. Jam cum oporteat ipsam CD perpendicularem esse rectæ XZ, necesse est ut etiam PQ eidem XZ vel MN normalis sit, unde, quia jam QM & QN æquales ostensæ sunt, ipsas PM & QN pariter æquari oportet.

Porrò, quia in casu æquilibrii massæ liquoris MBN pondus (§. 293.) æquale est ponderi absoluto prismatis ABG, per §. 33. erit gravitas specifica liquoris ad gravitatem prismatis ut triangulum ABG ad triangulum MBN; atque adeo hæc triangulorum ratio data, quandoquidem ratio gravitatis specificæ liquoris ad prisma ABG (secundùm *hypothesin*) data est. Propterea problema eo reducitur, ut describatur centro O & intervallo quodam PM vel PN circulus MON, qui ex lateribus AB & GB abscindat segmenta MB & NB talia, ut ducta linea MN, triangulum ABG sit ad triangulum MBN, vel rectangulum ABG ad rec-lum MBN in ratione data specificæ gravitatis liquoris ad gravitatem prismatis ABG, quam dicemus $a:f$. Idcirco demissis ex P perpendicularibus PR ad BA, PS ad BG ac denique BV ad AG, si dicantur AB, a; BG, b; BR, l & BS, m; incognita verò BM, x; ex comparatione triangulorum rectangulorum PRM & PSN, in quibus juxta superius ostensa hypothenusæ PM & PN æquantur, elicietur æquatio, quæ reducta exhibe-

bit istam biquadraticam $x^4 - 2lx^3 + 2bfmx - bbff = 0$, cujus radices determinabunt BM vel BN, atque adeò punctum M vel N & radium PM circuli describendi MON, cujus intersectiones M & N cum rectis BA & BG determinant positionem rectæ MN. Quod erat inveniendum.

Similiter incidissemus in æquationem biquadratam, si loco prismatis ABG sumsissemus conum scalenum.

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in corporibus flexibilibus stagnantia hisce corporibus flexibilibus inducere debent.

COnsideravimus hactenus vasa liquores continentia tanquam rigida & inflexibilia, quorum figuræ à liquorum gravitationibus mutari nequeant. Sed si vasa materia molli & flexili constent, non continget, ut liquor intra eorum cavitatem stagnans in statu manenti statim consistere queat, quæcunque figura ipsis tributa fuerit, sed posteaquam ipsorum latera variis modis inflexa fuerint, eam liquoris pressuræ figuram vasis inducent, quam perfectum inter omnes potentias gravitantes æquilibrium deposcet.

Ejusmodi vasa in œconomia animali magno numero occurrunt, cùm pleraque flexilia & mollia, utpote ex fibris carnosis contexta, sint, in quibus vasis varii humores & fluida periodicis motibus circumeunt. Quales igitur figuras ejusmodi vasa induere debeant non injucunda nec inutilis est disquisitio. Revera enim talis indagatio non contemnenda Celeb. Joh. Bernoullio produxit circa Vires & Motus musculorum in Dissertatione ejus super hac materia oppidò eleganti, cujus præcipua contenta in Actis Lipsi. 1694. pag. 200. seq. continentur. Sic etiam insignis Medicus & Geometra Scotus Archibaldus Pitcarnius illius generis speculationes in Physiologiam loco multiplicium illorum fermentorum, quibus secretionum in œconomia animali negotium antehac transigi credebatur, ad Garamantas procul & Indos ablegandarum, invehere conatus totus in eo est, ut probet in sua docta Dissertatione de *Circulatione Sanguinis*, orificia vasorum & poros glandularum partiumque corporis nostri alias quam circulares figuras non habere, nec proinde figuris, sed figurarum amplitudine inter se differre; ex quo deinceps concludit,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [190] - 162
PUBLIC DOMAIN

dit, *nulla fermentis peculiaria supereſſe promptuaria, fermentaque ipſa in Animali nulla.*

Figuram vaſorum circularem ex generali Mechanicæ principio, *Quod fluida quæcunque preſſionem ſuam communicent per lineam corpori continenti & fluidi actionem ſuſtinenti in quovis puncto impulſus perpendicularem*, ſupra etiam (§. 249.) à nobis demonſtrato, derivare contendit, ſectionem canalis axi rectam tanquam polygonum infinitilaterum reſpiciens, cujus polygoni latuscula indefinite parva impreſſiones fluidi juxta directiones ipſis normales ſuſtineant, & quia hæ impreſſiones in ſingula latera æqualia poligoni in circumſtantiis apud Autorem æquales ſunt, eas per lineolas rectas & poligoni lateribus perpendiculares repræſentat. Hucusque omnia bene, ſed dum ex eo, quòd hæ perpendiculares laterum poligoni cum ſe invicem angulos efficiunt, concludere vult, aut ſaltem inferre videtur, omnes dictas perpendiculares in uno eodemque puncto concurrere debere, fallitur, etſi cæterum certiſſimum ſit perpendiculares illas reapſe in uno eodemque puncto convergere; nam ex eo, quod duæ quæque perpendiculares concurrunt, non ſequitur omnes in uno puncto coire. In omni curva rectæ, quæ duobus curvæ contiguis elementis perpendiculares ſunt, angulos continebunt, hoc eſt, concurrent, ſed quis inde inferret omnes perpendiculares curvæ in uno eodemque puncto convenire? Ex principiis ergo illis, quæ Cl. Vir poſuit, & quæ tanquam vera ultro admittenda puto, nondum ſatis oſtendit rem eò deduci, *ut inveniatur curva cujus omnes ſubtangentes in puncto concurrant*, prout ſcribit pag. 28. *Diſſert. Medic.* Voluit dicere rem deduci ad inventionem ſeu inveſtigationem curvæ, cujus omnes *ſubperpendiculares* curvæ ad unum idemque punctum terminentur; nulla enim datur curva, cujus ſubtangentes concurrant, quandoquidem omnes ſubtangentes ſumuntur in eadem linea, id eſt, in axe datæ curvæ, ſeu in alia linea, quæ inſtar axis ſit. Fateor quidem, quòd, ſi omnes curvæ perpendiculares in puncto concurrant, omnes ſubnormales ad unum idemque punctum quoddam terminatum iri, aſt etiam eſt fatendum, tunc ea reductione problematis ad conſiderationem ſubnormalium non opus eſſe; nam ſi omnes curvæ perpendiculares in quodam puncto convergant, ilicò concludendum hanc curvam eſſe circulum; adeò ut problema jam ſolutum ſit absque ulteriore reductione, ſive ad proprietatem nominatam ſubperpendicularium, ſive ad methodum, quam Pitcarnius dicit inverſam fluxionum. Idcirco nos ſequenti Problemate perſpicue oſtendere conabimur cur-

vam quæsitam reapse eam esse, cujus cunctæ perpendiculares in idem punctum seu centrum vergant, non obstante, quòd hoc idem problema jam supra (§. 102.) solutum sit, sed diversa ratione ad illustrationem generalis theorematis, quod infinita ejusmodi alia problemata solvit.

PROPOSITIO XVI. Problema.

Fig. 69. 303. *Dato tubo* AB *ex materia molli seu flexili clauso in* B, *apertoque in* A *ad horizontem verticaliter erecto, & aquæ aliusve liquoris pleno, determinare figuram, quam sectio quælibet horizontalis in tubo à liquoris pressuris acquiret.*

Fig. 70. Sit AZBX figura quæsita, cui rectæ ZX, AB ad angulos rectos in R se invicem decussantes perpendiculariter occurrant in punctis A, Z, B, X. Sint contigua curvæ elementa DC, DE & *Zz*, *Aa*, punctis Z, A adjacentia singula inter se æqualia, ducanturque *zy*, DK rectæ ZX normales, ipsisque æquidistans EN, nec non per puncta C & D rectæ CM & DN ipsi ZX parallelæ, & per *a* lineola *ab* eidem ZX æquidistans; ac denique fiant D*m* = EN & Dg = CM. Quibus positis, quia sectionis tubi ZAXB singula puncta à liquoris superficie æqualiter distant, singula puncta æqualem pressionem subibunt, & quodvis ejus punctum D (§. 255.) pressionem sustinebit æqualem ponderi filamenti liquoris, cujus longitudo, quam per lineam DH curvæ perpendicularem in puncto D indicabimus, æquetur fluidi altitudini super sectione ZAXB, juxta directionem curvæ ubique normalem Dδ; ergo singulæ DH, quæ sumuntur in lineis curvæ perpendicularibus, potentias eidem curvæ applicatas repræsentabunt, atque adeo rec-lum DH. DC refert potentiam in totum elementum DC agentem. Verum potentia DH (§. 39.) æquipollet lateralibus DF & FH, quarum hæc ipsi ZX parallela, illa verò eidem perpendicularis est; ergo etiam potentia agens in totum curvæ elementum CD, quæ exponitur rec-lo DH. DC, æquipollet potentiis lateralibus CD. DF & CD. FH, vel quia triangula similia CDM & DHF præbent CD. DF = CM. DH & CD. FH = DM. DH potentiis lateralibus per rectangula CM. DH ac DM. DH exponendis juxta directiones DF & FM vel huic parallelam, agentibus.

Jam (§. 98.) est generaliter ∫FH, hoc est aggregatum potentiarum juxta directiones FH, seu juxta directiones rectæ ZX parallelas

las agentes in omnia elementa curvæ CD vel DE in curvæ arcu ZDE vel ZD contenta, id est per modò ostensa, omnia rectangula DM. DH respectu arcus ZD, quæ componunt rectangulum DK. DH, ad DN − Zy, seu CM − Zy, sicut firmitas curvæ in puncto A, quam firmitatem hac litera A designamus, ad constans curvæ elementum CD; hoc est DK. DH : CM − Zy = A : CD, vel quia (secundùm hypothesin) ZX curvæ ad angulos rectos occurrit in Z, atque adeò Zy respectu Zz & CM evanescit, fiet DK. DH : CM = A : CD & permutando DK. DH : A = CM : CD.

Item omnes DF seu ∫DF, hoc est, in præsenti casu omnia rectangula CM. DH pertinentia ad arcum curvæ DA, hoc est, rectangulum KR. DH, quandoquidem omnes CM componunt KR, seu sinum arcus DA, sunt ad DM − *Ab* sicut A ad CD, vel quia etiam RA (secundùm hypothesin) curvæ normalis est in A, atque adeo *Ab* præ A*a* vel CD aut MD evanescit, erit etiam KR. DH : DM = A : DC, & permutando KR. DH : A = DM : DC; atqui paulo ante etiam habuimus DK. DH : A = CM : CD seu invertendo A : DK. DH = DC : CM ergo ex æquo KR. DH : DK. DH = KR : DK = DM : CM = FH : DF, adeoque juncta DR triangula DKR & DFH similia sunt, atque adeo rectæ DR & DH ubique in directum jacent, ac proinde omnes DH curvæ ZDA normales productæ in eodem puncto R concurrunt, hinc curva quæsita ZDA est circulus. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Corollarium I.

304. Analogia præcedentis paragraphi DK. DH : A = CM : CD, elemento curvæ A*a* vertici A adjacenti applicata, præbebit *b*R. DH : A = *ab* : *a*A, verum quia RA curvæ perpendicularis est, fiet *ab* = *a*A ergo etiam A = *b*R. DH seu AR. DH. Est igitur firmitas tubi in quolibet sectionis puncto, ut rectangulum ex radio sectionis AR vel ZR in potentiam sectionis puncto applicatam DH, hoc est in liquoris altitudinem super hoc punctum. Propterea 1°. in tubis æqualium orificiorum tenacitates seu firmitates requisitæ ad perferendas fluidi pressuras erunt ut altitudines fluidi homogenei ductæ in suas densitates seu gravitates specificas. 2°. Si facta ex altitudinibus liquorum in densitates æqualia fuerint, firmitates tuborum erunt ut radii orificiorum. 3°. Si ejusmodi facta radiis sectionum tuborum axibus normalium reciproce proportionalia fuerint, firmitates erunt æquales.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [193] - 165
PUBLIC DOMAIN

COROLLARIUM II.

305. Quia vires æquales eidem vel similibus subjectis similiter applicatæ non nisi similes effectus producere possunt, ideo nihil refert, an tubus seu vas flexile à pondere liquoris in ejus cavitate gravitantis, an vero à fluido quodam elastico extrorsum prematur juxta directiones, perinde ac fluidum facit, curvæ perpendiculares. Nam fluidi elastici pressiones semper revocari possunt ad æquivalentes pressiones alicujus liquoris, cujus altitudines per DH repræsentabantur. Hinc enim est, quod bullæ aqueæ, quas pueri loturam saponis per fistulas stramineas flatu suo protrudentes subinde ludendo formant, in globulos intus cavos rotundentur. Idcirco viscositatis aquæ in ejusmodi bullis vis requisita ad resistendum aëris inclusi elasticitati est ut hæc vis elastica, ducta in radium bullæ vel potius in radium cavitatis ejusdem.

SCHOLION.

306. Non abs re fuerit hoc loco observasse firmitates tuborum flexibilium eodem prorsus modo se habere, quo firmitates tuborum rigidorum, has enim ostendimus esse (§. 275.) ut rectangula tuborum per axes, seu ut facta ex altitudinibus liquorum inter se & absolute homogeneorum in diametros tuborum, quoniam crassities tuborum in hac factorum ratione esse oportere ostendimus, &, cæteris paribus, resistentiæ sunt ut crassities, in flexibilibus vero resistentia seu firmitas in quolibet puncto est ut vis inflans, seu ut liquoris altitudo ducta in tubi semidiametrum, adeoque firmitas tubi in duobus punctis diametraliter oppositis perinde ac in rigidis est factum ex liquoris altitudine in totam diametrum. Hinc non video, quibus rationibus Vir ingeniosus D. Parent rationem peripheriæ ad diametrum formulis suis pro firmitatibus tuborum rigidorum æstimandis introduxerit in Commentariis Academiæ Reg. Scientiarum 1707.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA.

Fig. 71. 307. *Si in linteo* ZDAX *in terminis suis* Z *&* X *fixo stagnet quilibet liquor heterogeneus, cujus scala gravitationis sit curva* ROS; *invenire figuram lintei manentem.*

Sint

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [194] - 166
PUBLIC DOMAIN

Sint iterum, ut in præcedenti problemate, Zz, CD, DE, *Aa* elementa curvæ ZDA æqualia, & DL, El ordinatæ axi AR rectæ, Dπ vero & Eρ eidem axi parallelæ, & reliquis ductis quales in figura apparent. Jam, quia omnia in æquilibrio sunt per hypothesin & (§. 260.) elementum curvæ CD pressuram sustinet æqualem ponderi prismatis liquidi CD. LO, cum LO sit ordinata scalæ gravitationum, potentia qua elementum CD urgetur juxta directionem perpendicularem erit DC. DH facta DH ubique æquali homologæ LO, & quia insuper ob omnes potentias curvæ perpendiculares (§. 96.) firmitas lintei in omnibus punctis eadem est, atque adeo per datam quantitatem *A* designari potest, erit (§. 98.) ∫FH seu omnes FH : DN − Zγ = *A* : DC; vel quia Zγ evanescit præ ipsa DN, fiet ∫FH : DN = *A* : DC, & permutando ∫FH : *A* = DN : DC. Jam, quia potentia FH, quæ ex DH derivata est, non solum punctum D, sed integrum elementum DC respicit, loco FH poni debet FH. DC perinde ac loco DH in hoc casu intelligi debet DH. DC, & quia præterea FH. DC (propter triangulorum DHF & CDM similitudinem) æquale est rec-lo DH. MD, vel DH. NE, id est, LO. Ll, erunt omnia LO. Ll areæ RLO inscripta æqualia huic areæ; ergo ∫FH, id est, area RLO : *A* = DN : DE vel DC, & hæc analogia respectu elementi curvæ *Aa* fiet area RO*sb* vel ROSA : *A* = *ab* : *a*A, unde, quia in *A*, elementum *a*A = *ab*, erit etiam *A* = areæ ROSA, adeoque præcedens analogia RLO : *A* = DN : NE mutabitur in RLO : RAS = DN : NE.

Sit denique curva RQT ejus naturæ, ut rec-lum SA. AT sit = trilineo ROSA, & SA. LQ = trilineo ROL, eritque ROL : RAS = AS. LQ : AS. AT = LQ : AT : unde cum invenerimus ROLR : BASR = DN : NE, erit etiam LQ : AT = DN : NE. Hinc centro *A* intervalloque *AT* descripto quadrante circuli TKV, ductaque per Q rectæ RA parallela QK quadranti occurrente in K, ac denique acta AK, erit etiam AI : AK = DN : DE, atque adeò triangula DNE & AIK sunt similia & similiter posita, ac proinde radius AK parallelus erit tangenti curvæ quæsitæ in puncto D. Eritque pariter DN : NE = AI : IK. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

308. Ductâ per quadrantis punctum K tangente K*α*, si in recta LO sumatur Lβ = K*α* & sic respectu cujusvis alius curvæ puncti, omnia

omnia puncta β erunt in curva quadam, $R\beta\omega$ asymptotam AS habente, cujus area $SAL\beta\omega$ ad partes asymptotæ æquabitur rectangulo sub radio AT & ordinata DL curvæ ZDA. Nam triangula similia AIK & AKα præbent AI : IK = Kα : AK, sed AI : IK = DN : NE, ergo Kα : AK vel AT = DN : NE, ergo AT. DN = Kα. NE = Lβ. Ll, ergo omnia AT. DN hoc est rec-lum AT. DL = omnibus rec-lis Lβ. Ll, quæ areæ AL$\beta\omega$S inscripta sunt, id est, huic areæ AL$\beta\omega$S; atque adeò DL = AL$\beta\omega$S : AT.

Corollarium II.

309. Analogia, in quam paragrapho 307. circa finem incidimus, DN : NE = AI : IK immediate præbet æquationem differentialem curvæ quæsitæ DN = NE. AI : IK. Nam si dicantur $Z\pi = y$, $\pi D = RL = x$, $AI = LQ = p$, adeoque $IK = \sqrt{(bb - pp)}$ existente $AT = AK = b$; $RA = AS = a$, & denique $\pi\rho = DN = dy$, $NE = Ll = dx$, superiorque æquatio DN = NE. AI : IK factis debitis substitutionibus juxta denominationes linearum modo institutas, mutabitur in $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$. quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ad amussim conveniens cum æquationibus, quas Celeberrimi Bernoullii Fratres, quisque sua methodo, invenerunt. Si linea ROS fuerit recta, curva RQT erit parabola conica æquationem habens $aap : b = xx$; & substituto valore $bxx : aa$, loco p in æquatione differentiali ante inventa $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$, habebitur $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ quæ iterum coincidit cum eâ quam supra (§. 104.) dedimus.

Corollarium III.

310. Quoniam (§. 96.) tenacitas lintei in omnibus punctis eadem est, recta 12 angulum DiA à tangentibus curvæ DI & Ai formatum bisecans (§. 110.) erit media directio omnium fluidi gravitationum in curvam DA, & subtensa anguli TAK æqualis angulo LDI (§. 112.) parallela existet mediæ directioni 12; adeoque (§. 110.) erit potentia juxta mediam directionem 21. ad tenacitatem lintei in D ut sinus anguli DiA ad sinum Ai2, hoc est, ut sinus KAT ad sinum KTA, id est, sicut KT ad AK. Unde cum tenacitas lintei (§. 307.) sit trilineum ROSA (constr.) = AS. AT. vel AK, erit potentia juxta 21 = AS. AK. KT : AK = AS. KT = AR. KT. Et quia in symbolis corollarii antecedentis $KT = \sqrt{(2bb - 2bp)}$ & $AR = a$, erit potentia juxta mediam directionem $21 = a\sqrt{(2bb - 2bp)}$.

Scho-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [196] - 168
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

311. Curva hujus propositionis ZAX uni parti famosi problematis circa isoperimetras ab ingeniosissimis Bernoulliis soluti, satisfacit. Nam si ex singulis ejus punctis D, E, &c. indefinitæ Dσ, Eθ, &c. axi AR parallelæ agantur, & in iis fiat $\pi\sigma = LQ$; $\rho\theta = lq$, &c. nascetur curva ZΞX, quæ cum basi ZX majus spatium continebit quam quælibet alia curva ex alia isoperimetra ZDAX simili lege descripta, ut in Actis Lipsi. 1701. pag. 213. & Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. d. 17. Apr. ab eximiis Geometris est ostensum.

Præter æquationem $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$ Dn. Jac. Bernoullius invenit aliam hujus formæ $dy = (b-p).dx : \sqrt{(2bp - pp)}$ quæ *minimum* continet, & altera *maximum*. Sed una ex altera nullo negotio elicitur, etenim, si in priore $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$ loco p ponatur $b - p$, seu complementum ejus ad maximam b, orietur altera æquatio, & si in altero pro $b - p$ substituatur p, redibit prior.

312. Radius circuli curvam osculantis in ejus puncto quolibet D, seu radius evolutæ $D\gamma$, est quarta proportionalis ad LO homologam ordinatam scalæ gravitationum ROS, & datas RA & AT. Cujus rei demonstratio ex nostra constructione facilis est.

CAPUT V.

De Pressionibus Aeris ex Gravitate.

Quæ Capitibus I. & II. hujus libri secundi circa pressiones omnis generis fluidorum *generaliter* ostensa sunt, etiam de *Aere in specie* intelligenda esse nemo non videt, quandoquidem etiam Aër gravis est, atque adeò legibus fluidorum gravitate sua agentium subjici debet. Propterea supersedere particulari deductione phænomenorum ex aeris gravitate provenientium, eamque ex superioribus à nobis adductis Lectoris industriæ eliciendam relinquere potuissemus, nisi argumenti præstantia ejusmodi deductionem vendicare sibi videretur.

312. Aëra gravem esse extra omne dubium est positum, cum experimenta omni exceptione majora gravitatem ejus invincibiliter adstruant. Talia experimenta apud Galilæum, Boylium, Mariottum, Borellum & alios dilucide describuntur, qui proinde consuli possunt.

Huc etiam facit ſchediasma Celeb. Jac. Bernoulli Actis Lipſ. 1685. pag. 430. inſertum, quo peringenioſum ponderandi aeris modum aperuit, cum ſucceſſu aliquando in opus deductum.

313. Antiquiſſimum probandæ gravitatis aëris experimentum Ariſtotelis illud videtur eſſe, quo Philoſophus *Utrem inflatum plus trahere quam compreſſum & flaccidum exiſtimavit*, & poſt eum plerique etiam ex recentioribus Philoſophis, quorum nemo ante Jac. Bernoullium experimenti fallaciam cognoviſſe videtur, tametſi omnes idem experimentum parum accuratum judicarunt. Aſt Bernoullius in Actis Lipſ. 1685. pag. 436. luculenter oſtendit, atque deduxit ex principiis hydroſtaticis, *Utrem ſeu veſicam inflatam non eſſe gravioris ponderis, quam complicatam, licet aërem gravitate haud deſtitui præſupponas.* Quod mirum eſt ante ipſum neminem vidiſſe, aut ſaltem à ſe obſervatum monuiſſe illis occaſionibus, quibus de aëris gravitate ejusve probandæ rationibus agebatur; cum illius ratio vel leviter attendenti ſatis manifeſta ſit, atque duobus verbis explicari poſſit. Nam cum veſica tumida cum aëre incluſo ponderatur, id contingit in aëre cujus columna lancibus imminet, adeò ut pondus in unam trutinæ lancem agens ſit hæc columna aërea & veſicæ pondus; ſi poſtea expreſſo ſeu expulſo è veſica aëre veſica denuo ponderatur, lanci eadem ac prius columna aërea imminebit, adeò ut & hoc quoque caſu pondus in lancem agens futurum ſit eadem ac prius columna aërea atque veſicæ pondus. Adeoque utroque caſu, ſive tumida ſive compreſſa & flaccida veſica trutinæ appendatur, ſemper idem pondus ut reperiatur neceſſe eſt, vel ſi quando contingat ut poſtquam aërem è veſica expreſſimus, ejus pondus tantillo minus quam ante reperiatur, ejusmodi ponderis decrementum non aëris expulſi gravitati debet tribui, ſed particulis pinguibus inter contrectandum & comprimendum veſicam ab ea abraſis, vel alia de cauſa exhalantibus. Sed ut hæc omnia verbo complectar, aëris ponderatio ope veſicæ, perinde ſe habet, ac ſi quis aquæ phialæ incluſæ pondus exploraturus primum phialam cum incluſa aqua ponderaret, & deinceps effuſa in lancem trutinæ aquâ, hujus aquæ effuſæ & phialæ pondus eadem trutina conjunctim quæreret, quis non videt idem pondus utroque caſu repertum iri, ſive phiala cum infuſa aqua, ſive etiam vacua phiala, ſed aquâ, quam capiebat, lanci infuſa, ſimul ponderentur?

314. Idcirco ſi ponderandi aeris modus fallacia vacare debet, *oportet vaſis volumen poſt expulſum aërem non mutari*, & deinde aeris ejecti

ejecti pondus satis accurate innotescet. Ad hoc proindè Celeb. Joh. Bernoullius ex amplo recipiente vitreo aërem, quantum fieri potest, diligenter eduxit, & aquæ in aëris expulsi locum ingressum permisit; quo experimento comperit gravitatem aëris ad aquam esse ut 1 ad 740 circiter. Sed alio postea, eoque magis accurato, experimento per condensationem aëris in amplo vase æneo tentato invenit gravitatem aëris ad aquam, ut 1 ad 774$\frac{1}{4}$. Hinc, quia hæc ratio rationi 1:800 proxime æquatur, ob numerorum commoditatem hanc posteriorem loco alterius 1:774$\frac{1}{4}$ deinceps adhibebimus, ad exprimendam rationem specificæ gravitatis aëris ad gravitatem aquæ.

Aëris gravitas etiam probari solet, & recte, phænomeno Barometrorum. Sed ut argumenti vis melius capiatur, sequentem propositionem facilem præmittam, ex qua deinde præcipuum Barometri symptoma, item & Antliæ Ctesibianæ, Siphonum reflexorum, aliorumque ejusmodi instrumentorum phænomena, per modum corollariorum, deducam. Et denique in Scholio annexo Barometrum novæ constructionis à Celeb. Joh. Bernoullio excogitatum proponam, quo atmosphæræ variantes pressiones, magis quam ullo alio barometro, sensibiliter indicari queunt.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

315. *Si in vase amplo* MON *liquoris cujuscunque pleno, usque ad* MN *demittatur vasculum* BE *argentum vivum continens, cum tubo vitreo* AB *utraque sui extremitate aperto & vasculo* BE *perpendiculariter insistente; sed ita tamen, ut orificium ejus apertum* A *semper extra liquorem* MON *extet, hydrargyrus per orificium tubi inferius* B *ascendet, usque dum altitudo ejus in tubo* CD, *sit ad altitudinem* PC *liquoris super superficie residui in vasculo. Mercurii, ut specifica gravitas liquoris* MON *ad specificam gravitatem Mercurii.* Fig. 73.

Id est, posito liquorem MON aquam esse, decies quater argento vivo leviorem, altitudo DC Mercurii in Tubo AB constanter decima quarta pars erit altitudinis aquæ PC.

Hæc propositio tantum casus est particularis Propositionis V. hujus secundi libri, & coincidit cum corollario IV. ejusdem Propositionis, in quo indicatur pressiones liquorum homogeneorum in se, sed heterogeneorum inter se æquales fore, atque adeò liquores ipsos in se invicem gravitantes in æquilibrio consistere, quoties facta ex

eorum altitudinibus in ſpecificas eorum gravitates æqualia, atque adeò altitudines ſpecificis gravitatibus reciproce proportionales fuerint. Unde, quia (ſecundùm hypotheſin) argentum vivum in tubo *AE* in altitudine CD preſſioni liquoris in altitudine MO æquilibratum eſt, erit (§. 262.) altitudo Mercurii CD ad altitudinem liquoris tubum ambientis MO, ſicut hujus liquoris ſpecifica gravitas ad gravitatem ſpecificam hydrargyri. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

316. Cum tubi *AB* liquor ambiens MON quodcunque fluidum grave repræſentare poſſit, ponamus eum ſignificare aërem atmoſphæræ, tubique foramen ſuperius A extra atmoſphæram extare; vel, quia hæc conditio in praxi impoſſibilis eſt, ſumemus aliam, quæ
Fig. 72. ipſi æquivaleat, ſupponendo tubum AB una ſui extremitate A hermetice ſigillatam eſſe, adeò ut orificio ejus aperto B ſurſum converſo & tubo Mercurio impleto per hoc orificium, poſteaque eodem digiti pulpa obſtructo, atque Mercurio in vasculo CE ſtagnanti immiſſo, poſt retractum digitum orificium inferius B intra argentum vivum vaſis CE obſtruentem, nullus aër forinſecus adveniens tubi partem ſuperiorem *AD* à Mercurio deſcendente ad *D* usque relictam ingredi poſſit, & hoc pacto jam obtinetur ſcopus conditionis, quâ requiritur in propoſitione ut orificium apertum A extra liquo-
Fig. 73. rem MON promineat eo ſolo fine, ut liquor ambiens fiſtulam ingredi nequeat; quibus poſitis, & quia argentum vivum in fiſtula AB ad altitudinem plus minus 28. digitorum pedis Pariſienſis ſuſpenſus hæret, oportet atmoſphæræ gravitationem æquivalere preſſioni iſti Mercurii ad altitudinem 28. ſuſpenſi, etenim ſi aër gravis *non* eſſet in nulla prorſus intra fiſtulam AB altitudine elatus conſpiceretur; ſed in eadem cum Mercurio vasculi CE ſuperficie terminatus; eodem plane modo, quo argentum vivum in fiſtula AB figuræ 73. plane ad nullam altitudinem CD attolleretur, ſi nullus eſſet liquor ambiens, qui in Mercurium vasculi CE gravitare poſſit.

Corollarium II.

317. Ut ſciatur, in qua altitudine preſſio aquæ æquivaleat preſſioni atmoſphæræ, reſumi debet caſus propoſitionis præſentis & per liquorem MON intelligenda eſt aqua decies quater levior quam Mer-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [200] - 172
PUBLIC DOMAIN

Mercurius, atque diſpiciendum eſt, quousque tubus AB cum vasculo CE vaſi MON debeat demergi, ut Mercurius in fiſtula utrinque aperta aſſurgat ad altitudinem 28. digitorum. Jam quoniam (§. 315.) demerſo vasculo ad profunditatem 28. pollicum infra ſuperficiem aquæ MN Mercurius aſſurgit in tubo AB ad altitudinem CD unius digiti; demergendum erit vasculum CE in liquore ſeu aqua MON ad profunditatem quater & decies 28. pollicum id eſt ad profunditatem 392. pollicum, hoc eſt, paulo minus quam 33. pedum, ut Mercurius ad altitudinem 28 pollicum elevetur. Igitur *preſſio atmoſphæræ æquivalet preſſioni aquæ in altitudine* 33. *pedum circiter*. Ac per conſequens, ſi aër atmoſphæræ uniformis ubique denſitatis eſſet, altitudo atmoſphæræ foret 26400. pedum; ſed multo major erit, quandoquidem aër, quo altior eſt, eò etiam rarior deprehenditur.

Corollarium III.

318. Ex hisce principiis peti etiam debent rationes phænomenorum antliæ Cteſibianæ. Hæc antlia conſiſtit in Cylindro ligneo vel ſubinde etiam metallico BA cylindrice excavato, ab utraque parte aperto quidem, ſed inferius orificium B aquæ immergendum nonnihil anguſtius habens cavitate antliæ. Cavitati huic intruditur, ope virgæ ferreæ, embolus coriaceus CD, attollendus per vices atque deprimendus, qui per totam antliæ longitudinem antliæ cavitati tam affabre quadrare debet, ut omnem aëri ex ſuperiori cavitatis parte in inferiorem transitum præcludat. Ejusmodi organon *Antlia ſuctoria* vel *Aſpirans* ſubinde vocatur, quod in ea quadam attractionis ſpecie attolli aqua videatur. Sed aſcenſionis aquæ cauſa eadem eſt, quæ *Mercurium* etiam in Barometris ſuſpenſum tenet, *preſſio* ſcilicet *atmoſphæræ*. Nam retracto embolo CD in *mn*, neceſſe eſt aquam vigore hujus atmoſphæræ preſſionis per orificium B antliam ingredi & cavitatem *m*B*n* ab aëre vacuam implere, ſiquidem (ſecundùm hypotheſin) ex ſuperiore antliæ parte A*mn* aër embolo *mn* impeditus in cavitatem *m*B*n* transire nequit, nec proinde quicquam eſt in ſpatio *m*B*n*, quod externæ aëris preſſioni aquam per orificium intrudenti reſiſtat. Hinc, quo altius attolletur embolus, eò altius etiam aqua, ipſum pone inſequens, in antlia aſſurget; usque dum embolo delato in MO ad diſtantiam ab aqua IK 33. pedum circiter, aquæ altitudo ſuper IK totidem pedum fuerit, adeò ut per corol-

Fig. 74.

larium præcedens ejus preſſio æquivaleat preſſioni atmoſphæræ. Nam ſi embolum quantum voles ulterius eleves in *cd*, aqua non ideo altius enitetur, ſed in altitudine ſua 33. pedum ſubſiſtet, quæ altitudo aquæ maxime limitata eſt, ut aquilex quondam Galilæo retulit, utpotè quæ atmoſphæræ preſſioni æquivalet.

Corollarium IV.

319. Quod ad ſiphones reflexos attinet, eorum vires ex præce-
Fig. 75. dentibus commode deducentur. Sit ABC ejusmodi tubus in B inflexus inæqualium crurum AB & CB; & in vulgus notum eſt, quod immiſſo breviori crure AB vasculo EF, aquæ aliusve liquoris pleno, ſi ſuctionis ope aqua ex longiore brachio BC eliciatur, fore, ut aquæ aut liquoris fluxus juxta ABC ex breviore in longius brachium tamdiu continuetur, donec vasculum EF penitus exhauſtum fuerit, modò crus brevius AB altitudinem in aqua 33. pedum circiter non ſuperet, ſed eâdem minus ſit, & orificium C cruris BC humilius ſit orificio A alterius cruris AB. Hujus phænomeni ratio ſtatim apparebit conſiderando hunc ſiphonem aliud non eſſe, quam geminum barometrum, cujus utrumque crus ſimplicis barometri vices obeat. Etenim cogitando crus AB aquæ plenum in vasculo EF itidem aquam continenti inſiſtere, concipitur barometrum ſimplex BAEF, & crus CB aquæ plenum in vasculo GCH aqua pariter impleto erectum, efficit alterum barometrum BCGH. Repræſentet nunc KL columnam aquæ 33. pedum æquivalentem atmoſphæræ preſſioni, & in ea ſumantur KM = AB cruri minori, & KN = CB cruri majori. Jam, quia gravitatio atmoſphæræ in aquam EF eſt KL, & gravitatio aquæ BA in crure ſiphonis minoris eſt tantum KM; prævalebit externa aëris preſſio KL internæ preſſioni aquæ in tubo BA, quæ eſt KM, vi LM, quam vim ideò *attollentem* atmoſphæræ in tubo BA deinceps dicemus, quia tanta præciſe vi atmoſphæræ preſſio aquam AB in crure minori ſiphonis elevare conatur. Eodem argumento erit LN vis attollens atmoſphæræ in crure longiori BC, nam hæc vis attollens eſt exceſſus preſſionis externæ KL ſupra internam BC, quæ eſt KN ex conſtructione, atque adeò aqua in tubo BC revera attolletur, aut ſaltem preſſio atmoſphæræ eam attollere conabitur, vi illa LN. Verum, quia vis attollere conans aquam in tubo AB eſt LM, & vis attollens aquam in tubo BC eſt LN, & minor majori cedere debet, liquet aquam revera in tubo AB

in

in altum coactum iri vi MN, æquali differentiæ virium attollentium LM & LN. Hanc ergo differentiam MN appellare possumus *vim motricem* aquæ in tubo reflexo juxta ordinem AQBC; propterea aqua ex vasculo EAF per tubum recurvum ABC fluet, & per orificium C sese exonerabit, & effluet, donec totum vasculum EAF depletum fuerit.

Corollarium V.

320. Quia MN est vis motrix aquæ in siphone ABC circulantis; & hæc vis MN est differentia inter KN & KM, id est inter BC & BA, hoc est DC, facta scilicet BD = BA. Fig. 75.

Hinc 1°. vis motrix nulla est, nec proinde aqua in siphone juxta ABC fluere potest, ubi crura BA & BC æquantur. 2°. Nec fluere potest, cum crus brevius AB excesserit vel æquaverit altitudinem 33. pedum atmosphæræ pressioni æquipollentem. Sint enim K*m* major quam KL & æqualis AB, & K*n* = BC, & quia nunc interna pressio aquæ BA est *m*K, externa verò atmosphæræ est LK, prævalebit externæ interna vis *m*L, quæ nunc est *vis extrudens*, quoniam hac vi *m*L aqua aliquousque ex tubo BA hoc casu extrudetur, tantum abest, ut externa aëris pressio vim habeat attollendi aquam, ut in corollario antecedenti; sic etiam *n*L est vis extrudens aquam ex tubo BC. Adeoque hæ vires extrudentes efficient, ut in crure minori aqua se demittat usque in Q ita ut QA nunc æquetur ipsi LK, perinde ac PC in altero crure, aqua in eo sese demittente in P; scilicet in utroque crure eousque, quo vires extrudentes evanuerint.

Corollarium VI.

321. Sed si AB fuerit minus 33. pedum & BC multò majus, fluet quidem ex minori AB per majus BC, sed absque eo, ut in toto tubo aqua continua sit, sed in summitate formabitur subinde vacuum. Sit enim ut prius KL, 33 pedum, AB vel KM minor quam KL & BC, cui æqualis sit K*n* major quam KL; quibus positis, si L*n* major fuerit quam LM plus aquæ effluet ex tubo BC quam influere potest per crus AB, atque adeo in summitate B erit vacuum, nec proinde aqua inter fluendum per totum siphonem contigua erit. Nam quia K*n* hoc casu exprimit pressionem aquæ in tubo BC & KL pressionem atmosphæræ minorem, *n*L exponit vim extrudentem

aquam

aquam ex tubo BC; in altero verò AB, vis attollens eſt LM, major ideo erit vis extrudens nL vi attollente LM, atque adeò plus aquæ egredietur atque expelletur ex tubo BC, quam ingreditur in tubum AB. Idcircò ubi fluxus ad ſtatum manentem perductus fuerit, relinquetur in ſummitate vacuum BP æquale exceſſui, quo vis extrudens nL ſuperat vim attollentem LM, ſeu æquale nL − LM. Idcirco exiſtente nL − LM = 0, vel vi extrudente æquali vi attollenti, aqua in ſiphone contigua erit.

Corollarium VII.

322. Ope corollarii præcedentis jam facile derivabitur ſolutio ſequentis Problematis. *Dato minore ſiphonis crure* AB *invenire longitudinem majoris* BC, *ut aqua in ſiphone fluens in ſummitate ſiphonis vacuum* BP *relinquat datæ magnitudinis* R. Nam poſitis KM cruri minori, KL atmoſphæræ preſſioni ſeu 33. pedum, & Kn cruri majori æqualibus, per corollarium 6. hujus aqua per ſiphonem ABC fluens relinquet vacuum BP = nL − LM, unde cum hoc vacuum debeat eſſe æquale R, erit nL − LM = R, vel nL = R + LM, hinc nK = LK + R + LM = 2LK + R − MK, hoc eſt, crus majus BC æquari debet reſiduo detracti minoris cruris AB ex dupla atmoſphæræ preſſione data R aucta. Adeoque, ſi AB fuerit 16. pedum & R, 10. pedum, erit BC = 60. pedum. Sed in ejusmodi caſu adhibenda foret aqua ab aëre, quantum fieri poteſt, purgata; aliàs aër ex aqua transſpirans ac ſeſe in ſpatio BP ſenſim ſenſimque colligens liberum aquæ fluxum ex crure AB in alterum BC impediet.

Scholion.

323. Quanquam ſupra dictum ſit in Barometris ordinariis Mercurium in altitudine 27. vel 28. pollicum certorum locorum reſpectu ſubſiſtere, id tamen non in mathematico rigore eſt accipiendum quaſi argentum vivum barometri, in eodem ſemper loco conſtituti, in eadem altitudine conſtanter hæreret; nam ejusmodi Mercurii altitudines ſubinde variant, & ex hisce variationibus variationes in atmoſphæræ preſſionibus utcunque dignoſcuntur. Dico *utcunque*, nam ut Celeb. *Wolfius* in ſua *Aërometria* optime notavit, variationes Barometrorum non ſatis accurate diverſitatem gravitationis atmoſphæræ indicant, & propterea, quæ aliàs barometra vocari ſolent inſtrumenta,

menta, duntaxat *Baroſcopii* appellatione digna cenſuit, *Barometri* nomen inſtrumento illi reſervaturus, ſi quod unquam inveniri poſſit, quod aëris gravitationes accuratiſſime monſtret.

Inter alios defectus, quibus communia baroſcopia laborant, forte præcipuus eſt, quod variationes eorum non ſatis ſenſibiles ſunt: hanc ob rem eximii Philoſophi Hugenius, De la Hire, & Joh. Bernoullius alias baroſcopiorum conſtructiones excogitarunt, quibus inſtrumentis minimæ in aëris gravitate mutationes ſenſibiliter exprimerentur; hinc nata ſunt gemina, quæ vocantur barometra Hugenii & Hirei, quorum conſtructionibus explicandis nunc non immorabor, cum Hugenii barometrum compoſitum in Ephemeridibus Gallicis deſcriptum habeatur, & apud alios paſſim Autores de rebus hisce agentes, & Celeb. Hireus baroſcopii à ſe excogitati deſcriptionem etiam tradiderit in Actis Academiæ Regiæ Pariſ. Scient. 1708. d. 21 Martii. Sed quia barometrum, quod Acutiſſ. Geometra Joh. Bernoullius jam à multis retro annis excogitavit publico nondum innotuit, nec à ſimplicitate ſua contemnendum eſt, ejus deſcriptionem, ab Ingenioſiſſ. Autore mihi benigne communicatam, hoc loco afferre non pigebit; conſtructio itaque barometri Bernoulliàni ita habet.

324. Sit *ABC* tubus è duobus ramis inæqualium diametrorum compoſitus, figuram gnomonis præ ſe ferens; rami horizontalis BC in C aperti diameter lineam ſeu duodecimam digitis Pariſini partem non excedat; rami verò verticalis AB in ſummitate obſtructi diameter eſto 4. linearum vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc barometro magis ſenſibiles ſunt exprimendi, & rami hujus altitudo ſit, qualis in baroſcopiis communioribus, 30. aut 31. pollicum; longitudo verò rami horizontalis BC, quæ à proportione *diametrorum ramorum* pendet, 3. pedum minimùm eſſe debet. Si tubo ſic parato Mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus ſit Mercurio ad medietatem usque E circiter, aëre exiſtente mediæ conſiſtentiæ, habebitur barometrum, quod 16. vicibus magis ſenſibiles exhibebit variationes, quam ordinaria barometra. Liquet enim, quod, deſcendente Mercurio in ramo verticali ex ſpatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per ſpatium 16. pollicum; nam ramus verticalis aliud non eſt, quam ſimplex ſeu commune baroſcopium. Fig. 76.

Quod ſi verò ramus horizontalis anguſtior aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes creſcant in duplicata ra-

ratione diametrorum, adeò ut hæ variationes in infinitum magis magisque ſenſibiles reddi queant. Sed quia praxis talia ſemper incommoda ſecum trahere ſolet, quæ theoriæ ſucceſſum difficilem efficiant, nimia eſt fugienda horizontalis rami anguſtia, quia aëris preſſio non ſatis commode agit in tubo valde anguſto, nec in eo Mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, ſatius eſt verticalem ramum majoris amplitudinis aſſumere, non quidem per totam ejus longitudinem, ſed tantum in
Fig. 77. ſummitate, addendo ſcilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgaribus barometris craſſitiei eſſe poteſt, capſulam vitream AM, in qua Mercurius perinde ac in Hugenii geminato deſcendet atque aſcendet. Verum exiſtente hac capſula valde laxa, inſignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc caſu requiritur, inſtrumentum inconcinnum uſuique parum accommodatum redderet, niſi incommodo iſti promptum eſſet remedium, contorquendo ramum horizontalem in ſpiralem vel quoquo alio modo in minus ſpatium redigendo flexuris illis, quas figura 78. exhibet, dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali exiſtant.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem non abs re fore notat Autor, ſi ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum deſinat, ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi poſſit, dum orificium rami horizontalis C, obſtructum tenetur. Ambobus ramis hoc pacto impletis orificium L hermetice eſt ſigillandum & obturamentum, quo orificium C obſtruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad conſuetam in communioribus barometris altitudinem ſe demittere poſſit ſcilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo ſuperfluus effluere hydrargyrus; ſed quia hac ratione ramus horizontalis Mercurii plenus manebit, ſuctione pars ejus conveniens eſt adimenda vel beneficio tubi capillaris ampullula inſtructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intruſa atque in eo refrigeſcens Mercurium in ſuam cavitatem trahet. Hac ratione barometrum conſtructum uſuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, ſi tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura inſtar receptaculi H inſtruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingreſſum, ſi quando horizontalem forte Mercurius deficeret, aut fortaſſe etiam ex nimia atmoſphæræ preſſione ſeu à vibrationibus Mercurii

ex

ex translatione barometri de loco in locum orta, quod poſtremum inconveniens ſi non tolli penitus, ſaltem obſtruendo orificium C, minui poteſt.

Præter ſimplicitatem, qua Bernoullianum iſtud barometrum ſe commendat, aliis inſuper prærogativis præſtare videtur barometris compoſitis hactenus inventis. Nam tubi pro Bernoulliano & facile parantur facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores ſenſibiliter abeuntes, quibus barometri effectus mirum quantum alterari ſolent. Nam in baroſcopio à nobis deſcripto ſolus adhibetur Mercurius, qui in vapores ſenſibiliter non ſolvitur. Geminatum vero Hugenii barometrum, præterquam quod tubos requirat ægre parabiles & difficillime liquoribus implendos, liquores depoſcit evaporationi obnoxios, cui incommodo illud etiam quod à Celeberrimo De la Hire ingenioſe excogitatum & in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. loco jam ſupra indicato ſubjectum eſt, aliudque præterea incommodum ſecum trahit, quod liquores ejusdem ſpecificæ gravitatis ſed impermiſcibiles requirat, alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, ſed intra certos terminos conſiſtent quos transgredi nequeunt. Nam vocando ſpecificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in barometro iſto adhibendis gravioris ſcilicet & levioris m, t, p; capſularum vitrearum diametrum a, diametrum tubi anguſtioris b; invenio poſt Clariſ. Bernoullium, variationes in barometro Hireano ſe habere ad variationes in barometro ordinario ſeu communi, ut quantitas maa ad $2mbb, +(aa \rightarrow bb.t-p)$. Jam quo minor eſt b quam a, eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad $t-p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes barometri à Cl. De la Hire inventi collatæ cum variationibus Barometri communis continentur, quæ data ratio m ad $t-p$ eo ſolùm caſu infinita fit, quo $t=p$, hoc eſt eo caſu, quo liquores in Hireano barometro adhibiti ejusdem ſunt ſpecificæ gravitatis, ſed qui invicem permiſceri nequeant.

Poſteaquam deſcriptio Bernoulliani barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Pariſienſis prælecta fuit, nuntiatum eſt Celeb. ejus Autori ſimilem barometri conſtructionem jam ante complures annos excogitatam fuiſſe à Celeberrimo Aſtronomo Joh. Dominico Caſſino, ſed poſtea neglectam ab ipſo jacuiſſe, quod in praxi non ſucceſſiſſet ob aërem, qui Mercurio in tubo ſeu ramo horizontali ſe miſcuiſſe ejusque liberum fluxum impediiſſe ſcribitur. Sed quia, quid hac in re laudatus Vir molitus ſit, nusquam memo-

riæ proditum sit, nec Bernoullius de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipsi denegari non potest, maxime quod ejus cum successu in Belgio factum esse periculum testari potest; & incommodum illud, quod Cassino remoram injecit, tolli posse arbitratur, tubum horizontalem suctione implendo; vel etiamsi compressione crumenæ cujusdam coriaceæ argenti vivi plenæ tubique horizontalis orificio applicatæ Mercurius tubo intrusus ascendere cogatur usque ad summitatem tubi verticalis, orificium superius apertum habentis; hac Mercurii intrusione peracta, & obturato summo verticalis tubi orificio, crumena à tubo horizontali est removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad consuetam altitudinem delabi possit. Denique ut Mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo isti amplitudo est tribuenda, quantâ opus est ut Mercurius in eo contineatur, absque eò ut diffluat.

CAPUT VI.

De Vi Elastica Aëris in Genere.

325. Aër, quantum experimentis constat, nullo alio in cæteris fluidis & liquoribus exemplo, sibi peculiarem habet affectionem, quâ non solum continuo se expandere conatur, sed etiam ad majus, quam antea occuparat, spatium seu volumen reapse se expandit quoties nullo corpore ambiente impeditur. Conatus ejusmodi expansivus aëris *Elater* seu *Vis elastica* ejus nuncupatur. Experimenta, quæ hanc aëri *elasticitatem* inesse evincunt, plura à Boylio, Mariotto, Jac. Bernoullio aliisque cautis observatoribus tentata & feliciter ad exitum deducta sunt, quæ apud laudatos Autores *legi* possunt, vel etiam in Aërometria Clariss. Wolfii, in qua selectissima quæque experimenta accurate describuntur. Inter hæc experimenta unum alterumve hoc loco recensebo, quod aëris vim elasticam ad oculum demonstrare existimo.

I. Vesica bubula vel porcina flaccida & complicata, sed obstructum habens orificium ope circumligati fili, in recipiente sensim sensimque intumescere conspicitur, simul atque aër ex recipiente educitur ope antliæ pneumaticæ, & si vesica tenera sit, rumpi subinde observatur à solo elatere pauxilli aëris in vesicæ rugis latentis.

II.

II. Ab eodem aëris elatere phiala vitrea tenuiorum parietum & probe obſtructa in recipiente ab aëre evacuato in minuta ſubinde fragmenta diſſilit; & huic ſimile phænomenum bibulos quandoque terret, cum generoſum vini hauſtum facere volentes lagenam ſuam vitream hiſcentibus labris tam arcte admovent, ut præ metu vel unius ſolum nectaris ſui guttæ effuſionis, communicationem aëris externi cum eo, qui lagenæ ineſt, tollant, atque ſtrenue ſugendo lagenæ aër rarefiat, quo fit, ut prævalente externi aëris preſſione lagena in fruſtula conteratur, & merum pereat.

III. Vis elaſtica aëris probatur etiam experimento hæmiſpheriorum æneorum, quæ educto ex eorum cavitate aëre, tam pertinaciter ſibi invicem adhærere comperiuntur, ut maximis etiam ponderibus ipſis appenſis, vel in oppoſitas partes trahentibus, vix ſeparari poſſint, quæ tamen aëris plena nullo ferme negotio ab invicem diducuntur.

326. Verum, recenſitis experimentis non obſtantibus, D. Parent Elaſticitatem aëris in Hiſtoria Acad. Reg. Pariſ. Scientiarum Academiæ 1708. in dubium vocare velle videtur, ſi Hiſtoriæ verba obiter tantum expendantur; aſt textus diligentius inſpectus poſtea manifeſtat, elaterem aëris in ſenſu paragraphi præcedentis non denegari. Nam Autor modo nominatus tantum negat particulas aëris concipiendas eſſe inſtar lamellarum plicatilium, vel inſtar filamentorum in ſpiras contortarum, & ſeſe poſtea evolventium, aut ullius rei inſtar hisce æquivalentis. Sed eas potius tanquam moleculas conſiderandas arbitratur, materiæ æthereæ, ultra quam cogitari poſſit, exili & agitatiſſimæ innatantes. Idcirco juxta laudatum Autorem moleculæ aëreæ tanto magis ab invicem diſtant, &, quod elateris ſpeciem præ ſe ferre dicit, tanto magis à ſe invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit ætherea materia meatus aëris transfluens, & quo pernicior ejus motus. Ab hac enim materia ætherea vim omnem derivandam eſſe putat, qua aëris moleculæ in alia corpora agere poſſint. Ex quibus omnibus abunde liquet Cl. Parent tendentiam illam molecularum aërearum, qua à ſe invicem diſcedere conantur, non negare, nec proinde vim illam elaſticam noſtro ſenſu ſumtam in dubium vocare. An autem hæc aeris Elaſticitas, ſeu conatus particularum ejus à ſe invicem recedendi, proveniat ab elaſticitate propria particularum compreſſarum, & deinceps in priſtinum ſtatum ſe reſtituere molientium, an vero ab æthere interfluente, quæſtiones ſunt phyſicæ, quæ in utramque par-

tem disputari possunt, quæque omnes suis difficultatibus circundatæ sunt.

327. Hypothesi Parentianæ explicandæ elasticitatis aëris similem ante plures annos etiam excogitaram, sed cui postea nuncium misi, quod eadem posita, non aëra tantum, sed omnes prorsus liquores vi elastica præditos esse debere, qua tamen liquores carent, ex ea sequi viderim. Nam si aëreæ moleculæ ideo à se invicem recedere conantur, quod rapidissimo ætheris motu per poros aëris indesinenter circulantis ejusdem aëris moleculæ à se invicem abigantur & repellantur, cur quæso in reliquis liquoribus moleculæ non eodem modo ab invicem repelluntur ab interfluente æthere, qui non minus trans liquorum poros, quam trans aëris meatus fluere & moveri debet? Respondebitur forte disparitatem provenire à crassitie molecularum, quibus liquores componuntur, nec non à longe majori liquorum densitate, quam sit aëris densitas, & ob has duas rationes fieri, ut moleculæ liquorum non eo successu, quo aëris particulæ à se invicem ab interfluente æthere abigantur, cum ipsæ particulæ abigendæ valde magnæ & ætheris trans liquorum poros fluentis copia valde parva sint respectu aëris. Ast valde dubito, an hæ rationes sincere philosophantibus satisfacturæ sint; nam angustia pororum in liquoribus, quæ adducitur ad reddendam rationem, cur liquores vi elastica careant, potius contrarium probare videtur. Notum enim est, fluida eò velocius moveri solere quo angustiora sint loca, per quæ fluant, sic fluminis in diversis sectionibus fluentis velocitates sunt sectionibus reciproce proportionales; ac propter hanc rationem, velocitas ætheris fluentis per porum alicujus liquoris L erit ad velocitatem ejusdem fluentis per porum aëris A, ut amplitudo pori aëris ad porum liquoris; atqui in diversis liquoribus pororum similiter positorum amplitudines, hoc est, distantiæ duorum vicinorum elementorum in liquoribus, sunt in reciproca subtriplicata proportione densitatum; nam duæ massæ similes & æqualis ponderis diversorum liquorum volumina habent densitatibus suis reciproce proportionalia, & volumina, quæ (secundùm hypothesin) sunt solida similia, sunt in triplicata proportione laterum homologorum, adeoque & densitates erunt in reciproca triplicata ratione laterum homologorum in solidis similibus, atque adeo latera ejusmodi homologa in reciproca subtriplicata ratione densitatum; verum particulæ in ambobus liquoribus, præter propter similiter positæ, admittunt interstitia lateribus solidorum homologis proportionalia,

nalia, unde cum latera ſolidorum ſint in reciproca ſubtriplicata ratione denſitatum, erunt etiam pororum amplitudines ſeu particularum fluidorum ſibi invicem proximarum diſtantiæ in reciproca ſubtriplicata ratione denſitatum. Atqui velocitas ætheris fluentis trans porum liquoris L eſt ad celeritatem ejusdem fluentis trans porum aëris A, reciproce, ut porus aëris ſeu interſtitium duarum ejus molecularum vicinarum ad porum liquoris, atque adeo directe in ſubtriplicata ratione denſitatis liquoris L ad denſitatem aëris A, id eſt, in ſubtriplicata ratione *gravitatis ſpecificæ liquoris* ad gravitatem *ſpecificam aëris*. Jam cum, ut ſupra (§. 314.) dictum, gravitas aquæ ad *gravitatem aëris* ſit ut 800. ad 1, & radix cubica ex 800. ſit quam proxime $\frac{93}{10}$; erit velocitas ætheris trans aquam ad celeritatem ejusdem trans aërem proxime ut 92. ad 10; hinc, quia fluidorum impreſſiones in corporibus, in quæ agunt, ſunt in duplicata ratione velocitatum, ut id ſuo loco oſtendetur, erit hoc caſu vis ætheris ad abigendas moleculas aquæ ad vim ejusdem ad abigendas à ſe invicem moleculas aëris, ut quadratum ex 92. ad quadratum ex 10. proximè, id eſt ut 8464. ad 100; adeoque aquam oporteret habere in Parentii Hypotheſi plus quam octoginta vicibus majorem vim elaſticam quam aër, cur igitur nulla in aqua elaſticitas deprehenditur? multò major adhuc deberet eſſe elaſticitas hydrargyri & aliorum fluidorum aquâ *ſpecifice* graviorum.

Verùm quicquid ſit de cauſa phyſica elateris aëris, ad *inſtitutum* noſtrum ſufficit aëri vim elaſticam ineſſe, quod præter experimenta ab initio hujus capitis relata, etiam probari poteſt effectibus antliæ Guerikianæ à Roberto Boylio poſtea magis perfectæ, cujus opera aër in vaſis quibuscunque, quæ eidem rite applicari queunt, quantum velis rarefieri, atque adeò pars aëris quantacunque repetitis *hauſtibus educi poteſt*, quod minime ſuccederet ſi aër virtute illa expanſiva careret.

328. Eſt vero ejusmodi *Antlia Pneumatica* tubus æneus in tota ſua cavitate perfecte lævigatus, ita ut embolus, qui ultro citroque in eadem cavitate agitandus antliæ cavitati ubique accuratiſſime quadret, nec ullas rimas relinquat per quas aër transpirare poſſit.

Embolus eſt piſtillum ex circulis coriaceis orificio antliæ perfecte quadrantibus conflatum, quod antliæ cavitati ope manubrii centro ejus inſerti ad fundum antliæ intrudi & dehinc iterum ad caput ejusdem ſeu orificium retrahi poſſit.

Epiſtomium Antliæ eſt clavicula cylindrica tubo incurvato antliæque

que fundo afferruminato ad angulos rectos inserta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuso, eum in finem, ut foramen istud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vase, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium sensum conversa, & cum sæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediat atque tollat.

Spiraculum est cavitas ex summitate epistomii in foramen ejus transversum desinens, & cum tubi recurvi cavitate subinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus usus, ut spiraculum apertum cavitati antliæ cum aëre subtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque desinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea fœmina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens utplurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingressum.

Agitatio emboli constat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium seu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB est corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH est tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inseritur epistomium IK, quod, prout in hunc vel illum sensum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epistomium IK perforatum est usque ad ejus foramen transversum, ac hæc cavitas vocatur spiraculum cui acicula I inseritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus est, vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo casu, quo aër recipientis est condensandus. CD est catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum instar sunt, aquam circa recipiens affusam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur mani-

manibusque fortiter aſtringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens ſe inſinuare queat. Et ſic omnia ad uſum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias conſtruere ſolere, quoad nonnullas circumſtantias, cum ejus corpori ſitum inclinatum dent, qui tamen in ſchemate noſtro eſt horizontalis; ſed hoc accidentale eſt, nec ad ejus eſſentiales uſus facit. Sic etiam ſpiraculum ſubinde aliter quam à nobis deſcriptum eſt parare conſueverunt & tubum BOH; ſed quocunque modo id conſtruant, idem ſemper effectus debebit præſtari, cum eo qui eſt in antlia hujus deſcriptionis. Imò vero, ſi quæ aliter parant, id duntaxat reſpicit faciliorem antliæ uſum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti deſcripta ſunt, aperiatur epiſtomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare poſſit, obturato ſcilicet ſpiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in *ef*, quo fiet ut aër qui cavitatem recipientis M & tubi HOB impleverat, ſe diffundat per totum ſpatium MHOB*ef*, compoſitum ex cavitatibus recipientis M, tubi HOB & antliæ B*ef*, atque adeò reſiduus recipientis aër ſe habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates ſimul ad cavitates M, BOH & B*ef* ſimul ſumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris reſidui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOB*ef* ad MHOI. Dehinc clauditur epiſtomium IK, extrahiturque ſpiraculi I obturamentum, atque intruſione emboli *ef* verſus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum ſpiraculum expellitur, ac clauſo denuo ſpiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur ſecunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit ſequens

PROPOSITIO XIX. Theorema.

331. *Si cavitates antliæ* Bef, *tubi* BH *& recipientis* M *ſimul, fuerint ad cavitatem ſolius recipientis* M *ut recta* Q *ad aliam* P, *raritas aëris reſidui poſt quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut* Q *ad* P. Fig. 79.

Nam, quia poſt emboli itum ex B in *ef* aër recipientis M (§. 330.) ſe diffundit per totum ſpatium MHOB*ef*, raritas aëris reſidui in cavitate M poſt emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

erit, ut ſpatium MHB*ef* compoſitum ex cavitatibus recipientis M tubi HOB & antliæ B*ef* ad cavitatem recipientis ſolius M, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Q ad P. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

332. Si ratio P ad Q continuetur in quotcunque terminis R, S, T, &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in ſtatu naturali exiſtentis, termini ſequentes progreſſionis noſtræ Q, R, S, T, &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente reſidui, poſt primam, ſecundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem. Nam, quia raritas aëris poſt primam emboli agitationem eſt ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P, & hic terminus P exponit raritatem aëris in ſtatu naturali qualis erat ante primam agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente reſidui poſt primam emboli agitationem; ſic quia raritas aëris poſt primam ad raritatem poſt ſecundam emboli agitationem eſt ut P ad Q, vel ut Q ad R, & Q exponit raritatem aëris poſt primam emboli agitationem, exponet R raritatem aëris reſidui poſt ſecundam emboli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S, T, &c. raritates reſidui in recipiente aëris poſt tertiam, quartam, &c. agitationem.

Corollarium II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condenſationibus aëris recipientis. Quo caſu loco itus, quem diximus eſſe eductionem emboli ex fundo antliæ B usque in *ef*, nunc per itum intelligam intruſionem emboli *ef* usque ad antliæ fundum. Propterea, ſi progreſſio T, S, R, Q, P continuetur in totidem terminis *q*, *r*, *s*, *t*; &c. hi termini ſignificabunt raritatem aëris in recipiente M, poſt primum, ſecundum, tertium, quartum, &c. emboli itum ſeu in antliam intruſionem. Nam aër, qui ante primam intruſionem diffuſus erat in ſpatio MOef, poſt primam intruſionem redigetur in ſpatium multo anguſtius BOHM, vel neglecta cavitate tubi BOH (quæ inſenſibilis eſt præ cavitate recipientis M, & quæ tubi cavitas etiam ſubinde tollitur, ſpatium EFOH aqua implendo) raritas aëris ante primam emboli intruſionem, quæ dicitur P, ad raritatem ejusdem aëris poſt primum itum eſt ut ſpatium MHOef ad ſpatium M,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [214] - 186
PUBLIC DOMAIN

M, hoc est, ut Q ad P seu P ad q; ergo q repræsentat raritatem aëris in recipiente M post primam emboli intrusionem, & pari argumento termini sequentes r, s, t, &c. indicabunt raritates post secundam, tertiam, quartam, &c. emboli intrusiones.

Corollarium III.

334. Unde, cum (§. 20.) densitatibus raritates reciprocè sint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis q, r, s, t, &c. etiam reciproce proportionales existunt, exponent densitates aëris in recipiente M, post primam, secundam, tertiam, &c. emboli intrusionem in antlia AB.

Propositio XX. Problema.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel saltem ratione unius ad alteram datis, definire, quot emboli agitationibus opus sit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel densitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extructa sit quæcunque log-mica B1n, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in Po, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (secundùm hypothesin) sint in progressione geometrica, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adscripti indicant, quot emboli agitationibus opus sit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; sic Po significat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem Po seu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S, & sic de reliquis; litera verò n denotat numerum quæsitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z quæ ordinata Zn repræsentatur. Hac raritates repræsentandi ratione fit, ut quælibet abscissa PS sit ad abscissam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adscriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adscriptam, hinc erit etiam PZ : PQ = n : 1, vel simpliciter n = PZ : PQ. Atqui PZ est log-us rationis Zn ad Po seu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad Po seu Q ad P; ergo numerus quæsitus n = log. (Z : P) : log. (Q : P). Atque hinc resultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) *quam habet raritas aëris desiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis* (Q : P) *quam*

habent antlia & recipiens simul, ad cavitatem solius recipientis, indicabit quotiens quæsitum agitationum numerum n. Qui erat inveniendus.

Hujus regulæ à Celeb. Jac. Bernoullio olim sine demonstratione publicatæ analysin ex calculo exponentialium petitam jam anno ni fallor 1693. promulgavit Cl. Varignon in Actis Acad. Reg. Scientiarum, eamque postea multis accessionibus auctam in Actis ejusdem Academiæ anni 1705. denuò cum publico communicavit.

Corollarium I.

336. Cum log-us cujusque fractionis sit differentia log-orum numeratoris & denominatoris, erit log-us $Z:P = \log. Z - \log. P$, & $\log. Q:P = \log. Q - \log. P$. adeoque $n (= \log. (Z:P) : \log. Q:P) = (\log. Z - \log. P) : (\log. Q - \log. P)$.

Hinc si $Q:P = 2:1$, & $Z:P = 6:1$, erit $\log. Z - \log. P = 0.7781512$, & $\log. Q - \log. P = 0.3010300$, adeoque $n = 0.7781512 : 0.3010300 = 2\frac{1}{3}$ circiter.

Porrò ope canonis superioris ex tribus quantitatibus $Z:P$, $Q:P$ & n, datis quomodocunque duabus, tertia semper per log-os haberi potest. Sed hisce non vacat diutius immorari.

Corollarium II.

337. Quanquam hoc Problema tantum de rarefactione aëris agit, canon tamen, in quem circa finem §. 335. incidimus, etiam casibus illis applicari potest, quibus aër recipientis non quidem rarefaciendus sed condensandus est. Ut si quæratur, quot emboli pulsibus aër recipientis in naturali vel quocunque alio statu constitutus, cujus densitas ad densitatem aëris in naturali statu data sit, ad gradum densitatis X reduci possit. Fiat ut X ad P ita P ad Z, & hæc Z exponet (§. 20.) raritatem aëris cujus densitas est X, quandoquidem P repræsentat densitatem & raritatem aëris in statu naturali. Jam datis $Q:P$, & $Z:P$ invenietur per canonem citatum numerus quæsitus n pulsuum emboli, quibus aëri raritas $Z = P^2 : X$ seu densitas X inducitur. Verùm hoc casu, quo aër recipienti est intrudendus, magnitudo Z est infra ipsam P, atque adeo log-us rationis $Z:P$ erit negativus, hinc etiam valor numeri n negativus existet, quo tamen aliud non indicatur, nisi emboli itus in casu condensationis con-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [216] - 188
PUBLIC DOMAIN

contraria ratione se habere, quam in casu, quo recipientis aër est rarefaciendus, adeò ut ad signa non debeat attendi.

Scholion.

338. Modus est expeditus explorandi rationem cavitatis antliæ ad cavitatem recipientis, si vas quoddam cylindriforme super basi seu fundo suo rectum aqua impleatur tanta, quantam recipiens & antlia simul capere possunt & dehinc aquæ altitudo notetur per *A*; deinde ope siphonis tantum aquæ exhauriatur ex vase cylindrico, quantum aquæ capere potest antlia, residuæque in vase cylindrico altitudo signetur *B*, dico *A* fore ad *B* sicut Q ad P; nam cylindrus ex altitudine B æquatur cavitati recipientis solius, unde cum sit altitudo A ad altitudinem B, ut cylindrus A ad cylindrum B, id est, ut cavitates antliæ & recipientis simul ad cavitatem solius recipientis, hoc est (secundùm hypothesin) ut Q ad P, liquet propositum.

CAPUT VII.

De Viribus elasticis aëris cum densitatibus ejus comparatis.

NOn solum per experimenta, quorum nonnulla initio capitis proxime antecedentis recensui, constitit aëra vi elastica præditum esse; sed etiam Philosophis innotuit hanc vim expansivam aëris eo majorem esse, quo major sit aëris densitas, & vice versa; idcirco examinandum adhuc restat an elasticitates crescant præcise juxta proportionem densitatum, an vero secundum aliam quamcunque rationem. *In hoc capite nonnulla exhibebimus theoremata ad hanc rem facientia.*

339. Cum aëris elasticitas consistat in nisibus illis, quibus aëris moleculæ à se mutuo recedere conantur, manifestum est, quod pressio, quam quodlibet planum, quo aëris expansio impeditur, à particulis aëris plano contiguis subit, æqualis est universæ vi singularum particularum urgentium.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

340. *Si aër sub volumine cujusvis prismatis* BOF *redigatur in minus* Fig. 81.

nus volumen GOF, *nisusque, quibus proximæ quæque moleculæ* C, c *&* I, i *à se invicem recedere conantur, sint in reciproca ratione densitatis, cujus exponens est* n, *intervallorum* Cc *&* Ii *earundem molecularum, hoc est, in ratione* Cc^{-n} *ad* Ii^{-n}, *vel* Ii^{n} *ad* Cc^{n}. *Erunt vires, quibus plana* BC *&* GI *ab aëre elastico* BF *&* GF *premuntur, ut potestas* n *densitatis aëris* BF *ad similem potestatem aëris* GF. *Hoc est, ut* d^{n} *ad* D^{n} *vocando densitatem aëris in volumine* BF, d *&* *densitatem in volumine* GF, D.

Nam vis, quâ planum BC à particulis aëris ipsum tangentibus urgetur, est ad vim, qua planum GHI à particulis aëreis ipsi contiguis urgetur, est ut omnes particulæ in plano BC ad omnes, quæ sunt in plano GHI, vel potius, ut vis ex omnibus, quibus particulæ plano illi adhærentes pollent, resultans, ad vim resultantem ex viribus, quibus omnes moleculæ plani hujus GHI præditæ sunt, atqui vis omnium C, quæ sunt in plano BC, est ad vim omnium I, quæ sunt in plano GHI, ut vis unius C ad vim unius I, id est (secundùm hypothesin) ut Ii^{n} ad Cc^{n}; ergo vis, qua planum BC est ad vim, qua planum GHI urgetur, ut Ii^{n} ad Cc^{n}. Verum est Ii ad Cc ut IF ad CF, seu ut prisma BF ad prisma GF, id est, ut densitas aëris BF ad densitatem aëris GF vel, sicut *d* ad D, ergo Ii^{n} ad Cc^{n}, id est, vis, qua urgetur planum BC, ad vim, qua ab incluso aëre GF planum GHI urgetur, est ut d^{n} ad D^{n}, seu directe, ut densitatum dignitas cujus index est *n*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

341. Adeoque, si vires, quibus particulæ C, *c*, & I, *i* à se invicem aufugere conantur, fuerint interstitiis Cc, Ii reciprocè proportionales, vires elasticæ aëris erunt densitatibus proportionales.

Propositio XXII. Theorema.

Fig. 82. 342. *Si aër, qui est sub volumine* CFE, *redigatur in volumen minus* cfe *priori simile, ac vires, quibus moleculæ aëreæ in utroque volumine à se invicem recedere conantur, sint, ut in propositione præcedenti, in reciproca ratione potestatis ex indice* n *intervallorum* GH, gh *quibus moleculæ*, G, g *planis* BAE *&* bae *adjacentes à proximis* H *&* h *distant, erit vis, qua totum planum* BAE *ab aëre elastico* FCE *urgetur, ad vim, qua planum* bae *ab aëre elastico* fce *premitur, ut latus cubicum ex potestate*

teſtate denſitatis d *aëris* FCE *ab indice* n *denominata, ad latus cubicum ex pari dignitate denſitatis* D *aëris* cfbe; *hoc eſt, ut radix cubica ex* d^n *ad radicem cubicam ex* D^n.

Quia volumina CFE, *cfe* ſunt ſolida ſimilia, etiam plana BAE, *bae* erunt figuræ ſimiles, & particulæ aëreæ in iis ſimiliter poſitæ erunt. Propterea vis elaſtica aëris CFE, quæ exeritur in planum BAE, erit ad vim elaſticam aëris *cfe* redundantem in planum *bae*, ut vis, qua unica particula G premit planum BAE ad vim unius particulæ *g* urgentis planum *bae*, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut gh^n ad GH^n, ſeu quia GH & *gh* in ſolidis ſimilibus CFE & *cfe* ſunt lineolæ ſimiliter poſitæ, ut ab^n ad AB^n. Jam quia ſolidum *cfe* eſt ad ſolidum CFE ut denſitas aëris in FA ad denſitatem aëris in volumine *fa*, id eſt, ut *d* ad D, tum etiam ut ſolidum *fa* ad ſolidum FA, vel quia hæc ſolida (ſecundùm hypotheſin) ſimilia ſunt, ut ab^3 ad AB^3, erit $ab : AB = \sqrt{C}.\, d : \sqrt{C}.\, D$ & $ab^n : AB^n = \sqrt{C}.\, d^n$, ad $\sqrt{C}.\, D^n$. Ergo vis aëris, quæ exeritur in planum BAE, eſt ad vim, quæ exeritur in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^n ad latus cubicum ex D^n. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

343. Figura verò KIE in plano BAE ſimilis & æqualis figuræ *bae* preſſionem ſubibit ab aëre elaſtico FA, ſe habentem ad preſſionem, quam aër elaſticus *fa* exerit in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Nam preſſio figuræ KIE eſt ad preſſionem figuræ BAE, ut figura KIE, vel æqualis *bae* ad figuram BAE, id eſt, propter figurarum ſimilitudinem ut ab^2 ad AB^2, & (§. 342.) preſſio figuræ BAE ad preſſionem figuræ *bae*, ut $\sqrt{C}.\, d^n$ ad $\sqrt{C}.\, D^n$, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum preſſio in figura KIE ad preſſionem in figura *bae* ſe habet, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Ut habet Celeb. Newtonus Sch. Prop. 23. Lib. II. Pr. Ph. Nat. Math.

Corollarium II.

344. Hinc, ſi iterum fuerit $n = 1$, aut vires centrifugæ moleculârum aëris ſuis diſtantiis ab invicem reciproce proportionales, erunt vires elaſticæ, ſeu preſſiones, quas æquales figuræ KIE & *bae* à ſuo quæque aëre ſubibunt, in ratione denſitatum, atque in hac circumſtantia res convenit cum Corollario Propoſitionis præcedentis. Et con-

converſim, ſi vires elaſticæ denſitatibus proportionales fuerint, molecularum vires, ſeu conatus centrifugi, diſtantiis ſuis à proximis moleculis reciproce proportionales erunt.

PROPOSITIO XXIII. Theorema.

Fig. 83. 345. *Si vires elaſticæ aëris fuerint, ut rationes, quas habent quantitates aëris ad reſidua voluminum, ſub quibus aër continetur, eædem vires erunt ut ordinatæ ad lineam alterutri hyperbolæ æquilateræ aſymptotam æquidiſtantem, denſitates vero, ut abſciſſæ ordinatis homologæ, quarum abſciſſarum origo ſit in ipſa hyperbolæ curva.*

Si ſegmenta AD lineæ datæ AB exponant quantitates aëris in eodem volumine, per totam AB expoſito, contentas, eædem AD denſitates aëris ſimul indicabunt; nam juxta §. 16, denſitates ſunt ut rationes, quas materiæ quantitates habent ad volumina, in quibus continentur, & hoc loco diverſæ aëris quantitates eidem volumini incluſæ ſpectantur. Segmenta vero DB ipſius AB ſunt reſidua voluminis AB, detractis ſcilicet ex hoc volumine aëris quantitatibus AD, AD, &c. In punctis D ad AB excitatæ ſint perpendiculares DC exponentes vires elaſticas aëris, denſitates AD homologas habentis; quibus poſitis, & quia (ſecundùm hypotheſin) elaſticitas aëris ſub denſitate AD eſt, ut ratio AD ad DB; fiat, aſſumta quadam data H, ratio DC : H = AD : DB, eritque componendo DC + H : H = AB : DB, atque adeò producta recta EB datæ AB normali in G, ut GB fiat æqualis aſſumtæ datæ lineæ H, ductaque per punctum G linea GF alteri AB æquediſtanti, erit CF : DF = AB : DB; vel ducta per C parallela CE ipſi AB, fiet EG : BG = AB : CE, unde curva AC cujus ordinatæ DC exponunt vires elaſticas aëris, abſciſſæ verò AD denſitates reſpectivas, eſt hyperbola inter aſymptotas GF & GE. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

346. Si ipſæ AD fuerint exiguæ magnitudinis, reſpectu totius AB, trilineum, vel trilinea, ADC ſpectari poſſunt tanquam rectilinea abſque errore ſenſibili, ac hoc caſu elaſticitates DC ejusmodi denſitatibus AD quam proxime proportionales exiſterent; ſin verò denſitates majores ſint, quam ut AD præ tota AB evaneſcat, elaſticitates aëris in longe majori creſcent proportione quam denſitates.

Hy-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [220] - 192
PUBLIC DOMAIN

Hypotheſin præſentem excogitavit Celeb. Jac. Bernoullius ejusque rationem phyſicam dare conatus eſt in tractatu ſuo de *Gravitate Aetheris* pag. 97. ſeqq. quas Lector ibi legere atque examinare poterit. Ex hac hypotheſi etiam Celeb. ejus Frater Johannes hanc noſtram Propoſitionem XIII. propoſuit in eleganti ſua Diſſertatione *De Motu Muſculorum* jam ſupra laudata.

Scholion.

347. Leibnitiana hypotheſis, qua Illuſtris Vir ſtatuit aërem ut plurimùm mixtum eſſe ex materia *comprimibili* & *incomprimibili* fortaſſe non incongrue ad præſentem propoſitionem exigi poteſt. In iſta hypotheſi aëris puri ſeu materia tantum comprimibili conſtantis elaſticitates eſſent denſitatibus proportionales, in aëre verò mixto ex comprimibili & incomprimibili vires elaſticæ non ſequuntur rationem denſitatum, ſed in majori harum ratione exiſtunt inter ſe, ita ut pro varia proportione mixturæ ex comprimibili materia & incomprimibili elaſticitatum cum denſitatibus collatarum lex variare debeat, atque adeò rationi conſentaneum ſit, vires elaſticas inter ſe eſſe in proportione rationum, quas quantitates materiæ comprimibilis ſub aliquo volumine contentæ habent ad reſidua hujus voluminis materiæ incomprimibilis plena, ut habet hypotheſis hujus Propoſitionis XXIII. Cæterum Boylius, Mariottus, Bernoullii, Amontonius, Joh. Polenus & alii accuratis experimentis comperierunt denſitates aëris viribus comprimentibus, ſeu elaſticitatibus ejus quam proxime proportionales exiſtere. Modus unus inter alios quo experimentum ſumſerunt, eſt qui ſequitur.

348. Sit tubus ABC inſtar ſiphonis reflexus apertus in A & hermetice ſigillatus in C, per orificium A argentum vivum infunditur in breviore crure pertingens usque in E, & in longiore AB usque in H, & ubi omnia in ſtatu manente fuerint, baſis D ab incumbente Mercurio HD, aucto preſſione totius atmoſphæræ, ſeu 28. digitorum, eandem preſſuram ſubibit, quam baſis E ab elaſticitate aëris ſpatio CE incluſi; ſi porrò Mercurius infundatur per orificium A ut tandem ſubſiſtat in I, & in altero ramo CB pertingat usque ad G, ita ut aër CE in ſpatium anguſtius CG redactus ſit, baſis F preſſuram ſuſtinebit columnæ IF auctæ atmoſphæræ gravitatione 28. digitorum, alteraque G ab aëre elaſtico CG parem preſſionem ſubibit. Idcirco ſi IF + 28. digit. Mercurii ad HD + 28. digit. fuerit, ut Fig. 84.

CE ad CG, erunt vires comprimentes seu elasticitates aëris ejusdem densitatibus directe proportionales, ut à Mariotto, Amontonio & Poleno pluribus experimentis comprobatum est. Vid. Mariotti *Tentamen de Natura Aëris*, tum etiam Tractatus de Motu Aquarum, in quibus ejusmodi experimenta à se capta distincte exponit, perinde ac post ipsum fecit Amontonius in Commentariis Acad. Scient. Paris. Sed quia communiter spatia CE, CG, &c. perexigua sunt in eorundem mensuris & proportionibus explorandis, facile est errorem committere; idcirco Mariottus modo isti proportiones investigandi inter vires elasticas, seu vires comprimentes, & densitates aëris, merito alium adjecit ex observationibus barometri petitum, quem Jac. Bernoullius deinceps magis excoluit in suo Tractatu de Gravitate Ætheris. Hic modus est indirectus, quia in eo assumitur id, quod est probandum instar principii, & conclusio confertur cum phænomenis, cum quibus si conspiraverit retrogrado ordine concluditur principium assumtum esse verum. Nam fistulæ barometri in hoc altero experimentali modo infunditur Mercurius ad certum signum usque, reliquo tubi aëri naturalis consistentiæ relicto, non verò, ut in communi barometrorum constructione fieri solet, totus tubus hydrargyro impletur; dehinc inverso tubo, obstructo ejus orificio, & demisso infra superficiem Mercurii in vasculo quodam stagnantis, aperitur obstructum orificium, ut Mercurius in fistula vasculo perpendiculariter insistenti descendere queat, qui non totus quidem ex tubo effluet, sed tamen humilius se in fistula demittet, propter aërem fistulæ introductum, quam in barometro ordinario; ex quo, quantum fieri potest, omnis aër diligenter excludi solet. Jam si mercurius hac operatione posita, ad illud ipsum signum delabitur, & in eo subsistit, in quo ipsum subsistere debere calculus indicavit, qui in hypothesi fundatur, quod densitates sint viribus comprimentibus proportionales, ecquis de bonitate hypotheseos ambiget? Quod vero Mercurius ad ea præcise signa perveniat, quæ ipse calculus in hac memorata hypothesi fundatus determinavit, id constitit Mariotto & Jac. Bernoullio ex observationibus accuratis. Quousque vero Mercurius in præmemoratis circumstantiis se demittere debeat, manifestabit sequens Problema.

PROPOSITIO XXIV. Problema.

Fig. 85. 349. *Datis atmosphæræ pressione, & longitudine alicujus fistulæ AB apertæ*

apertæ in B, *clauſæ verò in* A, *definire ad quam altitudinem intra fiſtulam ſuſpenſus manere debeat Mercurius, ſi, poſt impletionem fiſtulæ eo usque ut ſola pars longitudinis datæ,* V *æqualis, Mercurii vacua, ſed aëris naturalis plena retineatur, & poſtquam apertum orificium* B *digiti pulpa vel alia ratione obſtructum, inverſoque tubo idem obſtructum orificium argento vivo in vasculo* D *ſtagnanti immerſum fuerit, tubo exiſtente in ſitu perpendiculari, ita ut aër tubo incluſus in ſummitate fiſtulæ* AB *æquali* V *primùm ſe colligere poſſit, dein remoto digito orificium* B *obſtruente, Mercurius libere deſcendere queat.*

Fiat AG æqualis columnæ argenti vivi æquivalentis atmoſphæ- Fig. 86.
ræ, ſeu 28. digitorum circiter, eique in G ad angulum rectum AGO aptetur linea indefinite longa GH, & in recta AL per A transeunte, ipſi GH parallela ſumatur AL æqualis V, ſeu columnulæ aëreæ AC tubo AB Mercurii pleno usque in C intromiſſæ, deſcriptaque intra aſymptotas AGH hyperbola LKN per punctum L, ſumtaque in aſymptota AG linea AB æqualis fiſtulæ AB longitudini datæ, ducatur per punctum B linea BK angulum ſemirectum conſtituens Fig. 85.
cum aſymptota AG, agaturque ex puncto K hyperbolæ, in quo recta BK ei occurrit, linea IK parallela aſymptotæ GH, eritque AI æqualis altitudini columnæ argenti vivi BM, in qua in æquilibrio exiſtet cum externa atmoſphæræ preſſione, & BI vel IK exponet ſpatium AM, in quod aër naturalis conſiſtentiæ in fiſtula AC ſeſe extendet.

Demonſtr. Quia denſitas aëris AM eſt ad denſitatem aëris AC ut AC ad AM, id eſt, ut AL ad IK, ſeu propter hyperbolam LKN, ut GI ad GA, & denſitates aëris viribus elaſticis ejus ſub illis denſitatis gradibus ſunt (ſecundùm hypotheſin) ut hæ denſitates, erit vis elaſtica aëris AM ad vim elaſticam aëris AC, ut GI ad AG; atqui aër naturalis conſiſtentiæ AC vim elaſticam habet atmoſphæræ preſſioni per AG expoſitæ æqualem, ergo vis elaſtica aëris AM æquipollet columnæ Mercuriali GI, atque adeo preſſio compoſita ex elaſticitate aëris AM & gravitatione columnæ BM = AI, eſt AG compoſita ex AI & IG; æqualis ergo eſt interna preſſio, reſultans ex vi elaſtica aëris AM & gravitatione Mercurii MB, externæ atmoſphæræ AG, ac propterea columna argenti vivi in altitudine MB intra fiſtulam librata hæret. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

350. Ex hisce nunc facile elicietur valor rectæ BI aut æqualis IK vel AM. Sed in hac determinatione casus distingui debent. Nam fistulæ longitudo AB major esse potest quam AG, vel minor. Si illud, & quia angulus semirectus IBK lineam BI alteri IK æqualem efficit, adeo ut figura IKPB sit quadratum æquale duobus rectangulis IO & GP simul, hoc est $IK^2 = IK.BG + GH.HN = IK.BG + AG.AL$, ergo $IK = \frac{1}{2}BG + \sqrt{(\frac{1}{4}BG^2 + AG.AL)}$. Hinc existente BG nulla coincidentibus punctis B & G, fiet $IK = \sqrt{(AG.AL)}$.

Sin vero iisdem positis fistulæ AB longitudo minor fuerit quam AG, fiat Aβ eidem fistulæ longitudini æqualis, positaque constructione problematis antecedente paragrapho tradita, simili fere argumento invenietur $ik = -\frac{1}{2}\beta G + \sqrt{(\frac{1}{4}\beta G^2 + AG.AL)}$.

COROLLARIUM II.

351. Si jam cum Cl. Jac. Bernoulli, qui etiam in suo Tractatu *De Gravitate & Ætheris* pag. 117. seqq. hoc problema tractavit, ponamus AC vel AL, a; BC, b; adeòque $AB = a + b$, $AG = b + c$, unde $AG - AB = \beta G = c - a$, & denique $CM = y$; substitutis hisce valoribus in ultima æqualitate paragraphi proxime antecedentis, invenietur $ik = a + y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$ adeoque $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$, quæ est ipsissima æquatio, quam insignis vir etiam reperit. In eandem incidissemus æquationem, si in altera formula corollarii præcedentis loco BG substitutum fuisset $a - c$.

In numeris sit fistula AB, 21. digit. AG nunc 27. digit. AC, 1. dig. invenieturque ik vel AM, 3. digitorum adeòque BM, 18. digitorum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

Fig. 85, 86. 352. *Datis columna* AG *argenti vivi, æquivalente pressioni atmosphæræ, & longitudine fistulæ* AB, *definire quantum spatium* AC *aëris naturalis consistentiæ plenum in summitatem fistulæ debeat introduci, ut, postquam aër ex* AC *se extendit in spatium* AM, *Mercurius in data altitudine* BM *intra fistulam suspensus maneat.*

In

In hoc problemate ex datis AG, AB, AI vel BM quæritur AL vel AC aut V. Idcirco facto iterum angulo semirecto ABK, & AI = datæ, in fistula altitudine Mercurii manentis BM, agatur IK parallela asymptotæ GH rectæ BK occurrens in K, per quod punctum nunc ducenda est hyperbola NKL, rectæ AL ipsi GH parallelæ occurrens in L, erit AL spatium quæsitum. Demonstratio eadem penitus est cum demonstratione propositionis antecedentis, atque adeo hoc loco non repetenda. In numeris habebitur AL applicando rectangulum datum GIK ad lineam AG, quæ atmosphæræ pressionem exponit: nam GI est excessus, quo AG excedit datam AI vel BM, & IK vel BI aut AM est etiam (secundùm hypothesin) data, adeoque & rec-lum GI. IK eique æquale rec-lum AG. AL datum erit; adeo ut diviso rec-lo GI. IK per AG, quotiens, vel in geometrica phrasi quarta proportionalis ad AG, IG & IK futura sit AL denotans quantitatem quæsitam aëris in fistulam AB intromissi, ut Mercurius in data altitudine BM consistat. Quod erat inveniendum.

Scholion.

353. Si jam determinationes hujus & antecedentis propositionis cum phænomenis convenerint, ut satis egregie cum iis conspirare deprehensæ sunt; omnino inferri debet, assumptam hypothesin, quod densitates aëris viribus comprimentibus seu elasticitatibus ejus proportionales sint, naturæ satis consentaneam esse, modo ea non in majore latitudine sumatur, quam experimenta, cum quibus convenire videtur. Ejusmodi verò experimenta cum aëre mediocris densitatis capta sunt; idcirco, si quis præmemoratam hypothesin ad aërem densissimum vellet extendere, insigniter hallucinaretur, quandoquidem *juxta superius dicta* (§. 346.) in aëre densiore elasticitates majorem habent inter se proportionem quam densitates ipsis convenientes.

CAPUT VIII.

De Densitatibus aëris in diversis Atmosphæræ locis in omni possibili elasticitatum hypothesi.

IN hoc capite non agetur de aliis aëris densitatibus quam quæ aëri à pondere incumbente inducuntur; propterea in hisce ser-

mo non erit de rarefactione & condenſatione aëris, quæ à calore & frigore proveniunt.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 87, 88. 354. Curva C_1C_2C circa axem OA_2A extructa, cujus ordinatæ AC, $2A_2C$, &c. exponunt gravitatem variabilem cujusque corporis in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ transeunt, dicatur *ſcala gravitatis variabilis.*

II.

355. Curva verò B_1B_2B circa eundem axem A_2A deſcripta eſto *ſcala denſitatum* atmoſphæræ, quia ordinatæ ejus AB, $2A_2B$, &c. exponunt denſitates atmoſphæræ in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ ductæ ſunt.

III.

356. Et curva A_2DD ſubter CB horizontem circa eundem axem AO deſcripta, ſit *ſcala elaſticitatis* aëris, cujus ſcilicet abſciſſæ AO, A_2O, A_1O repræſentent elaſticitates aëris ſub denſitatibus OD, $2O_2D$, $1O_1D$.

IV.

357. Productis ordinatis ſcalæ elaſticitatis aëris DO, $1D_1O$, $2D_2O$ in E, 1E, 2E, &c. ſi ſingula rectangula DOE, $1D_1O_1E$, $2D_2O_2E$ inter ſe & dato plano æqualia fuerint, puncta E, 1E, 2E, &c. erunt in curva E_1E_2Ee, quam *reciprocam ſcalæ elaſticitatis* deinceps vocabimus.

AXIOMA.

358. Elater aëris æqualis ſemper eſt vi comprimenti, atque adeo in quolibet atmoſphæræ loco aëris vis elaſtica æquivalet ponderi aëris incumbentis. Nam vires directe contrariæ, ut vis aërem comprimens & elater aëris, æquales ſunt, quia omnia in ſtatu manenti poſita eſſe intelliguntur.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [226] - 198
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXVI. Theorema.

359. *Ordinatæ quæcunque æquales* ab *&* od *in ſcalis denſitatum & elaſticitatum aëris ultra communem ſcalarum axem* AT *productæ, in ſcala gravitatis variabilis & curva ſcalæ elaſticitatis aëris reciproca perpetuò areas æquales* ACca *&* OEeo *abſcindent.* Fig. 87.

Ordinatæ αβ & ωδ ſuis reſpectivis *ab* & *od* indefinite vicinæ protrahantur in *α* & *f*. Jam gravitas aëris *a*T loco *a* incumbentis, aërique in hoc loco denſitatem *ab* vel *od* inducens (§. 358.) æquatur elaſticitati aëris expoſitæ per abſciſſam *Ao*, & pondus aëris loco *α* incumbentis æquatur elaſticitati aëris in *α*, quæ repræſentatur abſciſſa *Aω*; adeoque differentia ponderum *α*T & *a*T, id eſt, pondus columnulæ aëreæ *αa* æquabitur differentiæ elaſticitatum *Aω* & *Ao* hoc eſt *ωo*. Atqui (§. 32.) pondus columnulæ *αa* exponitur ſolido *ab. ac. aα*; ergo hoc ſolidum æquatur alii ſolido ex *ωo* in datum planum EO. OD, vel (§. 357.) ipſi æquale planum *eo. od*, id eſt, *ab. ac. aα* = *eo. od. ωo*; ſeu deletis (ſecundùm hypotheſin) æqualibus *ab* & *od*, rec-lum *ac. aα* = rec-lo *oe. ωo*, & cum deſcendendo verſus CB & ED hoc ubique eveniat, ut ſingula elementa arearum ACc*a* & OE*eo* æqualia ſint, æquabuntur etiam univerſa, id eſt omnia *ac. aα* ſeu area AC*ca*, quam illa exhauriunt, erunt æqualia omnibus *oe. ωo*, ſeu areæ OE*eo*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

360. Si nunc ſcala elaſticitatum aëris A1D2D ponatur eſſe parabola indefiniti gradus, cujus quælibet ordinata 1O1D ſit ut $A1O^m$, ſeu ut dignitas abſciſſæ A1O ab exponente *m* denominata, erit propter rec-lum D1O1E, æquale dato rectangulo DOE, atque adeo propter 1E1O alteri 1D1O reciproce proportionalem, 1E1O reciproce ut $A1O^m$. atque adeo curva E1E2E hyperbola indefiniti gradus m. Sit inſuper curva C1C2C alia hyperbola indefiniti gradus *n*, adeo ut quælibet ejus ordinata 1C1A ſit reciproce ut abſciſſæ dignitas *n*, id eſt, reciproce ut $O1A^n$. Jam ſi æquales ordinatæ 1A1B vel 1O1D exponunt denſitatem aëris in 1A, (§. 359.) quadrilinea A1A1CC & O1O1EE æqualia erunt, atqui juxta methodum ſupra (§. 92.) expoſitam invenitur Quadrilineum A1A1CC = (OA. AC − O1A. 1A1C) : n − 1, & quadrilineum hyperbolicum OE1E1O = (A1O.

$=(A_1O.\ _1O_1E - AO.\ OE) : m-1 = (AO.\ OE - A_1O.\ _1O_1E) : 1-m$. Ergo $(OA.\ AC - O_1A.\ _1A_1C) : n-1 = (AO.\ OE - A_1O.\ _1O_1E) : 1-m$. Jam, quia ipſæ AC & OE nullius ſunt determinatæ magnitudinis, fiat $AC : EO = n-1 : 1-m$, eritque rec-lum OA. AC ad rec-lum AO. OE in hac eadem ratione ac conſequenter etiam rec-lum $O_1A.\ _1A_1C$ ad rec-lum $A_1O.\ _1O_1E$ in eadem erit ratione $n-1$ ad $1-m$ ſeu AC ad OE. At vero in hyperbola C_1C_2C eſt rec-lum $OA.\ AC : O_1A.\ _1A_1C = O_1A^{n-1} : OA^{n-1}$, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum erit $OA.\ AC : A_1O.\ _1O_1E = AC.\ O_1A^{n-1} : OE.\ OA^{n-1}$, item in hyperbola E_1E_2E, eſt $A_1O.\ _1O_1E : AO.\ OE = AO^{m-1} : A_1O^{m-1}$ (hoc eſt propter parabolam A_2D_1D) $= OD^{m-1:m} : {}_1O_1D^{m-1:m}$, ergo denuo ex æquo habetur $OA.\ AC : AO.\ OE = AC.\ O_1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} : OE.\ OA^{n-1}.\ {}_1O_1D^{m-1:m}$. Ex hac vero deducitur $O_1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} = OA^{n-1}.\ {}_1O_1D^{m-1:m}$, & rejectis quantitatibus datis, ſeu conſtantibus, quæ proportiones non alterant, ſcilicet $OD^{m-1:m}$, & OA^{n-1}, erit O_1A^{n-1} ut ${}_1O_1D^{m-1:m}$, vel dividendo exponentes per $m-1 : m$, reſultabit ſequens $_1O_1D$ ut $O_1A^{mn-m:m-1}$. Hinc

1°. Si cubus vis comprimentis proportionetur quadrato-quadrato denſitatis, & gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro gravium, erunt $m = \frac{1}{4}$, & $n = 2$, adeoque $mn-m : m-1 = -3$, ergo $_1O_1D$ erit hoc caſu, ut O_1A^{-3}, hoc eſt, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ.

2°. Si cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & gravitas reciproce ut quadratum diſtantiæ, fient $m = \frac{1}{7}$ & $n = 2$, ergo $mn-m : m-1 = -\frac{5}{3}$, id eſt, denſitas $_1O_1D$ erit in reciproca ſeſquiplicata ratione diſtantiæ O_1A.

3°. Si vis comprimens ſit ut quadratum denſitatis, & gravitas in reciproca duplicata ratione diſtantiæ, fient $m = \frac{1}{2}$ & $n = 2$, ergo $mn-m : m-1 = -1$, quod indicat denſitatem hoc caſu eſſe in reciproca ratione diſtantiæ.

Ex hisce ergo liquet veritas aſſertionum nonnullarum ſine ulla demonſtratione prolatarum ab Illuſtr. Newtono in Scholio poſt Prop. 22. Lib. II. *Pr. Phil. Nat. Math.* Et, quanquam hoc corollarium tantum caſus ſit particularis propoſitionis noſtræ generaliſſimæ, idem tamen infinities infinitos caſus diverſos in ſe continet.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [228] - 200
PUBLIC DOMAIN

Corollarium II.

361. Nam si scala elasticitatum aëris A_2D_1D fuerit linea recta, hoc est, si elasticitas aëris, aut vis comprimens, est ut densitas, curva E_1E_2E erit hyperbola conica intra asymptotas CA & AO descripta; est enim $1E_1O : EO = OD : 1O_1D$ (propter rectam A_2D_1D) $= AO : A_1O$. Hinc, si hyperbolæ quadrilineæ EO_1O_1E, $1O_2O_2E_1E$, &c. sint æquales inter se, & hisce æqualibus quadrilineis æquentur totidem in scala gravitatis variabilis AC_1C_1A, $1A_1C_2C_2A$, &c. homolgæ ordinatæ AB, $1A_1B$, $2A_2B$, &c. in scala densitatum B_1B_2B erunt continue proportionales. Nam propter æqualitatem trapeziorum hyperbolicorum O_1E, $1O_2E$, &c. abscissæ AO, A_1O, A_2O, &c. vel abscissis hisce respectivæ ordinatæ in scala elasticitatis OD, $1O_1D$, $2O_2D$, &c. hoc est AB, $1A_1B$, $2A_2B$, &c. ipsis eodem ordine sumtis æquales erunt in continua ratione. Idcirco, si vires comprimentes, vel æquivalentes vires elasticæ aëris densitatibus ejus proportionales, in scala vero gravitatis quadrilinea AC_1C_1A, $1A_1C_2C_2A$, &c. æqualia fuerint, densitates aëris in locis A, 1A, 2A, &c. erunt semper in continua ratione.

Corollarium III.

362. Propterea si gravitas in loco quolibet 1A, seu ordinata $1A_1C$ fuerit reciproce ut O_1A^n, existente curva C_1C_2C hyperbola indefiniti gradus exponentis n, & magnitudines OA^{1-n}, O_1A^{1-n}, O_2A^{1-n}, &c. sumantur in progressione arithmetica ascendente, ordinatæ scalæ densitatum AB, $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt continue proportionales. Nam quia OA^{1-n}, O_1A^{1-n}, O_2A^{1-n}, &c. proportionales sunt hisce sequentibus eodem ordine sumtis O_2A^{n-1}, O_1A^{n-1}; OA^{n-1}, &c. hisce jam proportionantur rectangula OA. AC, $O_1A.\,1A_1C$, $O_2A.\,2A_2C$, &c. ergo hæc rectangula sunt etiam in progressione arithmetica, atque adeo $(O_1A.\,1A_1C - OA.\,AC) : n-1$ id est, juxta ea quæ §. 360. dicta sunt, quadrilineum AC_1C_1A æquatur $(O_2A.\,2A_2C - O_1A.\,1A_1C) : n-1$, seu quadrilineo $1A_1C_2C_2A$, adeoque (§. 361.) ordinatæ AB, $1A_1B$, $2A_2B$, &c. erunt continue proportionales.

COROLLARIUM IV.

363. Si nunc n sit 1, adeoque curva C_1C_2C hyperbola conica centrum habens in O, quadrilinea æqualia A_1C, $_1A_2C$, &c. habebunt abscissas OA, O_1A, O_2A, &c. continue proportionales, & vice versa, si hæ abscissæ fuerint in progressione geometrica, quadrilinea prædicta erunt æqualia, ac consequenter densitates AB, $_1A_1B$, $_2A_2B$, &c. erunt continue proportionales, plane ut habet Prop. 21. Lib. II. *Princ. Ph. Nat. Math.* Cel. Newtoni, quam seorsim demonstravit.

COROLLARIUM V.

364. Si n sit 2, atque adeo curva C_1C_2C hyperbola quadratica; id est, si gravitates corporum sint in reciproca duplicata ratione distantiarum à centro, & OA^{-1}, O_1A^{-1}, O_2A^{-1}, &c. in progressione arithmetica, atque adeò seriei hujus reciproca OA, O_1A, O_2A, in progressione harmonica, (§. 361. 362.) ordinatæ AB, $_1A_1B$, $_2A_2B$, &c. erunt in progressione Geometrica. Hoc ipsum demonstratum dedit alia ratione Cel. Newtonus Prop. 22. Lib. II.

COROLLARIUM VI.

365. Si $n=-1$, hoc est, si gravitas est ut distantia corporis à centro O, curva C_1C_2C mutabitur in lineam rectam transeuntem per centrum O, seriesque, quæ juxta §. 362. debet esse in arithmetica progressione OA^{1-n}, O_1A^{1-n}, O_2A^{1-n}, &c. nunc fiet OA^2, O_1A^2, O_2A^2, &c. adeoque, si quadrata distantiarum OA, O_1A, O_2A, &c. fuerint in progressione arithmetica, trapezia rectilinea, A_1C, $_1A_2C$, &c. erunt æqualia, atque adeo (§. 361.) ordinatæ scalæ densitatum AB, $_1A_1B$, $_2A_2B$, erunt continue proportionales. Ut asseruit, sed absque ulla demonstratione, laudatissimus Newtonus in Scholio post Prop. XXII. Lib. II. *Princ. Phil. Nat. Math.*

COROLLARIUM VII.

366. Sin verò n fuerit o, id est, si gravitas corporum uniformis seu constans fuerit, qualis communiter considerari solet, tunc scala gra-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [230] - 202
PUBLIC DOMAIN

gravitatis C_1C_2C erit linea recta axi AT parallela, ut in fig. 88. & series OA^{1-n}, O_1A^{1-n}, O_2A^{1-n}, &c. quæ conſtituere debet progreſſionem arithmeticam ad id, ut ordinatæ AB, $_1A_1B$, $_2A_2B$, &c. ſint in continua proportione, nunc erit ſimpliciter OA, O_1A, O_2A, &c. in progreſſione arithmetica, atque adeò ipſæ diſtantiæ A_1A, $_1A_2A$ ordinatarum ſcalæ denſitatum atmoſphæræ erunt æquales, ſcalaque ipſa B_1B_2B proinde erit logarithmica. Huic corollario ſimile quid jam olim primus, quod ſciam, obſervavit acutiſſimus Edmundus Hallejus.

Corollarium VIII.

367. Iisdem, quæ in corollario præcedenti, poſitis, ſi ſcala gravitatis uniformis tC producatur usque ad occurſum E hyperbolæ E_1E_2E, & per hoc punctum E agatur EOD ſcalæ elaſticitatis aëris A_2D_1D occurrens in D, erit ſubtangens *ah* log-micæ B_1B_2B æqualis abſciſſæ AO ſcalæ elaſticitatis, ordinatæ OD correſpondenti. Nam (§. 359.) eſt $ac.a\alpha = eo.o\omega$ atque adeò $o\omega : a\alpha = ac : eo = EO : eo = od : OD = Ao : AO$. atqui $g\delta$ vel $\gamma\beta$ eſt ad *dg* vel $o\omega = od$ vel $ab : Ao$, ergo ex æquo $\gamma\beta : a\alpha = ab : AO$. & propter triangula ſimilia $\beta\gamma b$ & *bah*, eſt $\gamma\beta : a\alpha$ vel $b\gamma = ab : ah$, ergo etiam $ab : AO = ab : ah$, atque adeò AO æquatur ſubtangenti *ah* logarithmicæ B_1B_2B.

Corollarium IX.

368. Præterea erit, iisdem poſitis, quodlibet quadrilineum hyperbolicum OE_1E_1O ad datum rec-lum AOE, ut A_1A diſtantia ordinatarum AB & $_1A_1B$ æqualium ordinatis OD, $_1O_1D$ ſcalæ elaſticitatis applicatis hyperbolæ OE, $_1O_1E$, in directum poſitis, ad ſubtangentem *ah* log-micæ B_1B_2B. Nam, quia (ſecundùm hypotheſin) OE_1E_1O = rec-lo AC_1C_1A, erit quadrilineum $OE_1E_1O : AO.OE = A_1A.AC : AO.AC = A_1A : AO = A_1A : ah$.

Corollarium X.

369. Quia altitudines Mercurii in barometro ſunt, ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis, & preſſiones atmoſphæræ & elaſticitates aëris preſſiones illas ſuſtinentis, ſi elaſticitates denſitatibus aëris proportionales fuerint, ut quidem in corol-

lariis 2, 3, 4, 5, & 6. hujus Propositionis suppositimus, altitudines Mercurii in barometro in locis A, 1A, 2A, &c. positi, erunt ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in scalâ densitatum B1B2B, si scilicet gravitas corporum uniformis, seu in omni à centro terræ O distantia eadem fuerit, ut tuto id assumere licet. Propterea datis quantitatibus Mercurii in barometro in locis A, 1A, & 2A existente, & altitudine A1A; invenietur logarithmorum ope altera distantia seu altitudo A2A. Nam, quia A1A est ad A2A ut log-us rationis AB ad 1A1B, ad log-um rationis AB ad 2A2B; si log-us rationis AB: 2A2B ducatur in datam altitudinem A1A, & productum dividatur per log-um rationis AB: 1A1B; quotiens manifestabit altitudinem quæsitam A2A. Sin verò ex datis altitudinibus A1A, A2A & ratione AB: 1A1B quæratur ratio AB: 2A2B, seu ratio Mercurii in barometro collocato in A ad quantitatem Mercurii barometro existente in 2A; log-us rationis AB: 1A1B tantum multiplicandus est per A2A & productum dividendum per A1A, & manifestabit quotiens log-um rationis quæsitæ AB: 2A2B, invento verò log-mo ipsa ratio ex tabulis usualibus logarithmorum illicò innotescet.

Scholion.

370. *Ut regula noni corollarii exemplo aliquo illustretur, ponatur altitudinem Mercurii in A seu AB esse 28. digitorum, & in* altitudine loci 1A supra A, id est A1A, 63. pedum Mercurium una linea deficere, ita ut 1A1B tantum sit 335. linearum, cum AB, seu 28. pollices, contineant 336. lineas. In altitudine vero A2A seu in loco 2A quantitas argenti vivi 16½ lineis deficiat à quantitate in A seu AB, adeo ut 2A2B tantum sit 319½ lin. Quæritur in hisce datis altitudo A2A. Juxta canonem (§. 369.) log-us rationis AB: 2A2B seu nunc log-us 336: 319½ multiplicari debet per A1A seu 63. & productum dividi per log-um AB: 1A1B seu log. 336: 335, & quotiens indicabit quæsitum; atqui productum ex log. 336 — log. 319½ in 63. divisum per log. 336 — log. 335, præbet 1053¼, ergo hic numerus exprimit, quot pedum sit altitudo quæsita. Hoc exemplum sumsimus ex Mariotti *Tentamine De Natura aëris*, qui pag. 194. & 195. refert, Celeberrimum Cassinum observasse olim in summitate alicujus Montis in Provincia Galliæ, cujus altitudinem diligenti dimensione 1070. pedum invenerat, Mercurium barometri 16½ lineis depressiorem fuisse, quam ad radicem montis ubi ad 28. digit.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [232] - 204
PUBLIC DOMAIN

digit. subsistebat, idcirco altitudo montis calculo nostro elicita 17. circiter pedibus deficit ab observata 1070. pedum, sed hæc differentia forte inde venit, quod cum Mariotto posuimus in altitudine 63. pedum argentum vivum una linea deficere à Mercurio barometri in horizonte ad 28. digitos sublato. Verùm si altitudinem in qua Mercurius una linea in barometro decrescit, vel uno tantum pede major fiat, scilicet 64. pedum, calculus, juxta Canonem superiorem subductus, præbebit altitudinem Montis $1069\frac{11}{12}$, adeò ut unica 95^{ma} pedis ab observata altitudine deficiat.

371. Cl. Mariottus, etsi hypothesin quod densitates aëris viribus comprimentibus proportionales sint, suam fecit, atque logarithmico calculo altitudines locorum ex argenti vivi differentiis eliciendas censuit, in calculo suo, eidem exemplo paragraphi præcedentis aptato, logarithmis tamen non est usus, sed faciliori quidem, minus exacto verò computo altitudinem montis elicuit 1080. pedum, idque sequenti ratione. Quoniam atmosphæræ pressio in loco infimo æquivalet 28. digitis Mercurii seu 336. lineis, totam atmosphæram in 336. partes æquiponderantes dirimit, quarum unaquæque unius lineæ Mercurii gravitationi æquipollet; sed harum aëris partium altitudines inæquales erunt, adeo quidem, ut ea, quæ divisioni 168. semissi ipsius 336. respondet, duplo altior seu major futura sit quam infima altitudo 63. ped. primæ Mercurii lineæ versus horizontem conveniens, atque adeo sit 126. pedum; altitudinum seu partium atmosphæræ differentias, singulis Mercurii lineis homologas, sursum crescere fingit in arithmetica progressione, quam à geometrica, juxta quam incrementa partium fieri rectè judicat, perparum abludere arbitratur; idcirco dividendo 63. per 168, secundæ atmosphæræ divisionis incrementum supra primam horizonti proximam reperit $\frac{63}{168}$, & ducendo 63. in $16\frac{1}{2}$, invenit 1029. ped. pro altitudine totali, seu montis altitudine, si modò singulæ atmosphæræ divisiones $16\frac{1}{2}$ lineis Mercurii respondentes æquales extitissent, verum quia crescunt in proportione arithmetica, ideò omnia incrementa repertæ altitudini 1029. pedum adjicit; hunc in finem numerum 136. qui est aggregatum omnium numerorum naturalis progressionis 1, 2, 3. usque ad 16. inclusive, ducit in $\frac{63}{168}$, & productum 51. ipsi exhibet summam omnium incrementorum, atque adeo hic numerus 51. alteri 1029. additus dedit summam 1080. exprimentem altitudinem montis quæsitam.

372. Cl. Maraldus atmosphæram itidem in 336. partes æquipon-

derantes distinguit perinde ac Mariottus, & harum partium altitudines in progressione arithmetica crescere fingit, agnoscens tamen extensiones aëris non esse præcise in reciproca ratione ponderum incumbentium, ut Mariotti hypothesis requirit, deinde etiam à Mariotti numeris discessit, statuens primam eamque horizonti contiguam atmosphæræ partem gravitati unius lineæ Mercurii convenientem esse 61. pedum, & post hanc sequentes crescere juxta numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita ut partes secunda, tertia, quarta, &c. futuræ sint 62, 63, 64, &c. pedum. Hanc progressionem omnibus observationibus barometro factis super diversis Galliæ montibus, satis prope quadrare se deprehendisse indicat laudatus vir, cum protrahendæ inde ab Observatorio Regio per Meridionalem Galliæ partem Meridianæ Cel. Cassino opus dirigenti operam suam juxta alios commodaret, atque adeo intra limites semissis Milliaris Gallici, quibus observationes suas terminari dicit, hujus progressionis beneficio locorum altitudines satis accurate haberi posse errore vix unam alteramque hexapodam excedente; ac juxta eandem progressionem altitudo atmosphæræ foret 12796. hexapodarum, seu, quod idem fere est, 6. Milliarium Gallicorum cum semisse. Hæc Cel. Maraldi progressio calculo aptissima est, sed cum observatione Cassiniana, ex Mariotto supra §. 370. relata, non satis convenire videtur, nam altitudo ex omnibus 16½ divisionibus seu partibus composita invenietur esse 1122. pedum; & tamen altitudo montis inventa erat 1070, excessus est 52. pedum, seu plus quam 8. hexapodarum.

Ut autem certò constet, quantum hypothesis partium atmosphæræ uni Mercurii lineæ æquiponderantium, & juxta arithmeticam progressionem sursum crescentium, conspiret aut discrepet à Mariotti & Boylii Hypothesi, quâ densitates atmosphæræ in diversis locis sunt, ut vires comprimentes seu elasticitates aëris; quærenda prius est curva, cujus axis in partes arithmeticam progressionem constituentes divisus sit, ordinatæ verò per singulas axis divisiones ductæ efficiant progressionem itidem arithmeticam, sed descendentem; dehinc inventa hac curva, definienda est scala elasticitatis aëris, & ex hac elicienda scala densitatum atmosphæræ. Huc faciunt sequentia Problemata.

PROPOSITIO XXVII. Problema.

Fig. 89. 373. *Si axis, seu linea* AH, *divisus sit in partes* AC, C1C, 1C2C, &c. *arithme-*

arithmeticam progreſſionem aſcendentem conſtituentes, & per ſingularum terminos transeant ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, *&c. juxta progreſſionem arithmeticam decreſcentes, definire curvam* BD1D2D *per ſingularum ordinatarum terminos* B, D, 1D, 2D, *transeuntem.*

Per puncta D agantur parallelæ ipſi AH, & in prima DE producta ſumatur EF = DE, ac per F ducta FP parallela AB, in linea 1E1O à linea FP deorſum ponatur 1O1F æqualis exceſſui, quo ſecunda diviſio C1C primam AC, vel tertia ſecundam, ſeu quarta tertiam, atque ita deinceps, excedunt, ducaturque per puncta F & 1F, recta FG; eruntque AC = DE = EF, item C1C = 1E1F, & 1C2C = 2E2F, atque ſic porrò. Adeoque A2C = 2E2F + 1E1F + EF. Verùm 2E2F = rec-lo 2E2F. 2E1E : 2E1E, & 1E1F = rec-lo 1E1F. 1EE : 1EE; ergo quia 2E1E = 1EE = EB ex hypotheſi quandoquidem AB, CD, 1C1D, 2C2D (ſecundùm hypotheſin) ſunt in progreſſione arithmetica, erit 2E2F + 1E1F = (rec-lum K2E + rec-lo I1E) : BE; hæc vero rectangula ſimul ſumpta quotcunque eorum fuerint, æquantur trapezio EF2F2E ſimul cum triangulis IF1F, K1F2F, quæ ſunt extra trapezium EF2F2E, & dicta triangula ſimul æquantur rec-lo ſub dimidia 2O2F & 2E1E vel BE: ergo 2E2F + 1E1F = (EF2F2E + ½. 2O2F. BE) : BE = EF2F2E : BE, + ½. 2O2F; ac proinde A2C = EF2F2E : BE, + ½. 2O2F + EF = 2E2F + 1E1F + EF; eodem argumento probatur eſſe indefinite *Ac* vel *ed* = EF*fe* : BE, + ½. *pf* + EF vel *ep*, vel biſecta *pf* in *q* ductaque per *q* rectâ F*q*Q, erit *ed* = EF*fe* : BE, + *pq* + *ep* = EF*fe* : BE, + *eq*; adeoque *ed*. BE = EF*fe* + *eq*. BE; atqui trapezium EF*fe* = rec-lo *eq*. *e*E; ergo *ed*. BE = *eq*. E*e* + *eq*. BE = B*e*. *eq*; hinc curvæ quæſitæ hæc eſt proprietas, ut *de* vel *c*A ubique ſit ad homologam *eq* ut B*e* ad BE, quæ proprietas parabolæ communi competit.

II. Nam ſi quædam T fiat ad EB, ſicut EM (quæ reſultat à concurſu M rectæ QF productæ cum recta AB itidem protenſa) ad EF; hinc erit etiam *eq* : *e*M (= EF : EM) = BE : T, curvæ vero modo recenſitæ proprietas exhibet *de* : *eq* = B*e* : BE, ergo ex æquo *de* : *e*M = B*e* : T, & *de*. T = M*e*. B*e* = N*e*² − NB², biſecta ſcilicet BM in N; hinc *de*. T + NB² = N*e*² = *rd*²; & ſi V ſit tertia proportionalis ad T & BN erit T. V = BN², atque adeò *de*. T + T. V (= *de*. T + NB²) = *rd*², idcirco, ſi in *r*N perpendiculari ad AB producta verſus S, ſumatur NR = V, erit T. R*r* = *rd*², atque adeò curva quæſita RBD1D eſt parabola, cujus parameter eſt T, & vertex in R; in quâ T eſt quarta proportionalis ad datas EF, EM

&

& EB, & V tertia proportionalis ad T & datam BN. Propterea parabola eſt ſpecie & magnitudine data, ejusque portio BD2DH quæſito ſatisfacit. Quod erat inveniendum.

Corollarium I.

374. Quoniam partes AC, C1C, 1C2C, &c. ſunt arithmetice proportionales, adeò ut earum differentiæ æquales ſint, ordinatæque AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. etiam juxta proportionem arithmeticam, id eſt, per æqualia decrementa imminuuntur, partes illæ AC, C1C, 1C2C, &c. repræſentabunt atmoſphæræ diviſiones, quarum unaquæque æquivalet ponderi columnulæ liquoris homogenei altitudinis BE, vel E1E, &c. in methodo Mariotti & Cl. Maraldi, ipſæque BE, E1E, &c. denotabunt æqualia decrementa liquoris in barometro adhibiti, ac denique ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. exponent quantitates Mercurii ſeu liquoris in barometro in locis, A, C, 1C, 2C, &c. verſante.

Corollarium II.

375. Quoniam *in hypotheſi Mariotti denſitates aëris ponderibus incumbentibus proportionales ſunt, & quantitates argenti vivi in barometro æquivalent ponderibus* aëri compreſſo in diverſis locis incumbentibus, & quoniam (§. 374.) ordinatæ *cd* exponunt quantitates argenti vivi in locis *c*, ſequitur (§. 355.) portionem parabolæ B2DH eſſe ſcalam denſitatum atmoſphæræ in ſuppoſitionibus Mariotti; & tamen ſupra (§. 366.) eſt oſtenſum, hanc ſcalam denſitatum in hypotheſi Mariottiana logarithmicam eſſe; ex quo liquet progreſſionem arithmeticam, quam Vir alioqui perſpicaciſſimus loco progreſſionis geometricæ facilioris calculi ergo aſſumſit, atque à geometrica parum abludere exiſtimavit, curvam ſuppeditare toto cœlo diverſam à log-mica, quam progreſſio geometrica in hypotheſi ejus, ipſo etiam conſentiente, adhibenda produxiſſet. Quoniam igitur, ſtantibus progreſſionibus à Celeb. viris Mariotto & Maraldo adhibitis, denſitates aëris viribus comprimentibus aut elaſticitatibus ejus nequeunt proportionales eſſe, disquirendum ſupereſt, juxta quam denſitatum progreſſionem elaſticitates creſcant, vel, quod idem eſt, quæri debet ſcala elaſticitatum atmoſphæræ, quæ ubi data fuerit, ſcala denſitatum ultrò determinabitur.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [236] - 208
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

376. *Si in arabola* BDH *propositione præcedenti reperta* AC, A1C, A2C, &c. *designent altitudines locorum, & ordinatæ* CD, 1C1D, 2C2D *repræsentent quantitatem Mercurii barometro versante in locis* C, 1C, 2C, &c. *invenire scalas elasticitatis aëris & densitatum.* Fig. 89.

In figura 90. sint linea recta *am* = AM, *an* = AN, *ab* = AB, & *ad* = A*e*, eritque *db* = *e*B, & ipsæ *bn*, *mn* respectivis BN & MN æquabuntur. Per punctum *b* agatur rectæ *ab* normalis *ib*, quæ sit ad *mb* ut data recta *A*, quæ gravitatem uniformem exponit ad T parametrum parabolæ B2DH, linea recta *nih* jungens puncta *n* & *i* erit reciproca scalæ elasticitatis, idcirco producendo *ib* in β & per hoc punctum ducendo hyperbolam *l*δβ intra asymptotas *an* & *nk*, hyperbola ista erit scala elasticitatis aëris in suppositionibus Mariotti atque Maraldi, & applicando trapezium *bigd* ad datam rectam A, resultabit altitudo *ed*, in cujus termino *d* densitas aëris atmosphæræ est sicut *a*δ.

Demonstr. I. Ducatur linea *mix* per puncta *m* & *i*, & hæc singulas *hu*, *gz*, &c. ipsi *ib* parallelas bifariam dividet in *x*, *y*, &c. si scilicet recta *iu* alteri *am* æquidistans ducta fuerit; hinc quælibet *yd* erit media arithmetica inter *gd* & *zd*, vel inter *gd* & *ib*, atque adeò rec-lum *bdy* æquabitur ubique trapezio homologo *bdgi*: quibus positis triangula similia *mdy* & *mbi* suppeditant analogiam *md* : *dy* (= *mb* : *bi*, constr.) = T : A, atque adeo *md*. *bd* : *dy*. *bd* = *de*. T : *de*. A. atqui cum *md* & *bd* in fig. 90. æquales sint homologis Me & Be in fig. 89. & (§. 373, n. 11.) rec-lum Me. Be = T. *ed*, erit etiam *md*. *bd* = *de*. T; ergo æquabitur quoque rec-lum *dy*. *bd*, id est, ut paulo ante, dictum trapezium *bdgi*, cui rec-lum *bdy* æquale est, rec-lo A. *de* ex gravitate uniformi *A* in altitudinem alicujus loci *de*, & cum hoc ita sit de reliquis, (§. 359.) linea *nih*, vel ejus portio *ih*, erit reciproca scalæ elasticitatis aëris.

II. Propter hyperbolam *l*δβ habetur *b*β : *d*δ = *nd* : *nb* = *gd* : *ib*, atque adeo singula rec-la, *gd*δ, *ib*β, *hal*, &c. sunt æqualia, ac proinde (§. 357.) curva *l*δβ est scala elasticitatis, cum lineam *ih* ejus reciprocam esse ostensum sit.

III. Quia (num. 1. hujus) *ibdg* = A. *de*, erit *de* = *ibdg* : A = *bd*. *yd* : A, eritque adeò altitudo loci *d*, in quo densitas est *d*δ, quarta proportionalis ad A, *bd* seu Be, & *yd*. eaque semper haberi potest, ac

proinde ſcala denſitatis atmoſphæræ in hac hypotheſi ſemper per puncta deſcribi geometrice poterit. Quæ omnia erant invenienda.

COROLLARIUM I.

377. Patet iterum multum abeſſe, ut vires comprimentes aëris ejusve elaſticitates denſitatibus proportionales ſint, ſtante progreſſione arithmetica altitudinum AC, C1C, 1C2C æquivalentium æqualibus cylindris Mercurii aliusve liquoris homogenei, quorum altitudines exponuntur per BE, E1E, 1E2E, &c.

COROLLARIUM II.

378. Denſitas aëris ad horizontem erit ad denſitatem ejus in extremitate atmoſphæræ ſicut $b\beta$ ad al, vel ſicut an ad bn, hoc eſt in altera figura (89.) ſicut AN ad BN vel MN.

COROLLARIUM III.

379. Hinc ſi dicantur AC vel AP aut 1E1O, a; exceſſus ipſius 1E1F ſupra EF, hoc eſt 1O1F, e; tum $AB=b$, & $BE=E1E=l$, invenietur $BN=NM=2al-el:2e$, & $AN=b,+(2al-el):2e$, $=(2be+2al-el):2e$; eritque proinde AN ad BN, hoc eſt, denſitas atmoſphæræ in horizonte ad denſitatem ejusdem in confinio atmoſphæræ totius ejusve termino, ut $2be+2al-el$ ad $2al-el$. Igitur ſi in hac ratione generali cum Cel. Maraldo loco a, e, b & l ponatur 61, 1, 336 & 1, fiet AN ad BN ut 793 ad 121. Sin verò cum Mariotto ſint $a=63$ ped., $e=\frac{1}{168}$, $b=28$ poll.$=336$ lineis & $l=1$ lin. erit $2be+2al-el$ ad $2al-el$, ut 1007 ad 335 ſeu quam proxime in ratione tripla.

SCHOLION.

380. Liquet igitur, in ſuppoſitionibus D. Maraldi, aërem prope horizontem non ſeptuplo denſiorem eſſe aëre in termino atmoſphæræ, nec Mariotti ſuppoſitiones eundem quadruplo denſiorem facere ad horizontem, quam ſit in ſummitate atmoſphæræ, & tamen omni illic elaſtica virtute deſtitui oportere; quandoquidem nihil ipſi incumbit, quod ejus expanſionem, ſi quam haberet, impedire valeat; quod procul omni dubio paradoxum eſt. Nam ſi experimentis

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [238] - 210
PUBLIC DOMAIN

mentis Academiæ Florentinæ *Del Cimento*, Roberti Boylii, aliorumque conſtat, aërem vi elaterii 60^es, 152^es imo & millies rariorem fieri poſſe, quam in ſtatu naturali, quî fit, ut in ſuppoſitionibus Maraldi non ſepties, in Mariotti verò non quidem quater rarior in ſummitate atmoſphæræ quam in ſtatu naturali, omni vi elaſtica deſtituatur? Verum quidem eſt, Clariſſ. Maraldum non ultra extenſionem ſemiſſis Milliaris Gallici progreſſionis ſuæ periculum feciſſe, nec adeò ulterius eam extendi debere, expreſſe monuiſſe.

PROPOSITIO XXIX. Problema.

381. *Si ſcala elaſticitatis aëris* A1DD *fuerit hyperbola communis inter aſymptotas* FPQ *angulum rectum continentes, atque ſingula rectangula* EOD, 1E1O1D *dato rectangulo* PFA *æqualia fuerint, quæritur reciproca linea* E1E *ſcalæ elaſticitatum, & ſcala denſitatum atmoſphæræ* B1B *in ſuppoſitione gravitatis uniformis ſeu conſtantis, cujus ſcala ſit* C1C *axi* A1A *parallela.* Fig. 91.

In recta indefinita AM ſumatur AI æqualis datæ AF, ductaque per punctum I recta IT parallela AO, intra lineas MI & IT tanquam aſymptotas deſcripta intelligatur hyperbola E1E, ita ut quodlibet in ea rec-lum ILE æquetur quadrato datæ AI; eritque hæc hyperbola E1E reciproca ſcalæ elaſticitatis A1DD; adeò ut facto rec-lo AC1C æquali quadrilineo OE1E1O, denſitas aëris in loco 1A futura ſit per §. 359, 1O1D vel 1A1B.

Demonſtr. Quia (ſecundùm hypotheſin) EO. OD = FP. FA, erit EO : FA ſeu LO = FP : OD ſeu FG, ergo convertendo EO : EL = FP : GP (id eſt propter hyperbolam A1DD) = GD ſeu FO : FA, ac dividendo LO : EL = AO vel IL : AF ſeu AI vel LO : ergo rec-la extremorum & mediorum æquabuntur, id eſt $LO^2 = AI^2 = IL.LE$, atque adeò punctum E eſt in hyperbola E1E inter aſymptotas MI & IT; ac propterea reciproca ſcalæ elaſticitatis in præſenti hypotheſi eſt hyperbola communis. Hinc, ſi rectangulum quoddam A1C cuilibet in hac hyperbola quadrilineo O1O1EE æquale factum, atque linea 1C1A protenſa ad alteram axis partem 1A1B æqualis facta fuerit ordinatæ 1O1D, punctum 1B (§. 359.) erit in ſcala denſitatis atmoſphæræ B1B. Quæ erant demonſtranda.

Scholion.

382. Hoc problema est tantum applicatio theorematis nostri generalis, supra (§. 359.) exhibiti, hypothesi particulari, quam Propositione 23. hujus excussimus; quoniam in superioribus jam vidimus, densitates aëris viribus comprimentibus non semper proportionales existere; sed præsentem hypothesin cum observationibus propius conspirare. Cæterum liquet etiam, quod, quia scalæ densitatum reciproca E1E etiam est hyperbola, perinde ac in hypothesi densitatum viribus comprimentibus proportionalium, hoc solo cum discrimine, quod in hac hypothesi ejus asymptota una sit ipsa AO, in præsenti verò recta IT, modo nominatæ AO æquidistans, linea seu scala densitatum B1B ope log-micæ cujusdam per puncta describi possit. Nam ad asymptotam AM ducta per punctum L logarithmica L1SS, cujus subtangens sit æqualis AI, perinde ac AC, quæ gravitatem uniformem exponit, fiat recta LR angulum semirectum ILR continens cum IL, atque ipsam 1L1D secans in 1R; si C1C constanter æqualis fiat ipsi 1R1S interceptæ inter log-micam L1SS & rectam L1RR, atque per punctum 1C ducta indefinita 1C1B in ea ultra axem abscindatur, ut prius 1A1B æqualis ordinatæ 1O1D in scala densitatum atmosphæræ B1B. Hisce diu nonnihil institimus, quia cognitio densitatum atmosphæræ utilitate sua non caret; nam præterquam quod accuratissimus haberetur modus mensurandarum altitudinum montium aliorumque in superficie terræ altiorum objectorum ope barometrorum, cognita lege, juxta quam densitates atmosphæræ sursum decrescunt, accuratius innotesceret linea in quam radii solares siderumve atmosphæram trajicientes incurvantur, quod utique utilitatem haberet eximiam in astronomicis. Cæterum difficillimum, si non impossibile, est à priori noscere quamnam densitates atmosphæræ cum ponderibus incumbentibus collatæ, legem sequi debeant propter mille anomolias, quæ in atmosphæra contingunt, idcirco res ex observationibus bene multis & diligenter institutis derivari debet modo sequenti.

383. In recta quadam indefinita abscindantur lineæ eandem inter se proportionem habentes, quam altitudines locorum diligentissime observatæ, & per singula divisionum puncta agantur perpendiculares eandem inter se proportionem habentes, quam quantitates Mercurii in barometro in prædictis locis versante, & sic tot habebuntur

tur puncta, quot sunt observatæ locorum altitudines, per quæ puncta proinde duci potest linea quædam regularis eo prorsus modo, quem Celeb. Newtonus Lemm. V. Lib. III. *Pr. Ph. Math.* absque ulla demonstratione exponit; & talis curva apta nata esset ad exprimendam relationem, quæ est inter altitudines locorum & argenti vivi quantitatem barometro successive in his locis versante. Ex hac curva elici potest linea reciproca scalæ elasticitatum, & ex figura hujus scalæ reciproca deduci potest ipsa scala elasticæ virtutis in aëre; dehinc, ope theorematis nostri §. 359. ipsa etiam scala densitatum atmosphæræ per puncta describi potest. Verum multis observationibus opus est, quia, quo plura sunt puncta positione data, eo accuratius definietur ipsa curva, de qua ante dixi; quomodo verò calculus subducendus sit pro hac curva aliàs commodius aliquando dicetur, quando demonstrationem præfati V. Lemmatis Newtoniani demonstratum dabimus cum aliis nonnullis affinibus materiis.

SECTIO II.

De Motibus Aquarum.

IN Sectione præcedenti pressiones tantum fluidorum ex gravitate, quas tum in subjecta plana tum etiam in vasorum latera exercent, contemplati sumus. In hac vero secunda Sectione, quæ ad motus liquorum per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium pertinent, breviter excutiemus. Hoc argumentum utilitate suâ celeberrimis Geometris Castello, Baliano, Torricellio, Borellio, Mariotto aliisque se probavit, atque ab ipsis diligenter nec sine fructu examinatum est quidem, non verò exhaustum, quandoquidem Cel. Gulielminus ipsorum repertis nonnulla adjecit; ipsorumque, maxime verò Torricellii, doctrinam motui fluminum ingeniose applicuit. Nemo tamen hanc materiam adeò generaliter pertractavit ac Celeb. Varignonius, qui præclara atque universalia exhibuit theoremata, quibusvis liquoribus applicabilia, & quæ hac in re assequutus est, velut Iliada nuci, simplicibus formulis inclusit.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [241] - 213
PUBLIC DOMAIN

CAPUT IX.

De motibus Liquorum per minora foramina erumpentium.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA.

Fig. 92. 384. *Quantitates, ſeu filamenta liquorum, æquali tempore per quælibet orificia æquabili motu effluentia, ſunt in compoſita ratione ex rationibus orificiorum & velocitatum, quibus liquores, quisque per ſuum foramen, erumpunt.*

Sint DEF, GH vaſa quælibet foraminibus quibuslibet K & I pertuſa, exeantque dato quodam tempusculo motu uniformi filamentum KN ex vaſe DEF & filamentum IO ex vaſe GH, ita tamen, ut ſuperne tantum liquoris reſtituatur, quantum effluit, atque adeo in utroque vaſe liquor in eadem altitudine conſtanter conſervetur; & hisce poſitis ultro liquet longitudines filamentorum KN & IO utpote æquali tempore uniformi motu deſcriptas, velocitatibus aquæ ex foraminibus K & I erumpentis proportionari, vel potius has velocitates repræſentare. Ex Geometriæ vero elementis conſtat, ipſa filamenta eſſe in compoſita ratione foraminum K & I tanquam baſium prismatum, & longitudinum KN & IO, id eſt, velocitatum, quibus hæ longitudines deſcribuntur, quare conſtat Propoſitum.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA.

Fig. 92. 385. *Quantitates motus, ſeu impetus liquorum quorumcunque & per quævis foramina erumpentium, ſunt in ratione compoſita ex rationibus duplicata celeritatum, ſimpla denſitatum ſeu gravitatum ſpecificarum liquorum, & denique ſimpla foraminum.*

Ex vaſis ABC & DEF erumpant eodem vel æquali tempore, per foramina B & K filamenta BM & KN, quorum longitudines celeritates exponent, quibus hæc filamenta e vaſis egrediuntur. Gravitas ſpecifica, ſeu denſitas liquoris in vaſe ABC exponatur per magnitudinem R, denſitasque liquoris DEF per S. In KN ſumatur tertia proportionalis ad BM & KN & ſit ea KV, & probari debet, quantitatem motus filamenti BM ſe habere ad quantitatem motus filamenti KN ut B. BM^2. R ad K. KN^2. S, aut propter rectas BM, KN, KV continue proportionales, ſicut B. BM. R ad K. KV. S.

De-

Demonstr. Quoniam per quantitatem motus alicujus corporis intelligitur factum ex massa hujus corporis in celeritatem, qua id fertur, erunt quantitates motus filamentorum BM & KN in composita ratione ex rationibus massæ ad massam, & celeritatis unius ad celeritatem alterius, sunt verò massæ BM & KN inter se (§. 18.) ut volumina BM & KN, id est, ut facta B. BM & K. KN ducta in densitates liquorum, seu (§. 33.) in gravitatem eorundem specificam R & S; velocitates verò sunt ut longitudines BM & KN, est ergo quantitas motus filamenti BM, quam simpliciter ejus motum deinceps dicemus, ad motum filamenti KN, ut R. B. BM^2 ad S. K. KN^2, hoc est, sicut R. B. BM ad S. K. KV. Quod erat demonstrandum.

Literæ B & K denotant orificia Vasis ABC & DEF quomodocunque insculpta.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

386. *Velocitates liquorum quorumlibet sunt in subduplicata ratione altitudinis liquorum super orificiis, per quæ erumpunt, si liquorum superficies eandem semper, durante effluxu, positionem servarint.* Fig. 92.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, sint BQ & KD liquorum altitudines, & sumatur Kβ media proportionalis inter QB & DK, probari debet fore $BM : KN = BQ : K\beta = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$.

Demonstr. Motus sunt ut eorundem causæ genitrices, & hæ causæ sunt pressiones liquorum foraminibus incumbentium, atqui gravitatio liquoris QB (§. 255.) æquivalet ponderi columnæ BQ. B, & (§. 33.) ejus pondus est ut factum ex volumine in gravitatem specificam R, adeoque B. BQ. R est ut gravitatio filamenti QB, & K. KD. S propter eandem rationem erit ut gravitatio filamenti DK, adeoque *gravitatio QB: gravit.* DK = B. BQ. R : K. KD. S, unde, cum gravitatio QB sit ad gravitationem seu pressionem DK, ut motus BM ad motum KN, erit B. BQ. R : K. KD. S = motus BM : mot. KN (§. 385.) = B. BM. R : K. KV. S, adeoque BQ : KD = BM : KV, atqui est ratio BQ ad KD duplicata rationis BQ ad Kβ, & BM : KV duplicata rationis BM : KN, ergo $BQ^2 : K\beta^2 = BM^2 : KN^2$, & $BQ : K\beta = BM : KN = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio generaliter obtinet, ubicunque foramina B, K vasis insculpta fuerint in fundo vel ad latera vasis, abstrahendo tamen à frictionibus, quas liquores in foraminibus exeundo subeunt, aliisque motus impedimentis, ut resistentiâ aëris, &c.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [243] - 215
PUBLIC DOMAIN

Corollarium.

387. Quoniam quantitates liquorum simul effluentes BM & KN (§. 384.) sunt in composita ratione ex rationibus foraminum B & K & velocitatum, hæ quantitates erunt in composita ratione ex ratione foraminum, & supduclicata ratione altitudinis liquorum in vasis, abstrahendo à densitatibus liquorum exeuntium; nam quantitates absolutæ filamentorum BM & KN seu massæ eorundem, sunt in composita ratione ex subduplicata altitudinum BQ & KD, ex simpla densitatum R & S, & denique ex simpla itidem foraminum B, K.

Scholion.

388. Celeberrimus Varignon in Comment. Acad. Reg. Scient. 1703, 14 Nov. velocitates liquorum erumpentium in circumstantiis hujus propositionis demonstrat esse, ut radices ex factis altitudinum in specificas gravitates liquorum, divisis per densitates homologas, quod cum præsenti proportione probe conspirat, cum (§. 33.) densitates gravitatibus specificis liquorum directe proportionales sint.

Propositio XXXIII. Problema.

389. *Definire quantum liquoris effluere debeat ex dato vase per datum foramen tempore dato, si liquor vasis constanter in eadem altitudine data conservetur.*

Sint data altitudo liquoris a, foramen vasis f, tempus datum t, m spatium quod grave accelerato motu, alio dato tempore d, perlabitur. Jam, quia tempora descensuum gravium (§. 151.) sunt in subduplicata ratione spatiorum confectorum, erit $\sqrt{m} : \sqrt{a} = d : n$, ubi n denotat tempus, quo grave altitudinem a accelerato motu cadendo absolveret, adeoque $n = d\sqrt{a} : \sqrt{m}$. Jam quia liquor ea velocitate effluit, quam grave casu ex altitudine a acquirere potest, &, hac velocitate semel acquisita, duplum spatium describit æquabili motu eo tempore n, quo accelerato motu simplex a percurrebatur; filamentum liquoris hoc tempore n, æquabiliter effluens celeritate æquali, quam grave acquirit ex casu accelerato ex altitudine a erit $2af$. Unde si tempore n effluit filamentum liquoris $2af$, tempore t

effluet

effluet filamentum $2aft:n$ vel substituendo $dV a:Vm$ pro n, quantitas $2aftVm:dVa = 2ftV(am):d$. Quod erat inveniendum.

Scholion.

390. Dicatur quantitas liquoris dato tempore t per foramen f effluens x, sitque foramen circulus diametri e; eritque $f = \pi ee:4\delta$, qui valor substitutus in $x = 2ftV(am):d$ exhibet $x = \pi fteeV(am):2\delta d$, ponendo $\delta:\pi$ pro ratione diametri ad circumferentiam circuli.

Exempl. Quæritur quantum aquæ effluere debeat ex vase cylindrico indesinenter pleno 15 ped. 5 poll. 7 lin. alto, per foramen circulare in fundo pollicis unius in diametro, tempore 6 secundorum. Erunt ergo $a = 15$ ped. 5 poll. 7 lin. $t = 6''$ $e = 1$ poll. $= 12$. lin. $\delta = 113$ & $\pi = 355$. Jam, cum Hugenius observarit grave aliquod altitudinem 15 ped. & 1 poll. tempore minuti secundi perlabi, d significare potest $1''$, & m, 15 ped. 1 poll. seu 2172 lin. Loco literarum adhibendo numeros hactenus indicatos & operationem logarithmis perficiendo invenietur log-mus x, seu quantitatis $\pi fteeV(am):2\delta d = 6.4811958$ log-us numeri quæsiti in lineis cubicis; idcirco si ex hoc log-mo log-us ipsius 12 triplicatus, seu log-us cubi ex 12, auferetur, remanebit $log.x = 3.2436522$ log-us numeri quæsiti in pollicibus cubicis expressi, cui log-mo convenit proxime numerus 1752 ergo tot pollicum cubicorum erit aqua effluens ex vase 6 secundis temporis, vel unius pedis cubici, & 24 pollicum.

391. Vicissim ex aquæ quantitate tempore dato effluente & observatione data elicietur altitudo vasis, ad id requisita, ut quocunque alio tempore determinata quædam aquæ copia effluat, nam ex formula superiore $x = \pi feetV(am:)2\delta d$ elicietur $a = 4\delta\delta ddxx:\pi\pi ffe^4ttm$, in qua excepta a omnes reliquæ sunt quantitates datæ.

Propositio XXXIV. Theorema.

392. *Si ex vase quocunque liquore pleno* BAD *liquor per foramen* F *effluat, & circa lineam* AC *liquoris superficiei* BD *normalem descripta sit parabola* EGS, *verticem suum habens in puncto* E *tantum distanti à liquoris superficie quantum foramen vasis* F, *& curvæ* AID *ac* OMN *ejus indolis, ut singula rectangula sub data recta* V *& ordinata* HI *curvæ* AID, *tum etiam sub ordinatis* GH *parabolæ &* HM

curvæ OMN *æqualia ubique ſint ſectioni vaſis reſpectivæ* KL, *dico fore* I°. *ut tempus deſcenſus ſuperficiei* BD *in* XX *per ſpatium* CY *ad tempus deſcenſus in* KL *per ſpatium* CH *ſit, ut area* COZY *ad aream* COMH. II°. *Ut velocitas ſuperficiei* KL *ſit in compoſita ratione ex directa ordinatæ parabolæ* GH, *& reciproca ordinatæ* HI *curvæ* AID, *id eſt, ut* GH : HI.

Fig. 93.

Demonſtr. Quia in parabola eſt PC : GH = √EC : √EH (§. 386.) = velocitas liquoris effluentis ſub altitudine EC ad celeritatem effluentis ſub altitudine HE; ideò, ſi PC exponat celeritatem illius liquoris, qui habet altitudinem EC ſuper foramen F, ordinata GH exponet celeritatem, qua filamentum liquoris indefinite parvum FH tempusculo itidem indefinite exiguo erumpit, exiſtente liquoris altitudine ſuper foramen F linea EH. Sed eo tempusculo, quo effluit filamentum FT, ſuperficies KL deſcendens ſpatiolo infiniteſimo Hh ſe demittet in kL, ita quidem ut duo prismata ſub ſectione KL & altitudine Hh, & FT neceſſario æqualia ſint, unde quia (conſtr.) ſectio KL = GH. HM, erit GH. HM. Hh = F. FT, vel HM. Hh : F = FT : GH. Atqui FT, ſeu longitudo filamenti, applicata ad celeritatem, qua id effluit æquabili motu, exponit tempus effluxus hujus filamenti, ſeu ſynchroni deſcenſus ſuperficiei KL ex hoc ſitu in kl per ſpatiolum Hh, ergo etiam HM. Hh : F *exponit hoc idem tempusculum deſcenſus, & omnia rectangula* HM. Hh, *quæ in area* CHMO *continentur: ſeu hæç ipſa area*, diviſa per F, exponet tempus deſcenſus ſuperficiei KL ex BD in KL per ſpatium CH; eodemque argumento colligitur tempus deſcenſus BD in XX per ſpatium CY exponi area CYZO, diviſa per F; ergo tempus per CH : tCY = CHMO : CYZO. Quod eſt primum.

II°. Quia velocitas ſuperficiei KL eſt ad velocitatem GH filamenti FT, ut Hh ad FT, *hoc eſt, ob æqualitatem prismatis* ex KL in Hh & prismatis ex F in FT, ſicut F ad planum KL, quod (conſtr.) æquatur rectangulo V. HI, erit velocitas ſuperficiei KL ad GH = F : V. HI, atque adeo cel. ſuperficiei KL = F. GH : V. HI, id eſt, omiſſa ratione conſtanti F : V, quæ proportiones indeterminatarum magnitudinum non alterat, velocitas ſuperficiei KL eſt ut GH : HI. Quod erat ſecundum.

Corollarium I.

393. Si itaque area tota COMNNE dividatur in quadrilinea æqua-

æqualia CYZO, YHMZ, HMNNE, aut quamcunque aliam inter se rationem habentia, tempora descensus superficiei liquoris BD per spatia CY, YH, HE aut æqualia, vel aliam inter se datam rationem, quam habent homologæ areæ. Atque hinc liquet, quodlibet vas adhiberi posse loco clepsydræ, dummodo figura ECOMN figuræ vasis conveniens in suas partes æquales divisa fuerit per lineas superficiei horizontali aquæ BD parallelas, atque divisionum puncta in latere vasis rite notata fuerint. Sed hisce diutius non immorabor, quandoquidem Celeb. Varignon hoc argumentum pene exhausisse videtur in Comment. Reg. Scient. Paris. Academ. 1699, 29 Apr.

Corollarium II.

394. Pariter datis curvis EGP, OMN dabitur tertia AID, atque adeo curva BKALD genitrix vasis, idque ex sectione KL = V. HI = GH. HM. Adeoque, si vas sit solidum rotundum ex conversione figuræ BAD circa axem CA, vel etiam si singulæ vasis sectiones BD, KL, &c. figuræ similes & similiter positæ fuerint, ordinatæ HI erunt, ut quadrata ordinatarum homologarum KL.

Corollarium III.

395. Idcirco, si quæratur vas *BAD* tale, ut descensus CY superficiei liquoris BD sint ut tempora descensus, erit curva OMN hoc casu linea recta axi AR parallela, unde cum planum KL, seu circulus ex diametro KL æquatur rec-lo GHM, erit quadratum ex KL ut rec-lum ex HG in datam HM, vel simpliciter ut GH, vel quadrato-quadratum rectæ KL ut quadratum HG, unde cum hoc quadratum sit ut abscissa HE, erit quadrato-quadratum ut HE, atque adeo curva quæsita *BAD* erit parabola biquadratica. Ut ab aliis sæpius jam demonstratum est.

In hisce areæ CYZO, CHMO tantum proportionem temporum indicant, quibus superficies liquoris BD spatia CY, CH descendendo describit. Sed si tempus absolutum sit definiendum, quo quilibet descensus contingit, consuli debet sequens

Propositio XXXV. Theorema.

396. *Si parabolæ* EGS *parameter æqualis fuerit altitudini* RE, *quam grave, casum à quiete in* R *incipiens, motu naturaliter accelerato perlabi*

poteſt uno minuto ſecundo temporis, poſitisque omnibus, quæ in Propoſitione præcedenti, numerus minutorum ſecundorum, quibus ſuperficies BD *ſpatium* CH *cadendo conficit, æquabitur numero, qui oritur ex diviſione areæ* CHMO *per duplum foraminis* F.

Si liquor conſtanter maneret in altitudine ER, ejus prima gutta, prope foramen F, ea celeritate erumperet, qua motum in altum convertens tempore eodem minuti ſecundi per altitudinem ER aſcendere poteſt, quo cadendo eandem celeritatem acquirit, atque gutta erumpens motum ſuum uniformem proſequens hoc tempore deſcribet ſpatium duplum ipſius ER, unde cum effluentis liquoris particulæ contiguæ ſint, tempore unius minuti ſecundi effluet per foramen F filamentum 2F.RE, & ſi liquor maneret in altitudine HE per idem foramen effluet tempore, quod ſe habet ad unum minutum ſecundum in ſubduplicata ratione HE ad RE, id eſt, in ratione GH ad SR, filamentum 2F.HE; unde ſi maſſa liquoris 2F.HE effluit tempore (GH:SR) quanto tempore effluet maſſa KL.H*h* (conſtr.) = GH.HM.H*h*? Id per regulam auream invenietur fieri tempore $GH^2.HM.Hh : 2F.HE.SR$; jam quia RS vel RE eſt parameter parabolæ, atque adeò GH^2 æquale rec-lo HE.SR, erit t H*h* = HM.H*h* : 2F. ergo tCH = areæ CHMO : 2F, id eſt numerus ſecundorum temporis, quo liquoris quantitas BKLD per foramen F effluit, præſcindendo à *frictionibus aliisque motus impedimentis*, reperietur, applicando aream homologam CHMO ad duplum foraminis F. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Aliter & brevius.

397. Supra (§. 392. n. 1.) incidimus in hanc analogiam HM.H*h* : F = FT : GH, unde duplicatis conſequentibus provenit HM.H*h* : 2F = FT : 2GH. Atqui FT : 2GH indicat particulam minuti ſecundi temporis, qua filamentum FT vel ei æqualis maſſa KL.H*h* vel K*kl*L effluit. Nam 2RE vel 2RS exponere debet velocitatem acquiſitam tempore unius minuti ſecundi ex lapſu gravis per altitudinem RE, quia hæc altitudo duplicata 2RE diviſa per celeritatem 2RE, dat I, ſeu unum minutum ſecundum, & quia velocitates & deſcenſu per RE & HE acquiſitæ & hisce æquales celeritates, quibus aqua per foramen F erumpit, exiſtente ea in vaſe in altitudinibus RE & HE manentibus, ſunt in ſubduplicata ratione RE

ad

ad HE seu SR ad GH, id est, 2SR vel 2RE ad 2GH; hæ enim SR & ER æquales sunt, cum RE (secundùm hypothesin) parameter sit parabolæ, unde cum 2SR exponat celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine RE, altera 2GH exponet celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine HE, hinc filamentum FT æquabili motu effluens, applicatum ad suam celeritatem 2GH, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu tempus effluxus massæ liquidæ HklL, id est, $tH\hbar = FT : 2GH$, & cum supra inventum sit $HM.H\hbar : 2F = FT : 2GH$, erit $tH\hbar = HM.H\hbar : 2F$; atque adeò $tCH = CHMO : 2F$, ut supra. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

398. Ergo præsens propositio ex antecedenti facile elicitur parametro parabolæ EGS tantum eum valorem assignando, quem Propositio indicat, & semper continget, ut areæ CYZo, &c. applicatæ ad duplum foraminis præbituræ sint tempora minutis secundis expressa, quibus homologæ liquoris quantitates effluere debent.

PROPOSITIO XXXVI. Theorema.

399. *Si liquor ex vase amplo & constanter pleno* ADC *effluat per lumen* EGHF *plano* BDIC *horizonti utcunque obliquo insculptum, descripta circa axem* BD *parabola* BLO, *cujus parameter* P *sit ad lineam* A, *quam grave quoddam dato tempore* t *motu a quiete incipiente, sed naturaliter accelerato, perlabi potest, ut sinus anguli* ABD *inclinationis planorum* ABC, *&* BDI *ad sinum totum, hoc est, sicut* RG *ad* BG; *quantitas* Q *liquoris tempore quolibet dato* T *per lumen illud* EGHF *effluentis exponetur fruſto* EIKMLGHFE *prismatis parabolici* BDOPMNV *ducto in duplum exponentis rationis temporum, hoc est in* 2T : t. Fig. 94.

Quia manente vase liquoris pleno, per quodlibet punctum physicum G sectionis seu luminis EGHF filamentum liquoris 2RG effluere debet æquabili motu, tempore eo, quo grave quoddam altitudinem RG accelerato motu descendens conficere potest, & quia tempora descensus gravium sunt in subduplicata proportione spatiorum, juxta ea. quæ articulo 151. ostensa sunt, erit tempus descensus gravis in altitudine A, quod tempus nominatum est t, ad tempus per altitudinem RG, sicut $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{RG}$; vel sicut A ad $\sqrt{(A.RG)} = \sqrt{(P.BG)}$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [249] - 221
PUBLIC DOMAIN

$=v(P.BG)$ quandoquidem $A:P=BG:RG$, vel ſicut A ad GL ob parabolam BLO, in qua eſt $GL=v(P.BG)$; adeoque tempus deſcenſus per altitudinem RG alicujus gravis reperitur eſſe $GL.t:A$. Jam, quia hoc tempore punctum G effundit filamentum liquoris $2RG$, idem punctum effundet tempore T, filamentum $2A.T.RG:GL.t=2T.GL^2:GL.t=2T.GL.t$. Similiter punctum phyſicum F effundet, eodem tempore T, filamentum $2T.FK:t$, atque ſic reſpective reliqua luminis puncta. Igitur quantitas Q liquoris per univerſum lumen $GEFH$ dato tempore T effluentis eſt factum ex omnibus GI, FK, &c. quæ in ſolido $EILMKFHGE$ continentur in $2T:t$; id eſt, factum ex hoc ſolido in $2T:t$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

400. Si planum BDI lumine EGH pertuſum, rectum fuerit horizonti, rectæ BG & RG, atque adeo P ac A æquales fient; adeo ut magnitudo ipſa, ſeu ſpatium A, quod grave tempore t accelerato motu à quiete incepto percurrere poteſt, parameter ſit parabolæ BLO.

COROLLARIUM II.

401. Dicantur porrò ſinus anguli RBG, i; ſinus totus r, parabolæ BLO parameter p, qui antea P nominabatur, ſimiliterque longitudinem A litera a inſigniat, fiantque inſuper $GE=b$, $GH=c$, $BG=z$, $BE=x$, eruntque $EI=vpx$ & $GL=vpz$, adeoque quadrilineum parabolicum $EGLI$, ſeu trilineum BLG — trilineum $BIE = \frac{2}{3}zvpz - \frac{2}{3}xvpx$ (id eſt, ſi ad contrahendam formulam pro $\frac{2}{3}zvz - \frac{2}{3}xvx$ ponatur u) $=uvp$, adeoque ſolidum $EKLGF=cuvp$, adeò ut ſit $Q=2Tcuvp:t$.

COROLLARIUM III.

402. Sed, ſi ipſæ BG, BE datæ non ſint, ſed earum tantum proportio, quæ ſit eadem cum m ad 1, ſolidum parabolicum præcedente paragrapho inventum habebitur in ſolis quantitatibus b, c, & m. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) $z:x=m:1$ erit $z=mx$ & $zvz - xvx=mxvmx-xvx=(mvm,-1)$ in xvx. Sed $z-x=mx-x=b$, ſeu $x=b:m-1$, & $xvx=bvb:m-1v(m-1)=bvb:nvn$ ſi

ſci-

ſcilicet loco $m-1$ ponatur n. ergo $zVz-xVx=(mVm,-1).bVb:nVn$. Hinc u ſeu $\frac{1}{3}zVz-\frac{1}{3}xVx=(\frac{1}{3}mVm-\frac{1}{3}).bVb:nVn=(2mVm,-2).bVb:3nVn$.

Scholion.

403. Sed, quia A vel a denotat altitudinem, quam grave quoddam accelerato motu à quiete incepto cadendo deſcribere poteſt tempore dato t, & quia propter *frictiones* aliaque impedimenta fieri nequit, ut filamenta fluidi eodem tempore effluentia per puncta phyſica G, E, F, &c. præciſe dupla ſint altitudinum GR, EQ, EQ, &c. ideo propoſitio Mathematica eſt potius quam Phyſica. Etſi enim ſcitur quantam oporteat eſſe altitudinem A tempore unius minuti ſecundi, vel quolibet alio à gravi decidenti in vacuo deſcribendam, non tamen in praxi talem altitudinem adhibere licet, quandoquidem ab omnis generis reſiſtentiis abſtrahere non ſemper convenit, ſed dicta altitudo A ex phænomenis eſt elicienda ſequenti modo:

Propositio XXXVII. Problema.

404. *Iisdem poſitis, quæ in præcedenti Propoſitione, invenire magnitudinem* A, *atque adeò parametrum* P *parabolæ* BIO *ex obſervationibus ſeu phænomenis.* Fig. 94.

Quia (§.§. 384. & 386.) quantitates fluidi per puncta quælibet phyſica G, E, F, &c. fluentia ſunt in ſubduplicata ratione homologarum GR, EQ, &c. ſeu ipſarum GB, EB, &c. quantitates illæ per ordinatas parabolæ GL, EI, &c. recte exponi poſſunt, adeo ut quantitas fluidi, per univerſum lumen EGHF effluentis, debeat exponi ſolido ELKFG. Atqui retentis ſymbolis ſuperioribus, erit ſolidum iſtud $=cuVp$, ut ſupra inventum, ergo $Q=cuVp$, & $QQ=ccuup$, id eſt $p=QQ:ccuu$, atqui (§. 399.) eſt $p=ai:r$, ergo $a=rQQ:iccuu$. Jam, quia (ſecundùm hypotheſin) Q ex obſervatione, & reliquæ r, i, c, u, etiam datæ ſunt, ipſa altitudo quæſita a ex hisce datis ope repertæ æquationis facili negotio haberi poteſt. Quod erat inveniendum.

Scho-

Scholion I.

405. Ad illuſtrationem hujus canonis, & inventionem altitudinis *a*, nullam præſtantiorem novi obſervationem, quam quæ relata eſt circa finem Tractatus *De Menſura aquarum fluentium* Celeberrimi Gulielmini, qui merito ſuo primum locum in Miſcellaneis Italicis Phyſico-Mathematicis à P. Gaudentio Roberti editis, occupat. Adhibuerat ſagaciſſimus Gulielminus vas cylindricum bipedalis diametri alicubi ad latus horizonti rectum lumine quadrato pertuſum, cujus ſingula latera erant 3 linearum pedis Bononienſis, & ejusdem luminis baſis horizonti parallela 3 pedibus cum 11 unciis (pollicibus) ab aquæ ſuperficie diſtabat in vaſe. Experimento octies repetito ſine ulla variatione invenerat Doctiſſimus Vir, 32 libr. & 10 uncias per lumen illud tempore unius minuti horarii effluxiſſe; & pollicem cubicum continere unciam unam aquæ cum granis 146, id eſt, in univerſum grana 786. Diviſit poſtea 32 libr. 10 uncias, *id eſt*, 252160 grana per 786 grana unius pollicis cubici, invenitque $320\frac{160}{393}$ pollices ejusdem generis prædicto illo tempore effluxiſſe. Jam, ſi formulam ſuperiorem obſervationi iſti velimus applicare, ſciendum *i* & *r* hoc caſu æquari, quia lumen plano aut ſuperficiei cylindri horizonti rectæ inſculptum eſt; ac proinde erit hoc caſu $p = a$. Ut altitudinem quæſitam *a* in numeris inveniamus totam operationem logarithmis perficiemus, ponentes $Q = 320\frac{160}{393}$ poll. cub. $c = 3$ lin. $z = 3\frac{11}{12}$ ped. $= 564$ lineis & $x = 561$ lineis. Quibus poſitis, erunt

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z})$ - - - -	3. 9508274	} Subtr.
Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - -	3. 9473531	}
Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x}) =$ log. numeri 1.008033...	0. 0034743	

Ergo $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}) = 1008033 : 1000000$, adeoque $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ ſeu $u : \frac{2}{3}x\sqrt{x} = 8033 : 1000000$, & log. u = log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ + log. 8033 − log. 1000000. Jam

Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - -	3. 9473531	} Add.
Log. 8033 - - - - -	3. 9048778	}
	7. 8522309	} Subtr.
Log. 1000000 - - - -	6. 0000000	}
Log. u - - - - -	1. 8522309	

Log. u

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [252] - 224
PUBLIC DOMAIN

Log. u	1.8522309	Add.
Log. $c=3$ lin.	0.4771212	
Log. cu	2.3293521	
Log. Q lineis cubicis expressæ	5.7437973	Subtr.
Log. cu,	2.3293521	
Log. $(Q:cu)$	3.4144452	Dupl.
Log. $(QQ:ccuu)=$ log. a in lineis	6.8288904	Subtr.
Log. 144,	2.1583625	
Log. a seu $(QQ:ccuu)$ in pedibus,	4.6705279	

Hic inventus log-us ipsius a est fundamentalis numerus in calculo quantitatis aquæ per datum foramen effluentis deinceps adhibendus, loco Tabulæ, eundem in finem, à supra laudato Guilielmino improbo laboris tædio confectæ. Nos enim, qui logarithmis semper calculum absolvi posse jam ostendimus, & uno adhuc exemplo clarius id probabimus, Tabula Guilielminea plane non indigemus; nec eadem Clariss. ejusdem Autor opus habuisset, sibique ipsi multo tædio pepercisset, si animum advertisset, calculum eo modo eaque methodo subduci posse, quam hoc loco exposuimus.

Scholion II.

406. Videamus nunc præcedentium usum in aliquo exemplo. Ponamus igitur cum Guilielmino sectionem FG, seu luminis planum angulo 88 grad. inclinatum esse ad horizontale planum, atque luminis rectanguli basin GH esse 50 ped. altitudinem vero GE, 10 ped. ac denique proportio celeritatum in G & E sit eadem quæ 4 ad 1. *Jam quia (§. 386.) velocitates in G & E sunt in subduplicata proportione ipsarum GR & EQ seu ipsarum GB & EB, hæ lineæ ipsæ erunt ut quadrata velocitatum in G & E, id est, GB : EB = 16 : 1, atqui supra (§. 402.) erat posita $z:x$ seu GB : EB $= m:r$, ergo $m=16$, adeoque $n=m-1=15$. Item $b=10$ ped. & $c=50$ ped. Ergo $u=(2mV m,-2).bVb:3nVn=28V10:V15$ ergo $cu=1400V10:V15$. Hisce positis* Fig. 94

Quia Log. a	4.6705279	Add.
Log. i sin. 88 grad.	9.9997354	
	14.6702633	

Log. $(ai:r)$ = log. p - - 4.6702633
Log. $\sqrt{p}$, - - - - 2.3351316 } Add.
Log. (cu) = 1400$\sqrt{10}$:$\sqrt{15}$ - 3.0580824 }
Log. $(cu\sqrt{p})$ = Q - - - 5.3932140. Huic log-mo numerus 247285 quam proxime convenit. Gulielminus suo calculo invenit 247321, differentia 36 est insensibilis præ numero 247285, denotante quot pedes cubici tempore unius minuti horarii effluere debeant per lumen illud seu sectionem horizonti inclinatam. Atque sic in aliis procedendum.

CAPUT X.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIONES.

I.

GEnerali *Fluminis* vocabulo indigitatur hoc loco aqua in superficie terræ itinere plerunque varie inflexo è locis altioribus intra alveum suum ad depressiora indesinenter fluens.

II.

Alveus fluminis est cavitas in superficie telluris, intra quam aquæ decurrunt.

III.

Sectio Fluminis est communis sectio alvei & plani secantis alvei fundo perpendicularis. Ejusmodi sectio ordinarie est figura aliqua irregularis ac propterea vocari solet *Sectio naturalis* ad distinguendam eam ab *artificiali:* nam

IV.

Sectio artificialis est semper parallelogrammum rectangulum, quia intelligitur esse sectio alvei artificialis, seu parallelepipedi formam habentis.

V.

Altitudo viva fluminis est distantia cujusque puncti in superficie fluminis à fundo ejusdem. Et *latitudo viva* est basis alicujus sectionis artificialis.

VI.

VI.

407. Flumen in eodem dicitur ſtatu manere, vel in ſtatu manenti eſſe, cum inter fluendum nusquam attollitur ejus ſuperficies & intumeſcit, nec alibi deprimitur vel decreſcit, ſed eodem ſemper tenore, durante fluxu, ſe habet; abſtrahendo tamen ab inæqualitatibus accidentalibus, ſcilicet à vorticibus &c. quæ à fundi & ſpondarum aſperitatibus provenire ſolent.

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

408. *Exiſtente flumine in ſtatu manenti, temporibus æqualibus æquales aquæ copiæ per omnes fluminis ſectiones transfluent.* Fig. 95.

Si negas, transeat ergo plus aquæ per ſectionem AB quam per vicinam ſectionem CD, & intumeſcet aqua inter has ſectiones in *bm*D exempl. gratia; ſin verò plus aquæ transiret per ſectionem CD quam per AB, aqua inter has ſectiones decreſceret in *βn*D; atque adeo flumen non maneret in eodem ſtatu, contra hypotheſin.

Corollarium.

409. Et converſim etiam, ſuperficies fluminis manens erit, ſi per ſingulas fluminis ſectiones AB, CD, EF, &c. eadem aquæ quantitas temporibus æqualibus perfluit.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

410. *Si caſtellum aquæ plenum* ABCD *communicet cum lacu ξωε indefinite amplo per canalem inclinatum* IFθ *ſuperne opertum ſuperficie curva* IHFξ, *atque exitu aquæ ex caſtello per lumen* CI, *in canali aqua ita fluat, ut in punctis quibusvis* F, E *ſectionis* EF *celeritates pendeant à preſſionibus aquæ incumbentis juxta altitudines* SL, *r*O; *quibus puncta illa à ſuprema aquæ in caſtello ſuperficie manente* AD *diſtant, faciantque preſſiones illæ, ut per ſingulas canalis ſectiones* GH, EF, &c. *eadem temporibus æqualibus aquæ copia fluat. Dico fore, ut eodem tenore aqua in canali inclinato fluat remoto operimento* IHFξ *curvilineo, quo faceret operta canalis aqua indicata iſta ſuperficie operiente, modò tantum aquæ caſtello influat, quantum per ſingulas canalis ſectiones jugiter tranſit.* Fig. 96.

Si negas, attollatur ergo aqua, amoto operimento curvo IFξ, quam inter sectiones GH & EF, ergo minus aquæ fluit per sectionem EF quam per præcedentes versus CI vi pressionis naturalis aquæ incumbentis, contra hypothesin.

Scholion.

411. *Pressionum naturalium* nomine intelligimus eas, quarum ope velocitates aquæ, ut in E & F, sunt in subduplicata proportione altitudinum *Or*, *Ls*, vel ipsarum OD, & LD. Nam quæcunque sit superficies IHFξ, eadem aquæ copia per singulas sectiones GH, EF, &c. fluet propter contiguitatem partium aquæ, quandiu canalis superficie illa curva opertus manet, nec tamen ideo celeritates aquæ reguntur à partibus incumbentibus, juxta tenorem & legem pressionum naturalium; hoc est, velocitates, ex. gr. in E & F, non sunt hoc casu generali ex necessitate in ratione subduplicata *Or*, ad *Ls*. Ac propterea contingeret ut remoto operimento canalis superficies tamdiu mutetur, usque dum aqua defluens in canali eam nacta sit, quæ à pressionibus aquæ naturalibus unice dirigatur, ac manens fiat; & hæc proinde ea ipsa est, quam operimento IFξ attribuimus, adeò ut aqua *continue in canali fluere queat, si ejus superficies figuram habeat istius operimenti, sive aqua tecta sit isto operimento sive non.*

Corollarium I.

412. In hac pressionum naturalium hypothesi innotescere potest, quantum aquæ per singulas sectiones canalis dato tempore fluere debeat. Nam producta prima sectione IC in D usque ad occursum cum superficie aquæ in castello AD, & *indefinite deorsum in O*, & juxta conditiones paragraphi 404, vertice D circa axem DO descripta
Fig. 96. parabola DTV, ordinatæ ejus LT & OV, quæ transeunt per puncta L & O, in quibus lineæ FL & EO superficiei aquæ in castello AD parallelæ, & per terminos cujuscunque sectionis FE ductæ, axi parabolæ DO occurrunt, exhibebunt quadrilineum parabolicum LTVO, quod in latitudinem sectionis artificialis ductum manifestabit quantitatem aquæ per sectionem FE unius minuti horarii tempore fluentis, quia calculus propositionis 37. ad hoc tempus est aptatum. Ipsius regulæ ratio patet ex hac ipsa propositione recensitâ.

Co-

Corollarium II.

413. Et data prima canalis sectione IC dabitur quælibet alia EF. Etenim ductis per I, C ordinatis parabolæ IZ, CG, & per punctum E recta EO parallela AD, ac ordinata OV, fiat quadrilineum VOLT æquale quadrilineo IZGC, determinabitque OL, intercepta ab ordinatis OV, LT, altitudinem vivam sectionis EF. Nam, quia hæc nominata quadrilinea parabolica (constr.) æquantur, hæc quadrilinea ducta in canalis latitudinem producunt solida æqualia, quæ (§. 404.) quantitatem aquæ fluentis per quamlibet sectionem canalis IC vel EF, &c. exponunt; unde cum hac ratione per singulas sectiones eadem aquæ copia fluit, patet (§. 409.) superficiem aquæ manentem esse. Vicissim data qualibet sectione EF, semper invenire licet primam IC.

Propositio XL. Problema.

414. *Datis superficie aquæ in castello* AD, *& uno puncto* I *in superficie manente aquæ in canali defluentis* IHξ, *invenire quotlibet alia.* Fig. 95.

Hoc problema jam solutum est in corollario ultimo præcedentis propositionis; sed, quia constructio per quadrilinea parabolica procedens nonnihil incommoda est, ope parabolæ cubicæ secundæ res paulò elegantius confici potest.

Describatur itaque per puncta D & G parabola cubica DPG, in qua cubus abscissæ cujuscunque DL æquetur parallelepipedo ex quadrato ordinatæ respondentis LR in parametrum Q, ita ut sit ubique $DL^3 = Q.LR^2$: Sitque P parameter parabolæ conicæ DZT, & $R = \frac{1}{3}DC$. *Et hisce positis, data prima sectione* IC, reliquæ omnes inveniri possunt ope parabolæ cubicæ; atque adeò curva IHF per puncta describi. Nam ductis ordinatis IP, CG parabolæ cubicæ per superioris IP terminum P, agatur PQ parallela DC, & si sectio canalis in E expetatur, acta EO parallela AD per punctum O, & ducta ordinata paraboloidis OS, in quâ, sumtâ SY æquali GQ, agatur per Y recta YR parallela DO, hæc YR exhibebit altitudinem vivam sectionis EF per punctum E transeuntis, ita ut EF sit = YR; ergo puncta omnia F geometrice inveniri possunt.

Demonstr. I. Parabola cubica, quam paraboloidem dicam, præbet $DC^3 = Q.CG^3$, parabola verò conica $CG^2 = P.DC$, & $Q.CG^2 = P.Q.DC$,

$P.Q.DC$; ergo $DC^3 = P.Q.DC$, vel etiam $P.Q = DC^2$. Est ergo DC media geometrica inter parametros parabolæ & paraboloidis.

II. In paraboloide est $Q.LR^2 = DL^3$, vel $P.Q.LR^2$, *id est* (num. 1. hujus) $DC^2.LR^2 = P.DL^3$, vel quia parabola efficit $P.DL$ æquale LT^2, $= LT^2.DL^2$; hinc $DL^2 : LR^2 = DC^2 : LT^2$, atque adeò $DL : LR = DC : LT$, hinc $DL.LT = DC.LR$, & per consequens $\frac{1}{3}DL.LT$ seu parabola $DZTL = \frac{1}{3}DC.LR$ (secundùm hypothesin) $= R.LR$. Similiter reperietur parabola, seu area parabolica, $DGVO = R.OS$; ergo quadrilineum $LTVO = R.YS$. Sic etiam quadrilineum $IZGC = R.QG$; unde quia (constr.) $YS = QG$, adeoque quadrilineum $LTVO$ æquale quadrilineo $IZGC$, (§. 413.) eadem aquæ copia per sectiones IC & EF fluet, atque adeo superficies aquæ IHFξ manens erit. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

415. Ope præsentis, ejusque quæ eam præcedit, ex datis inclinatione canalis seu angulo CAD, sectione qualibet EF ejusque distantia AE à superficie aquæ in castello AD, vel ab origine canalis, innotescent proportio velocitatum E & F, & reliquæ sectiones omnes. Nam ex dato angulo DAC & distantia AE, innotescet ipsa Or, & ex hac & angulo ABC, complemento anguli CAD, elicietur OD; unde, cum sectio EF eique æqualis OL data sit ex hypothesi, ea ex OD subtracta relinquet LD cognitam. Jam descripta circa axem DO & vertice D parabola DGV, ordinatæ LT & OV exponent proportionem celeritatum aquæ in E & F. Sed, quia multi sunt casus, quibus distantia EA actuali dimensione haberi nequit, sæpissime hic modus determinandi præmemoratas celeritates *in* praxi minime succedit, & mechanice eas velocitates investigare convenit.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 97. 416. *Invenire per observationes artificio mechanico proportionem velocitatum in* E *&* F *cujusque sectionis fluminis canalisve* EF.

Habeatur filum GP cum pondere P, aquâ aliquantum specifice graviore, altero ejus capiti annexo, demissoque pondere P usque ad fundum canalis Cθ, id pondus ab aqua per punctum E sectionis

FE

FE fluente nonnihil abripietur, & aquæ impressiones in hoc pondus efficient ut filum GP à situ verticali GE angulo quodam EGP declinet. Dehinc extracto pondere ex fundo, & aquæ eum in modum immisso, ut prope superficiem ad punctum F ut in *p* consistat, declinatio fili *gp* à situ verticali *ge*, in quem pondus cum filo se alioqui composuisset, nisi aquæ prope F currentis impressionibus à situ perpendiculari abductum fuisset, sit angulus *egp*, quem simplici litera *g* indicabimus, & angulum priorem EGP litera simili G. Horum angulorum complementa ad rectum dicantur C & *c*, inclinatio canalis, seu angulus GEF, autem I; dehinc assumatur quædam N, quæ sit ad tangentem anguli G, ut sinus complementi C est ad sinum anguli C—I; *item n* ad tangentem anguli *g* in ratione sinus anguli *c* ad sinum anguli *c*—I, eritque velocitas aquæ in E ad velocitatem in F in subduplicata ratione magnitudinis N ad *n*.

Demonstr. I. In altera figura 98. repræsentent MN vel MP, aut M*p* longitudinem fili GP vel *gp*, & MN horizonti verticalis contineat cum recta NQ angulum MNQ æqualem angulo GEθ in fig. 97, sintque anguli NMQ, NMq æquales angulis EGP, *egp*, seu G & *g* respective, ductaque NR perpendiculari ad MN, erunt NR tangens anguli G, & N*r* tangens anguli *g*: Et NRM erit C seu complementum anguli G, ac N*r*M complementum alterius *g*, id est *c*. Quin etiam angulus RNQ æquabitur angulo GEF, seu angulo I, nam si ex æqualibus GEθ & MNQ auferentur recti FEθ & MNR remanebunt æquales GEF, RNQ. Eritque adeò angulus RQN=C—I, & r*q*N=*c*—I. Fig. 98.

II. Quia gravia in situm horizonti rectum se componere affectant, atque in talem se reapse reducunt, quoties filo annexa à perpendiculari situ abducta, atque sui iterum juris facta sunt. Idcirco filum GP non potest in hoc situ consistere, nisi impressionibus aquæ fluentis per E juxta directionem sectioni EF normalem, vel fundo Eθ parallelam, in eo detineatur; necesse igitur est, ut præter gravitatis actionem in corpus P, quæ se in hoc exserit juxta directionem ipsi GE parallelam, alius cujusdam potentiæ actio accedat, quam hoc casu concipimus fieri, ut dictum, juxta directionem ipsi Cθ parallelam. Jam si in figura 98. MN exponit gravitatem ponderis P, quam in aqua habet, altera potentia, quæ fundo canalis parallela est, exponetur linea NQ, quandoquidem (secundùm hypothesin) angulus MNQ æqualis est angulo GEθ, atque actione duarum potentiarum collateralium MN & NQ (§. 39, 40.) detinetur pondus P filo annexum

nexum in situ MP, cum MN angulum NMQ seu angulum G continente; similiter repræsentat *Nq* vim abducentem aquæ filumque angulo *g* seu *egp* à verticali *ge* declinare facientis: adeo ut vires abducentes sint ad se invicem ut NQ ad *Nq*. Atqui in triangulo NRQ, est NR ad NQ ut sinus anguli NQR seu C—I ad sinum anguli NRQ seu NRM, id est C, & ex hypothesi est tangens anguli G seu NR ad magnitudinem N, sicut sinus C—I ad sinum C, ergo N = NQ. Eodem probabitur argumento esse *n* = *Nq*. Itaque vis abducens filum GP à situ perpendiculari GE, est ad vim abducentem fili *ge* ut N ad *n*.

III. Sunt vero vires abducentes ut impressiones aquæ in globum P, exsertæ juxta directiones fundo Cϑ parallelas: impressiones vero sunt in duplicata ratione velocitatum in E & in F, ut in sequentibus demonstrabitur, ergo quadratum velocitatis in E est ad quadratum velocitatis in F, ut N ad *n*, ac per consequens velocitas in E est ad velocitatem aquæ in F, in subduplicata ratione magnitudinis N ad magnitudinem *n*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

417. Si angulus GEF, seu inclinatio canalis ad horizontem, nullus est, erit N ad *n* eo casu, ut tangens anguli G ad tangentem anguli *g*; atque adeo velocitates aquæ in summo & imo sectionis FE erunt in subduplicata ratione tangentium angulorum *g* & G.

SCHOLION.

Fig. 96. 418. Hæc omnia, quæ de canali Iϑ ostensa sunt, fluminibus quoque applicari possent, si hæc per totam suam longitudinem eandem latitudinem sectionesque artificiales admitterent, & aquæ fluentes à spondis & fundi inæqualitatibus nullam resistentiam paterentur. Verum quia tales fluvii mathematici in rerum natura non existunt, dispiciendum est, num præcedentia nullum præbere queant adminiculum, quo fluminum aquæ fluentes ad mensuram revocari, eorumque affectiones generaliores explicari queant. Hac in re non inelegantem rationem pro fluviis mediocris altitudinis & latitudinis excogitavit Castellus quam Celeb. Gulielminus deinceps magis perfecit. Hæc methodus ita habet.

Fig. 99. 419. Intelligatur *Cataracta* seu *Regulator* ABDA constans duobus tignis

tignis parallelis & verticalibus AB, AD horizontali BD conjunctis, & crenis ſuis inſtructis, adeò ut his crenis tabula EH inſeri, quæ pro re nata attolli & demitti queat ope funis VS unco V alligati, atque adeo lumen FBDH modo arctari modo etiam ampliari queat. Hæc Cataracta ſeu Regulator in loco commodo fluvii mediocris transverſim debet aptari, ita ut tignum BD ripis perpendiculare ſit fundoque contiguum, ac denique tigna AB & AD fundo normalia, adeo ut totum planum ABDA fundo ripisque perpendiculare ſit.

Si jam quæratur, quantum aquæ per ſectionem BM fluminis PQ dato tempore fluere debeat? In hac ſectione vel alio commodiore loco collocandus eſt Regulator eo modo, ut dictum, & tabula EF mobilis demittenda eſt, ut ſectio MB reducatur ad minorem FB, quo fiet, ut minore aquæ copia fluente per lumen arctum FB quam antea per MB, aqua ſupra ſectionem MB intumeſcat ſenſim, atque ſenſim attollatur, usque dum aqua ſuperficiem manentem PN adepta ſit, quo caſu tantum aquæ fluet per lumen FB, quantum ante fluxerat per MB & quantum per quamlibet aliam ſectionem PR fluit, alioqui ſuperficies PN manens non eſſet. Sed eam ponimus eſſe manentem, ut ſane ad talem ſtatum de neceſſitate ſe aliquando componet; quo caſu corpus aquæ PRNB tanquam amplo caſtello ſeu receptaculo incluſa conſiderari poteſt, cui tantum aquæ influit ſuperne per PR, quantum effluit per lumen FB. Atque hisce jam poſitis calculus facili negotio abſolvetur pro obtinenda quantitate aquæ effluentis, dato quodam tempore, per lumen FB. Nam ſi vertice N & circa axem NB parabola deſcripta intelligatur NSQ, cujus parameter p ſit $= ai : r$ retentis ſymbolis, quæ ſupra (§. 401.) ſignificante i ſinum anguli obſervatione dati PNB, r ſinum totum & a eam magnitudinem, cujus log-us jam antea (§. 405.) repertus eſt. Unde, quia etiam BN & FN ſeu z & x ex obſervatione datæ ſunt, quantitas Q aquæ per lumen FB effluentis juxta normam paragraphi 406. facile calculo ſubducetur. Fig. 100.

In Propoſitionibus præcedentibus conſideravimus ut plurimum motus aquarum tanquam liberrime factos absque ulla reſiſtentia ex frictionibus. Verum, quia aquæ in fluviorum alveis decurrentes varias reſiſtentias à fundo & ſpondis ſubeunt, ejusmodi reſiſtentiarum omnino ratio habenda, atque in certis reſiſtentiarum hypotheſibus velocitates ſingulorum alicujus ſectionis punctorum determinandæ ſunt.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [261] - 233
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

Fig. 101. 420. *Reſiſtentiis aquæ fluentis exiſtentibus proportionalibus aquæ velocitatibus in ſingulis ſectionis punctis, invenire ipſas velocitates.*

Sit flumen BHK, atque EG ſectio ejus, AB ſuperficies manens horizontalis, ſeu initium canalis aut fluminis. Producatur EG in Q usque ad occurſum ejus cum plano AB itidem producto; & denique ex quibuslibet punctis E, F, G ſectionis EG ad AQ demiſſæ ſint perpendiculares EL, FM, & GN, &c. atque ordinatæ EH, FI, GK &c. alicujus curvæ KIH ipſi GE perpendiculares exponant velocitates aquæ per puncta E, F, G fluentis. Sint jam LE, a, QE, b; ordinata EH, quæ aquæ per punctum E fluentis quantitatem deſignat $= c$; reſiſtentia fundi ex contactu $= m$, reſiſtentia ſpondæ $= n$; QF, x & FI, y atque hæc ordinata pariter quantitatem aquæ per punctum F fluentis indicat ejusque celeritas eſt $y : c$, ac motus $= yy : c$. Et, quia (ſecundùm hypotheſin) reſiſtentia in E, hoc eſt m, ad reſiſtentiam in F ſe habet ut EH ad FI, erit reſiſtentia in F, quatenus hæc participat reſiſtentiam in fundo, $= my : c$, & reſiſtentia in eodem loco proveniens à reſiſtentia ſpondæ $= ny : c$. Detractis nunc reſiſtentiis à quantitate preſſionis aquæ puncto cuilibet F incumbentis, quæ quantitas per MF, ſeu $ax : b$ exponitur, & reliquum $(ax : b) - (my - ny) : c$, exponet vim extrudentem aquam per punctum phyſicum F, & cum hæc vis extrudens conſtanter proportionalis ſit motui aquæ genito, erit $(ax : b) - (my - ny) : c = yy : c$, id eſt $acx - bmy - bny = byy$, quæ eſt æquatio ad parabolam, cujus axis principalis ab EQ diſtat, propius accedens ad B, intervallo $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$, & vertex in hoc axe à fundo DH diſtat intervallo $b + \frac{bpp}{4ac}$, facta ſcilicet $p = m + n$; ac denique parabolæ hujus parameter erit $\frac{ac}{b}$. Quod erat inveniendum.

Fortaſſe aliæ poſſunt excogitari reſiſtentiæ hypotheſes, quæ præſente veriores ſint, hanc enim à nobis aſſumptam non pro certiſſima vendito, ſed duntaxat uno exemplo facili oſtendere placuit, quo pacto velocitates aquarum fluentium aſſignari debeant, non neglectis reſiſtentiis, quæ à frictionibus proveniunt.

SE-

SECTIO III.

De Effectis Fluidorum ex percussione.

EXpendimus hactenus motus fluidorum, qui resultant ex pressione gravitatis, modo etiam excutiendi sunt effectus eorundem ex percussione, quoties ad alia fluida, aut ad dura corpora, alliduntur; vel etiam, quoties solida fluidis impinguntur. Ad hujus generis effectus referri debent motus imminutiones, quas corpora solida in fluidis protrusa tum ratione figuræ, tum etiam ratione motus ipsius subeunt, id est, resistentiæ corporum in fluidis delatorum. Quæ omnia, & nonnulla alia huc spectantia, sigillatim in hac tertia Sectione ad examen revocabuntur.

DEFINITIO.

421. Cum fluidum in aliud fluidum aut solidum corpus impingitur, fluidi actio in alterum corpus dicitur *Percussio*, & effectus, qui in corpore excipiente percussionem editur, dicitur *Impressio*.

In superioribus subinde impressionis vocabulum latiori paulò sensu sumsimus, etiam pro designando effectu, qui à *pressione* fluidorum provenit.

AXIOMA.

422. Eandem à fluido impressionem excipiet corpus quodcunque solidum, sive id data cum celeritate dataque in directione in fluido feratur, sive fluidum eadem celeritate & directione in idem corpus solidum, sed quiescens, impingat.

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percussionis fluidorum.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA.

423. *Fluidorum* ABb, CDd *plano* MN *æquabili motu ad angulos rectos occurrentium, ita tamen, ut partes eorum à plano repercussæ libere recedere queant, absque eo quod advenientes impediant, quantitates, æqua-* Fig. 102.

libus temporibus ad planum MN *accedentes, erunt in compoſita ratione celeritatum* AB, CD, *latitudinum* Bb, Dd *& denſitatum* M, N.

Sint AB*b*, & CD*d* quantitates fluidorum æqualibus temporibus ad planum MN æquabili motu accedentes, eruntque celeritates acceſſus ut AB ad CD. Quantitates verò fluidorum ad planum MN ſimul appellentium ſint in compoſita ratione voluminum & denſitatum, & volumina in compoſita ratione celeritatum AB, CD & latitudinum, ergo maſſa ABb eſt ad maſſam CDd, ſicut AB. Bb. M ad CD. Dd. N. ſeu in compoſita ratione ex rationibus celeritatis AB ad celeritatem CD, latitudinis Bb ad latitudinem D*d*, & denique denſitatis *M* ad denſitatem N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

424. Hinc impreſſiones, quas maſſæ fluidæ AB*b*, CD*d* in planum MN exerent, erunt in compoſita ratione ex duplicata velocitatum AB, CD, & ex ſimplici tum latitudinum B*b*, D*d*, tum denſitatum M, N, id eſt, impreſſio maſſæ AB*b* erit ad impreſſionem alterius CD*d*, ſicut AB^2. B*b*. M ad CD^2. D*d*. N, vel ſumta ED tertia proportionali ad AB & CD, ſicut AB. B*b*. M ad ED. D*d*. N. Nam impreſſiones ſunt ut motus fluidorum & motus in compoſita ratione maſſarum & velocitatum.

Corollarium II.

425. Hinc etiam, ſi fuerint tubi AB, DE liquoribus quibuslibet pleni, quorum liquorum denſitates ſint M & N, effluantque liquores per foramina æqualia B, E, impingantque in extremitates vectis EB circa O convertibilis, erit momentum liquoris CB ad momentum alterius FE, ut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Fig. 103. Nam percuſſiones in B & E ſunt ut motus fluidorum, adeoque (§. 424.) in compoſita ratione ex duplicata velocitatum & ſimpla denſitatum, exiſtentibus tuborum foraminibus æqualibus; velocitates vero fluidorum ex tubis erumpentium (§. 386.) ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum CB & FE, ſeu duplicata velocitatum eadem, quæ altitudinum CB & FE; ac propterea percuſſio in B erit ad percuſſionem in E ſicut CB. M ad FE in N. Verum hæ percuſſiones, quatenus in vectem BE circa O convertibilem agunt, habent rationem potentiarum motricium vecti applicatarum, ergo cum po-

ten-

tentiæ vectis habeant momenta proportionalia factis ex potentiis ipsis in distantias earum ab hypomochlio O, habetur momentum percussionis in B ad momentum percussionis in E, sicut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Corollarium III.

426. Propterea torrentes DG, HL, celeritatibus aA, bB ad planum EL accedentes, in æquilibrio consistent cum tertio ON celeritate Cc in idem planum EL impingente, si positis torrentum densitatibus R, S, T, & latitudinibus EG, KL, MN, fuerint $R. Aa^2. EG. AC = S. Bb^2. KL. BC$, & $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL = T. Cc^2. MN$. Nam si planum EL consideretur instar vectis, erunt (§. 425.) $R. Aa^2. EG. AC$ & $S. Bb^2. KL. BC$ momenta percussionis æqualia, atque adeò in æquilibrio consistent cum tertio OMN quandoquidem (secundùm hypothesin) ejus media directio cC transit per C, & ejus percussio, seu $T. Cc^2. MN$, æquatur duabus oppositis potentiis simul sumtis, scilicet $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL$. Fig. 104.

In hoc corollario præcipua continentur quæ circa collisiones & percussiones fluidorum inter se notatu digna occurrere possunt.

Corollarium IV.

427. Resistentiæ, quas corpora solida in fluidis delata patientur, erunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum: adeoque hæ resistentiæ in uno eodemque fluido erunt in duplicata ratione celeritatum. Nam, quia (§. 422.) corpora in fluidis incedentia easdem à fluido impressiones subeunt, quas subirent, si fluidum ea celeritate, qua corpora in eo feruntur, in hæc corpora quiescentia impingeret, & quia hæ impressiones sunt ut percussiones fluidi, id est in composita ratione ex duplicata celeritatum & simplici densitatum, resistentiæ vero ut impressiones, quas corpora, quibus resistitur, in fluido subeunt; liquet omnino resistentias, quas corpora in medio fluido mota patientur, esse in composita ratione densitatum & duplicatâ velocitatum, aut si corpora in eodem medio ferantur, in duplicata ratione celeritatum.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [265] - 237
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

Fig. 105. 428. *Si fluidum, seu torrens* CABD, *data quadam celeritate impingat perpendiculariter in planum* AB, *deinde etiam eadem celeritate, sed sub angulis obliquis* KOF, KOE *alteri plano* EF *primo* AB *æquali, erit impressio, quam subibit planum* AB, *ad impressionem alterius plani* EF *juxta directiones* OP, OQ *planis normales, in duplicata proportione sinus totius ad sinum anguli incidentiæ* KOE; *vel, ductis per* E, O *&* F *perpendicularibus* HL, KOP, IMF *ad planum* AB, *&* MN *normali plano* EF, *sicut* OF *ad* ON.

Quod fluida CABD, HEFI impressiones in plana AB & EF exerant juxta directiones OP, OQ planis normales, constat ex §. 249. Ex puncto R agantur RS, RT perpendiculares & parallelæ plano EF. Jam, quia filamentum fluidi KO ad angulos rectos in planum LM incidit, sub obliquis verò KOE, KOF in planum EF; & si RO celeritatem filamenti exponat, per se claret fore, ut filamentum totam suam vim in planum obliquum EF exerere nequeat, quia directio RO plano isti directe oppositа non est, sed resoluta celeritate RO in laterales æquipollentes RS & RT, duntaxat aget in planum EF celeritate RS plano isti directe oppositа atque contraria, cum altera RT utpote cujus directio plano EF parallela est, nullam prorsus impressionem in idem planum exerere possit. Est igitur impressio filamenti KO in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF ut RO ad RS, seu ut OF ad OM; unde quia idem est filamentorum numerus binis planis LM & EF allabentium, erit impressio torrentis HLMI in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF, sicut OF ad OM; impressio vero torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HLMI *in plano LM*, sicut AB ad LM, id est, sicut OF ad OM, aut OM ad ON; ergo ex æquo impressio torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HEFI in plano EF, sicut OF ad ON, id est, in duplicata ratione sinus totius OF ad sinum anguli incidentiæ IFO vel KOE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Fig. 106. 429. Hinc si fluidum MABN plano AB allabatur celeritate data V, erit impressio, quam planum istud à fluido in id impingente exci-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [266] - 238
PUBLIC DOMAIN

excipiet, factum ex quadrato velocitatis in rectam AD; ducta scilicet AC perpendiculari ipsis AM, BN & demissa ex C super AB perpendiculari CD. Nam (§. 424.) impressio, quam subiret planum AB à fluido perpendiculariter impingente, est ut V^2. AB, per propositionem verò præsentem est impressio perpendicularis fluidi in plano AB ad impressionem ejusdem, sed oblique impingentis plano AB, ut AB ad AD, seu V^2. AB ad V^2. AD; ergo V^2. AD exponit impressionem fluidi oblique incidentis MABN in planum AB celeritate V, hæcque impressio exseritur juxta directionem EF plano perpendicularem & per ejus centrum gravitatis transeuntem, per §. 249. & §. 54.

Scholion I.

430. Ex præsenti propositione facile deducitur vis clavi seu gubernaculi, cujus ope naves, in quem volueris situm, converti possunt; quod paucis est indicandum. Sint itaque AB navis, B puppis cujus cardini inseritur clavus BH convertibilis circa B, cui per centrum gravitatis X normalis ducta sit Xy. Ponamus jam navem progredi juxta BA ex B versus A quacunque data velocitate, clavumque BH firmatum esse, ut cum AB producta in T quemcunque angulum acutum HBT constituat. Progrediente igitur navi versus E, aqua ABHG, juxta directiones rectæ AB parallelas, ea ipsa celeritate in clavum BH impinget, qua navis contrario sensu versus E fertur; & quia (§. 422.) idem effectus resultat, si aqua ABHG data celeritate in clavum navis quiescentis impingat, quam si navi progrediente clavus eadem illa celeritate aquæ allidatur, & aquæ clavo impingentis impressio est BS, posita unitate pro velocitate, ductisque BR normali ipsi GH, & RS normali BH, quæ impressio exponenda per BS exeritur in clavum juxta directionem XY per centrum gravitatis clavi BH ductam. Idcirco progrediente navi juxta BA, aqua resistens eundem effectum præstabit, ac si clavus impelleretur juxta XY potentia quadam BS; atque adeò hinc liquet, hac potentia BS navim in seipsam conversum iri. Sed quia directio XY alteri HG, juxta quam navis progreditur, non conspirans nec directe contraria, nec etiam perpendicularis est, potentia BS quatenus directioni XY applicatur, non est absoluta potentia, quæ navis conversionem causetur; sed ductis BN perpendiculari BH, æqualique facta ipsi BS, & NO parallela BV, hæc NO exponet vim plenam

Fig. 107.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [267] - 239
PUBLIC DOMAIN

nam converſionis navis; quoniam ON normalis eſt directioni navis OA, & potentia BN = BS reſolvitur in æquipollentes BO & ON, quarum BO, in directum poſita ipſi OA, nihil ad gyrationem navis conferre, ſed tantummodo ejus motum progreſſivum aliquantum morari poteſt, adeo ut ſola potentia ON reſtet, quæ converſionis effectum præſtet. Similiter ſi clavus habeat ſitum BF, denotabit KI vim rotationis navis, ſi ſcilicet ductis QL & BI normalibus clavo BF, factaque BI = BL, etiam IK rectæ AT perpendicularis ducta fuerit.

431. Ex contemplatione figuræ ſtatim apparet, ipſas *KI* & ON æquales eſſe poſſe, etſi anguli IBK & NBO *diverſi ſint*. Ex quo ſequitur, duas diverſas clavi poſitiones æqualiter aptas eſſe poſſe ad navis converſionem circa ſe ipſam. Agantur enim SP & LM parallelæ TB, quæ ipſis ON & KI reſpective æquales erunt, quandoquidem triangula PSB & ONB, nec non MLB & KIB ſimilia & æqualia exiſtunt. Jam $HR : PS (= HB : SB) = HB^2 : RB^2$, & $ML : QF = QB^2 : FB^2$; ergo ſi PS & ML vel KI & ON æquales ſint, erit ex æquo $HR : FQ = QB^2 : RB^2$, atque adeò $HR . RB^2 = FQ . QB^2$. Hinc, ſi BH vel BF dicatur a; RH, t; QF, u, erunt $RB^2 = aa - tt$, & $QB^2 = aa - uu$, adeòque $HR . RB^2 = FQ . QB^2$ fiet $aat - t^3 = aau - u^3$; ſeu $u^3 - t^3 = aau - aat$, adeòque *dividendo* per $u - t$, erit $uu + ut + tt = aa$, quæ eſt æquatio *indeterminata infinitas ſuppeditans diverſas clavi poſitiones*, quarum binæ & binæ æqualiter aptæ ſunt ad navis converſionem.

432. Idcirco, ſi $u = t$, habebitur $3tt = aa$, atque adeò $t = \sqrt{\frac{1}{3}}aa$; & hic valor ſinus anguli VBH dabit poſitionem gubernaculi BH, in qua vis rotationis navis *maxima* exiſtet. Unde ſi angulus VBH fuerit graduum 35, 16′ circiter, vel angulus HBT graduum 54, min. 44, poſitio clavi BH ad converſionem navis aptiſſima erit.

Scholion II.

433. Quæ in præcedenti ſcholio oſtenſa ſunt, etiam molis alatis facili negotio poſſunt applicari. Sit enim DE ala verticalis vento circumagenda, cum axicula molæ AB quemlibet angulum acutum ECB continens; ventusque celeritate ut 1, & in directione nN parallela CB, alæ DE allabatur, ſintque Ee, Ff parallelæ AB, & FC = CE, ductisque EM, ML normalibus ad Ff & FE, & LV parallela rectæ Ff. Per alæ centrum N ducta intelligatur N1 æqualis LE

Fig. 108, 109.

LE plano alæ DE perpendicularis, & exponet hæc N1 venti impressionem ejusque directionem, quam quælibet linea 2F2E alteri FE parallela subibit, adeò ut totalis impressio, quam ala à vento excipiet, juxta directionem alæ normalem, futura sit PC. N1. Porrò si per punctum 1 transeat recta 13 parallela N*n* vel AB, & per punctum N recta N3 eidem N*n* normalis, impressioni N1 æquipollebunt laterales 31 & N3, quarum prima 31, utpote AB seu axiculo parallela, ad alæ conversionem nihil confert; sed tantum N3 eidem axiculo molæ AB perpendicularis: adeoque vis rotationis alæ ex impressione juxta N1 derivata erit PC. N3. Verum, quia rectæ N1, 13 & N3 totidem aliis LM, LV & MV parallelæ sunt in plano EFM, & triangula LEV & MLV similia, erunt etiam MLV & 1N3 æquiangula & æqualia, quoniam insuper est LE = N1. Hinc etiam LV = N3 = vi rotationis alæ DE. Hinc itidem PC. N3 = PC. LV.

Igitur si dicantur FE, *a*; PC, *b*; FM, *t*; reperietur $LV = (aa - t^3) : aa$, & $PC.LV = (aabt - bt^3) : aa$. Intelligatur insuper alam DE aliam habere positionem ac modo habuit, cui respectiva FM sit *u*, reliquis iisdem manentibus, quæ antea, erit hoc casu homologa $PC.LV = (aabu - bu^3) : aa$. Unde, si in binis hisce diversis positionibus ala debeat eadem vi circumagi, ponendum $(aabt - bt^3) : aa = (aabu - bu^3) : aa$. Hinc $u^3 - t^3 = aau - aat$, quæ divisa per $u - t$, præbet $uu + tu + tt = aa$, quæ est eadem æquatio ac antea (§. 431). Adeòque facta $t = u$, reperitur iterum $t = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, atque adeò angulus FEM graduum 35 min. 16; alaque DE in hac positione à vento efficacissime circumagetur. Unde, si alæ DE & GI verticales subcontrario situ eodem angulo seu æquali ECB & HCB scilicet 54gr. 44′ ad AB inclinentur, idemque de horizontalibus, in schemate non expressis, intelligatur; mola alata efficacissime versabitur & circumducetur à vento juxta directiones AB parallelas in alas impingente. Alas autem oppositas situm subcontrarium habere oportet, alioqui, si in eodem plano existerent, prorsus circumagi non possent, quandoquidem venti impressio in una ala destrueretur æquali impressione in ala opposita. Fig. 108.

CAPUT XII.

De Reſiſtentiis figurarum in fluidis motarum.

DEFINITIO.

Fig. 110. 434. SI fuerit figura quæcunque CBABC, linea CBABC ex curvis vel rectis compoſita, & recta CC terminata, & hæc figura in directione axis MA in fluido feratur ex A verſus S; à poſtica parte verò ſuper baſi CC àppoſita ſit alia figura CYC, cujus area curva CYC & recta CC comprehenſa, ſit ad rec-lum ex baſi eadem CC in CL vel MO, quæ quadratum celeritatis exponit, qua figura in fluido incedit, ſicut reſiſtentia quam patitur figura CAC in fluido, præeunte ejus vertice A in recta MA, ad reſiſtentiam, quam eadem figura ſubiret præeunte ejus baſi: vel, quod eodem recidit, ſicut reſiſtentia figuræ aut potius lineæ curvæ CBABC ad reſiſtentiam rectæ FF baſi CC parallelæ & æqualis fluidi impreſſiones ad angulos rectos excipientis. Linea CBABC dicetur *patiens*, lineaque CIYIC *ſcala reſiſtentiæ figuræ patientis*.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA.

Fig. 110. 435. *Si, ductâ per terminum* R *recta*, AR *axi* AM *curvæ patientis* CBABC *perpendicularis lineâ* RS, *parallelâ tangenti* B*u curvæ patientis in* B, *deinde ex* A *normali* AT *ſuper* RS, *& per* T *recta* TV *æquediſtanti axi* AM, *in* BH *eidem axi parallela, ſumatur ubique* HI *æqualis reſpectivæ* RV, *punctæ* I *erunt in ſcala* CIYIC *reſiſtentiarum figuræ patientis* CBABC, *erit reſiſtentia curvæ* CBABC *in directione* MA *verſus* S *promotæ, ad reſiſtentiam lineæ rectæ* FF *axi normalis, ſicut bilineum* CIYIC *ad rectangulum* CCLL. *Et reſiſtentia ſuperficiei rotundæ ex converſione curvæ* CBA *circa* AM *ad reſiſtentiam circuli ex converſione rectæ* AT *circa eandem* AM, *ut ſolidum ex revolutione figuræ* CIYM *circa* MY *ad cylindrum ex converſione rec-li* CMOL *circa eandem* MY *ſeu* MO.

I. Curva ABC in ſua elementa diviſa intelligatur, quorum B*b* unum, per cujus terminos agantur ZK, *zk* axi AM æquidiſtantes, rectæ AF in punctis *G*, *g*; ipſi *zb* ordinata BN occurrat in puncto β, ex quo ad elementum curvæ B*b* perpendicularis β*e* demiſſa ſit.

Po-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [270] - 242
PUBLIC DOMAIN

Ponantur insuper BD curvæ normalis, & ED axi AM parallela, ac ductis per puncta R & S lineis QR, QS parallelis AS & AR, & ex Q cadat Qθ perpendicularis super RS, & θω perpendicularis super AS. Adeo ut, si insuper lineola *ef* ordinatæ BN parallela ducta fuerit, figuræ *b*βB*fe* & RQSωθ similes futuræ sint, quandoquidem singula latera unius singulis alterius parallela sunt & similiter posita.

II. Adeoque in figuris similibus *b*βB*fe* & RQSωθ erit RA : θω = Bβ : *fe*, atque RA. *fe* = θω. Bβ. Verum, quia triangula QSθ & RAT similia & QS ac RA æquales sunt, erit etiam Sθ = RT, & per consequens θω = RV, ergo etiam θω. Bβ = RV. Bβ, id est, per constructionem = HI. H*h*; ac proinde RA. *fe* = rec-lo IH*h* areæ CIYIC inscripto.

III. Igitur, quia filamentum fluidi ZB*bz* in curvæ elementum B*b* impingentis impressio in hoc elementum juxta directionem BD est (§. 429.) AR. B*e*, quia AR exponit (secundùm hypothesin) quadratum celeritatis fluidi curvæ allabentis. Impressio verò, juxtà BD, virtualiter continet impressiones ipsi æquipollentes laterales, juxta BE & ED directiones axi AM perpendicularem & parallelam, quarum perpendiculares axi BE, utpote quæ contrariæ & directe oppositæ sunt, quatenus ex duobus elementis circà axem AM similiter, sed ad oppositas partes sitis Bb, Bb derivantur, se mutuo elidunt, ut adeò nulla earum ratio habenda sit, sed solæ impressiones, juxta directiones ED axi parallelas, considerandæ veniant. Est verò (§. 39.) impressio juxta BD ad impresionem juxta ED ut BD ad ED, seu, propter triangula similia, EBD & *f*Be, sicut Be ad *ef*, id est, ut RA. Be ad RA. *fe* seu (num. 11 hujus) rec-lum IH*h*. Atqui, ut initio hujus numeri dictum, impressio fluidi, juxta BD est RA. Be; *ergo impresio fluidi in* elementum B*b*, juxta directionem axi AM parallelam, est rec-lum IH*h*. Atque adeò impresio, quam omnia B*b*, seu tota curva CBABC à fluido subibit, id est, resistentia hujus curvæ exponetur omnibus rectangulis IH*h*, quæ in bilineo CIYIC continentur, & in bilineum istud evanescunt; hoc est, resistentia curvæ CBABC, *juxta* directionem MA, motæ in fluido exponenda est bilineo CIYIC. Impresio vero, quam linea FF à fluido ad angulos rectos excipit, exponitur rectangulo ex FF in RA, seu (quia constr. CL = RA) rec-lo CLLC. Ergo resistentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF, ut area CIYIC ad rectangulum CLLC. Quod erat primùm.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [271] - 243
PUBLIC DOMAIN

Quoad ſecundam partem Propoſitionis, cum impreſſio, quam elementum curvæ B*b* à fluido ſubit juxta directionem ED axi parallelam, (num. 111 hujus) exponatur rec-lo IH*h*, atque revolutione plani CACY circa axem AY, elementum curvæ Bb deſcribat zonulam conicam, quæ pariter elementum exiſtet ſuperficiei ex converſione curvæ CBA circa AM ortæ, rec-lum vero IH*h* eadem converſione deſcribat tubum cylindricum ſolido ex figura CIYM circa MY converſa inſcriptum; liquet omninò impreſionem fluidi, quam zona conica ex B*b* circa AM ſubibit, in directione axi AM parallela, exponi debere tubo ex rec-lo IH*h* circa MY. Ergo reſiſtentia, quam univerſa ſuperficies ex curva CBA circa AM excipiet, juxta AM à fluido impingente, exponitur omnibus tubis cylindricis ex rec-lis IH*h* circa MY, id eſt, ſolido ex figura CIYM circa MY revolvente, in quod omnes evaneſcunt. Impreſio verò quam circulus ex converſione lineæ AF circa AM ortus ſubibit, exponetur cylindro, cujus baſis ſit ipſe circulus, impreſionem fluidi ad angulos rectos excipiens, altitudo verò AR vel CL, ſeu MO, quæ quadratum celeritatis fluidi allabentis exponunt; vel etiam cylindro ex converſione rectanguli CMO circa MO. Adeoque eſt reſiſtentia ſolidi rotundi in fluido CBABC ad reſiſtentiam circuli FF, ut ſolidum rotundum CIYIC ad cylindrum CLLC. Quod erat ſecundum.

COROLLARIUM.

436. Cum (conſtr.) ſint RA = HK & RV = HI, & AR : RV = RS : RT = $RS^2 : RA^2$, erit etiam HK : HI = $RS^2 : RA^2$, & dividendo IK : HI = $AS^2 : AR^2$, propterea erit RA : AS = $\sqrt{}$HI : $\sqrt{}$KI. Adeoque, data alterutra ex duabus curvis patiente, vel ſcala reſiſtentiarum ejus, innoteſcet ſemper altera, ſi non algebraice ſaltem transcendenter; & quidem ſcala reſiſtentiarum ſemper algebraica erit, ſi patiens curva fuerit.

SCHOLION.

437. Ergo, ſi vocentur AN, x; BN ſeu HM, y; HI, t; HK vel RM, a; AS, m analogia præcedentis corollarii RA : AS = $\sqrt{}$HI : $\sqrt{}$KI, præbebit $a : m = \sqrt{t} : \sqrt{a-t}$ & $t = a^3 : aa + mm$. I°. Tum etiam $m = a\sqrt{(a-t:t)}$.. II°. Et quia triangula $b\beta$B & ASR ſimilia ſunt, erit etiam $dx = dy\sqrt{(a-t:t)}$.. III°. Ac denique etiam $dy = dx\sqrt{(t:a-t)}$.. IV°.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [272] - 244
PUBLIC DOMAIN

IV°. Hæ poſtremæ nullo negotio ex ſecunda eliciuntur, ſubſtituendo duntaxat loco *a* & *m* elementa proportionalia *dy* & *dx*. Jam ope harum quatuor æquationum generalium varia problemata ſolvi poſſunt, quorum nonnulla proponere libet.

PROPOSITIO XLV. Problema.

438. *Aſſignare proportionem inter reſiſtentias, quas triangulum iſoſceles* BER *in fluido patietur, ſi, ut in præcedente, modo baſi* BR, *modo vertice* E *directione* AE *in id feratur.* Fig. 113

Exſtructo ſuper dimidia baſi AB quadrato, AM demittatur ex A perpendicularis AF ad latus trianguli EB, & per punctum F agatur FG parallela axi EA, & facta AI vel BH æquali BG, erit recta HI ſcala reſiſtentiarum lineæ EB, eritque adeo reſiſtentia lineæ EB ad reſiſtentiam lineæ BA ut rec-lum BI ad rec-lum BP, ſeu ut AI ad AP; atque adeò in duplicata ratione lineæ EB ad BA, vel aggregati laterum BE & ER ad baſin BR trianguli iſoſcelis BER; atqui, ut reſiſtentia lineæ EB ad reſiſtentiam lineæ BA, ita reſiſtentia linearum BE, RE ſimul, ſeu totius trianguli, præcedente ejus vertice E, ad reſiſtentiam baſis BR, ergo harum reſiſtentiarum ratio æquivalet duplicatæ rationi laterum BE, RE ad baſin BR. Nam, ſi BA repræſentet quadratum celeritatis trianguli, BG vel AI (§. 435.) exponet ordinatam conſtantem ſcalæ reſiſtentiarum HI trianguli, vel potius lineæ rectæ patientis BE. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Corollarium I.

439. *Adeoque* reſiſtentia quadrati, juxta directionem lateris in fluido delati, erit ad reſiſtentiam ejusdem, ſed in directione diagonalis pari celeritate incedentis, ut diameter quadrati eſt ad latus ejusdem. Nam ſi triangulum iſoſceles BER cogitetur rectangulum eſſe in E, erit (§. 438.) reſiſtentia laterum BE, ER juxta AE ad reſiſtentiam baſis BR, quæ diameter eſt quadrati cujus triangulum BER eſt ſemiſsis, ut AI ad AP, ſeu BF ad BE; reſiſtentia verò diametri quadrati BR perpendiculariter incedentis ſuper AE, eſt ad reſiſtentiam lateris quadrati BE itidem normaliter ſuper AE delati, ſicut BR ad BE ſeu 2BA ad BE, ſeu 2BE ad BR, id eſt BE ad BA; ergo ex æquo reſiſtentia laterum BER, ſeu quadrati, juxta directionem

diagonalis AE promoti in fluido, præcedente quadrati vertice E, ad resistentiam lateris BE fluidi, impressionem ad angulos rectos excipientis, est ut BF ad BA, seu ut latus BE ad diagonalem BR, adeoque invertendo, resistentia lateris BE super AE perpendiculariter in fluido delati, ad resistentiam quadrati juxta diagonalem incedentis, est ut diameter ad latus.

COROLLARIUM II.

440. Resistentia coni recti BER juxta directionem axis AE in fluido delati, præcedente tamen ejus vertice E, erit ad resistentiam ejusdem, præeunte ejus basi BR, iterum ut AI ad AP, seu ut BF ad BE. Nam (§. 435.) resistentia primi casus est ad alteram, ut cylindrus ex rectangulo AH circa AP ad cylindrum ex quadrato AM circa eandem AP, sed prior cylindrus est ad alterum ut AI ad AP, cum utriusque cylindri basis sit eadem. Ergo &c.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA.

Fig. 110. 441. *Assignare resistentias Sectionum Conicarum juxta directionem axis in fluido motarum.*

Si ABC sit *ellipsis* vel *hyperbola*, cujus centrum sit in M; dicanturque semilatus transversum AM, b; parameter c; abscissæ AN, x; semiordinatæ NB, y; æquatio ellipseos & hyperbolæ erit $byy = 2bcx \mp cxx$, in differentiata æquatione $bydy = bcdx \mp cxdx$, loco differentialium dy, dx earum proportionales a & m substituantur, quæ sunt nomina linearum RA & AS, fietque $aby = bcm \mp cmx$, atque adeò $m = aby : bc \mp cx$, & $mm = aabbyy : bbcc \mp 2bccx + ccxx$ (vel substituto ex æquatione curvæ valore ipsius $\mp 2bccx + ccxx$, in y) $= aabbyy : bbcc \mp bcyy$; hinc $aa + mm = (aabyy + aabcc \mp aacyy) : bcc \mp cyy$; hinc, quia (§. 437.) $t = a^3 : aa + mm$, erit $t = abcc \mp acyy : bcc + byy \mp cyy$ (seu ponendo e pro $b \mp c$) $= abcc \mp acyy : bcc + eyy$, & hæc foret æquatio scalæ resistentiarum CIY; ponatur insuper $bcc = eff$, & æquatio curvæ CIY erit $t = aeff \mp acyy : eff + eyy = \mp ac : e; \pm acff + aeff : eff + eyy$ (& substituendo in numeratore postremæ fractionis, loco $\pm c + e$ suum valorem b) $= \mp ac : e; + abff : eff + eyy$.

Igitur elementum areæ MHIY, seu rec-lum IHh $= \mp acdy : e; + abffdy : eff + eyy = \mp acdy : e; + abdz : e$; nominando arcum circularem z, cujus tangens est y & radius f; quandoquidem (§. 166.) hujus arcus

cus elementum, seu du, est $= ffdy : ff + yy$. Ergo area ipsa erit MHIY $= (abu \mp acy) : e$. Adeoque, si basis CM dicatur g, & arcus radio f descriptus, cujus tangens est g, nominetur A, erit universa area MCIY $= (abA \mp acg : e$. Rectangulum verò CO $= ag$. Ergo resistentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF, sicut quantitas $abA : e$; $\mp acg : e$ ad ag; id est, sicut $bA \mp cg$ ad eg. Quod erat inveniendum.

Hæc ipsissima est resistentiarum ratio, quam Celeb. Jac. Bernoullius pluribus verbis, ast sine demonstratione & analysi, declarat Act. Erudit. Lipsi. 1693. pag. 253, art. 5. Hæc proportio tantum obtinet, cum sectio conica juxta directionem axis majoris movetur, signumque superius ellipsin, hyperbolam verò inferius respicit.

Corollarium I.

442. Si b sit infinita præ parametro c, fiet $e = b \mp c = b$, atque adeò ratio $bA \mp cg$ ad eg, erit eadem, quæ bA ad bg vel A ad g. Unde cum ellipsis cujus latus transversum est infinitum, abeat in *parabolam*, manifestum est, parabolæ in fluido latæ juxta directionem axis, præeunte modo vertice mox basi, resisti in ratione arcus circuli radio semiparametro parabolæ descripti, cujus arcus tangens æquetur dimidiæ basi parabolæ, ad dimidiam hanc basin.

Corollarium II.

443. Sin vero ABC fuerit *circulus*, ratio $bA \mp cg$ ad eg abit in rationem cujus termini algebraice dati sunt, quod omnino meretur, ut hoc loco ostendatur. Quia circulus est ellipsis, cujus latus rectum æquatur parametro, fit hoc casu $b = c$, atque adeò $b - c = e = 0$; & hoc casu adhibenda est ratio $bA - cg$ ad eg, seu $\frac{bA}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g, verùm $-\frac{cg}{e} = -cg : b - c = g - \frac{bg}{b-c} = g - \frac{bg}{e}$, ratio $\frac{bA}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g æquabitur rationi $\frac{bA}{e} + g - \frac{bg}{e}$ ad g. Atqui, juxta paragraphum 166, est $A = g - \frac{g^3}{3ff} + \frac{g^5}{5f4} -$ &c.; ergo $\frac{bA}{e} + g - \frac{bg}{e} = g - \frac{bg^3}{3eff} + \frac{bg^5}{5f4e}$ vel (quia $bcc = eff$) fiet etiam $= g - \frac{bg^3}{3bcc} + \frac{bg^5}{5bceff} -$ &c. $= g - \frac{g^3}{3cc} + \frac{g^5}{5ceff} -$ &c. seu, (quia ff respectu cc aut gg infinita, atque adeò fractio $g^5 : 5ceff$ inde-

definite parva seu evanescens est) $=g-\frac{g^3}{3cc}$. Erit ergo resistentia segmenti circularis CBABC ad resistentiam ejus basis, seu ei æqualis rectæ FF, sicut $g;-g^3:3cc$, ad g, id est, ut $cc-\frac{1}{3}gg$ ad cc, vel $bb-\frac{1}{3}gg$ ad bb, aut, quod eodem recidit, velut quadratum diametri, demta una triente quadrati baseos segmenti, ad quadratum diametri; prorsus ut invenit Cl. Bernoullius in loco supra (§. 141.) citato.

Scholion.

444. Solidum rotundum CIYIC est ad cylindrum CLLC sicut omnia MH. HI. H*b* ad $\frac{1}{4}MC^2.CL$, vel sicut $\int tydy$ ad $\frac{1}{4}ayy$. Atqui cum t sit (§. 441.) $=\mp ac:e;+abff:eff+eyy=a-\frac{ab}{e}+abff:eff+eyy$, erit $tydy=aydy;-abydy:e;+abffydy:eff+eyy$; ergo $\int tydy=\frac{1}{4}ayy;-abyy:2e;+\frac{abff}{e}$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$. Nam integrale ipsius $ydy:ff+yy$ est log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$. Ergo solidum rotundum, ex MHIY circa MY, ad cylindrum HKKH, vel ratio resistentiæ solidi BAB ad resistentiam baseos BB, præeunte modo vertice *A*, modo basi BB in directione MA, est sicut $\frac{1}{4}ayy;-\frac{1}{4}abyy:e;+\frac{abff}{e}$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$ ad $\frac{1}{4}ayy$, vel sicut $yy;-byy:e;+\frac{2bff}{e}$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$ ad yy; aut denique etiam, ut $\frac{2bff}{e}$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}\mp\frac{cyy}{e}$ ad yy. Ubi iterum signum superius respicit ellipsin, hyperbolam verò inferius.

Idcirco conöidi parabolico in directione axis suæ lato resistitur, præeunte modo vertice modo basi, in ratione $2ff$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$ ad yy, vel $2cc$. log. $\sqrt{(cc+yy:cc)}$ ad yy.

445. Sphæræ segmento resistitur, in iisdem ac in præcedentibus circumstantiis, in ratione $cc-\frac{1}{3}yy$ ad cc; atque adeò resistentia hemisphærii, juxta directionem axis MA lati, erit tantum semissis resistentiæ lineæ FF.

Nam in sphæra fit $b=c$ & $e=o$, at log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}=\frac{yy}{2ff}-\frac{y^4}{4f4}+$&c. hinc ratio $yy;-byy:e;+\frac{2bff}{e}$. log. $\sqrt{(ff+yy:ff)}$ ad yy abibit in rationem

tionem $yy - \frac{by+}{2eff}$ ad yy; vel $2eff - byy$ ad $2eff$ (aut quia $eff = bcc$), in $2bcc - byy$ ad $2bcc = 2cc - yy$ ad $2cc = cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc.

PROPOSITIO XLVII. Problema.

446. *Invenire curvam patientem* ABC, *quæ sui ipsius sit scala resistentiarum.* Fig. 110.

Oportet ergo curvas CAC & CYC similes & æquales esse, adeò ut BH = HI, & AM = MY, ut & AN = PY. Positaque, ut in præcedentibus, RS parallela elemento curvæ quæsito B*b*, erit RV = HI = BH, & R*u* = *hi* = *bh*, adeoque $\beta b = Vu$, ductisque per *u* recta *uσ* ipsi RS occurrente in puncto σ, & per hoc rectula $\sigma\pi$ parallela RA; & super diametro RA descriptus circulus transibit per punctum T, cum angulus RTA (constr.) rectus sit; quibus positis, & cum jam dictum sit $Vu = \sigma\pi$ æquari $b\beta$, erit $T\pi = B\beta = Hb$; atqui producta *uσ* usque ad occursum cum semicirculo Φ ex hoc puncto agatur $\Phi\rho$ parallela RA; $T\pi = T\rho + \rho\pi = T\rho + \Phi\sigma$, seu, ut alibi (§. 463, num. 111.) ostendetur $= T\rho + T\Phi$, unde omnes $T\pi$ seu $B\beta$ id est ordinata BN = omn. $T\rho$, seu ordinatæ TV + omnibus arculis $T\Phi$, seu arcui AT, est ergo ordinata curvæ quæsitæ BN aggregatum arcus AT ejusque sinus, atque adeò curva ABC est cyclois ordinaria. Quod erat inveniendum.

Hinc resistentia cycloidis CBABC erit ad resistentiam basis ejusdem, ut area cycloidis ad rec-lum circumscriptum, atque adeò ut 3. ad 4.

PROPOSITIO XLVIII. Problema.

447. *Ex omnibus frustis conicis* BCSR *super eadem data basi* BR *ejusdemque altitudinis* AD *invenire verticem* E *illius, cui minime resistatur, si in directione axis* AD *in fluido incedat data quadam celeritate.* Fig. 111.

Super AB, facto quadrato AM ex A super EB, demittatur perpendicularis AF, & ducatur FG parallela axi coni EA, factaque BH = BG agatur HI parallela BA, & (§. 435.) HI erit scala resistentiarum trianguli BER, cylindrusque ex conversione rec-li AH circa AI exponit resistentiam coni BER in fluido, & cylindrus ex AL resistentiam coni CES, atque adeo annulus ex conversione rectanguli KH circa AP exponet resistentiam curticoni BCSR, ex-

cepta reſiſtentia, quam circulus CS ſubibit in fluido, cujus impreſſiones ad angulos rectos excipit, quæ circuli CS reſiſtentia exponitur cylindro ex AN circa AP. Ergo reſiſtentia univerſi frusti conici BCSR exponi debet duobus ſolidis, ſcilicet annulo ex KH circa AP, & cylindro ex AN circa eandem, & (ſecundùm hypotheſin) hæc duo ſolida *minimum* quoddam efficere debent. Sit V punctum medium ipſius BK, eritque VA diſtantia centri gravitatis rectanguli BL ab axe AP, adeoque $p.$ AV exprimet circumferentiam, quam centrum gravitatis una rec-li converſione deſcribet circa DA, ubi p ſignificat exponentem rationis peripheriæ circuli ad radium. Unde cum ſolida rotunda (§. 47.) inveniantur ex ductu figuræ rotantis circa aliquem axem in viam centri ejus gravitatis, factum ex rec-lo BL in $p.$ AV, id eſt $p.$ AV. CK. BH æquabitur annulo ex rec-lo BL circa AP, peripheria vero, quam centrum gravitatis rectanguli AN deſcribit, erit $\frac{1}{2}p.$ AK, adeoque $\frac{1}{2}p.$ AK^2. KN erit valor cylindri ex AN circa AP. Atque adeò $p.$ AV. BK. BH $+ \frac{1}{2}p.$ AK^2. NK exponit reſiſtentiam quam curticonus BCSR in fluido ſubibit, ac propterea efficere debet aliquod *minimum*. Aut etiam annulus ex rectangulo LM circa AP rotato debet eſſe in ſuo genere *maximus*, quandoquidem prædictorum ſolidorum ex KH & AN complementum eſt ad datum cylindrum ex quadrato AM circa AP rotato. Adeoque $p.$ QI. HL. HM quod ſolidum annulum illum ex LM exprimit, debet eſſe *maximum*. Jam, ſi dicantur AB, a; AD, $2b$, ſeu AO & OD, unaquæque ſeorſim b; AE, x; facili calculo reperietur ſolidum $p.$ QI. HL. HM $= (x-b).\ 2a^3bp : aa+xx$, unde omiſſa quantitate conſtante in numeratore, quacum indeterminata $x-b$ multiplicata eſt, $(x-b) : aa+xx =$ maximo. Hinc log. $(x-b)$ − log. $(aa+xx) =$ conſtructio, atque adeò $dx : x-b = 2xdx : aa+xx$, hinc $aa+xx = 2xx-2bx$, id eſt, $xx-2bx = aa$, vel $xx-2bx+bb = aa+bb$, vel extrahendo radicem $x-b = \sqrt{(aa+bb)}$, ſeu $x = b+\sqrt{(aa+bb)}$. Quæ æquatio ipſiſſimam conſtructionem ſuppeditat, quam Celeb. Newtonus ſine analyſi & demonſtratione tradidit in Schol. poſt Prop. 35. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* quæ ita habet: ex puncto medio O altitudinis AD frusti conici ducatur OB, cui æqualis fiat OE, eritque E vertex coni quæſiti BER.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA.

Fig. 112. 448. *Datis poſitione recta* CI *duobusque punctis* A *&* B, *invenire in*

in hac recta positione data tertium punctum C, *ut lineæ ex eo ad data puncta ductæ* AC, CB *cum rectis* AD, BF *rectæ* CI *ejusque parallelæ* DF *normalibus, figuram rectilineam* DACBF *forment, quæ circa axem* DF *in gyrum acta producat solidum, cujus superficies exclusis circulis à lineis* AD, BF *descriptis*, minimam *in fluido resistentiam patiatur, incedente solido juxta directionem axis* FD.

Analys. Puncta data A, B à rectâ CI æqualiter distare ponantur, ut sint æquales CG & BI. Ex puncto T medio datæ lineæ LM (quadratum celeritatis exponentis, quâ fluidum solido patienti alliditur) tanquam centro descriptus sit semicirculus LPM, quem linea MO alteri *DF in* directum posita contingat *in M*, critque adeò LM parallela ipsis AD & BF. Per L agantur LO, LN parallelæ lineis AC, BC, secantes semicirculum in P & Q, per quæ puncta transeant PR, QS parallelæ MN; rectæ MP & MQ ipsis PL & QL perpendiculares erunt. Puncto C, aliud *c* indefinite vicinum intelligatur, tum etiam rectæ *c*A, *c*B ductæ sint, & hisce parallelæ L*o*, L*n* semicirculum secantes in punctis *q* & *p*, per quæ pariter transeant ordinatæ *qs* & *pr*, ductisque Pπ & Qρ parallelis diametro LM, *p*π & *q*ρ erunt elementa ordinatarum PR & QS. Sit iterum *p* exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium, bisectisque CG in α, & *BI in* β, *denotabunt p*. Eα circumferentiam radii Eα, & *p*. Fβ circumferentiam *radii* Fβ, *adeoque* annuli à lineis CG, Bi circa DF revolventibus geniti, erunt *p*. Eα. CG, & *p*. Fβ. BI.

II. Jam per ea, quæ in præcedentibus (§. 435.) sunt ostensa, resistentia, quam in fluido subibit annulus conicus à recta AC circa DF in orbem acta descriptus, exponitur per *p*. Eα. CG. LS & resistentia annuli ex BC circa DF per *p*. Fβ. BI. LR, adeoque resistent. annuli AC + resistent. annuli BC = *p*. Eα. CG. LS + *p*. Fβ. BI. LR. Similiter *resistent.* annuli ex A*c* + resistent. annuli B*c* = *p*. Eα. CG. LS + *p*. Fβ. BI. L*r*. Jam, quia ex natura *minimi* resistentia annuli AC + resistent. annuli BC = resistent. annuli A*c* + resistent. annuli B*c*, erit etiam *p*. Eα. CG. LS + *p*. Fβ. BI. LR = *p*. Eα. CG. LS + *p*. Fβ. BI. LS, vel quia (secundùm hypothesin) CG & BI æquales sunt, dividendo per *p*. CG aut *p*. BI; erit Eα. LS + Fβ. LR = Eα. L*s* + Fβ. L*r* atque adeò Eα. S*s* = Fβ. R*r*, vel S*s* : R*r* = Fβ : Eα.

III. Ob parallelas LO, AC, & L*o*, A*c*; erit O*o* : LM = *c*C : CG, vel O*o* : C*c* = LM : CG & N*n* : C*c* = LM : BI vel CG, ergo O*o* = N*n*. Atqui N*n* : P*p* ut triangulum NL*n* ad 2. triangula PT*p*, quorum scilicet basis P*p*, altitudo verò *p*T; nam trianguli hujus PT*p* duplum

est triangulum, cujus basis etiam Pp, sed altitudo dupla ipsius pT, seu diametro LM æqualis; atque adeò ejusdem altitudinis cum triangulo LNn: & angulus NLn = angulo (modo nominati trianguli) ad verticem in circumferentia alterius semicirculi in figura non expressi; ergo $Nn : Pp = NL^2 : LM^2 = NL : PL = LM : LR$. Eodem argumento est $Oo : Qq = LM : LS$, seu invertendo $Qq : Oo$ vel $Nn = LS : LM$; ergo ex æquo $Qq : Pp = LS : LR$. Sed propter triangula similia $Qq\varphi$ & TQS, est Ss vel $Q\varphi : Qq = QS : QT$, ergo ex æquo $Ss : Pp = LS \cdot QS : LR \cdot QT$. Item propter triangula similia $P p \pi$, TPR est $Pp : P\pi$ vel $Rr = PT$ vel $QT : PR = LR \cdot QT : LR \cdot PR$, ergo denuo ex æquo fit, $Ss : Rr = LS \cdot QS : LR \cdot PR$; atqui supra (num. 11. in fine) invenimus $Ss : Rr = F\beta : E\alpha$, ergo $F\beta : E\alpha = LS \cdot QS : LR \cdot PR$, & $E\alpha \cdot LS \cdot QS = F\beta \cdot LR \cdot PR$.

IV. Igitur, si dicantur LM, a; $E\alpha$, e; $F\beta$, f & MO, m; quarta proportionalis MZ ad datas BH, HA & LM dicatur g, & hæc g vel MZ deprehendetur esse media arithmetica inter incognitas MO & MN, unde, cum MO sit m, altera MN invenietur $= 2g - m$. Et substitutis his valoribus in canone paulo ante reperto $E\alpha \cdot LS \cdot QS = F\beta \cdot LR \cdot PR$, pervenietur ad æquationem quinque dimensionum, quæ, salvo calculo, erit ut sequitur:

$$\begin{array}{llllll} +e m^5 & -8eg \cdot m^4 & +24egg \cdot m^3 & -8aage \cdot mm & +a^4 e \cdot m & -2a^4 fg = 0. \\ +f & -2fg & +2aaf & -4aafg & +a^4 f & \\ & & +2aae & -32g^3 e & +16g^4 e & \\ & & & & -8aaegg & \end{array}$$

Cujus radices determinant valores quæsitæ MO; qua inventa ductaque OL, si per datum punctum A ducetur AC parallela ipsi OL, quæ AC occurrat rectæ CI, ei occurret in optato puncto C. Quod erat inveniendum.

Exiisset pariter æquatio 5. dimensionum, si vel maxime lineas CG & BI inæquales assumpsissemus.

Corollarium I.

449. In canone supra invento $L\alpha \cdot LS \cdot QS = F\beta \cdot LR \cdot PR$ jam continetur solutio problematis de *solido minimæ resistentiæ*. Hoc enim casu CG & BI perinde ac AG & CI supponendæ sunt indefinite parvæ, quo fiet, ut αE & AD, item βF & CE instar æqualium tractari debeant; & cum omnia solida $L\alpha \cdot LS \cdot QS$; $F\beta \cdot LR \cdot PR$, &c. singula scilicet cur-

curvæ elementa AC, CB, &c. reſpicientia, æqualia ſint, ponatur unumquodque eorum dato cubo LM^3 æquale, eritque adeò $La.LS.QS = LM^3$, aut vocando Ea vel DA, y; CG, dy; AG, dx; & ut prius LM, a, & denique MO, m; $a^5my : (aa+mm)^2 = a^5$, hinc $y = (aa+mm)^2 : aam = aa : m; +2m; +m^3 : aa$, & $dy = -aadm : mm; +2dm; +3mmdm : aa$, & quia propter ſimilitudinem triangulorum CGA & LMO, eſt $mdy = adx$, ideo invenietur quoque $dx = -adm : m; +2mdm : a; +3m^3dm : a^3$; ergo $x = mm : a; +3m^4 : 4a^3 - lm$, ubi lm ſignificat log-um indeterminatæ m in log-mica, cujus ſubtangens eſt a. Et hæc ſolutio ad amuſſim convenit cum ea, quam Celeb. Joh. Bernoullius in Act. Erud. Lipſ. 1699. p. 515. exhibuit, & in Actis anni ſequentis uberius explicuit.

Corollarium II.

450. In æquatione $y = (aa+mm)^2 : aam$, vel $y : a = (aa+mm)^2 : a^3m$, ſi loco $aa+mm$, a, & m ſubſtituantur differentialia ds^2, dy, & dx, quæ illis proportionalia ſunt, proveniet $y : a = ds^4 : dxdy^3$; adeòque $ads^4 = ydxdy^3$, quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ in quam laudatiſſimus Bernoullius citato loco incidit, & ex ea poſtea expreſſiones coordinatarum in præcedenti corollario repertas elicuit. *Hisce omnibus Illuſtris Marchionis Hoſpitalii ſolutio etiam conſona eſt, quam in Actis Lipſ. & in Commentariis Acad. Reg. Scient. anni 1699. publicari voluit.*

Solas hactenus reſiſtentias illas contemplati ſumus, quas corpora in fluidis delata ſubeunt, cum juxta directionem axis moventur. Sed ſi in aliis directionibus incedant, res evadet paullò altioris indaginis, ut ex ſequenti problemate eleganti abunde patebit.

Propositio L. Problema.

451. *Si datum trilineum quodcunque* ABH, *curva* AVB *ejus axe* AH *& ordinata* BH *terminatum, quomodocunque in fluido feratur juxta directionem* SM *ex* S *verſus* M, *invenire mediam directionem* Xω *fluidi curvæ* AVB *allabentis, & impreſſionem, quam fluidum juxta inventam mediam directionem in trilineum exſeret.* Fig. 113.

Analyſis Geometrica. I. Per quodlibet curvæ AVB elementum Bb agantur BB, *bb* rectæ ipſi SM parallelæ, ductisque BC & Ce rectæ *bb* & elemento curvæ Bb normalibus, exponatque MO perpendi-

cularis ad axem curvæ AH quadratum celeritatis, quâ trilineum in fluido incedit, vel quod idem est, quadratum velocitatis, quâ filamentum *b*BB*b* elemento curvæ B*b* allabitur, exponetque (§. 429.) MO. *Be* impressionem, quam filamentum *bb*BB, juxta directionem BF in elementum B*b* exseret, sed impressioni isti æquipollent laterales juxta BG & GF, quarum hæc axi AH parallela, illa verò perpendicularis est; & quia impressiones juxta BF, BG & GF sunt ut hæ lineæ respective, vel propter triangulorum BFG & B*ef* similitudinem, sicut *Be*, B*f* & *ef*, atque impressio juxta BF = MO. *Be*, erit impressio juxta GF = MO. *ef*, & impressio juxta BG, = MO. B*f*. *Et sic respective in quolibet alio curvæ elemento.*

II. Agantur porrò per M recta MN parallela elemento curvæ B*b*, vel tangenti curvæ in B, ex N perpendicularis NP ad lineam SM, quantum opus est productam, PQ normalis MN, & denique QR parallela MO; eritque figura NPMO similis figuræ BC*b*E, cum singula latera unius figuræ parallela sint singulis alterius. Propterea latera in hisce duabus figuris similiter posita proportionalia erunt; hoc est, *b*E : *ef* = MO : QR, atque adeò MO. *ef* = QR. *b*E. Vel etiam, ducta per B recta indefinita BL parallela axi AH, atque in ea sumta KL ubique æquali respectivæ QR, ita ut inde nova curva δ*u*L resultet, erit MO. *ef* (= QR. *b*E) = KL. K*k* seu rec-lo figuræ Aδ*LK* inscripto.

Item EB : *f*B (= ON : RN) = MO : QR, ac consequenter MO. Bf = QR. EB, vel etiam = rec-lo IH*b* areæ A*α*IH inscripto, si, etiam in singulis ordinatis BH ultra axem AH productis, sumta fuerint segmenta HI æqualia homologis QR seu KL.

III. Quoniam igitur singulæ fluidi impressiones in curva AVB juxta directiones curvæ perpendiculares æquipollent lateralibus axi curvæ parallelis exponendis (num. 1. *hujus*) *rec-lis MO. ef*, vel (num. 11.) rec-lis LK*k*, & perpendicularibus axi exponendis (num. 1.) per rec-la MO. B*f*, seu (num. 11.) per rec-la IH*b*, impressio, quam universa curva AVB à fluido subibit, æquipollebit omnibus LK*k* & omnibus IH*b*; atqui omnium potentiarum *k*KL axi AH parallelarum media directio *Zu*, axi itidem parallela, (§. 56.) transit per centrum gravitatis areæ Aδ*LK*, quæ omnia LK*k* continet; & omnium potentiarum IH*b* axi AH perpendicularium media directio VY, axi AH normalis, seu ordinatis HI curvæ *α*YI æquidistans, transit per centrum gravitatis figuræ A*α*IH, quæ omnia IH*b* continet. Ergo impressio, quam fluidum in curvam AVB exerit

rit, eundem effectum præstat, quem præstaret potentia, quam exponit rec-lum MO. XZ, æquale areæ $A\delta LK$, agens in curvam juxta directionem XZ, simul cum potentia MO. XY, æquali areæ $A\alpha IH$, agente in curvam AVB juxta directionem XY; quandoquidem hæ potentiæ MO. XZ & MO. XY æquivalent omnibus LKk & omnibus IHh, & in harum omnium mediis directionibus XZ & XY curvæ AVB applicatæ intelliguntur. Sed (§. 49.) media directio potentiarum MO. XZ & MO. XY est $X\omega$, transiens per centrum gravitatis ω punctorum Z & Y, quibus rectæ XZ & XY terminantur, & quorum punctorum gravitas exponitur per datam MO, & impressio, quam proinde fluidum juxta hanc mediam directionem $X\omega$ in curvam AVB exeret, exponetur rec-lo $2MO.X\omega$.

IV. Sin verò curva $A2V2B$ sit subter axem AH constituta, quæ juxta directionem eidem ac in præcedenti casu SM, parallelam feratur, transferenda erit OS ad oppositam partem $O2S$, & ducenda $M2S$, tum ex puncto N demitti debet super $M2S$ perpendicularis $N2P$, & $2P2Q$ super MN, ac denique $2Q2R$ parallela MO; posita scilicet MN parallela tangenti curvæ $A2V2B$ ad alteram axis AH partem translatæ in puncto 2B, erit $2Q2R$ communis ordinata curvarum δuL & αYI, sed ad curvam inferiorem $A2V2B$ pertinentium, quas deinceps, confusionis vitandæ gratia, per $2\alpha 2u2L$ & $2A2\alpha 2Y2I$ insigniemus, quanquam in schemate expressæ non sunt, quia mente facile supplentur. Erit ergo impressio fluidi in curva inferiore $A2V2B$, juxta mediam directionem ejus $2X2\omega$, exponenda per $2.MO.2X2\omega$, eandem prorsus ob rationem, propter quam impressio in curva AVB juxta mediam directionem $X\omega$ ostensa est exponi rec-lo 2.MO in $X\omega$. Quod verò loco ipsius SM in curva AVB nunc sumenda sit 2SM inde est, quia revolutione figuræ $A2V2B$ cum lineis $2B2B$ ipsis BB (secundùm hypothesin) parallelis circa axem AH, adeo ut si curva $A2V2B$ alteri AVB similis & æqualis fuerit, cum ea congruat, lineæ $2B2B$ veniunt in situm $B2B$ subter rectam BL, eosdem vel æquales angulos constituentes cum angulis BBL, quos lineæ BB supra BL extantes cum hac BL continent, adeò ut anguli quilibet homologi BBL & $LB2B$ vel anguli MSO & $M2SO$ æquales futuri sint.

V. Si jam bilineum $BVA2V2B$ juxta directionem ipsis BB, $2B2B$ vel AT parallelas in fluido incedat, & quæratur media directio $C\sigma$ impressionum fluidi in curva $BA2B$, sic res expediri potest beneficio numerorum quarti & tertii hujus propositionis. Per numerum Fig. 114.

rum tertium etiam habentur media directio $X\beta$ & impressio fluidi in curva *AVB*, quæ illic exponebatur per 2.MO.$X\omega$. Sit igitur $X\beta = 2M\omega$ in fig. 113. eritque MO.$X\beta$ impressio fluidi, juxta mediam directionem in curva AVB, designante MO ubique velocitatis quadratum, qua celeritate videlicet fluidum curvæ prædictæ alliditur. Similiter, juxta numerum quartum hujus, invenientur media directio $2X2\beta$ & impressio fluidi, juxta hanc mediam directionem 2 in $2X2\omega$.MO, vel (si $2X2\beta$ sit dupla ipsius $2X2\omega$) MO.$2X2\beta$. A puncto intersectionis C duarum $X\beta$ & $2X2\beta$ sumantur in hisce æquales $C\theta$ & $C2\theta$, scilicet $C\theta = X\beta$ & $C2\theta = 2X2\beta$, jungaturque $\theta 2\theta$, adeoque per §. 49. media directio potentiarum MO.$C\theta$ & MO.$C2\theta$, quæ æquipollent fluidi impressionibus, quas ambæ curvæ *AVB* & $A2V2B$ subeunt, transit per centrum gravitatis punctorum θ & 2θ, id est, per punctum medium σ rectæ $\theta 2\theta$, & per punctum C, atque adeo hæc media directio est $C\sigma$, potentiaque seu impressio fluidi in universa curva $BVA2V2B$ erit 2.MO.$C\sigma$. Quæ omnia erant invenienda.

Aliter & brevius.

Numerus tertius hujus propositionis, ac consequenter quæ post eum sequuntur, omnia velut corollarium duntaxat deduci possunt ex Propositione VIII. Libri Primi §. 59. Nam figuræ similes NPMO & BC*b*E præbent $bB : eB (= MN : QN) = MO : QR$ atque adeò $MO.Be = Bb.QR$. Atqui MO.Be (num. 1. hujus) exponit impressionem filamenti fluidi bbBB in curvæ elemento B*b*, ergo hæc impressio etiam exponi potest per B*b*.QR, atque adeo fluidum eandem vim in elementum B*b* exserit, quam si singula elementi puncta juxta directiones eidem perpendiculares urgerentur potentia QR, adeo ut tota res reducatur ad Coroll. 1. prædictæ Prop. 8. Lib. I. Idcirco duntaxat propositionis ejusque corollarii constructiones forent relegendæ, atque loco curvarum ABB, XF & XD in figura 15. substituendæ *AVB*, αYI & $\delta\omega$L figuræ 113. ac denique, loco potentiarum BG in illa, subrogandæ potentiæ QR in hac figura, incideremusque in easdem penitus conclusiones, quas in præcedentibus numeris præsentis propositionis elicuimus.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [284] - 256
PUBLIC DOMAIN

Corollarium I.

452. Idcirco, ducta per punctum C recta Co parallela axi AH, invenietur sinus totus ad tangentem anguli $oC\sigma$, quem media directio Cσ bilinei BA2B cum axe AH, seu linea huic axi parallela Co continet, ut aggregatum arearum AδLK & 2A2δ2L2K ad differentiam arearum AαIH & 2A2α2I2H. Nam demissis ex punctis θ, σ, 2θ perpendicularibus θo, $\sigma\xi$, 2θ2o ad Co, & quia σ est punctum medium rectæ θ2θ, seu centrum gravitatis punctorum θ, 2θ, erunt (§. 46.) $2.C\xi = Co + C2o$, & $2.\xi\sigma = \theta o - 2\theta 2o$; adeoque $C\xi : \xi\sigma$, vel sinus totus ad tangentem anguli $\xi C\sigma = Co + C2o : \theta o - 2\theta 2o = MO.\,Co + MO.\,C2o : MO.\,\theta o - MO.\,2\theta 2o = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K$ ad $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H$. Nam (constr.) MO. C$o$; MO. C2$o$; MO. θo & MO. 2θ2o æquantur areis AδLK, 2A2δ2L2K; AαIH & 2A2α2I2H.

Corollarium II.

453. Sin verò bilineum fuerit ABE2BA, cujus partes, superior ACB & inferior A2B, inæquales sint, punctumque altissimum C arcus curvæ superioris ACB non existat in arcus termino B, sinus totus erit ad tangentem anguli, quem media directio impressionis fluidi in bilineo B2B cum axe AE continet, ut $A\delta LK + A2\delta 2L2K - FKL$ ad $A\alpha YI - A2\alpha 2Y2I$. Ubi δL est scala impressionum fluidi axi bilinei AE parallelarum, quæ ex perpendicularibus curvæ arcui AC derivantur, & FL est scala impressionum axi etiam parallelarum, sed derivatarum ex perpendicularibus arcui curvæ BC; & quia impressiones illæ axi parallelæ, quibus arcus BC afficitur, directe contrariæ sunt parallelis axi AE, quibus AC urgetur, ideo differentia arearum AδLK & FLK sumenda est ad habendam expressionem impressionum axi AE parallelarum, quibus tota curva ACB supra axem extans afficitur. Curvæ verò αYI, 2α2Y2I ad axem IA exstructæ sunt scalæ impressionum axi AE normalium ex perpendicularibus curvarum ACB & A2B impressionibus derivatarum, ac denique 2δ2L2K est scala impressionum axi parallelarum pertinentium ad curvam A2B. Curvarum αYI & 2α2Y2I ordinatæ in punctis axis I & 2I nullæ sunt, quia lineæ BB & 2B2B, quæ fluidi bilineo allidentis directionem denotant, bilineum in punctis B & 2B contingunt. Propter eandem rationem etiam curvæ FL ordinata Fig. 115.

in puncto F, *in* quo scilicet recta BF axi parallela alteri AK occurrit, nulla est.

COROLLARIUM III.

Fig. 113. 454. Si jam dicantur MO, a; OS, b; MS, c; coordinatæ AH, x; BH, y, & ON, m; ac MN, n: erunt $SN = b + m$, vel $N2S$ respectu curvæ inferioris $= b - m$. Hinc similitudo triangulorum SMO, SNP præbebit PN vel $N2P = (ab \pm am) : c$, ubi signum superius respicit curvam superiorem AVB, inferius verò inferiorem. Porrò habetur $MO : QR\ (= MN : QN) = MN^2 : PN^2$, atque adeò $QR = MO.\ PN^2 : MN^2 = (b \pm m)^2.\ a^3 : aacc + ccmm$, vel assumendo magnitudinem e, atque ponendo ecc æquale a^3, $= (b \pm m)^2.\ e : aa + mm = (bbe \pm 2bem + emm) : aa + mm = e, \pm 2bem : nn; + (bb - aa).\ e : nn$, vel ponendo denique $bb - aa = ff$, invenietur tandem scalarum resistentiæ seu fluidi impressionum communis ordinata $QR = KL = HI = e; \pm 2bem : nn; + eff : nn$.

Fig. 116. Jam data æquatione curvæ patientis AVB vel $A2V2B$, eaque differentiata, si loco elementorum dy & dx ordinatæ & abscissæ substituentur eorum proportionales a & m, seu MO & ON, habebitur æquatio expressa indeterminatis x, y & m, & quantitatibus datis seu constantibus, ex qua elicietur valor ipsius m in x & y ac constantibus, in quo ope æquationis curvæ patientis AVB vel $A2V2B$ alterutra ex indeterminatis x vel y semper eliminari potest. Invento verò valore ipsius QR in y & constantibus, areæ $A\delta LK$, $2A2\delta2L2K$; & $A\alpha IH$, $2A2\alpha2I2H$ inveniri poterunt, si non algebraice saltem transcendenter per series, aut etiam approximationibus. Sed horum omnium usus uno atque altero exemplo illustrari debet.

455. EXEMPLUM I. Esto rectangulum $BA2B$ incedens juxta directionem AT in fluido resistente; quæritur media directio SA impressionum hujus fluidi rectangulo allabentis. Angulus $BA2B$ recta AH bisectus sit, & hæc linea AH versus W producta consideretur instar axis linearum AB & $A2B$, quarum hæc repræsentat curvam patientem inferiorem, illa vero superiorem; atque demissis ex B, 2B & ex puncto T in recta AT, pro libitu accepto, perpendicularibus BH, $2B2H$ ac TW secante AN in puncto S, erunt $AH = BH$ & $A2H = 2B2H$, propter angulos semirectos BAH & $2B2A2H$. Sint insuper $AH = BH = X$ & $A2H = 2B2H = x$, & $BH = Y$, $2B2H = y$, unde $X = Y$ & $x = y$; hinc $dX = dY$, & $dx = dy$; unde utroque casu erit $a = m$,

atque

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [286] - 258
PUBLIC DOMAIN

atque adeò $mm(=aa+mm)=2aa$. Ergo ſubſtitutis hisce valoribus in formula ipſius QR valores determinante, invenietur pro linea AB ejus valor huic caſui applicatus $QR(=e,+2bem:nn;+eff:nn)=e;+be:a;+eff:2aa$, (ſeu reſtituendo $a^3:cc$, & $bb-aa$ valores quantitatum e & ff) $=(a^3+2aab+abb):2cc$. Adeoque elementum areæ $A\delta LK$ ſeu rec-lum $Lk=(aa+2ab+bb).adY:2cc$, & area ipſa $=(aa+2ab+bb.)a.AH:2cc$. Similiter area $2A2\delta2L2K$ erit $=(aa-2ab+bb).a.A2H:2cc$. Area $A\alpha IH$ pro linea $AH=(aa+2ab+bb).a.AH:2cc$; & area $2A2\alpha2I2H=(aa-2ab+bb).a.A2H:2cc$. Hinc (§. 452.) $AW:SW$ ſeu ſinus totus ad tangentem anguli $SAW=A\delta LK+2A2\delta2L2K:A\alpha IH-2A2\alpha2I2H$, atque adeo analytice erit $AW:SW=(aa+2ab+bb).a.AH,+(aa-2ab+bb.)a.A2H$ ad $(aa+2ab+bb).a.AH,-(aa-2ab+bb).a.A2H=(2ab+cc).AH,+(cc+2ab).A2H$ ad $(cc+2ab).AH,-(cc-2ab).A2H$. Ducatur TV parallela AL, eritque ob angulos ſemirectos MTW & WTV, $MW=TW=WV$, atque adeò cum AW (§. 454.) dicatur b & TW, a; erunt $a+b=AV$, ſeu $aa+2ab+bb=AV^2=cc+2ab$, & $aa-2ab+bb=cc-2ab=AM^2$; hinc $AW:SW=AV^2.AH+AM^2.A2H:AV^2.AH-AM^2.A2H=TL^2.AH+ML^2.A2H:TL^2.AH-ML^2.A2H=R.T^2+R^2.t:R.T^2-R^2.t=T^2+Rt:T^2-Rt$. *Poſitis AL:TL=R:T & AH:A2H=R:t*; ita ut T & t tangentes ſint angulorum datorum TAL & AB2B, ducta ſcilicet rectanguli diametro *B2B*, exiſtente ſinu toto ſeu radio R. Ducatur adhuc NX parallela TV vel AL, eruntque etiam MQ, NQ, & QX æquales; jam quia $AW:SW=AQ:NQ$ vel QX, erit etiam $=AX+AM:MX=LN+LM:LN-LM$, atque adeò $AW+SW:AW-SW=2LN:2LM=LN:AL$ vel LM. Verum, quia paulò ante reperiebatur $AW:SW=T^2+Rt:T^2-Rt$, erit etiam $AW+SW:AW-SW=T^2:Rt$; ergo etiam $LN:AL=T^2:Rt$: ſed eſt $AL:LT=R:T=Rt:Tt$; ergo ex æquo $LN:LT=T^2:Tt=T:t$. Ducatur diagonalis rectanguli 2AA, eaque producatur in Z, & exiſtente AL radio, ſeu ſinu toto, erunt TL & ZL tangentes angulorum TAL & ZAL vel A2A2B, quæ tangentes dicebantur T, & *t*; atque adeò $LN:LT=LT:LZ$; ſunt ergo NL, TL & ZL in continua ratione, ac per conſequens NL ad TL in ſubdupliçata ratione NL ad ZL, ſed hæc ratio NL ad ZL componitur rationibus NL ad AL, & AL ad ZL, id eſt, 2A2B ad A2B; ergo ratio NL ad TL eſt ſubduplicata ejus, quæ componitur ex NL ad AL & longitudinis rectanguli AB ad latitudinem A2B;

atque hæc est analogia, quam Celeb. Jac. Bernoullius in Actis Lipſ. 1696. pag. 336. ſine ulla analyſi & demonſtratione exhibuit, & in quam haud dubie via multo breviore incidit. Nam licet hunc caſum particularem non parum brevius, quam hoc loco à nobis factum ſit, ſolvi poſſe non ignoro, non abs re tamen fore arbitratus ſum, ſi methodum noſtram generalem talia tractandi etiam in aliquo caſu fuſius illuſtrarem, de cujus veritate aliunde conſtare poſſit.

456. Præſens exemplum particulare ſic brevius etiam expedietur: per angulos rectanguli B & $2B$ agantur BC, $2B2C$ æquidiſtantes ipſi AT, & per punctum A eidem perpendicularis $C2C$, ac denique ex punctis C, $2C$ demittantur ad latera rectanguli perpendiculares $CD2C2D$, ac aſſumta unitate pro deſignanda celeritate, qua rectangulum in fluido incedit, vel quod idem eſt, pro velocitate, qua fluidum lateribus rectanguli AB, $A2B$ allabitur, & (§. 429.) $A2D$ exponet impreſſionem fluidi, quam latus $A2B$ in directione ipſi normali excipiet, & AD exponet impreſſionem, quam latus AB excipiet juxta directionem lateri $A2B$ parallelam, ſeu AB perpendicularem. Unde cùm media directio AN impreſſionum fluidi in lateribus AB & $A2B$ naſcatur à potentiis lateralibus AL & LN, neceſſe eſt ut habeatur, $AL:LN=A2D:AD$; atqui $A2D:A2B=(A2B)^2:(A2C)^2=AL^2:AT^2$, & $A2B:2A2B$ vel $AB=ZL:AL=AL.ZL:AL^2$, ergo ex æquo $A2D:AB=AL.ZL:AT^2$; eſtque porrò $AB:AD=AB^2:AC^2=AT^2:TL^2$, adeoque iterum ex æquo $A2D:AD=AL.ZL:TL^2$. Atqui (ſecundùm hypotheſin) $AL:LN=A2D:AD$, ergo $AL:LN=AL.ZL:TL^2$, & quia $TL:AL=TL^2:AL.TL$, erit denique ex æquo $TL:NL=AL.ZL:AL.TL=ZL:TL$, atque adeo TL eſt media proportionalis inter tangentes angulorum datorum ZAL vel $A2A2B$ & NAL, ut ſupra invenimus. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 113, & 114. 457. Exempl. II. Reſumatur bilineum $BA2B$, quod ponatur eſſe parabolicum, cujus æquatio $2ax=yy$; exiſtentibus coordinatis ad axem AH, x & HB vel $2H2B$, y ac parametro $2a$. Æquatio bilinei differentiata præbet $adx=ydy$, vel ſubſtitutis loco elementorum dx & dy lineis proportionalibus m & a; $am=ay$ atque adeò $m=y$; hinc $nn=aa+yy$. Idcirco $QR=KL=HI\,(=e;\pm 2bem:nn;+eff:nn)=e;\pm 2bey:aa+yy;+eff:aa+yy$. Hinc (§. 454.) rec-lum $Lk=edy;\pm 2beydy:aa+yy;+effdy:aa+yy$.

Atqui omnia edy ſeu ſumma $edy=ey$; ac omnia $ydy:aa+yy$ æquantur log-mo rationis $aa+yy$ ad aa qui log-us dicatur $z:a$; reſpicitque lo-

logarithmicam, cujus ſubtangens eſt unitas. Et denique omnia $dy : aa + yy$ æquantur arcui circulari ω applicato ad aa quadratum radii, cujus arcus tangens ſit y; nam ejusmodi arcus elementum ſeu $d\omega = aady : aa + yy$. Propterea invenietur area $A\delta LK (2A2\delta2L2K) = ey$; $\pm 2bez : a$; $+ eff\omega : aa$; adeoque addendo $A\delta LK + 2A2\delta2L2K$; $= 2ey$; $\pm 2eff\omega : aa$ (vel loco ff reſtituendo ſuum valorem $bb - aa$) $= 2ey$; $+2bbe\omega : aa$; $- 2e\omega = 2eg$; $+ 2bbe\omega : aa$; poſitâ ad abbreviandum $g = y - \omega$.

Arearum $A\alpha IH (2A2\alpha2I2H)$ elementum eſt $= edx$; $\pm 2beydx : aa + yy$; $effdx : aa + yy = eydy : a$; $\pm 2bey^2dy : a^3 + ayy$; $+ effydy : a^3 + ayy$; quia $ydy = adx$. Atqui $yydy : aa + yy = dy$, $- aady : aa + yy = dy - d\omega$, & ut antea, $ydy : aa + yy = dz : a$, ac propterea,

$A\alpha IH (2A2\alpha2I2H) = eyy : 2a$; $\pm (2bey - 2be\omega) : a$; $+ effz : aa$; adeòque $A\alpha IH - 2A2\alpha2I2H = (4bey - 4be\omega) : a = 4beg : a$, poſita ſcilicet $y - \omega = g$.

Ducantur per A rectæ AT parallela BB, & AS æquidiſtans $C\sigma$, eritque $AW : WS = C\xi : \xi\sigma = A\delta LK + 2A2\delta2L2K : A\alpha IH - 2A2\alpha2I2H = (2eg ; + 2bbe\omega : aa) : (4beg : a) = aag + bb\omega : 2abg$; & $TW : AW = a : b = 2abg : 2bbg$; ergo ex æquo fiet $TW : WS = aag + bb\omega : 2bbg$. Dicantur inſuper TW, θ & SW, t; radiusque AW, r; eritque $\theta : t = aag + bb\omega : 2bbg$, & quia $r : \theta = b : a$, ſubſtitutis loco b & a proportionalibus r & θ, proveniet $\theta : t = \theta\theta g + rr\omega : 2rrg$; ex quâ elicietur $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; adeoque ipſæ æquationis radices erunt $\theta = \frac{rr}{t} \pm V\left(\frac{r^4}{tt} - \frac{rr\omega}{g}\right)$. Jam quia ſingulæ r, g, ω & t datæ ſunt, etiam θ data erit, quæ eſt tangens anguli TAW, quem directio figuræ BA2B in fluido incedentis cum axe AH continet, cum figura itinere permanente fertur absque converſionibus circa ſeipſam; qui angulus TAW angulus declinationis figuræ audit, ejusque tangens, TW declinatio ipſa; linea vero σC eſt directio, juxta quam figura in fluido ideo impelli debet, ut in directione ipſis BB, AT, &c. parallela itinere ſeu via manenti ea in fluido ferri queat; quæ omnia ſuo loco uberius explicabuntur. Fig. 114.

Cæterum exempla eorum caſuum, in quibus curvæ, ſuperior AB & inferior 2A2B, ſunt ſimiles & æquales, adeò ut hæ curvæ fluidi impreſſionibus expoſitæ communem abſciſſam AH, ordinatasque æquales BH & 2B2H habeant. Sed ea, ratione calculi, intricatiora evadunt, ſi curvæ AB & A2B, ut fig. 115. inæquales & tamen ſimiles ſeu totæ ACE, A2BE æquales ſunt, tunc enim

punctorum B & 2B positio, atque adeò abscissarum AH, A2H, & ordinatarum BH & 2B2H magnitudo pendet à positione rectæ AT, seu ab angulo quæsito TAW. Quomodo vero pro casibus hisce calculus debeat subduci, ex sequenti eluceſcet corollario.

COROLLARIUM IV.

Fig. 115. 458. Sint $\int mdy : nn = A1 : a$; vel $A2 : a$; vel $A3 : a$ pro curvis AC, A2B & CB, item $\int dy : nn = B1 : aa$ vel $B2 : aa$; aut $B3 : aa$, respectu earundem curvarum AC, A2B, & CB. $\int mdx : nn = C1 : a$, vel $C2 : a$, vel $C3 : a$; respectu earundem curvarum, & denique $\int dx : nn = D1 : aa$, vel $D2 : aa$ vel $D3 : aa$. Ubi numeri, literis A, B, C, D postpositi non sunt potestatum indices, sed tantum indicant quamnam ex curvis AC, A2B & BC hoc ordine, quo recensentur, respiciant in figura 115. Unde, quia in fig. 113, QR vel KL aut $HI = e; +2bem : nn; +eff : nn = e; \pm 2bem : nn; +(bb-aa).e : nn$; quia $ff = bb-aa$ ut supra (§. 454.) invenimus. Hinc area $A\delta LK = e.CD; +2be.A1 : a; +(bb-aa).eB1 : aa$, respectu curvæ AC fig. 115. Area $2A2\delta2L2K = e.2B2H; -2be.A2 : a; +(bb-aa).eB2 : aa$, respectu curvæ A2B. Area $FKL = e.KF; -2be.A3 : a; +(bb-aa).eB3 : aa$, respectu curvæ CB. Area $A\alpha Yd = e.AD; +2be.C1 : a; +(bb-aa).eD1 : aa$, respectu curvæ AC. Area $2A2\alpha2Y2I = e.A2H; -2be.C2 : a; +(bb-aa).eD2 : aa$; respectu curvæ A2B, & Area $dYI = e.DH; -2be.C3 : a; +(bb-aa).eD3 : aa$; respectu curvæ BC. Ergo $\overline{A\delta LK + 2A2\delta2L2K - FLK} = e.F2K; +2be.(A1-A2+A3) : a; +\overline{bb-aa}.(B1+B2-B3)e : aa$, & $A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha2Y2I = e.H2H; +2be.(C1+C2-C3) : a; +bb-aa.(D1-D2-D3)e : aa$. Atqui (§. 453) est $AW : WS = A\delta LK + 2A2\delta2L2K - FLK : A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha2Y2I$, ergo etiam $AW : WS = e.F2K; +2be.(A1-A2+A3) : a; +\overline{bb-aa}.(B1+B2-B3)e : aa$, ad $e.H2H; +2be.(C1+C2-C3) : a; +bb-aa.(D1-D2+D3)e : aa$. Unde, cum TW sit ad $AW = a : b$; habebitur ex æquo analogia, quæ suppeditabit æquationem quæsitam anguli TAW tangentem manifestaturam; sed quia ipsæ A2H, 2H2B, EH, HB ac per consequens ipsæ quoque HD & 2HD pendent à quantitatibus a & b, quarum hæc adhuc incognita est, ideo etiam ipsæ A2, A3, B2, B3, C2, C3 & D2 & D3 ab iisdem pendent; quod calculum perplexum reddit; præsertim si curvæ ACE & A2BE fuerint dissimiles seu diversæ.

459. Po-

459. Ponamus verò nominatas curvas ACE & A_2BE ſimiles & æquales eſſe, quo fiet ut arcus EB & A_2B æquales ſint; cum lineæ BB & $2B_2B$, ipſi AT (ſecundùm hypotheſin) parallelæ, arcus in B & $2B$ contingant, propterea erunt $EH = A_2H$, item $BH = 2B_2H$, atque adeò $HD = D_2H$, nec non producta $2B_2H$ usque ad occurſum ejus curvæ ECA in $3B$, fiet $2H_3B = 2B_2H = BH$, ac per conſequens linea BF, ipſi EA parallela, ſecabit curvam ECA in puncto $3B$, adeo ut arcus BC & C_3B ſimiles & æquales futuri ſint. Hisce poſitis reperietur $A_1 = A_2 + A_3$; $B_1 = B_2 + B_3$; $C_1 = C_2 + C_3$ & $D_1 = D_2 + D_3$; ac proinde hoc caſu habebimus

$A_1 - A_2 + A_3 = 2.A_3$ ſeu dupla A_3.

$B_1 + B_2 - B_3 = 2.B_2$.

$C_1 + C_2 - C_3 = 2.C_2$.

$D_1 - D_2 + D_3 = 2.D_3$. Adeoque hi valores, in analogia præcedentis paragraphi ſubrogati, præbebunt $AW : WS = e.F_2K + 4be.A_3 : a; + (2bbe - 2aae).B_2 : a^2$, ad $e.H_2H; + 4be.C_2 : a; + (2bbe - 2aae).D_3 : aa$, vel dividendo terminos per $2e$, ſicut $FA; + 2bA_3 : a; + (bb - aa).B_2 : aa$; ad $DH; + 2bC_2 : a, + (bb - aa).D_3 : aa$; & $WT : AW = a : b$; ergo ex æquo erit $WT : WS = a.FA + 2b.A_3; + (bb - aa).B_2 : a$, ad $b.DH; + 2bb.C_2 : a; + (b^3 - aab).D_3 : aa$; vel vocando tangentem anguli dati SAW, t; & tangentem quæſiti TAW, θ; habebimus $\theta : t = a^3.FA + 2aab.A_3; + (abb - a^3).B_2 : aab.DH, + 2abb.C_2, + (b^3 - aab)D_3$; adeoque, multiplicando extrema & media, habebimus æquationem ſequentem generalem $a^3t.FA + 2aabt.A_3 + (abbt - a^3t).B_2 = aab\theta.DH, + 2abb\theta.C_2, + (b^3\theta - aab\theta).D_3$. In qua æquatione loco magnitudinum FA, DH, A_3, B_2, C_2 & D_3 ſubrogandi ſunt earum valores, quos præbebit natura curvæ A_3BC expreſſi quantitatibus a, b, aliisque conſtantibus; poſitisque loco b, radii ſeu ſinus totius nomine r, & loco ipſius a nomine tangentis quæſitæ θ, habebitur æquatio in ſola θ & quantitatibus conſtantibus ſeu cognitis data, cujus æquationis radices manifeſtabunt valorem tangentis anguli quæſiti TAW.

460. Exempl. Sint curvæ ACE & A_2BE arcus æquales alicujus circuli, cujus radius $= e$, ac ſinus complementi arcus AC, qui eſt ſemiſſis totius ACE vel A_2BE, dicatur h, ſintque $h^3 : 3ee = k$, & $k - h = l$, invenienturque $A_3 = a^3e : 3c^3$, $B_2 = l; + be : c; - b^3e : 3c^3$; $C_2 = b^3e : 3c^3; - k$, ac denique $D_3 = a^3e : 3c^3$. Erunt porrò AF vel $BH = be : c; - h$, & DH vel $D_2H = ae : c$; qui valores in æquatione generali ſubſtituti, fractionum reductionibus ad nomen $3c^3$ rite per-

peractis, præbebunt $bblt - aalt - aaht; +2.(aa+bb)^2.bet : 3c^3 = -2bbk\theta; +2.(aa+bb)^2.be\theta : 3c^3$. Atqui (ſecundùm hypotheſin) eſt $l+h=k$, & (§. 454.) $cc=aa+bb$, ergo hi valores, in poſtrema æquatione ſuffecti, præbebunt $bblt - aakt + \frac{1}{3}bcet = -2bbk\theta + \frac{1}{3}bce\theta$. Hinc etiam $3bblt + 6bbk\theta - 3aakt = 2bce\theta - 2bcet$, & quadrando $9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt = (4bbee\theta\theta - 8bbeet\theta + 4bbeett)$ in cc. Unde ſubſtituendo $aa+bb$ loco cc, fiet $4aabbee\theta\theta - 8aabbeet\theta + 4aabbeett + 4b^4ee\theta\theta - 8b^4eet\theta + 4b^4eett = 9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt$. Vel poſitis loco b & a proportionalibus r & θ, in hac poſtrema æquatione, proveniet $4rree\theta^4 - 8rreet\theta^3 + 4rreett\theta\theta + 4r^4ee\theta\theta - 8r^4eet\theta + 4r^4eett = 9r^4lltt + 36r^4kt\theta - 18r^4lktt\theta\theta + 36r^4kk\theta\theta - 36rrkktt\theta\theta + 9kktt\theta^4$. Ex qua liquet problema eſſe ſolidum, nam radices hujus æquationis biquadraticæ exhibent valorem tangentis quæſitæ θ, ſeu tangentis anguli TAW, ſeu anguli declinationis bilinei 2BAC.

Corollarium V.

461. Si curvæ AB & A2B ſunt æquales, adeò ut communem abſciſſam AH habeant & ordinatas æquales BH & 2B2H, ut in figura 113. erunt $A1 = A2$ & $A3 = 0$; $B1 = B2$, & $C1 = C2$; $D1 = D2$, ſingulæ verò $B3$, $C3$ & $D3$ perinde ac $A3$ æquales 0; evaneſcet pariter linea, quæ in figura 115. repræſentatur per DH vel D2H, alteraque, quæ erat in hac eadem figura FA, in priore ſcilicet fig. 113. erit BH. Hoc ergo caſu formula generalis paragraphi 459. mutabitur in $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$. In exemplo proinde ſuperiore (§. 457.) curvæ parabolicæ, retentis ſymbolis illic poſitis, erunt $BH, = y$; $B2 = \omega$ & $C2 = y - \omega = g$, atque adeò æquatio $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$, abibit in $aaty + bbt\omega - aat\omega = 2bb\theta g$, vel $aatg + bbt\omega = 2bb\theta g$; atque adeò ſubrogatis loco a & b proportionalibus θ & r, erit $tg\theta\theta + rrt\omega = 2rrg\theta$, ac proinde $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; quæ eſt eadem æquatio, quam citato loco reperimus.

At ſciendum hanc ſolutionem imperfectam eſſe, quoniam æquatio amplius non inſervit, ſi ratio tangentis y ad arcum ω minor fuerit duplicata ratione ſecantis anguli SAW ad radium in fig. 114. Sed eo in caſu ipſa θ, ne quidem ſuppoſita arcuum circularium rectificatione, nulla æquatione algebraïca exhiberi poteſt.

Scho-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [292] - 264
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

462. Ex allatis exemplis satis constare potest, quam late pateat solutio problematis in præsenti propositione exhibita. An verò & quousque ea cum solutione ejusdem problematis conveniat, quam summus geometra Joh. Bernoullius in tractatu, Gallico idiomate sub titulo *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, nuperrime edito dedit, utriusque collatio ostendet.

Si angulus TAW datus sit, & alter angulus SAW quæratur, problema facile est; tunc enim in superioribus θ & r cum reliquis scilicet a, b, c, sunt magnitudines cognitæ, & quæsita est t.

CAPUT XIII.

De Figuris, quas superficies flexiles induere debent, cum Venti allapsus directe excipiunt, seu de curva Velaria.

QUamnam curvam induere debeat *velum* vento tumidum ante Celeberrimos Bernoullios nemo assignavit; sed eximii hi geometræ invenerunt velum ab allabente vento in eam ipsam curvam flecti debere, quam Joh. Bernoullius & Leibnitius atque Hugenius funi laxo atque flexili, vel catenulæ ab ambobus sui terminis pendenti convenire docuerunt, etsi eorum analysis velariæ nusquam publici facta sit juris. Sed quanquam *catenaria* atque *velaria* una eademque sint curva, non tamen ideo putandum, unius investigationem simul alterius quoque inventionem includere, adeò ut, qui catenariam geometrice invenerit, etiam velariæ problema solutum dedisse censendus sit, quod tamen Clariss. Vir David Gregorius insinuare videtur, in sua Catenaria Coroll. 7. post Prop. 2. sic scribens: *Quod si loco gravitatis alia quælibet vis similiter agens in lineam flexilem vires suas exerat, eadem producetur linea v. g. Si ventus æquabilis supponatur, & secundum rectas datæ positione rectæ parallelas spirans, linea vento inflata eadem erit cum catenaria.* Fateor quidem in thesi, ut ajunt, veram esse Egregii Viri assertionem, ecquis enim ambiget, quin alia quæcunque vis, loco gravitatis substituta, similiter applicata, ac eodem prorsus ac gravitas modo agens, eundem

effectum, eandemque adeo curvam ac gravitas, productura sit? Sed theseos applicatio in negotio velariæ claudicat, cum notabilis disparitas intercedat inter actionem gravitatis in catenaria, & venti actionem in velaria. Nam æquales catenariæ particulæ æqualibus nisibus descendere conantur juxta directiones horizonti perpendiculares, secus quam in velaria, cujus particulæ etiamsi æquales à filamentis aëreis eadem etiam velocitate in eas impingentibus inæquales tamen impressiones subeunt, & quidem juxta directiones non horizonti, sed curvæ elementis perpendiculares. Cum igitur circumstantiæ, quibus gravitas in catenariam ventusque in velariam agunt, toto cœlo differant, nemo non videt, quod ea, quæ de catenaria demonstrata sunt, non magis velariæ quadrare queant, quam analysis curvæ lintei convenire possit indagini curvæ elasticæ, etsi notante Clar. Jac. Bernoullio elastica etiam eadem sit cum curva lintei. Quoniam igitur problematis catenariæ solutio non involvit solutionem velariæ, & quoniam hujus problematis solutio, vel rectius dicendo analysis, nusquam adhuc publice, quod sciam, exhibita est præterquam §. 103. ubi ad illustrationem generalissimi nostri theorematis problematis de velaria solutionem obiter elicuimus, partem physicam problematis alibi excutiendam illic relinquentes; nunc vero ex professo problema tractabimus, analysin ejus geometricam traditurі intelligentibus, ut opinor, non displicituram, præmissis tamen prius duobus lemmatis in aliis etiam usui futuris.

PROPOSITIO LI. Lemma.

Fig. 117. 463. *Centro* O *& semilatere transverso* OA *descripti sint quadrans circuli* AGK, *& hyperbola æquilatera* ABM, *tum etiam logarithmica* AC *circa asymptotam* LK, *cujus subtangens sit* OL *æqualis radio quadrantis* OA, *quæ log-mica per punctum* A *transeat, ductisque ex quolibet hyperbolæ puncto* B *ad centrum* O *recta* BO, *tangente hyperbolam in vertice* AP, *secante in puncto* F, *& per hoc punctum* F *recta* FH *parallela radio* AO, *quadrantem secante in* G, *&* OK *in* H. *Si* KG *recta jungens puncta* K *&* G *producatur usque dum cum radio* OA *itidem protenso concurrat in puncto* D, *atque per hoc punctum ducta fuerit recta* DC *ipsi* LK *æquidistans. Rectangulum sub hac* DC *& radio* OA *æquabit ubique duplum respondentis sectoris hyperbolici* ABO.

Sumto alio in hyperbola puncto *b*, alteri B indefinite vicino, ducantur *b*O secans AP in *f*, item *fh*, parallela FH, circulum in *g*, re-

rectam KG in *a*, & OK in puncto *h* interſecans; jungaturque K*g* & producatur in *d*, per quod punctum alia *de* ducta ſit priori DC æquidiſtans: agantur pariter *d*L & OG, item C*κ* parallela O*d*, & *γg* parallela OK, hyperbolæ ordinata EB continuetur usque in *β*, & CD usque in *δ*; quibus factis per quadrantis puncta G & K ductæ ſint tangentes GI & KI, quæ æquales erunt; quibus præparatis

I. Liquet fore *d*L parallelam tangenti log-micæ in puncto C, quandoquidem hujus log-micæ ſubtangens (ſecundùm hypotheſin) æqualis eſt OL; atque adeò *dδ* parallela & æqualis erit particulæ log-micæ C*c*, ac etiam *cκ* = D*δ*.

II. Triangula ſimilia OEB, OAF præbent $OE^2 : EB^2 = OA^2 : AF^2$. Vel, quia in hyperbola quadratum OE æquatur binis quadratis OA & EB collective ſumtis, erit etiam $OA^2 + EB^2 : EB^2 = OG^2 : OH^2$; & dividendo $OA^2 : EB^2 = GH^2 : OH^2$ vel AF^2, vel invertendo ac permutando $EB^2 : AF^2 = OG^2 : GH^2$. Atqui $EB^2 . AF^2 = OB^2 : OF^2 = 2$. triang. BO*β* ad 2. triang. FO*f*, id eſt, ad rec-lum FH. H*h*, ergo 2. triangulum BO*β* : FH. H*h* = $OG^2 : GH^2$.

III. Triangula ſimilia G*ga* & GIK exhibent G*g* : *ga* = GI : IK, unde, quia tangentes IK & GI æquantur, etiam G*g* & *ga* æquales erunt.

IV. Propter parallelas O*d* & *hg*, erit O*d* : D*d* = *hg* vel HG : *ag* vel (*num.* 111.) G*g*, & *invertendo ac permutando* D*d* : G*g* = O*d* : GH, at D*δ* : D*d* = OL vel OG : O*d*, ergo ex æquo D*δ* : G*g* = OG : GH, & propter triangula ſimilia OGH & G*gγ*, ſit G*g* : *γg* vel F*f* = OG : GH ergo ex æquo & per rationum compoſitionem, D*δ* : F*f* = OA. D*δ* : FH. F*f* = $OG^2 : GH^2$ (num. 11.) = 2. triangulum BO*β* : FH. F*f* vel FH. H*h*. Adeoque 2. triang. AO*β* = OA. D*δ* (num. 1.) = OA. *cκ*. ergo omnia 2. BO*β* id eſt duplus ſector BAO = omnibus *cκ* in AO, id eſt *rec-lo DC in AO*. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

464. Per hyperbolæ punctum B ducta ſit tangens BT, ac per punctum T recta TV parallela OK rectæ OB occurrens in puncto V, ac denique agatur B*θ* parallela AD.

I. Oſtendam, quod TV producta transibit per punctum G, adeo ut TO = GH. Nam in hyperbola lineæ GH, OA & OE ſunt in continua ratione, atqui propter tangentem BT, etiam OT, OA & OE ſunt in continua ratione, ergo OT = GH.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [295] - 267
PUBLIC DOMAIN

II. Elementum quadrantis Gg æquabitur lineolæ $B\beta$. Nam $Gg : \gamma g$ vel $Ff = OG : GH = AO : TO = EO : AO$, atqui etiam $B\beta : Ff = EO : AO$, ergo $Gg : Ff = B\beta : Ff$, atque adeò $Gg = B\beta$.

III. Figuræ similes $b\theta B\beta$ & BETV, utpote quæ circa eandem rectam bT constitutæ, & è triangulis similibus $b\theta$B, BET, & $bB\beta$, BTV compositæ sunt, præbent analogiam $b\theta : B\beta$ vel (num. 11. hujus) Gg aut (num. 111. §. 463.) $ga = EB : TV = EO : TO$, atqui $ga : Dd = GH$. (num. 1. hujus) $OT : Od$, & $Dd : D\delta = Od : OL$ vel OA, ergo ex æquo habetur $b\theta : D\delta = EO : AO = AO : TO$; atque adeò $b\theta . TO = AO . D\delta = AO . c\kappa$.

IV. Est vero duplum trianguli $bTO = be . TO$, duplumque trianguli $BTO = BE . TO$, ergo duplum trianguli $BOb = b\theta . TO$ (num. 111. hujus) $= AO . c\kappa$, & per consequens etiam areæ BAO duplum æquabit rectangulum sub AO. DC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

465. Ductis ex logarithmicæ puncto C ad puncta A & O rectis CA & CO, triangulum rectilineum CAO æquabitur ubique homologo sectori hyperbolico BAO.

Corollarium II.

466. Jungatur OI, eaque producatur in P, eruntque $AP = OD$, & $OP = KD$. Nam, quia OS ipsi KD normalis est, erunt anguli SOK ejusve alternus APO & ODK æquales, atque adeo triangula rectangula AOP & OKD similia, ob latera verò AO & OK æqualia erunt etiam hæc triangula æqualia, ac proinde $AP = OD$ & $OP = KD$. AP autem est tangens arcus AR compositi ex arcu AG, cujus sinus OH æquatur tangenti AF anguli sectoris AOB, & ex semissi GR complementi ejusdem. Et DC est log-us rationis DQ ad AO, id est, log-us rationis tangentis AP prædicti arcus seu anguli compositi AOR ex angulis AOG & GOR ad radium seu sinum totum AO. Atqui ratio AP ad $AO =$ rationi OK ad IK, id est, rationi, quam habet radius OK ad tangentem IK semissis complementi anguli AOG, cujus sinus æquatur tangenti anguli sectoris AOB.

Scho-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [296] - 268
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

467. Hæc propositio plurimum conducit reductioni elementorum sectorum hyperbolicorum ad simpliciora elementa log-mica. Nam si $AO = a$; $OD = m$; $OE = x$; $EB = y$; $AF = z$, & $AE = u$. Atque his positis, erit

I. $y = \sqrt{(xx - aa)}$, $AF = a\sqrt{(xx - aa : xx)}$; adeòque $Ff = a^3 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$, & $FH.\ Hb = a^4 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$. Unde quia triang. $BO\beta$: triang. $FOf = OE^2 : OA^2$, reperietur duplum trianguli $BO\beta = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Hoc idem brevius inventum fuisset ope num. IV. §. 466. uti ostendimus $2.BOb = OT.b\theta$; nam $b\theta = xdx : \sqrt{(xx - aa)}$ & $OT = aa : x$, ergo $OT.b\theta = aaxdx : x\sqrt{(xx - aa)} = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Jam $KH = (ax - a\sqrt{(xx - aa)}) : x$, & GH vel $OT = aa : x$; atque triangula KHG & KOD similia sunt, ergo $m = aa : x - \sqrt{(xx - aa)}$ & $x = (aa + mm) : 2m$, qui valor substitutus in præcedenti expressione elementi $BO\beta$, producet $2BOb = aadm : m$.

II. Quia $x = a + u$ & $dx = du$, erit $2BOb = aadx : \sqrt{(xx - aa)} = aadu : \sqrt{(2au + uu)}$, & $u + a = (aa + mm) : 2m$, vel $u = (m - a)^2 : 2m$, qui valor in formula $aadu : \sqrt{(2au + uu)}$ suffectus, dabit iterum $2BOb = aadm : m$.

III. Propter triangula similia OAF & OEB invenietur $ay = xz$, hyperbola verò præbet $y = \sqrt{(xx - aa)}$; unde $x = \sqrt{(aa - zz)}$, ex triangulis verò similibus KHG & KOD elicitur $am - mz = a\sqrt{(aa - zz)}$ & $z = amm - a^3 : mm + aa$, qui valor ipsius z ejusque elementi $a^3 dz : aa - zz = 2BOb$ substitutus, dabit etiamnum $2BOb = aadm : m$.

Similes regulas reducendorum sectorum hyperbolicorum ad logarithmos ex sua methodo generali reducendi quadraturas curvarum, quarum ordinatæ fractionibus rationalibus per abscissam varie affectam & datas, exhibitis exprimuntur, ad logarithmos, jam pridem elicuit Vir Celeb. Joh. Bernoulli in Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1702. d. 13 Decemb. & in Act. Lipsi. 1703. pag. 30. & 31. Cæterum, etsi præcedens theorema nostrum de hyperbola tantum æquilatera agit, paucis tamen mutatis ad quascunque hyperbolas potest extendi.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [297] - 269
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LII. Lemma.

468. *Si rectæ* AM *positione datæ alia* AB *magnitudine data perpendiculariter insistat, per cujus terminum* B *rectæ quæcunque* BM, Bm *ad alteram* AM *ducantur, & per puncta* M, m, &c. *in quibus huic occurrunt, perpendiculares* MN, mn, &c. *ipsis* BM, Bm, &c. *respective æquales, omnia puncta* N, n, &c. *in curva* LNn *hyperbolæ æquilateræ sita erunt, cujus centrum* A, *& semilatus transversum* AL.

Fig. 118. *Positisque punctis* M, m *indefinite vicinis, ac descripto centro* B *intervallo* BM *arculo* Mμ, *junctisque* AN, An, *rectangulum sub radio* BA *& arculo* Mμ *duplum erit trilinei* ANn *seu elementi sectoris hyperbolici* ANL.

I. Ducatur NX parallela AM, & quia (secundùm hypothesin) MN = BM, & AB = AL, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2$ = rec-lo BXL, ergo punctum N est in hyperbola æquilatera LN, cujus latus transversum est BL & centrum A. Curva LN etiam hyperbola erit, si MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta sit tangens hyperbolæ N*q*, eruntque tres MN vel BM, AL vel BA & A*q* *in continua ratione*, atque adeò BM : BA = BA : A*q*, atqui propter triangula similia ABM & μM*m*, est etiam BM : BA = M*m* vel N*o* : Mμ; ergo N*o* : Mμ = BA : A*q*, atque adeo BA. Mμ = N*o*. A*q* (num. IV. §. 464.) = 2. AN*n*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

469. Adeoque, si tota AM *infinitis composita sit particulis infinitesimis qualis* M*m*, & per singularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arculis Mμ, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum AN*n*, quæ in sectore hyperbolico ANL continentur, id est, duplo ipsius sectoris.

Corollarium II.

470. Ducendo igitur per punctum intersectionis *t* rectæ AN & tangentis hyperbolæ A*t* in vertice, lineam *tsr* parallelam AL, & *us*L,

us L, quæ ipsam AL productam secet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ subtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM log-micæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi Mμ collective sumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes Mμ in AB = 2. areæ ANL & (§. 463.) 2 sect. ANL = AB vel AL in PO, erunt omnes Mμ. AB = AB. PO, atque adeo omnes Mμ = PO.

PROPOSITIO LIII. Problema.

471. *Si filum perfecte flexile* HA2H *ambobus suis terminis* H, 2H *fixum, spiranti vento juxta directiones* cc, CC, GG *datæ positione rectæ* AW *parallelas expositum sit, assignare curvam, quam filum induere debet.* Fig. 118.

Analysis Geometrica. I. Quia ventus impressiones in velariam exserit (§. 249.) juxta directiones C*l* curvæ quæsitæ ACH normales, atque adeò (§. 96.) constat tenacitatem veli in singulis ejus punctis eandem esse oportere; talis tenacitas constans per datam rectam *AB* axi AW normalem exponi potest, si venti velocitas sit 1, sin verò velocitas exponatur linea recta V, (§. 100.) tenacitatem per hoc factum $V^2.AB$ repræsentare oportebit, ut mox videbimus. Nam sumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis C*c*, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ *AW* ductæ intelligantur *c*W, CI & GK, quæ rectas CC & GG secabunt in *f* & F; & demissa ex puncto *f* perpendiculari ad elementum curvæ *c*C, quæ sit *fd*, per punctum *d* agatur *de* æquidistans axi AW, & denique esto C*h* = GF, adeò ut *fh* differentia sit inter *f*C & F*g*; & his positis impressio, quam filamentum aëris *cc*CC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum C*c* exseret (§. 429.) exponitur per factum $V^2.cd$; ejusque directio C*l*, ut jam dictum, est ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta sunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine $V^2.AB$ ejusdem generis cum $V^2.cd$, seu impressione quam elementum C*c* excipit juxta C*l*, vel quodlibet aliud juxta directionem ipsi normalem. Exponat jam C*l* magnitudinem $V^2.cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque C*k* & *lk* axi AW parallela & normali, & potentia C*k* erit $V^2.ce$; nam in triangulis similibus C*lk* & *cde*, lineola *ce* alteri C*k* homologa est, cum sit C*l* : C*k* = *cd* : *ce*; atqui C*l* = $V^2.cd$, ergo etiam C*k* = $V^2.ce$. Jam, cum alibi (§. 93.) osten-

oſtenſum ſit, Ck eſſe ad fh ut tenacitas fili in elemento Cc, ad hoc elementum Cc, vel permutando Ck ad dictam tenacitatem ut fh ad Cc; erit $V^2.ce : V^2.AB = ce : AB = fh : Cc$, & permutando $ce : fh = AB : Cc$.

II. Per terminum B datæ BA ducantur BM, Bm parallelæ elementis curvæ CG, Cc, centroque B intervallo $BQ = CG = Cc$ deſcripto arculo QR, agantur QS, $R\sigma$ parallelæ AM, item Rx æquidiſtans BA; ST perpendicularis ipſi BQ, & denique TV parallela SQ, quibus poſitis, ultrò liquet, triangulum BQS triangulo cCf, & $BR\sigma$ triangulo CGF ſimilia, æqualia, & ſimiliter poſita eſſe; adeò ut ſint $xQ = fh$, $BV = ce$, & $Cc = BQ$ vel BR; adeòque analogia præcedentis numeri $ce : fh = AB : Cc$, eadem eſt cum $BV : xQ = AB : BQ$; in triangulis verò rectangulis ſimilibus yQR & BTS, baſes yQ & BS à perpendiculis Rx & TV proportionaliter dividentur, adeò ut ſit $xQ : yQ = BV : BS$, & permutando ac invertendo $BV : xQ = BS : yQ = BA : Mm$; antea verò habuimus $BV : xQ = AB : BQ$; ergo etiam $AB : Mm = AB : BQ$, atque adeò $Mm = BQ = Cc$; quod cum de ſingulis Mm, quæ in tota Am & de ſingulis Cc, quæ in tota curva cGA continentur, reſpective valeat, liquet omnes Mm, ſeu totam Am vel AM omnibus Cc, ſeu toti cGA vel CGA æquari. Unde, quia BM tangenti velariæ in puncto C (ſecundùm hypotheſin) parallela eſt, erit data BA ad AM ſeu ipſi æqualem curvam AGC, ſicut ordinata CI ad ſubtangentem velariæ reſpicientem ejus punctum C. Hæc proprietas etiam catenariæ convenit, ut alibi velariæ atque catenariæ identitas jam (§. 106.) oſtenſa eſt.

III. Conſtructio autem curvæ hactenus ex oſtenſis facile elicietur: nam cum Mm ſit $= Cc$, & Bm (ſecundùm hypotheſin) parallela Cc, deſcripto centro B arculo $M\mu$, triangulum $Mm\mu$ triangulo cCf ſimile & æquale erit, ac proinde $Cf = m\mu$, & omnes Cf, id eſt, $WA =$ omnibus $m\mu$ ſeu mi, deſcripto ſcilicet centro B radioque BA circulo $A\omega$. Sic etiam abſciſſa AI æqualis exiſtet $M\omega$ poſita, ut antea, BM parallela tangenti curvæ in C.

Elementum verò ordinatæ $cf = M\mu$ & omn. cf, ſeu cW aut $CI =$ omnibus $M\mu$ (§. 470.) $= PO$ poſita conſtructione in citato hoc paragrapho 470. Eſt ergo quælibet ordinata CI æqualis homologæ PO. Quæ omnia erant invenienda.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [300] - 272
PUBLIC DOMAIN

Corollarium I.

472. Quia in hyperbola æquilatera LN tres AX, AL & Aq ſunt continue proportionales propter tangentem hyperbolæ Aq, & ex natura hyperbolæ etiam tres AX, AL & rs, adeò ut Nq & rs æquentur, erunt, ducta As, triangula ABM & Asr ſimilia; nam AX = MN (conſtr.) = BM eſt ad AL vel AB, ſicut AL vel As ad Aq vel rs, atque adeò triangula ABM & rsA ſimilia ſunt, ac per conſequens As ipſi BM ſeu etiam tangenti velariæ in C parallela eſt, angulusque uAs æquabitur illi, quem tangens velariæ modo nominata, & quantum opus eſt producta, cum axe AW conſtituit, cujus ſemiſſis eſt angulus rsu; unde cum PO ſit log-us rationis PA ad LA, ſeu PA ad Au, hoc eſt, rationis rs ad ru; ſequitur PO eſſe log-mum rationis, quam radius habet ad tangentem anguli rsu vel dimidii anguli uAs, in logarithmica, cujus ſubtangens par eſt radio AL; & in omni alia logarithmica, ſi ſumatur quarta proportionalis ad log-micæ ſubtangentem AL, & ad log-um prædictæ rationis radii ad tangentem ſemiſſis anguli uAs, manifeſtabit ea ordinatam velariæ CI in puncto C, ſi ſcilicet angulus uAs æqualis fuerit angulo, quem tangens velariæ in C producta cum axe AW continet.

Corollarium II.

473. Circulus centro B radioque BA deſcriptus rectam BM productam ſecet in Ω, eritque propter tangentem circuli AM & ſecantem MΩ, $M\Omega : MA = MA : M\omega$, ſeu $2AB + M\omega : AM = AM : M\omega$, adeoque $2AB + M\omega : M\omega = AM^2 : M\omega^2$, & dividendo $2AB : M\omega = 2.AB.M\omega : M\omega^2 = AM^2 - M\omega^2 : M\omega^2$, atque adeò $2AB.M\omega = AM^2 - M\omega^2$. Innoteſcit ergo ex datis AM vel AC & $M\omega$ vel AI parameter velariæ AB ſeu Au.

Porro quia (§. 472.) $Ar : rs = AM : AB = 2AM.M\omega : 2AB.M\omega = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, erit A$s$ vel Au : $Ar = AM^2 + M\omega^2 : 2AM.M\omega$, & dividendo A$u$ − Ar vel ru ad $Ar = (AM - M\omega)^2 : 2AM.M\omega$, & $Ar : rs = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, ergo ex æquo $ru : rs = (AM - M\omega)^2 : AM^2 - M\omega^2 = AM - M\omega : AM + M\omega =$ curva AC abſciſſa ejus AI, ad AC + AI. Unde, cum ſit $PA : LA = rs : ru = AC + AI : AC - AI$, & PO log-us rationis PA ad LA; erit etiam PO log-us rationis AC + AI ad AC − AI, cujus rationis termini, ſcilicet ag-

gregatum & differentia curvæ AC & ejus abſciſſæ vel ſagittæ AI, dati ſint. Idcirco, ſi fiat ut $2M\omega$ ſeu $2AI$ ad $AC+AI$ ita $AC-AI$ ad quartam magnitudinem Q, deinde ut ſubtangens log-micæ cujuscunque ad log-mum rationis $AC+AI$ ad $AC-AI$ in hac logarithmica, ita magnitudo vel linea Q ad aliam R, hæc linea, juxta præcedens corollarium, dabit ordinatam CI noſtræ velariæ AC.

Corollarium III.

474. Juxta §. 110. erit media directio impreſſionis venti filum CAC inflantis in axe AW, nam hæc media directio angulum à tangentibus velariæ ductis per puncta C, C ad utramque axis partem ſimiliter ſita contentum, bifariam dividit, quod etiam axis AW præſtat; eſtque adeò (§. 110.) impreſſio venti in velaria, juxta ejus mediam directionem WA, ad tenacitatem velariæ in omnibus ejus punctis eandem, ſicut dupla Ar ad As, id eſt, ut ſupra (§. 473.) habuimus, ſicut $4AM.M\omega$ ad $AM^2+M\omega^2$, id eſt, ſicut $4AC.AI$ ad AC^2+AI^2. Unde, quia tenacitas velariæ (num. 1. §. 471.) eſt $V^2.AB=(AC^2-AI^2:2AI).V^2$, erit impreſſio venti in velariam juxta ejus mediam directionem $WA=V^2.2AC.(AC^2-AI^2):AC^2+AI^2$.

Corollarium IV.

475. Velariæ verò æquatio differentialis ex allata conſtructione facillime elicietur; nam ſi dicantur BA, a; AI, x; CI, y; Cf, dx; cf, dy; $Cc=CG=ds$; $fh=ddx$, erit $ce=dy^3:ds^2$, & analogia, in quam ſupra (num. 1. §. 471.) incidimus *ce* vel $dy^3:ds$ ad *fh* ſeu *ddx*, ut AB vel *a*, ad *Cc* ſeu *ds*; quæ, *multiplicatis extremis & mediis*, dabit æquationem velariæ *differentio-differentialem* $dy^3=adsddx$, in quam Celeberrimi Bernoullii etiam inciderunt, ut videre licet in Act. Erudit. Lipſ. 1695. pag. 546.

Æquatio differentialis velariæ elicitur ex ſimilitudine triangulorum ABM & $Mm\mu$; eſt enim $m\mu:M\mu=AM:AB$; unde quoniam $AB=a$, $M\omega=AI=x$, atque adeò $AM=V(2ax+xx)$, $m\mu=dx$ & $M\mu=CF=dy$; erit $dy=adx:V(2ax+xx)$ prima æquatio differentialis primi gradus, naturam velariæ explicans.

Sin verò BM vel *u*I fuerit $=x$, tunc erit $AM=V(xx-aa)$, & $dy=adx:V(xx-aa)$, quæ eſt altera velariæ æquatio differentialis.

Et

Et hæ ſunt æquationes, in quas laudati Bernoullii jam pridem inciderunt, quisque eorum ſua methodo propria uſus.

Scholion.

476. Ex noſtra conſtructione atque analyſi jam ſponte naſcuntur præcipuæ proprietates velariæ, & maxime notabiles. Nam

1°. Curva AC æqualis eſt ubique reſpectivæ ordinatæ XN hyperbolæ æquilateræ LN, cum hæc ordinata ſit æqualis MA, cui curva AC æqualis oſtenſa.

2°. Facta ubique AM = curvæ AC, ſi per velariæ punctum C parallela ducatur rectæ BM, ea velariam in puncto C continget.

3°. Area *u*AC2*f* æquatur ubique rec-lo BAM ſeu rec-lo ſub curva AC & recta AB, quæ inſtar parametri eſt; atque adeò areæ *u*AC2*f* ſuis homologis curvis AC proportionantur. Nam elementum areæ prædictæ eſt $f2f.fc = Bm.M\mu = 2.$trianguli BM*m*; ſunt enim $f2f$ vel $uW = Bm$, & $cf = M\mu$, ergo omnia $f2f.cf$ ſeu area *u*AC2*f* = omnibus 2.MB*m*, hoc eſt, duplo trianguli BA*m*, id eſt, rec-lo AB in A*m*, vel AB. AM ſeu AB. AC.

4°. Si in MI ſumatur $u\xi$ ejus magnitudinis, ut rec-lum $u\xi$.AM æquet aream hyperbolicam ALNM, punctum ξ erit centrum gravitatis curvæ CAC. Sit enim centrum hujus curvæ in aliqua recta $\xi\gamma$ parallela ipſi AB, ponaturque curvam AC libratam pendere ad axem librationis *u*2*c*; erit (§. 44.) AC.$u\xi$ = omnibus *u*I.C*c* = omn. BM.M*m* = omn. MN.M*m* = areæ ALNM, atque AC = AM; ergo AM.$u\xi$ = ALNM, unde cum centrum gravitatis curvæ CAC ſit etiam in axe AW, erit omnino in puncto ξ.

5°. Sin verò centrum gravitatis curvæ AC fuerit in recta $\delta\gamma$, erit (§. 44.) Aδ.AC = omn. CI. C*c*. Atqui omn. CI. C*c* = AC. CI − omn. AC.*cf* = AC. CI − omn. AM. $M\mu$, & triangula ſimilia ABM & M$m\mu$ præbent AM. $M\mu$ = AB. $m\mu$, atque adeo omn. AM. $M\mu$ = AB.ωM = AB. AI; ergo omn. CI. C*c* = AC. CI − AB. AI = AM. CI − AB. AI; atque adeò Aδ vel $\xi\gamma$ in AC = AC. CI − AB. AI = AC. CI − AC. Aλ, ducta ſcilicet tangente $\omega\lambda$; adeòque $\xi\gamma$ = CI − Aλ; adeòque centr. grav. curvæ AC diſtat à recta *c*2*c* intervallo Aλ vel $\omega\lambda$.

6°. Adeòque ſuperficies genita ex converſione curvæ AC circa axem AI æquatur circulo, cujus radius poteſt duplum rec-li $\xi\gamma$. AC ſeu 2AC. CI − 2AB. AI. Nam ſupra (§. 47.) demonſtratum eſt, magnitudinem *genitam* ex rotatione alicujus *genitricis* circa axem

positione datum, æquari facto ex magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis; & viæ centri gravitatis sunt circumferentiæ circulares a centro descriptæ, atque adeo radiis suis proportionales. Propterea magnitudines genitæ sunt in composita ratione magnitudinum genitricium & distantiarum centri earum gravitatis ab axe rotationis. Idcirco erit superficies ex conversione curvæ AC circa AI ad circulum quemcunque, cujus radius est R, in composita ratione magnitudinis AC superficiei genitricis ad magnitudinem R circuli genitricem, & distantiæ centri gravitatis γ illius magnitudinis ab axe AI seu $\gamma\xi$ ad distantiam centri gravitatis hujus, seu $\frac{1}{2}R$, hoc est, sicut AC. $\xi\gamma$ ad R. $\frac{1}{2}$R, id est, sicut 2AC. $\xi\gamma$ vel 2AC. CI — 2AB. AI ad R^2; adeoque si $R^2 = 2AC.CI - 2AB.AI$, erit superficies genita circulo æqualis.

7°. Eodem argumento circulus, cujus radius R potest duplum areæ hyperbolicæ, AMNL, æquatur superficiei ex conversione AC circa axem $u2c$ genitæ. Nam dicta superficies erit ad circulum, ut AC. $u\xi$ ad $\frac{1}{2}R^2$; vel ut 2AC. $u\xi$ ad R^2; atqui (num. 4.) AC. $u\xi$ = AMNI, ergo superficies ex curva AC circa $u2c$ est ad circulum radii $R = \sqrt{2}$AMNL, ut 2AMNL ad 2AMNL, id est in ratione æqualitatis.

8°. Sin verò ρ centrum fuerit gravitatis areæ $uAC2f$, ducatur $\rho\theta$ parallela AB, eritque (§. 44.) $u\theta$ in aream $uAC2f$ = omnibus momentis rec-lorum $f2c$ ad axem $u2c$ appensorum; hoc est $u\theta$. AM. AB = omnibus $\frac{1}{2}.c2c.c2c.cf$; nam (num. 3.) est area $uAC2f$ = AM. AB. Atqui $\frac{1}{2}c2c.\ c2c.\ cf = \frac{1}{2}$BM. BM. $M\mu = \frac{1}{2}$AB. BM. $Mm = \frac{1}{2}$AB. MN. Mm, ergo omn. $\frac{1}{2}.c2c.c2c.cf = \frac{1}{2}$AB in aream ALNM; atque adeò $u\theta$. AM. AB = $\frac{1}{2}$ AB. ALNM, vel $2u\theta$. AM = ALNM. Sed (num. 4.) habuimus etiam $u\xi$. AM = ALNM, ergo $u\xi$. AM = $2u\theta$. AM, vel $u\xi = 2.u\theta$, adeoque centrum gravitatis curvæ AC duplo longius distat à linea $u2c$, quam centrum gravitatis areæ $uAC2f$.

9°. Hinc solidum ex rotatione figuræ $uAC2f$ circa axem $u2f$, semissis est cylindri, cujus altitudo AB, & baseos radius potest duplum areæ hyperbolicæ ALNM. Nam hoc solidum (§. 47.) æquatur facto ex area $uAC2f$ in circumferentiam radii $u\theta$, cum ρ sit centrum gravitatis areæ, hoc est = AB. AM in circumf. radii $u\theta$ (num. 8.) = $\frac{1}{2}$AB. AM in circumf. $u\xi$. Atqui AC vel AM in circumf. $u\xi$ est superf. ex AC circa $u2c$ (num. 7.) = circulo cujus radius = $\sqrt{2}$ALMN; ergo solidum areæ $uAC2f$ circa $u2f$ rotatæ = cylindro, cujus radius potest $\frac{1}{2}$2ALMN, & altitudo est $\frac{1}{2}$AB; adeoque prædictum solidum dimidium est cylindri, cujus altitudo AB baseosque radius potest 2ALNM.

10°.

10°. Hinc ultrò sequitur, solida à figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa $u2c$ rotatis genita proportionari superficiebus ex curvis homologis AC, Ac circa eundem axem $u2c$, sicut areæ $uAC2f$, $uAc2c$ curvis AC, Ac proportionales sunt; quæ proprietas, & ea qua centrum gravitatis curvæ AC duplo magis à recta $u2c$ distat quam centrum gravitatis ρ areæ $uAC2f$, & ambo hæc centra γ & ρ ab axe AI æqualiter distant, Illustri Leibnitio, qui primus eam advertit, meritò memorabilis visa est.

11°. Centra gravitatis ρ & γ areæ $uAC2f$ & curvæ AC æqualiter distant ab axe velariæ. Nam (§. 44.) $\theta\rho$ in $uAC2f = \theta\rho$. AB. AM = omnibus CI. $f2f$. cf. = omn. CI. BM. $M\mu$ = omn. CI. AB. Mm = AB. CI. AM — omn. AB. AM. cf = AB. CI. AM — omn. AB. AM. $M\mu$. = AB. CI. AM — omn. AB^2. $m\mu$ = AB. CI. AM — AB^2. $M\omega$, ergo etiam $\theta\rho$. AM = AM. CI — AB. $M\omega$. Sed (num. 5.) etiam habuimus AM. $\xi\gamma$ = AM. CI — AB in $M\omega$ vel AI, ergo $\theta\rho$. AM = AM. $\xi\gamma$, vel $\theta\rho = \xi\gamma$.

12°. Adeoque solidum ex conversione figuræ $uAC2f$ circa uI æquatur cylindro, cujus radius potest duplum spatium 2CI. AC — 2AB. AI & altitudo est AB. Hinc iterùm, solida ex figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa axem AI rotatis proportionalia sunt superficiebus ex curvis AC, Ac circa eundem axem in gyrum actis.

13°. Radius circuli osculatoris $C\beta$ in curvæ puncto C, est tertius proportionalis ad uA & uI. Nam, quia Bm & BM parallelæ sunt particulis curvæ Cc, & CG, sectores evanescentes $MB\mu$ & $C\beta c$ similes erunt, unde $M\mu : BM = Cc : C\beta$ vel permutando $M\mu : Mm$ vel $Cc = BM : C\beta$; atqui $M\mu : Mm = AB : BM$, ergo AB : BM = BM : $C\beta$, seu, quia $BM = uI$, erit $uA : uI = uI : C\beta$. Hinc curvæ $u\beta$, ex cujus evolutione velaria describitur, initium u à vertice velariæ A æque distat ac punctum u in circuli quadrante uSL.

SECTIO IV.

De Motibus corporum in mediis resistentibus.

Quoties Galilæus, Torricellius aliique illius ævi Celeberrimi geometræ de motu egerunt, corpora in vacuo, id est, in medio, quod nec motum accelerare nec retardare queat, ferri supposuerunt; non quod nescirent ejusmodi medium resistendi facultate

carens apud tellurem noſtram non dari, ſed quod non ſatis viderent, quo pacto reſiſtentiæ geometriæ legibus poſſent ſubjici. Ab his ergo reſiſtentiis medii tanto libentius animum abſtraxerunt, quod exiſtimarent non niſi per exiguos eas errores vixque ſenſibus perceptibiles determinationibus ſuis, ex ſuppoſitione vacui, inducere poſſe. Inter recentiores verò ſummi quique geometræ præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfeciſſe & mirum quantum amplificaſſe non contenti, difficilem de motibus in mediis reſiſtentibus materiam ad geometriæ, ſed reconditioris, normam exigere fortunato ſucceſſu aggreſſi & in regiones non antea cognitas delati ſunt. Extant enim eximia hac de re Virorum Celeberrimorum *Newtoni*, *Leibnitii*, *Hugenii* & *Walliſii* meditata ante complures annos partim ſine demonſtrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonſtrationibus munita, ſed perbrevibus, nec ideò tyronum captui ſatis accommodatis, niſi Walliſium excipias, qui in ſuo ſchediasmate ſuper hac re omnia minutim exponit, ſed tantum in hypotheſi particulari ſubſtitit reſiſtentiarum in ratione celeritatum corporibus remoram afferentium. Poſt laudatos viros Cl. *Varignon* idem argumentum fuſe, docte, atque perſpicue pertractat in Actis Academ. Reg. Pariſ. Scient. annorum 1707, 1708, 1709 & 1710. adeò ut ſecuturis Mathematicis otium hac in re feciſſe videatur; verùm, quia hæc materia tam directe ad inſtitutum noſtrum pertinet, ut ſi de ea agere omitterem, ex præcipuis aliquid opuſculo meo deeſſe putarem, ideò non detrectabo poſt tot præclaros Autores etiam hanc doctrinam, quantum potero breviter ſimul & perſpicue, proponere. Illorum inventis nonnulla propria addam, atque ſimplici principio inſiſtam, cui ferme omnia, quæ ad motum actualem corporum attinent, ſuperſtruxi, ſcilicet *momentum cujuslibet ſolicitationis indefinenter agentis æquivalere momento celeritatis.* Quo principio nemo ex laudatiſſimis viris uſus eſt in doctrina motuum corporum in mediis reſiſtentibus latorum, ſaltem quatenus ex publicis eorum ſcriptis judicare licet, etſi hoc principio multa brevius & naturalius, quam ab aliis fundamentis, obtineantur.

C A-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [306] - 278
PUBLIC DOMAIN

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus corporum in mediis resistentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria necessaria.

DEFINITIONES.

Duæ sunt resistentiæ species, una *absoluta* altera *respectiva*.

I.

477. *Resistentia absoluta* est, quæ tantundem virium mobili detrahit, sive magna sive parva velocitate idem mobile feratur. Hujusmodi resistentiæ absolutæ exempla præbent media glutinosa & superficies asperæ: nam in fluido glutinoso eadem vi opus est ad separandas ejus partes, quâcumque demum celeritate mobile partes eas separare conetur. Sic etiam in frictionibus corporis in plano aspero incedentis eadem obstacula sunt superanda, sive magna sive parva velocitate mobile in plano aspero moveatur, & quocunque modo ipsa motus impedimenta se habeant, sive instar pilorum elasticorum deprimendorum, & postea sponte suâ sese iterum erigentium; sive filorum perrumpendorum ad instar, vel quoquo alio modo hisce æquivalente, ad hæc omnia definita quadam & determinata vi opus est, nec refert quæ sit agentis velocitas.

II.

478. *Resistentia* verò *respectiva* est, quæ provenit ab allisione medii fluidi partibus anterioribus mobilis. Hæc resistentia pendet à densitate medii & celeritate mobilis; partes enim fluidi (§. 422.) ea ipsa celeritate corpori in eo fluido delato allabi censendæ sunt, quâ corpus hisce particulis impingit, & quantitates fluidi corporibus allabentis (§. 423.) sunt in composita ratione densitatum & celeritatum.

III.

479. Medium fluidum atque resistens *aëris* nomine simpliciter insignietur, cum aër tantæ subtilitatis intelligi possit, ut eundem effectum præstare valeat, quem medium resistens.

IV.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [307] - 279
PUBLIC DOMAIN

IV.

480. *Motus primitivi* ſunt illi, qui in vacuo fierent. Sic motus primitive uniformis eſt motus æquabilis, quo corpus vi quacunque impulſum in vacuo incederet. Et motus primitive accelerati vel retardati à gravitate uniformi, ſunt motus illi, quos gravi in vacuo cadenti vel aſcendenti convenire Galilæus demonſtravit, cujusmodi motus Lib. I. Sect. II. Cap. I. §. 150, 151. conſideravimus.

V.

481. *Solicitatio acceleratrix* gravi in aëre deſcendenti applicata, eſt exceſſus, quo gravitas medii reſiſtentiam ſuperat, & *reſiſtentia totalis* ſeu *abſoluta* corpori in aëre aſcendenti oppoſita, eſt aggregatum ſolicitationis gravitatis & reſiſtentiæ aëris. Nam hæc duo corpori in aëre aſcendenti conjunctim renituntur. Grave verò cadens non alia vi deorſum ruit, quam eâ, quâ gravitas reſiſtentiam aëris, in quo corpus movetur, ſuperat: propterea hic *exceſſus* ſolicitatio acceleratrix gravis in aëre decidentis audit.

VI.

482. Et, quia hæ ſolicitationes acceleratrices in aëre continue decreſcunt ob creſcentem cum velocitate *mobilis reſiſtentiam aëris*, absque tamen eo, ut unquam *penitus extinguatur*, ut in ſequentibus fuſius demonſtrabitur, ideò etiam celeritas continue quidem creſcet, non tamen certum quendam velocitatis gradum unquam attinget, nedum prætergredietur. Talis velocitas quam gravia nunquam cadendo aſſequi poſſunt, etſi ei ſemper magis magisque accedunt, Hugenio *velocitas terminalis* audit, Leibnitius verò *celeritatem maximam* excluſivè eandem appellat.

Scalæ ſolicitationum acceleratricium, *reſiſtentiarum totalium*, & celeritatum acquiſitarum vel reſiduarum, eodem ſenſu ſumuntur, quo in Sectione ſecunda Libri primi; adeò ut nulla ambiguitas vocabulorum in hac materia irrepere queat. Idem pariter intelligendum de momentis harum ſolicitationum aut reſiſtentiarum totalium, & celeritatum creſcentium aut decreſcentium.

VII.

483. Si lineæ rectæ indefinitæ longitudinis æquabili motu ferri ſubinde dicentur, atque in hisce lineis corpora libere etiam ultro citro-

traque incedere ponentur, ipsæ lineæ mobiles *lineæ deferentes*, earum motus, *motus communis*, scilicet lineæ mobilis & corporis secum abrepti, & denique corporis in deferenti linea motus, ejus *motus proprius* deinceps dicentur, corporisque ejusdem *motus absolutus* est is, qui resultat ex motu communi & proprio, estque horum aggregatum, si linea deferens & in ea corpus proprio motu ad easdem partes feruntur, differentia verò si in partes oppositas. Idcircò, ex motu proprio & communi corporis ejus motus absolutus semper innotescet.

PROPOSITIO LIV. Lemma.

484. *Momentum cujuslibet solicitationis acceleratricis corporis in aëre cadentis, aut resistentiæ totalis ejusdem corporis in aëre quomodocunque ascendentis, æquatur momento celeritatis acquisitæ crescentis, vel momento celeritatis residuæ & decrescentis.*

Hæc propositio eadem est cum prop. XVII. Lib. I. §. 132. ut adeo nova demonstratione non indigeat, nam solicitationum nomine quæcunque vires mortuæ, sed continue applicatæ, intelligi queunt. Propterea, si facilitatis gratia corpus in linea verticali moveri ponatur, spatiaque transmissa dicantur x, gravitas g, resistentia aëris r, velocitas acquisita corpori decidenti vel residua ascendentis u; solicitatio acceleratrix gravis cadentis (§. 481.) erit $g-r$, & momentum hujus solicitationis $gdx-rdx$ æquatur momento velocitatis crescentis udu. Hinc $gdx-rdx=udu$.

Resistentia verò totalis corporis ascendentis (§. 481.) est $g+r$, momentumque hujus resistentiæ $gdx+rdx$ æquale est momento celeritatis decrescentis $-udu$, adeò ut habeatur $gdx+rdx=-udu$. Vel etiam sumendo spatia non actu percursa, sed deinceps percurrenda, usque ad totalem motus ascensionalis extinctionem, erit $-gdx-rdx=-udu$, seu $gdx+rdx=udu$, hoc enim pacto spatia absolvenda, post jam percursa, decrescent cum celeritatibus.

Idcirco utrumque casum descensus ascensusque verticalis corporum in aëre uni generali formulæ includendo, invenietur $gdx+rdx=udu$. Ubi signum superius — descensum, alterum verò + ascensum corporum in aëre resistente respicit; ubi meminisse oportet spatia x non esse spatia actu transmissa à corpore ascendente, sed eorum complementa ad totam seu maximam altitudinem, quam ascendens mobile percurrere potest.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [309] - 281
PUBLIC DOMAIN

Corollarium.

485. Si jam elementum temporis, quo ſpatiolum dx transmittitur, dicatur dt, erit $dt = du : g \mp r$. Nam, quia (§. 128.) $dt = dx : u$, & (§. 484.) $g dx \mp r dx = u du$, erit $dt\ (= dx : u) = du : g \mp r$. Adeoque $t = \int du : g \mp r$, ubi t ſignificat tempus, quo grave motu à quiete incepto ſpatium x perlabitur, vel tempus quo grave aſcendens complementum ſpatii actu jam transmiſſi aſcendendo conficere poſſet; unde, ſi tempus, quo maxima altitudo A, quam grave data celeritate in altum projecti emetiri poteſt, dicatur T, quantitas $T - t$ exponet tempus, quo mobile ſpatium aſcendendo actu abſolvit.

Scholion.

486. Cum nulla adhuc attentio habita ſit ad originem reſiſtentiæ medii, an pendeat à celeritatibus mobilis actualibus, an verò aliunde, ſatis manifeſtum eſt, in præcedentibus canonibus generalibus contineri leges motuum variatorum pro quacunque reſiſtentiæ medii abſolutæ vel reſpectivæ hypotheſi.

Propositio LV. Lemma.

487. *Motus variati corporis in aëre quacunque lege reſiſtente ex motu primitive uniformi ſunt iidem, qui reſultarent ex motu communi ac uniformi lineæ mobile ſecum deferentis, & ex motu proprio mobilis in linea deferente, orto ab alliſione aëris corpori in linea deferente delato.*

Mobile M incipiat moveri ex N verſus O velocitate data AN, ita quidem, ut ſi in vacuo incederet, motus perfecte æquabilis eſſet; ſed, quia in medio reſiſtente fertur, mobilis noſtri motus in recta NO continue variatus exiſtet, ita ut ſemper magis magisque langueſcat. Probari debet hunc motum variatum eundem fore cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ NO celeritate AN ex N verſus Q æquabili motu latæ, atque mobile M ſecum abripientis, & ex motu proprio mobilis M in deferenti linea NO, ſed contrario motui æquabili lineæ deferentis, tendente ſcilicet ex N verſus O, utpote orto ex continuo allapſu aëris mobili M, quod (ſecundùm hypotheſin) ultro citroque in linea deferente liberrime moveri poſſe ſupponitur, absque ullo impedimento ratione motus communis ſeu motus lineæ deferentis.

De-

Demonſtratio. Quatenus linea deferens NO æquabili motu verſus Q fertur, eatenus ea mobile M ipſi inhærens ſecum abripit, ſed quia aër *mobili* iſti continue alliditur, & corpus ipſum (ſecundùm hypotheſin) libere in deferenti linea NO moveri poteſt, aërque eandem in mobile impreſſionem exſerit, (§. 422.) ac ſi in ipſum quieſcens ea ipſa celeritate impingeret, quâ mobile in aëre motu abſoluto fertur; ideo per ſe liquet corpus M ab aëre continue verſus O impulſum omnino motum iri ex N verſus O, motu proprio in linea deferente, ſed contrario motui hujus lineæ deferentis; ac conſtat inſuper motus proprios mobilis M ab impulſu aëris ortos, eſſe decrementa motus abſoluti corporis in aëre, atque adeò effecta reſiſtentiæ aëris, ut adeò hinc manifeſtum ſit motum abſolutum corporis M in aëre haberi, ſi à motu lineæ deferentis NO ſubducatur motus proprius corporis M in hac deferente, adeò quidem, ut ſi, exacto quodam tempore atque motu proprio, mobile ſpatium NE in linea deferente transmiſerit, & in ejus termino E gradum velocitatis DE acquiſiverit, velocitas abſoluta mobilis in aëre (§. 483.) futura ſit BD, exceſſus ſcilicet celeritatis BE vel AN, qua linea deferens movetur, ſupra celeritatem DE in linea deferente mobili acquiſita ab aëris reſiſtentis impreſſionibus. Propterea motus abſolutus & variatus mobilis M in aëre idem erit cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ deferentis NO, & ex proprio mobilis in hac linea deferente. Quod erat demonſtrandum. Fig. 119.

Corollarium I.

488. Sit jam curva NDO ſcala celeritatum mobilis M in linea deferente NO acquiſitarum, & curva PFO ſcala impreſſionum aëris in mobile M exertarum; & velocitas initialis mobilis M, quæ erat AN, reducta erit ad celeritatem BD eo tempore, quo mobile in linea deferente ſpatium NE transmittit. Adeoque per præcedentem habetur generaliter EF. Ee = DE. *ad.* Id eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *in linea deferente æquivalet momento celeritatis* ED *in eadem linea deferente acquiſitæ.*

Tempus vero per NE ſeu (§. 128.) $\int Ee : DE = ſad : EF$.

Corollarium II.

489. Hinc ſpatium abſolutum, quod mobile M hoc tempore *ſad*:

EF in aëre absolvit, reperietur generaliter $AN.\sqrt{da}:EF-NE$. Nam linea deferens NO absolvit motu suo æquabili & velocitate AN spatium $AN.\sqrt{da}:EF$ tempore $\sqrt{da}:EF$, & mobile M in linea deferente spatium NE.

Scholion.

490. Si resistentia medii absoluta in omnibus spatii percurrendi punctis eadem assumatur, linea PFO erit recta ipsi NO vel AO parallela; & scala celeritatum NDO parabola erit. Nam momentum vis acceleratricis EF fit hoc casu $NP.Ee=DE.ad$, & omnia $NP.Ee$ hoc est $NP.NE$ æqualia omnibus $DE.da$ seu $\frac{1}{2}DE^2$, hinc $2NP.NE=DE^2$, ergo NDO est parabola, cujus parameter est 2NP.

Hinc, quia $t\,NE=\sqrt{ad}:EF=\sqrt{ad}:NP$, erit $t\,NE=DE:NP=DE^2:DE.NP=2NP.NE:DE.NP=2NE:DE$. Hinc $NA.\sqrt{ad}:EF$ seu $NA.t\,NE=2AN.NE:DE$, & spatium absolutum, quod mobile in medio hoc absolute resistente tempore $2NE:DE$ transmittit, erit $NA.t\,NE-NE=2AN.NE:DE-NE=(2AN-DE).NE:DE=(2NA.DE-DE^2):2NP$.

Celeritas verò mobilis, elapso tempore $DE:NP$ vel $2NE:DE$, residua erit BD, ut jam supra (§. 488.) dictum. Propterea in ista hypothesi mobile M celeritate AN impulsum tempore $AN:NP$ ad quietem redigetur. Hæc probe consentiunt cum iis, quæ Cl. Varignon Probl. III. Coroll. I. Act. Acad. Reg. Scient. 1707. d. 13. Aug. diversa tamen methodo, tradidit.

Ubi verò resistentia medii respectiva obtinet, atque adeò resistentiæ aëris ab ejus densitate & velocitatibus mobilis pendent, ipsæ EF semper aliquam relationem habebunt cum lineis BD velocitatum mobilis in aëre repræsentatricibus; ut ex sequentibus dilucide patebit.

Propositio LVI. Lemma.

Fig. 119. 491. *Exhibens nonnullas logarithmicæ proprietates deinceps adhibendas.*

I. Elementum cujusque ordinatæ logarithmicæ est ad ipsam ordinatam ut elementum axis ad subtangentem log-micæ.

Sit enim HI ordinata quæcunque log-micæ NHT, cujus subtangens

gens sit IR, positoque H*m* elemento ordinatæ HI, agatur *hi* parallela HI, & *mh* parallela axi AR, quibus positis, triangula similia *Hmh* & HIR præbent H*m* : HI = I*i* : IR. Quod erat demonstrandum.

II. Rectangulum HI*i*, sub ordinata HI & elemento axis I*i* ordinatæ HI adjacenti, æquatur ubique rectangulo sub subtangente IR & elemento H*m* ordinatæ HI. Nam analogia præcedentis numeri H*m* : HI = I*i* : IR, præbet HI. I*i* = IR. H*m*.

III. Tertia proportionalis ad subtangentem & quamlibet ordinatam log-micæ cum adjacente axis elemento efficit rectangulum æquale rectangulo sub ordinata ejusque elemento. Esto VI tertia proportionalis ad IR & IH, ac resumatur analogia numeri primi H*m* : HI = I*i* : IR, vel permutando H*m* : I*i* = HI : IR (secundùm hypothesin) = IV : HI. Ergo VI. I*i* = HI. H*m*.

IV. Si in duabus logarithmicis NHT & 2N2H2T ordinata NA fuerit ad HI, sicut 2N2A ad 2H2I, erit AI ad 2A2I sicut subtangens IR ad subtangentem 2I2R. Sint enim I*i* & 2I2*i* elementa similia totarum AI & 2A2I, eritque HI : *hi* = 2H2I : 2*h*2*i*; quoniam hæ rationes sunt submultiplices æqualium rationum secundum eundem multiplicitatis numerum; idcirco erit H*m* : HI = 2H2*m* : 2H2I, atqui (num. 1. hujus) H*m* : HI = I*i* : IR, & 2H2*m* : 2H2I = 2I2*i* : 2I2R, ergo I*i* : IR = 2I2*i* : 2I2R, & permutando I*i* : 2I2*i* = IR : 2I2R; verum, quia I*i* & 2I2*i* sunt particulæ similes totarum AI, 2A2I, erit I*i* : 2I2*i* = AI : 2A2I, ergo etiam AI : 2A2I = IR : 2I2R. Quod erat demonstrandum. Fig. 119, & 120.

Corollarium.

492. *Hinc log-us* rationis duarum magnitudinum divisus per subtangentem logarithmicæ, ex qua log-us dictæ rationis desumtus est, est idem cum log-mo ejusdem rationis desumto ex qualibet alia logarithmica, sed diviso per subtangentem hujus alterius logarithmicæ. Atque hinc liquet, quâ ratione logarithmi desumti ex data quadam log-mica transferri queant in log-micam, quæ vulgares tabularum logarithmos continet, & vicissim.

Propositio LVII. Lemma.

493. *Si ex eodem centro* M, *& semilatere transverso* MI *descriptus* Fig. 121.

ſit quadrans circuli ILA *& hyperbola æquilatera* IL, *quorum ordinatæ* LS *referantur ad axem* MS, *erit in circulo & in hyperbola rec-lum* MS. *Ss*, *ſub abſciſſa ejusque elemento*, *æquale homologo rec-lo* LS. Lm *vel* lm *ſub ordinata ejusque elemento.*

In circulo. Juncta ML, triangula ſimilia MLS & L*lm* præbent MS : LS = L*m* : *lm* vel S*s*; adeoque MS. *Ss* = LS. L*m*.

In hyperbola. Jungantur IS & I*s*, & centro I intervalloque IS deſcriptus intelligatur arculus S*u*. Jam ex natura hyperbolæ eſt LS = IS, & *ls* = I*s*; ergo *us* = *lm*. Atqui triangula ſimilia ISM & S*su* ſuppeditant analogiam S*s* : *su* vel *lm* = IS vel LS : MS. Ergo MS. *Ss* = LS. *lm*. Quod erat demonſtrandum.

Scholion Generale.

494. Traditis jam generalibus principiis, ex quibus quicquid ad motus corporum in mediis reſiſtentibus pertinet, deduci poteſt, & nonnullis lemmatis geometricis in applicatione principiorum neceſſariis; ad hanc applicationem jam veniendum reſtat. Et primùm quidem, quod motus ex reſiſtentia abſoluta concernit, id cum in paragrapho ſuperiore 490, tum etiam in ſecunda ſectione Libri primi quadantenus jam præſtitum eſt, etenim *in citato paragrapho definitus eſt motus variatus reſultans ex primitive uniformi in hypotheſi reſiſtentiæ abſolutæ*; *in* Capite verò primo Sect. Sec. Libr. I. §. §. 150, 151. determinati ſunt motus gravium in hypotheſi gravitatis uniformis, ad quem caſum etiam revocari poteſt reſiſtentia abſoluta, qua in ſingulis percurrendi ſpatii punctis eadem quantitate corporibus reſiſtitur; unde ſi conſtans ubique reſiſtentia à conſtanti gravitate ſubducetur, reſidua ſolicitatio acceleratrix etiam conſtans erit, unde quæ citato loco *reſpectu gravitatis uniformis* demonſtrata ſunt, ea ſolicitationi ejusmodi acceleratrici etiam applicari poſſunt & debent. Idcirco non eſt quod reſiſtentiæ abſolutæ ſeu motibus inde orituris diutius immoremur. Reſiſtentia medii reſpectiva pendet à velocitate, qua mobile in ejusmodi medio incedit. Tres ſunt præcipuæ hujus reſiſtentiæ hypotheſes, quas in ſequentibus capitibus primùm ſigillatim percurremus, deinde analyſin trademus, qua motus in ejusmodi mediis variati generaliter determinabuntur.

C A-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [314] - 286
PUBLIC DOMAIN

CAPUT XV.

De motibus Corporum, quibus aër reſiſtit in ratione celeritatum mobilis.

PROPOSITIO LVIII. Theorema.

495. *Spatium, quod mobile quoddam in aëre, juxta proportionem celeritatum ejus actualium, variato motu ex primitive uniformi certo quodam tempore transmittit, exponitur eadem linea, quâ velocitatis mobilis initialis pars hoc tempore amiſſa repræſentatur. Et tempus abſolutum, quo dictum ſpatium abſolvitur, exponi debet per logarithmum rationis, quam habet velocitas initialis mobilis ad velocitatem abſolutam ejusdem elapſo hoc tempore, applicatum ad ſubtangentem illius logarithmicæ, ex qua prædictus logarithmus deſumtus eſt.* Fig. 119.

Sit M mobile in plano quodam horizontali celeritate AN impulſum, juxta rectam NQ, in qua deinceps æquabiliter incederet celeritate eadem AN, ſi in vacuo ferretur, ſed quia in aëre juxta proportionem celeritatum ſuarum reſiſtente movetur, ſingulis momentis aliquid de ſuâ velocitate actuali decedet. Ipſi verò motus ope propoſitionis 55. *hujus ſecundi libri* facile determinantur; quandoquidem, juxta hanc propoſitionem, iidem ſunt motus variati ex primitive uniformi in aëre reſiſtente, qui reſultarent ex motu communi alicujus lineæ deferentis, & ex motu proprio mobilis in hac deferenti linea orto ab appulſu aëris corpori in linea deferente delato.

Sit ergo NO hæc linea deferens celeritate mobilis initiali AN, æquabili motu tendens verſus Q, & poſt aliquod tempus mobile M in hac linea deferente ſpatium NE percurriſſe intelligatur, atque in ea celeritatem DE exacto dicto tempore acquiſiviſſe, quo fiet, ut velocitas ejus initialis AN reducta ſit ad velocitatem actualem (qua ſcilicet in aëre movetur) BD; hac ergo velocitate aër mobili allabitur & reſiſtentia eſt ut hæc celeritas, ergo impreſſio ſeu ſollicitatio acceleratrix mobilis in linea deferenti, quæ generaliter eſt EF, jam erit BD. Propterea curva PFO erit ſimilis & æqualis curvæ NDO, adeò ut tantùm (§. 488.) determinandum reſtet, quænam ſit curva NDO, ut in ea BD. B*b* ſeu EF. E*e* æquetur rec-lo *ead* ſeu ED. *ad*. Ubi E*e* vel B*b* eſt elementum ſpatii NE, & *ad* elementum ordinatæ DE.

Per

Per punctum N ducta sit log-mica NHT, cujus subtangens AK (posito scilicet rectam NK ipsam contingere in puncto N) æqualis AN, atque in ea ad asymptotam AR aptetur ordinata IH æqualis BD, eaque producatur in S; ductaque per logarithmicæ punctum H recta indefinita HCD parallela OQ, tangentem log-micæ NK in G, rectamque NA in C secante, si in ea sumatur ubique CD æqualis GH, interceptæ inter tangentem NK & log-micam NHT, erit semper punctum D in scala celeritatum propriarum mobilis in linea deferente NO.

Ducantur enim per punctum log-micæ H tangens HR & linea HL parallela tangenti NK, eruntque HI & IL, item LR & HS vel DE æquales, ductaque insuper *dh* alteri DH indefinite vicina lineola *mh* & IR à media HL proportionaliter secentur, eritque adeò HI vel BD aut EF ad LR vel HS seu DE, sicut H*m* seu *da* ad *nh*; adeoque EF.*nh* = DE.*da*. Jam, quia (constr.) DC vel EN = GH & N*e* = *ch*, erit *nh*, differentia inter GH & *gh*, æqualis E*e*; nam H*n* est parallela ipsi G*g*. Ergo EF.*nh* = EF.E*e* = DE.*da*. Quod erat demonstrandum.

Porro est *nh*: LR = *mh*: IR, atqui *nh*: LR = E*e*: DE (§. 128.) = *t*E*e*, ergo *t*E*e* = I*i* vel *mh*: IR; ergo omnia *t*E*e*, id est, tempus per NE = omnibus I*i*: IR = AI: IR = log. (AN: HI) applicatus ad IR vel AN. Hoc est, tempus absolutum, quo mobile percurrit spatium NE in linea deferente, exponitur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis AN ad celeritatem mobilis residuam IH elapso hoc tempore, applicato ad log-micæ subtangentem.

Hinc, quia (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile M dato illo tempore in aëre transmittit, est AN.*t*NE − NE, erit hoc spatium AI − NE = CH − GH = CG = NC, quoniam (constr.) AN = AK, item *t*NE = AI: AN, & NE (constr.) = GH. Ergo spatium absolutum, quod mobile nominato tempore percurrit, in aëre repræsentatur per eam lineam NC vel DE, quæ velocitatis amissam partem exhibet. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

496. Ergo si mobilis celeritates actuales BD seu IH sumantur in progressione geometrica, tempora respectiva AI: AN erunt in progressione arithmetica.

Co-

Corollarium II.

497. Adeoque velocitas mobilis non niſi tempore infinito extingui poteſt, cum log-us rationis AN ad o, ſeu ad quantitatem qualibet data minorem, ſit infinitus. Propterea mobile M ejusmodi motu ex primitive uniformi derivato in aëre nunquam percurrere poteſt ſpatium AN datæ magnitudinis.

Hæc omnia ad amuſſim conveniunt cum determinationibus Newtoni Prop. 2. Lib. 2. Pr. Phil. Nat. Leibnitii Act. Erud. 1689. art. 1. Walliſii Algebr. cap. 101. Et Varignonii Act. Acad. Reg. Pariſ. Scient. 1707. die 13 Aug. probl. 1. & coroll. annexis.

PROPOSITIO LIX. Theorema.

498. *Si grave in aëre juxta rationem celeritatum reſiſtente verticaliter à quiete deſcendat, ſpatium, quod mobile aliquo tempore perlabitur, exponetur exceſſu, quo factum ex tempore deſcenſus in velocitatem corporis terminalem excedit lineam, quæ celeritatem mobili acquiſitam repræſentat. Tempus vero ipſum exponetur log-mo rationis, quam gravitas abſoluta mobilis habet ad ſolicitationem acceleratricem in termino dicti ſpatii, applicato ad log-micæ ſubtangentem.* Fig. 122

Sin verò grave in aëre eodem verticaliter in altum projiciatur datæ cum celeritate initiali, altitudo totius aſcenſus mobilis exponetur exceſſu, quo velocitas initialis excedit factum ex tempore aſcenſus in velocitatem terminalem. Et tempus ipſum exponetur log-mo rationis reſiſtentiæ totalis initio aſcenſus ad gravitatem abſolutam mobilis applicato ad ſubtangentem logarithmicæ.

I. Sit BtC log-mica ad axem FI extructa, cujus ſubtangens FH ſit quæcunque, & BH tangens log-micæ in puncto B. Ducatur pro lubitu linea DC æquidiſtans ipſi FI, rectæ BF in puncto D, tangenti BH in E, & denique log-micæ in puncto C occurrens. Eritque EC intercepta inter tangentem BH & log-micam BC ſpatium percurſum deſcenſu mobilis, ratio DC : FH exponet tempus, quo ſpatium EC conficitur, & denique DE intercepta inter BF & BH exponet celeritatem mobili acquiſitam tempore prædicto DC : FH. FH verò exponet celeritatem terminalem, ſeu maximam, excluſive. Hinc ducta EG parallela BF, recta GH repræſentabit ſolicitationem acceleratricem in fine ſpatii percurſi EC. Nam quoniam FH re-

repræsentat gravitatem absolutam, & (secundùm hypothesin) DE vel FG resistentiam medii, residua GH exponet omnino solicitationem acceleratricem mobilis, ut adeò aliud non restet faciendum, quam (§. 484.) ut probetur hanc constructionem præbere GH. $\delta c = DE.gh$, seu *momentum solicitationis acceleratricis* GH *æquari momento celeritatis* DE, ductis *dc* parallela DC, & δC parallela BH, adeo ut δc sit elementum lineæ EC, & *gh* elementum lineæ DE. Ubi obiter notandum, punctum C in figura per accidens tantum reperiri in communi intersectione rectæ HP, æquidistantis FO per datum positione punctum H ductæ & log-micæ BC, cum dictum punctum C quodlibet aliud log-micæ punctum esse possit.

Demonstr. Fiat GI = FH, eritque HI = FG = DE, & acta EI erit parallela tangenti log-micæ in C, atque adeò E*i* erit parallela & æqualis elemento logarithmicæ C*c*, & $\delta c = hi$. Jam, quia GH : HI vel DE, = *gh* : *hi* seu $c\delta$ erit GH. δc = DE. *gn*. Quod erat unum.

Porrò *gi* vel nc : GI = *gh* : GH (§. 128.) = $t\delta c$, ergo omnia nc : GI, seu DC : GI = tempori descensus in spatio EC. Atqui DC est log-us rationis FB ad GE seu HF ad GH, hoc est, rationis, quam habet velocitas terminalis FH ad solicitationem acceleratricem GH. Nam, quia DE exponit (secundùm hypothesin) velocitatem mobili acquisitam, & quia hæc fit FH, ubi DC facta fuerit infinita, manifestum est celeritatem terminalem per subtangentem FH exponendam esse, qua etiam gravitas absoluta mobilis repræsentatur. Idcirco tempus descensus per spatium EC est log-us rationis FH : GH divisus per subtangentem FH. Adeoque DC est factum ex tempore descensus per EC in velocitatem terminalem FH, & spatium EC est excessus facti modo nominati, supra rectam DE, quæ celeritatem acquisitam exponit. Quæ omnia erant demonstranda.

499. Ponatur secundò mobile ascendere in linea verticali *ak* vel AN celeritate initiali NO, ostendendum restat, altitudinem, ad quam mobile pertingere possit, esse *ak* vel AN interceptam inter tangentem BN & log-micam BTA, tempusque, quo altitudo ista conficiatur, esse AO : FH. Linea *ak* alteri AN indefinite vicina ponitur, unde ducta Aα parallela BN, lineola $a\alpha$ erit decrementum spatii *ak* versus B continue decrescentis cum velocitate NO. Initio motus resistentia aëris (secundùm hypothesin) est NO, & gravitas FH vel OP corpori ascendenti etiam opponitur, adeoque (§. 481.) resistentia totalis est NP. Propterea ostendendum, constanter esse

NP.

NP. *au momentum ſcilicet reſiſtentiæ totalis* NP *æquale* NO. kl *momento celeritatis decreſcentis* NO.

Si enim iterum LM = FH & NM ducta fuerit, erunt MH = NO, & *km* = *au*, & LH : MH = NP : NO = *kl* : *km* vel *au*, adeòque NP. *au* = NO. *kl*. Idcircò omnia decrementa *au*, id eſt *ak*, ſeu AN, ſunt altitudo, quam aſcendens mobile abſolvere poteſt.

Item *ml* : LM = *km* ſeu *au* : MH vel NO. (§. 128.) *tau*, ergo omnia *ml* : LM, ſeu omnia *ab* : LM, hoc eſt, AO : LM æquantur omnibus *tau*, ſeu tempori aſcenſionis mobilis in ſpatio *ak* vel AN. Atqui AO eſt log-us rationis A2F ad BF, ſeu rationis æqualis NP ad OP, id eſt, rationis, quam habet reſiſtentia totalis initio motus ad gravitatem. Adeoque temp. per AN = log. (NP : OP) diviſ. per LM vel FH, & LM in *t*AN = AO = log. (NP : OP). Ergo, cum AN ſit NO − AO, erit altitudo, quam mobile aſcendens percurrere poteſt, exceſſus, quo celeritas initialis NO excedit factum ex tempore aſcenſionis in celeritatem terminalem FH vel LM.

Corollarium I.

500. Tempus, quo aſcendens grave ſuam altitudinem AN vel QB emetietur, eſt ad tempus deſcenſus ejusdem ex eadem altitudine BQ, *ſicut AO ad OP*. Hoc per ſe ſatis clarum. Nam tempus deſcenſus per BQ vel EC (§. 498.) eſt *DC* : *FH* ſeu *OP* : FH, & tempus aſcenſus in AN (§. 499.) eſt AO : FH. Ergo &c.

Corollarium II.

501. Tempus quo mobile ſpatium AN aſcendendo trajicit celeritate *initiali NO*, eſt ad tempus, quo idem grave in vacuo & celeritate eadem *initiali* NO ſuam altitudinem, quousque pertingere poteſt, abſolveret, ut AO ad NO vel A2Q; ducta ſcilicet per Q recta Q2Q parallela FO. Nam tempus aſcenſionis in aëre per altitudinem AN eſt, ut vidimus, AO : TH; grave verò in vacuo aſcendens emetietur (§. 139.) ſuam altitudinem eo tempore, quo id à quiete cadere incipiens accelerato motu celeritatem NO initiali æqualem acquirere poteſt; atqui (§. 151.) hoc tempus eſt, ut celeritas acquirenda NO applicata ad rectam FH, quæ gravitatem uniformem exponit; atque adeò NO : FH exponit dictum tempus aſcenſionis mobilis in vacuo. Eſt ergo tempus aſcenſionis in aëre ad

tempus ascensionis in vacuo ut AO : FH ad NO : FH, id est, sicut AO ad NO seu A_2Q; nam ob æquales & parallelas BN & QA, etiam æquales erunt NO & A_2Q.

Corollarium III.

502. Altitudo AN, quam grave celeritate NO verticaliter in altum projectum percurrere potest, erit ad altitudinem, quam eadem celeritate in vacuo sursum projectum absolvere posset, ut rec-lum FBQ vel FB. AN ad triangulum BNO. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo absolvenda exponitur quadrato velocitatis initialis NO, applicato ad duplum gravitatis, seu $2FH$; ergo altitudo in aëre est ad altitudinem in vacuo absolvendam sicut AN vel BQ ad $NO^2 : 2.FH$; vel sicut QB ad OB. ON : 2. FB, cum NO sit ad FH sicut BO ad BF; ergo prædictæ altitudines sunt ut BF. BQ ad BO. $\frac{1}{2}$ON id est, ut rec-lum FBQ ad triangulum BON. Verùm rec-lum FBQ æquatur trilineo BA_2B; nam quadrilineum FBA_2F, indicante Hugenio & demonstrante Cel. Viro Guidone Grando in suis Hugenianis cap. 8. num. 14, æquatur rec-lo BO. FH, quod quidem ex superioribus (§. 491. num. 11.) facillime probari potest, nam quia fig. 119. rec-lum HI. Ii = rec-lo IR. Hm, erunt omnia HIi, quæ in area NAIH continentur, id est hæc area ipsa = omnibus $IR.Hm$ seu
fig. 122. IR. NC. Eodem ergo argumento sequitur quadrilineum FBA_2F æquari rec-lo FH. BO seu rec-lo ex subtangente log-micæ in differentiam ordinatarum A_2F & BF. Atqui propter similitudinem triangulorum HFB & NOB, est FH. BO = FB. NO = rec-lum LFB, ergo LFB = FBA_2F, & ablato communi rec-lo BF_2F, restabit L_2F_2B = FBQ = trilineo BA_2B.

Hinc, quia altitudo in aëre conficienda est ad altitudinem in vacuo percurrendam, sicut rec-lum FBQ ad triangulum BNO, erit etiam prior altitudo ad alteram ut trilineum BA_2B ad triangulum BNO.

Corollarium IV.

503. Celeritas initialis gravis spatio AN vel QB in aëre ascendentis, est ad celeritatem quacum in terram recideret, emenso eodem spatio NA vel BQ, sicut NO ad DE, vel propter triangula similia BON & BDE, sicut BO seu RP ad BD vel RC.

Hæc

Hæc quatuor corollaria continent omnia, quæ Nobil. Hugenius circa motus corporum in lineis rectis verticaliter ascendentium & descendentium in præsenti resistentiæ aëris hypothesi absque omni demonstratione simpliciter indicavit, ad calcem suæ Diatribæ *De Causa gravitatis* pag. 171, & quæ Cl. Varignonius postea eleganter etiam demonstravit in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708.

Corollarium V.

504. Cum tempora ascensus per spatia AN, & TS vel YN ducta, scilicet parallela TY ad BN vel QA, sint AO : FH, & TW : FH, existentibus celeritatibus *initialibus* NO & SW; erit ideo $tAY = (AO - TW) : FH = \log.(OF : WF) : FH$, in log-mica, cujus subtangens est FH, vel §. 492. simpliciter $= \log.(OF : WF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas.

Corollarium VI.

505. Sic etiam tempus, quo grave spatium *st* in aëre perlabitur, est log. (BF : WF) in log-mica, cujus subtangens est unitas. Nam tempus per $st = wt : FH$, & $wt = \log.(BF : wF)$, ergo (§. 492.) $wt : FH = \log.(BF : wF)$ *in log-mica, cujus* subtangens est unitas.

Corollarium VII.

506. Unde, si grave quoddam projiciatur in aëre resistente juxta præsentem hypothesin, secundum directionem tangentis BH log-micæ B*t*C in puncto B, & celeritate ea, ut celeritas verticalis FH ex *obliqua jactus* BH derivata par sit celeritati *terminali gravis* seu *maximæ* exclusive, corpus projectum arcum log-micum B*t*C in aëre describet. Fingatur enim rectam *sx* ex situ BR versus C sibi semper parallelam moveri, ita ut ejus extremitas *s* semper in recta BH existat, ejusque velocitas, juxta lineam BH, hac ipsa BH exponatur; idcirco, si ponatur puncto intersectionis *s* rectæ *sx* & BH resisti in ratione celeritatum, hoc punctum *s* tempore, quod exponitur per log. (BH : *s*H) : FH vel (§. 492.) per log. (BH : SH) vel propter triangula similia BFH & B*ws*, per log. (BF : *w*F) in log-mica, cujus subtangens est unitas, percurret spatium B*s*; grave verò hoc eodem tempore log. (BF : *w*F) in linea deferente perlabetur spatium *st*,

ut in coroll. VI. (§. 505.) dictum; eo ergo tempore, quo deferens linea *sx* ex situ BR venit in situm *sx*, grave in ea motu accelerato perlabitur spatium *st*, adeò ut id semper incessurum sit in linea logarithmica B*t*C, prorsus ut Hugenius absque demonstratione asseruit, & Varignonius analytico id calculo in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708. eleganter demonstravit.

507. Hugenius addit pag. 173. Dissertationis *De la Cause de la Pesanteur* hujus log-micæ speciem eo determinari, quod ejus subtangens dupla sit altitudinis, ad quam grave celeritate initiali terminalem æquante ascendens, in vacuo pervenire possit. Hoc facile deducitur ex §. 150. Nam si quadratum subtangentis FH, quæ exponit celeritatem terminalem, applicetur ad duplum subtangentis ejusdem, quæ etiam gravitatem uniformem exponit, resultabit inde altitudo maxima, ad quam mobile in vacuo ascendens velocitate initiali terminalem in aëre æquante, pervenire potest, æqualis semissi subtangentis log-micæ.

508. Addam & ego mobilis celeritate & directione BH in aëre projecti, & log-micam B*t*C describentis velocitatem in quolibet log-micæ puncto *t*, exponi debere tangente log-micæ *tu* in hoc puncto *t*; ut adeò mobilis celeritas in logarithmica terminali semper major futura sit, etsi decrescat, eique semper magis magisque accedat. Assertionis demonstrationem utpote facillimam non adduco.

Corollarium VIII.

509. Si grave, data cum celeritate, verticaliter deorsum projiciatur in aëre resistente juxta proportionem celeritatum, motus corporis ex duabus præcedentibus propositionibus facili negotio determinabuntur, perinde ac præcedens corollarium ex iisdem elicuimus. Fig. 119. Esto enim AN celeritas initialis seu velocitas projectionis, & quia si mobile in vacuo ferretur, ejus motus mixtus foret ex æquabili projectionis & ex motu accelerato gravitatis, ita etiam ejus motus in aëre mixtus est duplici motu variato, scilicet ex eo, qui resultat a motu primitive uniformi, & ex eo qui nascitur à primitive accelerato; ambo hi motus seorsim considerari possunt. In figuris 119. & 122. sint ordinatæ logarithmicæ AN, HI, BF atque HC proportionales, atque adeò erit (§. 491. num. IV.) AI : DC = AK : FH, atque adeò DC : FH = AI : AK, atqui (§. 498.) DC : FH, seu logarithmus

rithmus rationis BF ad DF, seu FH ad GH, id est, log-us rationis, quam gravitas habet ad solicitationem acceleratricem in aëre divisus per subtangentem FH, exponit tempus descensus gravis in aëre per spatium EC, idque à sola gravitate. Altera verò ratio AI: AK (§. 495.) exponit tempus, quo mobile motu ex primitivo æquabili variato in aëre transmittit spatium NC, sed quia ostensum est DC: FH = AI: AK, hæc tempora erunt æqualia; propterea tempore DC: FH mobile describet in aëre, motu mixto motibus ex æquabili & accelerato à gravitate uniformi derivatis, spatium NC + EC (inspiciendo utramque figuram 119. & 122.): atque in fine prædicti temporis celeritas mobilis erit HI + DE. Est verò NC = AN − HI, & EC = DC − DE, ergo NC + EC = AN + DC − HI − DE, atque adeò spatium indicato tempore transmissum erit DC + AN − HI − DE, & celeritas, in termino hujus spatii acquisita vel residua, HI + DE = HI + FH − GH = AN + FH − NC − GH. Quæ quantitas crescente tempore AI: AK vel DC: FH, atque adeo decrescente HI aut crescente NC, continue decrescit, quandiu AN major est quam FH; ita tamen, ut minima exclusive, cui semper magis magisque appropinquatur, futura sit FH, æqualis velocitati terminali. Sin verò AN, seu velocitas jactus, minor fuerit terminali FH, summa HI + DE continue crescit, usque dum HI in infinitum imminuta evanuerit, alteraque DE facta fuerit FH, æqualis scilicet velocitati terminali.

PROPOSITIO LX. Problema.

510. *Invenire curvam* 2M2T2C, *quam grave secundum directionem* 2M2R, *dato angulo* 2R2M2L, *ad horizontem inclinatam celeritate* 2M2G *projectum, in aëre, juxta proportionem celeritatum resistente, describet.* Fig. 123.

Solutio. In puncto 2G excitata normali 2G2D ad 2M2G, circa 2G2D tanquam axem descripta sit per punctum 2M log-mica 2M2B2Q, subtangentem habens 2G2*u*, quæ juxta præcedentia, gravitatem uniformem seu etiam velocitatem terminalem exponit. Jungatur 2M2*u*, quæ log-micam in puncto 2M continget; tunc per quodlibet punctum 2*r* directionis jactus ductis 2*r*2*l* & 2*r*2*b* rectis 2G2E, & 2G2D æquidistantibus, quarum altera tangenti log-micæ in 2*s* & log-micæ ipsi in 2*b* occurrat: denique fiat ubique in qualibet 2*r*2*l* ejus pars 2*r*2*t* æqualis homologæ 2*s*2*b*, interceptæ inter tan-

tangentem & log-micam, eritque ſemper punctum $2t$ in curva quæſita $2M2T2C$.

Demonſtr. Intelligatur iterum quædam linea $2M2N$, grave projectum ſecum deferens, motu ſibi ipſi & $2G2E$ ſemper parallelo ferri, & quidem motu variato ex primitive uniformi in aëre ſecundum celeritatum rationem reſiſtenti, exiſtente celeritate initiali eadem cum celeritate jactus $2M2G$; atque in hac linea deferente $2M2N$ grave libere cadere motu eadem ratione accelerato, quam qui in propoſitione antecedente definitus eſt; quibus poſitis, linea deferens $2M2N$ ex hoc ſuo primo ſitu veniet in ſitum $2r2l$, deſcribendo in directione jactus ſpatium $2M2r$, (§. 495.) tempore, quod exponitur per log. $(2M2G : 2r2G) : 2G2u = 2r2b : 2G2u$, atqui hoc eodem tempore (§. 505.) grave in linea deferente perlabitur ſpatium æquale $2s2b$ ſeu (conſtr.) $2r2t$. Ergo ſimulatque linea deferens $2r2l$ percurrit ſpatium $2M2r$, grave perlabitur in ea ſpatium $2r2t = 2s2b$, atque adeò id ſemper durante ejusmodi motu mixto invenietur incedere in curva $2M2T2C$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

511. Tangens $2g2t$ per quodlibet curvæ punctum $2t$ ducta, exponet celeritatem mobilis in eodem curvæ puncto. Nam elementa rectæ $2M2r$ & curvæ $2M2t$ duabus rectis indefinite vicinis & parallelis interjecta, quarum $2r2t$ eſſet altera, eodem tempore deſcribentur, atque adeò velocitates, quibus dicta elementa percurruntur, erunt ut hæc ipſa elementa; ſed hæc elementa ſunt lineis $2r2G$ & $2t2g$ proportionalia, ergo hæ rectæ etiam velocitatibus, quibus prædicta elementa percurruntur, proportionari debent. Unde, quia (§. 495.) $2r2G$ exponit celeritatem, qua percurritur elementum rectæ $2M2r$, ideò tangens $2t2g$ exponet celeritatem mobilis in curvæ $2M2T2C$ puncto $2t$.

Corollarium II.

512. Recta $2E2G$ aſymptota erit curvæ projectionis $2M2T2C$. Nam ſi $2O2Q$ cadat ſuper $2G2D$, fiet $2P2Q$ infinita, ergo etiam $2O2C$ ipſi $2P2Q$ æqualis infinita erit, ubi ceciderit ſuper lineam $2G2E$.

Co-

Corollarium III.

513. Si 2*u*2D par fiat 2G2E, jungaturque 2M2D log-micam secans in 2Q, ductaque ex 2Q recta 2Q2O parallela 2D2G, & per 2O recta 2O2C æquidistanti 2G2E; recta 2M2C erit amplitudo curvæ projectionis 2M2T2C.

Corollarium IV.

514. Sic etiam amplitudo curvæ projectionis, in quolibet plano ad horizontem *inclinato*, 2M2F *invenietur*, *sumendo* 2*u*2*x* = 2F2G, & ducendo 2M2X log-micam secantem in puncto 2V. Nam, si ex hoc puncto agatur 2V2I parallela 2G2D, & 2I2H æquidistans rectæ 2E2G, intercepta 2M2H erit amplitudo quæsita in plano 2M2F ad horizontem inclinato. Erit enim 2X2*u* : 2V2K = 2G2F : 2I2H, unde cum (constr.) 2X2*u* sit = 2G2F, erit etiam 2I2H = 2V2K. Simili ferme ratione demonstratur præcedens corollarium.

Corollarium V.

515. *Quinimo datis* amplitudine 2M2C atque celeritate jactus 2M2G, *inveniri potest angulus* 2G2M2E *hisce datis conveniens*. Nam si coordinatis 2M2O & 2O2Q, *nominatis* x & y respective, construatur curva 2Y2Q, cujus æquatio sit $y = \frac{cx}{a} + \sqrt{(xx - bb)}$, quam proinde liquet esse aliquam sectionem conicam, scilicet hyperbolam, in qua a significat 2M2G, dein c & b denotant log-micæ subtangentem datam 2G2*u*, & datam curvæ projectionis amplitudinem 2M2C. *Communis intersectio* curvæ 2Y2Q & log-micæ 2M2B2Q sit 2Q, per quam & per punctum 2M ducatur linea 2M2D rectæ 2G2D occurrens in puncto 2D, linea 2*u*D dabit sinum 2G2E anguli quæsiti 2G2M2E, existente 2G2M radio seu sinu toto.

Corollarium VI.

516. Nec amplius arduum erit determinatu, quinam angulus elevationis 2G2M2E conveniat maximæ omnium amplitudini 2M2C *possibili*. Nam, positis iisdem, quæ in coroll. præc. symbolis, si hoc

casu curvæ 2Y2Q æquatio fuerit $y = \frac{aax - axx}{cx - 2ac} + \frac{cx}{a}$, quam proinde liquet esse aliquam Sectionem conicam, novæ curvæ hujus & log-micæ communis intersectio 2Q præbebit lineam 2u2D, quæ perpetuo æqualis est sinui anguli 2G2M2E quæsiti. Sed, si curva 2Y2Q log-micam nusquam intersecat, problema impossibile est, quod præsertim de corollario antecedente intelligendum, in quo sæpe contingere potest, ut *b*, seu amplitudo jactus, tanta assumatur, ut hyperbola inde resultans log-micam nusquam secare queat, atque adeò problema solutu impossibile sit, cum contra problema corollarii hujus sexti semper possibile existat. Nonnunquam etiam hyperbola corollarii V. hujus log-micam in duobus punctis secare potest, quo fiet ut problema duas elevationes diversas 2G2M2E admittat. Horum duorum corollariorum fundamentum consistit in corollariis III. & IV. Calculum verò Lectoris industriæ relinquo.

Corollarium VII.

517. Per log-micæ punctum 2*b* ducta sit tangens 2*b*2*p*, eritque primo 2*u*2*p* = 2G2*g*. Nam elementum lineæ 2*s*2*b* est ad elem. lineæ 2M2*s* ut 2*u*2*p* − 2*s*2*b* ad 2*u*2*s*, & elem. lineæ 2M2*s* ad elem. 2M2*r* ut 2*u*2*s* ad 2G2*r*, ergo ex æquo elem. lineæ 2*s*2*b* ad elem. lineæ 2M2*r* se habet sicut 2*u*2*p* − 2*s*2*b* ad 2G2*r*; atqui elementum lineæ 2*s*2*b* vel (constr.) æqualis 2*r*2*t* est ad element. 2M2*r* sicut 2G2*g* − 2*r*2*t* vel 2*s*2*b* ad 2G2*r*, ergo 2*u*2*p* − 2*s*2*b* : 2G2*r* se habet ut 2G2*g* − 2*s*2*b* : 2G2*r*, atque adeò 2G2*g* − 2*s*2*b* = 2*u*2*p* − 2*s*2*b*, hoc est, 2G2*g* = 2*u*2*p*, & sic ubique. Secundò est 2*u*2*p* ubique æqualis respectivæ 2*r*2*b*. Nam ducta per 2*b* recta 2*b*2*q*, parallela rectæ 2M2G, erit 2*p*2*q* subtangens, atque adeo æqualis ipsi 2G2*u*, hinc ablata (vel addita subinde) communi 2*q*2*u*, remanebunt æquales 2*u*2*p* & 2G2*q* vel 2*r*2*b*, ergo etiam 2G2*g* = 2*r*2*b*, unde 2G2*g* − 2*r*2*t* = 2*r*2*b* − 2*s*2*b* = 2*r*2*s*. Propterea est elementum 2*t*2*r* ad elem. rectæ 2M2*r*, sicut 2*r*2*s* ad 2*r*2G. Jam 2*s*2*r* : 2*r*2M = 2G2*u* : 2G2M, & 2*r*2M : 2*r*2G = 2*r*2M : 2*r*2G, ergo per rationum compositionem, & ex æquo 2*s*2*r* : 2*r*2G = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G. Erit ergo etiam elementum rectæ 2*r*2*t* ad element. rectæ 2M2*r* = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G. Hinc, si lineæ nominentur, ut sequitur, scilicet 2M2G, *b*; subtangens 2G2*u*, *a*; indeterminatæ 2M2*r*, *y*; 2*r*2*t*, *x*, harum elementa *dy* & *dx*, & analogia modò reperta element. 2*r*2*t* : elem. 2M2*r* = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G præbebit hanc alteram, in terminis

minis analyticis, $dx : dy = ay : bb - by$; adeoque æquatio differentialis curvæ erit $dx = aydy : bb - by$. Quam Celeb. Varignon primus reperit *in* Act. Acad. Scient. Paris. 1708. ad diem 18. Julii, coroll. III; Clariss. hic Autor etiam in citato hoc schediasmate constructionem tradidit problematis in præsenti propositione exhibiti simillimam illi, quam supra (§. 510.) adduximus, sed aliter quam à nobis factum, demonstratam. Et denique in schediasmate die 22. Augusti ejusdem anni 1708. coram societate prælecto, identitatem curvarum projectionis à summis geometris Newtono & Hugenio constructarum cum effectione à se adducta (quam ab ea, quam nos attulimus, non nisi in demonstratione differre jam diximus) analytico calculo eleganter commonstravit. Verùm, quia eadem identitas curvarum, quas constructiones Newtoni atque Hugenii cum inter se, tum etiam à constructione Varignonii prima fronte non parum discrepantes præbent, absque calculo eleganter etiam demonstrari potest, eandem identitatem geometrica demonstratione hoc loco confirmare non gravabor. Ad demonstrationis facilitatem à constructione Hugeniana rem ordiar.

PROPOSITIO LXI. Theorema.

518. *Curva projectionis, cujus constructio in propositione præcedenti exhibita est, similis & æqualis est curvæ, quæ resultat ex constructione Hugeniana* (*vide* Discours de la Cause de la Pesanteur pag. 171.) *in hypothesi resistentiarum mediis velocitatibus actualibus mobilis proportionalium.* Fig. 124.

Hugenii constructio ita habet. Sint MG directio jactus, ME horizontalis, DE horizonti perpendicularis, circa quam velut axem descripta sit log-mica ABC subtangentem habens $D\omega$ vel FO, divisaque qualibet AD alteri EM parallela in K, ut AK sit ad KD, sicut celeritas jactus verticalis ex obliqua MG derivata, ad celeritatem terminalem, seu maximam exclusive, quam scilicet grave nunquam attingere potest, etsi ei magis magisque semper cadendo accedat. Per K agatur KBL æquidistans DE log-micam in B, & horizontalem in L secans; ductisque porrò per log-micæ puncta A, B tangentibus $A\omega$, BO, tum etiam AC tangenti BO parallela, quæ KL secet in P, & logarithmicam in C; si fiat in qualibet KL, rectas $A\omega$, AC, MG & ME secante in punctis S, P, R & L; logarithmicam verò in B, ut RL ad TL ita SP ad BP, & $rl : tl =$ sp:

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [327] - 299
PUBLIC DOMAIN

$sp:bp$, erunt puncta T, t, &c. in curva optata MTC, quam dico eandem esse cum curva $2M2T2C$ in propositione LX. §. 510. constructa, si anguli GME, $2G2M2E$, subtangentes logarithmicarum $D\omega$ & $2G2u$, & denique celeritates jactus MG, & $2M2G$, æquales fuerint.

Fig. 124. & 123. *Demonstr.* Sint præterea Mr & $2M2r$ æquales, & æquabuntur pariter rl ac $2r2l$. Jam, quia MG exponit celeritatem jactus, EG denotabit velocitatem verticalem ex obliqua MG derivatam, & $D\omega$ vel FO (§. 498.) exponit celeritatem terminalem, erit (constr.) $AK:DK=EG:D\omega$; &, quia si æqualibus $D\omega$ & FO communis ωF addatur, provenientes inde DF seu KB & ωO æquales, atque adeò rectæ ωK, HB & AI parallelæ sunt, erit etiam $AK:DK=\omega I:D\omega=EG:D\omega$; & per consequens $\omega I=EG$, & sic ubique $sp=rl=2r2l$, cùm Mr & $2M2r$ angulique GME, $2G2M2E$ (secundùm hypothesin) æquentur; porrò $AD:kD$ $(=MG:rG)=2M2G:2r2G$, ergo (§. 492.) $kb:D\omega=2r2b:2G2u$, sunt enim kb log-mus rationis AD ad kD in log-mica ABC, & $2r2b$ log-mus rationis alteri æqualis $2M2G$ ad $2r2G$ in log-mica $2M2B2Q$. Vel, quia (secundùm hypothesin) $D\omega=2G2u$, fiet $kb=2r2b$, & quia $2G2u:2r2s$ $(=2G2M:2r2M=GM:rM=DA:kA)=D\omega:ks$ atque $2G2u=D\omega$, erit $2r2s=ks$ & $sb=2s2b$; hinc etiam ex æqualibus sp & $2r2l$ ablatis æqualibus sb & $2s2b$ vel $2r2t$, remanet $bp=2t2l$; sed constructio præbet $rl:tl=sp:bp$; seu quia $rl=sp$, fit etiam $tl=bp$, ergo pariter habebitur $tl=2t2l$, & sic ubique, ergo curva Hugeniana MTC eadem est cum altera $2M2T2C$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

519. Hinc liquet Hugenium suam constructionem *nonnihil* simpliciorem traditurum fuisse, si loco analogiæ $RL:TL=SP:BP$ simpliciter jussisset sumere ubique applicatam TL æqualem homologæ BP interceptæ inter log-micam ABC & ejus subtensam AC.

COROLLARIUM II.

520. Parameter parabolæ, quam missile juxta directionem MG & celeritate hac recta expressa in vacuo describeret, foret $2.EM^2:D\omega$. Nam, quia celeritas verticalis ex obliqua derivata est EG, & gravitas uniformis exponitur per subtangentem log-micæ $D\omega$, maxima alti-

altitudo, ad quam grave celeritate initiali EG pervenire poteſt, erit (§. 150.) $EG^2 : 2.D\omega$. Sed GE eſt ad EM, ut dupla parabolæ altitudo ad ſemiſſem amplitudinis, ac propterea hæc dimidia amplitudo eſt $EM.EG : D\omega$. Atqui quadratum dimidiæ amplitudinis parabolæ applicatum ad ejus altitudinem præbet parametrum, ergo hic parameter eſt $2.EM^2 : D\omega$. Quod Hugenianæ & Varignonianæ determinationibus, utut aliis terminis expreſſis, conſonum eſt.

PROPOSITIO LXII. Theorema.

521. *Eadem adhuc reſiſtentiæ hypotheſi poſita, curva projectionis, quæ ex conſtructione à Cel. Newtono* (Princ. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. IV.) *exhibita naſcitur, eadem eſt cum Hugeniana, de qua in propoſitione proxime antecedenti egimus, aut cum curva propoſitionis noſtræ ſexageſimæ primæ.*

Ne Lectori Newtoni conſtructionem alibi quærere opus ſit, eam, ſed aliis quam apud Autorem litteris ſignatam, huc afferre libet. Eadem vero ita habet: Fig. 124.

Aſſumpta MG pro celeritate & directione jactus, ductisque per terminos ejus horizontali ME, ac verticali ED, in qua ejus ſegmentum EG celeritatem verticalem ex obliqua MG derivatam exponit; inter aſymptotas *DEM* hyperbola quæcunque *QVd* deſcripta intelligatur rectam AM in Q ſecans, per quod punctum agatur inſuper QH æquidiſtans horizontali ME, diviſaque hac ME in L, ut ML ſit ad LE ſicut reſiſtentia medii renitens motui in altum initio projectionis, ſeu velocitas verticalis EG ad gravitatem, ſeu celeritatem terminalem, antea expoſitam per ſubtangentem FO log-micæ ABC, ducatur LK parallela AM, hyperbolam in V ſecans, quæ log-micæ occurret *in B & AD in K*, quandoquidem in conſtructione Hugeniana (§. 518.) AK etiam eſt ad KD ſicut EG ad FO vel $D\omega$. Per hyperbolæ punctum V agatur Zz parallela EM, ſumaturque in ea portio *gz*, quam Newtonus per litteram N deſignat, quæ ſit ad zQ vel VN, ſicut ME ad EG, aut ſimplicius, ducatur *Qg* æquidiſtans ipſi MG. Quibus poſitis, ſi in qualibet *rl* parallela KL capiatur *rt* æqualis trilineo hyperbolico *Qun* applicato ad datam *gz*, punctum *t* erit in curva, quæ eadem prorſus eſt cum ea, quam conſtructiones propoſitionum antecedentium LX & LXI, præbent.

Demonſtr. I. Hyperbola *QVd* præbet, $EM : EL = VL : QM$ & dividendo $LM : EL = zQ : QM$, & (conſtr.) $LM : EL = EG : D\omega = rl : ks$.

ks, ergo etiam $zQ:QM=rl:ks$, tum etiam (constr.) $gz:zQ$ $(=ME:EG)=Ml:rl$, ergo ex æquo $gz:QM=Ml:ks$; atque adeò $Ml.QM=gz.ks$.

II. Resumatur analogia $zQ:QM=GE:D\omega$, & $gz:zQ=EM:GE$, ergo ex æquo $gz:QM=EM:D\omega$. Atque adeò $EM.QM=D\omega.gz$.

III. Constructione est trilineum hyperbolicum $Qnu=gz.rt$, additisque $Ml.QM$ (num. 1. hujus) $=gh.ks$, fiet $QulM=rt.gz+ks.gz$. Atqui (§. 368.) $QMlu:EM.MQ=kb:D\omega$ & (num. 11. hujus) $EM.QM=D\omega.gz$; ergo $rt.gz+ks.gz:D\omega.gz=rt+ks:D\omega=kb:D\omega$; atque adeò $rt+ks=kb=sb+ks$: hinc tandem $rt=sb$, ut habent constructiones propositionum LX & LXI; propterea tres diversæ constructiones propositionum trium postremarum unam eandemque curvam suppeditant. Quod erat demonstrandum.

CAPUT XVI.

De motu Corporum, in aëre resistente in duplicata ratione celeritatum mobilis.

Hæc resistentiæ hypothesis convenit fluidis perfectis atque raris, quorum scilicet partes prorsus non cohærent, sed liberrime, ubi corporibus solidis impegerunt, recedere queunt; ipsius vero hypotheseos ratio alibi (§. 427.) jam data est.

PROPOSITIO LXIII. Theorema.

Fig. 125. 522. *Motus variati ex primitive uniformi in aëre juxta duplicatam celeritatum rationem resistente ita se habent, ut spatium transmissum aliquo tempore exponatur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis mobilis ad residuam eidem mobili post dictum tempus. Hoc verò tempus, ratione celeritatis amissæ mobilis ad residuam.*

I. Sit nunc linea MO deferens, quæ juxta NQ quiescentem æquabiliter incedere intelligatur eodem modo, quo ad propositionem LVIII. dictum est (§. 495); mobile vero M feratur ad oppositam partem scilicet versus O in deferenti linea, quæ versus Q æquabiliter procedit; sint præterea MDO scala celeritatum mobilis motu proprio in deferente linea currentis, & PFO scala solicitationum acceleratricium seu impulsuum aëris mobili allidentis. Unde, si aliquo tempore

pore mobile M confecerit in linea deferenti ſpatium ME, & in ejus termino acquiſiverit celeritatem DE, velocitas abſoluta mobilis in aëre erit BD, quâcum aër mobili M allabetur, unde per hypotheſin erit MP ad EF in duplicata ratione AM ad BD; hoc eſt MP : EF = AM² : BD². Ponitur enim AM, ſeu MN vel NT, pro deſignanda velocitate initiali. Jam ductis per punctum N intra aſymptotas MA & AR hyperbolâ NHK, & log-micâ NGK ſubtangentis NT; in linea indefinita DCH parallela OQ & quomodocunque inter parallelas OR ac OQ ducta, fiat VD æqualis interceptæ GH inter hyperbolam NHK & log-micam NGK, eritque punctum D in ſcala celeritatum mobilis propriarum MDO. Per punctum *d* alteri D indefinite vicinum agantur *dh* parallela OQ, & *bf* æquidiſtans alteri BF; ac ductis per punctum hyperbolæ H rectis IS & HL, ita ut IL = NT (ſeu = ſubtangenti logmicæ NGK in puncto G, atque adeò HL parallela ſit tangenti log-micæ in G, ſeu elemento *Gg*) ac denique tangente hyperbolæ HR, adeo ut AI ſit = IR, & LR = TI = NS; quibus factis erit *nh* = *Ee* = *Da*, & *Hm* = *da*.

II. Hyperbola præbet, AI : AT = TN : IH, & dividendo LR vel TI : AT = DE vel HS : BD ſeu IH, ex hypotheſi verò AT vel AM aut MP : BD = BD : EF, ergo ex æquo LR : IH vel BD = DE : EF; eſt verò LR : IH = *nh* vel *Ee* : *Hm* ſeu *da*, ergo etiam DE : EF = *Ee* : *da*; atque adeò EF. *Ee* = DE. *da*. Hoc eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *æquatur momento celeritatis in deferenti lineæ mobili* M *acquiſitæ* DE. Ergo (§. 488.) curva MDO eſt ſcala celeritatum, & PFO ſcala reſiſtentiarum, ſeu impulſuum aëris vel ſolicitationum acceleratricium mobilis in linea deferenti, hæc enim omnia idem ſignificant.

III. Agatur SR eritque ea parallela HL; nam IH : IS vel TN = IL *vel AT : IR vel AI*. Adeoque IS : HS = AM : DE = IR : LR = *mh* : *nh* vel *Ee*, hinc *Ee* : DE (§. 128.) = *tEe* = *mh* : AM; ergo omnia *tEe* id eſt *t*ME = CH : AM, hinc AM. *t*ME = CH, & AM. *t*ME, — ME ſeu (§. 489.) ſpatium abſolutum, quod mobile in aëre transmittit, erit = CH — GH = CG; adeòque exponi debet logarithmo rationis, quam celeritas initialis mobilis TN habet ad IH vel BD in logarithmica NGK, cujus ſubtangens NT. Quod erat primùm.

IV. Num. III. erat *t*ME = CH : AM = LR : IL = SH : HI = DE : BD, id eſt, tempus quo mobile ſpatium ſuum abſolutum in aëre abſolvit, ſeu motu proprio in linea deferenti ſpatium ME, exponitur ra-

ratione, quam habet celeritatis initialis AM pars hoc tempore extincta DE ad reſiduam BD. Quod erat ſecundum.

Corollarium I.

523. Adeoque, ſi tempora fuerint in progreſſione geometrica aſcendente, atque adeò velocitates mobili poſt hæc tempora reſiduæ etiam in progreſſione geometrica, ſed deſcendente, & quidem reciproca progreſſionis temporum, ſpatia tranſmiſſa erunt in progreſſione arithmetica. Nam, ſi AT, AI ſint in progreſſione geometrica, differentiæ TI, quæ ſunt ut tempora, erunt in eadem progreſſione aſcendente; ipſæ verò HI, ſeu celeritates mobili reſiduæ ipſis AI reciproce proportionales, erunt in progreſſione geometrica deſcendente, ſpatia vero, ſeu CG, exiſtent in progreſſione arithmetica. Atque cum hoc corollario penitus conſentit Prop. V. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Celeberr. Newtoni.

Corollarium II.

524. Idcirco in iſta reſiſtentiæ hypotheſi mobile in infinitum excurrens, tempore infinito ut CH, ubi infinite acceſſerit ad aſymptotam TR, percurret etiam ſpatium infinitum CG; nam, ſi CG confunditur cum aſymptota TR, fit infinita. In hypotheſi verò capitis præcedentis, mobile tempore infinito ne quidem ſpatium finitæ magnitudinis, quod per rectam celeritatem initialem indicantem exponitur, abſolvere poteſt, ut ſupra (§. 497.) oſtenſum. Quod Hugenio notatu dignum meritò viſum eſt in Tractatu *De la Cauſe de la Peſanteur* pag. 175. circa finem.

Propositio LXIV. Theorema.

525. *Si grave vi gravitatis uniformis in aëre juxta duplicatam rationem celeritatum mobilis reſiſtente verticaliter deſcendat à quiete motum ſuum incipiendo,*

Spatium *deſcenſu confectum exponetur log-mo rationis ſinus totius ad ſinum complementi illius anguli, cujus ſinus rectus celeritatem mobili acquiſitam repræſentat;*

Tempus *verò, quo ſpatium illud pertranſitur, aut prædicta velocitas mobili acquiritur, exponetur log-mo rationis ſinus totius ad tangentem ſe-*

ſemiſſis complementi præmemorati anguli, applicato ad logarithmicæ ſubtangentem.

Grave M deſcendere incipiat à quiete in recta verticali MX, cui alia AO ad angulos rectos aptata ſit; in hac AO capiatur MA, quæ gravitatem uniformem exponat, ac deſcriptis centro M intervallo MA quadrante circuli ILA & hyperbola æquilatera IK*k*, necnon log-mica NIQ, cujus ſubtangens æquet radium quadrantis vel ſemilatus transverſum MI hyperbolæ; per hyperbolæ & quadrantis punctum I agatur tangens communis IU, quæ æquidiſtans erit ipſi MA. Tum etiam per quodvis quadrantis punctum L ducatur LN parallela AO log-micæ occurrens in puncto N, & recta ALP radio MI producto occurrens in P, per quod punctum ducatur inſuper PQ æquidiſtans MA & log-micæ occurrens in puncto Q, ſitque adhuc NO ordinata log-micæ per punctum N ducta. Dein fiat porrò in recta indefinita MX ſegmentum ME = MO, & ſic ubique reſpective; eritque ductis per puncta E & L rectis EG, LS radiis MA & MI reſpective parallelis, communis earum interſectio D in *ſcala celeritatum acquiſitarum* MDX, adeo quidem, ut mobile poſtquam ſpatium ME perlapſum fuerit, in termino E hujus ſpatii acquiſiverit celeritatem ED vel MS. Factaque ubique EF tertia proportionali poſt rectas EG & ED, punctum F erit in *ſcala reſiſtentiarum* aëris MFX, quæ ſcala etiam erit *ſcala ſolicitationum acceleratricium* mobilis cadentis in recta MX, ſed quatenus ea refertur ad axem AX, verſus quem curva MFX convexa eſt; nam, quia EF, ſeu $ED^2 : EG$, exponit reſiſtentiam medii in puncto E & EG = MA gravitatem uniformem, exponet FG omnino ſolicitationem acceleratricem in puncto eodem E, ut alibi (§. 481.) jam dictum eſt. Igitur ductis *eg* parallela EG & ab ea elemento ſpatii E*e* diſtante; *dlr* parallela DL productæ in *a*, & ſurſum in R, per punctum quadrantis *l*, recta *Alp*, & per *p* linea *pq* æquidiſtante PQ; ac denique ordinata *no* diſtantia O*o* = E*e* diſtante ab altera NO, in qua NO ſit VO tertia proportionalis ad IM & NO; & his poſitis juxta alibi (§. 484.) oſtenſa, tantum probandum ſupereſt, FG.E*e*, ſeu rec-lum FG*g*, *momentum ſolicitationis acceleratricis* FG æquari rec-lo ED.*a d*, ſeu *momento celeritatis* ED *caſu mobilis ex altitudine* ME *acquiſitæ*. Quo probato reliqua ſponte ſua obtinebuntur, ſcilicet expreſſio temporis deſcenſus in ſpatio ME, & natura curvarum MDX, MFX, &c. Fig. 126.

Demonſtr. I. Eſt (ſecundùm hypotheſin) $EG : EF (= EG^2 : ED^2) = ML^2 :$

$= ML^2 : MS^2$, & convertendo fit $EG : FG (= ML^2 : LS^2 = IM^2 : NO^2$, seu quia IM, NO & VO sunt in continua ratione$) = IM : VO$, hinc $VO = FG$, & $VO.Oo = FG.Ee$. Atqui (§. 491. num. 111.) $VO.Oo = NO.Np = LS.Lm$ (§. 493.$) = MS.Ss = ED.$ *ad*; ergo $FG.Ee = ED.$ *ad*. Quod erat primùm.

II. Propter similitudinem triangulorum MLS & M*lm*, fit *ad* (vel *ml*) : $l\lambda$ (vel, §. 463. num. 111, L*l*) est $= LS : ML = NO : IM = VO : NO$; & $l\lambda : Pp = NO$ (vel LS) : MP ; ac denique ex natura log-micæ (§. 491. num. 1.) $Pp : qp = MP : IM$, erit ex æquo *ad* : $pq = VO : IM$, seu permutando *ad* : $VO = pq : IM$. Atqui (§. 131. & 485.) *ad* : $VO = tEe$, hoc est, incrementum celeritatis elementare, applicatum ad solicitationem acceleratricem VO, exponit tempusculum, quo elementum spatii Ee percurritur; ergo etiam $pq : IM = tEe$, atque adeò omnia $pq : IM$, id est, $PQ : IM =$ omnibus tEe, seu tempori descensus per spatium ME.

III. Jam MO seu ME, id est, spatium descensu confectum, est log-us rationis IM ad NO, seu IM ad LS, hoc est log-us sinus totius ad sinum complementi anguli IML, cujus sinus rectus MS celeritatem in E acquisitam exponit. PQ verò est log-us rationis PM ad IM, seu IU ad IM; ducta scilicet ex centro M super AP perpendiculari, eaque producta usque ad occursum cum tangente IU; aut denique rationis MA ad AZ, *id est, sinus totius ad tangentem semissis anguli LMA, id est, semissis complementi anguli* IML, cujus sinus MS celeritatem acquisitam exponit. Idcirco tempus per ME, quod num. 11. hujus exponitur per PQ : IM, exponi debet per log-mum rationis (MA : AZ) sinus totius ad tangentem semissis complementi anguli IML applicatum ad radium IM, seu ad log-micæ subtangentem. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

526. Igitur ducta MR usque ad occursum K cum hyperbola IK, trilineum hyperbolicum IMK applicatum ad semissem quadrati IM, exponet etiam tempus descensus per spatium ME. Nam (§. 463.) est duplum trilinei IMK = rec-lo PQ.IM, ergo trilineum IMK = PQ.$\frac{1}{2}$IM. Jam, quia (§. 525. num. 11.) $tME = PQ : IM = PQ.IM : IM^2$, erit $tME =$ dupl. trilin. IMK : $IM^2 =$ trilin. IMK : $\frac{1}{2}IM^2$.

Pariter ducta asymptota M*y* hyperbolæ IK*k*, atque ex K demissa ad asymptotam ordinata KY, ad quam alia quædam *ky* se habeat, ut

ut LS ad IM, quadrilineum hyperbolicum K*ky*Y applicatum ad ſemiſſem IM exponet ſpatium percurſum ME. Nam, quia (conſtr.) KY : *ky* = IM : NO, erit (§. 368.) K*ky*Y : MY. KY ſeu ½IM² = OM : IM, adeoque OM = ME = K*ky*Y : ½IM.

Corollarium II.

527. Scala ſolicitationum acceleratricium MFX eſt log-mica, cujus ſubtangens eſt ſemiſſis ipſius IM. Nam, quia ſupra (§. 525. num. 1.) oſtenſum VO = FG & (conſtr.) OM = ME = AG, ſequitur curvam MFX ſimilem & æqualem eſſe curvæ IV; atqui hæc curva eſt log-mica, cujus ſubtangens eſt dimidia ipſius IM ſubtangentis logarithmicæ IN; quandoquidem quælibet VO eſt tertia proportionalis ad IM & NO; ergo etiam MFX eſt log-mica, cujus aſymptota eſt AX. Propterea, ſi ſolicitationes acceleratrices FG ſunt in progreſſione geometrica deſcendente, ſpatia transmiſſa ſunt in progreſſione arithmetica aſcendente.

Corollarium III.

528. Adeoque velocitas *terminalis* ſeu *maxima*, eſt MA, quæ gravitatem uniformem repræſentat, cum linea AX parallela MX aſymptota ſit utriusque curvæ *MFX & MDX*.

Corollarium IV.

529. Tempus, quo grave in aëre celeritatem DE acquirit, eſt ad tempus, quo eandem celeritatem in vacuo acquireret, ut PQ ad DE. Nam (§. 151.) tempus, quo celeritas DE in vacuo acquiritur, eſt DE : *IM vel AM*, & tempus, quo in aëre eadem DE acquiritur, PQ : IM.

Corollarium V.

530. Viciſſim celeritas, quæ tempore PQ : IM in aëre acquiritur, eſt ad celeritatem, quæ eodem tempore in vacuo acquiri poteſt, ut DE ad PQ. Nam (§. 151.) tempore PQ : IM acquiritur in vacuo celeritas PQ.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [335] - 307
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

Fig. 127. 531. Si grave M perpendiculariter deorsum projiciatur in recta MX celeritate MI, majore ipsâ terminali MA vel MP; positoque, mobilis velocitatem reductam esse ex MI ad MS (nam, quia velocitas projectionis MI major est quam AM, resistentia medii major erit gravitate, ac propterea motus continuo debet retardari) erit spatium percursum ME exponendum per log. $\sqrt{}$(PIA:PSA) seu log-mum subduplicatæ rationis rectanguli PI. AI ad PS. AS; tempus verò, quo mobile spatium ME percurrit, seu quo velocitas initialis MI reducitur ad ED vel MS, exponitur per log. $\sqrt{}$(AI:AS) — log. $\sqrt{}$(PI:PS). Ponitur verò MP = MA, hi posteriores log-mi sumuntur in log-mica, cujus subtangens est unitas, log. vero ex $\sqrt{}$(PIA:PSA) sumitur in log-mica, cujus subtangens est AM vel MP. Sin verò celeritas projectionis MI minor fuerit quam MA, hic casus jam continetur in præsenti propositione, ut adeo eidem diutius immorari plane necessum non sit.

Propositio LXV. Theorema.

532. *Lineâ rectâ, quæ celeritatem terminalem seu gravitatem uniformem exponit, sumtâ pro sinu toto seu radio; si mobile quoddam, celeritate initiali, expressa tangente alicujus anguli, verticaliter in altum projiciatur*, maxima altitudo, *ad quam mobile in aëre pervenire potest, exponetur log-mo rationis secantis anguli ad radium, &* tempus *hujus ascensionis exponetur per ipsum angulum, cujus tangens celeritatem initialem exponit.*

Fig. 128. Ascendat mobile celeritate initiali EC ex E in M in linea verticali EM, centroque M describantur, ut in præcedenti, circuli quadrans IKA, hyperbola æquilatera IL, & logarithmica IN. Producatur CE in H factaque EH tertia proportionali ad EG & EC, eritque EH resistentia, quam ascendens mobile ab aëre patietur in E; & quia præterea EG, seu MA, gravitatem uniformem exponit, quæ mobili in altum lato quoque resistit, erit ideo (§. 481.) *resistentia totalis* mobili opposita in E æqualis GH. Adeoque curva quædam HM erit scala resistentiarum totalium, curva verò CM scala celeritatis decrescentis EC. Adeoque (§. 484.) res eo deducitur, ut construantur hæ nominatæ curvæ ejus proprietatis, ut sit ubi-

ubique HE. Ee = EC. bC. Ad id, ductis CL, LN atque NO parallelis rectis MI & MA respective, fiat ME = MO, & sic ubique, dabunturque tot puncta in curva C_2CM, quot libuerit, ex qua deinceps alteram HM construere non erit difficile. Ducantur *cl*, *ln*, *no* prioribus CL, LN & NO æquidistantes & indefinite vicinæ, sumaturque in qualibet ON major OV, quæ sit ad homologam ON, ut hæc NO ad MI; quæ MI simul etiam log-micæ IN subtangentem significat, & hac ratione resultabit nova log-mica IV, cujus subtangens erit semissis IM subtangentis log-micæ IN.

Demonstr. I. Quia rectæ EG, EC & EH (secundùm hypothesin) sunt in continua ratione, erit $EG : EH = EG^2 : EC^2$, vel invertendo & componendo $HG : EG = IS^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = NO^2 : IM^2$ (vel ob continue proportionales VO, NO & IM) = VO : IM vel EG, ergo HG = VO; & quia OM = EM, ac $oM = eM$, & proinde $Oo = Ee$; erit HG. Gg, vel HG. Ee = VO. Oo (§. 491. num. 111.) = NO. Np = LS. Lm (§. 493.) MS. Ss = EC. Cb. Id est *momentum celeritatis decrescentis* EC *æquatur momento resistentiæ totalis* HG. Jam ME vel MO est log-us rationis NO ad IM, seu IS ad IM, id est, log-us rationis secantis anguli MIS, cujus tangens MS = EC celeritatem initialem exponit, ad radium IM vel MA. Quod erat primum.

II. Quia $VO : IM = NO^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = MR^2 : MK^2$ (§. 165.) $= Rr : Kk$, atque adeò, quia $Rr = Cb$, erit $Kk : IM = Cb : VO = Cb$: HG (§. 131, 485.) $= tEe$, & Kk : MK vel IM (§. 129.) = angulo KMk, adeoque tEe = angulo KMk, ac proinde tempus totius ascensus per spatium EM exponi debet angulo KMI, cujus tangens est IR vel EC. Quod erat alterum.

Corollarium I.

533. Nunc iterum curva resistentiarum totalium M_2HH erit log-mica similis & æqualis log-micæ IV. Atque adeo si resistentiæ totales sumantur in progressione geometrica descendente, spatia ascendendo confecta erunt in progressione arithmetica descendente, scilicet spatia toto ascensu descripta. Horum demonstratio eadem ferme est cum ea coroll. II. prop. præced. §. 527.

Corollarium II.

534. Velocitas initialis mobilis ſuam maximam in aëre altitudinem EM abſolventis, eſt ad celeritatem initialem, qua mobile pari tempore ſuam in vacuo maximam altitudinem conficeret, ut tangens IR ad arcum IK. Nam, ſi corpus in vacuo celeritate initiali IK aſcendit, tempore IK : IM id (§. §. 141. 151.) aſcendet quousque poteſt, ſed hoc ipſo tempore IK : IM expoſitum angulo KMI, aſcendet in aëre ſpatio EM, celeritate initiali EC vel IR. Ergo, &c. Atque hoc conſentit cum coroll. 4. prop. 9. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cel. Newtoni.

Corollarium III.

535. Tempus, quo mobile ſuam in aëre altitudinem, ad quam celeritate initiali IR pervenire poteſt, abſolvit, eſt ad tempus, quo in vacuo ſuam altitudinem, celeritate initiali exiſtente eadem IR, abſolveret, ſicut arcus IK ad tangentem IR, ſeu, quod idem eſt, ut ſector IMK ad triangulum IMR. Nam tempus aſcenſionis in aëre eſt angulus IMK, ſeu IK : IM, & tempus aſcenſionis in vacuo (§. 151.) IR : IM.

Corollarium IV.

536. Adeoque, ſi celeritas initialis, qua corpora in aëre & in vacuo aſcendunt, terminalem æquaverit, erit tempus, quo altitudo illius quod in aëre, ad tempus, quo altitudo ejus, quod in vacuo aſcendit, conficitur, ut circulus ad quadratum circumſcriptum; nam, ſi IR = IM, erit ſector IMK octava circuli & triangulum IMR octava quadrati circulo circumſcripti pars, adeoque ille ad hoc, ut circulus totus ad quadratum circulo circumſcriptum.

Corollarium V.

537. Iisdem adhuc poſitis, quæ in coroll. III. altitudo, quam mobile in aëre abſolvit, eſt ad altitudinem in vacuo percurrendam, ut duplum rec-lum IMO ad quadratum tangentis IR. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo deſcribenda erit $IR^2 : 2IM$, & ME eſt ad $IR^2 : 2IM$, ut duplum rec-lum IMO ad IR^2.

Co-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [338] - 310
PUBLIC DOMAIN

Corollarium VI.

538. Adeoque, si celeritas initialis IR terminali IM par fuerit, erit altitudo in aëre ad altitudinem in vacuo absolvendam, vel 2.IMO ad IR^2, sicut 2MO ad IM, id est, sicut log. ($2.IM^2 : IM^2$) ad IM, hoc est, sicut log-us rationis duplæ ad subtangentem log-micæ, vel etiam (§. 368.) ut quadrilineum hyperbolicum alterutri asymptotæ adjacens, cujus ordinatæ sunt in ratione dupla, ad rec-lum hyperbolæ inter asymptotas. Ut Celeb. Hugenius (pag. 174. Diss. *De Causa Gravitatis*) sine demonstratione asseruit.

Corollarium VII.

539. Celeritas initialis mobilis spatium EM ascendendo describentis, est ad celeritatem, quacum denuo in terram recidit, sicut tangens anguli IMR ad ejusdem sinum. Nam, quia in figuris 126. & 128. spatia ME utrinque sunt (secundùm hypothesin) æqualia, erit ratio ON : IM, in fig. 126. seu LS : LM = in fig. 128. IM : NO = RS : MR; adeoque triangulum rec-lum LMS in fig. 126. est simile triangulo RMS, adeo ut angulus IML in fig. 126. = IMK, atqui IR est tangens & MS in fig. 126. sinus unius ejusdemque anguli IMK vel IML, ergo &c. Fig. 126. & 128. Fig. 126.

Hisce multa alia potuissent addi corollaria, sed brevitati consulens talia Lectoris industriæ ex præcedentibus elicienda relinquo.

CAPUT XVII.

De motibus Corporum in aëre resistente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem.

540. Hæc resistentiarum hypothesis illis fluidis convenit, quorum partes nonnihil instar viscí cohærent: etenim, si tale fluidum tanquam medium concipiamus mobili trajiciendum, ilicò apparebit, ad separandas ejusmodi viscidi fluidi partes, aliquam vim adhibendam esse, diversam ab ea, quæ in mobili tollitur ab allapsu continuo particularum fluidi; & hanc vim separatricem partium fluidi proportionari quantitatibus fluidi trajiciendi. Quantitates verò ipsæ fluidi trajiciendæ velocitatibus mobilis proportionales

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [339] - 311
PUBLIC DOMAIN

les exiſtunt. Igitur tenacitas abſoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, ſeu, quod idem eſt, in quantitatem materiæ ſeparandæ vel trajiciendæ, erit una pars reſiſtentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum ſubibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati ſumus. Idcirco reſiſtentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, eſt ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam conſiderabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitatique comparabilem, perinde ac reſiſtentias, quæ ab allapſu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. Theorema.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione reſiſtente motu variato ex primitive uniformi ſeu æquabili feratur;* ſpatium, *quod id aliquo effluxo tempore deſcribet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, ſed celeritate actuali mobilis.* Tempus, *quo hoc ſpatium percurritur, exponi debet exceſſu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actualem, ſuperat log-um rationis earundem celeritatum, ſed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Poſito ſcilicet log-mos deſumtos eſſe ex log-mica, cujus ſubtangens ſe habet ad celeritatem mobilis initialem, ſicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum ſub dicta tenacitate & reſiſtentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Eſto MS linea deferens, quæ, ut in propoſitione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur verſus T celeritate AM, quæ proinde eſt celeritas initialis, mobile verò M proprio ſuo motu ab alliſione continua aëris feratur ex M verſus S, ponaturque certo tempore acquiſiviſſe in linea deferenti celeritatem AQ, poſtquam ſcilicet ſpatium ME in ea transmiſit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS verſus T æquabiliter incedit, erit reſidua QM velocitas abſoluta mobilis, quam revera in aëre habet; ſit porrò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viſcoſitate ejus; item ponatur MP pro reſiſtentia aëris initio motus, & EF pro reſiſtentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (ſecundùm hypotheſin) EF ut OM. QM + QM^2, ſeu facta OG = MQ, ut rec-lum GM. QM, & MP ut IM. AM, atque

atque adeo habetur MP : EF = IM. AM : GM. QM, atque MP. GM. QM = EF. IM. AM. Æqu. I.

Per punctum A ducta sit log-mica HAB, cujus subtangens quælibet RC sit ad AM (secundùm hypothesin) = IM. AM : OM. MP; atque adeò RC. OM. MP = IM. AM². Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB asymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ sint; fiat ME = $MC - \frac{IM.LN}{AM}$, eritque PFS scala resistentiarum & tempus, quo spatium ME in linea deferenti MS percurritur, seu tME = (MC = LN) : AM.

II. *Demonstr.* Cum (constr.) sit ME = $MC - \frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam $Ee = Cc - \frac{IM}{AM}$. Nn, sunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (constr.) OG = MQ, erit pariter $Gg = Hi = Qq = Bd$, adeòque (§. 491. num. 11.) rec-lum HNn = rec-lo BCc, ac proinde $Cc : Nn = GM : QM$, & $Cc : \frac{IM}{AM}$. $Nn = GM : \frac{IM}{AM}$. $QM = GM. AM : IM. QM$, & convertendo Ee seu $Cc - \frac{IM}{AM}$. $Nn : Cc = GM. AM - IM. QM : GM. AM$ (vel quia OM. AQ æquatur GM. AM − IM. QM) = OM. AQ : GM. AM, & propter triangula similia RCB ac bdB est, $Cc : Qq = RC : QM$, ergo ex æquo & per rationum compositionem $Ee : Qq = RC. OM. AQ : GM. QM. AM = RC. OM. MP. AQ : MP. GM. QM. AM$, (vel substitutis loco RC. OM. MP & MP. GM. QM ope Æqu. II. & I. solidis respective æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM) = IM. AM². AQ : IM. AM². EF = AQ : EF, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur $Ee : Qq = AQ : EF$, atque adeò EF. Ee = AQ. Qq. Id est *momentum solicitationis acceleratricis* EF in linea deferenti MS *æquatur momento celeritatis acquisitæ* AQ in hac linea deferente.

III. Ut antea (num. 11. hujus) erit $Cc : Nn = GM : QM$, & convertendo $Cc - Nn : Cc$ = OM (seu GQ) : GM, & $Cc : Qq = RC : QM$, ergo $Cc - Nn : Qq = RC. OM : GM. QM = RC. OM. MP : MP. GM. QM = IM. AM² : EF. IM. AM$, substitutis scilicet loco solidorum, RC. OM. MP & MP. GM. QM æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM, quæ æqualitates secunda & prima num. 1. exhibent;

est ergo $Cc - Nn : Qq = IM.AM^2 : EF.IM.AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ee : AQ = tEe$, ergo omnia tEe seu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, assignato hoc tempore, linea deferens MS describet in aëre cum velocitate AM motu suo æquabili spatium $MC - LN$, motu verò proprio in hac deferente corpus simul describit spatium $ME = MC - \frac{IM}{AM}.LN$, adeòque spatium absolutum, quod mobile in aëre absolvet, erit excessus spatii motu communi & æquabili lineæ deferentis supra motum isti contrarium mobilisque in deferenti proprium, seu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM}.LN = IM.LN : AM$. Hoc ergo spatium absolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM, tenacitatem fluidi OM vel IA, atque ad log-mum rationis, quam KL & HN, id est, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem habent. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

542. Apparet igitur in præsenti resistentiarum hypothesi mobile non solum non posse in infinitum excurrere, sed ne quidem posse terminum finiti spatii $SM.LY : AM$ tempore quantumlibet magno attingere. Nam evanescente QM, ipsa MC fit infinita, GM fit OM, adeoque LN mutatur tunc in LY, adeo ut $MC - LN : AM$ abeat in $MC - LY : AM$ seu in $MC : AM$, quia finita LY præ infinita MC evanescit. Idcirco spatium $IM.LN : AM$ tempore finito $MC - LN : AM$ percursum, mutabitur in $IM.LY : AM$, quod tempore infinito tantum $MC : AM$, id est nunquam, absolvi potest.

Corollarium II.

543. Si spatia $IM.LN : AM$ sumantur in progressione arithmetica, erunt ipsæ LN abjectis $IM : AM$ ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progressione arithmetica, atque adeò ordinatæ log-micæ HN vel æquales hisce GM, seu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progressione geometrica.

Co-

Corollarium III.

544. Quia CM = log. (AM : QM) & LN = log. (IM : GM) erit MC − LN = log. (GM. AM : IM. QM) = log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM). In recta MP sumatur MZ, quæ sit ad OM vel AI = AM : QM, eritque QM. MZ = AM. OM, atque adeò AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ seu AZ : IM, & consequenter MC − LN = log. (AM + MZ : IM), atque (MC − LN) : AM = log. (AM + MZ : IM) applicatus ad AM. Adeoque, si hæ MC − LN : AM, hoc est, tempora sumantur in progressione arithmetica, erunt ipsæ AM + MZ, seu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progressione geometrica.

Hæc duo postrema corollaria probe conspirant cum propositionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Augusti probl. IV. coroll. 11. & 14. exhibuit.

Scholion.

545. *Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate* in hac propositione nostra ea tradita esse, quæ multo brevius atque facilius potuissent perfici, si pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, assumsissem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At respondeo hoc pacto propositionem minus generalem futuram fuisse, etsi non negem, multò brevius atque simplicius tunc demonstrari potuisse. Nam talem adducere volui, quæ etiam casum *propositionis nostræ LXIII.* contineret; quod revera præstat, nam evanescente OM vel AI, ex constructione præsentis propositionis, nascuntur omnes determinationes propositionis LXIII, adeo ut illa casus tantum sit seu corollarium præsentis. Sed, si pro linea tenacitatem fluidi repræsentatrice accepissem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non successisset, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam potest evanescere. Sed, quia deductio propositionis superioris LXIII. ex præsenti non adeò obvia esse videtur, eam hoc loco distinctius explicare libet. Si IA vel OM evanescit, etiam AI. LN : AM evanescere videtur, seu spatium à mobili in aëre juxta duplicatam pro-

portionem celeritatum resistente in nihilum abire, tum etiam MC−LM : AM. Hoc enim casu IM abiret in AM, & GM in QM, id est, ratio IM : GM fieret AM : QM, adeoque LN log-us illius rationis fieret MC, adeò ut MC−LN futura sit MC−MC = o. Quomodo ergo ex constructione præsentis propositionis elici potest constructio propositione LXIII. in casu ipsius AI = MO = o?

546. Quia in dicta propositione (§. 522.) log-micæ subtangens exponit celeritatem initialem, sumatur log-us rationis IM : GM in ea log-mica, eritque (§. 492.) log. (IM : GM) : AM = LN : RC, adeoque LN = RC. log. (IM : GM) : AM, & IA. LN : AM = RC. IA. log. (IM : GM) : AM² = RC. OM, MP. log. (IM : GM) : AM². MP. Atqui (§. 541. num. 1. æqu. I. II.) est RC. OM. MP = IM. AM², ergo IA. LN : AM = IM. AM². log. (IM : GM) : AM². MP = IM. log. (IM : GM) : MP, & hæc est nova expressio spatii in aëre decursi, sive IA sit quantitas realis sive non. Jam, si IA = o, erit ratio IM : GM = AM : QM, evanescente scilicet OM = IA, & existente OG = QM. Ergo spatium in aëre percursum erit hoc casu AM. log. (AM : QM) : MP = log. (AM : QM) in casu propositionis LXIII. ubi MP revera æqualis facta erat AM celeritati initiali. Est ergo spatium absolutum à mobili in aëre percursum exponendum log-mo rationis, quam celeritas initialis AM habet ad residuam mobilis seu actualem QM, prorsus ut habet propositio citata.

547. Determinatio temporis est paulò altioris indaginis. Hoc tempus exponitur juxta præsentem propositionem per (MC−LN) : AM. Jam (§. 544.) est MC−LN = log. (AM + MZ : IM) = log. AM + MZ, − log. IM. Et log. (AM + MZ) = $(\frac{MZ}{MA} - \frac{MZ^2}{2.AM^2} + \frac{MZ^3}{3.AM^3} -$ &c.) in RC, = $(\frac{MZ.QM}{AM.QM} - \frac{MZ^2.QM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{MZ^3.QM^3}{3.AM^3.QM^3} -$ &c.), RC, seu quia ex constructione rec-lum MZ. QM æquatur dato rectangulo AM. OM, erit log. (AM + MZ) = $\frac{RC.OM.AM}{AM.QM} - \frac{RC.OM^2.AM^2}{2.AM^2.QM^2} +$ $\frac{RC.OM^3.AM^3}{3.AM^3.QM^3}$ − &c. = $\frac{RC.OM.MP}{MP.QM} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.MP.QM^2} + \frac{RC.OM^3.MP}{3.MP.QM^3}$ − &c. (aut, quia solidum RC. OM. MP æquatur solido IM. AM², ut aliquoties jam vidimus) = $\frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.MP.QM^2} + \frac{IM.AM^2.OM^2}{3.MP.QM^3}$ − &c. Atqui in hac ultima serie infinita, ob evanescentem (secundùm hypothesin) OM,

OM, evaneſcent omnia poſt primum terminum membra, propterea erit hoc caſu log. $(AM+MZ)=\frac{IM.AM^2}{MP.QM}$.

Quia $IM=AM+IA=AM+OM$, erit log. $IM=(\frac{OM}{AM}-\frac{OM^2}{2.AM^2}+\frac{OM^3}{3.AM^3}-$ &c.) RC, quæ eſt eadem ſeries cum prima, excepta ſola OM, quæ hoc loco eſt poſita loco MZ, in prima. Ergo etiam log. $IM=\frac{RC.OM.MP}{AM.MP.}-\frac{RC.OM^2.MP}{2.AM^2.MP}+$ &c. $=\frac{IM.AM^2}{AM.MP}-\frac{IM.AM^2.OM}{2.AM^2.MP}+$ &c. $=\frac{IM.AM}{MP}-\frac{IM.OM}{2.MP}+$ &c. $=\frac{IM.AM}{MP}$, quia etiam in hac ſerie infinita omnes, poſt primum, termini evaneſcunt, exiſtente (ſecundùm hypotheſin) OM vel $AI=0$. Hinc $MC-LN=$ log. $(AM+MZ)-$ log. $(IM)=\frac{IM.AM^2}{MP.QM}-\frac{IM.AM}{MP}=\frac{IM.AM^2-IM.AM.QM}{MP.QM}=\frac{IM.AM.AQ}{MP.QM}=\frac{AM^2.AQ}{MP.QM}$, quia in præſenti hypotheſi IM fit AM evaneſcente IA, & quia inſuper, in propoſitione LXIII, MP æqualis erat AM, erit $MC-LN=\frac{AM.AQ}{QM}$, & $MC-LN:AM$, ſeu tempus, quo mobile ſuum ſpatium log. $(AM:QM)$ in aëre abſolvit fit $=AQ:QM$, exponendum ſcilicet ratione celeritatis initialis partis amiſſæ ad reſiduam, ſeu *velocitatem mobilis actualem in aëre*, prorſus ut habet citata propoſitio LXIII. §. 522.

548. Quin imò res univerſalius adhuc quam illic tradi poteſt, ſupponendo reſiſtentiæ ab initio motus repræſentatricem MP diverſam eſſe à recta AM, quæ celeritatem initialem exponit; etenim ſpatium abſolutum in aëre confectum eo caſu exponetur, ut ſupra (§. 546.) invenimus, per AM. log. $(AM:QM):MP$, & tempus, quo hoc ſpatium abſolvitur per $AM.AQ:MP.QM$. Idcirco potuiſſet ſæpius jam memorata propoſitio penitus omitti, quemadmodum & eæ, quæ poſt eam in eodem capite XVI. immediate ſequuntur, quod pariter ex iis deduci poſſint facillimo negotio illæ, quæ mox ſequentur. Sed demonſtrationum diverſitas atque in concluſionibus concentus omnino digna ſunt, quæ diſtinctius curioſi Lectoris oculis exponantur.

PROPOSITIO LXVII. Theorema.

549. *Si gravitas uniformis exponatur ſinu complementi alicujus anguli acuti & dati, & grave in linea recta horizonti normali cadat in aëre, juxta indicatam in titulo hujus capitis hypotheſin, reſiſtente; aſſumaturque quædam magnitudo, quæ ſit ad log-mum rationis, quam tangens ſemiſſis complementi dati anguli habet ad tangentem ſemiſſis complementi alicujus anguli variabilis & majoris dato, ut ſinus dati anguli ad ſinum totum. Sumptis ſcilicet log-mis in logarithmica, cujus ſubtangens eſt æqualis ſinui complementi dati anguli præmemorati, quibus poſitis,*

1°. Spatium, *quod grave aliquo tempore perlabitur accelerato motu, eſt exceſſus log-mi rationis, quam habet ſinus complementi dati anguli ad ſinum complementi variabilis, ſupra aſſumptam magnitudinem:*

2°. Tempus, *quo ſpatium iſtud abſolvitur, exponetur aſſumpta magnitudine applicata ad ſinum rectum anguli dati:*

3°. Celeritas, *in fine cujusque temporis acquiſita, eſt, ut exceſſus ſinus anguli variabilis ſupra ſinum rectum anguli dati.*

Fig. 130. Cadat grave à quiete ex M in linea recta Mα horizonti perpendiculari, ac centro A deſcripto circuli quadrante BLCA, exponat in eo recta IM, quæ eſt ſinus complementi cujusdam dati anguli BAI, gravitatem uniformem, & ductâ porrò qualibet SL parallela IM, jungatur AL; eritque angulus BAL is, qui in propoſitione variabilis dicitur, cujus recta LS eſt ſinus complementi. Circa axem MR & per ſupremum quadrantis punctum transeat log-mica BGN, cui linea LN parallela radio CA occurrat in N, recta verò IG eidem MC æquidiſtans in puncto G, per hæc duo log-micæ puncta transeant ordinatæ GH & NO; dein aſſumatur quædam XZ, quæ ſit ad log-um rationis QA : AP ſicut AM ſinus dati anguli BAI ad radium AI. Ductis enim per puncta I & L ex puncto C rectis CP & CQ, erit QA : PA, ut tangens dimidii anguli IAC ad tangentem dimidii LAC, ſeu ut tangens ſemiſſis complementi anguli dati BAI ad tangentem ſemiſſis complementi anguli variabilis BAL; nam AQ : AP = tang. LCA : tang. ang. ICA = tang. MIC : tang. SLC = tang. ½IAC : tang. ½LAC. Ipſa verò HO, ſeu log-us rationis GH : NO, ſeu IM : LS, eſt log-us rationis, quam habet ſinus complementi IM anguli dati BAI ad ſinum complementi LS variabilis BAL; propterea oſtendi debet 1°. ſpatium cadendo deſcriptum ME,

ME, esse = HO − XZ; deinde 2°. tempus, quo spatium istud percurritur, seu *t*ME = XZ : AM, ac denique MS differentiam sinuum AS, AM angulorum variabilis & dati, celeritatem in E acquisitam, adeo ut productis FE & LS in D hoc punctum futurum sit in scala celeritatum MD, ducta scilicet FD per punctum E parallela RS. Esto insuper RF scala solicitationum acceleratricium, ductisque *dl*, *ln*, *no* ac *df* ipsis DL, LN, NO ac DF parallelis ac indefinite vicinis productaque LD in *a*; probari debet momentum solicitationis acceleratricis FE æquari momento celeritatis acquisitæ ED, seu EF. *Ee* = ED. *ad*, posita constructione supra exposita. Fiat AT = AM, & VO tertia proportionalis ad GH & NO, adeò ut inde nova log-mica GV exurgat. Log-micæ BN subtangens quælibet æquetur IM vel GB.

Demonstr. I. Esto resistentia in E, quam simplici litera R indicabimus, ut gravitatem per G, esto inquam G : R = IM² : 2AM. MS + MS², seu, quia (constr.) AM = AT, ponatur G : R = IM² : TS. MS, eritque convertendo G − R : G, id est, solicitatio acceleratrix in E ad gravitatem, hoc est, EF : IM = IM² − TS. MS : IM² = IM. EF : IM², atque adeò IM. EF = IM² − TS. MS = AI² − AM² − TS. MS = AI² − AM² − 2. AM. MS − MS² = AL² − AS² = LS² = NO², aut (quia NO est media proportionalis inter GH vel IM & VO) = *IM. VO*, atque adeò *EF* = *VO*.

II. Quia (constr.) ME = HO − XZ, & *Me* = *Ho* − *Xz*, erit etiam *Ee* = *Oo* − *Zz*; propterea si E*ε* ponatur = *Oo*, erit *eε* = *Zz*, ubi *Zz* est elementum lineæ assumtæ XZ.

III. Propter triangula similia L*lm* & ALS habetur *Ss* : *rl* (vel æqualem L*l*) = LS : AL, & *rl* : *Qq* = *rs* (vel LS) : QA; ergo ex æquo *Ss* : *Qq* = LS² : AL. AQ = NO² : AL. AQ = IM. VO : AI. AQ. Vetùm *Qq*: elementum log-mi (QA : PA) = QA : subtang. log-micæ IM = QA. VO : IM. VO, ergo ex æquo *Ss* : elem. log-mi (QA : RA) = AQ. VO : AI. AQ = VO : AI. Et (constr.) element. log-mi (QA : PA) : *Zz* = AI : AM, ergo denuo ex æquo *Ss* : *Zz* = VO : AM. Atque adeò FE. *eε* (num. 1. & 11. hujus) = VO. *Zz* = AM. *Ss*.

IV. Rursus EF. E*ε* (seu VO. *Oo*) = NO. *Np* per §. 491. num. 111. Et NO. *Np* = LS. *Lm* (§. 493.) = AS. *Ss*, hinc, quia (num. 111. hujus) FE. *eε* = AM. *Ss*, erit FE. E*ε* − FE. *eε* = AS. *Ss* − AM. *Ss*, hoc est, FE. *Ee* = MS. *Ss*. Id est, *momentum solicitationis acceleratricis* EF *est æquale momento celeritatis acquisitæ* MS.

V. Quoniam supra (num. 111. hujus) invenimus VO. *Zz* = AM. *Ss*,

Ss, erit $Zz : AM = Ss : VO = da : FE$ (§. 485.) $= tEe$; adeoque omnia tEe, hoc est, tempus casus perpendicularis per spatium ME, quod tempus designavimus per tME, = omnibus Zz, quibus tota XZ componitur, divisis per AM, seu $= XZ : AM$. Ergo tempus per spatium ME exponitur per assumtam magnitudinem XZ applicatam ad sinum AM anguli dati BAI. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

550. Cum celeritas in E acquisita sit ED vel MS, celeritas terminalis erit MC sinus versus complementi IAC anguli dati BAI, & scala celeritatum MD asymptotam habebit parallelam ipsi Mu, sed per punctum C transeuntem.

Corollarium II.

551. Spatium, quod grave in vacuo absolveret cadendo eo tempore, quo in aëre spatium ME perlabitur, est ad semissem MI, quæ gravitatem exponit in duplicatâ ratione assumtæ XZ ad datam AM. Nam, quia tempus (§. 151.) descensus in vacuo exponitur radice ex duplo spatio applicato ad magnitudinem, quæ gravitatem uniformem repræsentat, erit, vocando spatium tempore $XZ : AM$ in vacuo percurrendum S, erit inquam $\sqrt{(2S : IM)} = XZ : AM$, seu $2S : IM = S : \frac{1}{2}IM = XZ^2 : AM^2$.

Corollarium III.

552. Velocitas, quam mobile in termino E spatii ME in vacuo descripti acquireret, erit ad celeritatem in aëre acquisitam percurso eodem spatio ME, sicut $\sqrt{(2ME . IM)}$ ad MS, id liquet ex §. 150.

Corollarium IV.

553. Celeritas vero in aëre erit ad celeritatem in vacuo mobili acquisitam tempore $XZ : AM$, sicut rec-lum AM. MS ad rec-lum IM. XZ. Nam (§. 551.) in vacuo percurritur spatium $S = IM . XZ^2 : 2.AM^2$ tempore $XZ : AM$; atqui (§. 150.) est velocitas in termino hujus spatii acquisita $= \sqrt{(2.S . IM)} = \sqrt{(2.IM^2 . XZ^2 : 2.AM^2)} = IM . XZ : AM$; ergo celeritas in aëre est ad celeritatem in vacuo acquisitam,

tam, ſicut MS ad IM. XZ : AM, vel ſicut rec-lum AMS ad rec-lum IM. XZ.

Corollarium V.

555. Quia recta TA tenacitatem medii & AM dimidium hujus tenacitatis exponit, erit hæc tenacitas ad gravitatem, ſicut ſinus anguli dati BAI ad ſemiſſem ſinus complementi.

Corollarium VI.

556. Idcirco evaneſcente angulo BAI fluidum omni tenacitate carebit, eritque perfecte fluidum, adeò ut redeat caſus propoſitionis LXIV, quæ propoſitio proinde tantum corollarium eſt præſentis. Evaneſcent enim eo caſu AM & XZ, adeo ut tunc ME ſimpliciter æqualis fiat ipſi HO. Tempus vero per ME, quod in hac propoſitione LXVII. eſt XZ : AM (conſtr.) = log. (QA : PA) : AI, in caſu coincidentiæ ipſarum BA & IM, fiet XZ : AM = log. (QA : BA) : AB = tME; prorſus ut §. 525. num. 111. oſtenſum.

Scholion I.

557. *Propoſitio etiam analyſi geometrica ſequenti ratione expediri poteſt. Poſitis iis*, quæ in præparatione ad demonſtrationem propoſitionis, numero 1. erit FE vel VO = NO² : IM = LS² : IM (vel poſita KC diametro circuli BIC) = KS. SC : IM; unde, quia generaliter eſſe debet EF. Ee = MS. Ss = ED. *ad*, erit etiam KS. CS. Ee : IM = MS, Ss, atque adeo Ee : IM = MS. Ss : KS. CS. Sed MS = $\frac{1}{2}$KS − $\frac{1}{2}$KM + $\frac{1}{2}$MC − $\frac{1}{2}$SC, quo valore ſubrogato reperietur $Ee : IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{\frac{1}{2}KM.Ss + \frac{1}{2}CM.Ss}{KS.CS} = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM.Ss}{KS.CS}$; nam KM − CM = 2. AM. Atqui $\frac{AM\,Ss}{KS.CS} = \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$ ergo $Ee : IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$. Verum $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}$ = elem. log-mi ex $\mathcal{V}\left(\frac{CM}{CS} : \frac{KS}{KM}\right)$ = elem. log. $\mathcal{V}\left(\frac{CM.KM}{CS.KS}\right)$ = elem. log. $\mathcal{V}\left(\frac{IM^2}{LS^2}\right)$ = elem. log. (GH : NO) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Et $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}$ = elem. log-mi ex $\mathcal{V}\left(\frac{KS}{KM} : \frac{CM}{CS}\right)$ = elem. log. $\mathcal{V}\left(\frac{KS}{CS} : \frac{KM}{CM}\right)$.

Sed quia SL & MI sunt mediæ proportionales inter KS & CS, atque inter KM & CM, erit $KS:CS=LS^2:SC^2=QA^2:AC^2$, & $KM:CM=IM^2:MC^2=PA^2:AC^2$, atque adeò $\frac{KS}{CS}:\frac{KM}{CM}=\frac{QA^2}{AC^2}:\frac{PA^2}{AC^2}=\frac{QA^2}{PA^2}$; ac propterea erit $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}+\frac{\frac{1}{2}Sf}{CS}=$ elem. log. $\left(\frac{QA}{PA}\right)$ etiam in log-mica, cujus subtangens est æqualis unitati. Hinc $\frac{AM}{AC}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}+\frac{\frac{1}{2}Sf}{CS}\right)=\frac{AM}{AC}$ in elem. log. (QA:PA); ac proinde habebitur etiam $Ee:IM\left(=\frac{\frac{1}{2}Sf}{CS}-\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}-\frac{AM}{AC}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}+\frac{\frac{1}{2}Sf}{CS}\right)\right)=$ elem. log. $(GH:NO)-\frac{AM}{AC}\cdot$ elem. log. (QA:PA) ergo $fEe:IM=ME:IM=$ log. $(GH:NO)-\frac{AM}{AC}\cdot$ log. (QA:PA), vel ducendo omnia in IM, erit $ME=IM.$ log. $(GH:NO)-\frac{AM.IM}{AC}\cdot$ log. (QA:PA). At verò IM. log. (GH:NO) juxta §. 492. $=HO$, quandoquidem log. (GH:NO) primùm sumebatur in log-mica, cujus subtangens erat unitas; sic etiam IM. log. (QA:PA) sumenda est in log-mica BN, quia ejus subtangens est IM. In constructione propositionis erat XZ: log. (QA:PA) = AM. AC, & quia log. (QA:PA) jam sumitur in log-mica, cujus subtangens est IM, quæ antea erat unitas, erit proinde hoc casu $XZ=\frac{AM.IM}{AC}\cdot$ log. (QA:PA), atque adeo $ME=HO-XZ$ ut supra (§. 549.)

Similiter pro expressione temporis casus ex altitudine ME invenietur XZ:AM, ut in jam citato loco. Quæ omnia analytice erant invenienda.

Scholion II.

558. Eadem methodo solvi potest casus, quo mobile data velocitate, majore tamen terminali, perpendiculariter deorsum projicitur in aëre resistente juxta præsentem resistentiarum hypothesin. Nam, si celeritas projectionis terminali minor sit, problema jam solutum continetur in propositione postrema; absque eo, ut alia solutione opus sit; sin verò, ut nunc supponemus, celeritas projectionis major sit quam terminalis, nonnihil alia inde prodibit constructio, quam nunc adducam omissa demonstratione, quam industriæ Lecto-

Lectoris ex præcedentibus eliciendam relinquo. Esto KO linea indefinitæ longitudinis, cui perpendicularis insistat IME ad partes ω indefinita, in hac perpendiculari portio IM exponat gravitatem uniformem, & AM = AT semissem tenacitatis medii, ductaque AI factisque AC = AK = AI, centro A & latere transverso KC descripta sit hyperbola æquilatera CLP, in qua, si MO accipiatur pro celeritate initiali projectionis, & MS pro velocitate mobili post aliquod tempus residua, agantur ordinatæ OP & SL hyperbolæ occurrentes in P & L, per quæ puncta ducantur denique ex K rectæ KP, KLQ. Spatium ME, in cujus termino E mobili relinquitur celeritas MS vel ED, erit = log. (PO : LS) − $\frac{AM}{AC}$ · log. (PO : QQ), & tempus per spatium ME = log. (PO : LS) : IM. Omnes hi logarithmi sunt ex log-mica, cujus subtangens est æqualis IM. Ex hac constructione jam satis apparet, scalam celeritatum ODω asymptotam habere Cω, atque adeò mobilis celeritatem quidem continuò decrescere, nunquam verò ad celeritatem MC reduci posse. Fig. 131

PROPOSITIO LXVIII. Theorema.

559. *Si gravitas exponatur per secantem alicujus arcus dati, & corpus grave verticaliter in altum projectatur in aëre præsentis resistentiæ hypotheseos, ac celeritate, quæ exponitur excessu tangentis arcus cujusdam variabilis supra tangentem dati arcus; assumaturque magnitudo quædam, quæ sit ad differentiam arcuum variabilis & dati, ut rec-lum ex secante & tangente dati arcus ad quadratum radii.*

Erit 1°. Spatium, *quod mobile, ascendendo quousque potest, conficiet, ut log-us rationis, quam secans arcus variabilis habet ad secantem dati arcus, dempta magnitudine assumta.*

2°. Tempus, *quo mobile hanc altitudinem absolvet, erit ut magnitudo assumta applicata ad tangentem dati arcus.*

Sint ABKC quadrans circuli, BIL hyperbola æquilatera ex centro A & semilatere AB descripta. Exponat IM seu AW secans dati arcus Bω gravitatem uniformem, ac mobile ex E in altum projici intelligatur celeritate ED vel WQ, quæ est differentia tangentium BQ, BW arcuum variabilis BK & dati Bω. Descriptaque circa axem AT log-mica BGN, cujus subtangens sit GH vel IM; agantur IG, LN parallelæ AS, ac per puncta G, N, &c. transeant ordinatæ log-micæ GH & NO; in NO producta sit OV tertia pro- Fig. 132

portionalis ad GH & NO, & per omnia puncta V transibit nova log-mica GV, cujus subtangens dimidia erit subtangentis prioris log-micæ GN. Accipiatur deinde XZ, quæ sit ad arcum ∞K, ut rec-lum IMA ad quadratum radii AB, quibus positis dico fore I. ME vel potius EM = HO − XZ, & temp. per EM = XZ : AM.

Demonstr. Ductis lineis *dl*, *ln*, *no* prioribus cognonimis DL, LN, NO ad distantias indefinite parvas parallelis, fiatque ut supra (§. 549. num. 1.) AT = AM, & resistentia aëris in E ut TS. MS.

I. Eritque adeò resist.: grav. = TS. MS : IM², & componendo R + G, seu resistentia totalis EF : IM, seu G = IM² + TS. MS : IM² (seu quia AM² + TS. MS = AS², seu TS. MS = AS² − AM²) = AS² + IM² − AM² : IM² = AS² + QS² : IM² = LS² : IM² = NO² : GH² (aut quia VO, NO & GH sunt in continua ratione) = VO : IM vel GH; habemus ergo EF : IM = VO : IM atque adeò EF = VO.

II. Ex constructione est EM = HO − XZ, & εM = Ho − Xz, adeoque Eε = Oo − Zz, unde, si εε fuerit = Oo, & εE = Zz, erit omninò Eε = Oo − Zz. Jam (§. 165.) Qq : Kk = AQ² : AK² = LS² : AB² = NO² : AB² = VO. GH : BA², & (constr.) Kk : Zz = AB² : GH. AM, ergo ex æquo Qq : Zz = VO. GH : GH. AM = VO : AM (num. 1. hujus) = EF : AM. Adeoque EF. Zz = EF. εE = AM. Qq = AM. Ss.

III. Est verò etiam (§. 491. num. 111.) VO. Oo (= EF. εε) = NO. Np = LS. Lm (§. 493.) = AS. Ss. Adeoque EF. Eε (= EF. εε. − EF. εE) = AS. Ss − AM. Ss = MS. Ss. Hoc est, momentum resistentiæ totalis EF æquatur momento celeritatis MS.

IV. Numerus secundus hujus demonstrationis præbet, Ss : EF (num. 111. hujus) = Eε : MS = Zz : AM, atqui, ut toties jam dictum Ss : EF = Eε : MS = tEε, ergo tEε = Zz : AM, & omnia tEε = omnibus Zz : AM seu = XZ : AM. Hoc est, tempus ascensionis in spatio EM, est XZ : AM, exponitur ergo per magnitudinem assumtam applicatam ad tangentem anguli BAW. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

560. Altitudo, ad quam grave in altum projectum pertingere potest, eodem tempore, quo in aëre altitudinem EM absolvet, erit iterum ad semissem IM, quæ gravitatem exponit in duplicata ratione assumtæ XZ ad datam AM. Celeritas verò projectionis in vacuo est ad celeritatem projectionis in aëre, sicut IM. XZ ad AM. MS.

De-

Demonſtratio continetur in corollariis II. & IV. propoſitionis præcedentis.

Corollarium II.

561. Evaneſcente AM vel AT, atque adeò coincidentibus rectis IM, BA & GH, redibit iterum caſus propoſitionis LXV. adeò ut omnia, quæ in propoſitione illa exhibita ſunt, tantum corollaria ſint præſentis.

Ut brevitati conſulerem omiſi perplura corollaria, quæ ex hac propoſitione adhuc elici potuiſſent, tum etiam calculum arithmeticum, quo ope tabularum ſinuum tangentium & log-morum, celeritates, ſpatia percurſa, & tempora lationis determinari potuiſſent. Intelligens Lector omnia ſua ſponte ſupplebit. Sed, priusquam ad contemplationem motuum curvilineorum in mediis reſiſtentibus me conferam, forte haud abs re fuerit, ſi calculo algebraico regulas generales tradidero pro motibus rectilineis in mediis denſitate variantibus.

CAPUT XVIII.

Methodus inveniendi ſymptomata motuum corporum in mediis utlibet reſiſtentibus, atque denſitate pro libitu variantibus.

IN præcedentibus capitibus celebriores reſiſtentiarum aëris hypotheſes excuſſimus, & quinam motus, iisdem hypotheſibus poſitis, naſci debeant, definivimus, ſupponentes tamen medium reſiſtens ejusdem ubique denſitatis eſſe. Quia verò denſitates ſubinde variare poſſunt, canones motuum etiam exhibendi ſunt pro ejusmodi mediis denſitate variantibus, quod in hoc capite reſpectu motuum rectilineorum præſtabimus, de curvilineis in ſequentibus duobus capitibus acturi.

PROPOSITIO LXIX. Lemma.

562. *Exhibens nonnullas elementorum logarithmicorum proprietates; ſcilicet*, 1°. *Elementum log-micum* poſitivum, *eſt elementum log-mi rationis majoris inæqualitatis, quam* magnitudo quæcunque variabilis *habet ad ſuam* minimam magnitudinem.

Elementum vero log-micum privativum *eſt elementum log-mi rationis majoris itidem inæqualitatis, quam* maxima magnitudo alicujus variabilis *habet ad hanc* variabilem.

2°. Multiplum *quodcunque vel* ſubmultiplum *elementi cujuscunque magnitudinis variabilis applicatum ad ipſam magnitudinem, cujus eſt elementum, eſt elementum log-mi rationis* multiplicatæ *vel* ſubmultiplicatæ *rationis, quam variabilis magnitudo habet ad ſummi minimam magnitudinem, aut quam maxima magnitudinis variabilis habet ad ipſam variabilem, prout elementum log-micum poſitivum aut privativum fuerit.*

Fig. 133. Eſto 1°. quantitas variabilis u, ejusque *minima* magnitudo a, elementum log-micum $+du:u$ erit elementum log-mi rationis $(u:a)$. Sin verò magnitudo u, cum *maxima* eſt, ſit $=a$; erit $-du:u=$ elem. rationis $(a:u)$. 2°. Iisdem poſitis, ſi habeatur $mdu:u$ erit hoc elementum log-mi rationis $(u:a)$ multiplicatæ juxta m, id eſt, $mdu:u=$ elem. rationis $(u^m:a^m)$ ubi m ſignificat quemlibet numerum integrum vel fractum, rationalem aut irrationalem, &c. & $-mdu:u=$ elem. rationis $(a^m:u^m)$. in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Sit IAE log-mica circa axem MF, cujus ſubtangens DO æquetur unitati 1, ſintque CD magnitudo variabilis ac continue creſcens ejusque *minima* magnitudo AB, ordinata verò variabilis GH ſit magnitudo continue decreſcens, ejusque *maxima* etiam AB; ponantur cd & gh ordinatæ ipſis CD & GH *indefinite* propinquæ, ductisque Ck, $g\gamma$, axi MF parallelis, erunt $c\kappa$ incrementum ipſius CD adeoque $c\kappa$ erit poſitivum; ipſum verò $G\gamma$ erit decrementum ordinatæ GH, atque adeò privativum. Hisce poſitis,

Fig. 133. I. Quia (§. 491.) $+c\kappa:CD=Dd:OD$ (aut quia ſubtangens OD æquivalet unitati) $=Dd$, & quia Dd eſt elementum ipſius BD ſeu log-mi (CD : AB), erit omninò $c\kappa:CD=$ elem. log-mi rationis (CD : AB) hoc eſt $+du:u=$ elem. log-mi rat. $(u:a)$, poſitis AB, a; CD, u & $c\kappa$, du.

Eodem argumento probatur eſſe $-G\gamma:GH=$ elem. log-mi rationis AB : GH, hoc eſt $-du:u$, $=$ elem. log. $(a:u)$ ſeu log-mi (AB : GH), vocatis nunc GH, u; ac $G\gamma$, du exiſtente AB, etiamnunc a.

II. Oſtendendum, eſſe $m.c\kappa:CD=$ elemento log-mi $(CD^m:AB^m)$. Sit enim $BD:BF=1:m$, atque adeò $BF=m.BD$, adeo ut excitata in F ordinata FE, ex natura log-micæ ſit $CD^m:AB^m=EF:AB$. Verum $m.c\kappa:CD=m.Dd:DO$, & omn. $m.c\kappa:CD=$ omnibus $m.Dd:$ DO

$DO = m.BD : DO$ (seu constr.) $BF : DO$ (vel si DO æquivalet unitati) $= BF = \log. (EF : AB) = \log. (CD^m : AB^m)$. Adeoque $mdu : u$, $=$ elem. log. $(u^m : a^m)$.

Nec dissimili ratione evincitur, quod, facta $BM = m.BH$ erectaque ordinata MI, futurum sit, $-m.G\gamma : GH =$ elem. log-mi $(AB : IM) =$ elem. log. $(AB^m : GH^m)$ seu, quod idem est, $-mdu : u =$ elemento log-mi $(a^m : u^m)$. Quæ duo erant demonstranda.

PROPOSITIO LXX. Problema.

563. *Exhibere canonem generalem motuum rectilineorum ex primitive uniformibus derivatorum, quibus corpora in aëre densitatis variabilis, & juxta quamlibet legem resistente, ferantur.*

Positis iis, quæ ad propositionem LV. hujus Libri Secundi dicta sunt, vocetur spatium NE in linea deferenti percursum x, tempus, quo absolvitur t, celeritas mobili residua DB post effluxum hoc tempus u; adeoque celeritas DE mobilis in linea deferenti hoc tempore acquisita erit $a - u$, si, quod supponimus, a significet velocitatem mobilis initialem AN, quâ scilicet linea deferens æquabili motu (secundum hypothesin) in aëre progreditur. Spatium absolutum, quod mobile tempore memorato t, in aëre transmittit S. Solicitatio acceleratrix, in quolibet lineæ deferentis puncto E, seu recta EF resistentiam aëris generaliter *indicans* R; ac denique densitas aëris Δ. Hisce denominationibus factis, paragraphi 489. & 488. sequentes præbent formulas: I. $Rdx = udu - adu$. II. $t = \int -du : R$. III. & $S = at - x$. Quæ erant exhibendæ. Fig. 119.

Exemplum.

564. Sit generaliter $R = (abu^m + cu^{m+1}) . \Delta : a^{m+1}$, ubi a, b, c sunt magnitudines constantes, & m quilibet numerus rationalis vel surdus. Formula prima generalis, reductionibus factis, dat $\Delta dx = (a^{m+1} udu - a^{m+2} du) : abu^m + cu^{m+1}$. Ex qua liquet absciissas x inveniri per quadraturas duarum curvarum.

565. Si $m = 1$, fiet $R = (abu + cuu) . \Delta : aa$; & $\Delta dx = (aaudu - a^2 du) : (abu + cuu)$.

566. Igitur, si præterea $c = 0$, erit $R = bu\Delta : a$, hoc est, resistentiæ aëris erunt in composita ratione densitatum & velocitatum mobilis actualium, alteraque æquatio §. 565, mutabitur in $\Delta dx = adu : b, -$

$aadu :$

$aadu:bu$. Atqui (§. 88.) summa omnium $adu:b=(au-aa):b$, & $\int -aadu:bu$ (§. 562.) $=\frac{aa}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens 1; vel $=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens est a. Propterea $\int \Delta dx=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)-(aa-au):b$. Hinc, si $\Delta=1$, & $b=a$, erit $\int \Delta dx=x=$ log. $(a:u)-a+u$. Atque adeò, si in fig. 119. $AN=AK=a=b$, $BD=IH=u$, ac $NE=x$, erit $CG=CN=a-u$, & $CH=$ log. $(a:u)=$ log. $(AN:IK)$, ergo x, seu $NE=CH-CG=GH$, prorsus ut constructio propositionis LVIII. habet.

567. Si in æquationibus superioribus (§. 565.) $b=0$, habebitur $R=cuu\Delta:aa$, id est, resistentiæ aëris sunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum mobilis, & $\Delta dx=aaudu-a^3du:cuu$, $=aadu:cu$, $-a^3du:cuu$. At verò (§. 562.) est $\int -aadu:cu=\frac{a}{c}\cdot$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtang. $=a$, & $\int -a^3du:cuu$ (§. 88.) $=(a^3-aau):cu$. Ergo $\int \Delta dx=a^3aau:cu;-\frac{a}{c}\cdot$ log. $(a:u)$; vel factis $\Delta=1$, & $a=c$; fiet $x=aa-au:u$, $-$ log. $(a:u)$. Hinc, si in fig. 125. $AM=AT=a$, $BD=IH=u$, & $ME=x$, erit, propter hyperbolam NHK, $(aa-au):u=CH$, & log. $(a:u)=$ log. $(NT:IH)=CG$, cum NGK (constr.) sit log-mica, cujus subtangens $=NT=a$; adeoque $ME=CH-CG=GH$, iterum ut habet constructio propositionis LXIII.

568. Tandem, si æquatio ipsa paragraphi 565. $\Delta dx=aaudu-a^3du:abu+cuu$ construenda sit, dividatur numeratoris membrum $-a^3du$ per membrum abu denominatoris, reductisque reducendis, erit $\Delta dx=(\frac{aa}{b}+\frac{aa}{c})\cdot du:(\frac{ab}{c}+u)-\frac{ab}{b}du:u$. Et horum integralia (§. 562.) invenientur, scilicet $\int \Delta dx=$ log. $(a:u)-\frac{b-c}{c}\cdot$ log. $(\frac{ab}{c}+a:\frac{ab}{c}+u)$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{b}$. Jam, in figura 129. propositionis LXVI. si fiat $PW:MP=OM:IM$, & $PV:MP=AM:IM$, ac dicantur $PW=b$, $PV=c$, & $AM=a$, $=OI$; indeterminatæ $QM=OG=n$, ac $ME=x$. Invenieturque $\frac{aa}{b}=IM.AM^2:OM.MP$ (constr.) $=RC$. Nam (§. 541. num. 1.) $RC:AM=IM.AM:$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [356] - 328
PUBLIC DOMAIN

$AM : OM. MP$, atqui propter (constr.) $PW : MP = OM : IM$, atque adeo $OM. MP = IM. PW$, ergo $RC : AM (= IM. AM : OM. MP) = IM. AM : IM. PW = AM : PW$, ac proinde $RC = AM^2 : PW = aa : b$, ut dicebatur. Item $\frac{b+c}{c} = \frac{IM}{AM}$, & $\frac{ab}{c} = OM$, adeoque $\frac{ab}{c} + a = IM$, & $\frac{ab}{c} + u = GM$; hinc $\int \Delta dx = \log. (AM : QM) - \frac{IM}{AM} \cdot \log. (IM : GM)$, atque adeò existente $\Delta = 1$, $x = ME = \log. (AM : QM) - \frac{IM}{AM} \log. (IM : GM)$ prorsus ut habet constructio recensitæ propositionis LXVI.

569. Pro inventione temporis consulenda est secunda formula generalis (§. 563.) seu $t = -\int du : R$, vel $dt = -du : R$, vel substituendo ex §. 565. valorem ipsius R erit $\Delta dt = -aadu : abu + cuu = -adu : bu + \frac{acdu}{b} : ab + cu = -adu : bu + \frac{a}{b} du : \frac{ab}{c} + u$. hinc $\int \Delta dt = \frac{1}{a} \cdot \log. (a : u) - \frac{1}{a} \log. \left(\frac{ab}{c} + a : \frac{ab}{c} + u\right) = \frac{1}{AM} \log. (AM : QM) - \frac{1}{AM} \cdot \log. (IM : GM) = (MC - LN) : AM$; prorsus ut in præmemorata propositione LXVI. jam ostensum, ubi tamen Δ est 1, atque adeo $\int \Delta dt = t$.

Atque hæc pauca exempla particularia ad illustrationem formularum generalium sufficiant.

PROPOSITIO LXXI. Problema.

570. *Exhibere generales formulas pro descensu & ascensu gravium rectilineo & horizonti perpendiculari in aëre densitatis variabilis & secundum quamcunque legem resistente.*

Retentis symbolis supra (§.§. 484, 485.) jam adhibitis: propositio LIV. nobis suppeditat formulas pro utroque casu descensus ascensusque gravium; scilicet, I. $x = \int udu : g \mp r$. & II. $t = \int du : g \mp r$. Ubi signum superius respicit descensum & inferius descensum corporum. In hisce formulis g significat gravitatem, r resistentiam medii, u velocitates mobili acquisitas vel residuas, & x spatia à quiete descendendo percursa, vel complementa spatiorum ascensu jam actu confectorum ad maximam altitudinem A, quam gravia certa quadam velocitate initiali ascendentia percurrere valent, ac denique t denotant tempora descensus in spatiis x, vel quibus complementa præmemorata ad maximam altitudinem describi possunt. Idcirco spatia

actu mobili ascendendo percursa erunt $A-x$, & tempora, quo hæc spatia absolvuntur $T-t$, posita T pro tempore, quo maxima altitudo A conficitur. Quæ erant exhibenda.

Exemplum.

571. Sit $r=(abu+cuu)\Delta:aa$, eritque $x=\int aaudu:aag\mp abu\Delta\mp cuu\Delta$, & $t=\int aadu:aag\mp abu\Delta\mp cuu\Delta$. Utut hæ formulæ particulares sint, infinitos tamen casus particulares complectuntur, tam pro descensu quam pro ascensu gravium; scilicet pro varietate densitatum Δ. Nos primum simplicissimum casum considerabimus, supponentes $\Delta=1$, & formulæ nostræ redigentur ad casus, quos in capitibus proxime antecedentibus jam excussimus.

572. Propterea, substituatur tantum loco Δ, 1, & retinendo signa superiora pro descensu gravium, & habebimus $x=\int aaudu:aag-abu-cuu$, alteramque $-t=\int(aadu:aag-abu-cuu)$. Ut hæ æquationes construi queant, ponantur $aag=chh-cff$, item $ab=2cf$, ac denique $y=f+u$; ubi a, b, c, f, g, & h sunt quantitates constantes, ac x, y, u, t, variabiles. Factis hisce substitutionibus reperietur $aaudu:aag-abu-cuu=aaudu:chh-cff-2cfu-cuu=\frac{aa}{c}udu:hh-(f+u)^2=(\frac{aa}{c}ydy-\frac{aaf}{c}dy):hh-yy$. Atqui (§. 562.) omnia $\frac{aa}{c}ydy:hh-yy=\log.\sqrt{(hh-ff:hh-yy)}$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{c}$. Nam ydy est dimidium elementi denominatoris $hh-yy$, sed sub signo contrario, & $hh-ff$ est maxima magnitudo omnium $hh-yy$, quia f est minima omnium $y=f+u$, quæ habetur ubi u evanuit.

Porrò $\int\frac{aaf}{c}dy:hh-yy=$ (§. 467. num. 111.) $\frac{f}{b}\log.\sqrt{(h+y:h-y)}$, vel potius, quia evanescente u ipsum etiam integrale evanescere debet, & existente $u=0$, seu $y=f$, inventum integrale abit in $\frac{f}{b}\log.\sqrt{(h+f:h-f)}$, quæ quantitas detrahenda est à priore, & habebitur $\int\frac{aaf}{c}dy:hh-yy=\frac{f}{b}\log.\sqrt{(h+y:h-y)}-\frac{f}{b}\log.\sqrt{(h+f:h-f)}$.

573. Eadem facilitate resolvetur altera æquatio paragraphi 572, seu

seu $t = \int aadu : aag - abu - cuu$ (seu factis iisdem substitutionibus, quæ in præcedenti articulo factæ sunt) $= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy$. Hæc enim quantitas æquatur integrali invento in ultima periodo articuli præcedentis, sed diviso per f; propterea invenietur $t \left(= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy\right) = \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+f : h-f)}$.

574. Hæ repertæ æquationes reductæ accuratissime nos ducunt ad constructionem propositionis LXVII. Sint enim $a = g = c$, & quia (secundùm hypothesin §. 572.) $aag = chh - cff$, ac $ab = 2cf$, erunt $aa = hh - ff$, & $b = 2f$. Si itaque in fig. 130. fiant $IM = a$, $AM = \frac{1}{2}b = f$, adeòque $TM = b$, erit $IA^2 = aa + ff = hh$, atque adeò $AI = AB = AL = h$, factaque $MS = u$, erit $AS = f + u = y$, & $LS^2 = hh - yy$, nec non $IM^2 = hh - ff = aa$, adeoque $\log. \sqrt{(hh - ff : hh - yy)} = \log. \sqrt{(IM^2 : LS^2)} = \log. (IM : LS) = \log. (GB : NO) = HO$. In log-mica BN, cujus subtangens æquatur $\frac{aa}{c}$ seu a, quia (secundùm hypothesin) $a = c = IM = GH$.

Præterea, si $AK = AC = AI = h$, erit $KS = h + y$, & $CS = h - y$; ergo ratio $h + y : h - y = KS : CS$ (vel, quia KS, LS, & SC in circulo sunt in continua ratione) $= LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$; atque adeò $\sqrt{(h+y : h-y)} = QA : AC$. Simillimo argumento invenitur $\sqrt{(h+f : h-f)} = IM : MC = PA : AC$. Adeoque $\frac{f}{b} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} - \frac{f}{b} \log. \sqrt{(h+f : h-f)} = \frac{AM}{AI} \log. (QA : AC) - \frac{AM}{AI} \log. (PA : AC) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$. Atqui (§. 549.) assumta est $XZ : \log. (QA : PA) = AM : AI$, ergo $XZ = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$, atque adeo $x = \log. \sqrt{(hh - ff : hh - yy)} - \frac{f}{b} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} + \frac{f}{b} \log. \sqrt{(h+f : h-f)} = HO - XZ$, ut in citata propositione LXVII.

575. Quantum ad alteram (§. 573.) $t = \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+f : h-f)}$, hæc $t = XZ : AM$. Quandoquidem $\frac{f}{b} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} - \frac{f}{b} \log. (h+f : h-f) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA) = XZ$, adeoque

$t = \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+y:h-y)} - \frac{1}{b} \log. \sqrt{(h+f:h-f)} = XZ:f = XZ:AM.$

Iterum ut in citata propositione asseritur.

576. Pro ascensu gravium faciunt formulæ paragraphi 571. cum signis inferioribus, unde si iterum Δ sit $= 1$, erit $x = \int aaudu : aag + abu + cuu$ (vel, si nunc fiat $aag = chh + cff$, item $2cf = ab$, & $f + u$ æquale y) $= \int (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aaf}{c} dy) : hh + yy$. Atqui $\int \frac{aa}{c} ydy : hh + yy$ (§. 562.) $=$ Log. $\sqrt{(hh + yy : hh + ff)}$, quia ydy est dimidium elementum denominatoris $hh + yy$, & $hh + ff$ est minima omnium $hh + yy$, cum f sit minima omnium $y = f + u$. Hic log-us sumitur in log-mica, cujus subtangens est $\frac{aa}{c}$.

Altera pars æquationis, seu $\int \frac{aaf}{c} dy : hh + yy = \frac{aaf}{chh} . \int hhdy : hh + yy$. Atqui (§. 166.) est $hhdy : hh + yy =$ elemento arcus circularis, cujus radius h, & tangens y, quod elementum dicatur $d\omega$, atque adeò arcus ipse ω; unde $\int hhdy : hh + yy = \omega$, ergo $\int \frac{aaf}{c} dy : hh + yy = \frac{aaf}{chh} . \omega$. Ergo utrumque integrale, ut decet, conjungendo, habetur $x = \int aaudu : aag + bau + cuu = \int (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aaf}{c} dy) : hh + yy = \log. \sqrt{(hh+yy : hh + ff)} - \frac{aaf\omega}{chh}$.

577. Altera æquatio tempus respiciens est $t = \int aadu : aag + abu + cuu = \int \frac{aa}{c} dy : hh + yy$ (§. 166.) $= \frac{aa}{chh} . \omega$. Positis iis, quæ in periodo paragraphi proxime antecedentis ultimo.

578. Etiam hæ postremæ determinationes cum propositione LXVIII. probe conspirant; nam si, ut supra (§. 574.) $a = g = c$, atque adeò $2f = b$, erit $aa = hh + ff$. Unde, si dicantur AW $=$ IM $=$ Fig. 132. a, AM $= f = \frac{1}{2}$TM $= \frac{1}{2}b$, erit WM $=$ BA $= h$, adeoque $\sqrt{(hh + ff)} = a =$ MI, & quia iterum AS $= f + u = y$, existente MS $= u$; erit LS $= \sqrt{(hh + yy)}$ adeòque log. $\sqrt{(hh + yy : hh + ff)} =$ log. (LS : IM) $=$ log. (NO : GH) $=$ HO. Cum log-micæ subtangens $\frac{aa}{c}$ sit $= a$, existente (secundùm hypothesin) $c = a$.

Et quia AS $=$ BQ $= y$, & AB $= h$, erit arcus BK $= \omega$, atque adeò $\frac{aaf}{chh}$.

$\frac{aaf}{cbb}\omega = \frac{af}{bb}\omega = \frac{WM.AM}{IM^2}$ in BK, sed in propositione LXVIII. §. 559. est $XZ:BK = WM.AM:IM^2$ ergo $\frac{af\omega}{bb} = XZ$; ac proinde $x\,(= \log. \sqrt{(hh+yy:hh+ff)} - \frac{aaf\omega}{cbb}) = HO - XZ$. ut in memorata propositione dictum.

$t = \frac{aa}{cbb}\omega = \frac{a\omega}{bb}$, erit $= XZ:AM$, pariter ut in dicta propositione ostensum.

Scholion.

579. Plura alia exempla ad illustrationem canonum generalium non affero, ac multa alia silentio prætereo, quæ ex soluto exemplo potuissent elici. Id tamen minime videtur subticendum, quod densitates medii varie modificando effici possit, ut gravia, juxta quamlibet accelerationis retardationisque legem, possint descendere vel ascendere in lineis horizonti perpendicularibus. Galilæus olim primus demonstravit, celeritates gravi in vacuo cadenti acquisitas esse in subduplicata ratione spatiorum, quod etiam in antecedentibus (§. 150.) ostensum est, sed ex principiis à Galilæanis diversis. Hæc *accelerationis lex solis corporibus in vacuo cadentibus convenire* hactenus credebatur, sed, ut mox probabitur, perperam, cum etiam in aëre resistente juxta hanc eandem accelerationis legem descendere possint gravia, modò aëris densitas certa quadam ratione ubique varietur.

580. Ut res generaliter tradatur, sit nunc $r = (a^{m+2} + abu^m + cu^{m+1}).\Delta : a^{m+2}$, adeo ut formula prima §. 570. $x = \int udu : g \mp r$, vel differentiando $(g \mp r).dx = udu$, nunc futura sit $(a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta \mp abu^m\Delta \mp cu^{m+1}\Delta).dx = a^{m+2}udu$, fiat $a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta \mp abu^m\Delta \mp cu^{m+1}\Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$, eritque $\frac{1}{2}a^{m+2}edx = a^{m+2}udu$, vel $edx = 2udu$, ac integrando, $ex = uu$, seu $u = e^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, ac $u^m = e^{m:2}x^{m:2}$, nec non, $u^{m+1} = e^{m+1:2}x^{m+1:2}$, qui valores, in æquatione $a^{m+2}g \mp$ &c. $= \frac{1}{2}a^{m+2}e$ substituti, præbent æquationem $a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta\ abe^{\frac{1}{2}m}x^{\frac{1}{2}m}\Delta \mp ce^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$. Quæ æquatio relationem inter densitates aëris & spatia percursa, seu inter indeterminatas Δ & x, declarat, ad id, ut grave in

hoc aëre eadem accelerationis lege feratur ac in vacuo; etenim hæc accelerationis norma exhibetur æquatione $uu = ex$, vel $u = \sqrt{ex}$. Jam, cum e sit quantitas constans liquet celeritates acquisitas (u) esse ut ($\sqrt{x}$) id est, in subduplicata ratione spatiorum percursorum. Ad hoc ne quidem necesse est, ut gravitas (g) sit constans seu uniformis, res etiamnum obtinebit, dummodo g datæ sint per x & constantes.

Non immorabimur particularibus exemplis illorum casuum, quibus aër gravibus resistit in ratione composita densitatum & velocitatum, vel in composita ratione ex densitatum ratione & duplicata celeritatum, vel etiam juxta resistentiæ legem, quæ ex utraque memoratarum participat, ad hæc enim duntaxat in æquatione ponendus est exponens $m = 1$, & $c = 0$ primo, vel $b = 0$, secundo, aut vero utramque b, c, &c. retinendo tertio casu, inde tot resultabunt diversæ æquationes, quot hi diversi casus exigunt.

CAPUT XIX.

De descensu & ascensu gravium in lineis quibuscunque curvis, posita medii resistentia quadratis celeritatum proportionali.

581. GRavia, quæ in vacuo feruntur atque in lineis curvis incedunt, in quolibet curvæ puncto, quam accelerato motu perlabuntur, eam celeritatem acquisiviſse censentur, quam acquisiviſſent, si via brevissima à linea horizontali per initium descensus in curva ducta, in datum curvæ punctum, id est, juxta lineam rectam horizontali perpendicularem, cecidissent, ut in primo Libro §. 142. id generaliter ostensum. Sed res aliter se habet cum corporibus, quæ in aëre moventur; eorum enim celeritates aliter, quam per quadraturas & rectificationes curvarum exhiberi nequeunt, idque in sola hypothesi, qua resistentiæ aëris quadratis celeritatum mobilis proportionantur, ut quidem ex sequentibus id eluceſcet.

PROPOSITIO LXXII.

582. *Si, extensa tota curva, quam grave descensu suo & subsequente ascensu describit in lineam rectam, in singulis hujus rectæ punctis perpen-*

pendiculares excitentur proportionales resistentiis aëris, quas mobile in homologis curvæ punctis subit. Area curvilinea, quæ omnes ejusmodi perpendiculares continet, æquabitur rectangulo, à recta, quæ gravitatem uniformem exponit, in differentiam abscissarum arcuum descensu & ascensu descriptorum.

Esto ADB curva descensu mobilis & BEC ascensu descripta, curvæ hujus BEC abscissa est BH, illius verò BG, adeoque GH erit differentia abscissarum. Extensa deinde tota curva ABC in lineam rectam ABC, atque in singulis hujus rectæ punctis D, erectæ sint perpendiculares DT exponentes resistentiam medii in homologis curvæ punctis B, formantesque figuram curvilineam ATRC, quam æquari ostendam rec-lo βB in GH, supponendo rectam βB exponere gravitatem uniformem. Fig. 134.

In eadem DT producta sumatur, ubi DN, quæ solicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam exponet ND—TD excessus solicitationis tangentialis gravitatis supra resistentiam aëris, solicitationem acceleratricem mobilis in curva ADB descendentis. Jam momentum hujus solicitationis acceleratricis, hoc est, (ND—TD.) D*d*, vel ND. D*d*—TD. D*d*, hoc est, elementum areæ AMND—elem. areæ ATD (§.§. 132, 484.) æquatur momento celeritatis mobili in curvæ puncto D acquisitæ, seu elemento dimidii quadrati ex dicta celeritate acquisita; unde, cum in A omnia à nihilo incipiant, & omnia momenta solicitationis acceleratricis æquentur omnibus momentis celeritatis, erit area AMND—area ATD = dimid. quadr. velocitatis in D, & area AMNSB—area ATRB = dimid. quadrat. velocitatis acquisitæ in B.

Si porro mobile in curva BEC ascendit, resistentia totalis, in quolibet ejus puncto E (§. 481.) erit NE + TE, & momentum hujus resistentiæ totalis seu (NE + TE). *e*E = NE. *e*E + TE. *e*E = elem. areæ MNEC—elem. areæ CTE æquatur momento celeritatis decrescentis mobilique in curvæ puncto E residuæ, seu elemento dimidii quadrati ex celeritate in E; unde, quia delata NE in MC, omnia in nihilum desinunt, erit area MNEC + area CTE = dimid. quadr. ex veloc. in E, adeoque etiam MNSBC + CTRB = dimid. quadrato ex celeritate initiali in B. Atqui hæc celeritas initialis in B, eadem est cum velocitate acquisita in B, post descensum mobilis in curva ADB; ergo AMNSB—ATRBA (= dimid. quadrato celeritatis in B) = CMNSBC + CTRBC, adeoque tota figura resistentiarum ATRCA = AMNSB—CMNSB.

Atqui

Atqui area AMNSB æquatur perpetuo rectangulo sub βB recta, quæ gravitatem uniformem exponit, & abscissa BG curvæ ADB descensu mobilis descriptæ, cum quodlibet elementum areæ NDd æquetur rec-lo βB. Ff, seu momento gravitatis centralis βB. Eodem argumento sequitur fore aream CMNSBC = βB. BH, ergo AMNSB − CMNSB, quod areæ ATRCA æquari ostensum, æquabitur etiam rec-lo βB. GH. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

583. Si resistentiæ aëris sint ut celeritates mobilis acquisitæ, erit AMND = areæ ATD + ½TD². Nam TD (secundùm hypothesin) est ut celeritas in D acquisita, adeoque, per præcedentem paragraphum, erit momentum solicitationis acceleratricis, seu ND. Dd + TD. Dd = elem. AMND + elem. ATD, æquale momento celeritatis, seu TD. tθ, quod æquatur elem. ex ½TD². Ergo summando, erit omninò area AMND − area ATD = ½TD², atque adeò AMND = ATD + ½TD². Eodem argumento concludetur esse NECM = ½TE³ − CTE.

Corollarium II.

484. Sin verò resistentiæ aëris fuerint in duplicata ratione celeritatum acquisitarum, quæ verior est hypothesis, erit area AMND = AQ. TD + ATD, & area CMNE = AQ. TE − CTE. Ubi AQ est magnitudo data seu constans.

Hoc enim casu celeritatis in D acquisitæ quadratum erit = 2AQ. TD, cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum; & dimidium celeritatis quadratum AQ. TD, hujusque elementum, id est momentum celeritatis acquisitæ in D, reperietur AQ. tθ; unde, quia momentum solicitationis acceleratricis ND − TD æquatur momento celeritatis in D acquisitæ, fiet ND. Dd − TD. Dd = AQ. tθ, & summando, omnia ND. Dd, seu area AMND − omn. TD. Dd, seu area ATD = omnibus AQ. tθ, id est, rec-lo AQ. TD; adeoque AMND = ATD + AQ. TD. Eadem ferme ratione probatur esse CMNE = AQ. TE − CTE.

Co-

Corollarium III.

585. Si resistentia est uniformis, curva ARC abit in lineam rectam ipsi AC parallelam, eritque hoc casu AMNSB − CMNSB = βB. GH = AC. BR, ac per consequens resistentia medii BR uniformis ad gravitatem uniformem se habebit, ut GH differentia abscissarum BG & BH arcuum curvæ AB & BC descensu & subsequente ascensu descriptorum ad AC aggregatum ipsorum arcuum ABC.

Corollarium IV.

586. Si curva ABC est cyclois ordinaria, cujus axis vel diameter circuli generatoris est *b*B & basis *ac*; semissis differentiæ quadratorum ex arcubus cycloidis ADB & BEC descensu & ascensu descriptis æquabitur areæ ATRTC.

Nam, quia βB exponit gravitatem uniformem juxta ea, quæ §. 179. dicta sunt, hæc βB erit dupla diametri *b*B; hinc βB. BG = 2.*b*B. BG = 2.BK^a (vel, quia arcus cycloidis ADB æquat duplam subtensam BK) = ½.AB^2, & βB. BH = 2.*b*B. BH = ½.BC^2, ergo βB. GH = ½AB^2 − ½BC^2 = ATRTC. Hoc est, rectangulum ex semisse differentiæ arcuum ADB & BEC descensu & subsequente ascensu in cycloide descriptorum, *in aggregatum ABC eorundem arcuum*, æquat aream ATRTC.

Hoc corollarium coincidit cum propositione XXX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Illustr. Newtoni, cujus tamen demonstrationem ex aliis principiis hausit, ut demonstrationem illam inspicienti cuilibet patebit.

Corollarium V.

587. Ergo, in casu corollarii III. hujus, resistentia uniformis in cycloide erit ad gravitatem, id est, RB ad βB in fig. 134. sicut dimidia differentia arcuum ADB & BEC ad βB, seu hemicycloidem *a*DB, vel, sicut differentia dictorum arcuum ad integram cycloidem, *a*B*c*. Est enim (§. 585.) BR : βB = GH : AC = βB. GH : βB. AC (§. 586.) = (½AB − ½BC). AC : βB. AC = ½AB − ½BC : βB vel *a*DB, = AB − BC : cycloid. *a*B*c*.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [365] - 337
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

588. In aliis reſiſtentiæ hypotheſibus res evadit paullo altioris indaginis, quam in corollariis III. & V. hujus; cum in omni alia hypotheſi curva ATRTC adhuc invenienda ſit. Illuſtris Newtonus ſtatim poſt propoſitionem in corollario IV. hujus citatam aſſerit, hanc curvam ARC ad ellipſin proxime accedere, ſi, curva ABC exiſtente cycloide, reſiſtentiæ aëris fuerint celeritatibus proportionales, vel ad parabolam, ſi reſiſtentiæ fuerint in duplicata proportione celeritatum. Sed, accurate & mathematice rem ſumendo, prænominata ATRTC non eſt ellipſis in prima, nec parabola in altera reſiſtentiæ hypotheſi; ſed, quantum conjicere licet, utroque caſu erit transcendens. Etenim, ſi reſiſtentiæ ſunt ut celeritates acquiſitæ, nondum conſtat, quâ ratione curva ARC conſtrui debeat, ne quidem conceſſis quadraturis figurarum curvilinearum. Pro altera vero hypotheſi ac naturæ magis conſentaneâ nominatæ curvæ conſtructio haberi poteſt per quadraturas & rectificationes curvarum. Ex propoſitione XXIX. laudatiſſimi Newtoni Lib. II. ejusmodi conſtructio peti poteſt in caſu particulari, quo curva deſcenſus ABC eſt cyclois. Hoc loco vero generalem conſtructionem adducam pro quacunque curva ABC, idque gemino modo.

PROPOSITIO LXXIII. Theorema.

589. *Per quodlibet in linea* AM *producta punctum* V, *deſcripta logarithmica* VXY *ſubtangentem habente æqualem datæ lineæ* AQ, *& aſymptotam* CQ, *ac protenſa* ND *usque ad occurſum* P *cum log-mica* VX; *ſi omnia elementa* PD. DN. Dd *alicujus ſolidi duobus planis* MAV *&* NDP *interjecti erecto ſcilicet ad angulos rectos plano* MABS *ſuper plano* VAB, *æqualia fuerint parallelepipedo* AQ^2. DO, *ſub quadrato ſubtangentis log-micæ & ordinata* DO *cujusdam curvæ* AOΔC; *homologa ordinata* DT *ſcalæ reſiſtentiarum* ARC *erit quarta proportionalis ad ordinatas* PD, DO *&* AQ *ſubtangentem log-micæ* VX.

I. Eſto linea *pn* alteri PN indefinite vicina, atque per puncta T, O & P curvarum AT, AO & VP ductæ ſint lineolæ $T\theta$, $O\omega$, & $P\pi$; ac denique, ſit DT quarta proportionalis ad PD, DO & AQ, vel, quod eodem recidit, rec-lum PD. DT = AQ. DO, & $pd.dt = AQ.do$, id eſt, $PD.dt + p\pi.dt = PD.DT + PD.t\theta + dt.p\pi = PD.DT +$ PD.

$PD.t\theta + DT.p\pi = AQ.DO + AQ.\omega o$; ſubductis igitur $PD.DT$ & $AQ.DO$, remanebit $PD.t\theta + DT.p\pi = AQ.\omega o$, ductisque ſingulis partibus in AQ; fiet $AQ.PD.t\theta + DT.AQ.p\pi = AQ^2.o\omega$.

II. Atqui $AQ^2.\omega o = PD.DN.Dd$, cum omnia $PD.DN.Dd$ ſint (conſtr.) $= AQ^2.DO$; item (§. 491. num. 11.) $AQ.p\pi$ æquatur $PD.Dd$, vel $AQ.DT.p\pi = DT.PD.Dd$; ergo, ſubrogatis his valoribus in poſtrema æqualitate num. 1. hujus, invenietur $PD.AQ.t\theta + PD.DT.Dd = PD.DN.Dd$, &, applicando ſingula membra ad PD, $AQ.t\theta + DT.Dd = DN.Dd$. Adeoque omnia $AQ.t\theta$, id eſt, $AQ.TD +$ omn. $DT.Dd$, id eſt, area $ATD =$ omnibus $DN.Dd$, ſeu areæ $AMND$. Eſt proinde $AQ.TD + ATD = AMND$; atque adeò (§. 584.) curva ATR eſt ſcala reſiſtentiarum *mobilis in curva ADB cadentis.* Fig. 134.

III. Eodem modo probatur $PE.t\theta - ET.P\pi$ æquari $AQ.o\omega$ atque inde, ut ante, inferetur eſſe $AQ.TE - CTE = CMNE$, ac per conſequens (§. 584.) curvam CTR ſcalam reſiſtentiarum aëris mobili in curva BEC aſcendenti oppoſitarum. Propterea curva ATRTC eſt ſcala reſiſtentiarum aëris, cum corpus in curva quacunque ADB deſcendit, atque dehinc in altera BEC aſcendit. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

590. *Celeritas mobilis, in quolibet curvæ puncto D acquiſita,* eſt $\sqrt{(2AQ.DT)}$, atque velocitas eidem mobili per arcum curvæ BE aſcendenti reſidua in E erit $\sqrt{(2.AQ.ET)}$ quorum ratio ex ſuperioribus (§. 484.) ſatis conſtat.

Corollarium II.

591. *Omnia* parallelepipeda $PD.DN.Dd$ continentur in ſolido quodam MAVN, cujus ſingulæ ſectiones plano BAV rectæ planoque MAV parallelæ, ſunt rectangula PDN. Planum enim AMSB ſuper plano VAB erectum concipiendum eſt.

Corollarium III.

592. Si linea deſcenſus mobilis ABC eſt cyclois ordinaria, linea MNS erit recta transiens per B, angulumque MBA, ſemirecto æqualem continens cum linea AB. Propterea ſolidum prædictum MAVN erit truncus log-micus ſuper baſi ADPV interjectus plano VAB

aliique per BX transeunti, atque angulo semirecto ad planum VAB inclinato.

Fig. 134. Nam, quia subtensa BL arcus circularis BL parallela est tangenti cycloidis in puncto D, erit gravitas ad solicitationem ejus tangentialem in cycloidis puncto D, sicut bB ad BL = ßB : 2.BL = ßB : arcum cycl. BD, atqui ßB exponit gravitatem, ergo BD exponet solicitationem gravitatis tangentialem in D, atque adeo in fig. 135. BD quæ eadem est cum arcu cycloidis BD in fig. 134. in rectam extenso æquabitur ordinatæ ND, & AB = AM; hinc linea MNS est recta, seu figura AMNS erit triangulum rectangulum isosceles, atque adeò solidum MAVNP truncus resectus ex prismate recto super basi ADPV à plano secante per BX ducto, atque angulo semirecto ad planum baseos BAV inclinato.

Corollarium IV.

593. Unde, si Ω sit centrum gravitatis quadrilinei log-mici ADPV, demissa perpendiculari Ωδ ad AB, solidum ex quadrilineo prædicto ADPV in Bδ æquabitur trunco MAVNP, atque adeo (constr.) parallelepipedo; atqui ducta per VZ parallela AC, quadrilineum AVPD reperietur = AQ. PZ, ergo solidum MAVNP = AQ. PZ. Bδ (constr.) = AQ². DO, & PZ. Bδ = AQ. DO (num. 1. §. 589.) = PD. DT. *Est proinde resistentia DT in quolibet cycloidis puncto* = PZ. Bδ : PD.

Scholion.

594. Quia ad obtinendam expressionem ordinatarum DT etiam expressio requiritur ipsarum Bδ, seu distantiarum centri gravitatis quadrilineorum ADPV, idcirco duobus verbis indicabo, qua ratione investigari debeant.

In log-mica est DP. Dd = AQ. $p\pi$, & AD. DP. Dd = AQ. AD. $p\pi$ (vel ducta PW parallela VZ) = AQ. PW. $p\pi$, ergo omnia AD. DP. Dd = omnibus AQ. PW. $p\pi$ id est = AQ in trilineum VPW. Atqui (§. 44.) est quadrilineum ADVP in Aδ = omnibus AD. DP. Dd; ac per consequens = AQ. VPW. Verum ADPV = AQ. PZ, & VPW = AD. DP − AQ. PZ; ergo AQ. PZ. Aδ = AQ. AD. DP − AQ². PZ. seu PZ. Aδ = AD. DP − AQ. PZ; hinc PZ. Bδ = AB. PZ − AD. DP + AQ. PZ = BQ. PZ − AD. DP (vel ponendo DP − AV loco ipsius PZ) = BQ. DP − BQ. AV − AD. DP.

Hinc,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [368] - 340
PUBLIC DOMAIN

Hinc, ut saltem in transitu dicam, centrum gravitatis areæ log-micæ ultra ordinatam DP versus Q in infinitum excurrentis intervallo subtangentis AQ distat à sua prima ordinata DP.

Corollarium V.

595. Cum DT (§. 593.) sit PZ. Bα : PD, substituto invento valore ipsius Bα, reperietur $DT = (BQ.DP - AD.DP - BQ.AV) : PD = BQ - AD, - BQ.AV : DP$. Adeoque solicitatio acceleratrix mobilis in cycloidis puncto D, hoc est, DN seu DB, − DT erit $BD - BQ + AD, + BQ.AV : DP = AV.BQ : DP, - AQ$.

Scholion II.

596. Supra jam indicavi (§. 588.) resistentias in cycloide jam pridem definitas esse à Cel. Newtono Prop. XXIX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. idque præstitit per spatia hyperbolica, expressionibus à nostris diversissimis quoad apparentiam, sed revera cum nostris conspirantibus; sed, quia assertionis meæ veritas non statim in oculos incurrit, consensum inter Newtonianam atque meam determinationem resistentiarum, paucis ostendere libet. In figura 136. afferam Newtoni schema *ipsiusmet literis, ast confusionis vitandæ gratia minusculis insignitum, atque propria ejus verba nulla mutatione facta*, nisi quod hoc loco, quæ cycloidem respiciunt, nostræ figuræ 134. applicaturus sim, quæ ille indicat circa figuram propos. XXV. citati libri.

„ 597. Sit ABC arcus oscillatione integra descriptus, sitque B Fig. 134.
„ infimum cycloidis punctum, & Bα semissis arcus cycloidis totius,
„ longitudini penduli æqualis, & quæratur resistentia corporis in
„ loco quovis D. Secetur recta infinita *oq*, in punctis *o*, *c*, *p*, *q*, Fig. 136.
„ ea lege, ut (si erigantur perpendicula *ok*, *ct*, *pi*, *qe*, centroque
„ *o*, & asymptotis *ok*, *oq* describatur hyperbola *tige* secans perpen-
„ dicula *ct*, *pi*, *qe* in *t*, *i* & *e*, & per punctum *i* agatur *kf* paral-
„ lela asymptoto *oq* occurrens asymptoto *ok* in *k*, & perpendiculis *ct*
„ & *qe* in *l* & *f*) fuerit area hyperbolica *pieq* ad aream hyperboli-
„ cam *pitc*, ut arcus AB, descensu corporis descriptus, ad arcum BC
„ ascensu descriptum, & area *ief* ad aream *ilt* ut *oq* ad *oc*. Dein per-
„ pendiculo *mn* abscindatur area hyperbolica *pinm*, quæ sit ad aream
„ hyperbolicam *pieq*, ut arcus *a*B ad arcum AB descensu descriptum.
„ Et si perpendiculo *rg* abscindatur area hyperbolica *pigr*, quæ sit

„ ad aream *pieq*, ut arcus quilibet BD ad arcum AB defcenfu to-
„ to defcriptum; erit refiftentia in loco D ad vim gravitatis, ut
„ area $\frac{or}{oq}ief-igh$ ad aream *pienm*. Hactenus Newtonus.

598. Confulantur omnino tres figuræ 134, 135 & 136. &, quia (conftr.) fpatia hyperbolica *pinm*, *pieq*, *pigr* & *rgeq* arcubus cycloidis *a*B, AB, DB & AD proportionalia funt, & logarithmicæ ordinatæ DP, & AV abfciffis hyperbolæ *oq* & *or* refpective, adeo ut habeatur AV : DP = *or* : *oq*. & AB : AQ = *pieq* : *piko* & componendo BQ : AQ = *okieq* : *okip*, erit BQ − AD ut *okieq* − *rgeq* feu *okigr* & AV. BQ : DP ut $\frac{or}{oq}$ *okieq*, ergo BQ − AD − $\frac{AV.BQ}{DP}$ ut *okigr* − $\frac{or}{oq}$ *okieq*, atqui *okigr* = *orhk* − *igh*, & $\frac{or}{oq}$ *okieq* = (*oq*.*pi* − *ief*).$\frac{or}{oq}$ = *or*.*pi* − $\frac{or}{oq}$ *ief*, ergo *okigr*. − $\frac{or}{oq}$ *okieq* = *or*.*pi* − *igh* − *or*.*pi* + $\frac{or}{oq}$ *ief* = $\frac{or}{oq}$ *ief* − *igh*, atque adeo BQ − AD − $\frac{AV.BQ}{DP}$ eft, ut $\frac{or}{oq}$ *ief* − *igh*, & BQ − AD − $\frac{AV.BQ}{DP}$ ad β B feu *a*B, id eft, refiftentia aëris ad gravitatem ut $\frac{or}{oq}$ *ief* − *igh* ad aream *pienm*. Quod erat demonftrandum.

Hoc ergo modo Newtoniana determinatio reducitur ad fimpliciorem meris lineis à nobis exhibitam, & vice verfa noftra facile reducitur fub formam Newtonianæ; propterea etfi ambæ plurimum inter fe differre prima fronte videntur, inter fe jam egregie confpirare apparent. Refiftentiæ aëris in cycloide, imò in qualibet data curva, aliter adhuc determinari poffunt, vel potius celeritates acquifitæ in quolibet curvæ puncto conceffa quadratura cujusdam fpatii curvilinei ope theorematis fequentis.

PROPOSITIO LXXIV. Theorema.

Fig. 137. 599. *Inter afymptotas* AZ, AF *angulum rectum continentes defcribatur hyperbola quadratica* MO, *cujus fcilicet quælibet ordinata* MK *fit ut quadratum abfciffæ* AK *inverse, ordinataque* FO *gravitatem uniformem exponat, ductaque per* F *log-mica* FSQ, *cujus fubtangens æquet rectam* AF, *atque in hac log-mica ordinata* ID, *cujus abfciffa* AD *æqualis fit arcui curvæ* a B *defcenfu mobilis defcripto* AD; *agantur* IM *parallela* AD *&* MZ *parallela* AF, *atque in* MZ *productain fra axem* AT, *ca-*

capiatur ZN *æqualis* GF *in fig.* 134. *eruntque puncta* N *in linea quadam curva* YN. *Esto porrò rectum ex ordinata* AF *aliaque* QR *in log-mica, æquale duplo areæ* AYNP, *& in medio* T *intervalli* AR *ordinatarum* AF *&* RQ, *ducta ordinata* TS, *atque ad distantiam* TX *æqualem* AD, *alia ordinata* XV; *hæc* XV *exponet celeritatem acquisitam mobili in curvæ descensus* ADB *puncto* D *post lapsum per ejus arcum* AD. Fig. 134.

Ductis ordinatis aliisve lineis, videlicet *pn, nm, mi, id, st, ux*, & *qr* lineis cognominis PN, NM, &c. parallelis & indefinite vicinis, item per puncta Q, V & S lineolis *Qe*, *Vv*, & *Sσ* axi AR parallelis.

I. Constructio, quæ præbet $2.AYNP = AF.QR$ & $2.AY np = AF.qr$, etiam efficiet $2NP.Pp = AF.qe$ (§. 491. num. 11.) $QR.Rr$.

II. Quia (constr.) $AT = TR$ & $At = tr$, erit $Rr = 2.Tt$, atque adeò $ST.Tt : QR.Rr = ST : 2.QR$ (seu, propter continue proportionales AF, TS & RQ ob æqualia harum ordinatarum log-micæ intervalla AT & TR, erit etiam) $= AF : 2.TS = AF.s\sigma : 2.ST.s\sigma = ST.Tt : 2ST.s\sigma$; ergo $2.ST.\sigma s = QR.Rr$ (num. 1. hujus) $= 2.NP.Pp$, ergo etiam $ST.s\sigma = NP.Pp$; vel $Pp : s\sigma = ST : NP$.

III. Hyperbola verò MO præbet $AF^2 : AK^2$ (aut, quia ob æqualia intervalla AD & TX ordinatæ AF, ID, seu AK, ST ac VX per naturam log-micæ proportionales sunt) $= ST^2 : VX^2$ $(= MK : OF) = AF.MK : AF.OF$, erit, permutando, $ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, sed (num. 11. hujus) erat $Pp : s\sigma = ST : MK$, vel NP; & log-mica exhibet $s\sigma : Tt = ST : AF$, ergo ex æquo $Pp : Tt = ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, & $VX^2.Tt = AF.OF.Pp$.

IV. Cum (constr.) sit $AD = TX$, & $Ad = tx = tT + TX - Xx$, erit $Dd = Tt - Xx$, vel $Xx = Tt - Dd$, id est, $VX^2.Xx = VX^2.Tt - VX^2.Dd$; atqui, loco $VX.Xx$ substituendo (§. 491. num. 11.) æquale $AF.uv$, locoque $VX^2.Tt$ (num. 111. hujus) æquale solidum $AF.OF.Pp$, ac denique faciendo $VX^2 = R.AF$, fiet $AF.VX.uv = AF.OF.Pp - AF.R.Dd$, vel, applicando omnia ad AF, reperietur $VX.uv = OF.Pp - R.Dd$ (seu ponendo $T.Dd$ æquale $OF.Pp$) $= VX.uv = T.Dd - R.Dd = (T - R).Dd$. Jam, quoniam Dd est elementum spatii AD, si $T - R$ sit solicitatio quæcunque acceleratrix, erit momentum hujus solicitationis æquale momento velocitatis acquisitæ in curvæ puncto D, & cum idem solicitationis momentum repertum sit æquale momento ordinatæ XV, sequitur hanc ordinatam exponere celeritatem in D acquisitam. Atqui, quoniam Fig. 134.

(se-

(ſecundùm hypotheſin) T. $Dd = OF.Pp$, atque OF gravitatem uniformem exponit, & OF. Pp (conſtr.) OF. Ff ſit momentum gravitatis centralis, cui momentum ejusdem tangentialis, ſeu rec-lum ex hac tangentiali & elemento curvæ Dd (§. 133.) æquatur, perinde ac $T.Dd$, liquet T eſſe ſolicitationem gravitatis tangentialem in curvæ puncto D, &, quia VX, ut jam oſtenſum, eſt celeritas acquiſita in D quæcunque ſit ſolicitatio acceleratrix $T-R$, atque $AF.R = VX^2$, id eſt, R ut VX^2; & cum reſiſtentia medii (ſecundùm hypotheſin) etiam ſit ut quadratum celeritatis acquiſitæ, magnitudo R exponet reſiſtentiam aëris in curvæ puncto D, atque adeo $T-R$ detracta ſcilicet reſiſtentia aëris à ſolicitatione gravitatis tangentiali, exponit ſolicitationem acceleratricem mobili deſcendenti continue applicatam, cui vigore ejusmodi ſolicitationum acquiritur in D celeritas XV. Quod erat demonſtrandum.

600. Si grave in altera curvæ parte BEC, fig. 134. aſcendit, curva YN ſemper magis magisque ad AP accedit, ut ab eadem recedit in caſu deſcenſus, conſtructio vero eadem eſt utroque caſu, hac ſola cum differentia, quod in caſu deſcenſus hyperbolæ portio OM, quæ eſt ſubter ordinatam OF, in conſtructione illa adhiberi debet, & portio, quæ ſupra ordinatam OF, in caſu aſcenſus. Quonam vero artificio in præcedentes conſtructiones inciderim, ex demonſtrationis filo facile intelliget perſpicax Lector, propterea, ut brevitati conſulam, eidem explicando non diutius immorabor.

Corollarium.

Fig. 134. 601. Si linea deſcenſus mobilis aDB eſt iterum cyclois, area AYNP in figura 137. erit quadrabilis ope logarithmorum; nam inſpiciendo utramque figuram 137, & 134. erit area $AYNP = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ).AF : 4bB$. (conſtr.) $= \frac{1}{4}AF.QR$ (ſeu ex natura log-micæ) $= \frac{1}{2}ST^2$. Verùm, quia, ob æqualia intervalla AD & TX, ordinatæ AF, DI vel AK, ST & VX proportiones ſunt, fit $AF^2 : AK^2$ vel (propter hyperbolam OM) $= AZ : AY = ST^2 : VX^2 = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ).AF : 2bB$, ad VX^2, ſeu (conſtr.) $AF.R. = (AB.YZ + \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ) : 2bB$ ad R; ſeu $AB.YZ - \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ$ ad $R.2bB$; atque adeò erit reſiſtentia medii, ſeu $R = (AB.YZ - \frac{1}{2}AF.YZ - AD.AZ).AY : 2bB.AZ$. Quod præcedentibus determinationibus (§.§. 595, 596, & 597.) probe conſonum eſt.

CA-

CAPUT XX.

De motu projectorum in aëre, qui missili in duplicata ratione celeritatum resistit, cum corpus à solicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum positione datum, ut hactenus considerari solebant, tendentibus, urgetur, sed secundum directiones lineam quamcunque curvam positione datam contingentes.

IN præcedenti Capite celeritates mobili in curva quacunque cadenti acquisitas, vel ascendenti residuas, assignavimus, cum scilicet à gravitate uniformi recta ad horizontem tendente urgetur in aëre secundum duplicatam proportionem celeritatum resistente. In hoc verò Capite examinandi restant motus projectilium in ejusmodi aëre resistente, sed pro gravitate variante, tam ratione ipsarum gravitatis solicitationum, quam ratione directionum; quas directiones ad nullum determinatum punctum tendere, sed quamcunque lineam curvam contingere supponemus. Ab omnibus, quotquot de viribus centralibus scripserunt, geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare solemus, solicitationum gravitatis centralium meta vel centrum positione datum & immutabile, considerari consuevit, veluti id nomen ipsum hisce viribus inditum satis superque declarat. Nos verò rem generalissime pertractaturi, solicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile assumemus, ita quidem, ut mobile in singulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum solicitationum urgeatur. Hoc modo centra omnia posita erunt in quadam linea curva, quam solicitationum gravitatis directiones contingunt. Problema harum virium, pro centris, quæ dixi, variabilibus, prima fronte difficillimum, si non prorsus intractabile, videtur. Veruntamen, principiis in primo libro jam expositis insistentes, solutionem non minus simplicem quam facilem trademus, ex qua deinceps omnia instar corollariorum deducentur, quæ solicitationes ad unicum tantum centrum directas respiciunt symptomata, aut saltem eorum præcipua.

602. Adeoque, si AM*m* sit curva, quam projectile M data cum celeritate exiens ex puncto A secundum directionem tangentis AC Fig. 138.

 descri-

describat in aëre secundum rationem duplicatam ipsi resistente, cum scilicet directiones solicitationum gravitatis AB, MN, *mn*, ubique ad diversa puncta seu centra B, N, *n* respiciunt, atque adeo curvam quamcunque B*Nn* in præfatis punctis B, N, *n*, &c. contingunt. Solicitationem mobilis M ad punctum N directam deinceps repræsentabimus per MX, in ejus directione MN sumptam, ductaque MR normali ad curvam AM in puncto M, & per X parallela XZ tangenti curvæ MP in dicto curvæ puncto, exponetque XZ (§. 118.) solicitationem gravitatis tangentialem in M.

603. Talis solicitationes gravitatis considerandi modus jam continet sub se casum, quo corpus M in curva AM incedens ad plura
Fig. 139. diversa centra positione data ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. urgetur solicitationibus M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. Nam existente Ω centro gravitatis punctorum *y*, 2*y*, 3*y*, 4*y*, &c. quorum numerus sit *n*, solicitatio ex omnibus lateralibus M*y*, M2*y*, &c. resultans (§. 49.) erit *n*.MΩ, cui æqualem faciamus MX. Hæc MX erit solicitatio gravitatis centralis, quâ mobile in puncto curvæ M afficietur, & centrum, ad quod hæc solicitatio MX dirigitur, erit punctum N, in quo media directio omnium M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. curvam quandam N*n* (quam proinde curvam mediarum directionum nominare licet) contingit. Propterea, loco omnium illarum solicitationum lateralium M*y*, M2*y*, &c. unicam illarum mediam solicitationem MX = *n*.MΩ considerare convenit, ut adeò tota res reducatur ad casum articuli præcedentis.

HYPOTHESIS.

604. In hisce autem supponendum, resistentiam aëris tantum exseri in motum corporis M in curva AM incedentis, non verò in gravitatis impressiones juxta directiones MN.

PROPOSITIO LXXV. Lemma.

605. *Si in hyperbola* TKΘ *inter asymptotas* SB, BΦ, *ductis ordinatis* IK, GH, AD *&* ST *ad asymptotam* SB, *ad alteram verò* BΦ, *ordinatis* ΔΠ, ΘΦ, *&* WV; *quadrilineum* ΘΦVW *æquaverit excessum, quo quadrilineum* ΦΘΔΠ *superat duo simul quadrilinea* GHKI *&* ADTS, *ratio* BV *ad* BΦ *componetur ex tribus rationibus* BΦ *ad* BΠ, IB *ad* GB, *&* AB *ad* BS. *Hoc est, erit* BV *ad* BΦ, *ut* BΦ.IB.AB, *ad solidum ex* BΠ.GB.BS.

Facta

Facta Bh tertia proportionali ad $B\Pi$ & $B\Phi$, erectaque ordinata gh, sit insuper quadrilineum $g\theta h = GHIK$, eritque $WV\theta\sigma = SADT$. Nam, quia $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GHIK - SADT$ (constr.) $= \Theta\Phi hg - \theta\sigma gh - SADT = \Theta\Phi\theta\sigma - SADT = \Theta\Phi\theta\sigma - WV\theta\sigma$, erit omninò $WV\theta\sigma = SADT$.

Atqui ratio BV ad $B\Phi$ componitur ex rationibus BV ad $B\theta$, $B\theta$ ad Bh, & Bh ad $B\Phi$, (seu, quia propter quadrilinea æqualia $WV\theta\sigma$, $SADT$; BV est ad $B\theta$, ut BA ad BS, propter $\sigma\theta hg = GIKH$ habetur $B\theta : Bh = BI : BG$, ac denique propter $\Theta\Phi hg = \Theta\Phi\Pi\Delta$, est $Bh : B\Phi = B\Phi : B\Pi$) ex rationibus BA ad BS, BI ad BG & $B\Phi$ ad $B\Pi$; atque adeò $BV : B\Phi = B\Phi . BI . BA : B\Pi . BG . BS$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

606. Sed, si quadrilineum $\Theta\Phi VW$ fuerit æquale $\Theta\Phi\Pi\Delta - GHKI + ADTS$, erit $BV : B\Phi = B\Phi . BI . BS : B\Pi . BG . BA$. Demonstratio eadem ferme est.

Propositio LXXVI. Problema.

607. *Si mobile in directione* AC *datâ cum celeritate ex puncto* A *exiens, & solicitationibus acceleratricibus* MX *secundum directiones* MN, *curvam quamcunque* BNn *contingentes, citatum, in aëre secundum rationem compositam ex rationibus densitatum medii & duplicatæ velocitatum mobilis resistente, curvam* AMm *describat, definire proportionem celeritatis mobilis in quolibet curvæ puncto* M *acquisitæ ad celeritatem initialem in* A, *ac proportionem solicitationum acceleratricium in iisdem curvæ punctis* M *&* A.

I. Sunto Mm elementum curvæ AM, per cujus elementi terminos transeant tangentes MN, mn curvæ BNn sese intersecantes in puncto o; MP & mp tangentes curvæ AMm in punctis M, m convenientes in c, super quas tangentes demittantur ex punctis N, o & n normales NP, oa (tangentem interiorem cb secans in α) ob & np, ac denique MR, mR perpendiculares curvæ AM in punctis M & m, adeò ut, coeuntibus his punctis, hæ perpendiculares curvæ futuræ sint radius circuli osculatoris curvi in puncto M vel m, seu circuli æque curvi in his punctis. Sint porrò curvæ MF, $m\mu f$ evolutæ arcuum BN, BNn; rectæ verò $B\Phi$ & BV in linea indefinita

BQ ipsi BA normali abscissæ exponant velocitates mobilis in punctis A & M, & Vu elementum ipsius BV; extensaque curva AM in rectam BQ, erectaque QY perpendiculari ad BQ, ac densitati aëris in omni curvæ AM termino proportionali, orietur figura, vel potius curva βY, quam scalam densitatum aëris deinceps vocabo. Denique assumtis D & R pro nominibus densitatis & resistentiæ aëris, ponatur ubique R ut $D.BV^2$, vel, ad complenda homogenea, adscito AB. AD rectangulo dato, sit ubique $AB.AD.R = D.BV^2$. Ac fiant $BI = MN$, $Bi = mn$, $B\Phi = BC$, $B\Pi = NP$ & $B\pi = np$, ducanturque ordinatæ IK, ik, $\Phi\Theta$, $\Pi\Delta$ ac $\pi\delta$ in hyperbola intra asymptotas AB, BQ per punctum D descripta. Hisce omnibus præparatis sequitur

II. *Analysis Geometrica.* Cum (§. 602.) ZX solicitatio sit tangentialis ex centrali MX derivata, erit (§. 481.) $ZX - R$ solicitatio acceleratrix mobilis in puncto M curvæ AM descensu descriptæ, & $ZX + R$ resistentia totalis mobilis ex puncto M super curva MA ascendentis: sed sepositio tantisper casu ascensionis, examinabimus alterum, qui est descensus. Erit igitur (§. 484.) momentum solicitationis acceleratricis $ZX - R$ æquale momento celeritatis crescentis BV, id est $(ZX - R).Mm = BV.Vu = ZX.Mm - R.Mm$, vel ducendo omnia in datum rec-lum BAD, habetur $BA.AD.ZX.Mm - AB.AD.R.Mm = AB.AD.BV.Vu$, & quia (secundùm hypothesin) $AB.AD.R = D.BV^2$, ac $BAD = BVW$, erit $AB.AD.ZX.Mm - D.BV^2.Mm = BV^2.WV.Vu$. Et, quia (§. 604.) aër gravitatis solicitationibus non resistit, habetur (§. 154.) $BV^2 = MZ.MR$; idcircò, applicando æqualitatem præcedentem ad hanc postremam, proveniet $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR, -QY.Qq = VW.Vu$. Cum (num. 1. hujus) $QY = D$ & $Qq = Mm$.

III. At, quia triangula similia Moa, BZX præbent $ZX : MZ = Ma : ao$, & sectores similes cau ac RMm; $Mm : MR = au : ac$ (& quia, coeuntibus punctis M, m, ratio Ma ad ca in rationem æqualitatis desinit) $= au : Ma$, erit ex æquo $ZX.Mm : MZ.RM = au : ao = au : PN$ (constr.) $= au : B\Pi$, ergo $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR = AB.AD.au : B\Pi$, hoc est (propter omnia rectangula in hyperbola æqualia) $= \Pi\Delta.au$.

IV. Ducantur porrò per punctum o lineola $o1$ parallela tangenti MP, & per punctum n lineolæ 34, $n2$ parallelæ respective tangentibus MP, mp, & coeuntibus punctis n, o, N, lineolæ evanescentes $O2$, 14 & $N3$ ac arculus Nn in rationes æqualitatis desinent, per-

perinde ac *oz* & *ob*. Quo posito; quia NP−*np* (constr.)=Bπ−Bπ=Tπ=PN−*ao*³+*ao*−*zo*+*bo* (seu *zo* ipsi æqualis)−*pn*=N1+*az*+14 (vel 02)=*az*+N4, erit *az*=Tπ−N4, & Tδ.*az*=Tδ.Tπ−Tδ.N4.

Triangula verò similia N43 & NPM, præbent N4:NP=N3:NM=N*n*:NM=I*i*−F*f*:NM. Nam *mn*+*n*N=MN−M*μ*=BI−F*f*; ergo *n*N=BI−B*i*−F*f*=I*i*−F*f*. Hinc, quia BI.IK=Bπ.Tδ, erit Bπ.Tδ.N4:Bπ, vel NP=Tδ.N4=(BI.IK.I*i*−BI.IK.F*f*):BI,=IK.I*i*−IK.F*f* (seu ductis per singula hyperbolæ puncta K, *k* parallelis KE, *ke* rectæ AB, lineis FE, *fe* eidem AB normalibus, occurrentes in punctis E, *e* alicujus curvæ DE)=IK.I*i*−FE.F*f*, erit Tδ.*az* (=Tδ.Tπ−Tδ.N4)=Tδ.Tπ−IK.I*i*+FE.F*f*.

V. Hinc cum supra (num. 11. hujus) reperta sit VW.V*u*=AB.AD.ZX.M*m*:MZ.MR−QY.Q*q* (num. 111. hujus)=Tδ.*az*−QY.Q*q*; erit (num. 1v.) WV.V*u*=Tδ.Tπ−IK.I*i*+FE.F*f*−QY.Q*q*, & sic ubique; ergo omnia WV.V*u*=omn. Tδ.Tπ−omn. IK.I*i*+omn. FE.F*f*−omn. QY.Q*q*. Hoc est, ΘΦVW=ΘΦTδ−AIKD+AFED−BβYQ; nam, si punctum M est in A, omnes hæ areæ simul à nihilo incipient. Areis AFED & BβYQ capiantur æqualia quadrilinea hyperbolica AGHD & ASTD, eritque ΘΦVW=ΘΦTδ−GIKH−ASTD, ac per consequens (§. 605.) BV:BΦ=BΦ.BI.BA:Bπ.GB.SB (vel restitutis BC, MN, NP loco BΦ, BI, & Bπ)=BC.MN.AB:NP.GB.SB. Jam, quia BC:AB=sinus anguli BAC: radium vel sinum totum, & NP:MN=∫NMP:rad., erit BV:BΦ, id est, celeritas mobilis in M ad celeritatem initialem in A, sicut AB² in ∫BAC ad GB.SB in ∫NMP. Unde, si *v*A significet velocitatem in A, erit BV, seu celeritas in M, quam etiam exprimam per *v*M=AB².*v*A.∫BAC:GB.SB.∫NMP.

VI. Porrò, quia MX.MR:MZ.MR, seu MX:MZ=rad.:∫MXZ vel ∫NMP, & (§. 154.) MZ.MR=*v*M²; erit ex æquo MX.MR:*v*M²=rad.:∫NMP; atqui (num. v.) *v*M²:*v*A²=AB⁴.∫BAC²:GB².SB².∫NMP², & (ponendo AR & A pro radio osculi, & solicitatione centrali initio motus in curvæ puncto A) *v*A²:A.AR=∫BAC:rad. Ergo ex æquo & per compositionem rationum MX.MR:A.AR=AB⁴.$\overline{\int BAC}^3$:SB².GB².$\overline{\int NMP}^3$. Assumatur quædam magnitudo M, talis, ut M.MR sit ad A.AR, sicut AB⁴.$\overline{\int BAC}^3$ ad GB².$\overline{\int NMP}^3$, seu ..M=A.AR.AB².$\overline{\int BAC}^3$:MR.GB².

$GB^2.\int\overline{NMP}^3$, & reperietur $MX:M=AB^4:SB^2$, id eſt, ſolicitatio centralis in aëre reſiſtente eſt in quolibet curvæ puncto M, $=M.AB^2:SB^2$, cum ſcilicet mobile ex A profectum curvæ arcum AM deſcendendo, ſeu ad curvam nNB accedendo deſcribit.

VII. Sin verò aſcendat ſuper arcum MA ex M verſus A, id eſt à curva nNB recedendo, invenietur hoc caſu $\Theta\Phi VW=\Theta\Phi\Pi\Delta-GIKH+ASTD$, atque adeò, vi paragraphi 606, & eorum quæ in præcedentibus numeris hujus oſtenſa ſunt, $MX=M.SB^4:AB^2$. Quæ omnia erant invenienda.

608. Notandum autem literam $\int$ in hac propoſitione eſſe notam characteriſticam ſinuum illorum angulorum, quibus præfigitur, & $\int\overline{BAC}^3$, $\int\overline{NMP}^3$ ſignificare cubos ex ſinubus angulorum BAC, NMP, & reliqua ſigna, ſcilicet A, denotare ſolicitationem gravitatis centralem in curvæ puncto initiali A, & AR (quam in figura confuſionis vitandæ gratia non expreſſi) radium circuli oſculatoris, ſeu ejusdem curvitatis cum curva in eodem puncto A. Ratio verò SB ad AB, in qua SB ſemper major ponitur quam AB, eadem eſt cum ratione abſciſſarum alicujus quadrilinei hyperbolici ASTD (conſtr.) æqualis areæ $B\beta YQ$ ſcalæ denſitatum aëris. Propterea termini ipſi rationis SB ad AB, ad nullam determinatam magnitudinem reſtricti ſunt, ſed, pro re nata, modo majores minoresve accipi poſſunt, dummodo ratio inter hos terminos ea maneat, quæ eſt inter abſciſſas cujuscunque trapezii hyperbolici prædictæ areæ in ſcala denſitatum aëris æqualis.

Corollarium I.

609. Adeoque in medio nullius denſitatis, id eſt, in vacuo evaneſcent areæ $B\beta YQ$ vel ASTD, atque adeò ratio SB ad AB mutabitur in rationem æqualitatis, fietque $vM:vA=AB.\int BAC:GB.\int NMP$. Et $MX\ (=M.AB^2:SB^2$, vel $M.SB^2:AB^2)=M$. Idcirco M, cujus valor jam (§. 607. num. VI.) determinatus eſt, exponit generaliſſime ſolicitationem gravitatis centralem in vacuo.

Corollarium II.

Fig. 139. 610. Si mobile M ſolicitationibus quotcunque lateralibus, My, M2y, M3y, M4y, &c. ad diverſa centra ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. ſimul agentibus urgetur; earum media directio MN, quæ (§. 603. & 49.) per

per centrum gravitatis Ω omnium punctorum y, $2y$, $3y$, $4y$, &c. transibit, continget aliquam curvam NN, quam proinde curvam mediarum directionum solicitationum lateralium vocare licet. Idcirco, quia (§. 603.) $MX = n.M\Omega$ (§. 607. num. VI. & VII.) $= M.AB^2 : SB^2$ vel $= M.SB^2 : AB^2$; hoc in casu ascensionis, illud verò in casu descensus mobilis in curva AM, erit $M\Omega : M = AB^2 : n.SB^2$ in primo casu, qui est descensus, vel $M\Omega : M = SB^2 : n.AB^2$. Adeoque circumstantia problematis, solicitationum acceleratricium vel retardatricium ad plura diversa centra simul agentium, continetur jam in problemate harum solicitationum, si earum meta seu centrum in quolibet mobili describendæ curvæ puncto variabile est.

Corollarium III.

611. Quia (§. 607. num. I.) assumsimus $AB.AD.R = D.BV^2$, & (§. 154.) $BV^2 = MZ.MR$, erit $R : MZ = D.MR : AB.AD$. Atqui $MZ : MX = NP : NM = \int NMP$: rad. ergo ex æquo resist. R, ad solicit. centr. $MX = D.MR.\int NMP : AB.AD$. radium.

Item quia $MX : ZX = MN : MP =$ rad. : $\int MNP$, erit iterum ex æquo resistentia R ad solicitat. gravitatis tangentialem $ZX = D.MR.\int NMP : AB.AD.\int MNP = D.MR.$ tang. $NMP : AB.AD$. radium.

Corollarium IV.

612. Si solicitationes gravitatis MX diriguntur ad centrum positione datum B, qui est casus harum solicitationum seu virium centripetarum, qualis hactenus geometris considerari consuevit, tota curva NB contrahetur in punctum B, ejusque evolutæ MF, $m\mu f$ abibunt in arcus circulares concentricos ex centro B descriptos, propterea singulæ NM, BI & BF, immò & GB, æquales fient, coincidente tunc curva DE respectivo arcui hyperbolico DK. Adeoque formula numeri VI. §. 607. etiam mutabitur in $M = A.AR.AB^2.\int \overline{BAC}^3 : MR.MN^2.\int \overline{NMP}^3 = A.AR.BC^2.MN : AB.MR.NP^3 = BC^2.vA^2.MN : MR.NP^3$, quia quadratum velocitatis in A, seu $vA^2 = A.BC.AR : AB$. Hæc postrema formula pro solicitationibus centralibus in vacuo, & uno duntaxat existente centro solicitationum, egregie conspirat cum eâ, quam supra (§. 156.) jam demonstratam dedi, simulque retuli citato loco Clarissimos Geometras Joh. Bernoullium, Abr. Moyvræum, & Guid. Grandum in similem canonem incidisse, sed

Fig. 138. & 140.

ſed alia via. In figura enim 37, lineæ $N\alpha$, AI, DR, DN, nZ, Dq, idem ſignificant ac in figura 138. litteræ A, vA, & lineæ reſpectivæ BC, NM, MR & NP.

Scholion I.

Fig. 140. 613. Sit nunc curva AM ſpiralis logarithmica, in qua ſolicitationes gravitatis MX ad polum B dirigantur, ita ut puncta N, B unum idemque ſint, unde, quia ſinguli anguli BAC, NMP, æquales ſunt, ratio linearum MP, MN & NP ubique data erit. Ponatur denſitas aëris in M, ut $h.MP:MN^s$, ubi h quemlibet numerum ſignificat, adeòque erit, propter rationem datam, MP ad MN reciproce, ut MN^{s-1}, diſtantia mobilis à centro N vel B; poſitâ itaque $D=h.AB.AD.MP:MN^s$, invenietur $D.Mm=QY.Qq=ST^2.Ss=h.IK.Ii$, & conſequenter $ASTD=h.AIKD$, ac proinde $AB:SB=BI^b:AB^b=MN^b:AB^b$, & $AB^2:SB^2=MN^2:AB^{2b}$.

Porrò, quia ſinguli anguli BAC, NMP, &c. & per conſequens eorum ſinus, æquales ſunt, & radii oſculi AR, MR in A, M diſtantiis AB, MN proportionales, erit nunc (§. 612.) $M:A(=AR.AB^2.\sqrt{BAC^3}:MR.MN^2.\sqrt{NMP^3})=AB^3:MN^3$. Atqui (§. 607. num. VI.) erat $MX:M(=AB^2:BS^2)=MN^{2b}:AB^{2b}$; ergo ex æquo $MX:A=MN^{2b-3}:AB^{2b-3}$. *Eſt propterea vis centripeta, id eſt, ſolicitatio centralis MX in logarithmica ſpirali ubique, ut* MN^{2b-3}. ſi corpus deſcendendo arcum AM deſcribit; & reciproce, ut MN^{2b+3} ſi aſcendendo incedit per M verſus A ſuper arcum MA.

Hinc, quia generaliter eſt (§. 611.) $R:MX=D.MR.\sqrt{NMP}:AB.AD.$ rad. & D (ſecundùm hypotheſin) $=h.AB.AD.MP:MN^2$; erit $R:MX=h.MR.MP.\sqrt{NMP}:MN^2.$ rad. (vel, quia NP eſt ad NM, ut $\sqrt{NMP}:$ rad. & rec-lum NP. MR æquale MN^2) $=h.MP:MN$, id eſt, ratio R ad MX erit ubique conſtans ſeu data.

Ergo, ſi $h=\frac{1}{2}$, erit MX reciproce in duplicata ratione diſtantiæ MN, & reſiſtentia R ad ſolicitationem centralem MX, ſicut $\frac{1}{2}MP$ ad MN.

Sin verò h fuerit $=1-\frac{1}{2}n$, reperietur MX reciproce, ut MN^{n+1}; & $R:MX=(1-\frac{1}{2}n).MP:MN$.

Co-

Corollarium V.

614. Si solicitationes centrales diriguntur ad centrum infinite distans, ut in fig. 141. ita ut directiones AB, MN parallelæ, axique EF curvæ EMA perpendiculares sint, rectæ MN, AB hoc casu infinitæ atque adeò æquales erunt, elisis ergo AB^2, MN^2 ex canone paragraphi 612. habebitur $M : A = AR.\sqrt{BAC^3} : MR.\sqrt{NMP^3}$, vel $M = A.AR.\sqrt{BAC^3} : MR.\sqrt{NMP^3}$. Fig. 141.

Sed si directiones solicitationum MX axi EF æquidistantes sunt, reperietur eo casu $M : A = AR.\sqrt{DAa^3} : MR.\sqrt{QMO^3}$; ducta scilicet MO parallela EF.

Et quia (§. 607. num. VI.) generaliter inveniebatur $MX : M = AB^2 : SB^2$ in casu descensus vel $MX : M = SB^2 : AB^2$ in casu ascensus mobilis, habebuntur ipsæ MX utroque casu hujus corollarii, scilicet cum earum directiones axi EF normales, & cum eidem parallelæ sunt.

Corollarium VI.

615. Iisdem positis, & gravitate uniformi, facili negotio invenietur secundùm quam legem densitatem aëris variare oporteat, ut projectile datam curvam in medio resistente describat. Sit enim A gravitas uniformis in aëre resistente, atque inter asymptotas AF, Ff descripta hyperbola TDL quacunque, fiat ubique SF^2 ad AF^2 ut $AR.\sqrt{FAC^3} : MR.\sqrt{NMP^3}$, in casu descensus, vel $AF^2 : SF^2 = AR.\sqrt{FAC^3} : MR.\sqrt{NMP^3}$, eritque ubique $D = \pm ST.Ss : Mm$. ubi signum + est pro descensu & − pro ascensione. Demonstratio hujus ex præcedenti corollario facilis est. [Fig. 141.

Scholium II.

616. Sit AME quadrans circuli cujus centrum in F vel H, adeoque $AR = MR = MF$, & $AR.\sqrt{FAC^3} : MR.\sqrt{NMP^3} = AF^3 : MG^3$. Ergo $AF^2 : SF^2 = AF^3 : MG^3$, & per consequens $2.ASTD = 3.AOLD$, vel $2.ST.Ss = 3.OL.O\omega$, & $D (= ST.Ss : Mm) = 3OL.O\omega : 2M\mu$, vel (propter triangulorum $M\mu\mu$ & MHG similitudinem) $= 3OL.GH : 2AF = 3OL.OF.GH : 2.OF.AF = 3AF.AD.GH : 2OF.AF = 3AD.GH : 2OF = 3AD.$ tang. AFM : 2 rad. Est ergo den-

densitas in M, ut tangens anguli AFM. Vel etiam $D = 3AD.\ rad.^2 : 2.\ tang.\ MFE$, vel $NMP = 3.\ AF.\ AD.\ rad.^2 : 2.\ AF.\ tang.\ NMP$.

Est verò $R : ZX$ (§. 611.) $= D.\ MR.\ tang.\ NMP : AB.\ AD.\ rad.$ (vel hoc loco, ubi AF assumenda loco AB in fig. 138.) $= D.\ AF.\ tang.\ NMP : AF.\ AD.\ rad.$ (seu substituto valore ipsius D) $= 3AF.\ tang.\ NMP : 2AF.\ tang.\ NMP = 3 : 2$. Propterea etiam $R : MX = 3\int MFA : 2\ rad. = 3.\ GH : 2.\ MF$. Quæ omnia inventis Bernoullianis (Act. Lipsi. 1713. mens. Febr. pag. 93.) & partim Newtonianis conformia sunt, etsi ex alio fundamento deducta. Loquor de casu descensus, quandoquidem casus ascensus in circulo impossibilis est, ut eleganter ab Illust. Newtono animadversum; etenim foret hoc casu resistentia ad gravitatem, ut $-3GH$ ad $2MF$, id est, ut magnitudo privativa ad positivam.

Corollarium VII.

617. Corollarium VI. nobis etiam præbet fundamentum inveniendi constructionem curvæ projectilium in aëre uniformis densitatis, sed resistentis in duplicata ratione celeritatum mobilis, posita scilicet, ut ibi, gravitate etiam uniformi & directiones ejus supponendo parallelas. Nam facta quadam $Q = \int -2dmV(1 + mm) : m^3$, erit $y = AF + \int dm : m^3Q$, & $FG = x = \int dm : mmQ$.

Scholion III.

618. Problema, quod in particulari tantum hypothesi resistentiarum aëris secundùm compositam rationem densitatum & duplicatæ velocitatis, solutum exhibuimus, generalius perfici poterat pro composita ratione resistentiarum ex ratione densitatum & quacunque multiplicata vel submultiplicata celeritatum mobilis, idque tam levi opera, posita præcedenti problematis analysi geometrica, ut nulla mutatio in ea facienda sit, præterquam in sola curva $B\beta$, quæ in hypothesi generaliori non amplius est scala densitatum aëris, sed curva alterius generis, quod paucis est ostendendum.

Fig. 138. 619. Esto curva βY ejus naturæ, ut existente ejus abscissa BQ æquali ubique arcui curvæ AM, ordinata ejus QY sit ad R resistentiam aëris in curvæ puncto M, sicut rectangulum datum AB. AD ad BV^2 quadratum velocitatis acquisitæ in M, & hæc curva $B\beta$ generaliter usurpanda est loco scalæ densitatum aëris antea in analysi pro-

problematis adhibita, & reliqua sunt absolvenda prorsus ut in §. 607, scilicet areæ $B\beta YQ$ novæ curvæ βY æquale faciendum quadrilineum hyperbolicum ASTD; eritque etiam nunc celeritas acquisita in M, seu $vM = AB^2 . vA$. sin. BAC : GB. SB. $\int$NMP, prorsus ut supra (§. 607. num. v.) reperiebatur, hoc solo cum discrimine quod SB nunc alius magnitudinis quam citato loco futura sit, quæ adhuc quæratur. Ad abbreviandum assumatur $V = AB . vA$. sin. BAC : GB. sin. NMP, eritque V velocitas, quam mobile in vacuo acquisivisset ex descensu super arcu curvæ AM in ejus extremitate M, & vM vel $BV = AB . V : SB$. in casu descensus, vel $BV = SB . V : AB$ in casu ascensionis.

620. Jam, quia (constr.) $B\beta YQ = ASTD$, & $B\beta yq = AstD$, erit $QY . Qq = ST . Ss$, sed $QY = AB . AD . R : BV^2$ (vel subrogando valorem $AB . V : SB$, ipsius BV) $= AD . R . SB^2 : AB . V^2$, & $Qq = Mm$, erit $AD . R . SB^2 . Mm : AB . V^2 = ST . Ss$, vel omnia ducendo in SB, $AD . R . SB^3 . Mm : AB . V^2 = SB . ST . Ss = AB . AD . Ss$, atque adeo hinc elicietur $R . Mm : V^2 = AB^2 . Ss : SB^3$. Adeoque omnia $(R . Mm : V^2) =$ omnibus $(AB^2 . Ss : SB^3)$ id est $= (SB^2 - AB^2) : 2SB^2$, adeoque designando omnia $(R . Mm : V^2)$ per $\int R . Mm : V^2$, erit $2\int R . Mm : V^2 = (SB^2 - AB^2) : SB^2$. Hinc $SB^2 : AB^2 = 1 : 1 - 2\int R . Mm : V^2$; pro casu descensus.

621. *Pro casu ascensionis loco ipsius* BV (§. 619.) substituere oportet *SB. V : AB in* QY, quæ pro utroque casu est $= AB . AD . R : BV^2$, fietque $QY . Qq = AB^2 . AD . R . Mm : SB^2 . V^2 = ST . Ss$, vel ducendo iterum singula in SB; $AB^2 . AD . R . Mm : SB . V^2 = SB . ST . Ss = AB . BD . Ss$, hinc dividendo per $AB . AD$, invenietur $AB^2 . R . Mm . V^2 = SB . Ss$. Propterea omnia $AB^2 . R . Mm : V^2 =$ omnibus $SB . Ss = \frac{1}{2}SB^2 - \frac{1}{2}AB^2$, ergo $2AB^2 . \int R . Mm : V^2, = SB^2 - AB^2$. Atque adeò $SB^2 : AB^2 = 1 + 2\int R . Mm : V^2$. In casu ascensionis.

Hi sunt duo generales canones pro quacunque resistentiæ specie, sive hæc resistentia pendeat à velocitatibus & densitate aëris, sive non.

622. Sed, si resistentia sit in composita ratione ex densitate aëris & quacunque multiplicata ratione celeritatis, id est, si R sit ut $D . BV^b$, ubi b est numerus quilibet pro libitu assumptus. Vel, ad supplenda homogenea, sit $R = D . BV^b : AB^b$. Jam, quia (§. 620.) $AB^2 : SB^2 = 1 - 2\int R . Mm : V^2$, pro casu descensus erit, sumtis utrinque quantitatum elementis $-2AB^2 . Ss : SB^3 = 2R . Mm : V^2$, vel (substituto valore ipsius R & divisa æqualitate per -2) proveniet $AB^2 . Ss :$

$Ss : SB^{3} = V^{b-2} D. Mm : SB^{b}$, atque adeò $SB^{b-3}. Ss = V^{b-2} D. Mm : AB^{2}$. Ergo omnia $V^{b-2} D. Mm : AB^{2}$, id est, $\int V^{b-2} D. Mm : AB^{2}$, = omnibus $SB^{b-3}. Ss$, id est, $= \frac{1}{b-2} SB^{b-2} - \frac{1}{b-2} AB^{b-2}$; atque adeò hinc elicitur canon $SB = \overset{b-2}{\sqrt{}}(AB^{b-2}, + \overline{b-2} \int V^{b-2} D. Mm : AB^{2})$. Pro descensu corporis in curva AM. Simili modo reperietur $SB = AB : \overset{b-2}{\sqrt{}}(AB^{b-2}, + 2 - b \int V^{b-2} D. Mm : AB^{2})$ pro casu ascensionis, cum mobile incedit ex M versus A.

623. Ut ergo, quæ in solutione hujus problematis sparsim inventa sunt, omnia conjunctim in conspectum producantur, num. v. §. 607, præbet velocitatem in $M = AB. V : SB$ & $SB. V : AB$, hoc in casu ascensionis illud in descensu mobilis, ubi V est (§. 619.) $AB. vA. \int BAC$ applicatum ad $GB. \int NMP$, hoc est, expressio celeritatis mobilis ad punctum curvæ M delati in vacuo. Propterea est celeritas in aëre mobili acquisita in quolibet curvæ puncto M ad celeritatem ejusdem in vacuo in eodem curvæ puncto, ut AB ad SB; & celeritas mobili residua in M à medio resistente ad celeritatem in vacuo, ut SB ad AB, cum in curva ascendit. Et num. VI. §. 607. Est solicitatio centralis in aëre ad solicitationem gravitatis in vacuo mobili versante in utroque casu in quocunque curvæ puncto M, ut AB^{3} ad SB^{3}, *cum mobile curvam AM descendendo describit*, vel, sicut SB^{2} ad AB^{2}, si ascendendo, eundo per M versus A. Ipsæ vero V & M, scilicet velocitas in vacuo & solicitatio centralis respectu curvæ puncti M, generalissime jam repertæ sunt, scilicet ut paulo ante $V = AB. vA. \int BAC : GB. \int NMP$, & $M = A. AR. AB^{3}. \overline{\int BAC^{3}} : MR. GB^{2}. \overline{\int NMP^{3}}$, in qua formula GB, concessis figurarum curvilinearum quadraturis, semper dantur. Ipsæ vero SB in paragraphis 620, 621 & 622. etiam generaliter exhibitæ sunt. Ex solutione nostra generalissima innumera alia corollaria potuissent deduci, quæ tamen brevitatis studio suppressi.

CAPUT XXI.

De Motu Navium vento impulsarum.

MOtus Navium, hoc est eorum celeritates, spatia percursa & tempora lationis, eadem methodo & ex iisdem principiis deduci

duci possunt, quibus in præcedentibus capitibus motus corporum in mediis resistentibus definivimus. Est enim venti velo allabentis virtus spectanda instar solicitationis acceleratricis navi continue applicatæ, & aquæ, in quibus navis incedit, instar medii resistentis. Verumtamen motus navium nonnihil difficilius assignantur quam in præcedentibus motus corporum in medio resistenti incedentium, quia præter motus absolutos etiam directiones, tum solicitationum acceleratricium, seu lineæ, secundùm quas vela impressiones venti excipiunt, tum etiam itinera navis permanentia, quæ à figuris navium pendent, primùm determinanda sunt. Quæ tamen omnia, ut dictum, ex principiis hactenus à nobis explicatis derivari queunt.

DEFINITIONES.

I. Iter navis manens A*a* (Gallis *la Route du Vaisseau*) dicatur linea, quam navis BC vento impulsa in mari permanenter describit, absque rotationibus circa se ipsam. Fig. 142.

II. Axis navis esto spina carinæ BAC cui inseritur stereobates mali principis (Gallis *la Quille*).

III. Deviatio navis (Gallis *la Derive*) est recta *a*K, ex quolibet itineris manentis puncto *a* ad axem navis productum CK perpendiculariter demissa.

IV. Angulus deviationis (*l'Angle de la Derive*) est angulus *a*AK, quem iter navis permanens A*a* cum axe navis GB continet versus K.

PROPOSITIO LXXVII. Theorema.

624. *Si navis* ABC *itinere permanenti* Aa *feratur, media directio* AG *impressionum venti in velo* DAE, *vel in velis, si plura adsint, in directum posita erit cum directione* AO *aquæ resistentis, & secundùm directiones lineæ* Aa *parallelas lateri navis* BDC *clavoque in* C *allabentis.* Fig. 142.

Si negas, sit media directio impressionis venti secundum mediam directionem velariæ DAE recta AF diversa à linea AM, quæ est prolongatio mediæ directionis AO aquæ, navi BDC impingentis dum incedit itinere A*a*. Exponat AF impressionem venti in hac linea, & AH resistentiam aquæ in directione AO, & demittatur ad OA protractam in M, perpendicularis FG, & in AG sumatur GI = AH. Quibus positis, quia viribus AF æquipollent laterales AG & GF,

& à vi AG auferenda est vis aquæ resistentis AH (constr.) GI, venti efficacia ad navim movendam æquipollebit duabus viribus residuis AI & FG; unde, quia FG nulla contraria vi retunditur, ideo suum effectum edet, propterea vi FG, juxta alteram AI, quæ motum navis accelerat, navis circa se ipsam convertetur secundum ordinem literarum K, F, G, dum ea progressivo motu fertur in recta A*a*, ergo hæc linea non est iter navis manens, contra hypothesin.

Corollarium.

625. Adeoque ex media directione impressionum venti in velis innotescere potest media directio aquæ navi resistentis, & vice versa. Et ex aquæ resistentis media directione ope Propos. L. Lib. hujus secundi, invenietur iter navis permanens. Mediæ vero directiones venti vela inflantis obtineri possunt eo fere modo, quo §. 474. ostensum est.

Propositio LXXVIII. Problema.

Fig. 142. 626. *Datis directione & celeritate venti velo* DAE *impingentis, atque adeò media directione veli* AM, *definire celeritates navis* BDC *itinere permanente* A*a in aqua stagnante seu mari latæ.*

I. Quia (secundùm hypothesin) AM est media directio venti velo DAE impingentis, ejus prolongatio AO (§. 624.) dabit mediam directionem aquæ in directione *a*A, vel huic parallela navi BDC allabentis, adeo ut, durante motu navis, angulus MA*a* constanter idem maneat.

Sint ergo ratio A*a*: AM, seu sinus compl. anguli MAK ad sin. compl. ang. *a*AK, ut *b* ad *a*; & celeritas venti, juxta mediam directionem AM initio motus, *a*, celeritas verò navis in termino *a* cujusvis spatii emensi A*a*, *u*; adeoque *au*: *b* exponet celeritatem juxta AM, qua scilicet navis insequentis venti velocitati initiali sese subducit, ut adeò celeritas, quâcum in velum agit, juxta AM eo momento, quo navis in suo itinere velocitatem *u*, acquisivit, futura sit $a-, au:b$; adeoque $(a,-au:b)^2$. M exponet impressionem venti in velo secundum AM, ubi M inveniri potest ope §. 474. Aquæ verò resistentis impressio, secundum directionem AO, est N*uu*, ubi N per Propos. L. etiam inveniri potest, si non algebraïcè sal-

saltem transcendenter & per approximationes. Propterea est $(a, -au:b)^2 . M - N . uu$ solicitatio acceleratrix navis.

II. Esto porrò $(a, -au:b)^2 . M, - N . uu = N . SL^2$, ubi SL est ordinata alicujus curvæ CLP sequenti modo inveniendæ, existentibus AM, b; MS, u, Mn ipsi AM perpendiculariter insistens, a. His positis, & quia $a, -au:b = (b-u).a:b = AS . Mn : AM$ erit $(a, -au:b)^2 . M = AS^2 . Mn^2 . M : AM^2 = AS^2 . MN^2 . N : AM^2 = N . ST^2$, scilicet si MN fuerit ad Mn in subduplicata ratione M ad N, atque ducta sit AN, ita ut triangula AST & AMN similia existant. Hinc, $(a, -au:b)^2 . M - Nuu = N . ST^2 - N . SM^2 =$ (secundùm hypothesin) $N . SL^2$, atque adeò $ST^2 - SM^2 = SL^2$. Ducatur MD angulum rectum AMN bisecans, & ex D demittatur DC normalis ad AM, & ob angulum semirectum CMD erunt æquales DC & CM, perinde ac SM & SV; propterea habetur $SL^2 = ST^2 - SM^2 = ST^2 - SV^2$. Atqui divisa qualibet intercepta TV bifariam in R ductaque DR, eaque producta usque ad occursum B cum recta AM producta itidem quantum opus est, & hæc DR etiam per medium O ipsius MN transibit; ac $ST^2 - SV^2$ erit $= 4SR . VR$. Ergo etiam $SL^2 = 4SR . RV$. Verùm propter $SR : MO = SB : MB$, & $RV : OM = CS : CM$ erit per compositionem rationum $SR . RV : MO^2 = 4SR . RV$, id est, $SL^2 : NM^2 = SB . SC : MB . MC = SX^2 : MQ^2$, descripto scilicet super diametro CB semicirculo CQB; *habemus ergo* $SL^2 : NM^2 = SX^2 : MQ^2$; vel permutando $SL^2 : SX^2 = NM^2 : MQ^2$, seu $SL : SX = NM : MQ$; idcirco ordinatæ quæque homologæ curvæ quæsitæ & semicirculi sunt in data ratione, atque adeò curva CLP est ellipsis, cujus ordinata MP æquatur MN.

III. Sint nunc Aa spatium certo tempore navi percurrendum, au elementum illius spatii & $MS = u$ celeritas navi acquisita in termino spatii Aa, Ss velocitatis elementum, & quia (num. 1. hujus) invenimus solicitationem acceleratricem navis esse, ut $N . SL^2$, ponamus eam $= N . SL^2 : N . D$, vel $= SL^2 : D$, ubi D, seu data magnitudo, assumitur ad supplenda homogenea, eritque (§. 484.) momentum solicitationis acceleratricis seu rec-lum $SL^2 . au : D$, ex hac solicitatione $SL^2 : D$ in elementum spatii au, æquale momento celeritatis acquisitæ $MS . Ss$ seu rec-lo ex hac celeritate MS in suum elementum Ss. Hinc, cum sit $SL^2 . au : D = MS . Ss$ vel $SL^2 . au = D . MS . Ss$, erit $MS . Ss : SL^2 = au : D$. Est verò etiam $SL^2 : SX^2 = MP^2$ vel $NM^2 : MQ^2$, ergo ex æquo $MS . Ss : SX^2 = NM^2 . au : D . MQ^2$.

Et

Fig. 143.

Et, si AK fiat ubique ad Aa, ut MN^2 ad D. MQ, erit $Kk : aa = NM^2 :$ D. MQ, & $NM^2 : aa =$ D. MQ. Kk, atque MS. $Ss : SX^2 (= NM^2 . aa :$ D. $MQ^2) =$ D. MQ. $Kk :$ D. $MQ^2 = Kk :$ MQ. Et, si denique SX ponatur media proportionalis inter MQ & quandam Z, ita ut Z futura sit $= SX^2 :$ MQ, fiet MS. $Ss :$ Z. MQ (seu SX^2) $= Kk :$ MQ; atque adeò Z. $Kk =$ MS. Ss, & problema præcise ad casum propositionis LXVII. hujus secundi Libri reductum est, quandoquidem Z est, ut quadratum ordinatæ SX in circulo, & jam AK consideranda instar spatii mobili transmittendi. Propterea, si juxta præceptum citatæ propositionis rectæ $C\beta$ & $C\delta$ sint tangentes angulorum $CZ\beta$, $CZ\delta$ dimidiorum ipsorum CZX & CZQ, erit (§. 549) AK = log. (MQ : SX) − MZ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. Et, quia (constr.) AK : $Aa = MN^2 :$ D. MQ, invenietur $Aa =$ D. MQ. log. (MQ : SX) : $MN^2 -$ D. MQ. MZ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. MN^2, in logarithmica, cujus subtangens est MQ.

Per secundam partem propositionis ejusdem (§. 549.) erit tempus per spatium AK = log. ($C\delta : C\beta$) : CZ; atqui tAK : $t Aa =$ AK : $Aa =$ $MN^2 :$ D. MQ, ergo tempus per spatium Aa navi transmissum erit D. MQ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. MN^2. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

627. *Quia solicitatio acceleratrix navis est ubique ut* SL^2, & quia SL in puncto C nulla est, ipsa MC designabit maximam velocitatem, quam navis acquirere queat. Est vero propter triangula similia ACD & AMN & propter CD = CM; AC : CM (vel DC) = AM : MN = AM$\sqrt{}$N : MN$\sqrt{}$N (aut, quia nM : NM (constr.) = $\sqrt{}$N : $\sqrt{}$M atque adeo rec-lum NM.$\sqrt{}$N æquale nM$\sqrt{}$M) = AM$\sqrt{}$N : nM$\sqrt{}$M, adeoque componendo AM : CM = AM$\sqrt{}$N + nM$\sqrt{}$M : nM$\sqrt{}$M, id est, b : CM = $b\sqrt{}$N + $a\sqrt{}$M : $a\sqrt{}$M, atque adeò MC = $ab\sqrt{}$M : $a\sqrt{}$M + $b\sqrt{}$N. Nam (constr.) est AM = a, & nM = b.

Corollarium II.

628. Si D est finitæ magnitudinis, tempus, quo navi maxima celeritas MC acquiritur, erit infinitum, perinde ac spatium Aa hoc tempore percurrendum, ut id jam alibi (§. 550.) quadantenus est ostensum.

Sed si D est indefinite parva, cum spatium tum etiam tempus, quo

quo id mobile transmittens celeritatem maximam MC acquirit, erunt finitæ magnitudinis.

Scholion.

629. Quoniam navi plerunque tempore finito maxima celeritas acquiritur, ideo in hisce casibus magnitudo D, ad supplenda homogenea assumta, semper erit indefinite parva; sed hoc non obstante proportiones inter spatia transmissa & inter tempora per logarithmos semper exhiberi possunt.

SECTIO V. ET ULTIMA,

Continens Miscellanea de motu circulari fluidorum, de motu aëris in producendo sono, & de motu interno fluidorum.

CAPUT XXII.

De motu circulari fluidorum.

Postea quam præcipua capita ad motum fluidorum rectilineum attigimus, contemplandus supereſt motus circularis eorundem fluidorum, idque tanto magis quanto majori cum cura nonnulli ex præstantissimis philosophis Geometris difficiliora naturæ phænomena inde derivare conati sunt.

PROPOSITIO LXXIX. Theorema.

630. *Si globus Terraqueus æquabili motu circa axem suum conversus materia fluida in tota sua superficie circundatus esset; fluidi vel potius totius globi aquei superficies sphærica manere non posset, sed figuram indueret sphæroïdis cujusdam, cujus axis minor futurus esset diametro æquatoris.*

Sit PEpA globus fluidus revolvendus circa axem P*p*, cujus poli sint P, *p*, & recta AE axi P*p* normalis per centrum C transiens diameter æquatoris. Probari debet fore, ut manens corporis fluidi & circa P*p* in gyrum acti superficies sit sphæroidea, cujus P*p* axis minor sit diametro æquatoris AE. Fig. 144.

Demonstr. Ex centro corporis fluidi C exeant tubi CP, CE & CD ad centrum C inter se communicantes & pleni liquoris seu fluidi, quorum primus PC axi P*p* congruat, & CE eidem axi perpendicularis sit, tertius verò CD ad ambos ut libet inclinatus. Si moles fluida in quiete stet, constat (§. 251.) ejus superficiem sphæricam fore, atque adeò CE = CD = CP. Sed cogitemus jam eam æquabili motu revolvi circa P*p*, singulæ fluidi partes E, I, G, D, &c. suas revolutiones simul absolvent, atque adeò earum celeritates radiis CE, CI, HG, FD, &c. proportionales erunt.

Verùm, quia cum omni motu circulari conatus centrifugus mobilis circulantis conjunctus est, & ejusmodi conatus centrifugi radiis proportionales sunt circulorum, quos mobilia in orbem lata pari tempore describunt, conatus centrifugi omnium partium tubi DC minores erunt omnibus conatibus partium tubi EC; unde ii conatus centrifugi conatibus gravitatis contrarii sunt, atque adeò pressio cujusque columnæ fluidæ æquivalet excessui, quo conatus gravitatis, seu pondus absolutum columnæ, excedit conatum ejus centrifugum, & si, existentibus DC & EC æqualibus, excessus ponderis EC supra ejus conatum centrifugum minor est excessu ponderis DC supra ejus conatum centrifugum, erit pressio columnæ EC minor pressione columnæ DC, unde, cum communicantes sint, non poterunt in æquilibrio consistere, sed debilior pressio columnæ EC cedet fortiori DC, atque adeò aqua in columna EC attolletur, adeò ut EC major fiat quam DC. Pari argumento conficitur, columnam DC majorem esse quam PC, quandoquidem hæc columna PC utpote axi P*p* congruens, motum revolutionis massæ fluidæ non participat, neque adeò ullo conatu centrifugo pollet, pondere suo æquat differentiam, qua pondus columnæ DC excedit ejus conatum centrifugum. Sunt ergo CE major quam CD, & hæc major quam CP vel C*p*, ac proinde figura *p*EPA circa P*p* in gyrum acta producit sphæroidem, cujus P*p* erit axis minor, & massa fluida hujus sphæroidis figuram induet. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

631. Hinc gravia circa ejusmodi sphæroidem non tendunt ad ejus centrum, ergo nec ad telluris centrum tendunt, si in primordiis rerum terra materia fluida & gravi constiterit, & in se ipsam converti cœperit. Sit enim in altera figura PEA figura telluris fluidæ,

Fig. 145.

dæ, item filum NM cum annexo pondusculo M, & hoc filum in N fixum ope pondusculi M in ſitum ſuperficiei PDE normalem ſeſe componet. Nam corpusculum M deſcendet quantum poteſt, tantum autem deſcendere poteſt, usque dum ſuperficie PDE viciniſſimum ejusque directio NM eidem ſuperficiei perpendicularis fuerit. Atqui NM, vel ei parallela RDQ curvæ perpendicularis in D, angulo DNM à recta DC ex puncto ſuſpenſionis N ad centrum C ducta, deflectit, ut adeò hinc appareat pondusculum M non tendere ad centrum ſphæroidis EPA.

Corollarium II.

632. Propterea ND erit ad lineolam DM æquatoris diametro CE parallelam, ſicut pondus abſolutum corporis M ad ejus conatum centrifugum in D. Nam ſi ND exponit pondus corporis, lineola DM exponet vim, qua à directione ND retrahitur detineturque in directione NM. Vi enim ND æquipollent laterales NM & DM, & ceſſante motu converſionis circa axem P*p* pendulum NM ſe componet in ſitum ND, unde, ut detineatur in poſitione NM, ad id alia vi laterali juxta DM agente opus eſt; hæc verò vis lateralis eſt conatus centrifugus ex circulari motu ſphæroidis oriundus, qui ſe *in mobile exſerit, ſecundùm directionem LDM* radii illius circuli, quem ſphæroidis punctum D una converſione circa P*p* deſcribit; ac, per conſequens, gravitas corpusculi M ſe habet ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in D, ſicut ND ad DM.

Corollarium III.

633. Si pondus corpusculi M ſit ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in E, ut P ad N, & recta DQO curvæ PDE perpendicularis in D, erit LO : CO = P. EC : N. DC. Nam gravitas eſt ad vim centrifugam in E, ſicut P ad N, & conatus centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ut EC ad DL, ergo ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, id eſt (§. 632.) ND : DM, vel DC : CQ = P. EC : N. DL, adeoque etiam N. DC : N. CQ = P. EC : N. DL, vel permutando N. DC : P. EC = N. CQ : N. DL = CQ : DL (vel propter parallelas EC, DL) = CO : LO, ergo invertendo fit LO : CO = P. EC : N. DC.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [391] - 363
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXXX. Problema.

Fig. 146. 634. *Posita proprietate curvæ* PDE *corollario præcedente* (§. 633.) *elicita, construere curvam, ejusque speciem definire.*

I. Sit PDE curva quæsita, & CB rectangulum ei circumscriptum; & hujus rectanguli latera producantur in A & M, ita ut BA = BP = EC, & PM = PC, & jungantur PA ac CM. Dein in AE producta sumatur EF ad EC in data ratione P ad N, ductaque per F recta FT parallela EC protendatur EF in G, ita ut FG = FT = EC. Sumto postea ubilibet curvæ elemento *Dd*, ac centro C per elementi *Dd* terminos descriptis arcubus circularibus DK, *dk*, agantur per K, *k* parallelæ KS, *ks* ipsi PT. Quibus præparatis & ducta TG, erunt

II. Propter quadrata DL, LC æqualia quadrato DC vel TR, etiam triangula, quæ sunt quadratorum dimidia, scilicet PIH & CLN simul æqualia triangulo TRS, & triangula *Pih*, *Cln* simul æqualia triangulo *Trs*; idcirco, facta subductione minorum ex majoribus, erit trapez. *h*I − trapez. N*l* = trapez. R*s*, vel etiam rec-lum *g*I − rec-lo N*l* = rec-lo S*r*, quia coeuntibus punctis D, *d* recensita trapezia & respondentia rectangula in rationes æqualitatis evanescunt.

III. Quia (secundùm hypothesin) DO curvæ normalis est, triangula elementaria *Dde* & DLO similia erunt, atque adeò LO : LD (= *de* : De) = I*i* : L*l*, & LD : LC = HI : LN, ergo ex æquo, LO : LC = HI. I*i* : LN. L*l*, vel convertendo LO : CO = HI. I*i* : HI. I*i* − LN. L*l* (seu num. 11. hujus) = HI. I*i* : RS. R*r*. Atqui (§. 633.) LO : CO = P. EC : N. DC, ergo P. EC : N. DC = rec-lum H*i* : rec-lum R*t*, sed, quia EF : FG (secundùm hypothesin) = P : N, atque adeo P. FG = P. EC = N. EF ; erit N. EF : N. DC = EF : DC (RT) = rec-lum K*r* : rec-lo R*t*, ac per consequens etiam H*i* : R*t* = K*r* : R*t*, hinc rec-lum HI. I*i*, seu H*i* æquatur ubique rec-lo KR. R*r* seu K*r*; ergo omnia H*i*, quæ in trapezio AHIB continentur, æquantur omnibus K*r*, quæ in rec-lo EKRF; id est, trapezium AHIB = rec-lo EKRF. Hinc assumto quolibet trapezio AHIB in triangulo APB, eique rec-lum EKRF æquale fiat, & arcus KD centro C intervalloque CK descriptus ordinatæ HI productæ ad partes I occurret in curvæ quæsitæ puncto D; ut adeò hinc constet, curvam PDE algebraïcam esse, cum omnia ejus puncta geometrice inveniri queant. Quod erat inveniendum.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [392] - 364
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXXXI. Problema.

635. *Deducere conſtructionem curvæ* PDE *præcedente propoſitione exhibitam ex principio æquilibrii canalium, ſeu columnarum fluidi* DC, PC *ſecundum explicationem propoſitione* LXXIX. *traditam.*

Poſita conſtructione propoſitionis præcedentis, quia EF ad FG vel AB eſt ut P ad N, ſeu ut gravitas ad conatum centrifugum in E, conatus vero centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ſicut EC ad DL, ſeu BP ad IP, id eſt, ſicut AB ad HI; erit ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, ſicut EF ad HI, adeò ut HI ſemper ſignificet conatum centrifugum particulæ D in canali DL vel DC, adeoque omnes ordinatæ HI, quæ in triangulo HIP continentur, ſeu hoc ipſum triangulum, exponet conatum centrifugum totius canalis DL vel DC. Atqui exceſſus ponderis columnæ DC ſupra pondus columnæ PC æquivalet conatui centrifugo columnæ DC vel DL (harum enim duarum conatus centrifugi in ſingulis punctis ab axe PC æqualiter diſtantibus æquales, atque adeò ipſarum columnarum DC & DL conatus centrifugi æquabuntur), ergo rec-lum KVXR æquale eſt triangulo HIP, quandoquidem EF vel KR exponit gravitatis ſolicitationem, & facta CV = CP recta KV, differentiam, quâ columna DC excedit alteram PC & (§. 31.) volumen KV *in* gravitatem EF ſeu KR *ductum*, exponit ejus pondus, id eſt, exceſſum ponderum DC & PC. Propterea erit etiam totum triangulum PAB æquale rec-lo VF, ac per conſequens ablatis ex hisce ſpatiis æqualibus PHI & VX, remanebit trapezium AHIB = rec-lo EKRF, ut in propoſitione antecedenti reperiebatur.

Corollarium I.

636. Quoniam ergo triang. PBA = EKRF, erit EF : ½AB (= P : ½N) = EC : EV = CE : CE − CP, erit convertendo CE : CP = P : P − ½N.

Corollarium II.

637. Si dicantur CE, *a*; PC, *b*; CL, *x*; LD, *y*, & EF erit $ap : n$, quam vocabimus cum Hugenio *f*, & quia (§§. 634, & 635.) $\frac{1}{4}AB^2 = EV \cdot EF$, fiet analytice $af - fV(xx + yy) = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}yy$, quæ

ab asymmetria liberata præbet $y^4 = 4ffyy - 4afyy + 2aayy - 4aaff + 4a^3f - a^4 + 4ffxx$. Quæ ipsissima est æquatio, in quam Illustr. Hugenius incidit, calculum suum fundans in æquilibrio canalium DC & EC, non verò, ut nos fecimus in præsenti propositione, in æquilibrio columnarum PC & DC, quo calculus nonnihil simplicior emersisset. Vid. *Discours de la Cause de la Pesanteur par Mr. Huygens* pag. 157.

Scholion.

638. Supposuimus verò in hisce cum laudato Hugenio gravitatem corporum uniformem seu ubique æqualem. Quod si verò gravitates ponantur in directa ratione distantiarum à centro C, curva PDE diversa erit ab ea, quam in duabus postremis propositionibus exhibuimus. Nam,

Propositio LXXXII. Theorema.

639. *Si gravitas corporum distantiis locorum* D *à centro* C *proportionalis est, curva* PDE *erit ellipsis conica, cujus semiaxis* PC *erit ad radium æquatoris* EC *in subduplicata proportione* P − N *ad* P, *ubi* P *ad* N *est etiamnunc, ut gravitas sub æquatore in* E *ad vim centrifugam in eodem puncto.*

Fig. 145. Est (§. 632.) ND ad DM, vel DC ad CQ, ut gravitas in D ad vim centr. in D, at (secundùm hypothesin) grav. in D: grav. in E = DC : CE, & grav. in E ad conat. centr. in E (secundùm hypothesin) = P : N, ergo ex æquo grav. in D ad conat. centr. in E = P. DC : N. CE, & conat. centr. in E ad conat. in D = EC : DL = N. EC : N. DL, ergo denuo ex æquo gravit. in D ad conat. centrif. in D. DC : CQ vel P. DC ad P. CQ = P. DC : N. DL, ergo P. CQ = N. DL; atque adeò DL : CQ = LO : CO = P : N, estque adeò ratio LO ad CO ubique eadem seu data.

Fig. 146. Posita ergo constr. §. 634. num. 1. eritque (num. 111. §. 634.) LO : CO = *Hi* : R*t* (id est num. præc. hujus) = P : N, ergo omn. *Hi*, seu AHIB ad omnia R*t* seu RFGS = P : N, vel 2. AHIB : 2. RFGS = $EC^2 - DL^2 : EC^2 - DC^2 = P : N$, & convertendo $EC^2 - DL^2 : CL^2 = P : P - N$. Ex quo constat, curvam PDE hoc casu esse ellipsin conicam, cujus semiaxes conjugati PC, CE sint ad se invicem in subduplicata proportione P − N ad P. Quod erat demonstrandum.

Ali-

Aliter ex Principio Æquilibrii canalium DC, PC.

640. Ducatur CF, &, quia EF : FG (constr.) = P : N; recta EF gravitatem in E exponere potest, & quoniam gravitas est distantiis à centro proportionalis, KY exponet gravitatem in D, & reliquæ ordinatæ in triangulo CKY exponent gravitatem in reliquis locis canalis DC, ergo gravitas totius canalis DC exponetur triangulo CKY. Pari argumento, si CV fuerit = CP, exponet triangulum CVZ pondus seu gravitas canalis PC; differentia verò ponderum DC & PC, quæ exponitur per trapezium VKYZ, æquivalet conatui centrifugo totius canalis DL vel DC (§. 635.) exponendo per triangulum PHI, ergo KYZV = triang. PIH, adeoque $2.KYZV = DL^2$. Atqui 2.KYZV est ad $KC^2 - VC^2$ seu ad $DC^2 - PC^2$, vel quod idem est, ad $LC^2 + DL^2 - PC^2$, ut EF ad FG, seu P ad N. Ergo $DL^2 : DL^2 + LC^2 - PC^2 = P : N$, & convertendo $DL^2 : PC^2 - LC^2 = P : P - N$. Ex quo nunc iterum liquet id, quod præcedenti paragrapho ostensum, scilicet curvam PDE ellipsin conicam esse, cujus semiaxis PC sit ad EC in subduplicata ratione P − N ad P. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

641. *Superest, ut rationem gravitatis absolutæ ad conatum centrifugum* sub æquatore, id est, rationem P ad N numeris expressam exhibeamus, quod log-morum beneficio facile præstabitur. Sit A altitudo, quam grave à quiete casum incipiens motu naturaliter accelerato tempore unius minuti secundi in linea verticali & in vacuo perlabitur, quam Hugenius reperit esse 15. ped. 1. lineæ; atque R. significet radium æquatoris terrestris, retentisque P & N pro nominibus *gravitatis & conatus centrifugi* sed æquatore. Per (§. 151.) $\sqrt{(2A : P)}$ exponit tempus, quo altitudo A motu naturaliter accelerato conficitur, quod tempus, (secundùm hypothesin) est unius minuti secundi; &, quia una revolutio diurna telluris, respectu fixarum, est 23. hor. 56. min. seu 86160. secundorum, nominetur hic numerus n, eritque $n\sqrt{(2A : P)}$ expressio unius revolutionis diurnæ in minutis secundis, & quia hoc idem tempus (§. 183.) etiam exponitur per $p\sqrt{(R : N)}$, uti p est exponens rationis circumferentiæ ad radium, habebimus æquationem $n\sqrt{(2A : P)} = p\sqrt{(R : N)}$, atque adeò $P : N = 2nnA : ppR$. Jam, quia n significat 86160″, A, 15. ped. 1. lin. $p = 2.355 : 113 = 710 : 113$, & quia, secundum Piccarti dimensionem, terræ

terræ unus gradus in Meridiano eſt 57060. hexapedarum, totius terræ ambitus log-us facile habebitur log-mo ex 57060. addendo log-um numeri 360; atque exinde etiam innoteſcet nullo ferme negotio log-us radii æquatoris R. Subſtitutis igitur numerorum logarithmis, erit log-us ex $2nnA = 10.5720475$, & log. $ppR = 8.1108142$; ergo differentia horum log-morum, id eſt, log-us rationis $2nnA : ppR = 2.4612333$. cui log-mo in tabulis proxime convenit numerus 289. Propterea eſt $2nnA : ppR$, vel $P : N = 289 : 1$. Quod erat inveniendum.

642. Hæc ratio $P : N = 289 : 1$, eadem eſt cum ea, quam primùm Hugenius in tractatu De Cauſſâ Gravitatis, pag. 146. & poſtea Illuſtris Newtonns in noviſſima editione Cantabrigienſi ſuorum Princ. Phil. Nat. Math. pag. 379, exhibuerunt. Quoniam igitur in caſu propoſ. LXXX. & LXXXI, CE (§. 636.) eſt ad PC, ut P ad $P - \frac{1}{2}N$, erit $CE : CP = 578 : 577$. etiam ut Hugenius reperit pag. 156. citati libri. In caſu vero propoſitionis LXXXII. erat $PC : EC = \sqrt{P} - N : \sqrt{P}$, ſeu $= \sqrt{288} : \sqrt{289}$, quæ etiam æquatur rationi 577 : 578. Nam ratio $\sqrt{P-N} : \sqrt{P} = \sqrt{(PP-PN)} : P$, atqui $\sqrt{(PP-PN)} = P - \frac{PN}{2P} + \&c. = P - \frac{1}{2}N$ proxime, ergo $\sqrt{(P-N)} : \sqrt{P} = P - \frac{1}{2}N : P = 577 : 578$. Verùm Newtonus non determinata curvæ ſuæ *PAQB*, ſeu ſectionis telluris per axem *PQ*, ſpecie, & multiplici uſus calculo in prima editione Princ. Phil. Nat. pag. 424. invenit diametrum terræ ſecundùm æquatorem ad diametrum per polos, ut 692. ad 689; in noviſſima vero invenit illam ad hanc ut 230. ad 229. Utraque multum abludit ab Hugeniana & noſtra determinationibus; nec mirum, cum calculum ſuum in principiis à noſtris diverſis fundarit, attractionibus illis uſus, quarum leges, elegantibus theorematis in primo libro traditis, complexus eſt. In Propoſ. XX. Lib. III. diſerte ponit, pondera corporum æqualium in ſuperficie telluris collocatorum, diſtantiis eorundem à centro reciproce proportionalia exiſtere, idque ex eo deducit, quòd canales EC & PC æquiponderantes ſint, atque adeò earum particulæ quælibet ſimiles & ſimiliter poſitæ etiam ejusdem ſint ponderis. Nam, quia pondera corporum ſunt ut maſſæ & ſolicitationes gravitatis conjunctim, erunt ſolicitationes gravitatis omninò in reciproca ratione maſſarum; unde, cum maſſæ ipſis EC & PC proportionales ſint, erit ſolicitatio acceleratrix in E ad ſolicitationem acceleratricem in P, ut PC ad EC, & ſic de reliquis.

Fig. 145.

Huic

Huic eidem proprietati etiam inſtitit Clar. David Gregorius in ſuis Elem. Aſtr. Phyſ. Propoſ. LII. fol. 269. ſed nec ipſe figuram ſectionis terræ per axem definire curavit.

643. Hac verò proprietate poſita, quod ſcilicet ſolicitationes gravitatis acceleratrices in E & D figuræ EP*p* circa P*p* revolventis, diſtantiis à centro EC, DC reciproce proportionales ſunt, quis crediderit gravitates abſolutas corporum in iisdem punctis E & D eorum diſtantiis EC & DC directe proportionales eſſe? Id tamen ita eſt; nam ſolicitationes illæ acceleratrices diſtantiis locorum à centro reciproce proportionales, ſunt gravitates corporum abſolutæ in iis locis de quibus agitur, demtis conatibus centrifugis eorundem corporum, quatenus hi conatus exeruntur in corpora ſecundum illas directiones, ſecundus quas gravitas, ſed contrario ſenſu, agit. Id eſt, ſi gravitas in E, demta vi centrifuga in eodem puncto, fuerit ad gravitatem in D, demta pariter vi centrifuga in hoc puncto D, ſed ea, quæ in corpus exeritur ſecundum directionem CD eandem, ſecundum quam gravitas in corpus agit, ut DC ad EC, erit vis abſoluta gravitatis in E ad vim abſolutam in D, ut EC ad DC. Ad hoc demonſtrandum oportet prius ſpeciem curvæ PDE definire, cuius analyſis ſic eſt ineunda. Gravitates abſolutæ in E & D indicentur per gE, gD, & conatus centrifugi juxta directiones CE, CD in iisdem punctis per cE, cD. Eritque ex hypotheſi $gE-cE:gD-cD=DC:EC$, atqui eſt $gE:gE-cE=P:P-N$, & $cE:gE=N:P$, item conatus centrifugus in D ſecundum directionem DM eſt ad conatum centrifugum in E, ut DL ad EC, ac denique conatus centr. in D ſecundum DN eſt, ad conatum centr. ſecundum DM, ut DL ad DC; ergo ex æquo, id eſt, ductis omnibus antecedentibus in antecedentes ac conſequentibus in conſequentes, atque eliſis elidendis, habebitur $cD:gD-cD=N.DL^2:(P-N.)EC^2$, vel invertendo & componendo $gD:cD=(P-N).EC^2+N.DL^2:N.DL^2$, ſed $cD:gE=N.DL^2:P.DC.EC$, ergo denuo ex æquo fiet $gD:gE=(P-N.)EC^2+N.DL^2:P.DC.EC$. Eſt ergo gravitas in D ut hæc fractio $(P-N).EC^2+N.DL^2:P.DC.EC$, adeoque, juxta methodum ſupra §. 633. expoſitam, eſt gravitas in D ad conatum centrifugum in D juxta DM, id eſt, $DC:CQ=(P-N).EC^2+N.DL^2:N.DC.DL=(EF-EC).EC+DL^2:DC.DL$, quia (conſtr.) in fig. 146. $EF:EC=P:N$, ſeu in ratione gravitatis ſub æquatore in E ad conatum centrifugum. Hinc $DL:CQ$, vel $LO:CO=(EF-EC).EC+DL^2:DC^2$ (§. 634. num. 111.) = rec-lum *Hi*: rec-lum *Rt*. Et

Fig. 145, & 146.

Et permutando ac invertendo PI. Ik: $(EF-EC).EC+DL^2=CK.Kk$: CK^2 (vel CD^2). Hinc ultrò sequitur $EF.EC:(EF-EC).EC,+DL^2=EC^2:DC^2$, atque inde elicitur $\overline{EF-EC}$ in $\overline{EC^2-DL^2}=EF.CL^2$ (vel, quia $EF-EC:EF=P-N:P$) æquatio $\overline{P-N}.\overline{EC^2-DL^2}=P.CL^2$. Quæ eadem est cum ea, in quam supra (§. 639.) incidimus; unde, quia in inquisitione curvæ PDE, quam citato loco ellipsin conicam esse vidimus, supposuimus gravitates absolutas in E, D, &c. distantiis EC, DC proportionales esse, nunc illud ipsum, quod illic suppositio vel hypothesis erat, tanquam conclusio potuisset derivari ex principio, quod solicitationes acceleratrices in E & D distantiis EC, DC horum punctorum à centro C reciproce proportionales sint. Sed hac indirecta deductione non est opus, cum res directe probari possit. Nam, quia invenimus $(P-N).EC^2-DL^2.(P-N)=P.CL^2$, erit $(P-N).EC^2,+N.DL^2=P.DL^2+P.CL^2=P.DC^2$; &, quia supra habuimus $gD:gE=(P-N).EC^2,+N.DL^2:P.DC.EC$, erit omnino $gD:gE=P.DC^2:P.DC.EC=DC:EC$. Quod erat demonstrandum.

644. Idcirco insistendo principiis Illustris Newtoni, atque Celeb. Gregorii, sectio telluris per axem erit ellipsis conica, quam Propos. LXXXII. determinavimus, eritque adeò diameter terræ secundum æquatorem ad diametrum per polos in subduplicata ratione P ad $P-N$, *id est* (§. 642.) $=P:P-\frac{1}{2}N$, *id est*, $=578:577$. Quæ ellipsis perparum *differt* à curva Hugeniana, quam propositionibus LXXX. & LXXXI. duabus diversis viis demonstratam dedimus.

645. Facta iterum $CV=CP$, ductaque Vb æquali longitudini penduli in polo P secunda minuta notantis, atque per punctum b descripta hyperbola bc inter asymptotas CE, CT, ejus ordinatæ Ka, EF præbebunt longitudines pendulorum isochronorum, atque vibrationibus suis secunda minuta indicantium in locis D & E. Nam (§. 178.) vires centrales, quibus pendula isochrona agitantur, sunt pendulorum longitudinibus directe proportionales, unde cum (secundùm hypothesin) solicitationes acceleratrices in P, D & E distantiis horum punctorum à centro C reciproce proportionales sint vel ex natura hyperbolæ Fab, directe, ordinatis respectivis Vb, Ka, Ef; & cum ordinata Vb jam repræsentet longitudinem penduli in polo P secunda notantis, reliquæ Ka, Ef, &c. omninò indicabunt longitudines pendulorum isochronorum in locis D, E, &c.

Hoc

Hoc igitur principio haud difficulter tabulam conſtruere liceret, qua penduli ſecunda minuta vibrationibus ſuis notantis longitudo ad ſingulos gradus latitudinis definiretur, ſi modo ſatis otii ad hunc ineundum calculum nobis ſuppeteret, & niſi ſummus Newtonus nos labore iſto ſublevaſſet, qui talem in propoſitione XX. Lib. III. Princ. Phil. Nat. noviſſimæ editionis exhibuit.

646. In hypotheſi verò Hugeniana gravitatis uniformis, qualem in propoſitionibus LXXX. & LXXXI. ſequuti ſumus, longitudo penduli in polo P ſe habebit ad longitudinem penduli iſochroni in quolibet loco D, ut $EF.PC+\frac{1}{2}DL^2$ ad $EF.PC-\frac{1}{2}DL^2$. Cujus demonſtratio ex antecedentibus facilis eſt. Nam in quolibet loco longitudo penduli eſt proportionalis ſolicitationi acceleratrici penduli in eo loco, & hæc ſolicitatio acceleratrix ſemper eſt exceſſus gravitatis abſolutæ ſupra conatum centrifugum in eodem loco, ſumtum in directione gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIII. Theorema.

647. *Si tubus* ABDE *aquæ plenus usque ad* H *circa axem* FP *æquabili motu converti intelligatur, aqua hoc motu circulari ad latera tubi* BA, DE *attolletur, in medio vero deprimetur ad* M; *adeò ut ſuperficies ejus, quæ in tubo quieſcente ſenſibiliter plana erat, in ſuperficiem cavam* LMN *abeat, quam retinebit quousque motus aquæ eodem tenore perſeveraverit.* Fig. 147.

Nam, quia aquæ partes in gyrum actæ conatus habent recedendi à centro, & eo majores habet conatus à centro recedendi, quo majores fuerint circulationis celeritates, majores autem ſunt prope latera vaſis quam in medio velocitates aquæ in orbem actæ, ergo & majores conatus centrifugi, qui, quoniam à lateribus iſtis impediuntur & aqua fluida eſt, exeruntur ſecundum directiones plano baſis perpendiculares, ac per conſequens, cum in lineis baſi perpendicularibus prope latera conatus centrifugi maximi ſint, ſequitur illic aquam altiorem eſſe debere quam in medio, ad id ut exceſſus preſſionis à gravitate aquæ ſupra conatum centrifugum in ea linea æqualis manere queat preſſioni aquæ in medio cylindri, alioqui aqua non poſſet in ſtatu manenti conſiſtere; propterea liquet, quod cum lineæ *bl*, lateribus vaſis BL propiores, majores ſint mediâ MP, ſuperficies aquæ LMN cava futura ſit.

648. Ductis itaque ad axem PM ordinatis LI, *li*, abſciſſæ MI,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [399] - 371
PUBLIC DOMAIN

Mi exponent conatus centrifugos filamentorum aqueorum BL, bl circa axem PM revolventium, unde, si velocitates circulationis fuerint, ut dignitas quælibet m radiorum PB, Pb &c. erit $MI : Mi = PB^{2m-1} : Pb^{2m-1}$, atque adeò curva MlL una ex infinitis parabolis. Nam est generaliter quadratum circulationis in composita ratione conatus centrifugi & radii circulationis per formulam primam, §. 183. adeoque conatus centrifugi MI erunt, ut quadrata celeritatum, seu (secundum hypothesin) ut PB^{2m} applicata ad radios PB circulationis, atque adeò sunt directe, ut respectivæ quantitates PB^{2m-1}. Hinc, si $m = \frac{1}{2}$, id est, celeritates circulationum sint in sesquiplicata ratione radiorum, curva MlL erit parabola conica.

Scholion I.

649. Præsens propositio etiam experimento facili probari potest. Nam si situla ex fune prælongo pendens & aquæ semiplena, eo usque in orbem vertatur, dum funis valde rigescat; tum situla, sibi relicta vel derepente in contrarium sensum dextre impulsa, magna pernicitate motum circularem sequetur, talemque etiam aquæ imprimet; hoc proinde motu vorticoso aquæ in situla impresso, statim contingere observabitur, ut aqua ad parietes situlæ attollatur & in medio subsidat, atque adeò *ejus superficies figuram cavam induat loco planæ superficiei, qualis prius erat.*

Scholion II.

650. Quin imo ex propositione hac nostra facilis modus deduci potest explicandi, cur in quolibet vortice corpora solidiora quam vorticis partes ad vorticis centrum pellantur. Nam, quia in vase cylindrico AD aqua $HBDK$ in gyrum acta ad parietes vasis nonnihil se attollit, adeò ut superficiem cavam LMN induat; ideo manifestum esse potest cuique, quod, si aqua operculo rigido KH operta esset, singula puncta operimenti rigidi excepto medio O ab aqua circulante ac propterea sese attollere conante pressiones diversas sint subitura, scilicet eo majores quo remotiora fuerint puncta à centro operimenti O. Atqui ea vi, qua puncta operimenti ab aqua sese attollere conante premuntur, eadem vi reactione sua in aquam aget, quod sane etiam de superficie cava cylindrica itidem est intelligendum; id est, qua vi hæc superficies cylindrica ab aqua HD in gyrum

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [400] - 372
PUBLIC DOMAIN

rum acta atque adeò axem MP fugiente, premitur, tanta etiam est ejus reactio, cujus vi versus axem MP aqua repellitur; adeò ut, si corpus aliquod in aqua sit, ut *b*, id pellendum sit versus P in directione BP superficiei cylindri perpendiculari.

Sic etiam, in vorticibus magna pernicitate in gyrum actis, fluidum elabendi conatum habens à vorticum superficiebus repellitur, & à repulso fluido corpora solida, quæ in vortice sunt, secundum directiones superficiei vorticum normales, atque hoc modo gravitas in hypothesi vorticum utcunque adumbratur. Utinam verò reliqua gravitatis phænomena eadem facilitate in hoc vorticum systemate explicare liceret!

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione soni.

651. Ante Illustrem Newtonum nemo theoriam sonorum geometrice tractare ausus est, nec mirum, cum ejusmodi disquisitio iis difficultatibus circumsepta sit, quæ non nisi à sagacissimo Viro aliisve similibus geometris superari posse videbantur. Veruntamen elegantissimum nobis exhibuit theorema summus Geometra accelerationes pulsuum in aëre elastico concernens Propos. XLVIII. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* in veteri & Propos. XLVII. in noviss. editione, posteaquam suam hypothesin de productione sonorum Propos. XLIII. exposuit. Ejus doctrina, ni fallor, huc redit.

652. Scilicet intelligit vibrationibus partium corporis sonori alternis circumjectum aërem elasticum propelli atque adeo densari nonnihil, dehinc relaxari & in partes contrarias regredi. Nam itu partium corporis tremuli contiguæ aëris partes propulsæ densabuntur, regressu verò, atque adeo amota vi comprimente, densatus aër iterum sese in omnes partes, quantum potest, elatere suo expandet, ita ut itu partium corporis tremuli aër condensetur & in reditu atque regressu iterum rarescat. Quod partes corporis tremuli in aëre ipsis contiguo efficiunt, idem etiam præstabunt aëris partes jam propulsæ in aëre ipsis contiguo, & hic in sibi proximo atque sic deinceps, sed non eadem ubique harmonia, ita ut, si quædam aëris partes propulsæ sint, propellantur & omnes reliquæ atque progrediantur, sed cum unæ propellantur atque densentur, aliæ redeant

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [401] - 373
PUBLIC DOMAIN

atque posteaquam densatæ erant, iterum rarescant & regrediantur, idque vicibus permutatis. Ejusmodi motus partium aëris propulsarum atque iterum, unde venerant, regredientium, seu intervalla progressus atque regressus, vocentur pulsus aëris, quæ intervalla ob æqualia temporis intervalla præterpropter æqualia existent. Hisce positis sequens solvendum occurrit problema.

PROPOSITIO LXXXIV. Problema.

Fig. 148. 653. *Si elasticitates aëris densitatibus respectivis proportionales fuerint, determinare celeritates aëris elastici in uno ejus pulsu à vibratione corporis tremuli vel alia ratione excitato.*

I. Sit EF latitudo unius pulsus, scilicet intelligatur uno itu vibrationis corporis tremuli contiguum aërem propulsum redactum esse in spatium AB, ex cujus puncto medio E excitata sit perpendicularis EP, atque in ea recta ME exponat elasticitatem aëris condensati AB. Regrediente parte corporis tremuli, vel potius remota vi comprimente, quæ aëri AB densitatem naturali majorem induxit, aër AB sui juris factus, in utramque partem (§. 652.) æqualiter se diffundere conabitur; sed considerando ejus dilatationem tantum quæ versus D fit, aërem BC ante se propellet, atque eum condensando rediget in volumen CD ipsi AB circiter æquale. Intervallum EF, inter puncta media portionum aëris densarum AB, CD, est intervallum unius pulsus, quoniam æquivalet itineri, quod eundo & redeundo conficitur. Ut innotescant celeritates aëris in singulis punctis intervalli EF, procedendum porrò ut sequitur:

II. Dividatur EF bifariam in O, jungatur OM, ductaque per quodlibet punctum G intervalli EF rectâ GH parallela EP lineæ OM occurrente in H, fiat denique $Fg = EG$. Ponatur aërem EB se extendisse in EG: quæritur vis acceleratrix puncti progredientis G; hæc verò vis est virtus elastica aëris EG demta virtute elastica aëris FG, qui progredienti resistit. Jam aëris progredientis EG raritas est ut EG, & resistentis raritas ut FG, & quia densitates raritatibus sunt reciproce proportionales, & elasticitates directe densitatibus; elasticitates aëris raritatibus ejus erunt reciproce proportionales, unde, cum (secundùm hypothesin) aëris AB elasticitas sit EM, aëris expansi EG elasticitas erit EM. EB : EG, aërisque expansi FG elasticitas EM. EB : FG. Ergo vis acceleratrix puncti G seu differentia elasticitatum = EM. EB : EG, — EM. EB : FG (vel quia gF & EG æquales) = EM. EB.

EB. Gg : EG. FG. Jam, si ob angustiam pulsuum eorumque partium rec-lum EGF assumere licet æquale dato rec-lo BEF, erit vis acceleratrix puncti progredientis G = EM. EB. Gg : EB. EF = EM. Gg : EF = EM. GO : EO, seu (propter triangula similia OEM & OGH) = GH. Est igitur vis acceleratrix puncti G circiter ut ordinata GH trianguli rectanguli OEM, hoc est, ut distantia ejus GO à medio vibrationis, ut Celeb. Newtonus, loco supra citato, primus invenit. Unde si centro O & radio OE descriptus sit semicirculus ENF, & EP media proportionalis inter EM & EO. Erit (§. 148.) celeritas puncti G, ut GN. EP : EO. Tempus verò, quo aër EB se extendit in spatium EG (§. 149.) exponetur arcu EN : EP. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

654. Hinc celeritates pulsuum erunt in composita ratione ex subduplicata intervallorum pulsuum & ex subduplicata densitatum. Vel brevius, celeritates sunt ut EP. Nam velocitates punctorum G in diversis EF similiter positorum, sunt ut homologæ EP, quia similitudo circulorum rationes omnes GN : NO vel EO æquales facit.

Corollarium II.

655. Tempora vero pulsuum sunt in reciproca ratione celeritatum, seu ut EO : EP.

Corollarium III.

656. *Pendulum*, cujus longitudo sit tertia proportionalis ad EM & EO, unam oscillationem ex itu & reditu compositam eodem tempore conficiet, quo unus pulsus eundo & redeundo absolvitur.

Scholion.

657. Præcedentes determinationes circa vim acceleratricem, velocitatem, & tempus lationis puncti progredientis G, non nisi tanquam physicè accuratæ haberi debent, non verò mathematicè. Nam quia memorata vis acceleratrix puncti G reperta est supra propor-

tio-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [403] - 375
PUBLIC DOMAIN

tionalis quantitati EM. EB. Gg:EG. FG = 2EM. EB. GO : GN^2, erit momentum ſolicitationis acceleratricis, ut 2EM. EB. GO. — dGO : GN^2 = 2EM. BE. GN. dGN : GN^2 = 2EM. EB. dGN : GN proportionale momento celeritatis acquiſitæ, ſeu VdV, vocando hanc celeritatem V, & dV ejus elementum, & — dGO ſignificat elementum decreſcens lineæ GO, alterum vero dGN elementum ordinatæ GN. hinc EM. log. (GN^2 : BQ^2) eſt, ut quadratum celeritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum.

658. Hoc nomine non intelligitur hoc loco internus moleculârum motus fluidi cujuscunque in ſuo ſtatu naturali conſiſtentis, ſed is particularum motus, qui in fluidis à cauſis externis & accidentalibus excitari ſolet, quò calor præſertim eſt referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido à cauſis externis producitur. Utut verò ejusmodi motus inteſtinus admodum perturbatus ſit, nihilo tamen minus regula phyſicè ſatis accurata pro ejus menſura media tradi poteſt.

PROPOSITIO LXXXV. Theorema.

659. *Calor, cæteris paribus, eſt in compoſitâ ratione ex denſitate corporis calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum eſt celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas media V, & corporis denſitas D. Jam, quia calor conſiſtit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impreſſiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, ſed hæ impreſſiones ſunt in compoſita ratione ex duplicata celeritatum & ſimpla denſitatum, ſeu, ut D. V^2. Ergo etiam calor eſt ut D. V^2. Quod erat demonſtrandum.

Dictum in propoſitione *cæteris paribus*, id eſt, in corporibus ſimilis texturæ.

Scho-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [404] - 376
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

660. Ex hac propoſitione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. Habeatur tubus ADM inſtar ſiphonis reflexus, cujus crus minus AD capſula vitrea ABC inſtructum ſit, & majus DM hermetice ſigillatum in M non nihil excedat longitudinem fiſtularum in ordinariis barometris adhiberi ſolitarum. Tempore hyberno tubus mercurio impleatur orificio aperto A deorſum ſpectante, atque ramo DM in verticali ſitu detento, parte D ſurſum reſpiciente, quod ope alius tubi inflexi atque aperto orificio A inſerendi rite præſtari poteſt. Totus tubus mercurio plenus inverti debet, ut denuo in ſitum, quem ſchema monſtrat, reducatur, mercuriusque in ramo MD ad conſuetam in ordinariis barometris altitudinem DH, 27. vel 28. digitorum ſe demittet, effluente per apertum orificium A ſuperfluo hydrargyro. Sed, quia capſula ABC adhuc mercurio plena erit, ſuctionis modo tanta ejus copia extrahenda, usque dum reſidui ſuperficies FF ſit circiter in medio capſulæ, vel paulò altior, ita ut BF aut CF ſint $\frac{1}{3}$ totius altitudinis capſulæ BG. Clauſo poſtea orificio A, atque adeò ſublata communicatione aëris in ampulla cum exteriore, inſtrumentum uſui aptum atque paratum erit. Ponamus enim aërem AFF calore extendi in ſpatium AEE, ita ut hydrargyrus in altero tubo ex H aſſurgat in I, columnæ IE preſſio æquivalebit impreſſioni aëris AEE in ſua baſi EE, atqui hæc impreſſio (§. 659.) eſt, ut factum ex quadrato celeritatis mediæ particularum aëris in denſitatem aëris. Vocetur, ut in propoſitionis expoſitione loco citato, velocitas media V, eritque aëris impreſſio in ſuperficiem EE, ut $V^2 : GE$, nam denſitas aëris AEE eſt ut I : AE vel I : GE; eſt ergo $IE = V^2 : GE$, vel $IE . GE = V^2 = IG . GE + GE^2 = V^2$. Hinc $V = \sqrt{(IE . GE)}$ aut etiam $= \sqrt{(IG . GE + GE^2)}$. Propterea, ſi vocentur $FH = a$, $EE = b$. Diameter tubi $MD = c$, & $GF = e$, ac denique variabilis $HI = x$, invenietur V, ſeu velocitas media particularum aëris, ut $\sqrt{(ab^4c + b^4cx + bbccx + abbccx + bbccxx + c^4xx)} : bb$. Hinc data x in aliqua obſervatione, innoteſcet ultro ipſa V. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 149.

FINIS.

APPENDIX.

POstquam præcedens tractatus Typographo jam missus esset, varia subinde in mentem venerunt, quæ tum ad illustrationem Operis, tum etiam ad qualemcumque doctrinæ profectum facere videntur. Eorum pauca in hac Appendice præcedentibus libris addere constitui, quando temporis angustia atque Bibliopolæ festinatio non concedunt mihi oportunitatem omnia ad umbilicum deducendi.

I. Circa notissimam naturæ legem, quâ *cuilibet actioni æqualis & contraria esse dicitur reactio*, quam ex §. 11. derivatam in sequenti §. 12. retuli, egregii nonnulli viri hærere videntur, existimantes nunquam motum sequi debere actionem, si huic æqualis semper & contraria sit reactio; nam si, ut in exemplo à Celeb. Newtono inter alia adducto, equus lapidem funi alligatum trahens æqua vi retrahitur in lapidem, quomodo, inquiunt, progredi equus lapidemque movere potest, si vis agens ab æquali & contraria resistentia absorbetur tota atque retunditur? Sed hæc objectio ab æquivocatione circa nomina *vis* & *actionis* nata esse videtur, quæ tamen duo accurate debent distingui. Vis corporum non est actio ipsa; nam actio est applicatio vis cujusdam *subjecto habili, seu cui applicari potest: illi verò soli corpori* applicari censetur, quod resistit, quod renititur, quod reagit. In rebus materialibus nulla est actio proprie sic dicta, ubi nulla est reactio; equus enim, qui corpus *nihil* resistens post se trahit, *nihil* trahere vel *non* trahere, id est, nil aliud agere, quam simpliciter incedere, censetur. In omni ergo actione corporea est collisio inter vim agentem & renixum corporis patientis, applicatio vis agentis in corpore actionem *suscipiente, hoc est*, actio ipsa æqualis est & contraria renixui patientis, qui est ejus reactio, quia hic renixus vel hæc vis inertiæ corporis patientis debet tolli ad id ut corpus moveri possit ab agente. Non tamen ideo sequitur *vim totalem* corporis agentis totam impendi superandæ rectioni patientis, sed ejus partem tantum, & hæc pars vis totalis corporis, quæ tollendæ resistentiæ corporis patientis insumitur, ea est vis, à qua actio proprie manat; *residuum* enim ejusdem vis totalis, cum nullam habeat resistentiam vel renixum absorbendum, in actionem minime influit. Idcirco cum actio quæcunque æqualis & contraria dicitur reactioni corporis patientis, hoc aliud non significat quam istud,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [406] - 378
PUBLIC DOMAIN

istud, *in omni actione corporea tantum virium corpori agenti decedere, quantum corpus actionem suscipiens lucratum sit.*

II. Propositio IV. Lib. I. §. 44. facilem suppeditat modum demonstrandi centrum gravitatis *dari* in unoquoque corpore, & hoc centrum *unicum* esse, si gravium directiones parallelæ fuerint. Nam, si fuerint corpuscula quotcunque quam minima A, B, C, D, &c. Fig. 150. quomodocunque posita, & tanquam elementa corporis etiam cujuslibet spectata, à quibus demissæ sint ad planum Pc positione datum perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & plano Pc aliud parallelum ducatur GH, cujus distantia Ee à plano Pc ea sit, ut factum ex Ee in aggregatum corporum A+B+C+D+&c. æquet summam factorum A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd + &c. Corporum A, B, C, D, &c. in suas respectivas à plano Pc distantias Aa, Bb, Cc, &c. & in Pc sumatur Pe, talis ut (A+B+C+D+&c). Pe sit = A. Pa + B. Pb + C. Pc + D. Pd + &c. ductaque per e recta eE occurret GH in puncto E, quod est commune centrum gravitatis corpusculorum A, B, C, D, &c. vel corporis totalis, quod ex hisce corpusculis componitur. Hoc punctum E ideo dicitur corporis totalis centrum gravitatis, quia ejus partes seu corpuscula A, B, ex una parte lineæ, vel plani GH, æqualium sunt momentorum cum corpusculis C, D, &c. ex altera parte ejusdem plani vel lineæ GH, & quia hoc idem accidit respectu cujuslibet alius lineæ LM, quæ per hoc idem punctum E duci potest. Nam ducta per P linea Pκ parallela LM, & productis Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & Ee, in α, β, γ, δ, &c. & ε. reperietur (A+B+C+D+&c). Eε = A. Aα + B. Bβ + C. Cγ + D. Dδ + &c. & (A+B+C+D+&c). Pε = A. Pα + B. Pβ + C. Pγ + D. Pδ + &c. quandoquidem omnia triangula Paα, Pβb, Pcγ, &c. similia sunt. Jam ex hisce duabus æqualitatibus ultrò sequitur, omnia momenta corporum A, B, C, D, &c. respectu utriusque plani Pκ & PV ejus normalis simul æqualia esse respective factis ex aggregato corporum in distantias centri E ab utroque plano vel linea Pκ, PV, quod cum ita sit, necessum etiam est ut corpuscula, quæ sunt ad unam partem rectæ LM æqualium sint momentorum cum pondusculis, quæ sunt in altera parte ejusdem LM. Cum itaque omnes lineæ, quæ per punctum E duci possunt, sint axes æquilibrii pondusculorum A, B, C, D, &c. liquet corporis ex hisce corpusculis tanquam suis elementis conflati centrum gravitatis *unicum* esse in E. Quod erat demonstrandum.

Hanc eandem propositionem Wallisius ex aliis principiis etiam elicuit.

III. Circa regulam Guldini, cujus demonſtratio ſupra (§. 47.) allata eſt, duo notanda ſunt. 1°. Eam non ſolum in figuris aut ſolidis rotundis obtinere, ſed generaliter in omnibus aliis, quæ generari poſſunt figuræ genitricis motu hac lege facto, ut figuræ planum ſemper perpendiculare maneat lineæ, quam centrum gravitatis figuræ genitricis motu ejus deſcribit. Hoc enim caſu *ſolidum figuræ motu genitum ſemper æquale eſt facto ex figura in viam centri gravitatis ejusdem.*

Fig. 151. Nam ſi ponatur centrum gravitatis C figuræ cujuslibet AB incedens in curva DEF, cui figura ubique normalis ſit, deſcripſiſſe arculum curvæ *Cc*, atque ex ſitu BA veniſſe in ſitum *ba* priori indefinite vicinum, adeo ut rectæ *CO* & *cO*, quæ ſint in planis figurarum AB, & *ab*, & in plano curvæ DEF, eritque O centrum circuli oſculatoris curvæ datæ DF in ejus puncto C vel ejus proximo *c*. Adeoque ſolidum, quod figura AB deſcribit cum ejus centrum C percurrit arculum *Cc*, per §. 47. æquatur facto ex figura AB in arculum *Cc*, ergo omnia ejusmodi ſolida vel ſolidum, aut figura, quæ producitur inceſſu figuræ AB per totam curvam DEF, æquabitur facto ex eadem AB in omnes arculos, qui in curva DF continentur, id eſt, facto ex figura AB in curvæ DEF longitudinem. Quod erat demonſtrandum.

2°. Notandum, hæc tantum ita ſe habere, ſi figura genetrix gravitatis ſit uniformis, & fallere Guldini regulam, figura genitrice exiſtente difformiter gravi.

IV. Propoſitio VIII. Lib. I. (§. 59.) etiam deduci poteſt vel ſaltem ipſi æquivalens ex proprietate univerſali vectis recti in ſingulis punctis à potentiis obliquis impulſi, quam hoc loco explicare

Fig. 152. placet. Sit linea recta inflexilis AC, quæ in ſingulis punctis C, C, &c. urgeatur potentiis CD, CD uniformi lege ad ipſam inclinatis, & circa eam tanquam axem conſtitutæ intelligantur figuræ ACGIP, & AGHKA, ea conditione, ut ordinata quælibet CG (CI) ſit ad homologam potentiam CD in duplicata proportione ſinus anguli reſpectivi BCA ad ſinum totum; ac ordinata CH (CK) alterius figuræ ACH ſe habeat ad ordinatam CG (CI) primæ ACGP, ut ſinus complementi anguli BCA ad ejusdem ſinum rectum, & ſic ubique, poſitis hisce, per centrum gravitatis areæ ACGP agatur RS axi AC recta huic lineæ AC occurrens in R, eritque linea RT cum RS angulum TRS continens, cujus ſinus eſt ad ſinum complementi, ut area AHC ad aream ACGP, media directio omnium po-

potentiarum CD, CD lineæ AC applicatarum, & onus quo hypomochlion in R urgetur, erit ad omnes potentias lineæ AC rectas ex obliquis CD, CD derivatas, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli TRS. Demonſtratio hujus Lectoris induſtriæ relinquitur brevitatis amore. Hoc tamen minime reticendum eſt, in iisdem directionibus BD, BD potentias, curvæ cuilibet AB applicatas, quæ ſint ad homologas CD ad lineam AC pertinentes, ut reſpectivæ CV ad BV (ſupponendo directiones BD, BD tangere curvam quandam CV) eandem habere mediam directionem ZT cum potentiis CD, CD, &c. rectæ AC applicatis, ut demonſtratu id facile eſt. Unde ſi curvæ cuicunque AB potentiæ quæcunque in directionibus BC, BC, &c. applicatæ ſint, facili negotio invenietur earum media directio, ducendo per curvæ verticem A tangentem AC, vel quamlibet aliam rectam, & disquirendo quænam potentiæ CD in directionibus BC huic rectæ AC applicandæ ſint ad id, ut harum potentiarum media directio RT etiam præbeat mediam directionem potentiarum in directionibus BC, BC, &c. datæ curvæ ABB applicatarum; ad id facienda ubique eſt CD ad homologam potentiam curvæ AB applicatam, ſicut BV ad CV.

V. Uſum univerſalem propoſitionis XII. Lib. I. In ſubjunctis ejus corollariis & ſcholio jam utcunque oſtendimus. Ad majorem tamen propoſitionis & applicationis ejusdem illuſtrationem, pauca hæc, quæ ſequuntur, addidiſſe forte juvabit. *Præter ſymbola* §. 101. jam explicata, firmitatem cujusque curvæ elementi B*b* vel Bβ nominabimus *t*, quæ illic inſigniebatur litera T; potentias juxta BH & BG, *dq* & *dp* reſpective, tangentem & ſecantem anguli GBH, *h* & *k*, ac denique radium oſculi ſeu curvitatis in B, *r*; item per *a* ſinum totum deſignabimus. Hisce poſitis, erit (num. 1. §. 93.) GH = *dt*, & tria elementa *dp*, *dq*, & *dt*, ipſis *a*, *k* & *h* proportionalia erunt, ſic etiam AP : PQ = *r* : *ds*, atqui (§. 103.) eſt BG (*dp*) : T (*t*) = PQ : AP, ergo *dp* : *t* = *ds* : *r*, item *dp* : *dt* = *a* : *h*, ergo *dt* : *t* = *hds* : *ar*, & *log.* t = ∫(*hds* : *ar*), adeoque ex hisce analogiis quatuor habentur æquationes, quales in hoc adjecto laterculo notantur. Hinc ex quantitatibus *dp*, *dq*, *dt* vel *t* & *h* datâ qualibet in indeterminatis curvæ *x*, *y*, *dx*, *dy*, &c. & quantitatibus conſtantibus, invenientur reliquæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter. Fig. 29.

1. $dt = hdp : a = hdq : k$.
2. $t = rdp : ds$.
3. $log.\ t = \int hds : ar$.
4. $h = ardt : tds$.

Exempl. Sit curva data ABZ hyperbola æquilatera, cujus æqua-

tio $yy = xx - aa$, in qua abſciſſæ x ſumantur à centro, ſemilatere transverſo exiſtente $= a$, ſintque tenacitates aut firmitates curvæ proportionales diſtantiis punctorum curvæ à centro, hoc eſt, $t = \sqrt{(xx+yy)}$. Et §. 161. præbebit $r = t^3 : aa$, & $h (= ardt : tds) = \frac{2xy}{a}$, nec non $k = tt : a$; hinc æquatio prima $dt = hdq : k$ præbebit $dq = ttdt : 2xy = 2txdx : 2xy = tdx : y$; atqui $tdx = yds$, ergo $dq (= tdx : y) = yds : y = ds$. Idcirco potentiæ BH, ſeu dq, ſunt ut elementa curvæ Bb, earumque directiones in centro hyperbolæ coëunt, quoniam tangens anguli DBH inventa eſt $= 2xy : a$, & hæc expreſſio etiam tangentem anguli, quem normalis hyperbolæ BD cum recta ex puncto B ad centrum hyperbolæ ducta continet. Propterea eſt hyperbola æquilatera *catenaria*, ſi gravium directiones in centro hyperbolæ concurrere ſupponuntur, ut ſupra circa finem §. 105. ſine demonſtratione dictum eſt. Pariter ſi poſuiſſem $dq = ds$ & $h = 2xy : a$ in hyperbola eadem, inveniſſemus $t = \sqrt{xx+yy}$.

Generalius, ſi directiones gravium convergunt in punctum, abſciſſæque ſumantur in axe ab hoc centro gravium, erit $h = axdx + aydy : xdy - ydx$, & hujus ac alterius $dt = hdq : k$ ope, in ſuppoſitione $dq = ds$ inveniſſemus $t = \sqrt{xx+yy}$ & $yy = xx - aa$.

Si directiones gravium axi AC parallelæ ſunt, erit $h = adx : dy$, ac ſubſtituendo loco dx, & dy earum proportionales n & m, fiet $h (= adx : dy) = an : m$. Item in æquatione quarta, ſurrogando m & dn pro r & ds, quibus proportionales ſunt, fiet $an : m = amdt : tdn$, & $dt : t = ndn : mm$ (aut, quia $mm + nn = aa$, & $ndn = -mdm$) $= -mdm : mm = -dm : m$, ergo $lt = l(aa : m)$, id eſt, $t = aa : m = ads : dy$, ut habet æquatio nona. Subſtituendo igitur valorem inventum ipſius t in æquatione ſecunda invenietur æquatio ſeptima, & ex hâc ope analogiæ $dp : dq = a : k, = dy : ds$, elicietur æquatio octava.

5. $h = adx : dy$
6. $k = ads : dy$
7. $dp = ads^2 : rdy$
8. $dq = ads^3 : rdy^2$
9. $t = ads : dy$

Hinc, ex hisce tribus dp, dq & t una data in indeterminatis curvæ & conſtantibus utlibet invicem permixtis, facile invenientur reliquæ duæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter.

Si directiones potentiarum BH ſunt curvæ normales, erit $h = 0$, & $k = a$, & ſola æquatio ſecunda ſufficit; hunc caſum particularem Celeb. Joh. Bernoullius ſolutum dedit jam pridem in Commentariis Academiæ Reg. Pariſ. Scientiarum 1706, & nuper adhuc in

Li-

Libro cui titulum fecit *Eſſay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux.*

VI. *De ſublimitate gravitatis difformis, quâ projectilia ſectiones conicas in vacuo deſcribunt.* Quoniam mobile perimetrum alicujus ſectionis conicæ AQ*a* deſcribens citatur ſolicitationibus, quæ quadratis diſtantiarum mobilis à centro ſunt reciproce proportionales, *ſcala* harum ſolicitationum GB erit hyperbola quadratica, cujus applicatæ HG, AB, quæ ſolicitationem gravitatis in H & A exponunt, quadratis abſciſſarum DH, DA ſunt reciproce proportionales, centro hyperbolæ exiſtente in D. Quæritur jam quantam aſſumere oporteat *ſublimitatem*, hoc eſt, lineam HA talem, ut in ea deſcendens grave motum à quiete in H incipiens, & ſolicitationibus, quas ordinatæ hyperbolæ in quadrilineo HGBA exponunt, celeritatem acquirat in A, cum qua propulſum mobile, ſecundum lineam A*a* alteri BA in directum poſitam, datam ſectionem conicam AQ*a* in vacuo deſcribat. Fig. 153.

Ponitur punctum A pro alterutra apſide, ac propterea DA erit ſectioni perpendicularis in A, atque adeo hoc punctum A alteruter vertex erit ſectionis conicæ AQ*a*, & radius curvitatis in A æquabitur $\frac{1}{2}$L, id eſt, ſemilateri recto ſectionis conicæ, & ſolicitatio curvæ in A normalis ex centrali AB derivata eadem erit cum hac centrali; *idcirco indicando celeritatem mobilis in puncto A, per V*, vi §. 154. habebitur $V^2 = \frac{1}{2}L.AB$. Atqui eadem velocitas V, ſed (ſecundum hypotheſin) deſcenſu in HA acquiſita, exponitur etiam (§. 136.) latere quadrato ex duplo areæ HGBA, ergo $V^2 = 2.HGBA$, atqui $AHGB = AD.AB - HD.HG$, ergo etiam $\frac{1}{2}L.AB = 2AD.AB - 2HD.HG$, vel, propter hyperbolam, ſubrogando loco AB & HG earum proportionalia quadrata HD^2, AD^2, fiet $\frac{1}{2}L.HD^2 = 2AD.HD^2 - 2HD.AD^2 = 2HD.AD.HA$, hinc etiam $L.HD = 4.HA.AD$, vel $L.Aa.HD = 4Aa.HA.AD$. Verum ex conicis eſt $4QO^2 = L.Aa = AD.Ad$, ergo $4Aa.HA.AD = 4AD.Ad.HD$, id eſt, $Aa.HA = Ad.HD$, & $HD : HA = Aa : Ad$. & dividendo, $AD : HA = AD$ (vel *ad*) $: Ad$, propterea eſt $HA = Ad$, atque adeo $HD = Aa$. *Eſt ergo ſublimitas in ſectionibus conicis æqualis diſtantiæ apſidis remotioris à centro ſolicitationum, à foco ejus propiore.* Hinc varia deduci poſſunt, quorum nonnulla ſequuntur.

1°. Uni eidemque ſublimitati HA convenire quidem poſſunt infinitæ ſectiones conicæ AQ*a*; cum eadem manente A*d* diſtantia focorum *d*D poſſit eſſe magnitudinis cujuscunque; ſed non ideò una ea-

eademque omnibus competet celeritas jactus ſecundum Aa. Nam, quia $V^2 = \frac{1}{2}L.AB = \frac{1}{2}L.AD^2.AB : AD^2$ (ſeu, quia $AD^2.AB$ eſt ſolidum conſtans) eſt $\frac{1}{2}L : AD^2$, erit V ut $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, : AD. Id eſt, in diverſis ſectionibus conicis velocitates mobilis in alterutra apſide erunt in compoſita ratione ex ſubduplicata directa ratione laterum rectorum ſectionum, & reciproca ratione diſtantiarum apſidis à centro ſolicitationum.

2°. Si umbilicorum diſtantia Dd fuerit infinita, ſectio conica AQa eſt parabola focum habens in d, ac proinde ſublimitas $HA = Ad$ fit æqualis quartæ parti lateris recti L, ut Galilæus, aliique poſt ipſum plures ex aliis fundamentis demonſtrarunt. In hoc ergo conſectario continetur univerſa doctrina motus projectorum in hypotheſi gravitatis parallelarum *directionum*.

3°. Si mobile eadem velocitate V in A acquiſita poſt deſcenſum in HA circulum ex centro I, radiumque $AI = \frac{1}{4}L$ habentem deſcribat, conatus centrifugus mobilis in circulo eadem erit cum ſolicitatione centrali AB in apſide A ſectionis conicæ AQa.

4°. Gravitas uniformis, qualis apud nos eſt, ſe habet ad conatum centrifugum in dicto circulo, ſeu ad ſolicitationem centralem AB in A, ut $\frac{1}{2}AI$ ſeu $\frac{1}{4}L$ ad HA ſeu Ad. Adeoque in parabola ex foco d & vertice A deſcriptâ miſſilis gravitas in vertice ejus A, æquabitur conatui centrifugo in circulo prædicto.

VII. *De tempore Periodico in Sectionibus Conicis.* Vocentur tempus unius circuitus in ſectione AQa, T, diameter Aa, D; ejus conjugatus Qq, d; latus rectum l, diſtantia ſeu altitudo AD, A, ſolicitatio centralis AB in apſide A, G. Eruntque $d = \sqrt{lD}$, & area totius ellipſeos, hoc eſt, $2.AQa = \frac{1}{2}pDd$, ubi p eſt exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium. Eſt verò (§. 157.) $T = 2.AQaA : \frac{1}{2}AD.V$, ergo ſubſtituendo valores analyticos loco areæ & linearum AD, V; habebitur $T = pDd : Au$, ſeu $T^2 = ppD^2d^2 : A^2uu$, eſt vero $dd = lD$, & $uu = \frac{1}{4}lG$, ergo $T^2 (= ppD^3l : \frac{1}{4}lA^2G) = 2ppD^3 : A^2.G$. Hinc *quadratum ex tempore periodico eſt in compoſita ratione ex directa triplicata ratione lateris tranſverſi, & reciproca compoſita ratione duplicatæ diſtantiæ apſidis à foco, ſeu centro ſolicitationis, & ſimplæ ſolicitationis* G *in apſide*. Unde, quia ſolicitationes gravitatis ſunt in reciproca duplicata ratione diſtantiarum mobilis à centro, rationes compoſitæ ex duplicata diſtantiæ apſidum à centro & ſimpla gravitatis in apſidibus ſunt rationes æqualitatis, propterea ſunt quadrata temporum periodicorum, ut cubi diametrorum principalium in

ſectio-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [412] - 384
PUBLIC DOMAIN

sectionibus conicis. Et hæc est demonstratio Celebris Kepleri canonis.

VIII. *De Centro Oscillationis.* In theoria centri oscillationis Cap. V. Lib. I. exposita brevitatis tantum gratia posui, non verò ex necessitate, centrum oscillationis reperiri in linea centri, hoc est, in recta ex puncto suspensionis per centrum gravitatis figuræ oscillantis ducta. Methodus enim nostra perinde valet quæcunque linea accipiatur per punctum suspensionis, in qua centrum oscillationis existat, invenietur semper hanc lineam per centrum gravitatis figuræ oscillantis transire debere, prorsus ut idem etiam Celeb. Joh. Bernoullius in eleganti suo Schediasmate Act. Lipsi. 1714. mens. Junii §. 28. ostendit. Nam si in fig. 46. pendulum simplex CN composito isochronum per aliud punctum *m* quam per centrum gravitatis M figuræ oscillantis transire ponatur, quod tamen ita comparatum, seu positum, esse debet, ut linea ex hoc puncto *m* (in figura quidem non signato sed calamo aut mente facile supplendo) per centrum gravitatis M ducta horizontali CY ad angulos rectos semper occurrat, invenietur, semper, ut in §. 206, $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.) : G:M.mC$, ubi M, ut in citato loco, significat $E.P + F.Q + \&c.$ seu aggregatum ponderum omnium figuræ oscillantis partium. Jam verò, mutato utlibet angulo YCN, mutabitur simul magnitudo ipsius *m*C, ac propterea quantitas $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.) : G:M.mC$ constans & invariata fieri nequit, nisi coincidente *m*C, cum MC, atque adeò puncta *m* & M ubique confundantur, adeò ut hinc appareat centrum oscillationis necessariò in linea centri existere. Quod erat demonstrandum. Fig. 46.

IX. Applicatio hujus novæ theoriæ centri oscillationis nunc paulò uberius declaranda est, quam in §. 208, ubi formula tantum exhibetur pro figuris uniformis gravitatis. Designando particulas P, Q, &c. ut ibi per *dp*, earumque pondus per βdp, ita ut β gradum gravitatis denotet, &, si *g* significet gravitatem, qua simplex pendulum agitatur, & *z* distantiam particulæ oscillantis ab axe oscillationis, canon §. 206. $CN = (P.PC^2 + \&c.) : G:M.MC$ præbebit $t = g\int zzdp : \int \beta x dp$. Hinc, si $\beta = gzz : ax$, fiet $t = ag\int zzdp : g\int zzdp = a$.

Oscilletur jam figura BAD in *planum*, seu ita ut axis oscillationis semper maneat in plano figuræ oscillantis, atque adeò ordinatæ figuræ BD axi oscillationis QQ constanter parallelæ sint; erunt hoc casu ipsæ *z*, seu distantiæ punctorum ordinatæ, $BD = QC = x$, atque adeò $\int zzdp = \int xxdp$, &, quia $dp = BC.Cc = ydx$, erit $\int zzdp = \int xxydx$, Fig. 154.

$\int xxydx$, & $t(=g\int zzdp:\int\beta xdp)=\int gxxydx:\int\beta xdp$, vel, si omnes partes ordinatæ BD sint uniformis gravitatis, $=g\int xxydx:\int\beta xydx$.

Si eadem figura movetur in latus, id est, si planum figuræ oscillationis axi oscillationis rectum est; sit quælibet in ordinata BC ejus portio CI $=u$, & $dp=dudx$, erit $z=\sqrt{(QC^2+CI^2)}=\sqrt{xx+uu}$, hinc $zzdp=xxdudx+ududx$, & integrando, positis x & dx constantibus, invenietur $\int zzdp=uxxdx+\frac{1}{3}u^3dx$, vel (facta $u=y$) $=xxydx+\frac{1}{3}y^3dx$, sed hoc est tantum elementum respectu totius figuræ ABD. Et $\int\beta xdp=\int\beta xydx$, adeoque $t(=\int gzzdp:\int\beta xydx)=(\int xxydx+\int\frac{1}{3}y^3dx).g:\int\beta xydx$.

Fig. 154. Pro solidis rotundis sic est indaganda formula: sit BEAD ejusmodi solidum, cujus basis sit circulus BEDH, cujus diameter EF axi oscillationis QQ parallelus supponitur. Ad hanc diametrum EF demissis perpendiculis GL, gl, fiant CL $=t$, & ut antea LG seu CI $=u$, requiruntur primùm omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl continentur. Quia omnia $zzdp$, quæ in ordinata GL reperta sunt $xxu+\frac{1}{3}u^3$, omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl sunt, erunt $=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$. Ponantur jam $udt=d\alpha$, & $u^3t=\omega$, atque adeo $d\omega=u^3dt+3uutdu$. Sed circulus EBF præbet $tt+uu=yy$, vel ducendo hanc in udt, fiet $ttudt+u^3dt$, seu (ob $tdt=-udu$) $=-uutdu+u^3dt=yyudt=yyd\alpha$, vel etiam $3u^3dt-3uutdu=3yyd\alpha$, & addatur hæc æquatio ad alteram $u^3dt+3uutdu=d\omega$, fietque $4u^3dt=3yyd\alpha+d\omega$, vel $u^3dt=\frac{3}{4}yyd\alpha+\frac{1}{4}d\omega$, qui valor substituatur in $xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$, atque $d\alpha$ pro udt, fietque $zzdp(=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt)=xxd\alpha+\frac{1}{4}yyd\alpha+\frac{1}{12}d\omega$. Adeoque omnia $zzdp$, quæ in segmento circulari CBGL, seu α, continentur sunt $=xx\alpha+\frac{1}{4}yy\alpha+\frac{1}{12}\omega$, nam ipsæ QC, CB invariatæ, seu constantes, manent, utlibet variatis ipsis CL & GL, seu t ac u, adeo ut istarum respectu indeterminatæ x, y constantes sint. Jam, quia α significat segmentum CBGL, & ω factum CL. GL^3; erunt omnia $zzdp$ quæ in quadrante CBE continentur $=(xx+\frac{1}{4}yy)$. CBEC, cum evanescente GL in E, etiam factum CL. GL^3 seu ω evanescat. Hinc, si π designet exponentem rationis peripheriæ cujusque circuli ad radium, reperietur CBEC $=\frac{1}{8}\pi yy$, ac solidum CBEC. $Cc=\frac{1}{4}\pi yydx$, adeoque $\int zzdp$ in hoc solido, $=(\frac{1}{4}xxyydx+\frac{1}{12}y^4dx).\pi g$. Propterea erit $t=(\frac{1}{2}\int xxyydx+\frac{1}{3}\int y^4dx,).\pi g:\int\beta xdp$. Atque ex hisce jam omnibus emergent canones generalissimi, quales sequens tabella exhibet:

si po-

si ponantur $A = \int y dx$, $I = \int xyy dx$.
$B = \int xy dx$, $K = \int xxyy dx$.
$C = \int xxy dx$, $L = \int y^4 dx$.
$D = \int y^3 dx$. $N = y^3 x$.

In figuris agitatis in $\begin{cases} \text{Planum } t = gC : \int \beta x dp. \\ \text{Latus } t = (gC + \frac{1}{3}gD) : \int \beta x dp. \end{cases}$

In solidis rotundis $t = (\frac{1}{4}\pi gK + \frac{1}{6}\pi gL) : \int \beta x dp$.

Hi canones sunt generales, quia deserviunt in omni casu gravitatis uniformis aut pro libitu variabilis, nam, ut jam supra dictum, βdp generaliter indicat pondus absolutum cujusque elementi dp figuræ oscillantis, unde cum β infinitis modis variare possit, exinde satis in propatulo est, hos canones infinities infinitos diversos casus omnes complecti.

Si β est constans, præcedentes canones mutabuntur in eos, quos hæc altera tabella repræsentat.

$t = gC : \beta B$ - - - - - - - pro figuris in $\begin{cases} \text{Planum} \\ \text{Latus} \end{cases}$ agitatis.
$t = (gC + \frac{1}{3}gD) : \beta B$
$t = (gK + \frac{1}{6}gL) : \beta I$. Pro solidis rotundis.

Ut saltem usum horum posteriorum canonum ostendam, esto figura BAD circa axem QQ oscillans sectio conica, cujus æquatio generalis sit $\pm aa \mp ee \pm 2ex \mp xx = \frac{aa}{bb} yy$, in qua a designat semilatus transversum, b semiaxem conjugatum, e distantiam puncti suspensionis Q à centro sectionis, ac denique x, y coordinatas QC, CB. Si æquatio curvæ differentialis $\pm edx \mp xdx = \frac{aa}{bb} ydy$, ducatur in y, habebitur $\pm edx \mp xdx$ in $y = \frac{aa}{bb} yydy = \pm eydx \mp xydx = \frac{aa}{bb} yydy = \pm edA \mp dB$, &

per antithesin - - - - - - $\pm dB = \mp edA - \frac{aa}{bb} yydy$. Et

integrando - - - - - - - $\pm B = \pm eA - \frac{aa}{3bb} y^3$.

Porro, quia (secundùm hypothesin) $N = y^3 x$, cujus differentialis ducta in $\frac{aa}{bb}$ præbet - - - $\frac{aa}{bb} dN = \frac{aa}{bb} y^3 dx + \frac{3aa}{bb} xyydy$.

Ducatur æquatio curvæ in ydx, & fiet $\frac{aa}{bb}y^3dx = (\pm aa \mp ee).$
$dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC$

Aqu. verò differentialis in $3xy$ ducta præbet $\frac{3aa}{bb}xyydy =$
$\pm 3eedA - \frac{3aae}{bb}yydy \mp 3dC$ } Add.

Eritque ſumma $\frac{aa}{bb}y^3dx + \frac{3aa}{bb}xyydy = \frac{aa}{bb}dN = (\pm aa \pm 4ee).dA - \frac{5aae}{bb}yydy \mp 4dC$. Hujus integralis diviſa per 4. præbebit $C = (ee \pm \frac{1}{4}aa).A \mp \frac{5aae}{12bb}y^3 \mp \frac{aa}{4bb}xy^3$ (vel N).

Atqui B ſupra inventa eſt, ſcilicet $B = eA \mp \frac{aa}{3bb}y^3$.

Supra verò erat $\frac{aa}{bb}dD\,(= \frac{aa}{bb}y^3dx) = (\pm aa \pm ee).dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC$.

Et integrando reperietur $\frac{aa}{bb}D = (\pm aa \pm ee).A - \frac{2aa}{3bb}y^3 \mp C$ (vel ſubſtituendo hujus C valorem inventum) $= \pm \frac{1}{4}aaA - \frac{aae}{4bb}y^3 + \frac{aa}{4bb}xy^3$.

Atque adeo multiplicando æquationem per $\frac{bb}{aa}$, invenietur $D = \pm \frac{1}{4}bbA - \frac{1}{4}ey^3 + \frac{1}{4}xy^3$.

In hisce formulis omnibus A ſignificat aream ABC, unde, ſi valores reperti literarum B, C, D ſubſtituantur in duabus primis æquationibus poſterioris tabellæ, habebitur valor incognitæ t pro omni ſectione conica in planum & in latus agitata tam in aëre vel in vacuo, quam intra quemlibet liquorem; ſi in vacuo, erit $g = \beta$, & ſi in aliquo liquore, cujus gravitas ſpecifica ſit ad gravitatem ſpecificam figuræ oſcillantis, ut 1 ad n, erit $\beta = \frac{n-1}{n}g$.

Ex hisce repertis facili negotio deduci poſſunt omnia, quæ Celeb. Jac. Bernoulli tribus tabellis complexus eſt in *Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient.* 1703. ad 1. Dec. cui propterea non diutius immorabor, nec etiam oſtendere neceſſum duco, quomodo in ſectionibus conicis valores literarum I, K, L, inveniri debeant, cum hæc res ne tyronibus quidem negotium faceſſere poſſit, quandoquidem y in harum quantitatum elementis ubique ad duas dimenſiones aſcendit, adeo

ut

ut quantitates inde resultent, quæ absque ulla alia reductione integrabiles existant.

IX. *De Curvis Algebraicis per quotlibet data puncta ducendis.* Circa finem capitis VII. Lib. II. §. 283. mentionem feci problematis ducendæ curvæ algebraicæ per quotcunque puncta positione data, cujus solutionem Summus Newtonus primus invenit: ejus tamen solutionem mihi videre non contigit, excepta ea, quam in Lemmate V. Lib. III. Princ. Phil. Natur. sine omni analysi & demonstratione tradit, ubi lineam parabolici generis per quotlibet data puncta ducere docet. Hujus problematis ego solutionem annis 1704. & 1705. aggressus sum & obtinui, quam cum Illust. Leibnitio per literas communicavi, quæ *solutio summo viro non* prorsus displicuit, ut ex literis ejus annis 1705. & 1706. perhumaniter ad me datis colligi potest. Occasionem de hoc problemate cogitandi mihi præbuit epistola Newtoni ad Oldenburgium, in quâ hujus problematis meminit, & ex pulcherrimis id prædicat eorum, quæ solvere desideraſſet. Sed ad rem:

Si ergo per puncta quotcunque A, 1A, 2A, 3A, &c. & C ducenda sit curva algebraica, seu analytici generis, CDA, per alterutrum C extremorum punctorum linea duci potest quæcunque CB, quæ instar axis sit, ad quem ex singulis datis punctis ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. demittantur, producendæ subter axem in L, 1L, 2L, &c. & *ad alteram axis partem sint curvæ quæcunque* CFL, CGM, CHN, CIO, CKP, &c. Considerentur jam singulæ AL, 1A1L, 2A2L, &c. tanquam totidem vectes pondusculis A, L, M, N, O, P, &c. in punctis, hisce literis indicatis, onusti, sed quorum centra æquilibrii singula reperiantur in axe CB, scilicet in punctis ejus B, 1B, 2B, 3B, &c. & sequetur, quòd, ducta qualibet DF reliquis AL, &c. parallela, atque curvis subter axem occurrente in punctis F, G, H, I, K, &c. axique in E, hujus lineæ seu vectis DF, in punctis D, F, G, H, I, K, &c. pondusculæ eadem ac prius A, L, M, N, O, P, &c. appensa habentis, & centrum æquilibrii horum ponduscularum in E, brachium ED futurum sit ordinata curvæ regularis CDA per singula puncta A, 1A, 2A, 3A, &c. Ctranseuntis, perinde ac brachia EF, EG, EH, &c. ordinatæ sunt curvarum CL, CM, CN, &c. Atqui ex datis EF, EG, EH, EI, EK, &c. & ponderibus A, L, M, N, O, P, &c. invenietur ordinata ED in curva quæsita CDA. Tota ergo difficultas reducitur ad inventionem ponderum A, L, M, N, O, P, &c. Fig. 155.

vel proportionis horum. Atqui principium vectis præbet ſequentes æquationes

1. $A.AB = L.LB + M.MB + N.NB + O.OB + P.PB.$
2. $A.{}_1A_1B = L.{}_1L_1B + M.{}_1M_1B + N.{}_1N_1B + O.{}_1O_1B + P.{}_1P_1B.$
3. $A.{}_2A_2B = L.{}_2L_2B + M.{}_2M_2B + N.{}_2N_2B + O.{}_2O_2B + P.{}_2P_2B.$
4. $A.{}_3A_3B = L.{}_3L_3B + M.{}_3M_3B + N.{}_3N_3B + O.{}_3O_3B + P.{}_3P_3B.$
5. $A.{}_4A_4B = L.{}_4L_4B + M.{}_4M_4B + N.{}_4N_4B + O.{}_4O_4B + P.{}_4P_4B.$
6. $A.{}_5A_5B = L.{}_5L_5B + M.{}_5M_5B + N.{}_5N_5B + O.{}_5O_5B + P.{}_5P_5B.$

Hæ æquationes continuò à ſe invicem ſubductæ, ſcilicet ſecunda à prima, tertia à ſecunda, quarta à tertia & ſic deinceps, atque reſiduæ diviſæ per reſpectivas differentias ordinatarum AB, ${}_1A_1B$; ${}_1A_1B$, ${}_2A_2B$; ${}_2A_2B$, ${}_3A_3B$, &c. habebuntur quinque æquationes, in quibus ſingulis A erit ex una parte ſola, & ſi in reliquis membris, pro ſingulis $BL - {}_1B_1L$; $BM - {}_1B_1M$; $BN - {}_1B_1N$, & ſic deinceps, diviſis per $AB - {}_1A_1B$, ſcribantur Q, R, S, T, V, in quinque reſiduis æquationibus, & eæ eodem modo tractentur ac ſex primæ, ſequentes ſcilicet ab antecedentibus ſubducendo, relinquentur quatuor novæ, quæ per reſpectivas $Q - Q_1$, $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - Q_3$, $Q_3 - Q_4$ dividantur & pro $R - R_1 : Q - Q_1$; $S - S_1 : Q - Q_1$; $T - T_1 : Q - Q_1$; $V - V_1 : Q - Q_1$; ſcribantur r, s, t, u; item pro $R_1 - R_2 : Q_1 - Q_2$; $S_1 - S_2 : Q_1 - Q_2$, &c. r_1, s_1, t_1, u_1. Pro $R_2 - R_3 : Q_2 - Q_3$; $S_2 - S_3 : Q_2 - Q_3$, &c. r_2, s_2, t_2, u_2; & ſic porro eodem ordine, & hæ ſubductiones ac diviſiones continuentur usque dum unica tantum ſuperſit æquatio, poterunt in quantitatibus datis omnes A, L, M, N, O, P, &c. exhiberi, aut ſaltem omnes excepta ultima P, quæ arbitrariæ magnitudinis eſt, nam factis debitis reductionibus invenietur

$O = -P\omega.$
$N = -O\tau - P\eta.$
$M = -N\sigma - O\theta - P\upsilon.$
$L = -Mr - Ns - Ot - Pu.$

$A = LQ + MR + NS + OT + PV$. In his æquationibus eſt $dLB : dAB = Q$; $dMB : dAB = R$; $dNB : dAB = S$, $dOB : dAB = T$; $dPB : dAB = V$. Sic $d{}_1L_1B : d{}_1A_1B = Q_1$; $d{}_1M_1B : d{}_1A_1B = R_1$; $d{}_1N_1B : d{}_1A_1B = S_1$, &c. Nec non $d{}_2L_2B : d{}_2A_2B = Q_2$; $d{}_2M_2B : d{}_2A_2B = Q_2$; &c. Ubi notandum literam d cuilibet ordinatæ præpoſitam ſignificare differentiam, inter hanc ordinatam ipſique proximam verſus

ſus C in eadem curva; reliquæ quantitates ſic etiam facile definiuntur, ſcilicet:

$r = dR:dQ; r1 = dR1:dQ1$, &c.
$s = dS:dQ; s1 = dS1:dQ1$, &c.
$t = dT:dQ; t1 = dT1:dQ1$; &c.
$u = dV:dQ; u1 = dV1:dQ1$; &c.

$\sigma = ds:dr; \sigma 1 = ds1:dr1$ &c.
$\theta = dt:dr; \theta 1 = dt1:dr1$ &c.
$v = du:dr; v1 = du1:dr1$ &c.

$\tau = d\theta:d\sigma; \tau 1 = d\theta 1:d\sigma 1$
$\eta = dv:d\sigma; \eta 1 = dv1:d\sigma 1$

$\omega = d\eta:d\tau$.

Hoc loco litera *d* ſignificat differentiam inter magnitudinem, cui præfigitur & alteram eadem litera, ſed cum unitate adſcripta indicatam, ſic $dR = R - R1$, $dQ = Q - Q1$; $dR1 = R1 - R2$, & ſic de reliquis. Inventis ita valoribus ponderum A, L, M, N, O, &c. iidem ſubſtituendi ſunt in æqualitate $A.DE = L.FE + M.GE + N.HE + O.IE + P.KE$, atque ſic per ordinatas FE, GE, HE, IE, KE, &c. & alias datas quantitates aſſignari poteſt ubique ordinata DE curvæ CDA per data puncta A, 1A, 2A, &c. transeuntis. Quod erat inveniendum.

Coroll. I. Curva genita CDA ejusdem ſemper eſt gradus cum curva gradus altiſſimi ex generatricibus CFL, CGM, CHN, &c.

Coroll. II. Area genitæ CDA ex areis generatricium ſemper inveniri poteſt. Eſt enim generaliter $A.CDE = L.CFE + M.CGE + N.CHE + O.CIE + P.CKE$. Unde, ſi hæ areæ curvarum generatricium ſint quadrabiles, etiam figura genita quadrabilis erit.

Coroll. III. Si curvæ genitrices ſunt generis parabolici, earum areæ *ſunt quadrabiles, ac proinde etiam genita quadrabilis exiſtet*: cum igitur pro generatricibus curvæ quæcunque eligi poſſint, atque adeò curvæ quadrabiles, inde clarum eſt omnes curvas per appropinquationem quadrabiles eſſe, tot enim, quot libuerit, in ea poſſunt puncta aſſumi, & per ea curva quadrabilis duci, cujus area curvæ propoſitæ areæ quam proxime æqualis erit.

Coroll. IV. Imò omnis curva per appropinquationem rectificari poteſt. Curvarum enim rectificatio ad quadraturas reducitur, quæ per præcedens corollarium, per appropinquationem, ſemper habentur. Idem intelligendum de centris gravitatis figurarum & ſolidorum, tum etiam de hisce ſolidis ipſis aliisque. Hæc enim omnia quam proxime vero haberi queunt.

Coroll. V. Ex hisce etiam cognoſcitur *maximus* punctorum datorum numerus, per quæ curva dati gradus duci poteſt. Hic enim numerus *eſt ſemiſſis producti ex exponente gradus curvæ in eundem exponentem ternario auctum.* Hoc modo ſcimus lineam primi gradus, ſeu rectam, non niſi per 2. puncta, poſitione ut libet data, duci poſſe; eſt enim

enim $2=\frac{1.4}{2}$, sectionem conicam per quinque, nam $5=\frac{2.5}{2}$. Curvam tertii gradus per novem, nam $9=\frac{3.6}{2}$.

Fig. 156. *Aliter*. Loco generatricium assumi possunt lineæ rectæ AF, 1A1F, 2A2F, &c. inter se parallelæ, & quemlibet angulum cum axe CA continentes atque, necessitate ita postulante, supra axem producendæ, ut schema ostendit. Sint ergo puncta, per quæ curva duci debet B, 1B, 2B, &c. C. Per B agatur BN æquidistans AC, & ex singulis punctis datis B agantur perpendicula BA, 1B1A, &c. producenda sursum in 1O, 2O, &c. deinde ducta ubilibet recta MG parallela AB obliquas AF secante in punctis, G, H, I, K, L, &c. & axem AC in E. Quibus peractis fiat ubilibet MD=G.EG+H.EG.EH+I.EG.EH.EI+K.EG.EH.EI.EK−L.EG...EL, in qua valores assumtarum G, H, I, K, L sunt definiendi sequenti ratione. Si punctum E cadit in A, linea EG evanescet, & reliquæ HE, IE, &c. supra axem erunt, verum quoniam EG jam in punctum A contracta nullescit, & in omnia reliqua membra influit, erit MD in BA nulla. Sin vero E cadit in punctum 1A, fiet EG tunc =1A1P, & EH=0, adeoque eo casu, quo MD fit 1O1B, erit 1O1B=G.1A1P, seu G=1O1B:1A1P. dicatur GI=2O2B:2A2P, G2=3O3B:3A3P, &c. Porrò si punctum E cadit in 2A, fiet MD=2O2B, & EG=2A2P, HE=2A2Q, & IE=0, ergo 2O2B=G.2A2P+H.2A2P.2A2Q, 3O3B=G.3A3P+H.3A3P.3A3Q+I.3A3P.3A3Q.3A3R, atque ita deinceps; ex quibus omnibus sequens resultat tabella, postquam scilicet singulæ æquationes ad respectivas AP applicatæ fuerunt:

G(=1O1B:1A1P)=G
G1(=2O2B:2A2P)=G+H.2A2Q
G2(=3O3B:3A3P)=G+H.3A3Q+I.3A3Q.3A3R
G3(=4O4B:4A4P)=G+H.4A4Q.+I.4A4Q.4A4R+K.4A4Q.
&c. &c. &c. &c. [4A4R.4A4S

Si porro prima à secunda, secunda à tertia, tertia à quarta, atque ita porro subducantur, erit G1−G=H.2A2Q; G2−G1=H.3A3R+I.3A3Q.3A3R; &c. Et ponendo *d*G, *d*G1, *d*G2 pro G1−G, G2−G1, G3−G2, &c. fient H=*d*G:2A2Q; H1=*d*G1:3A3R; H2=*d*G2:4A4S; &c. & I=*d*H:3A3Q; I1=*d*H1:4A4R; &c. ac denique K=*d*I=4A4Q. Et sic porrò; nam ex hisce continuationis lex satis patet. Inventi valores magnitudinum G, H, I, K, &c.

K, &c. in superiori æqualitate MD = G. GE + H. GE. HE + I. GE. HE. IE + K. GE. HE. IE. KE, &c. substituantur, dabitur sic ipsa MD in lineis GE, HE, IE, KE, LE, &c. & magnitudinibus datis, atque adeò punctum D in curva quæsita. Quod erat secundo inveniendum.

Coroll. I. Si rectæ AF, 1A1F, &c. angulo semirecto ad AC inclinatæ sunt, provenit casus secundus hujus problematis ab Illustr. Newtono solutus Lemm. V. Lib. III. Princ. Phil. Nat. in ejus solutione enim a, b, c, d, e, f, &c. idem prorsus sunt cum G, H, I, K, L, &c.

Coroll. II. Iisdem positis, quæ in præcedenti corollario, si intervalla singula A1A, 1A2A, 2A3A, &c. sint æqualia & dicantur p, & differentiæ ordinatæ AB, prima, secunda, tertia, &c. erunt $G = \delta : p$; $H = \delta 2 : 2.pp$; $I = \delta 3 : 2.3.p^3$, &c. quod congruit solutioni Newtonianæ primi casus in Lemmate citato.

Coroll. III. Si insuper AE vel EG dicatur z, DE, u, & AB = y, erit $u = y - Gz - H.(zz - pz) - I.(z^3 - 3pzz + 2ppz) - K.(z^4 - 6pz^3 + 11ppzz - 6p^3z)$ - &c. & area $ABDE = yz - \frac{1}{2}Gzz - H.(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}pzz) - I.(\frac{1}{4}z^4 - pz^3 + ppzz) - K.(\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{2}pz^4 + \frac{11}{12}ppz^3 - 3p^3zz) -$ &c. Hoc loco enim y est constans, & z ac u sunt variabiles. Hinc, si p sunt indefinite parvæ, erunt singulæ $p = dz$, & ipsæ δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. hoc casu fient dy, $-ddy$, $+dddy$, $-d^4y$, &c. & in præcedenti serie membra omnia, quæ p continent, evanescent, totaque series abibit in $yz - \frac{1}{2}Gzz - \frac{1}{3}Hz^3 - \frac{1}{4}Iz^4 +$ &c. = areæ ABDE, atqui sunt $G = \frac{dy}{dz}$, $H = \frac{-ddy}{2.dz^2}$, $I = \frac{+dddy}{2.3\,dz^3}$; &c. ergo area $ABDE = yz - \frac{zzdy}{2dz} + \frac{z^3ddy}{2.3dz^2} + \frac{z^4dddy}{2.3.4dz^3} +$ &c. Quæ est ipsissima series universalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in Actis Lipsi. 1694. exhibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicuit.

Cæterum, loco rectarum transversalium AF, 1A1F, curvæ quæcunque parallelæ assumi possunt, vel una eademque curva axem in linea CF, verticem verò successive in punctis diversis ipsius CF habens.

X. *De velocitate liquorum per foramina quæcunque ex vasis erumpentium.* In Propositione XXXII. Lib. II. demonstravimus quidem post Clar. Varignonium aliosque celeritates liquorum ex vasis effluentium in subduplicata esse ratione altitudinis liquorum supra foramina vasis aquam emittentia, sed non demonstravimus, nec quisquam alius quod sciam, *aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vase erumpere*,

pere, eadem conſtanter manente aquæ altitudine ſupra foramen, *quam aquæ guttula orificio proxima acquirere poteſt caſu accelerato ex altitudine liquoris ſupra orificium.* Nam hoc principium, inſtar hypotheſeos, ſuppoſuerunt Torricellius, Borellus, Gulielminus aliique, atque exinde recte deduxerunt, aquas eodem tempore per foramina æqualia effluentes, ſeu etiam celeritates effluxus in ſubduplicata eſſe ratione altitudinis aquarum ſupra foramina. Sed hæc ſuppoſitio tantæ non videtur evidentiæ, ut nulla demonſtratione egeat; nam præterquam quod Celeb. Newtonus, Propoſ. XXXVII. Lib. II. Princ. Math. primæ editionis, demonſtrare conatur, aquam ea cum velocitate erumpere ex vaſis, quâ motu ſuo in altum converſo ad dimidiam altitudinem aquæ ſupra foramen evehi poſſit, ſed quam propoſitionem in noviſſimis editionibus omiſit. Torricellius ſuppoſitioni ſuæ, non propter evidentiam, ſed potius propter conſenſum ejus, cum experientia acquievit.

Fig. 157. Eſto vas quodcunque BFC aquæ vel cujusvis alius liquoris homogenei plenum, F foramen ejus, FA altitudo aquæ ſupra foramen F. Concipio columnam aqueam A*p* per temporis tractum indefinite parvum *dt*, uniformiter urgere particulam aquæ infiniteſimam *p*F, eoſcilicet tempusculo, quo hæc particula, quam *p* nominabimus, proprio pondere ſeu gravitate, longitudinem F*f* particulæ *p*F ſeu *p* æqualem acquirere poteſt celeritatis gradum infiniteſimum *u*. Et ſint *g* ſignum gravitatis naturalis, qua ſingula corpora apud nos agitantur, A altitudinis aquæ AF, & denique V velocitatis, qua per foramen F erumpit; M maſſæ tempusculo *dt* effluentis, ac *m* maſſa particulæ *p*F. Hisce poſitis per §. 31. pondus columnæ A*p* vel AF exponetur per A.F.*g*; & pondus elementi *p*F per *p*.F.*g*. Sed hæc facta ſunt ut ſolicitationes acceleratrices motus M.V & *m.u*, tempusculo *dt* generantes; idcirco habemus (§. 130.) A.F.*g*.*dt* : *p*.F.*g dt* = M.V : *m.u*, id eſt, A.*g* : *p.g* = M.V : *m.u*; atqui M : *m* = ½V*dt* : ½*udt* = V : *u* ex natura motus accelerati in fluidis, ergo A*g* : *pg* = VV : *uu*, atqui 2*pg* (§. 150.) = *uu*, ergo VV = 2.A.*g*; hoc, eſt velocitas V, quâcum aqua per foramen F erumpit (§. 150.) ea eſt, quam particula infiniteſima aquæ *p*F acquirere poſſet motu naturaliter accelerato per deſcenſum ex altitudine A ſeu AF. Quod erat demonſtrandum.

Atque hinc jam tutiſſime deducitur, *quantitates aquæ per idem vel æqualia foramina effluentis, vel etiam celeritates ejus, eſſe in ſubduplicata proportione altitudinum.*

XI. Ca-

XI. Capite XX. Lib. II. expoſui generalem theoriam gravitatis variabilis, cum ſcilicet corpora ſolicitantur ſecundum directiones quascunque uniformi tamen lege procedentes, propterea conſiderari has directiones contingere curvam quamlibet, vel, quod eodem recidit, ſuppoſui easdem directiones curvæ cuicunque pro libitu aſſumtæ normales eſſe, ad id ut lex continuitatis in hisce obſervaretur. Sed, quia ſolutio problematis in propoſitione LXXVI. evoluti ea eſt, in quam primum incidi, ideo, quod plerumque accidere ſolet, ejus analyſis geometrica paulo longior atque difficilior evaſit. Verùm poſteaquam hoc opusculum jam ſub prælo eſſet, faciliorem paulo &, ni fallor, elegantiorem ejusdem problematis nactus ſum ſolutionem, quam cum analyſi ipſa vel potius demonſtratione cum Benevolo Lectore hoc loco communicare placet. Eſto curva quæcunque AMΩ mobili deſcribenda, ac ſolicitationum gravitatis MX directiones MN ubique normales ſint curvæ cuicunque AY*y* deſcriptæ evolutione BN, quam proinde directiones MN ubique contingent. Tangenti AB ſurſum productæ in Δ curvæ BN in B, agatur per A perpendicularis indefinita CAV, & in quadrante ÇKΦ centro A & radio quocunque deſcripto dûctis AI & AK radiis cum AC angulos CAI, CAK continentibus æquales angulis BA*α*, NMP, in quibus lineæ AB, MN curvæ AMΩ occurrunt, agantur rectæ I*a*, KQ parallelæ AC & producantur usque ad occurſum in *d* & L cum hyperbola *OdT* inter aſymptotas Δ*A*, *AV* deſcripta. Circa axem verò AB deſcripta ſit curva quædam DE hâc lege, ut abſciſſa ejus AF æquet ubique homologam interceptam YM inter curvam AY & datam curvam AM mobili deſcribendam, ordinatæ verò FE ordinatam ΔO in hyperbola abſciſſa ejus AΔ poſita = MN. Et, ſi mobile incedat in medio reſiſtente, cujus reſiſtentiæ ſint in compoſita ratione denſitatum & duplicatæ celeritatum, fiat in hyperbola quadrilineum *d*DST vel *d*DΣ⊙ æquale ſuperficiei cylindricæ, cujus baſis arcus AM curvæ deſcribendæ, quæ cylindrica ſuperficies oritur, ſi in ſingulis punctis arcus AM ad ejus planum perpendiculares erigantur proportionales denſitati medii D, in reſpectivis curvæ punctis, inſervietque quadrilineum *d*S deſcenſui mobilis ex A in M, alterumque *d*Σ aſcenſui ejusdem mobilis ex M in A. Hisce præparatis, Fig. 158.

Dico velocitatem mobili in M *acquiſitam poſt deſcenſum per arcum* AM *fore ad celeritatem initialem in* A *in compoſita ratione, ex hisce tribus* Aa *ad* AQ, *ſeu reciproca ſinus anguli* NMP *ad ſinum anguli* BA*α*, *ex* Aa *ad* AG, *ſeu abſciſſæ minoris ad majorem quadrilinei hyperbolici*

bolici aGHd *æqualis areæ* DEFA, *ac denique ratione* AD *ad* AS *vel* AΣ.

Demonſtr. 1°. Exponant, ſicut in §. 607. MR vel *m*R radium evolutæ curvæ AM in puncto M vel *m* & MX ſolicitationem gravitatis mobile ſecundum MN urgentem, & agatur XZ parallela tangenti curvæ MP in puncto M, eruntque triangula AKQ, MXZ & *Mμm* ſimilia, poſteaquam centro *v* arculus *mμ* deſcriptus fuerit, cum in triangulis rectangulis AKQ, MXZ, angulus AKQ alternus ipſius KAC (conſtr.) æqualis ſit angulo PMX, vel ejus alterno MXZ; hinc ZX : MZ = KQ : AQ.

2°. Ducta per *m* alia tangente *mp*, anguli recti RMP & R*mp* præbent *nmp* + *nm*R = NMP + NMR, & KA*k* (= *nmp* − NMP) = NMR − *nm*R = R*ωv* − *nm*R, R*ωv* + NMR = *Mνm* − MR*m*. Ergo (§. 129.) $\frac{Kk}{KA}$ (vel propter triangulorum AKQ & K*ku* ſimilitudinem) $\frac{Qq}{KQ} = \frac{m\mu}{m\nu} - \frac{Mm}{RM}$, atque adeò $\frac{Mm}{MR} = \frac{m\mu}{MN} - \frac{Qq}{KQ}$. Ducantur rationes Mm : MR; mμ : MN, & Qq : KQ in ſequentes, quæ (num. 1. hujus) omnes inter ſe æquales ſunt ZX : MZ; Mμ : mμ & KQ : AQ, prima in primam, ſecunda in ſecundam, &c. fietque ZX. Mm : MZ. MR = Mμ : MN, − Qq : AQ. Hæ verò poſtremæ rationes ducantur etiam pari ordine in hæc ſequentia rectangula A*a. ad*; AΔ. ΔO; AQ. QL, quæ in hyperbola omnia inter ſe æquantur, eritque *Aa. ad.* ZX. Mm : MZ. MR = ΔO. Mμ − QL. Qq (conſtr.) = FE. Ff − QL. Qq.

3°. Significent porrò AV celeritatem in M acquiſitam, V*u* ejus elementum, R verò reſiſtentiam medii in M & D, ut antea ejus denſitatem; & hisce poſitis (§. 607. num. 11.) habetur, AV. V*u* = ZX. Mm ∓ R. Mm, ſeu ducendo unam partem in A*a. ad*; alteramque in AV. VW, reperietur *Aa. ad.* ZX. Mm ∓ *Aa. ad.* R. Mm = AV². WV. V*u*. Verùm, cum (ſecundùm hypotheſin) R ſit ut D. AV², fiat *Aa. ad.* R = D. AV²; eritque AV². WV. V*u* = *Aa. ad.* ZX. Mm. ∓ D. AV². Mm, quia verò (§. 154.) AV² = MZ. MR, applicando præcedentem æquationem ad hanc alteram, ſcilicet membra ejus AV² continentia ad hoc quadratum AV², & reliquum ad MZ. MR, fiet WV. V*u* = *Aa. ad.* ZX. Mm : MZ. MR, ∓ D. Mm. Atqui num. 2. in fine reperimus jam *Aa. ad.* ZX. Mm : MZ. MR = FE. Ff − QL. Qq; ergo WV. V*u* = FE. Ff − QL. Qq ∓ D. Mm (vel, quia D. Mm per conſtr. æquatur vel S*s*. ST ut in deſcenſu, aut − ΣΘ. Σσ, ut in caſu aſcenſionis, cum quadrilinea *d*S & *d*Σ ſingula æquentur, (conſtr.) omnibus D, Mm, quæ in arcu curvæ deſcribendæ AM continentur)

WV.

WV. V*u* = FE. F*f* − QL. Q*q* − ST. S*s* (vel ΣΘ. Σ*σ*). Unde, cum hoc idem eveniat reſpectu cujusvis alius curvæ elementi, erit *d*DVW = AFED − *a*QL*d* = *d*DST (*d*DΣΘ), vel, quia (conſtr.) quadrilineum *a*GH*d* æquatur areæ AFED, = *a*GH*d* − *a*QL*d* − *d*DST (*d*DΣΘ). Hæc enim quadrilinea omnia evaneſcunt cum punctum M cadit in A, vel punctum K in I. Idcirco ratio AV ad AD (§§. 605, 606.) componetur ex directa *a*A ad GA & duabus reciprocis rationum QA ad *a*A, & AS vel AΣ ad AD, ac propterea velocitas acquiſita in M eſt ad velocitatem in A ſeu AV : AD = *a*A. *a*A. AD : GA. QA. SA (ΣA). Quod erat demonſtrandum.

Iisdem poſitis *erit ſolicitatio gravitatis* MX *ſecundum* MN *ad ſolicitationem* AX *in puncto* A *ſecundum* AB *in compoſita ratione ex directa duplicata ratione* AV *ad* AD, *& inverſa rectanguli ex* MR *in ſinum anguli* NMP *ad rectangulum ex* AR *in ſinum anguli* BAA, *id eſt*, MX : AX = (AV² : MR. AQ) : (AD² : AR. A*a*).

Nam, quia (§. 154.) AV² = MZ. MR, vel AK. AV² = AK. MZ. MR (vel propter triangula ſimilia AKQ & MXZ rectangulum AQ. MX æquatur rec-lo AK. MZ) = AQ. MX. MR, & AK. AD² = A*a*. AX. AR, erit omnino AQ. MR. MX : A*a*. AR. AX = AV² : AD²; atque adeo MX : AX = (AV² : MR. AQ) : (AD² : AR. A*a*). Idcirco erit etiam MX : AX = A*a*⁵. AD². AR : AQ³. AG². AS² (AΣ²). MR. Qui eſt canon generalis, quoties reſiſtentiæ ſunt ut D in AV², ſin verò hæ reſiſtentiæ ſint generaliores, ut D. AV^h, exiſtente *h* numero quolibet rationali, ratio AD ad AS obtinebitur methodo jam §. 622. expoſita. In vacuo fit hæc ratio AD ad AS æqualitatis, eoque caſu erit MX : AX = A*a*⁵. AR : AQ³. AG². MR.

XII. *Iisdem adhuc poſitis* D *eſt generaliter*, *ut* (3KQ : 2AQ. MR) − (QK : 2AK. MN) − (P : 2MX) − (RΓ : 2MR²) *& reſiſtentia ad gravitatem*, *ſeu* ± R : MX = (3KQ : 2AK) − (RΓ. AQ : 2AK. MR) − (KQ. AQ. MR : 2AK². MN) − (P. AQ. MR : 2AK. MX). In quibus formulis RΓ ſignificat radium oſculi in puncto R curvæ RR, cujus evolutione curva data AM deſcribitur, & P ſignificat exponentem rationis, quam elementum magnitudinis MX gravitatis in M ſecundum MN, habet ad elementum M*m* curvæ mobili deſcribendæ. Fig. 158.

Demonſtrationem horum duorum canonum non addo, cum ea ad præcedentium imitationem & normam facile haberi queat. Sed, ut eorum conſenſus cum aliorum inventis appareat, eos caſibus particularibus nonnullis Celeberrimorum virorum Newtoni & Joh. Bernoullii applicabimus.

1°. Sit curva AM ipſe circulus ΦKC mobili deſcribendus à gravitate uniformiter agente ſecundum directiones ipſi AQ parallelas, quo caſu P, & Rr evaneſcunt, MN fit infinita, & MR = AK, propterea erit D, ut 3KQ : 2AQ. AK, hoc eſt, ſicut tangens anguli KAQ & reſiſtentia ad gravitatem, ut 3KQ ad 2AK, plane ut laudatiſſimi Autores invenerunt.

2°. Si loco curvæ AM ſumatur curva, in quâ directiones gravitatis uniformis MN parallelæ ſint inter ſe, erit D ut $(3KQ : 2AQ. MR) - (Rr : 2MR^2)$, & $\frac{\pm R}{MX} = (3KQ : 2AK) - (Rr. AQ : 2AK. MR)$. Nam, quia MN in hisce ſuppoſitionibus ſunt infinitæ, ſingulæ fractiones, in quarum denominatoribus hæ MN reperiuntur, evaneſcent. Vocentur itaque ordinatæ curvæ datæ y, ſecundum quas gravitas uniformis operatur, abſciſſæ reſpectivæ x, radius curvaturæ in M ſeu $MR = r$, exiſtentibus $M\mu = dy$ & $m\mu = dx$, poſitis ſcilicet omnibus MN inter ſe parallelis, ratio vero $Rr : MR = dr : ds$, facto elemento curvæ $Mm = ds$. Adeoque in hisce ſymbolis erit D ut $\frac{3dy}{2rdx} - \frac{dr}{2rds}$, & $\frac{\pm R}{G} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{drdx}{2ds^2}$. Sed exiſtentibus dx conſtantibus erit $r = ds^3 : dxddy$, & $dr = \frac{3dsdy}{dx} - \frac{ds^3 dddy}{dxddy^2}$, quibus valoribus in formulis ſubſtitutis reſultat D, ut $dddy : 2dsddy$; & $\pm R : G = dsdddy : 2ddy^2$ qui duo poſtremi canones ad amuſſim conſpirant cum formulis Celeb. Newtoni Propoſ. X. Lib. II. Edit. noviſſimæ Princip. Phil. Nat. Nam, ſi in hisce noſtris loco dy, ds, ddy & $dddy$ ordine ſubſtituantur Qo, $o\sqrt{1+QQ}$, $2Roo$, & $6So^3$, quæ in expreſſionibus Newtonianis elementis illis æqualia ſunt, erit omninò D, ut $\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, & $\frac{\pm Res.}{Grav.} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Prorſus ut habet Newtonus loco citato.

Fig. 38. XIII. In demonſtratione Propoſ. XXV. Lib. I. §. 167. irrepſit error, dum elementum ordinatæ AE tanquam poſitivum ſpectavimus, idcirco in progreſſu demonſtrationis illius ſigna ipſius Aξ ubique ſunt invertenda, quo facto invenietur $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(-DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2).nn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^5}$. Ponendoque $HE = A \mp e$, atque adeo $\Delta E = \Delta E = HE : B$, & $E\Omega = B.HE : B^2 - C.HE$,

HE, ubi $B = dA : dz$; $C = dB : dz$ & $DE = z$, item $AL = r$, ac $rr - ee = ss$, hæc appoſita formula factis in ea ſubſtitutionibus valorum linearum DE, EΔ. EΩ, prodibit æquatio circa finem §. 169. exhibita. Verum, quia nonnihil elegantior, ut mihi videtur, ſolutio ejusdem problematis ſeſe mihi obtulit, eam hoc loco apponere placet. Circa rectam AC, tanquam axem, deſcripta ſit curva quæcunque ΠB, radioque etiam pro lubitu ſumto AC, atque adeo centro C circulus AG, cujus tangens in A erit linea recta indefinita OAΠ, ac per quodlibet punctum B curvæ ΠB ductis tangente BV ordinataque BR producenda usque ad occurſum ejus cum circulo in G, dividatur ſubtangens RV in S, ut RS ſit ad totam RV ut 1 ad numerum quemcumque rationalem n, ac jungatur SG, tum ducatur per A recta AL cum CAa continens angulum PAQ æqualem, *ubique* reſpectivo angulo GSR, atque hoc idem ſi factum fuerit cum tangente & ſubtangente ad punctum curvæ Π, reſultet recta Aλ, quemadmodum in ordine ad punctum B curvæ ΠB provenit AL. Exponat AI celeritatem mobilis curvam AN deſcribentis in puncto A exiſtente centro ſolicitationum centralium D, per punctum I ducta indefinita IK parallela AC, ſumatur in Aλ ſegmentum Aα = AΠ & per α agatur αK parallela AI, rectæ IK conveniens in K, per quod punctum deſcripta intelligatur hyperbola KM inter aſymptotas Aa & AI. Porro in AL ſumta AQ æquali reſpectivæ ordinatæ RB curvæ ΠB ducatur QP parallela AΠ, quæ producta occurrat hyperbolæ in M, ac denique in ordinata MO per hoc punctum M ad aſymptotam AO ducta ac deorſum producta, fiat OF æqualis differentiæ ordinatarum AΠ, RB & punctum F erit in ſcala celeritatum mobilis in curva altera AN incedentis. Hæc autem curva AN ita comparata eſt, ut radii vectores AD = AΠ, & ND = RB, per ejus terminos ducti, angulum ADN contineat, qui ſit ad angulum in circulo ACG, ut 1 ad numerum qui antea n. Eſto Nq curvæ AN tangens in N, ſuper quam cadat perpendicularis Dq, ac centro D deſcripti ſint arcus EN arculusque np, poſitoque in fig. 159. angulo GCg ad ang. NDn = n : 1 agatur gb parallela GB. Fig. 160.

Demonſtr. Quia angulus infiniteſimus NDn eſt ad GCg ut 1 ad n, ſeu (conſtr.) = RS : RV, & (§. 129.) arculus pn ad Gg in compoſita ratione anguli NDn ad angulum GCq, vel 1 ad n, ſeu RS ad RV, & radii DN vel ordinatæ RB ad radium GC, erit pn : Gg = RS. RB : GC. RV; atqui eſt Gg : $b\beta$ (= GC : GR) = GC. RV : GR. RV;

RV; & $b\beta$: Np (vel Bβ) = RV : RB = GR. RV : GR. RB. Ergo ex æquo pn : Np = RS. RB : GR. RB = RS : GR, vel (quia PAQ angulo GSR æqualis factus est) = AP : PQ, est verò etiam pn : Np = Dq : Nq, ergo AP : PQ = Dq : Nq. hinc, quia AQ (constr.) = DN, erit AP vel MO = Dq, & Aa = IK = Dδ. Unde, cum (§. 155.) Dq sit ad Dδ, ut velocitas in A repræsentata per AI ad velocitatem in N, & in hyperbola KM, ordinata MO sit ad KI ut AI ad AO, hæc AO omnino exponit celeritatem in N, & cum OF vel AE (constr.) æquet differentiam ordinatarum AΠ, RB, id est, ordinatarum AD, ND, in utraque figura erunt æquales ipsæ AE, atque adeo curva HIF erit scala celeritatum mobilis in curva AN descendentis vel ascendentis, adeoque ducta ejus normali ET exponet subnormalis ET (§. 134.) solicitationem gravitatis secundum ND in curvæ AN puncto N. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Si D fuerit origo abscissarum DR, atque hæ abscissæ dicantur A, ordinatæ respectivæ RB, z, radius AC, r, distantia originis abscissarum curvæ ΠB à centro circuli AH, seu DC, e; erit CR = e + A, si punctum D cadit inter C & R, ut in figura, vel e = A, si inter A & R, ac denique A − e, si punctum D cadit extra radium AC; ponamus ergo CR = $e \pm$ A, eritque GR = $\sqrt{(ss \mp 2eA - A^2)}$ ubi $ss = rr - ee$, dicatur pariter elementum abscissæ DR seu Rr = B. dz, eritque RV = Bz, & RS = $\frac{1}{n}$ Bz, substitutisque omnibus hisce symbolis in præcedenti constructione, reperietur $AO^2 = FE^2 = \frac{1}{zz} + \frac{(ss \mp 2eA - A^2).nn}{B^2 z^4}$, & ex hac elicietur ipsissima formula circa finem §. 169. Patet ergo hanc posteriorem cum priori egregie consentire.

Hinc, si puncta D, C coincidunt, curvaque ΠB est hyperbola inter asymptotas orthogonales in C convenientes, quarum AC una, erit in curvæ AN puncto N gravitas, secundum ND, ut $\frac{1 - nn}{z^3}$ & ipsa curva AN erit ea, cujus Newtonus & Joh. Bernoullius constructiones diversas in speciem, re vera tamen conspirantes, exhibuerunt, hic in Act. Lipsi. 1713. pag. 129. ille verò Propos. XLIV. Lib. I. Princ. Phil. Nat., ut supra pag. 80. indicavimus. Hæc curva AN duas asymptotas habet à centro virium D æqualiter distantes; & quidem distantia quælibet esse debet $\frac{1}{n}$ radii AC in fig. 159, & 160. vel $\frac{1}{n}$ DP

in

in fig. 37. ac proinde altera asymptota per centrum ire non potest, ut per inadvertentiam pag. 81. scripseram. Reliquæ proprietates ejusdem curvæ AN fig. 160. à Bernoullio commemoratæ nullo negotio ex nostris constructionibus eliciuntur, propterea iisdem fusius explicandis supersedeo.

Cæterum, quæ pag. 80. num. 4. habetur exceptio ipsius casus, quo p est -1, prorsus inutilis est, & propositio illic memorata absque hac exceptione generaliter obtinet, si e vel s sunt 0, sed hæc exceptio tantum valet in contradictoria ejusdem propositionis, scilicet non nisi hoc casu $p=-$, duobusque reliquis $p=+1$, ac $=-2$ exceptis, curvam AN unquam fieri posse algebraicam in hypothesi quod G ut z^p, neutra ex duabus e vel s evanescente.

Constructio præcedens adhuc elegantior reddi potest ducendo RW parallelam GS, & demittendo super eam ex puncto B perpendicularem BW, tum ductis per B & Π parallelis axi AC, ut BΦ & ΠΘ, sumendoque in priore segmentum ΔΦ æquale perpendiculo BW, orieturque curva ΘΦ, in cujus ordinatis, si $\Pi\pi = AI$ fuerit ad ΔΩ ut ΦΔ ad ΘΠ, ita ut curva πΩ reciproca fuerit alterius ΘΦ. Hæc reciproca πΩ erit etiam nunc scala celeritatum, atque adeo eadem cum curva HIF, sed ad axem AΠ relata, loco axis HE, ad quem altera HIF exstructa est. In hac constructione neque lineis Al neque hyperbola KM opus est, atque adeo nonnihil simplicior facta est.

FINIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [429] - 401
PUBLIC DOMAIN

EMENDANDA.

CUm, propter abſentiam à Typographica officina & locorum intervallum typorum correctioni egomet attendere non potuerim, quod in hujus generis operibus vitari vix poteſt, accidit, ut nonnulla ſphalmata in hanc editionem irrepſerint, quorum ea, quæ ſenſum turbare poſſent, ut calamo ſaltem corrigere velit Benev. Lector etiam atque etiam rogo priusquam Opusculi lectionem incipiat. Reliquos vero minoris momenti errores, qui forte contra dictionis puritatem mihi materiis ipſis magis attento exciderunt, Lector ipſe facile emendabit me non monente, eosque proinde ejus humanitati corrigendos relinquo.

Pag. 9. lin. 23. Molis lege Motus.
Pag. 10. lin. 9. leg. rectæ AE à ſolicitationibus &c.
Pag. 16. lin. 13. PR leg PA.
Pag. 19 lin. 31: leg. trahente.
Pag. 26. lin. 4. BF leg. BT.
Pag. 31. *l.* 15. leg. ſuperficiem componentes in *ty* incurvatam.
Pag. 39. l. 32. minor. leg. major. Ibid. l. ult. leg. A$=aa$: $\sqrt{aa+mm}$ fiet $\sqrt{aa+mm}=a$.
Pag. 40. lin. 2. leg. $x^{a}y=1$. lin. 4. leg. $ydx=x^{-a}dx$. Et lin. 25. poſt *tenacitatem fili in* A, adde, *per* A.
Pag. 43. l. 19. A: BC. leg. A: B*b*. lin. 24. $\int bf-\int Mm$ leg. $\int bf=\int Mm$. Ibid. lin. 25. Zy — Nβ, leg. Zz — Nβ.
Pag. 45. lin. 4. $m^{3}dx=aamdm$ leg. $m^{3}dx=-aamdm$.
Pag. 46. lin. 2. — *anndm* leg. — *nndm*.
Pag. 55. l. 2. Si lege Sic. Pag. 58. l. 9. Nβ. E*e*, leg. N*u*. E*e*.
Pag. 66. lin. 8. *u*L leg. *u*D. *Ibid. l.* 23. ang. FA*f* leg. FD*f*.
Pag. 71. lin. 9. Secundi leg. Primi. Pag. 75. l. 28. leg. æquidiſtantes.
Pag. 78. l. 15. + $AB^{3}z$ leg. $AB^{2}z$. Pag. 80. l. penult. MAD leg. MAL.
Pag. 85. l. 22. leg. Prop. 24. Pag. 94. l. 28. E*e* leg. E*b*.
Pag. 98. l. 23. leg. ſupra ſolicitationem in B.
Pag. 110 l. 19. l. *Corporum*.
Pag. 114. l. 7. leg. *quæ erat communis ipſorum centri gravitatis ante occurſum*.
Pag. 119. Propoſ. XLII, ſcrib. in margine Fig. 53.
Pag. 121. l. 16. A+X+B. leg. A+X+Y+B.
Ibid. l. 24. leg. quam idem B à corpore A celeritate AD ipſum immediate impellente, accepiſſet.
Pag. 132. l. 4. EF leg. ET. Pag. 140. l. 16. leg gravitationis.
Pag. 145. l. 7. leg. Dani. Pag. 159. l. 20. leg. amplectenti.
Pag. 157. Prop. XIII. ſcrib. ad marg. Fig. 66.
Pag. 161. l. 20. in fin. QN, leg. PN. & lin. 28. leg. centro P.
Pag. 167. l. 23, 24 & 28. NE, leg. DE. Pag. 179. l. ult. quia, leg. cum.
Pag. 184 l. 12. dele, hians, l. 13. ſubtili, leg. ſubdiali ſeu externo
Ibid. l. 19. ad margines, leg. in circumferentia ejus.
Ibid. l. 37. marginum, leg. arginum.
Pag 190. l. 2. denſitatis, leg. poteſtatis. Ibid. l. 19. permuta BF & GF.
Pag. 191. l. 13. dele poſteriorem, & lin. 14. dele vel.
Pag. 195. lin. 27. ut denſitates, lege proportionales.
Pag. 197. l. 3. lege, altitudini. Pag. 200. l. 26, $-\frac{2}{3}$ leg. $-\frac{3}{2}$.
Pag. 201. l. 6. leg. Quadrilinea, & lin. 7. leg. æqualia.
Pag. ead. l. 26. leg. Nam quia OA^{1-n}, O_1A^{1-n}, O_2A^{1-n}, &c. *proportionales ſunt rec-lis* OA. AC, O_1A_1C, O_2A_2C, &c. ideo hæc rec-la erunt in progreſſione arithmetica, atque adeo &c. ſequendo ut habetur linea 30. poſt, atque adeo &c.
Pag. 203. l. pen. & leg. ut. Pag. 205. l. 5. leg. altitudo.
Pag. 209. l. 16. leg. *dδ*. Pag. 213. l. 14. leg. conſtructionem, *ef*, l. 14. demonſtratam.
Pag. 218. l. 11. leg. FT. Pag. 219. l. 3. leg. datam rationem habebunt, quam &c.
Pag. 224. l. 27. $(\frac{2}{3}zVz-\frac{2}{3}xVx)$ leg. $(\frac{2}{3}zVz:\frac{2}{3}xVx)$. Pag. 225. l. 28. leg. $m:1$.
Pag. 228. l. 3. dele quam. Pag. 230. l. 21. ABC leg. ADC.
Pag. 233. l. 21. leg. incluſum. Pag. 241. l. 13. leg. ELV. l. 17. leg. $LV=(aat-t^{3}):aa$.
Pag. 242. l. 18. leg. rectæ AR. Pag. 244. l. 32. RM, leg. RA.
Pag. 245. l. 7. leg. *ſi præcedente modo baſi* BR, *modo vertice* E *indirectione* AE *id feratur*.
Pag. 248. l. 3. à fine, lineæ FF, lege Circuli FF.
Pag. 250. l. 28. leg. = conſtanti. Pag. 251. l. 18. leg.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [430] - -
PUBLIC DOMAIN

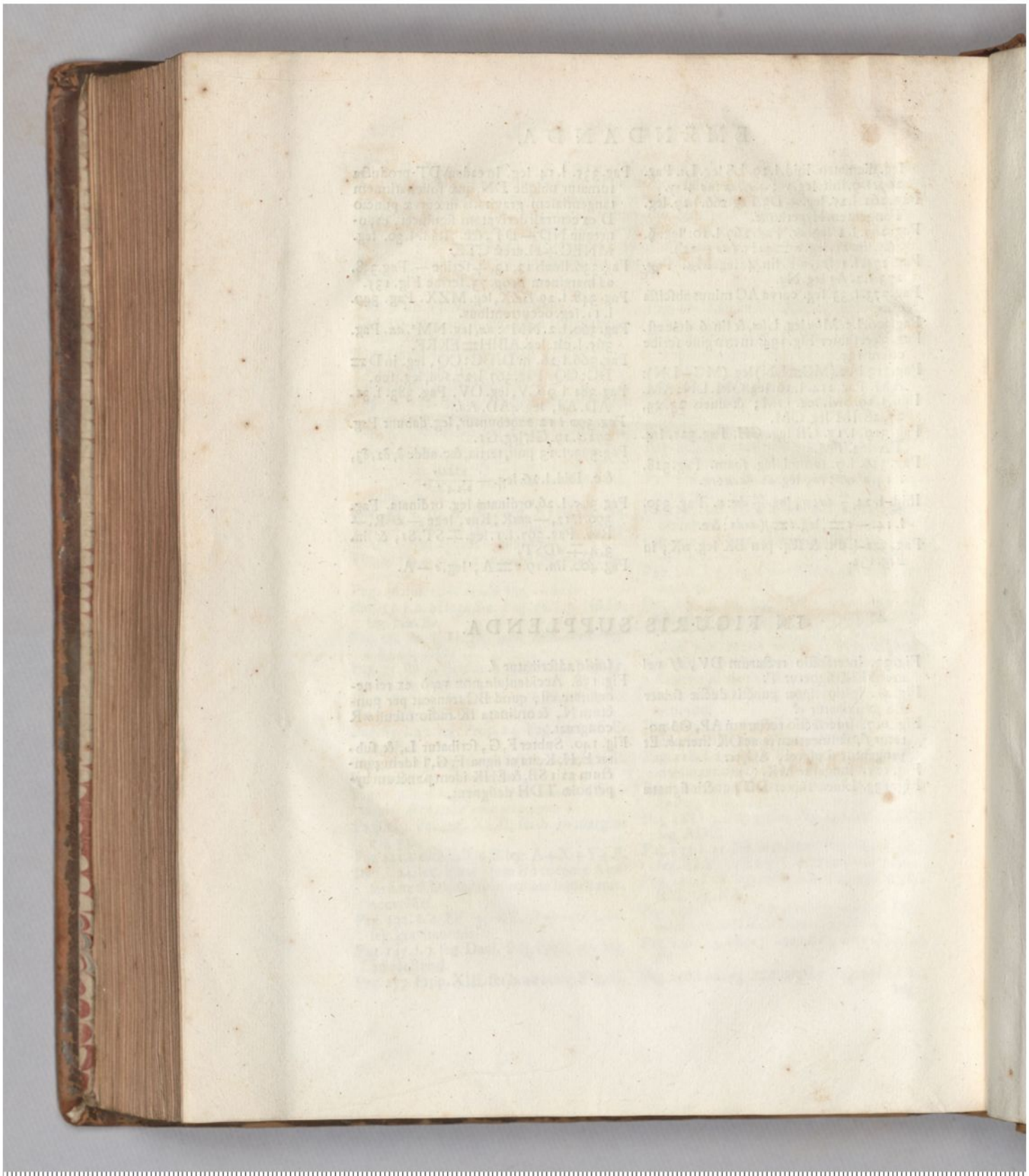
EMENDANDA.

leg. diametro. Ibid. l. 29. LS leg. L*s*. Pag. 269. l. 9. init. leg. yy; $+effdx:aa+yy$.
Pag. 262. l. 25. leg. +D3. Pag. 266. l. 29. leg. Tangentem Hyperbolæ.
Pag. 267. l. 2. leg. *dc*. Pag. 269. l. 10. leg. §. 464. lin. 21. leg. $x=aa:\sqrt{(aa-zz)}$.
Pag. 271. l. 1. leg. *us*P. lin. 4. leg. Mμ. Pag. 273. l. 2. A*q* leg. N*q*.
Pag. 273. l. 33. leg. curva AC minus abscissa ejus.
Pag. 306. l. 5. M*lm* leg. L*lm*, & lin. 6. dele est.
Pag. 335. subter Fig. 134. in margine scribe etiam 135.
Pag. 313. l. 10. (MC=LN) leg. (MC—LN): AM. Pag. 214. l. 10. leg. OM. LN: AM.
Ibid. l. 19. SM. leg. OM; & lineis 23, 24, 27, 28. IM leg. OM.
Pag 319. l. 13. GB leg. GH. Pag. 321. l. 4. TA leg. TM.
Pag. 326. l. 7. summi leg. suam. Pag. 328. l. 14. $a^3aau:cu$, leg. $a^3-aau:cu$.
Ibid. l. 24. $\frac{ab}{b}du:u$, leg. $\frac{aa}{b}du:u$. Pag. 330. l. 14. $-t=$, leg. $t=\int(aadu:$ &c.
Pag. 332. l. ult. & seq. pro BK leg. ωK, in Fig. 132.
Pag. 335. l. 14. leg. In eadem DT productæ sumatur ubique DN, quæ solicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam significet, exponetque ND—DT, &c. Ibid. l. 30. leg. MNEC+el. areæ CTE.
Pag. 336. lineis 12, 13, + scribe —. Pag. 338. ad marginem Prop. 73. scribe Fig. 135.
Pag. 348. l. 29. BZX, leg. MZX. Pag. 349. l. 11. leg. occurrentibus.
Pag. 360. l. 2. $NM^2:a\alpha$, leg. $NM^2.a\alpha$. Pag. 365. l. ult. leg. ABIH=EKRF.
Pag. 366. l. 26. in D. DC: CQ, leg. in D= DC: CQ. Pag. 367. l. 27. sed, leg. sub.
Pag. 381. l. 9. CV, leg. OV. Pag. 383. l. 31. AD. A*d*, leg. 4AD. A*d*.
Pag. 390. l. 12. habebuntur, leg. dabunt. Pag. 392. l. 19. GI, leg. G1.
Pag. 393. l. 13 post, tertia, &c. adde δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. Ibid. l. 26. leg. $-\frac{z^4dddy}{2.3.4.dz^3}$.
Pag. 395. l. 26. ordinatæ leg. ordinata. Pag. 396. l. 12, —*nm*R, R$\omega\nu$, lege —*nm*R,— R$\omega\nu$. Pag. 397. l. 1. leg. $\mp$ST. S*s*, & lin. 3, 4. $\mp d$DST.
Pag. 400. lin. 19. $e=$A, leg. $e-$A.

IN FIGURIS SUPPLENDA.

Fig. 33. Intersectio rectarum DV, *bf* vel arcus EIK signetur T.
Fig. 41. Initio lineæ punctis ductæ subter ES adscribatur *e*.
Fig. 117. Intersectio rectarum AP, Oβ notetur *f*, & linearum fa ac OK litera *b*. Et jungantur si placet, AC, *oc*.
Fig. 125. Jungatur MK.
Fig. 133. Lineæ subter DC punctis signatæ initio adscribatur *d*.
Fig. 138. Accidentale non verò ex rei necessitate est, quod BC transeat per punctum N, & ordinata IK radio osculi *m*R congruat.
Fig. 140. Subter F, G, scribatur L, & subter E, H, K, ita ut signa F, G, I idem punctum axis SB, & EHK idem punctum hyperbolæ TDH designent.

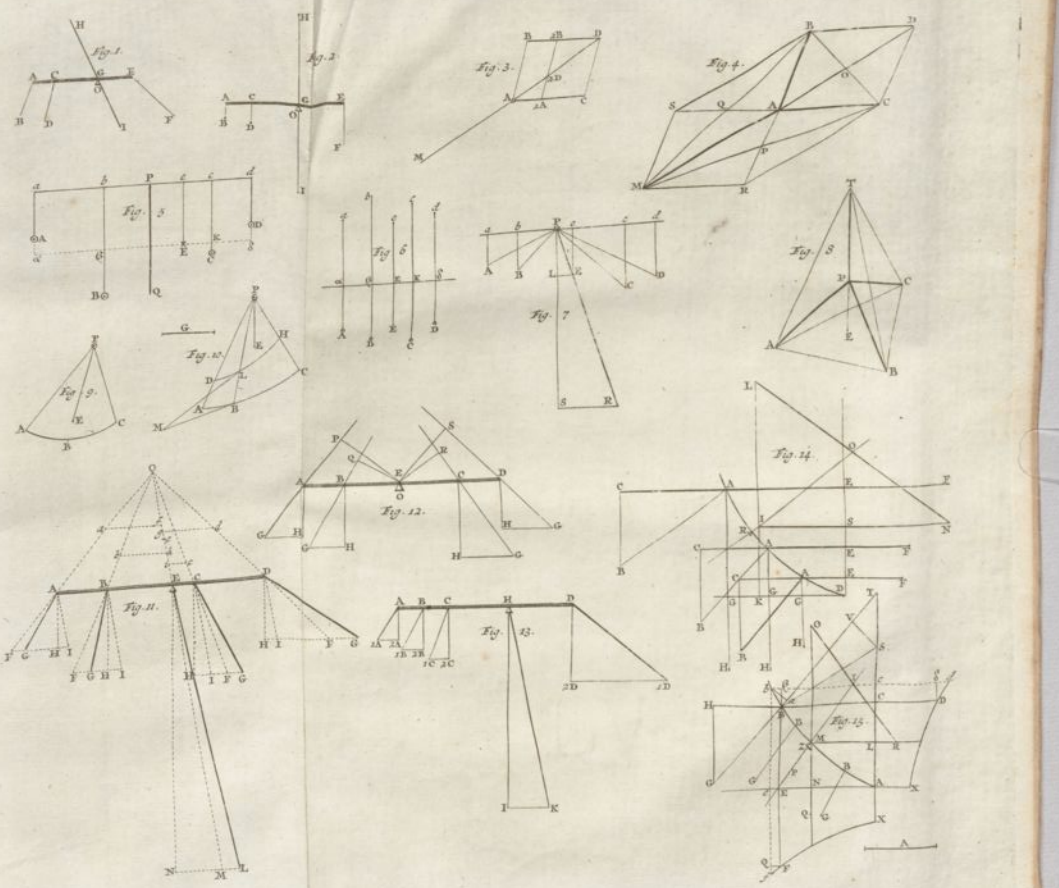
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182, [431] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

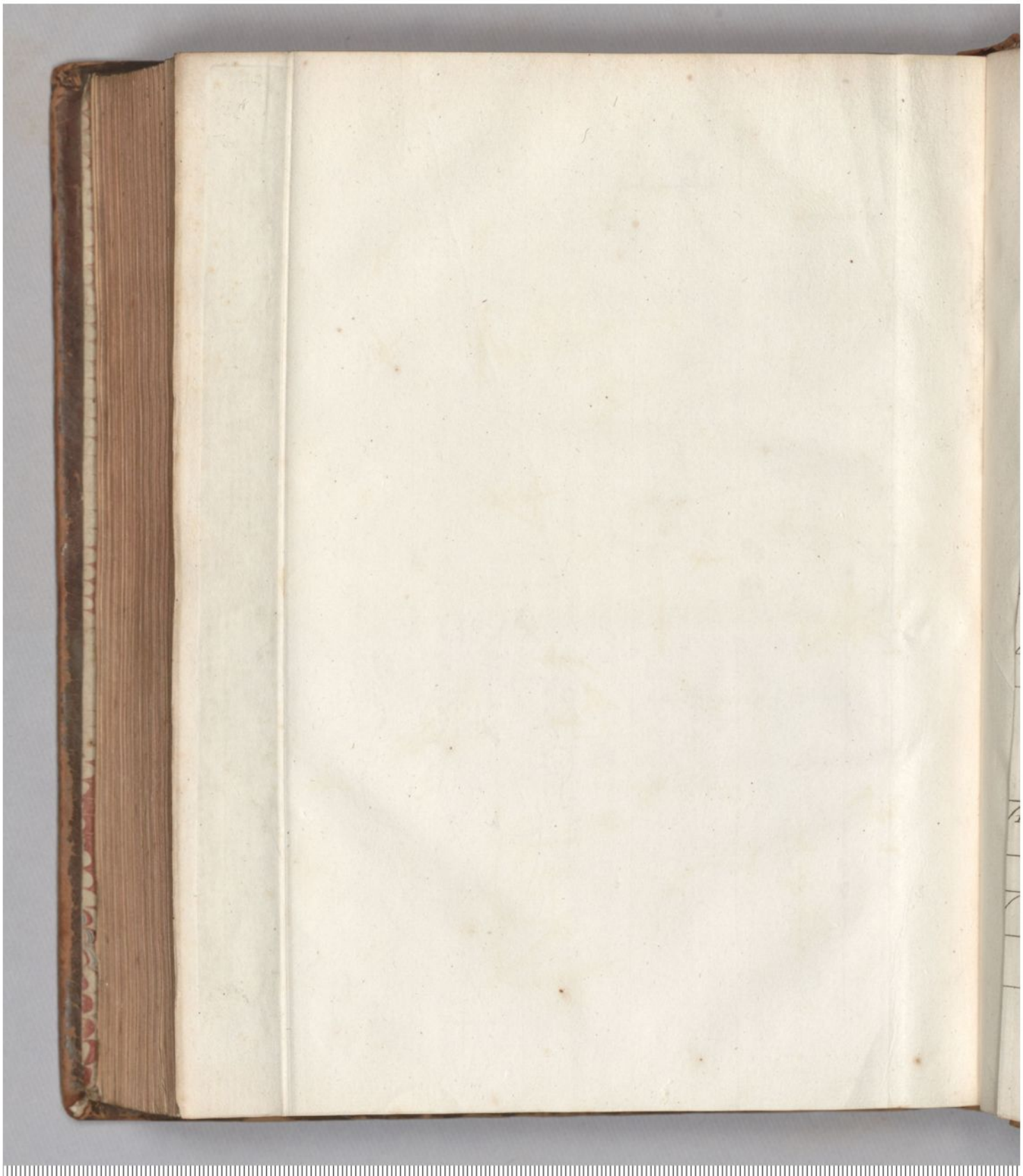
Signatur: Leibn. Marg. 182, [432] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

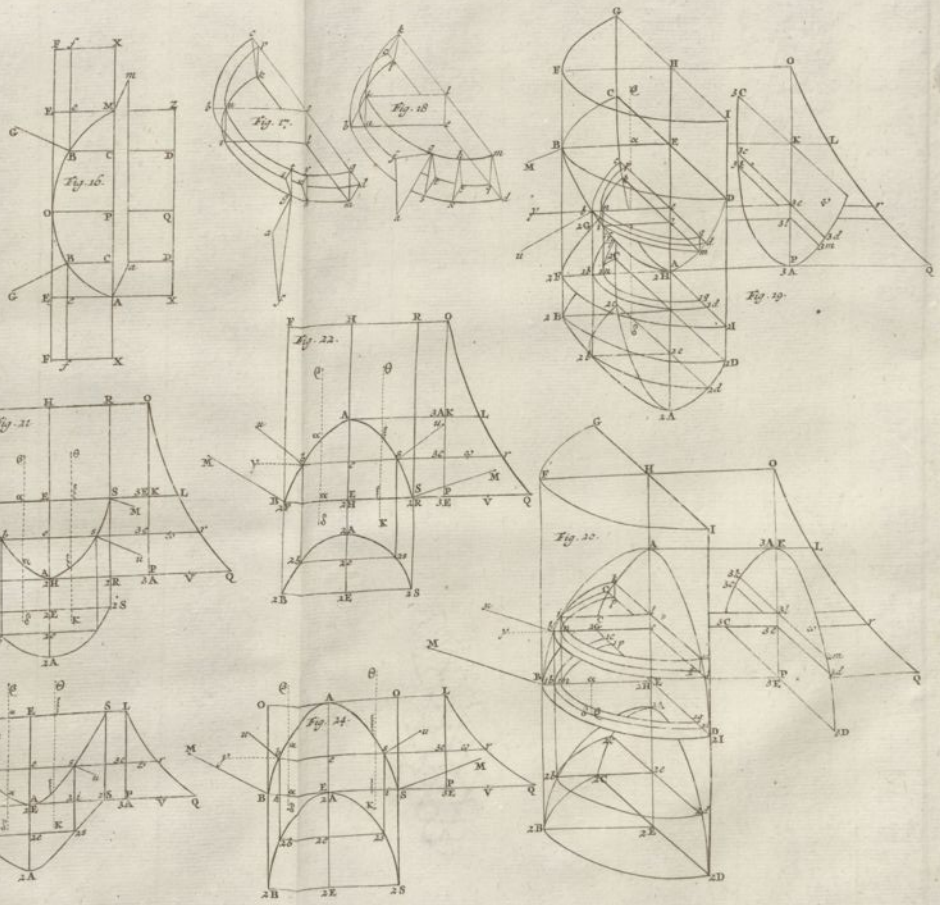
Signatur: Leibn. Marg. 182, [433] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

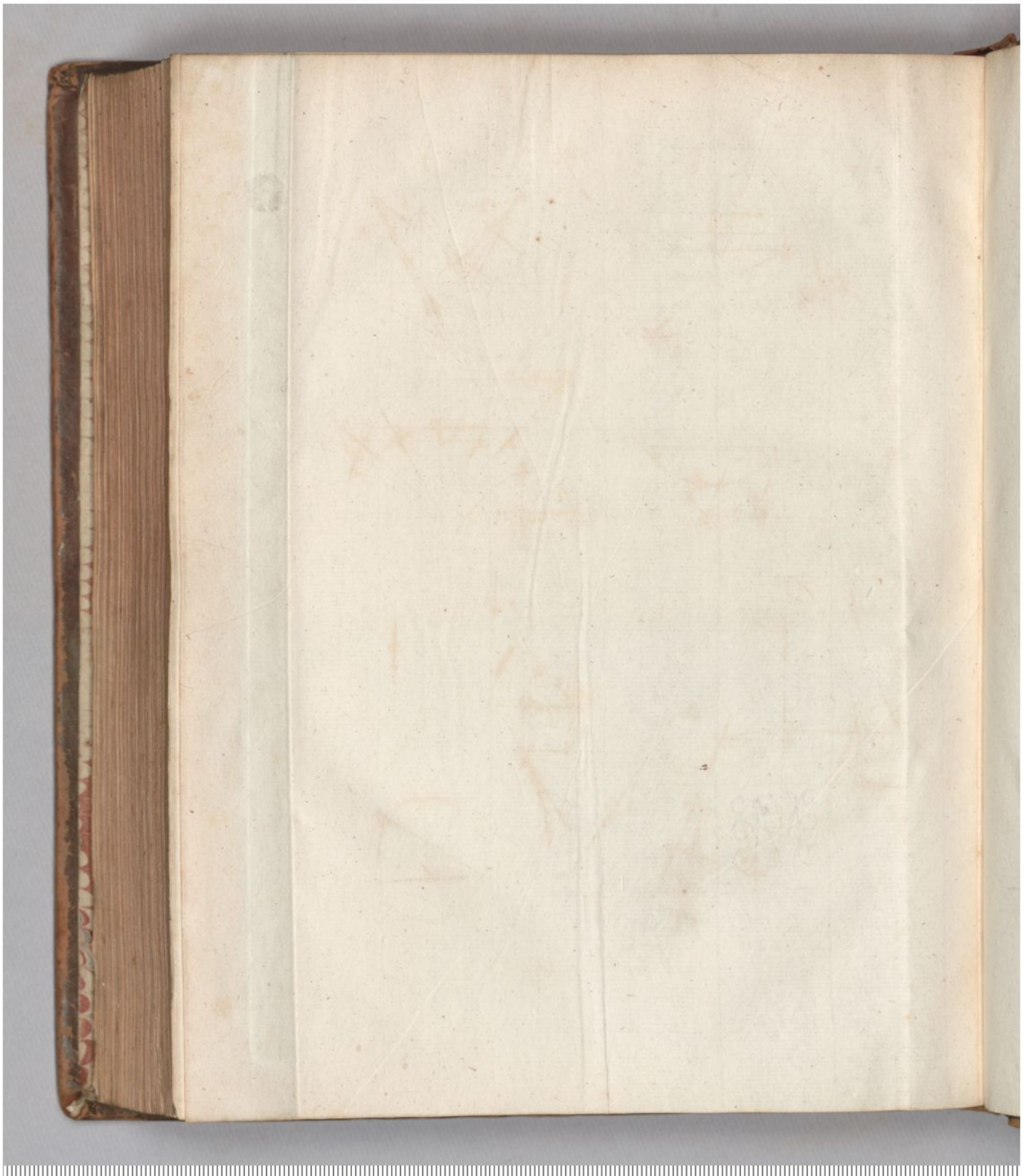
Signatur: Leibn. Marg. 182, [434] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

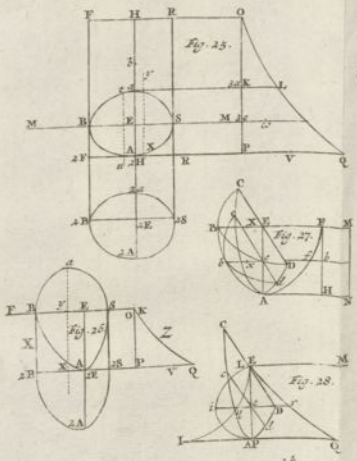
Signatur: Leibn. Marg. 182, [435] - -

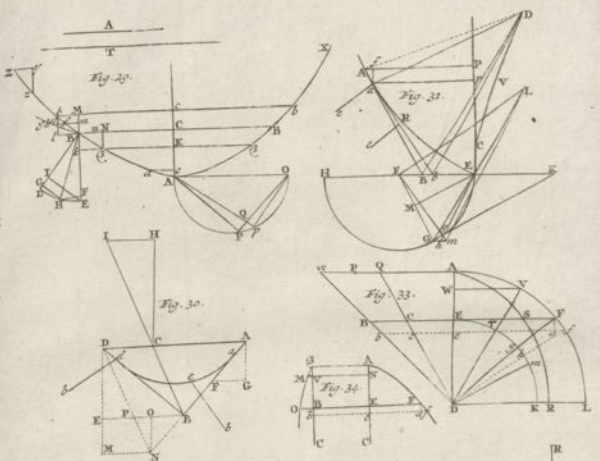


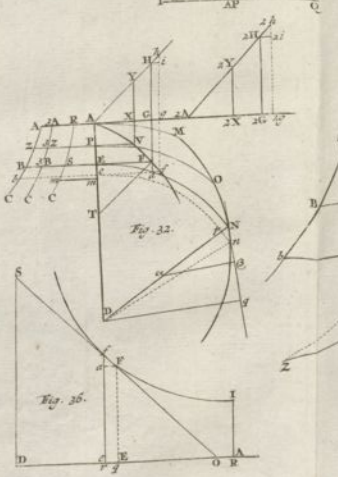
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

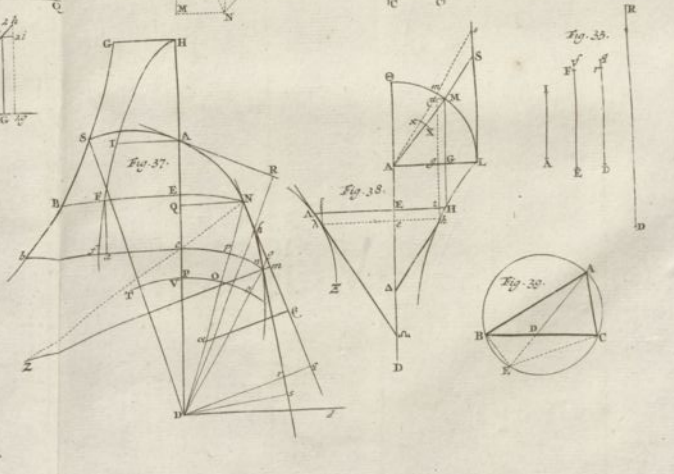
Signatur: Leibn. Marg. 182, [436] - -

PUBLIC DOMAIN



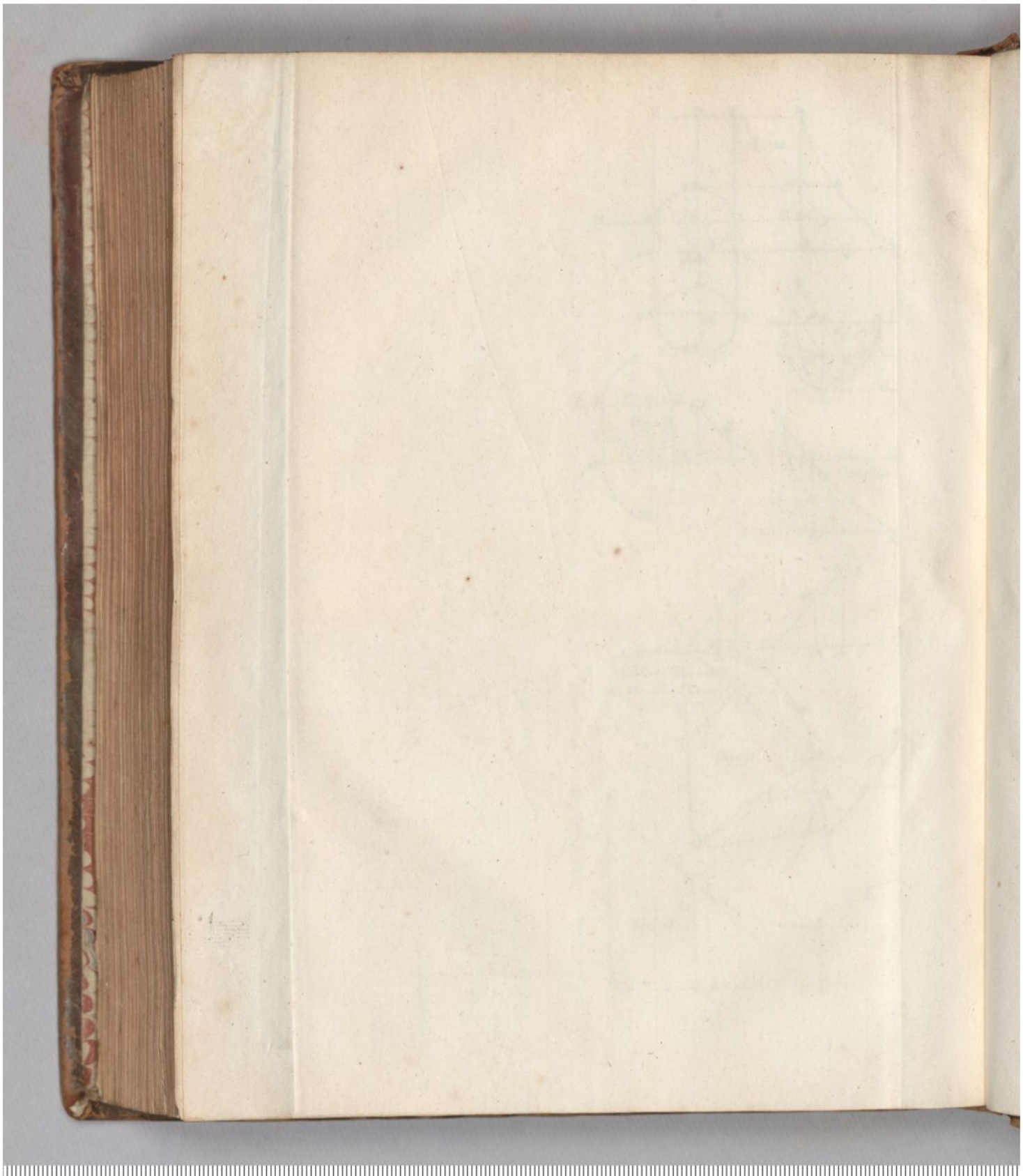






GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

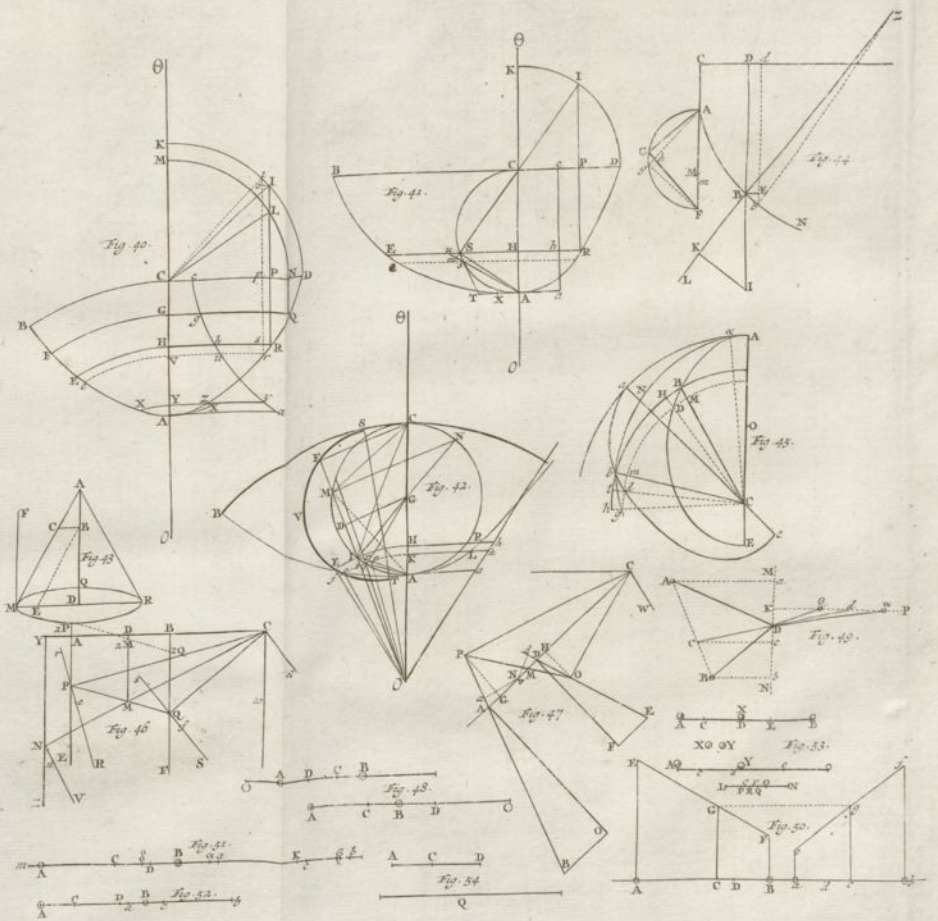
Signatur: Leibn. Marg. 182, [437] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

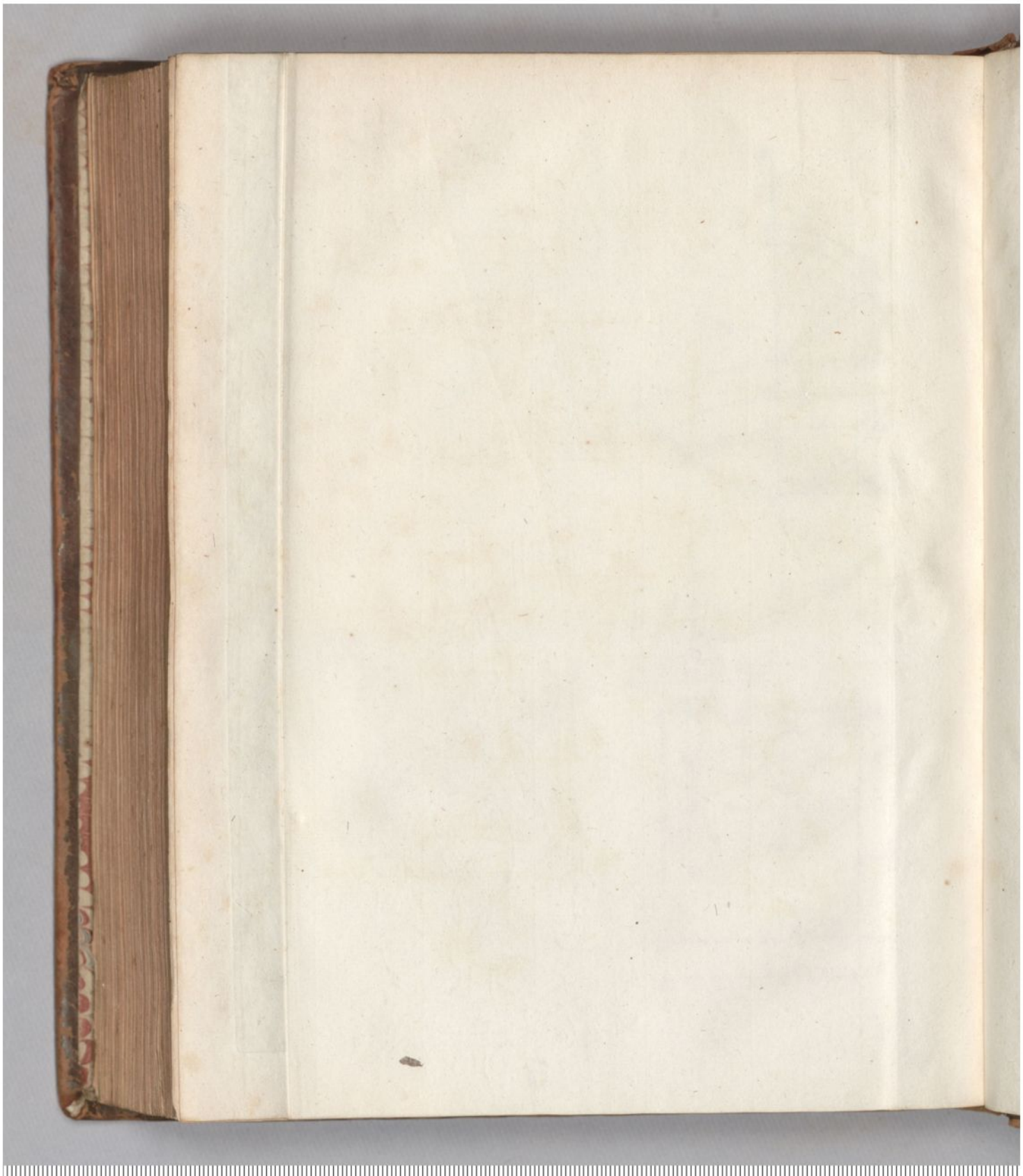
Signatur: Leibn. Marg. 182, [438] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

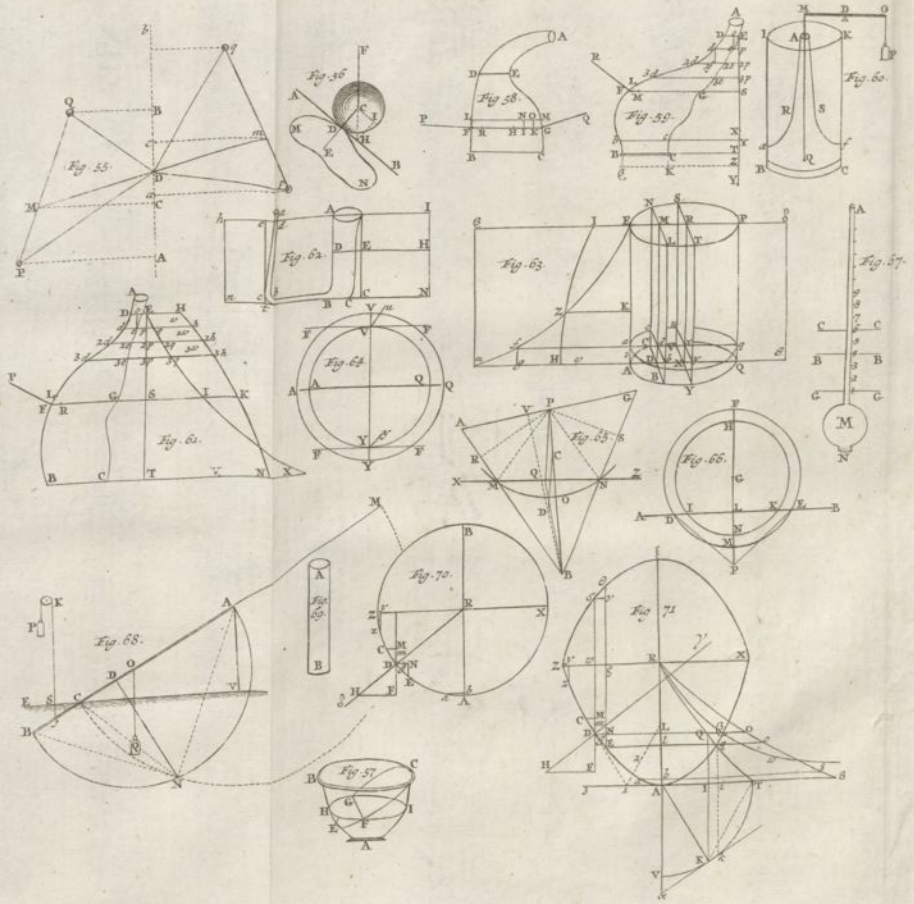
Signatur: Leibn. Marg. 182, [439] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

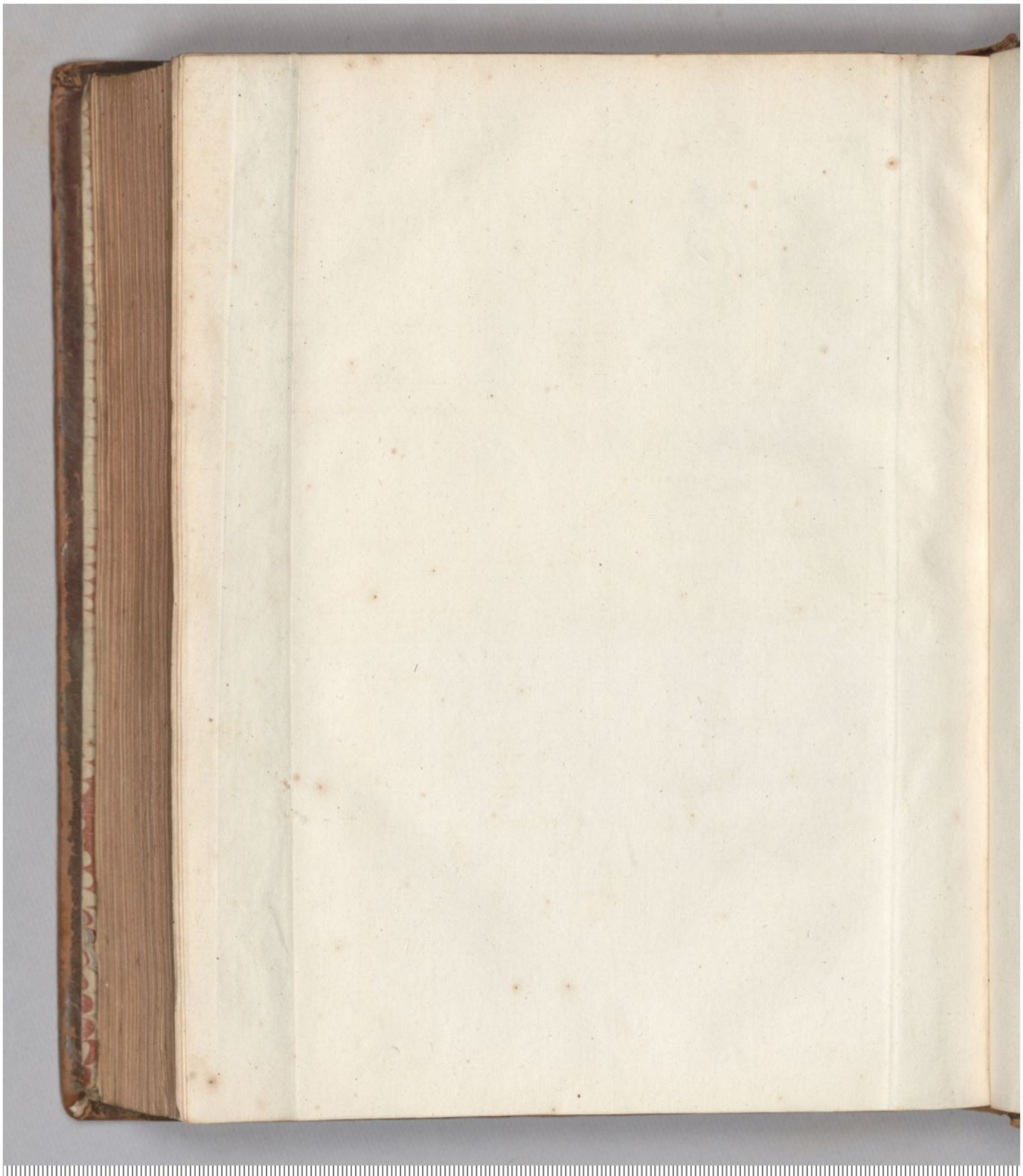
Signatur: Leibn. Marg. 182, [440] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

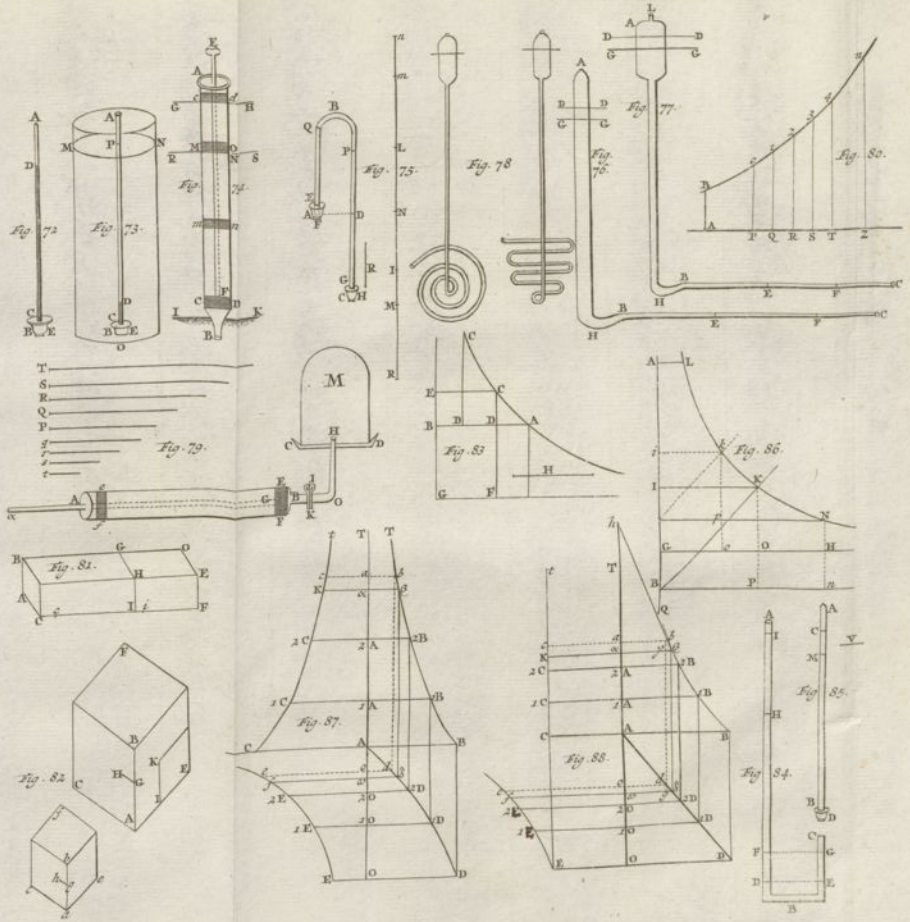
Signatur: Leibn. Marg. 182, [441] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

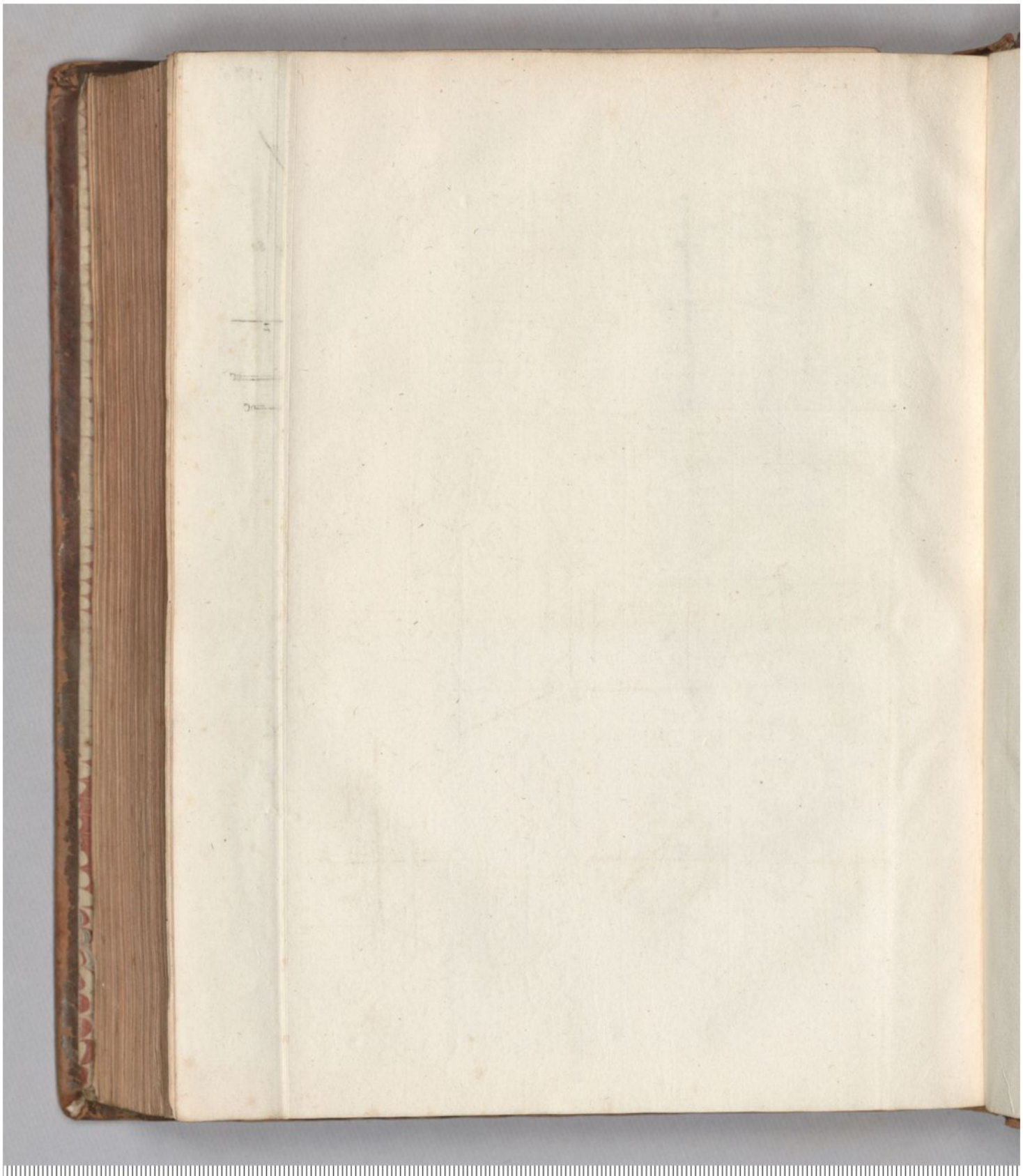
Signatur: Leibn. Marg. 182, [442] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

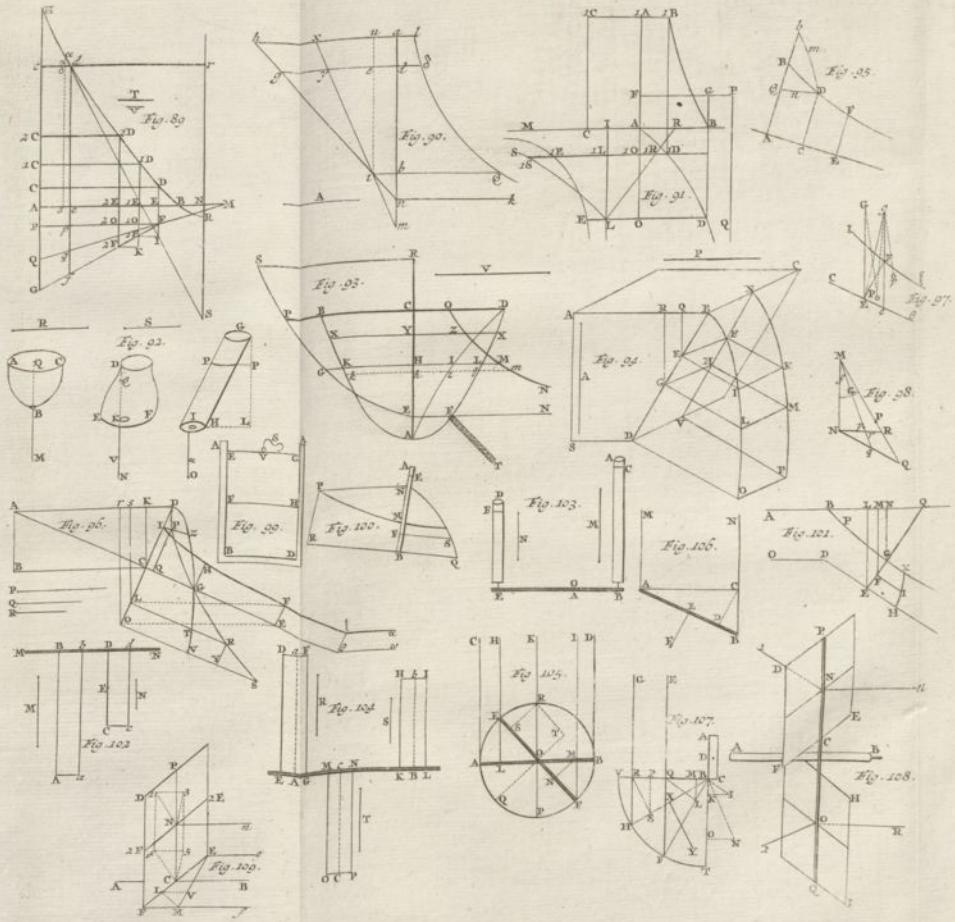
Signatur: Leibn. Marg. 182, [443] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

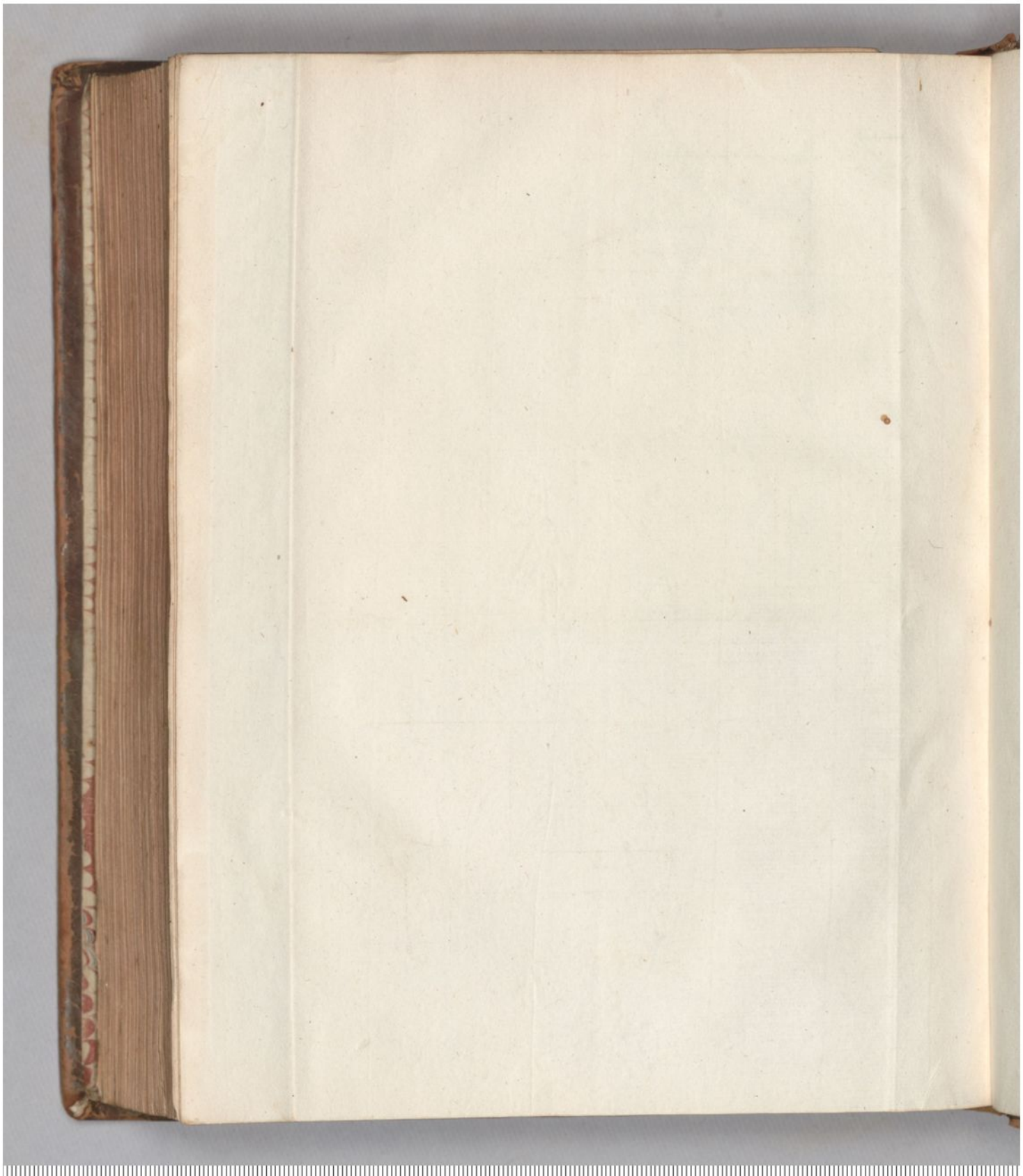
Signatur: Leibn. Marg. 182, [444] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

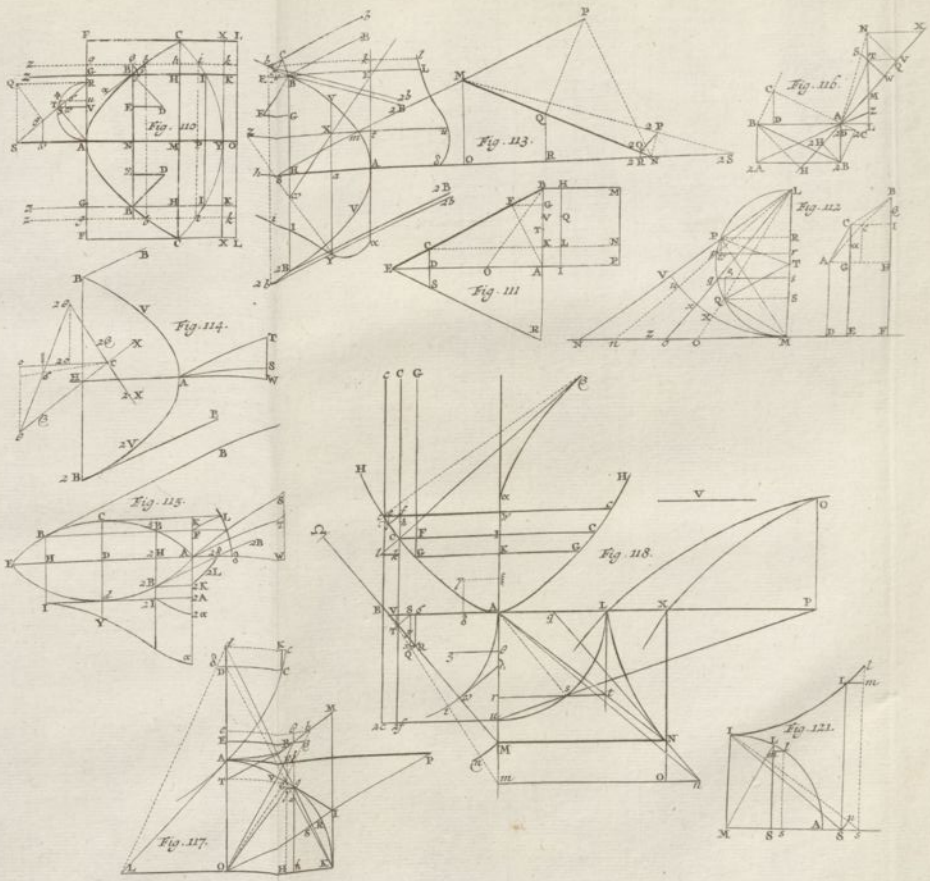
Signatur: Leibn. Marg. 182, [445] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

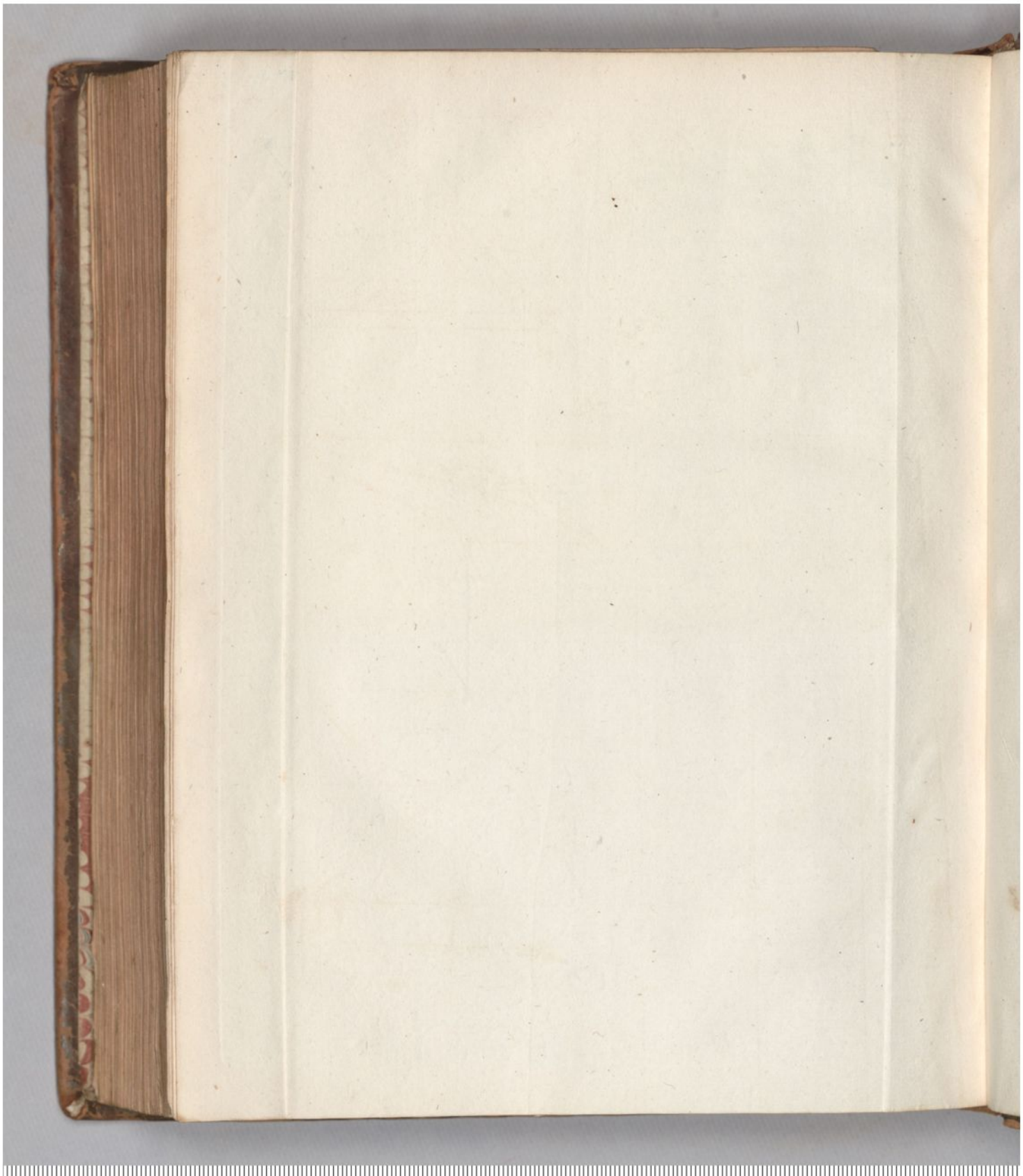
Signatur: Leibn. Marg. 182, [446] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

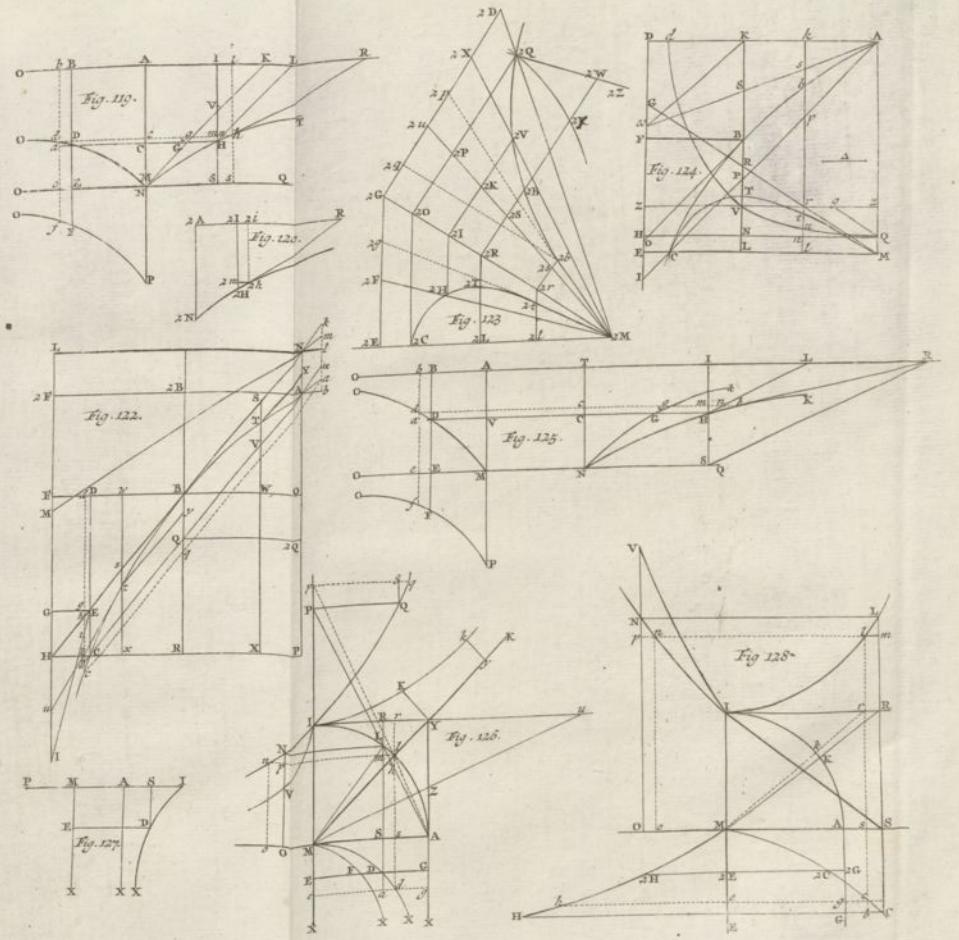
Signatur: Leibn. Marg. 182, [447] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

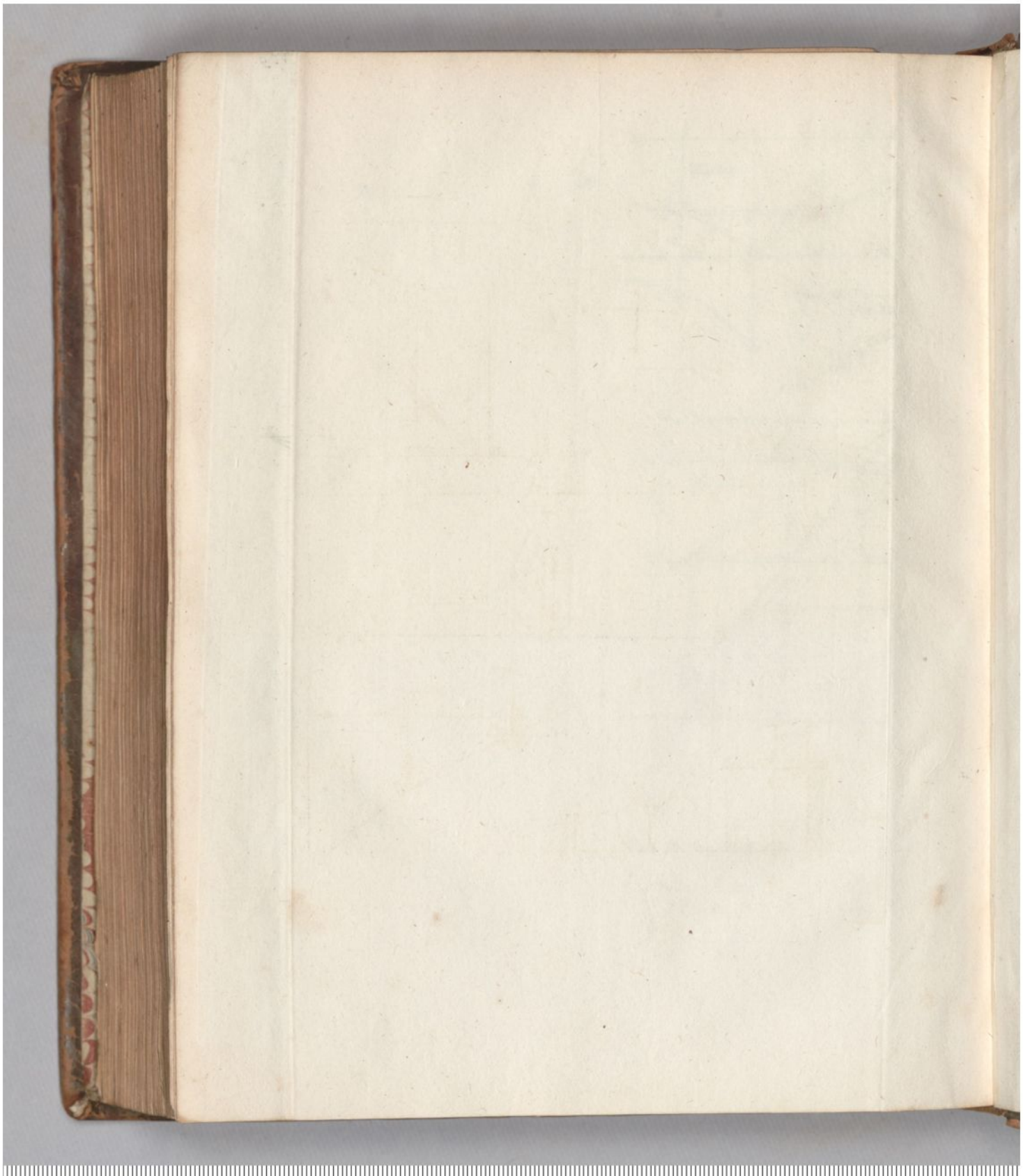
Signatur: Leibn. Marg. 182, [448] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

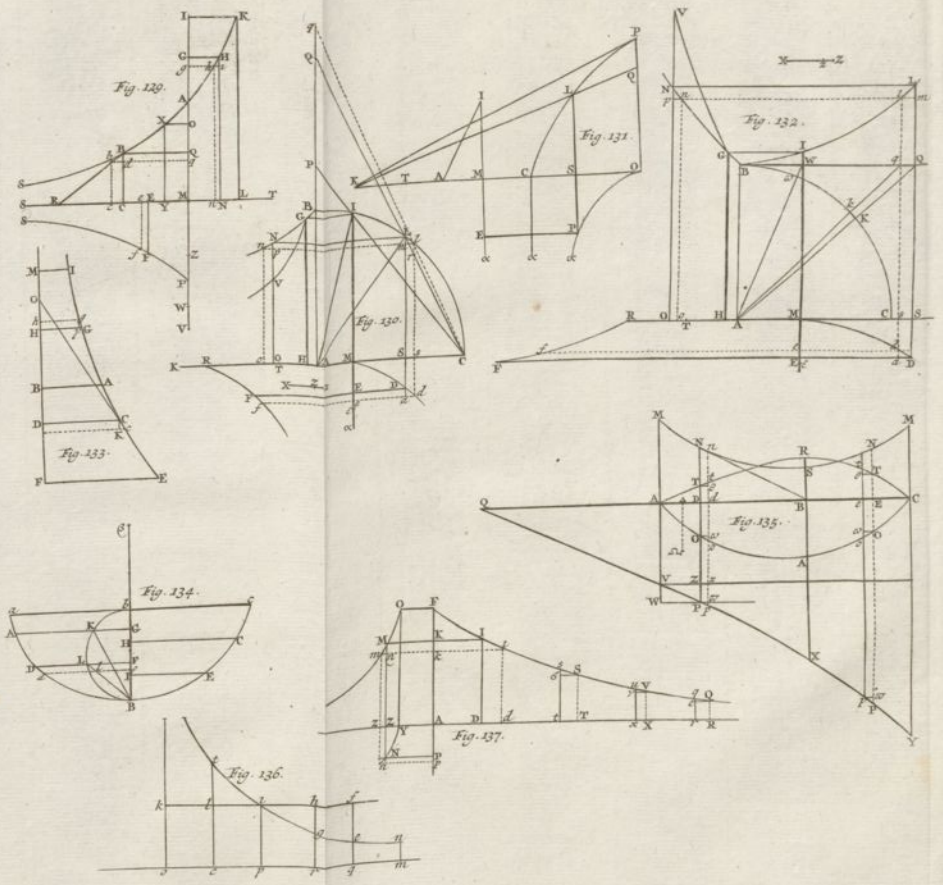
Signatur: Leibn. Marg. 182, [449] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

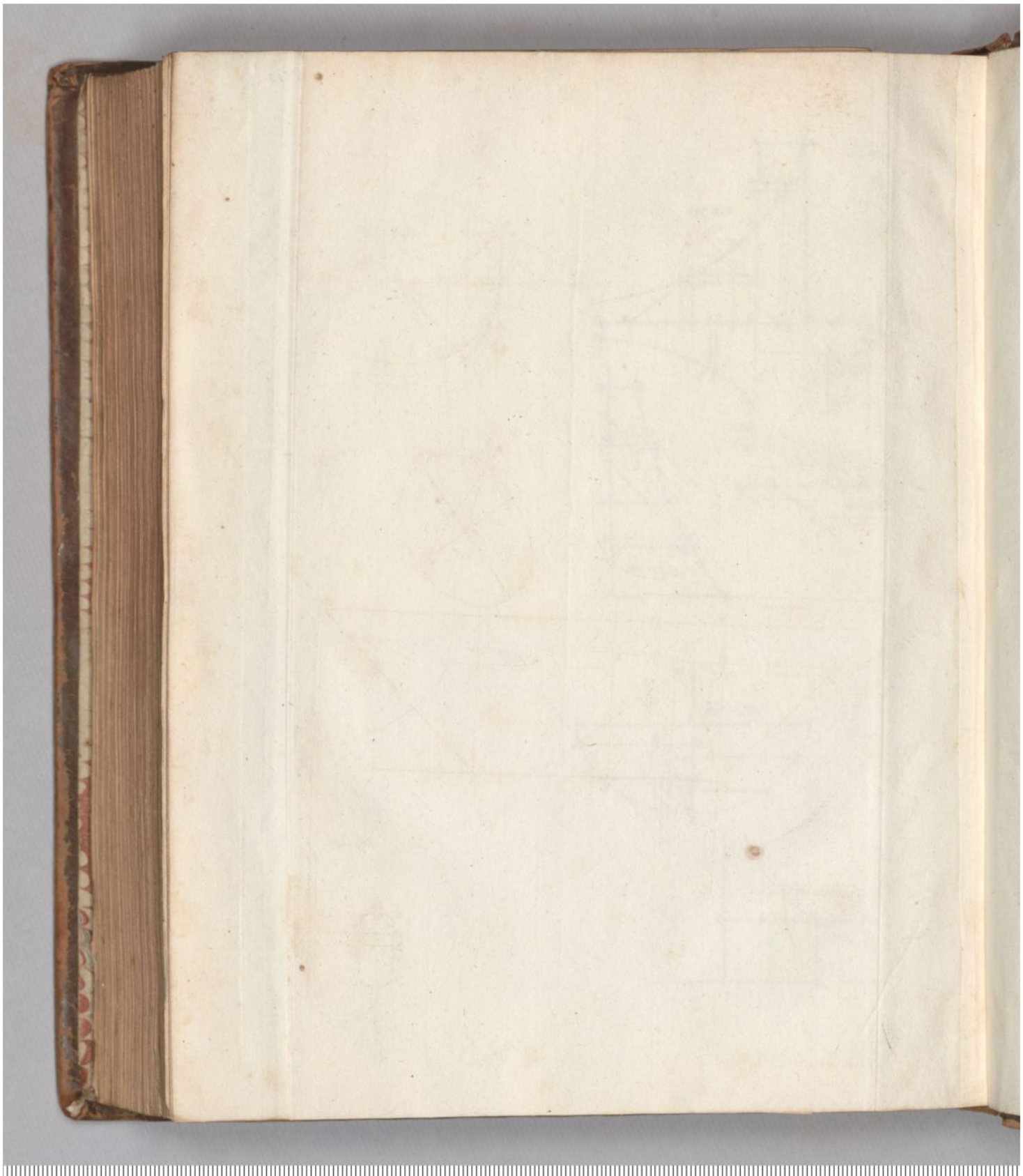
Signatur: Leibn. Marg. 182, [450] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

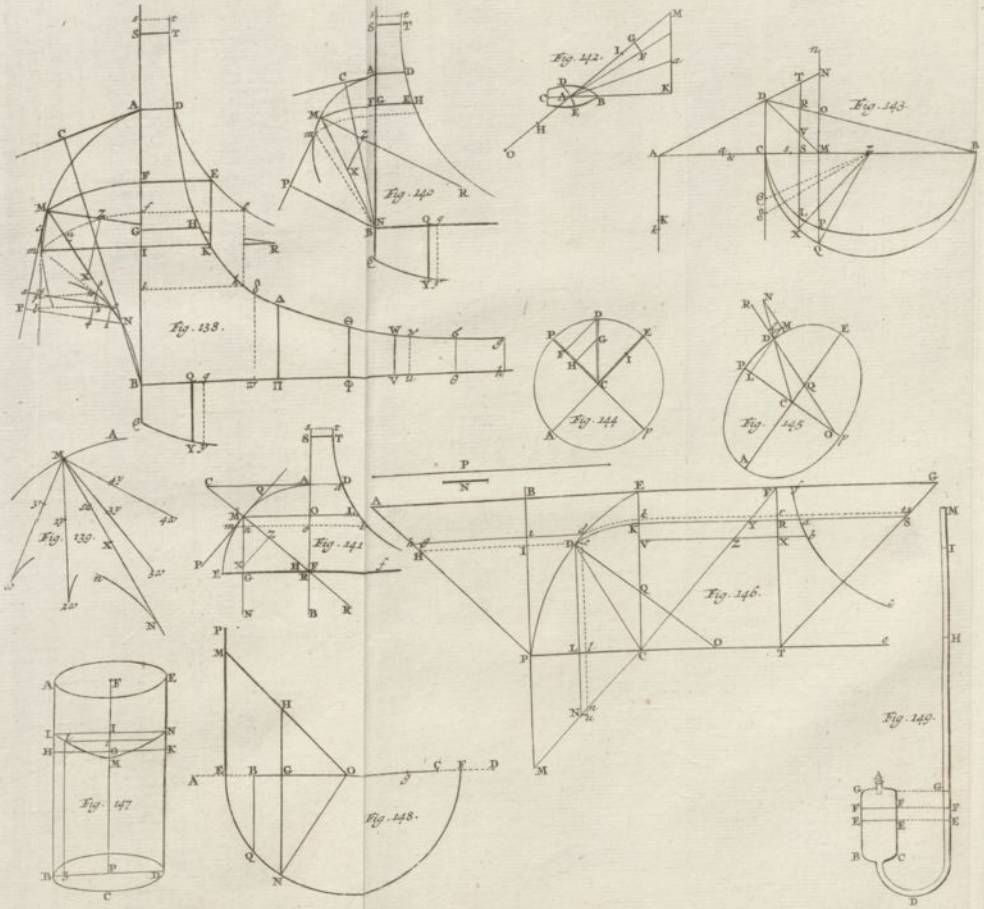
Signatur: Leibn. Marg. 182, [451] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

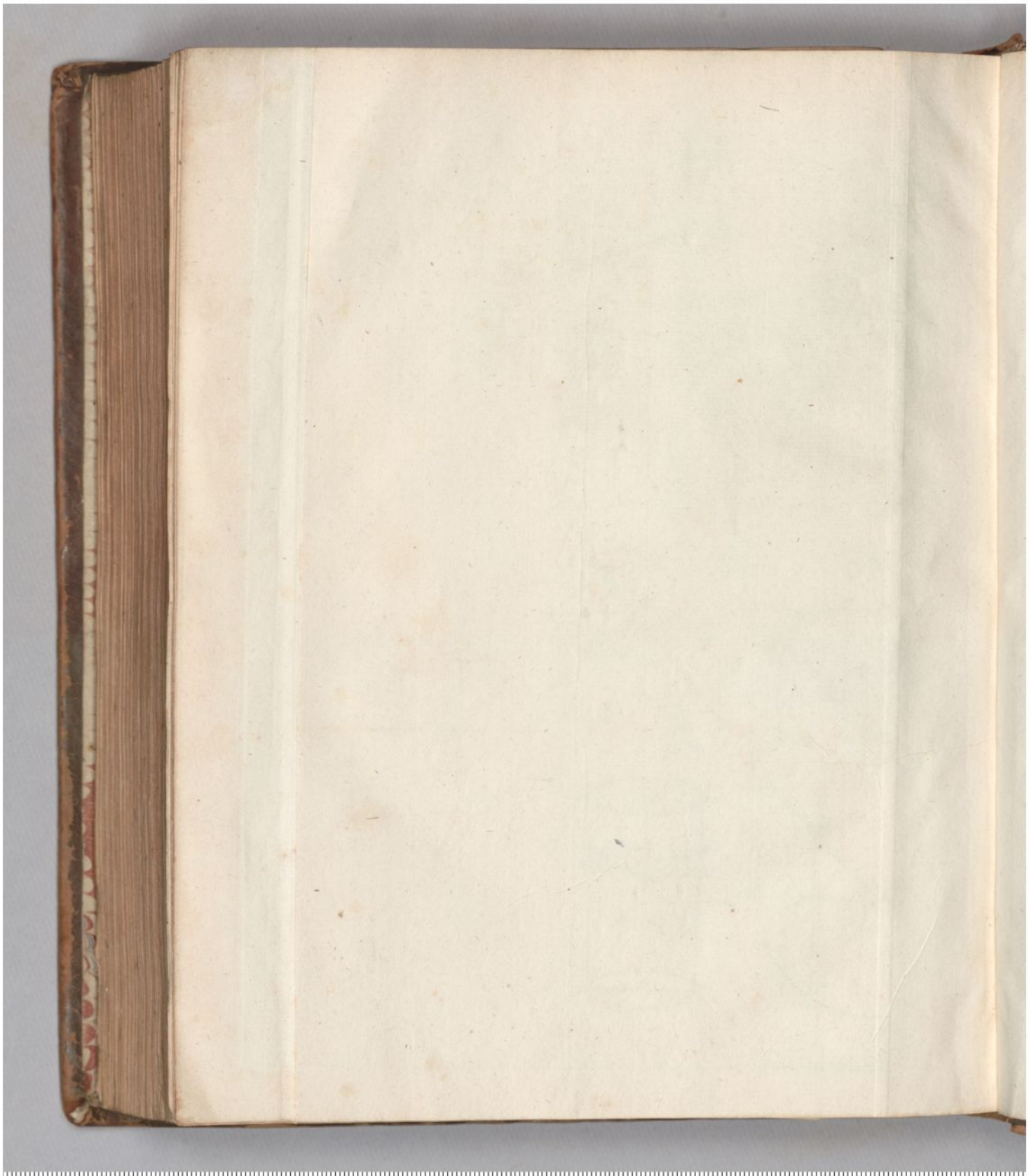
Signatur: Leibn. Marg. 182, [452] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

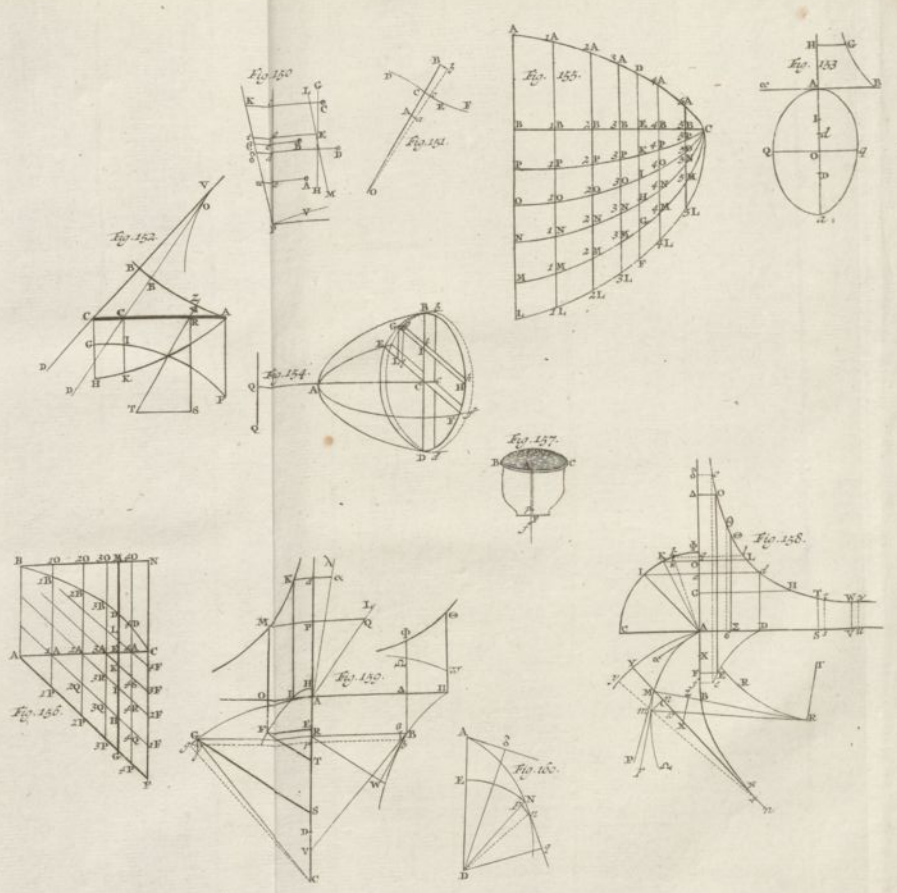
Signatur: Leibn. Marg. 182, [453] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

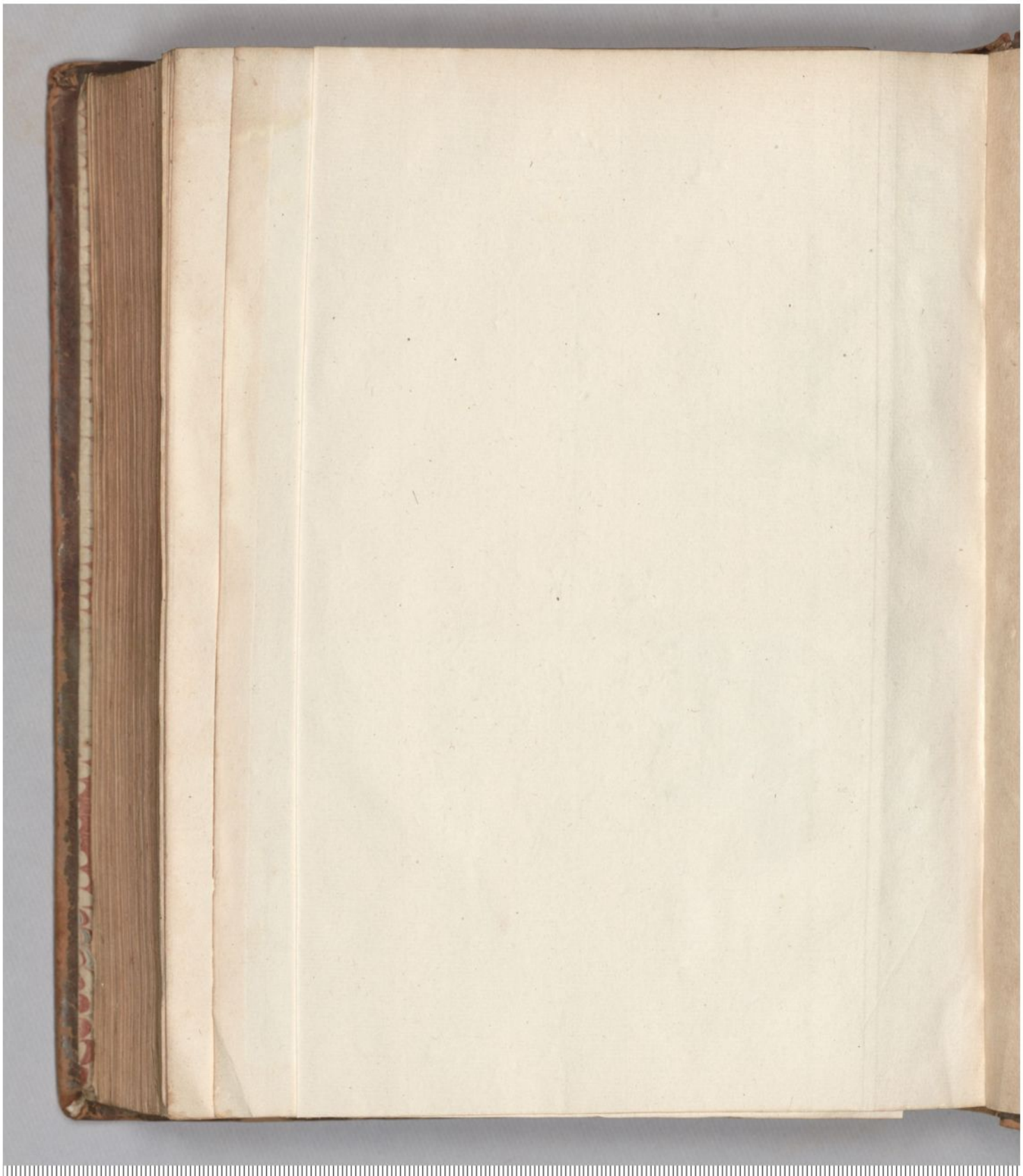
Signatur: Leibn. Marg. 182, [454] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

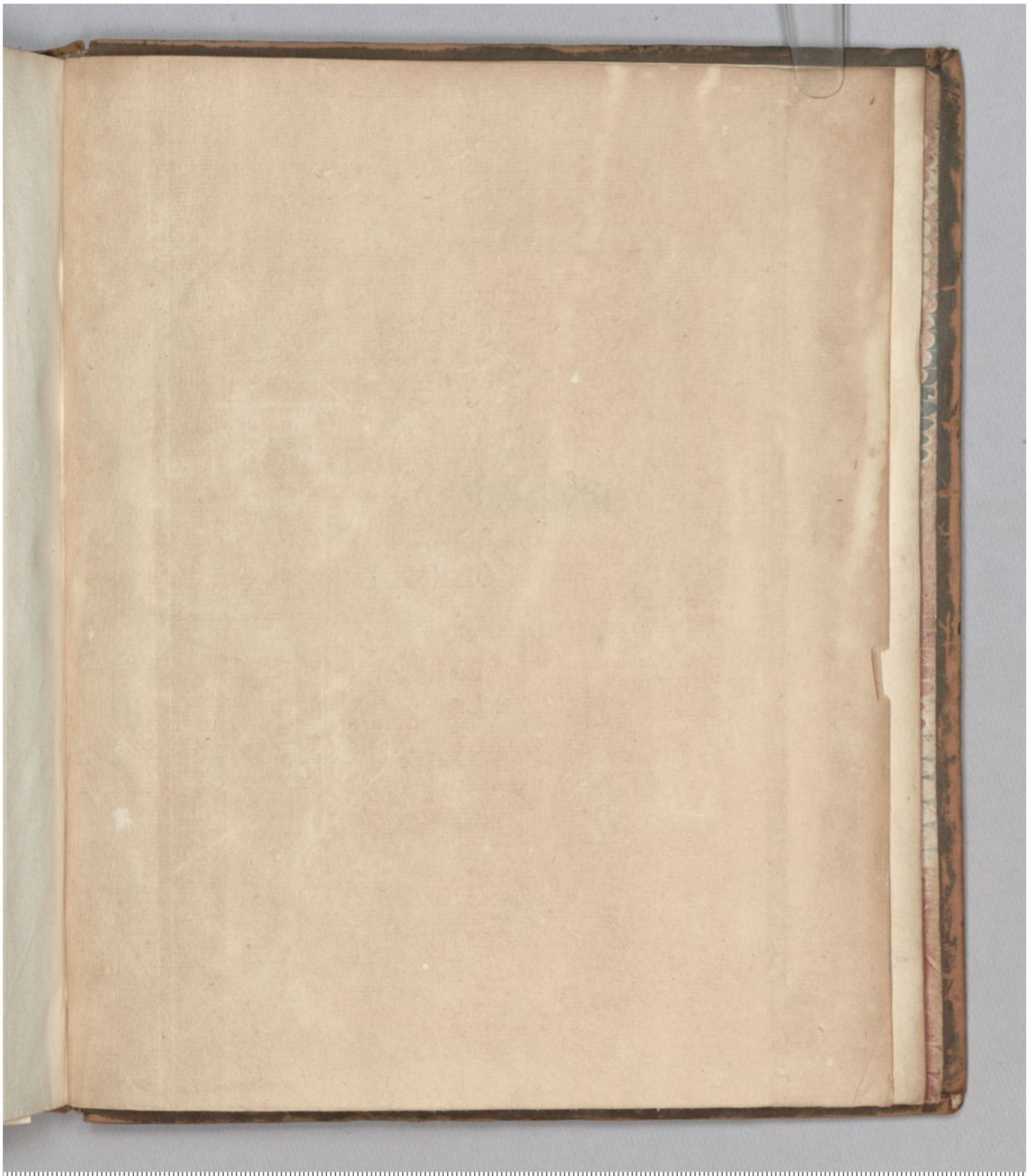
Signatur: Leibn. Marg. 182, [455] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [456] - -

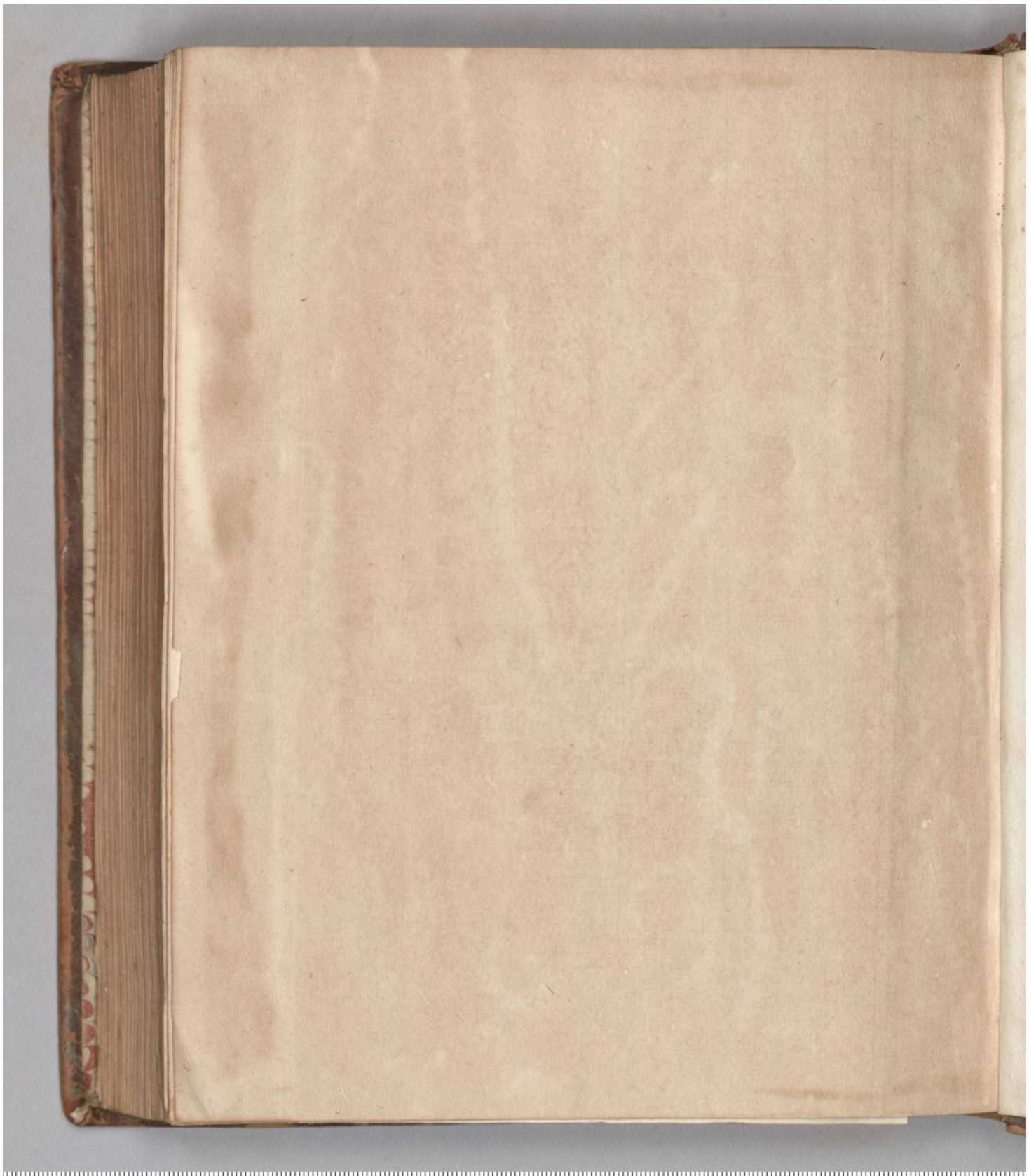
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [457] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [458] - -

PUBLIC DOMAIN

425

GWLB Hannover 35
036 828 688

IV 4. 425.

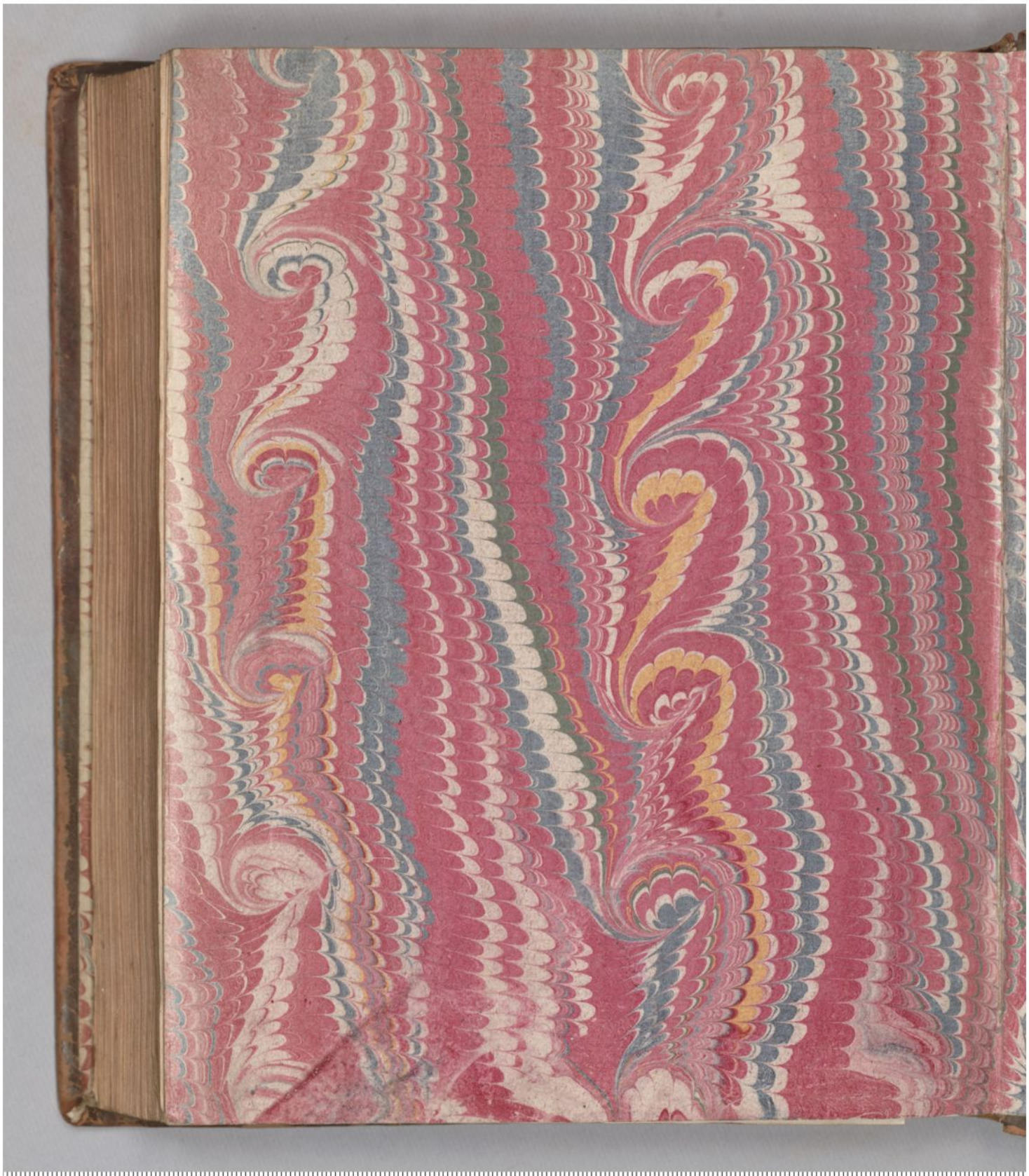
4°

Z

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [459] - -

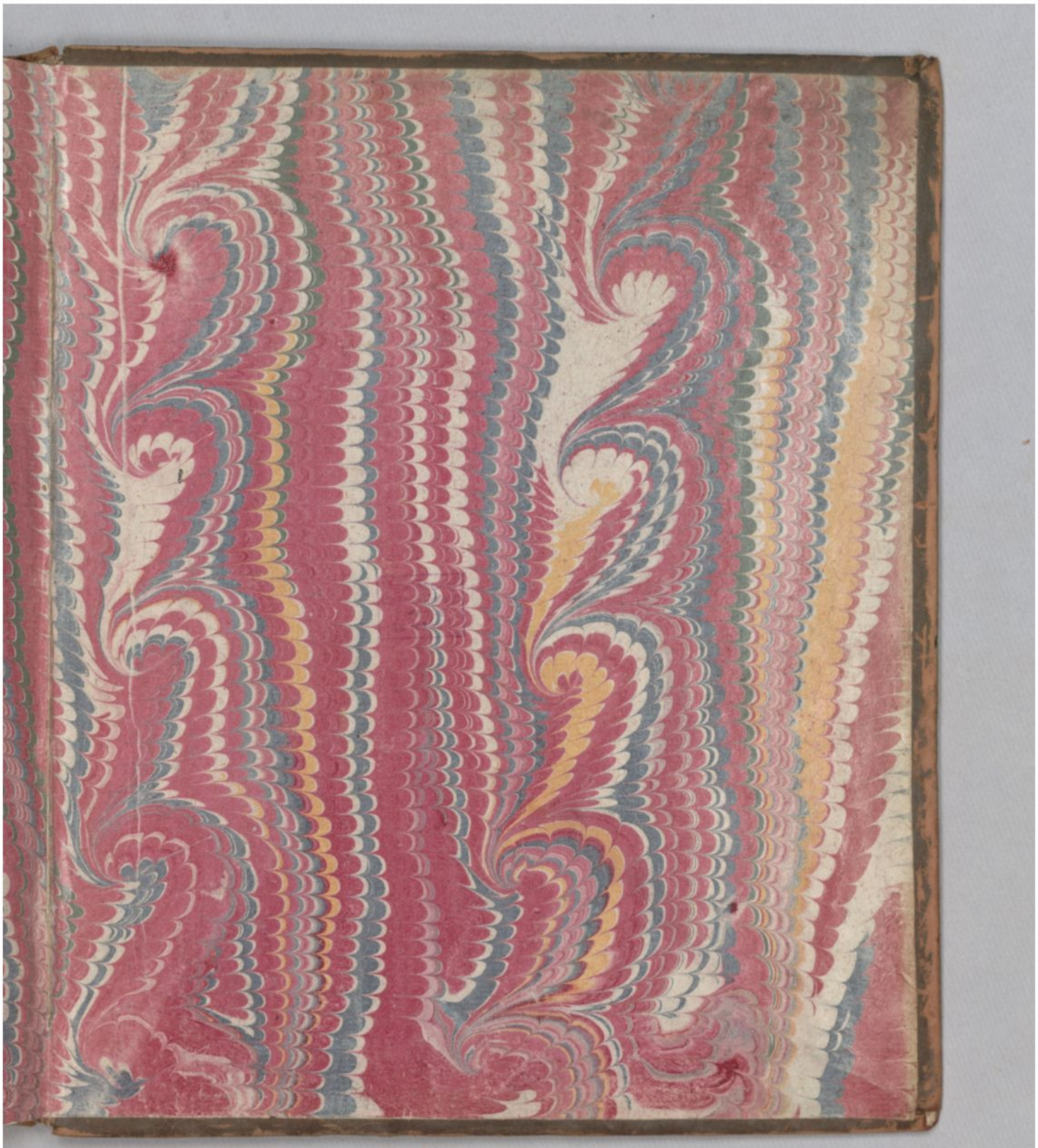
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [460] - -

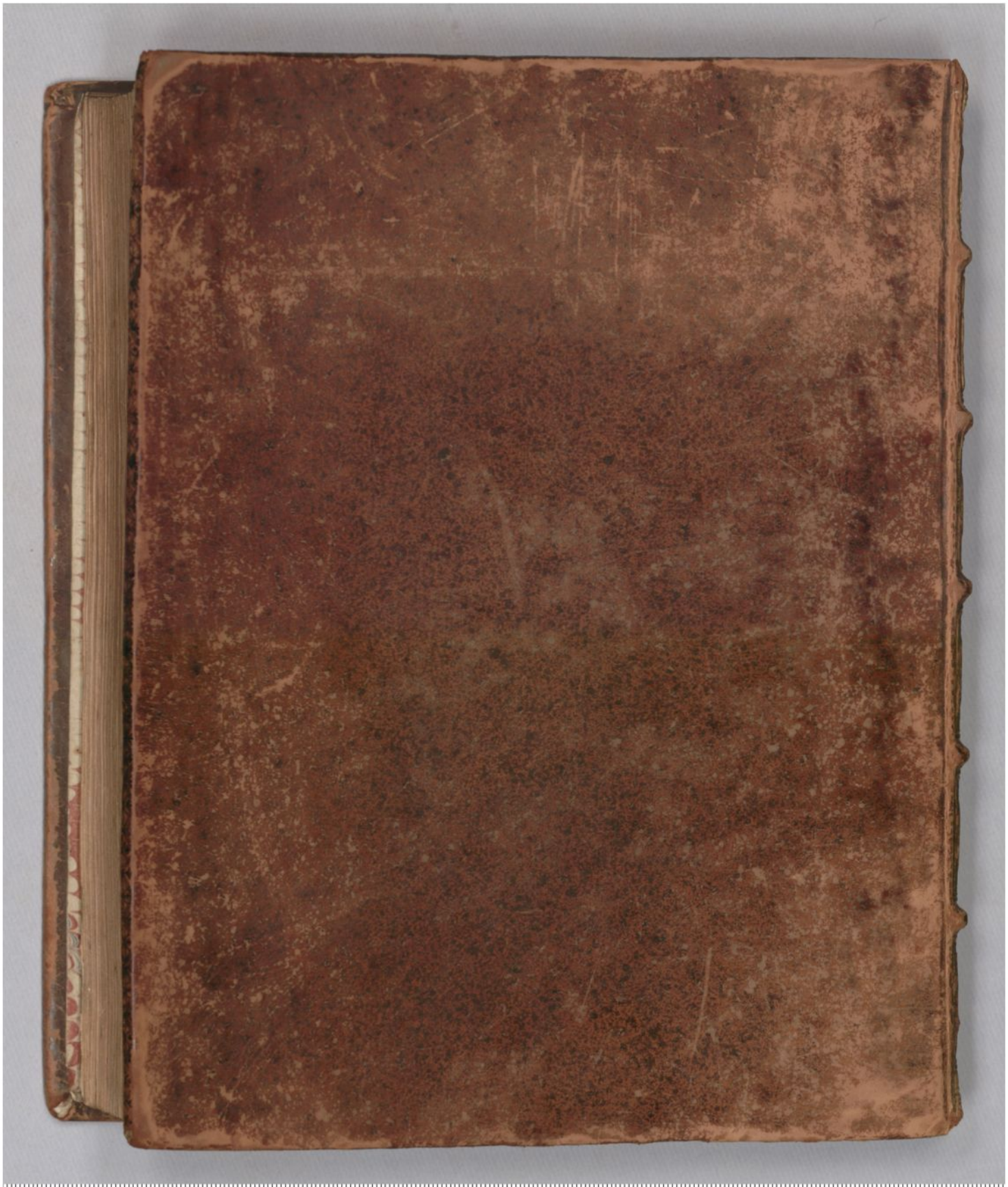
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [461] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [462] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [463] - -

PUBLIC DOMAIN

$x^3+y^3=axy$

$y=\frac{xx}{a}+\frac{y^3}{ay}$

$x=\frac{yy}{a}+\frac{x^3}{ay}$



$dB=\frac{2ydx}{a}+\frac{x^3dy}{ay}$

$B=\frac{y^3}{3a}+\int\frac{x^3dy}{ay}$

$ydx=\frac{xxdx}{a}+\frac{y^3dx}{ax}$

$A=\frac{x^3}{3a}+\int\frac{y^3dx}{ax}$

$dy=\frac{2xdx}{a}+\frac{3xydy}{ax}-\frac{y^3dx}{axx}$

$B=\frac{2x^3}{3a}+\frac{y^3}{a}-\int\frac{y^3dx}{ax}$

$dx=\frac{2ydy}{a}+\frac{3axydx-x^3dy}{ayy}$

$dA=\frac{2yydy}{a}+\frac{3xxdx}{a}-\frac{x^3dy}{ay}$

$A=\frac{2}{3}y^3+\frac{x^3}{a}-\int\frac{x^3dy}{ay}=\frac{2y^3}{3a}+\frac{x^3}{a}-\frac{y^3}{3a}+dB$

$\int\frac{y^3}{3a}+dB$

$\frac{y^3-axy}{ay}=\frac{yydy}{a}-xdy$

$2aA(=\frac{1}{3}y^3+x^3+aB)=\frac{1}{3}y^3+x^3+axy=\frac{1}{3}y^3+x^3+x^3+y^3=2x^3+\frac{4}{3}y^3$

$\frac{2y^3}{3a}+\frac{x^3}{a}-A$

$\frac{y^3}{3a}+B$

$\beta=$

$x^{\alpha}y^{\beta-1}dy+q\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}\frac{dy}{dx}=ydx$

$\frac{y^{\alpha-1}x^{\beta}}{\beta-1}=\frac{dy}{dx}$ | $\frac{1}{\beta q}x^{-\alpha}y^{2-\beta}-\frac{\alpha}{\beta}x^{-1}y^{1}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{\xi\delta}{\beta q}x^{-\alpha}y^{\delta-\beta+1}-\frac{\alpha\xi\delta}{\beta}x^{-1}y^{\delta}=\varepsilon yx^{\gamma-1}$

$y^{\delta}=a$

$x+\xi\delta y^{\delta-1}dy=0$

$\frac{\xi\delta}{\varepsilon\beta\gamma q}x^{-\alpha+1-\gamma}y^{\delta-\beta+1}-\frac{\alpha\xi\delta}{\varepsilon\beta\gamma}x^{-\gamma}y^{\delta}=a$

$\frac{\gamma x^{\gamma-1}}{y^{\delta-1}}$ $2aA=\frac{1}{3}y^3+x^3+axy$

$-\alpha+1-\gamma=\gamma$

$2\gamma=\alpha+1$

$\delta-\beta+1=0$

$\beta=\delta+1$

$y^3=$

$ydx-$

$\int\frac{y^3}{3a}+dB$

$2aA=\frac{1}{3}y^3+x^3+axy$

$gl-gs=sl+ls$

$4l=14s$ | $s.l::4.14::2.7$

$s+s.\zeta-s::g.s$

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 182, [464] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 182 [4/5] - -