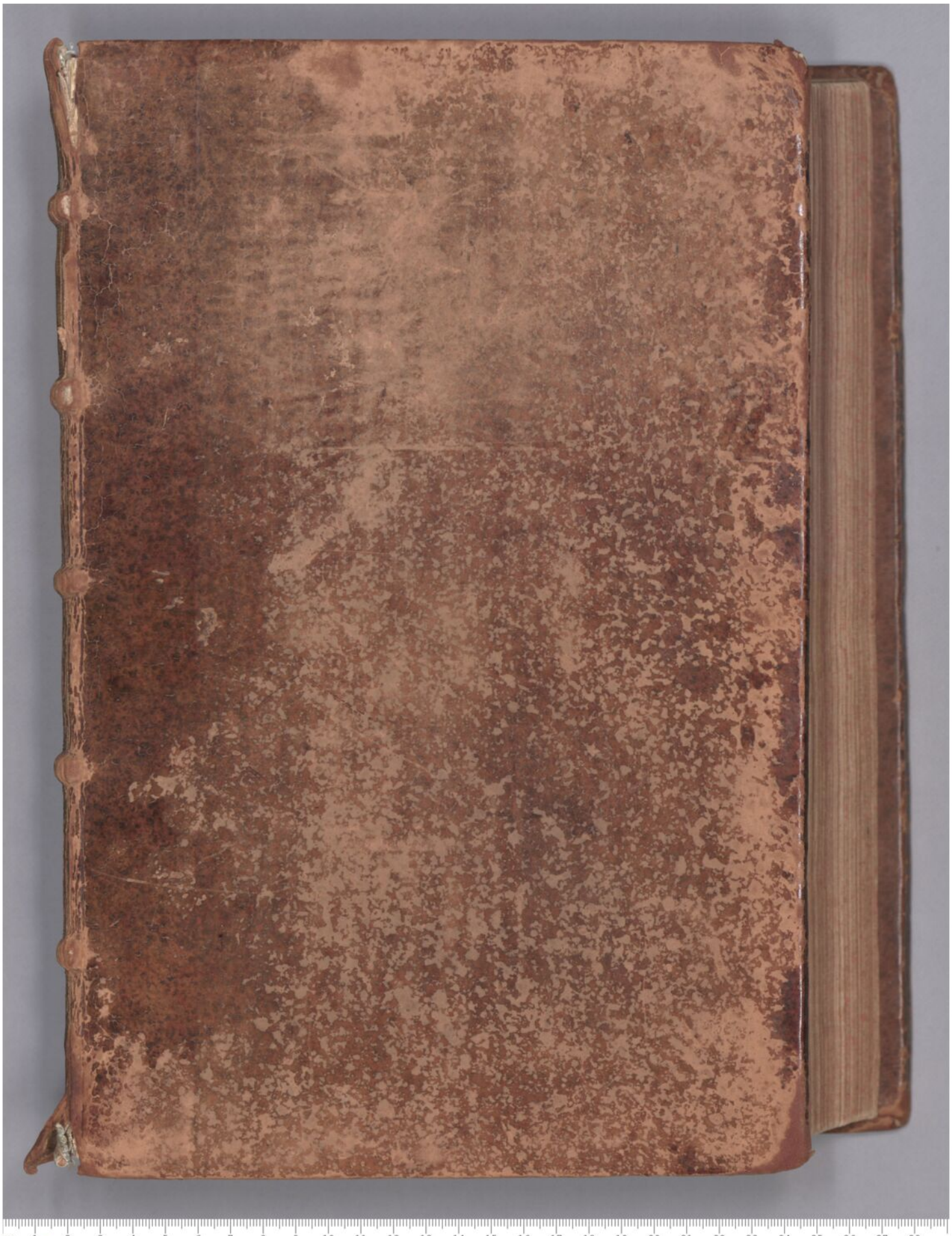
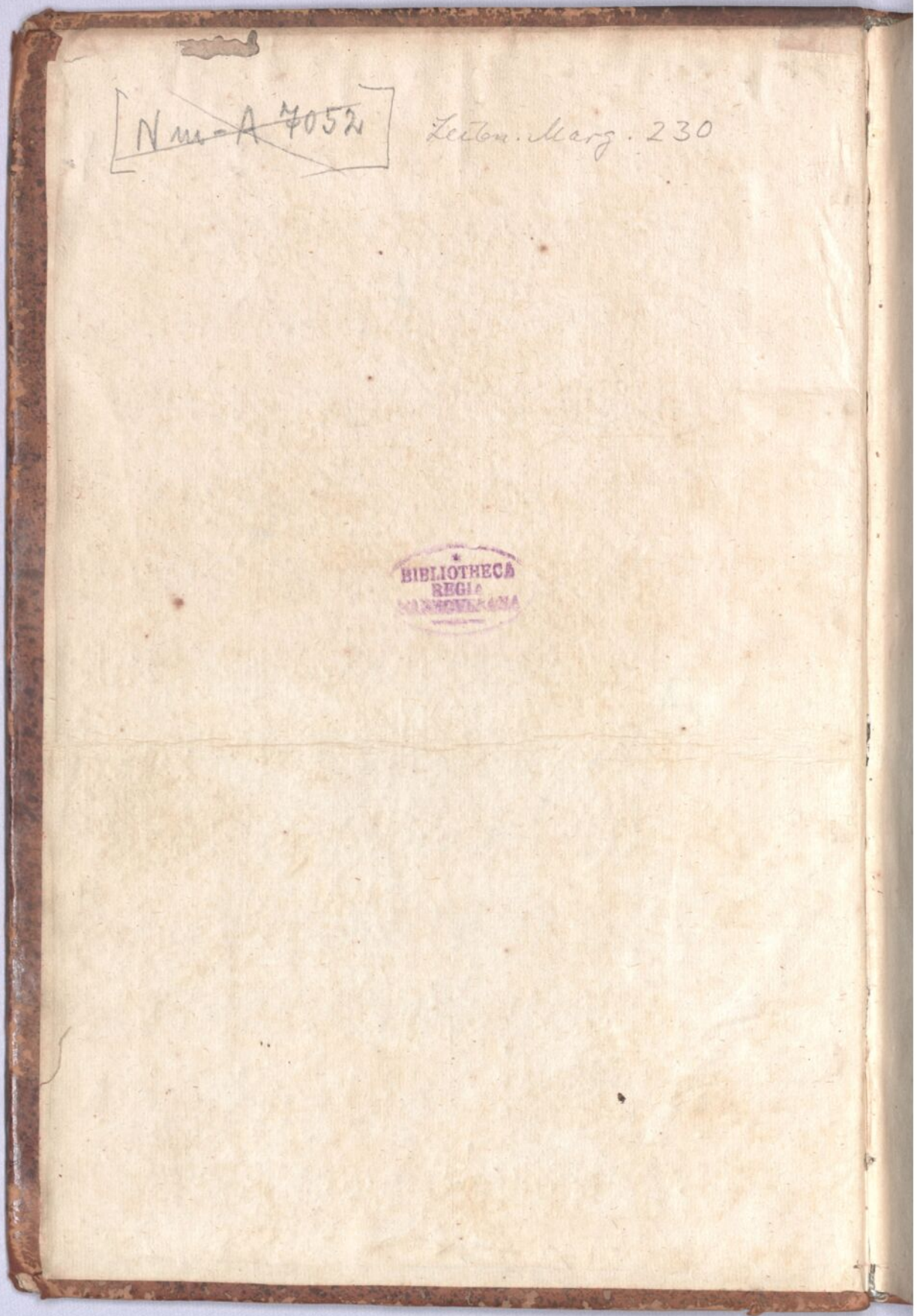


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1] - -

PUBLIC DOMAIN


Num. A 7052
Zeitbn. Marg. 230
BIBLIOTHECA
REGIA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [2] - -
PUBLIC DOMAIN

p. 2 p. 22 p. 26 p. 30 p. 39 p. 52

p. 97 p. 181 p. 193 p. 200 p. 235 p. 251 p. 265

1032 1040 1057 1073 1077 1081

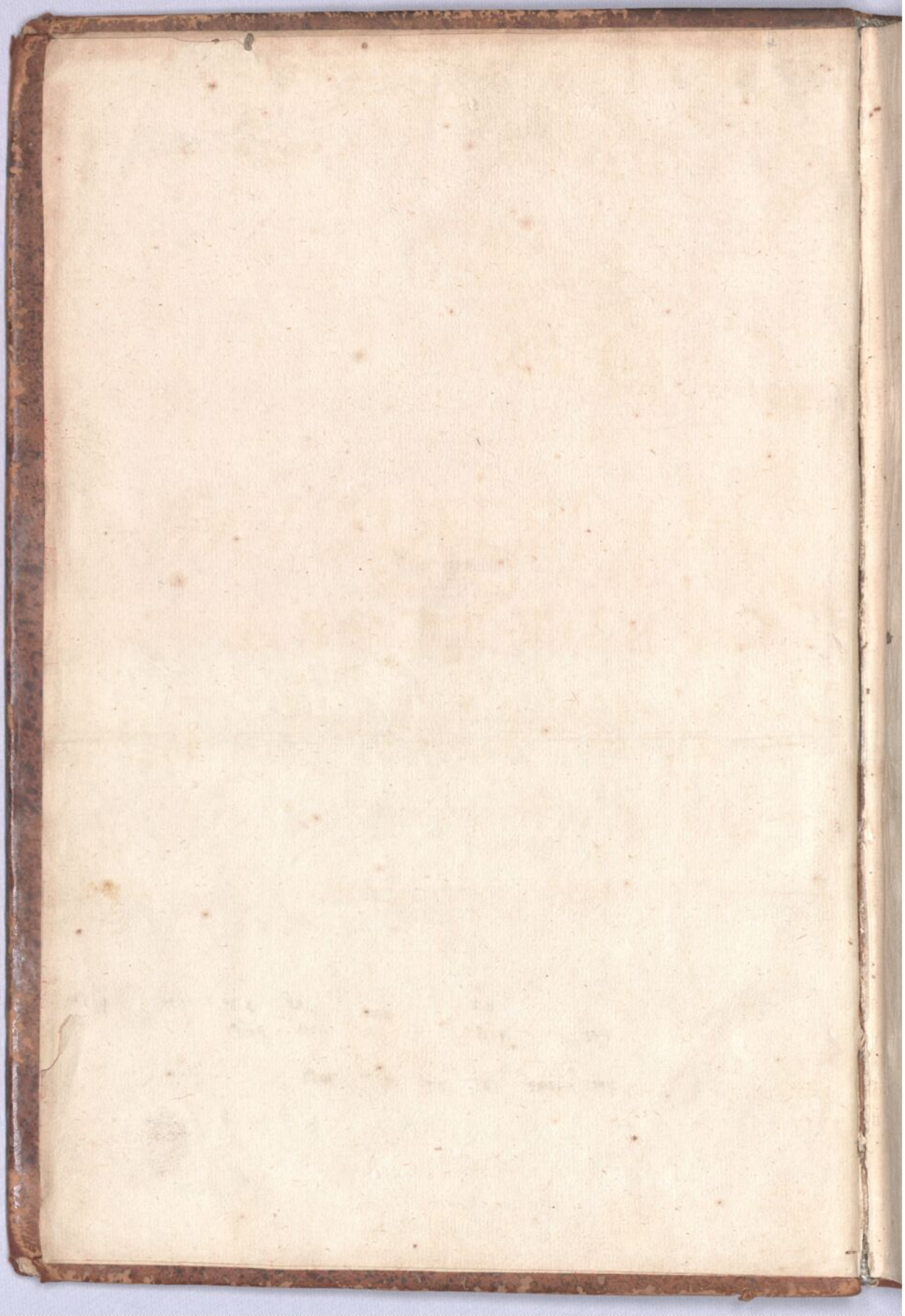
Randbemerkungen Leibnizens zu 2, 39, 867, 1134

Malebr.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [3] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [4] - -

PUBLIC DOMAIN

P. GREGORII

A S^to VINCENTIO

OPVS

GEOMETRICVM

QVADRATVRÆ

CIRCVLI

ET SECTIONVM CONI

Decem libris comprehensum.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [5] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [6] - -

PUBLIC DOMAIN

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

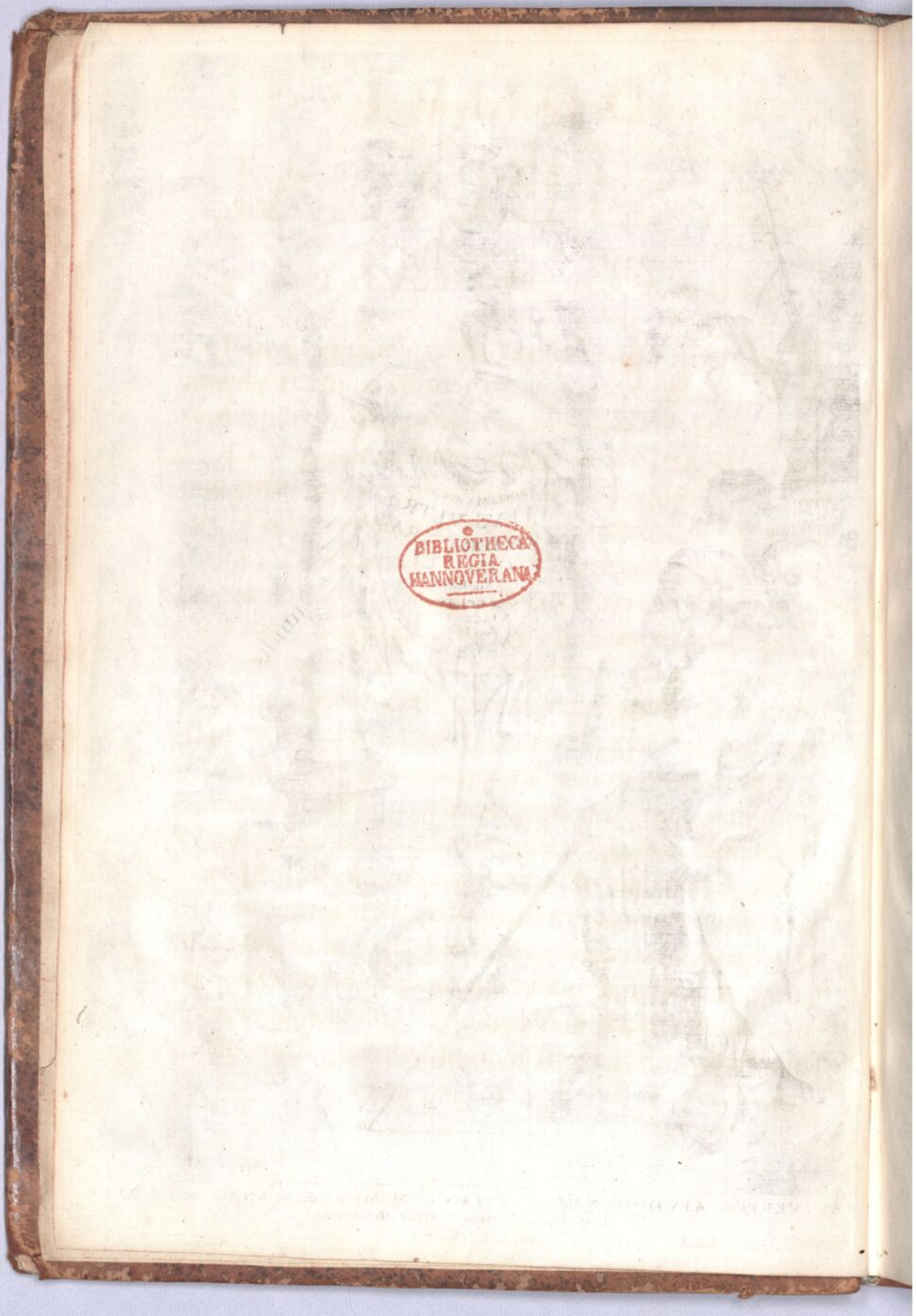
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [7] - -

PUBLIC DOMAIN



ANTVERPIÆ, APVD IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS. ANNO M. DC. XLVII.
Cum priuilegio Cæsareo et Regis Hispaniarum.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [8] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [9] - -

PUBLIC DOMAIN

DOMVI AVSTRIACAE SEMPER AVGVSTÆ.



Date veniam, Augusti Principes, si ad Voluminum meorum frontem Vestras columnas transferre, & meis lucubrationibus Vestrum PLVS VLTRA adscribere ausus sum. Non tam sum arrogans vt arbitrer ad Matheseos apicem ita me peruenisse, quemadmodum Vos statutas Herculi metas prætergressi, extremos gloriæ mundique terminos attigistis. Verùm cùm à benignitate Vestra tutelam, à nominis splendore lucem peterem, consilium fuit ijs columnis, quæ magnam mundi partem sustentant, operis mei limen fulcire, & scriptoribus stimulo esse, vt in sapientiæ regno nullas sibi metas positas rati, scientiarum quàm latissimè fines propagent: quiq; Mathematicas colunt disciplinas, vt vltrà quàm meis ego vigilijs eniti potui, suis ipsi laboribus contendant. Quod si cui aliquousque progressus videbor, & in reperiendâ circuli quadraturâ ceteris ante me felicior fuisse; non tam mihi gratulabor quia repererim, quod alius nemo; quàm opto, vt, dum Vobis offero, quod alius nemini, singularis id obseruantiæ argumentum permittatis es-

ſe. Sunt ea Auſtriacorum Principum in familiam noſtram merita, vt ijs agnoſcendis nulla gratia par, teſtandis omnis conatus ſuperuacaneus ſit : Neque aliam beneficentia Veſtra, quàm ſit ipſamet ſibi, repoſcit mercedem. Quemadmodùm tamen flumina in mare, vnde ortum habent, redire non ideò deſinunt, quòd illius immenſitatem ſuo non augeant affluxu, ita tametſi magnitudini Veſtræ noſtris nihil ſtudijs poſsit accedere, adeò tamen effuſam benignitatem quâ poſſumus animi teſtificatione non proſequi nefas ſit. Quò ſi faciant tot ingeniorum, quæ per Vos Societas alit, conſecrata nomini Veſtro monumenta; quod eidem ego L. M. Q. dedico, vtinam & inter ea locum, & apud Vos fauoris aliquid atque approbationis reperiat! Regi quidem Hieroni ſcio nihil dicaturum fuiſſe libentiùs Archimedem, quàm dimetiendi quadrandiq́ue circuli rationem, neque impotentiore vnquam lætitiâ ſuum ἕυρηκα, quàm hâc repertâ ingeminaturum fuiſſe; verùm quod tantò auguſtiore nomine inſigniatur; &, tanquam vobis non indignum, Auſtriacum vocetur, quanto interuallo illius vota vt ſuperet, neceſſe eſt? Nominis Veſtri menſuram nemo expleat præter Vos. Sed ſtudij & obſeruantiæ, non ambitionis fuit, digeſtum à me problema Auſtriacum vocare. Et dominorum liberti, & patronorum clientes ſibi induunt nomina. Nec quidquam tutius quàm quod Regio nomine ſignóue munitur. In arduo poſita atque inacceſſa eſt Veſtra gloria. Sed facilis ad benignitatem patet aditus

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [11] - -
PUBLIC DOMAIN

tus. Propterea potentes estis, vt benefici sitis. Propterea latissimè regnatis, vt complectamini quamplurimos. Non ad pauciores patrocinium, quàm imperium extenditis. Quid quod Catholicum nomen Vestris quoque columnis impositum sit, nec nisi his deiectis illius casum, qui Ecclesiam in vobis oppugnant, hæretici sperent? At si familiarum firmamentum religio est, mutuamque suis defensoribus præstat tutelam; dum prima illius cura erit, quidni sitis æternitatis securi? Nihil in humanis stabile, nec rarò Dominos mutauit orbis. Vt traiectos per quadrum radios in orbem deducens *Quadrata rotundis mutat* Sol, ita prospera aduersis, ima summis inuertere gaudet interdum, per quam Reges regnant, prouidentia; sed & quomodo si vice versâ rotunda quadratis mutes, globumque in cubum formes, suam ei mobilitatem adimas; ita instabilem regnorum potentiam pietatis ac religionis studium firmat. Christiani conditor Imperij Constantinus quadratæ aræ mundi globum imposuit, professus orbis Imperium non tam viribus, quàm sacrorum cultu niti; neque tam ab armis, quàm ab aris regnorum petendam tranquillitatem. Redactus ad quadrum globus operis mei argumentum est; sit & Vestræ felicitatis omen: quà modo caret ac termino Vestram magnitudinem exhibet, quà stellis inocciduis eum insigniui, gloriam motus inter ac turbas non occubituram repræsentet: vtque rotunda quadrando suam illi volubilitatem ademi, ita fortunæ

in

inconſtantiam Veſtra virtus & religio coerceat, ſalutemque ac pacem populorum in laudem ſuam vertat. Ita vouet

NOMINI VESTRO

æternùm deuota

SOCIETAS IESV FLANDRO-BELGICA:

Cuius ego minimus Gregorius à Sancto Vincentio.

SERE.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [13] - -
PUBLIC DOMAIN

SERENISSIMO

LEOPOLDO VVILHELMO

ARCHIDVCI AVSTRIÆ,

DVCI BVRGVNDIÆ, &c.

BELGII ET BVRGVNDIÆ PRO REGE CATHOLICO

GVBERNATORI, &c.

ORDINIS TEVTONICI

SVPREMO PRÆFECTO, &c.



AVstriaco nomini conſecratum opus ad Te, SERENISS. LEOPOLDE defero, qui Auguſtæ Domûs pars magna cùm ſis, totam nobis repræſentas. Duabus ea ſtirpibus cælo ſe attollens, Ferdinandum III. & Philippum IV. capita habet. Illo Germania potitur, hoc Hiſpania: vtrumque in Te agnoſcit Belgica. Alterius in Fratre genium, alterius in Vicario poteſtatem veneratur: dubium vtri plus obſtricta, illíne quòd carere Te ſuſtineat, an huic quòd habere contendat. Erat aliquot abhinc annis quòd gaude-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [14] - -
PUBLIC DOMAIN

ret vnico Regis ſui Fratre dignam ſe æſtimari. Quod nunc Cæſari tam cara ſit, vt & vnicum ſuum ipſe concedat, quomodo vel inter miſerias ſuas non beatam ſe putet? hoc magis, quòd reparandis Imperij rebus admotus, & fraternis exercitibus præfectus Belgis dari non potueris, quin Germanis eripereris. At, ſi regionem, non virtutis campum mutaſti. In Belgio Germaniam reperturus es, hoc eſt, Prouinciam prudentiæ, magnanimitati, vigilantiæ Tuæ parem. Duris exercitus ad nihilò molliora veniſti. Sed ad hæc & natura Te aptauit, & virtus inſtruxit. Suæ ſint alijs deliciæ. Tibi pro quiete labor eſt, pro aulæ commodis puluis & campus, pro oblectamento equus & arma. Quid quod, quantum Tibi, quantum iis, per quos Te habemus, debeamus, minùs conſtaret, ſi ad feliciores veniſſes? Non peritiam modò medici, ſed & beneficium morbi commendant. Tibi quoque optabilius Belgas beatos facere, quàm reperire. Vti ſoſpitatem nobis dulciorem antecedens calamitas, ita illuſtriores triumphos Tuos præteritæ clades facient. Quis eum citò diem det, quo, quos deſiderio Tui veniens compleuiſti, pleno lætitiæ fructu victor exſaties! quo, conuerſis aliò belli calamitatibus, priſtinus Prouinciarum decor, vbi pace non licet, ibi victorijs refloreſcat! cœpit à Serenitate Tua ea Belgis lux affulgere: neque ſuas tantùm in Te collocant, ſed & Hiſpaniæ Germaniæq; ſpes Tibi credunt commiſſas. Experire viciſsim Tu quales gubernandos ſuſceperis,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [15] - -
PUBLIC DOMAIN

ceperis : Deoque, cuius TIMORE gloriaris, propitio in curanda Belgij ſalute regionum multarum regnorumque rem gere.

SERENITATIS TVÆ

minimus Cliens

GREGORIVS A SANCTO VINCENTIO

Societatis IESV.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [16] - -
PUBLIC DOMAIN

PRÆFATIO
AD BENEVOLVM
LECTOREM.

COgitanti mihi perſæpè quid cauſſæ eſſet, quod retrò tot actis ſæculis, problematis de quadrando circulo, quam nunc inueſtigamus, ſolutio, à tot magnis præclariſque viris nequidquam tentata, necdum expedita ſit, facemque ipſo præferente Archimede, nihilominus ſuis adhuc tenebris inuoluta permanſerit; illud præcipuè occurrit, lumen quod ab antiquis nobis tradita Geometria exhibebat, nimis debile eſſe, quàm vt tam intricatæ rei perueſtigandæ ſufficeret. Id ſanè præterquam quod aſtruerent tantorum virorum, quot hactenus Geometria eduxit, indefatigabiles quidem, vani tamen labores, Archimedæa certè Spiralis, & Pappi Quadratrix idipſum euincere mihi viſa ſunt. Vt quid enim deſertâ Geometriæ tritâ ſemitâ, aliam ipſi planè viam ingrederentur viri in Geometricis acutiſſimi, ſi hâc quæ omnibus patet, quæque omnium veſtigiis teritur, ad optatum finem duci ſe poſſe exſtimaſſent? Adde quod à præclaris hoc æuo viris factum video, vt, dum ad idem problema ſoluendum ſe accingunt, veteri relictâ, nouam ſibi Geometriæ formam effinxerint, & per præruptos calles quos ſuo ſibi marte aperuerunt, eniti eò conati ſint, quò alios tendere quidem ſemper, numquam tamen peruenturos videbant. Hæc mihi ſeriò conſideranti, idem profectò in mentem venit aggredi, quod ab aliis ſummâ cum laude videbam attentatum: illudque Poëtæ præſertim animos dabat:

Eſſe aliquò prodire tenus, ſi non datur vltra.

Ad nouas itaque artes, nouaque inuenta animos ſtudiaque conuerti, nihilque non tentatum reliqui, donec non prodiiſſe tantùm penetraſſeque hunc montem aliquouſque, ſed metas ipſas (abſit verbo inuidia) attigiſſe nobis viſi ſumus.

Atque vt aliquam hîc itinerum meorum rationem, ambageſque quas, dum in incertum erro, percurri aperiam, primò Archimedis exemplo inductus, difficultatem hanc in aliam haud paullò difficiliorem, Spiralis inquam contingentẽ, conieci. quod dum ago, impenſiuſque diu Spiralis contemplationi inſiſto, admiroque quæ contingentem Spiralis inter & Circuli quadraturam ſit connexio, ecce tibi aliud plenè in mentem incidit, mira ſcilicet ſymbolizatio concordiaque Spiralis cum Parabolâ. quam dum proſequor, oſtendo Spiralem inuolutam eſſe Parabolam, & viciſſim Parabolam non niſi Spiralem eſſe euolutam. Romam, vt mox aperiam, poſtmodum euocatus, rem hanc cum P. Chriſtophoro Grienbergero, acutiſſimo ſanè in Mathematicis viro, totaque tum Italiâ celeberrimo, aliiſque contuli: à quibus cùm fortè rogarem, num ſymbolizatio hæc Archimedi fortaſſis nota occaſionem ſuggeſſiſſet Spiralem ad Circuli quadraturam tam admirabili artificio applicandi, non eiuſmodi eſſe inuentum affirmabant illi, quod ab Archimede, ſi ei innotuiſſet, vllo modo celandum fuiſſe crederent. Æquus Lector ſtatuet quid ſit de re, cùm ea quæ libro de Hyperbola ſubiunxi, peruoluerit. Hâc tamen cùm abſolui viâ problema poſſe diffiderem, à Spirali ad Quadratricem animum ſtudiumque conuerti: quam dum nouis efformo producoque modis, plurimaſque eius exhibeo proprietates, quæ ſolæ iuſtum librum conſtituere potuiſſent (conſtituiſſentque, niſi is qui ceteros ferè omnes labores meos, etiam hos abſtuliſſet caſus) ne hic quidem adiumenti ſatis reperio, quo tam arduum problema poſſim abſoluere. Inde igitur rurſus ad noua conſilia conuerſus, reperi tandem materiam eam quæ de corporibus agit, ab antiquis inchoatam, planè imperfectam in ipſis adhuc hærere incunabilis: neſcio tamen quæ meæ hac in parte

te lux menti obiiceretur, & ad noua rursus studia animos daret. Totum igitur mē in corporum contemplationem, efformationem, comparationem, peruigili multorum annorum curâ contuli, vt tandem aliquam mihi viam complanarem, qua ad montem hunc, imperuium hactenus, possem eniti. Res ex sententia tandem successit, complanaui quoad potui omnia; an autem apicem ipsum attigerim, docebit res.

Prima igitur cura fuit noua omnis generis corpora, nouo & Geometrico more efformare, quæ libro huius operis septimo continentur; & quia corporibus iis indigebam quæ cum sphæricis comparari possent, librum de circulis, qui tertium hîc locum obtinet, tres præterea conicorum præmisi, qui exinde suo ordine quartum, quintum, sextumque conficiunt; quartum quidem de Ellipsi, quia maiorem cum circulo cognationem habet, illi subiunxi; quintum de Parabola, sextum denique de Hyperbola; copiosi sunt singuli, quippe quibus naturam abstrusam hactenus sectionum illarum, ab Appollonio fortasse studio inuolutam ita euoluo, vt à communis Geometriæ perito, nullo Appollonij adminiculo, intelligi possit. Horum verò demonstrationes, cùm à linearum proprietatibus dependerent, alterum de lineis præmittere necesse fuit, quo earum affectiones quæ vsui nobis futuræ erant, lemmatum instar explanarem; hicque totius operis primus est, eiusque quasi basis. Iam verò cùm tam in Conicis quàm in corporum comparatione inscriptionibus, exhaustionibusque indigerem, librum de Progressionibus Geometricis placuit conscribere, tum quod non parum viderem subleuandum Lectoris meumque tædium longis illis, Archimedi tamen vsitatis, ratiocinationibus, quibus vtitur, quoties exhaustiones demonstrationibus adhibet; tum quod plurima noua, & non iniucunda exhibeat, quæ non mediocrem fortasse legenti afferent, vel admirationem, vel voluptatem, hicque secundus liber est. Rursus quia corpora diuersarum in quantitate specierum comparare inter se non poteram nisi in exhaustionibus octo planè vterer terminis, isque sæpè dissimilium rationum, quarum tamen in Geometria hactenus non fuit vsus, librum de Proportionalitatibus, quas octauus exhibet, nouam quasi Geometriam concinnare me oportuit. Ecquando enim hactenus Geometria proportionibus vsa nisi quæ in similitudine rationum consisterent? mihi verò etiam dissimilibus rationibus vtendum fuit. Hisce itaque rite expositis, tum demum ad Quadraturas varias, ac demum Circuli, quas reliquis libris absoluo, hoc fere tenore me accingo. In libro de Parabola conscripto, sectiones produco Parabolicas, præter alias, illas quoque quas circulus mihi offerebat. dein ex illis duas semiparabolas æquales assumo, altitudinem verò habentes eam quam latus rectum ipsius axis exhibet; quæ in se inuicem subalternè ductæ, corpus producunt æquale semicylindro, cuius basis semicirculus est, ex quo Parabolæ illæ oriuntur, & altitudo Parabolis communis, vti in libro de planorum ductibus, septimo nempè, demonstro. Tandem partes corporis orti ex Parabolis proposito modo ductis, per Proportionalitates confero cum partibus cylindri cui corpus illud æquale est. notâ autem ratione partium corporis Parabolici, innotescit ratio partium cylindri quæ illis æquales sunt. Quare, cùm partium cylindricarum bases, quæ sunt circuli segmenta, parallelis lineis intercepta, eandem inter se proportionem habeant quam partes ipsæ cylindricæ, nota etiam fit proportio segmentorum circularium, quæ inter parallelas lineas sunt posita. Tum denique ex segmentorum illorum eâ notâ proportione, nullo negocio circuli ad rectilineum proportionem exhibeo. Eadem penè ratione Hyperbolæ quadraturam exhibeo, per Parabolas parallelas in se ductas, quæ cylindro æquantur hyperbolico.

Atque hæc est operis totius adumbratio, obscura adhuc & tenuis, sed quam operis ipsius deductio faciet manifestam; præsertim æquis rerum Geometricarum, quibus hoc opus conscribo, æstimatoribus, quibus spero vel ob materiarum nouitatem, vel ob Problematis, quod soluendum suscepi, non infelicem, vt quidem reor, accessum, non omnino displiciturum.

Verùm non iniucundum fortasse fuerit, intelligere qui casus quasi concatenati semper studiorum meorum cursum interruperint partumque hunc meum, quem à vigintiquinque annis

 conceperam

conceperam tamdiu retardarint, quo minùs lucem hanc in quam modò prodeunt, citiùs aſpicerent, iuuat enim præteritorum meminiſſe nonnumquam, neque ſine grata recordatione eorum mentio fit, præſertim ſi cum amicis, beneuolis inquam Lectoribus, defæcato nunc demum, vt cum Comico loquar, animo communicentur. Anno itaque huius ſæculi vigeſimo quinto, cùm omnia quæ hoc opere continentur, ſi librum de Proportionalitatibus excipias, parata haberem, licet non ita concinnata, vt prælo ſubiici ſtatim poſſent, ſed ſumma tantùm capita, propoſitiones inquam cum demonſtrationibus ſummatim memoriæ tantum cauſſâ ſcriptas, Romam ab Admodum R.P. Generali Noſtro euocatus abij, lucubrationes meas ſolutionemque problematis de quadrando Circulo cum P. Grienbergero, eo quem dixi ſummo Mathematico collaturus: cumque per plures menſes longo ſtudio mea explicare eſſem aggreſſus, & ille ad calculos indefeſſo labore ſingula reuocaret, dimidium operis abſoluere numquam potuimus, tum quòd ea quæ Proportionalitates concernunt, necdum planè perfeciſſem, quamquam in iis nulla eſſet difficultas; tum vel maximè quòd ipſe graui & diuturno, ſæpiusque interrupto implicitus morbo, maiorem moram requireret, quàm maximorum Principum, quorum nutus imperia ſunt, preces litteræque permittebant.

In ea itaque dum Romæ incumbimus, ecce tibi binis è locis litteræ ad Admod. R. P. Generalem perferuntur, quibus Româ ad Matheſin docendum euocor; Catholici Regis Philippi vnæ, quibus Madritum mitti poſtulat; ab Auguſtiſſimo Imperatore Ferdinando alteræ, quibus me Pragam deſtinari vult. Vtrique certè Imperio obſequi cùm non poſſet admodum R.P. Generalis, huic me aſſignat, illicoque cùm res moram non ferret, eò me proficiſci iubet. Pragam vix attigeram, rurſum ſecundis litteris in Hiſpaniam euocor, iamq; ad iter accingebam me, cùm ecce paralyſi ſubitò correptus morem gerere tam iuſto Regis mei deſiderio non potui: & quamquam vim ſubiti mali infregerim aliquouſque, non tam feliciter tamen eluctari potui, quin integrum quinquennium me iſthic morbi vis ingens detinuerit. Vix hoc malum euaſeram, non ita tamen quin cum morbi reliquiis toto deinceps vitæ tempore mihi fuerit decertandum; euaſeram tamen aliquouſque, paulatimque à morbo reſpirare iam cœperam, cùm alius haud paullò triſtior caſus ſcripta mea laboreſque excepit. Saxoniæ enim Dux poſt funeſtam illam cladem noſtris ad Lipſiæ muros illatam, deditione Pragam tum fortè ſuperat: victor itaque miles, & hæreticus, quod vnum ſatis erat ne nobis parceretur, in Collegium noſtrum irrumpit, diripitque miſerrimum in modum omnia: quidquid itaque breuiſsimo antè tempore aliquorum diligentiâ militum manus non euaſit, ceſſit eorum libidini, aut certè flammis, & quod incommodo mihi tum non exiguo, imò commodo fuit maximo, eâ horâ reliquiæ incendio ſecuturo ſubducebantur, quâ ego ad aram ſacrificaturus ſtabam: incommodo, quod pleroſque ingenij fœtus amiſerim, commodo certè quod eum ſaltem præ manibus haberem tunc, quem qui habet, habet omnia. Reſciuit id R.P. Rodericus de Arriaga celeberrimus hoc tempore, multis etiam exinde tomis clarus Theologus: feſtinus itaque ad cubiculum meum aduolat, ſcripta quæ in menſa expoſueram expolienda adhuc, vnà cum ſuis in currum coniicit, eaque cùm ſolertiâ ſummâ hoſtium manibus ſubduxiſſet, Viennam defert. cetera omnia quæ ciſtam integram implebant, eaque ferè erant, quæ, cùm iis vltima adhibita iam eſſet manus, prælo parabantur, prædæ aut flammis relicta, cùm tempori ſubduci non poſſent. Inter plurima quæ iſthic deperdita, liber erat quo totam Staticam Geometricè ex Archimedæis deductam principiis comprehenderam, iuſtæ ſpiſsitudinis tomo. Inerant præterea Geometrica plurima quæ tomos duos hiſce non abſimiles magnitudine expleuiſſent. Atque ita labores plurium annorum, Deo ita volente, ſuauiterq; ad maius virtutis exercitium dirigente omnia, vnico horæ quadrante deperdidi. Perdidi illa, non tamen animos, quos exinde maiores mihi ſuffecit Deus. Spoliato itaque Collegio, Viennam cum ceteris remiſſus ſum: inde ad Belgas meos, cùm Italiæ rurſus deſtinarer, redij, non eâ tamē valetudine qua ab iis diſceſſerā. Scripta

mea

mea quæ cladi superfuerant, cùm mecum deferre non possem, Græcio Oenipontem Tyrolis amandata sunt, secundo demum Rheno in Belgium deferenda, sed cùm impeditæ semper essent viæ, variúque bellorum casus omnem Rheni tractum quotannis exciperent, neque manifesto periculo exponenda iudicarentur, decennium totum ea expectare necesse fuit: donec tandem non sine magnis impensis, magnáque amicorum curâ, summo meo gaudio, decimum post annum, Gandauum delata sunt, eáque scriptorum meorum sunt reliquiæ, quæ mihi materiam huius operis præbuerunt. Quo nomine quantum quidem debeam, imò omnes qui hisce rebus delectabuntur, R. P. Roderico de Arriaga, qui tantum mihi beneficium inopinatò præstitit, ego scio: omnia enim ferè exciderant quæ illis chartis fueram complexus; quis enim omnium iam senex recordetur quæ à triginta & quod excedit annis, fuerit commentatus? præsertim cùm breuissimè singula & quasi per compendium digessissem. Gratias itaque ago maximas bono Patri amicissimo meo; & hoc saltem alicuius gratiæ loco rependo, extare me velle publicè aliquod debiti mei monumentum, publicamque testificationem beneficij priuatim quidem impensi. sed ex quo, publico etiam Geometriæ bono, nisi mea me fallat sententia, utilitas emanabit.

Atque hæc sunt quæ tecum, Lector beneuole, more meo, id est candidè communicanda ducebam. Interim si quid in operis decursu minùs expolitum occurrerit, id sanè festinationi nimiæ adscribas velim; cùm enim rursus morbi mei Pragæ contracti vires recrudescerent, senemque iam defectis viribus oppressuræ nonnumquam viderentur, Superiorum iussu, quorum nutus etiam, non imperia tantum obseruo, conquisitis undique auxiliis, hoc quale nunc vides opus effudi dicam, an concinnaui? antequam mors subita, expectata tamen semper, fœtum hunc opprimeret. Mihi sanè rebusque meis parum esse laborandum censebam ego; sed cùm in eorum manibus ego sim, qui cogere possint, malui qualecunque hoc opus publici iuris facere, quàm refragari minimo etiam eorum nutui. Vti enim nos nostri minimè sumus, ita fœtus etiam ingenij non nostri, minimè nobis arrogandi sunt, quos Religioni obnoxios fecit professio. Si quid tamen laude dignum fortasse duxeris, totum id Deo adscriptum cupio, cuius honori & gloriæ laboraui toto vitæ meæ tempore; neque sanè sine ingenti admiratione, æterni, etiam in minimis, artificij: non enim eum ordinem, symmetriam, proportionem, quam in singulis superficiebus corporibusque demonstramus, nos ipsi industriâ nostrâ aut arte effingimus, sed facta iam, & æternis legibus ita dispositа, felicitate aliquâ ingenij, aut, quod mihi contigisse profiteor, eius fauore qui omnia tam concinnè in partes suas distribuit, inuenimus, & inuenta demonstramus.

Summa

Summa Priuilegij Cæsarei Societati IESV *concessi.*

CVm ex mandato sacræ Cæsareæ Maiestatis omnibus & singulis Typographis, Bibliopolis, atque alijs quibuscumque librariam negotiationem exercentibus serio, strictéque inhibeatur ne quis libros illos à Societatis nostræ Patribus hactenus editos, aut edendos imposterum intra S.R.I. Regnorumque & Dominiorum Sacræ Cæsareæ Maiestatis hereditariorum fines, simili alioue charactere aut formâ, siue in toto, siue in parte excudere, vel recudere, vel alio recudendos mittere aut alibi etiam impressos inuehere, vendere, seu distrahere, clam seu palam, citra supradictorum Patrum consensum ac testimonium audeat, vel præsumat. Ego Ioannes Baptista Engelgraue per Prouinciam Flandro-Belgicam, Prepositus Prouincialis concedo IOANNI & IACOBO MEVRSIIS, facultatem excudendi *Opus Geometricum Quadraturæ Circuli*, Auctore Patre GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV, in cuius fidem litteras manu meâ subscriptas & sigillo officij mei munitas dedi Gandaui 31. Martij 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

EGo infrascriptus Societatis IESV *in Prouincia Flandro-Belgica Prouincialis iuxta Priuilegium à Serenissimis Principibus eidem Societati nostræ concessum, quo bibliopolis omnibus prohibet, ne libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos absque Superiorum permissione imprimant: Facultatem do* IOANNI & IACOBO MEVRSIIS *Typographis vt librum cui titulus est* Opus Geometricum Quadraturæ Circuli, Auctore P. GREGORIO A Sto. VINCENTIO *Societatis* IESV, *imprimere, & liberè distrahere possint: Datum Gand. 31. Martij* 1647.

Ioannes Baptista Engelgraue.

APPROBATIO.

LIbrum hunc compositum à R.P. GREGORIO A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV tanquam nihil continentem Religioni nostræ orthodoxæ contrarium, aut moribus, sed vt vtilem scientiæ istius, quam tractat, amatoribus approbo, & prælo dignissimum censeo. Datum Antuerpiæ 25. Febr. 1647.

Christianus Vochts Archipresb. Antuerp. Lib. Censor.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei Gratiâ Hispaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Austriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, diplomate suo sanxit, ne quis librum, cui titulus est, R. P. GREGORII A SANCTO VINCENTIO Societatis IESV *Opus Geometricum Quadraturæ Circuli*, citra IOANNIS & IACOBI MEVRSIORVM voluntatem, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impressum, in inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui secus faxit, confiscatione librorum, & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ XXVIII. Febr. M. DC. XLVII.

Signat

Loyens.

FINIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [21] - -
PUBLIC DOMAIN

ELENCHVS MATERIARVM

quæ toto hoc Opere continentur.

LIBER PRIMVS.

De linearum potentijs.

PARS PRIMA.

De variâ linearum inter se proportione.

Linea diuisio extrema & media ratione proportionali; aliæque propositiones ex hac diuisione eruuntur. pag.2.pr.23.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.

In eadem basi constitutis duobus triangulis inæqualis magnitudinis, ducitur linea parallela basi, vt partes lineæ inter latera triangulorum interceptæ datam habeant rationem. 9.prop.16.

Datis duabus rectis, rectæ adduntur vel detrahuntur in data ratione, vel compositæ vel reliquæ datam habeant rationem. 9.pr.18.

PARS SECVNDA.

De triangulis eorumq; proprietatibus.

Trianguli isosceli proprietates. 21.pr.19.20.22.

De triangulis isoperimetris. 22.pr.21.22.

Proprietates trianguli rectanguli. 22.pr.23.24.

Varia problemata absoluuntur dato angulo, & intra vel extra eum punctо, circa lineam per datum punctum in data ratione diuidendam. 23.pr.25.26.27.28.29.30.

Item ijsdem datis exhibetur linea sic diuisa, cuius segmenta minimum exhibeant rectangulum, quod segmentis cuiusuis lineæ per idem punctum diuisæ contineri potest, imò & dato æquale exhibetur. 26.pr.34.35.

Proprietates rectangulorum ortorum ex varia inscriptione parallelarum in triangulo. 27.pr.36.37.38.

Proprietates quadratorum quæ oriuntur ex lateribus trianguli, collatorum cum quadratis lineæ ex vno angulo ad basim ductæ. 28.pr.39.40.41.42.

Pythagorica aliter demonstrata. Item Prop.12.& 13.l.2.Eucl. demonstratur eodem discursu & constructione qua Pythagoras vsus prop.47.Eucl. 30.pr.43.44.45.

In dati parallelogrammi diametro tres continuè proportionales assignantur. 33.pr.46.

In parallelogrammo, diametrorum quadrata æqualia sunt quadratis laterum simul sumptorum. 46.pr.47.

Dato triangulo obtusangulo, latus obtuso angulo oppositum ita diuiditur, vt quadrata segmentorum æqualia sint quadratis reliquorum laterum. 34.pr.49.

Varia problemata circa triangulorum diuisionem per lineam rectam. 34.pr.50.51.52.53.54.

* PARS

ELENCHVS

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

DEsignantur variæ æquationes rectangulorum & quadratorum quæ oriuntur ex segmentis lineæ rectæ diuisæ aut in æquales, aut in partes inæquales. pag.37. pr.55 56.57.58.59.60.61.62.

Æquationes rectangulorum problematicè inueniuntur. 40.pr 63.64.65.66.

Variæ æquationes, & comparationes rectangulorum & quadratorum quæ fiunt super lineis proportionalibus. 42.pr 67.68, pag.43.pr.67.68.69.

Problemata varia, de lineâ diuidendaaut augendâ, sic vt rectangula aut quadrata nata ex segmentis lineæ diuisæ inter se certam habeant rationem. 44.pr.70.71.72. 73.74.75.76.77.78.79.80.81.83.84.

Data basi, aggregato laterum, & altitudine trianguli, exhibere triangulum. 49.pr.82.

LIBER SECVNDVS.

De progressionibus Geometricis.

ARgumentum & scopus huius libri. 51.

Definitiones progressionum earumque explicationes. 54.

PARS PRIMA

Progressiones non terminatas considerat.

COntinuè proportionalium miræ proprietates. 59. pr.1.2.3.4. pag.60.pr.8.9.10. 11.12.13.14.15.

Proprietates duarum serierum trium aut quatuor continuè proportionalium. 58.pr.5.6. 7.pag.74.pr.31.33.34.

Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam, erit vt prima cum secunda ad tertiam, ita omnes quatuor ad primam cum quarta, vel vt prima cum secunda ad secundã, ita omnes quatuor ad secundam cum quartâ. 65.pr.16.

*Pappi prop.*18.*l.*3.*proponitur vniuersaliter.* 66.pr.17.

Assignatur series proportionalium in proportione Arithmeticâ. 67 pr.18.19.

Proprietates quatuor proportionalium etiam non continuarum. 68.pr.20.21.22.

De continuato proportionalium processu variæ & iucundæ proprietates. 69. pr.23.24. 25.pag.74.pr.30.32.

Proprietates duarum serierum continuè proportionalium eandem habentium primam. 71.pr.26.27.28.29.

Datarum rectarum altera ita secatur vt partes lineæ sectæ cum insectâ sint in continuâ analogiâ. 76.pr.36.

Datarum duarum rectarum altera ita secatur, vt rectangulum sub insecta & parte lineæ sectæ, ad residuæ lineæ quadratum, datam habeat rationem. 78.pr.37.

Data mediâ trium continuè proportionalium, & aggregato linearum primæ & tertiæ, exhibetur prima & tertia. 78.pr.38.

Datâ maximâ trium continuarum, & excessu quo media superat minimam, exhibetur media & vltima. 79.pr.39.

Datis

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [23] - -

PUBLIC DOMAIN

Datis duobus excessibus trium magnitudinum continuè proportionalium exhibentur tres continuæ. pag.79.pr.40.

Æquationes rectangulorum aut quadratorum ortorum ex segmentis lineæ in proportionales quotuis continuas diuisæ. 81.pr.42.43.44.45.46.pag 89.pr.63.64.65.66.

Æqualitas rectangulorum ortorum ex segmentis duarum linearum, quarum singulæ in quotuis continuè proportionales sint diuisæ. 82.pr.47.48.48.50.

Continuatio rectangulorum aut quadratorum in eadem proportione, ortorum ex variâ dispositione aut diuisione linearum in partes proportionales continuas, aut discretas. 84.pr.51.52.53.54.55.56.57.58.59.

Proportionalia rectangula orta ex lineis proportionalibus. 86.pr.57.

De duplicatis, & triplicatis rationibus, quas habent rectangula ex variâ diuisione linearum in partes proportionales. 87.pr.60.61.62.

Plana quæuis proportionalia, super duabus rectis eâdem ratione diuisis, ita constituta vt plana inter se sint similia. 91.pr.69.

Triangula & trapezia quotcumq; semper proportionalia continuè. 92.pr.71.72.

Triangula tria ad circulum constituta quæ eandem rationem continuent. 94.pr.73.

Triangula ad duos circulos constituta quæ reciprocam habeant rationem. 94.pr.74.

PARS SECVNDA

Terminum progressionis in infinitum continuatæ assignat.

PRoportiones spectantes ad terminum progressionis inueniendum. 95.pr.75.76.77.

Prima 10. Eucl. vniuersaliter proposita & demonstrata. 96.pr.78.

Ostenditur magnitudinem assignari posse, quæ æqualis sit toti seriei proportionalium in infinitum continuatæ: imò & magnitudo ea assignatur. 97.pr.79.

Terminus cuiusque progressionis in infinitum continuatæ diuersimodè assignatur. 98.pr.80.81.pag.100.pr.85.86.87.

Respondetur ad argumentum Zenonis quod ipse in materia de continuo Achyllem vocat. 101.pr.87.in Schol.

Proprietates iucundæ seriei continuè proportionalium in infinitum productæ. 99.pr.82.83.84.pag.103.pr.88.89.

Problemata circa diuisionem datæ magnitudinis, aut magnitudinum in certa ratione, sic vt certus habeatur terminus datæ rationis. 103.pr.90.91.93.94.95.96.

Duæ series infinitarum proportionalium sunt inter se vt duo primi termini. 106.pr.97.

Comparationes variarum serierum infinitarum proportionalium inter se. 107.pr.98.99.100.101.102.103.pag.119.pr.116.117.118.

Comparationes variarum serierum ortarum ex rationibus similibus quæ sunt inter alternatim posítos terminos. 111.pr.106.107.108.109.110.111.112.113.114.115.

Diuersæ continuationes rationum quæ sunt inter quantitates, per quas ad magnitudinem datâ minorem, aut datâ maiorem deueniatur. 121.pr.119.120.121.122.

PARS TERTIA

Progressiones terminatas planis applicat, præsertim similibus.

QVæ de rationibus magnitudinum in infinitum continuatis dicta, peculiariter rationibus superficierũ sic continuatis applicãtur. 125.pr.123.124.125.126.127.

Toti quadratorum seriei datur rectangulum æquale. pag.130.pr.128.129.
Item seriei quarumcumque superficierum, vna similis superficies æqualis exhibetur. 131.pr.130.
Ostenditur lineam eandem transire per omnes omnium rectilinearum similium, similiterque positarum angulos, modò bases indirectum sint positæ, & series datorum eiusmodi rectilineorum determinatur. 132.pr.131.132.
Idem circulis accommodatur. 135.pr.133.134.
Varia triangula variis quadratorum, trapeziorum, &c. seriebus in infinitum continuatis æqualia designantur. 138 pr.138.139 140.141.
Series diuersarum superficierum in infinitum continuatarum, inter se comparantur. 141.pr 142.143.144 145.146.
Dato plano, exhibetur series planorum similium incipiens à data ratione, quæ æqualis sit dato plano. 144.pr.147.148.
Exhibetur series incipiens à dato plano, æqualis seriei datæ planorum similium, aut quæ habeat ad seriem datam, rationem datam. 146.pr.149.150.151.152.
Series planorum similium quorum bases in eadem sint lineâ, comparatur cum plano simili constituto super lineâ in quâ tota series planorum similium terminatur. 149. pr.153.154.
Series complementorum ad vnam partem diametri in parallelogrammo constitutorum comparatur cum serie quadratorum ad aliam partem diametri constitutorum, totique seriei æquale rectangulum determinatur. 150 pr.155.156.157.
In serie quadratorum quorum bases indirectum sunt constitutæ, considerantur quadrata impares bases obtinentia, hoc est primam, tertiam, quintam, &c. 152.pr.158.
Comparantur partes serierum inter se. 152.pr.159.160.161.162.

PARS QVARTA.

Hæc quæ in planis demonstrata, corporibus applicat.

Seriei cuborum in infinitum continuatorum in eadem ratione, terminus inuenitur. 155.pr.163.
Partes seriei cubicæ cum partibus seriei linearis comparantur. 155.pr.164.
Seriei cubicæ æquale parallelepipedum exhibetur. 156.pr.165.
Series cubicæ binæ comparantur inter se. 157.pr.166.pag.161 pr.171.
Seriei cubicæ æqualis series parallelepipedorum datur. 157.pr.167.
Pyramidi quadratam basim habenti inscribitur series cubica, & includentis & inclusæ differentia assignatur. 158.pr.168.169.
Datæ seriei cubicæ, pyramis super dato quadrato æqualis assignatur. 160.pr.170.
Series cuborum quorum bases omnes ad eandem lineam terminatam constituta, comparatur cum parallelepipedo quod fit super ducta linea terminata & latere quadrati in primo cubo. 161.pr.172.
Superficiebus omnibus totius seriei cubicæ vna æqualis datur, varia præterea circa has superficies, & superficies parallelepipedorum & pyramidum certarum determinantur. 162.pr.173.174.175.176.177.

LIBER

MATERIARVM.

LIBER TERTIVS.

De Circulis.

PARS PRIMA.

De linearum in circulis proportione.

STatuuntur tres circuli quorum communes intersectiones in eâdem sunt lineæ. pag. 167. pr. 1.

Item linea ducta per varias circulorum intersectiones bifariam secatur. 168. pr. 2.

Per triangulum æquilaterum circulo inscriptum linea quædã trifariam secta. 169. pr. 3.

Æqualitas linearum ex determinatione circulorum se intersecantium aut tangentium. 169. pr. 4. pag 170. pr. 6. pag. 171. pr. 8 9.

Super bases trianguli descripto quouis segmento circuli, super aliis lateribus similia segmenta describuntur. 173 pr. 11.

Diuisio lineæ in partes æquales per descriptionem segmentorum similium super trianguli lateribus, dum linea per verticem trianguli transit. 175 pr. 14.

Inueniuntur item diuersæ lineæ æquales in dictis segmentis. 177 pr. 15. 16.

Inueniuntur multis modis continuè proportionales ex varia circulorum, & in ijs linearum constructione. 180. pr. 17. 18. pag. 181. pr. 19. 20. 21. 22. pag. 188. pr. 34. pag. 190. pr. 39.

Item quatuor proportionales licet non continuè. 182. prop. 23. 24. pag. 184. prop. 26. pag. 188. pr. 35. pag. 189. pr. 37.

Item duæ lineæ quæ triplicatam habeant rationem aliarum duarum. 184. prop. 25. pag. 196. pr. 38.

Proprietates variæ continuè aut discretim proportionalium, extremâ & mediâ ratione sectarum, &c. quæ competunt circuli contingenti, quando ex eius aliquo puncto quod non sit punctum contactus, per circulum ducuntur lineæ. 185. pr. 27. 28. 29. 30. 31. pag. 189. pr 36 37. pag 191. pr. 40.

Mira proprietas duorum punctorũ quæ in diametro circuli assignantur, quorum vnum intra circulum alterum extra cadit, à quibus si ad circumferentiam circuli duæ inflectantur angulum quemcumque continentes, angulus is semper diuidetur bifariam per lineam, quæ ab angulo qui in circumferentia est ducitur ad punctum in quo diameter secat circulum. 187. pr. 32.

Problemata varia de ducendis lineis à puncto extra vel intra circulum dato, vt linea à circulo diuidatur in ratione data; aut vt diuisa æqualis sit datæ; aut vt in circulo inflexa datam habeant rationem, &c. 191. pr. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49.

PARS SECVNDA.

De angulorum & arcuum comparatione.

ANguli inter se comparantur insistentes certis arcubus circuli, & ex puncto dato duæ lineæ dimittuntur intercipientes duos arcus datis æquales. 195. pr. 50. 51. 52. 53. 54. 55.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [26] - -
PUBLIC DOMAIN

ELENCHVS

PARS TERTIA.

De mutuâ circulorum interſectione & contactu.

IN circulos ſe contingentes immittuntur lineæ à certo puncto, ſic vt interceptæ à circulis ſint æquales inter ſe, aut certæ certis. pag.199.pr.56.57.

Annulo qui intercipitur à duobus circulis concentricis datur circulus æqualis. 200. prop.58.

De circuli ſegmentis ſimilibus ſuper lateribus trianguli deſcriptis, circumſcripto circulo, ea aut contingente aut ſecante variæ proprietates. 200.pr.59.60.61.62.63.64.

Datis duobus circulis, punctum inuenitur, per quod acta linea diuidat circulos in ſimiles partes. 204.pr.67.

PARS QVARTA.

De linearum in circulo potentia.

VArijs modis ducuntur lineæ in circulo, ſic vt rectangula ſuper linearum ſegmentis ſint æqualia. 205.pr.68.70.71.73.74.pag.212.pr.85.

Item quadrata æqualia rectangulis, aut quadrata quadratis æqualia. 207.pr.74.75. pag.208.pr.77.pag.209.pr.80.pag.213.pr.86.

Item rectangula æqualia certæ figuræ. 205.pr.69.pag.208.pr.76.

Item ſic ducuntur lineæ vt circuli ſuper eis vt diametris deſcripti æquales ſint vni certo. 209.pr.78.

Conſiderantur rationes quas habent certa rectangula & quadrata inter ſe, aut determinatur quantum vnum excedat alterum. 209.pr.79.pag.210.pr.81.82.83.84. pag.113.pr.87.

Polygona inſcripta circulo conferuntur cum quadrato ſemidiametri. 214.pr.88.89.

Rectangula deſignantur quæ triplicatam habeant rationem eius quam certæ lineæ inter ſe. 215.pr.90.91.92.93.

In diametro circuli linea per puncta deſignatur, ſuper quâ vt baſi ſe ad peripheriam conſtituantur quæuis triangula, ſemper quadrata laterum quæ non ſunt baſes ſimul ſumpta æqualia ſunt futura inter ſe. 216.pr.94.

Prolegomena ad ſectiones coni.

DEfinitio coni eiuſque expoſitio, & quotuplex ſit. 220.

Conſiderantur latera triangulorum ſcalenorum, quæ fiunt ex varia ſectione coni ſcaleni per verticem & centrum baſis. 221.pr.1.pag.223.pr.3.

Variæ & iucundæ conſiderationes circa lineam è vertice coni ſcaleni perpendiculariter dimiſſam ad baſim trianguli per axem, cuius puncta incidentia circellos in baſe coni deſcribere oſtenduntur. 222.pr.2.pag.224.pr.4.5.6.

In dato cono ſcaleno exhibetur minimum & maximum triangulorum quæ ſectione per axem facta exſurgere poſſunt. 228.pr.7.8.

Item triangulum quod cum minimo triangulorum per axem, datam habeat rationem, quæ tamen maior non ſit quàm ea quæ eſt inter maximum & minimum triangulum per axem. 230.pr.9.

Proprie-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [27] - -
PUBLIC DOMAIN

Proprietates coni ſcaleni, item coni recti rectanguli & acutanguli. pag.231. prop.10. 11.12.

Dato triangulo orto ex ſectione coni recti ſecti per axem, aliud triangulum non per axem exhibetur, quod ad triangulum per axem habeat rationem datam. 233.pr.13.

In cono recto triangula non per axem ducta, quorum baſes in eodem puncto ſe interſecant, habent perpendiculares ad baſes è vertice ductas, in peripheria circuli, cuius diameter eſt recta inter centrum baſis conicæ, & punctum interſectionis interiecta. 235.pr.14.

In cono recto exhibetur triangulum quod per apicem coni & punctum datum ſiue extra ſiue intra coni baſim tranſeat, habeat verò ad triangulum per axem datam rationem. 236.pr.15.

In cono quocumque ſectio baſi parallela circulus eſt. 238.pr.16.

In cono ſcaleno exhibetur circulus baſi non æquidiſtans. 239.pr.17.

Oſtenditur in cono ſcaleno duos axes eſſe. 240.pr.18.

LIBER QVARTVS.

De Ellipſi.

PARS PRIMA

Sectionem è cono educit primaſq́, ac eſſentiales eius exhibet proprietates.

Definitiones. 242.

Ex ipſo cono educitur ellipſis, & prima eius proprietas demonſtratur ex cono, nempè quod quadrata ordinatim applicatarum ſint inter ſe, vt rectangula ſuper ſegmentis diametri ſectæ per ordinatim applicatas. 244. pr.1.2.3.4.

Oſtenditur differentia inter ellipſim & circulum. 247.*in Schol.*

Ellipſeos diameter aſſignatur. 248.pr.5.

Item ellipſeos centrum. 248.pr.6.

Item diametri coniugatæ. 249.pr.8.9.

Conſiderantur ordinatim applicatæ. 250.pr.10.pag.252.pr.13.

Latus rectum exhibetur dato axe aut quauis diametro. 250.pr.11.12.

De contingentibus ellipſin. 255.pr.21.22.23.pag.158.pr.27.28.

De lineis ductis ex extremitatibus lineæ ordinatim applicatæ concurrentibus in idem punctum diametri ad quam linea ordinatim erit applicata. 257.pr.24.25.26.

Variæ proprietates ortæ ex contingente ellipſin, aliiſque lineis certâ ratione ductis. 259. pr.29.30.32.33.34.35.36.37.38.39.

Circulus ſuper axe maiore ellipſeos vt diametro deſcriptus, ellipſi exterius in duobus tantùm punctis occurrit. 264.pr.40.

Et circulus centro ellipſis deſcriptus ſi ellipſin ſecat in quatuor punctis ſecabit. 265.pr.41.

PARS

ELENCHVS.

PARS SECVNDA

De sectoribus & segmentis ellipseos.

TRiangula maxima segmento ellipsis inscribuntur, eorumque proprietates expenduntur. pag.266.pr.42.43.44.

Diametri coniugatæ quæcumque ellipsin quadrifariam semper diuidunt, siue in sectores quatuor æquales. 268.pr.45.46.

Sectores ad verticem oppositi semper sunt æquales. 269.pr.47.

Sector variè bifariam diuiditur. 269.pr.48.pag.270.pr.50.

Segmenta æqualia diuersimodè inueniuntur. 270.prop.49.pag.271.prop.51.52.53. pag.273.pr.57.

Segmentorum & sectorum circa diametros coniugatas constitutorum, & coniugatarum diametrorum per segmenta & sectores descriptarum miræ proprietates. 272. pr.54.55.pag.274.pr.58.pag.278.pr.67.

Ellipsi hexagonum regulare inscribitur. 275.pr.59.

Proprietates aliæ segmentorum, item sectorum æqualium & inæqualium. 275.pr.60. 61.62.63.64.65.66.pag.278.pr.68.69.

PARS TERTIA

In ellipsi considerat axium & diametrorum coniugatarum æqualium ac inæqualium proprietates.

IN ellipsi diametrorum maximæ & minimæ sunt axes. 280.pr.71.

Rectangulum sub dimidiis axibus æquale semper est parallelogrammo quod fit à quibusuis semidiametris coniugatis. 281.pr.72.

Parallelogrammum quod fit à lineis extrema axium coniungentibus æquale semper est parallelogrammo contento lineis quarumuis coniugatarum extrema coniungentibus. 282.pr.73.

Variæ quadratorum & rectangulorum æqualitates & comparationes ex variâ sectione diametrorum coniugatarum. 282.pr.74.75.76.pag.295.pr.99.pag.296. pr.101.pag.297.pr.103.pag.198.pr.105.106.

Axium quadrata simul sumpta æqualia semper sunt quadratis cuiuscumque coniugationis diametrorum simul sumptis. 284.pr.77.

Axes ellipseos simul sumpti, minimæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum. 284.pr.78.

Quadrata linearum extrema axium iungentium simul sumpta æqualia sunt quadratis linearum quæ extrema diametrorum cuiusuis coniugationis coniungunt. 285. pr.80.

Quædam aliæ proprietates linearum coniungentium extrema diametrorum coniugatarum. 285.pr.81.82.83.

Axium extrema coniungentes simul sumptæ maximæ sunt omnium quæ quarumuis diametrorum coniugatarum extrema coniungunt. 286.pr.84.

Mira circa angulos Arithmeticè proportionales proprietas. 288.pr.87.

Data quâuis diametrorum coniugatione ellipseos axes reperiuntur, & suppletur defectus

ctus qui in demonstratione huius propositionis apud Pappum obrepsit. l.8. pr.14. pag.289.pr.90.& Schol.
Datis axibus in ellipsi, duæ æquales diametri coniugatæ reperiuntur, quales in omni ellipsi tantùm duæ sunt. 291 pr.91.92.
Æquales diametri coniugatæ simul sumptæ maximæ sunt omnium diametrorum coniugatarum simul sumptarum. 292.pr.93.
Proprietates linearum extrema diametrorum coniugatarũ coniungentium. 292.pr.94. 95.96.
Lineæ coniungentes extrema coniugatarum æqualium simul sumptæ, minimæ sunt omnium quæ quascumque diametros coniugatas iungunt. 294 pr 97.
Quadrata dimidiorum axium simul sumpta, dupla sunt quadrati semidiametri vnius coniugatarum æqualium. 294.pr.98.
In ellipsi diametri coniugatæ exhibentur quæ inter se datam rationem habeant. 300. pr.108.
Variæ proprietates circa contingentes diametrorum coniugatarum & axium, quæ secantur per diametros coniugatas productas. 300.pr.109.110.111.112.113.114. 115.116.117.118.119.

PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

Ellipseos poli assignantur. 306.pr.120.pag.308.pr.124.
Polorum proprietas præcipua, quod à polis inflexæ quæuis ad peripheriæ quoduis punctum simul sumptæ æquales sint axi, ac propterea æquales inter se simul sumptæ. 307.pr.121 pag.311.pr.129.
Proprietates duarum tangentium ellipsin in duobus punctis, in quibus axis ellipsin secat, sectarum per alterum tangentem. 307.pr.122.123 124.125.126.127.128.
E polis axis duæ rectæ inclinantur ad idem punctum peripheriæ quæ datam rationem contineant, determinaturque quænam ratio dari possit. 312.pr.131.
Breuissima linea assignatur quæ à dato puncto ad ellipsin duci potest. 313 pr.132 133.
Proprietates circulorũ super aliquo pũcto axis ellipseos descriptorũ. 314.pr.134.135.136.
Proprietates quædam linearum ex polo ad peripheriam ductarum simul cum quâdam tangente; inueniunturque miræ æqualitates quadratorum, rectãgulorum, linearum, & per eas hyperbolæ describuntur 316.pr.137.138.139.140.pag.318.pr.142.143.
Data basi aggregato laterum & altitudine, exhibetur triangulum. 319.pr.144.
Data subtensa cuiusuis arcus circuli per alteram lineam secatur, sic vt segmenta lineæ secantis datam habeant rationem. 320 pr.145.
Data recta & altitudine, describitur ellipsis cuius poli sint extrema lineæ datæ, item ellipsis super data rectâ describitur. 320.pr.146.147.

PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

Genesis ellipseos ex sectione quâdam lineæ, erectis parallelis ex punctis lineæ sectæ. 322.pr.148.

**

Geneses

Geneſes ex triangulis. pag.322.pr.149.pag.324 pr.151.
Geneſes ex parallelogrammo. 323.pr.150.
Geneſes ex circulo, ſemicirculo, ſegmentis circuli. 324.pr.152.153.154.155.156.257.158.159.160.
Datur ellipſis ſecans circulum in puncto, ex quo ducta tangens circulum, etiam nihilominus tangat ellipſin. 328.pr.159.
Geneſes ellipſis ex ellipſi. 329.pr.161.162.163.

PARS SEXTA

Circulum cum ellipſi comparat.

PRoprietates linearum diuerſarum in circulo & ellipſi ſuper eodem axe deſcriptis. 332.pr.168.169.170.171.172.173.174.175 pag.937.pr.179.
Quadrata ordinatim applicatarum ad vnam coniugatarum æqualium, æqualia oſtenduntur rectangulis ſuper ſegmentis diametri coniugatæ ſectæ per ordinatim applicatas, prout eſt in circulo. 336.pr.176.177.178.
Segmenta ellipſis æqualia ſegmentis circuli. 338.pr.180.181.
Ellipſis ad circulum ſuper eodem axe deſcriptum, eſt vt ordinatim applicata in ellipſi ad ordinatim applicatam in circulo. 339.pr.182.
Segmenta & ſectores ellipſis & circuli ſuper eodem axe deſcriptorum comparantur inter ſe. 339.pr.183.184.185.
Comparantur ſegmenta & ſectores ellipſis & circuli non deſcriptorum ſuper eodem axe. 341.pr.186.187.188.
Comparantur triangula maxima ellipſis ſegmento inſcripta, cum triangulis maximis inſcriptis ſegmento circuli, & ex comparatione horum triangulorum comparatur ellipſis cum circulo. 344.pr.189.190.
Dato circulo vel ellipſi exhibetur ellipſis æqualis, & contra. 345.pr.192.
Datur quædam ellipſis, duabus certis æqualis. 346.pr.194.
Dato circulo diuiſo in duo ſegmenta, in ſimilia diuiditur ellipſis, & æquale ſegmentum ellipticum datur ſegmento circulari. 347.pr.195.196.197.
Ellipſis à dato in peripheria puncto, in datos numero ſectores æquales diuiditur. 348.pr.198.
Polygona regularia ellipſi inſcribuntur, qualia inſcripta dato circulo. 349.pr.199.pag.350.pr.201.
Segmentum circulare ab aliquo laterum polygoni ablatum, eſt ad ſegmentum ellipticum ab aliquo laterum eiuſdem polygoni ellipſi inſcripti ablatum, vt circulus ad ellipſin. 350.pr.200.
Omnia quadrata polygoni inſcripti in ellipſi, æqualia ſunt quadratis polygoni eiuſdem inſcripti circulo, cuius diameter æqualis eſt vni ex diametris coniugatis æqualibus ellipſeos. 351.pr.202.203.
Oſtenduntur duæ lineæ in ellipſi, quæ eandem habeant inter ſe rationem, quam omnia quadrata polygoni ellipſi inſcripti, habent ad ſuperficiem ipſius polygoni. 354.pr.204.

LIBER

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [31] - -
PUBLIC DOMAIN

MATERIARVM.

LIBER QVINTVS.

De Parabola.

PARS PRIMA.

Parabola è cono educitur, passionesq; illius fundamentales exhibentur.

Definitiones parabolam spectantes. pag. 357.

Prima parabolæ proprietas è cono demonstratur, quod ordinatim applicatarum quadrata sint vt partes diametri inter parabolam & ordinatim ductam applicatè. 359.pr.1.

Problemata varia quibus inueniuntur diametri, ordinatim applicatæ & latus rectum. 361.pr.4.5.6.7.8.pag.371.pr.22.

Latus rectum à nobis inuentum ostenditur idem cum eo quod inuenit Apollonius. 364. *in Schol.*

Variæ proprietates lateris recti. 365.pr.9.10.11.12.13.14.

De contingente parabolam, eiusque inuentione. 367 pr.15.16.17.18 pag. 370.pr.20. 21.pag.399.pr.82.

Ex cono demonstratur quod diameter intercepta inter ordinatim applicatam, & punctum in quo contingens cum diametro concurrit, à parabola bifariam diuidatur. pag 368.pr.17.

In parabolâ omnes diametri æquidistant axi. 370.pr.19.

Parabolæ axis inuenitur. 371.pr.23.

Varia circa occursum linearum cum parabola. 372.pr.24.25.26.27.28.29.33.

PARS SECVNDA

Linearum in parabolâ tam continuam quàm discretam proportionem contemplatur.

Variis modis inueniuntur in parabola tres continuè proportionales, præcipuè ex latere recto. 377.pr.32.33.34.35.

Imò & quinque continuæ. 379.pr.36.

Item lineæ quæ ad se inuicem in duplicata, triplicata sint ratione. 379.pr.37.38.39.40.

Tres proportionales inueniuntur, per lineam coniungentem puncta, in quibus duæ diametri parabolam secant. item aliæ æquationes rectangulorum. 383.pr.42.43.44.45.

Comparationes & æquationes rectangulorum, ortorum ex segmentis duarum parallelarum quomodocumque positarum, quæ sectæ sint per duas diametros. 385.pr.46. 47.48.

Comparationes & æquationes rectangulorum ortorum ex segmentis parallelarum in parabola sectarum per vnam aut duas lineas. 386.pr.49.50.51.

Item comparationes rectangulorum super segmentis parallelarum sectarum per diametrum & aliam quandam lineam. 387.pr.52.53.54.

Tandem comparationes parallelogrammorum ortorum ex tribus diametris quibusdam, & ex contingente diametrum cadentem intra parabolam, reliquis extra eam cadentibus. 389.pr.56.57.58.

Parabolæ diametrum secet quæuis, occurrens parabolæ in duobus punctis, ex quibus

duæ ordinatim ducantur ad diametrum, ostenditur ea diameter in tres proportionales diuisa. pag 390.pr.60.
Triangulum in parabolâ describitur, cuius basis transeat per punctum certum diametri, quod habeat angulum rectum in peripheria. 392 pr.63.
Idem fit longè vniuersalibus, quando per punctum in axe designatum transeunt bases triangulorum, omnia enim ostenduntur habitura angulum rectum ad peripheriam. 392.pr.64.
Considerantur huius trianguli quædam proprietates. 392.pr.65.66.
Tres proportionales inueniuntur ex contingente eique parallelâ, & ex lineâ iungente puncta in quibus se parabola & lineæ parallelæ intersecant. Item aliæ circa hæc proprietates. 393.pr.67 68 69.
Tres imò & plures continuè proportionales inueniuntur per intersectionem diametrorum, & vnius lineæ eas secantis, item aliæ proprietates. 394.pr.71.72.73.74.75.
Variæ in parabola lineæ per varias intersectiones proportionaliter diuisæ. 396.pr.76. 77.78.79.80.
Ex quouis puncto contingentis parabolam demittatur recta, quæ parabolam secet in duobus punctis; ex puncto contactus dimissa diameter eam lineam sic secabit, vt tota & pars inter diametrum & tangentem interiacens, item inter parabolam, & tangentem sint tres proportionales. 398.pr.81.
Variæ circa lineam ita ductam considerationes. 399.pr.83.84.85.
Duorũ tangentium puncta contactus iungantur, tum ex puncto quocumque vnius tangẽtis ducatur alteri tãgenti parallela, erit ea diuisa in tres proportionales. 400 pr.86.
Hinc duæ sequuntur proprietates. 400.pr.87.& Coroll.
Aliæ rectangulorum æqualitates, trium continuarum, & quatuor proportionalium inuentiones, aliæque determinationes, quæ per contingentem determinantur. 401.à pr.88.vsque ad 111.
Quædam linea in parabolâ extremâ & mediâ ratione secatur. 408 pr.107.
Item quædam extrema & mediâ ratione proportionali. 408.pr.108.pag.410.pr.112.

PARS TERTIA

Sectionis focum, & mutuas parabolarum vel circulorum intersectiones Geometricè designat.

DImidia & quarta pars lateris recti theorematicè assignatur, aliæque proprietates ex data quarta parte lateris recti deducuntur. 412.à pr.114. vsque ad 123.
Datæ parabolæ focus problematicè exhibetur, explicaturque ratio combustionis in eo puncto in speculo parabolico. 414.pr.124.
Determinatur circulus qui parabolam in vno tantùm puncto interius contingat. 416. pr.126.
Item qui parabolam præter contactum intersecet in duobus punctis. 416.pr.127.
Comparantur rectangula inter se quæ fiunt ex segmentis ordinatim applicatarum sectis per parabolam & circulum iam dictum. 416.pr.128.
Item per eum circulum determinatur latus rectum. 417.pr.129.
Proprietates circuli contingentis parabolam intus in duobus punctis, isque circulus determinatur. 417.pr.130.vsque ad 135.

Determi-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [33] - -
PUBLIC DOMAIN

Determinatur circulus maximus qui parabolam intus in vno tantùm puncto contingat. pag.420.pr.136.

Ex dato in axe parabolæ puncto linea breuissima ducitur earum quæ ex illo puncto ad peripheriam duci possunt. 420.pr.137.

De circulo secante parabolam in quatuor punctis, eiusque proprietatibus. 421.pr. 138.139.140.

Puncta circulorum, item linearum secantium parabolam Geometricè designantur. 422 à pr.141.vsque 145.

Determinantur parabolæ ad eundem axem constitutæ numquam concurrentes, siue parallelæ inter se. 424.pr.146.

Determinantur parabolæ sibi inuicem occurrentes, intersectionumque puncta. 425.à pr.147.vsque ad 152.

PARS QVARTA

Proprietates parabolarum se inuicem, aut circulos contingentium, intersecantium.

PRoprietates duarum parabolarum ad eundem verticem & axem constitutarum, sic vt vna intra aliam contineatur. 429.pr.153.154.155.156.

In ijs septem continuè proportionales inueniuntur. 454.pr.214.

Proprietates parabolarum ad eundem verticem & axem, aut ad solum axem constitutarum, sic vt parabola parabolæ opponatur. 431.pr.157.158.159.

Proprietates parabolarum inuerse ad eundem axem constitutarum, sic vt apex vnius intra alteram parabolam sit. 432. pr. 160. vsque 164. pag.443. pr.188. 189. pag.445 pr.192.

Proprietates parabolarum ad eundem apicem constitutarum, sic vt axis aut diameter vnius tangens sit alterius. 434 pr.165.166.167.pag.136. à pr.171. vsque 174. pag.140.à pr.181.vsque 185.

In illis parabolis sic constitutis lineæ designantur, quæ aliarum linearum duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, imò octuplicatam habeant rationem. 437.à pr.175. vsque 180 pag 442.pr.186.

Proprietates parabolarum sic ad eandem tangentem constitutarum, vt diametri per puncta contactuum dimissæ, parallelæ sint. 435. pr.168. 169. 170. pag 444. pr.190.191.

Proprietates parabolæ sectæ bis per circulum. 445.pr.193.194.pag.451.pr.206.207.

Proprietates parabolæ quam interius tangit circulus. 446. à pr.195.vsque 203.

Proprietates parabolæ quam tangit circulus & in duobus punctis præterea secat. 450. pr.204.205.pag.453 pr.211.212.pag 454 pr.213.

Proprietates parabolarum subalternè positarum ad eundem axem, quas in verticibus tangit circulus. 451.pr.208.209.210.

Problemata circa diuisionem lineæ in certa ratione soluta per intersectiones parabolæ. 454.pr.215.216.217.

ELENCHVS:

PARS QVINTA.

Quadraturæ parabolæ.

Propositiones præambulæ ad quadraturas. pag.457.à pr.218. vsque 226.
Triangula maxima segmentis inscribuntur, eorumque proprietates explicatæ. 460.à pr.227. vsque 230.
Quadratura parabolæ conuexæ. 462.pr.231.232.
Triangula maxima parabolæ concauæ inscripta. 463.pr.233.234.
Quadratura parabolæ concauæ. 464.pr.235.236.
Conuexa parabola dupla est parabolæ concauæ. 465.pr.237.238.
Segmentum parabolicum datum quadraturæ. 466.pr.239.
Parabolæ conuexæ inter se, item parabolarum segmenta tam concaua quàm conuexa inter se variæ comparantur. 466.à pr.240. vsque 248.
Inter duas datas duæ mediæ proportionales organicè exhibentur. 470.pr.250.251.252.

PARS SEXTA

Segmenta primùm & parabolas inter se confert, dein figuras maximas sectioni inscribit.

Lineæ quæ extremitates parallelarum duarum in parabola connectunt, segmenta auferunt æqualia. 472.pr.253.
Dato in parabolâ segmento, alijsque datis, auferuntur segmenta dato æqualia, aut quæ sint in data ratione. 472.à pr.254. vsque 257.
Variè assignantur segmenta segmentis æqualia. 473. pr.258. pag.477. pr.266. pag. 478.pr.268.
Constructio facillima, quâ quotcumque segmenta æqualia à parabola auferantur. 478. pr.267.pag 479.pr.269.
Linearum & segmentorum tam conuexorum quàm concauorum admiranda progressio Arithmetica. 481.in Schol.
Variæ constructiones linearum in parabolâ, quæ auferunt segmenta quæ in duplicatâ triplicatâ sint ratione certarum linearum, aut compositam habeant rationem linearum quæ isthic determinantur. 474. à pr.260. vsque 263. pag. 480. pr.282. 283.284.
Æqualium segmentorum pulchra proprietas: 476.pr.264.
Segmenta quotcumque in continuâ analogia assignantur. 479.pr.280.281.
Omnis parabola parabolæ similis est. 483.pr.276.
Parabola cum suis segmentis comparatur. 484.pr.277.278.279.
Parabola cum parabolâ confertur. 485.à pr.288. vsque 284.
Parabolæ maximum inscribitur parallelogrammum. 488.pr.285.286.
Polygonum regulare dato numero laterum constans, parabolæ inscribitur. 489.pr.287.
Quadrilaterum maximum eorum quæ parabolæ terminatæ inscribi possunt, determinatur. 489.pr.288.
Polygonum maximum inscribitur eorum quæ dato numero laterum parabolæ inscribi possunt. 490.pr.289.

PARS

MATERIARVM.

PARS SEPTIMA

Varias parabolæ geneſes exhibet.

GEneſis parabolæ, item determinatio lateris recti, ex vnâ lineâ vtcumque diuiſa. pag.491.pr.290.

Geneſes parabolæ, item determinatio lateris recti, ex duabus lineis angulum quemcumque conſtituentibus. 491.pr.291.292.pag.492.pr.293.234.

Geneſes ex triangulo. 492.pr.295 *vſque* 298.

Geneſes ex ſemicirculo. 495.pr.299.pag.496.pr.301.*vſque* 304.pag.500.pr.309.

Geneſes ex ſegmento circuli. 495.pr.300.

Geneſes ex circulis pluribus ſe interſecantibus aut tangentibus. 498.*à pr.*305.*vſque* 308.

Geneſes ex parallelogrammo quod circulo inſcribitur. 501.*pr.*310 *vſque* 313.

Geneſes ex ellipſi. 502.*à pr.*313.*vſque* 318.

Geneſes ex parabola. 504.*à pr.*319.*vſque* 332.pag.511.*à pr.*335.*vſque* 339.

Geneſes parabolarum parallelarum ſiue aſymptoticarum. 509.*pr.*332.333.334.

PARS OCTAVA

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbolâ inter aſymptotos conſtituta ſymbolizationem.

PArabolæ in infinitum productæ, magis ſemper ad ſe inuicem accedentes, numquam tamen occurrentes aſſignantur. 514.pr.343.344.345.

Omnia rectangula facta ſuper ſegmentis lineæ, parabolis parallelis ſectæ inter ſe æqualia ſunt. 515.pr.346.

Et æqualia dimidiæ contingentis cuiuſdam parabolis parallelis interceptæ. 517.pr.351.

Triangula quæ fiunt à contingentibus parabolâ parallelâ interceptis, & diametris per contactuum puncta ductis, inter ſe æqualia ſunt. 516.pr.349.

Aliis modis parallelæ parabolæ deſignantur. 316.pr.350.pag.317.pr.353.

Applicantur materiæ præcedentes parabolarum parallelarum, hyperbolæ inter aſymptotos conſtitutæ. 518.*à pr.*354.*vſque* 300.

De parabolâ inclinatâ: 520.pr.361.362.

In parabola diameter aſſignatur, cui data linea ſeruiat pro latere recto, modò minor ea ſit latere recto axis datæ parabolæ. 521.pr.363.

Data linea applicatur ad parabolam, quæ ſegmentum auferat dato æquale, oportet autem lineam datam non minorem eſſe lineâ ſubtendente ſegmentum datum. 522. pr.364.

LIBER

ELENCHVS

LIBER SEXTVS.

De Hyperbola.

DEfinitiones hyperbolam concernentes explicatæ. pag. 528.

PARS PRIMA

Hyperbolam sectionesq; oppositas, denique & asymptotos è cono educit, primasq; ac fundamentales hyperbolæ passiones demonstrat.

PRima hyperbolæ proprietas, quam scilicet habeant inter se rationem, quadrata ordinatim applicatarum, è cono ipso demonstratur. pag. 530 pr. 1.

Hyperbolæ oppositæ, earumque aliquæ proprietates. 531. pr. 2. pag. 533 pr. 4. 5.

Hyperbolæ similes. 531. pr. 3.

Hyperbolæ coniugatæ. 534. pr. 6.

Explicatur dilucidè natura hyperboles. 535. in Schol. pr. 8.

De asymptotis. 539. pr. 9. 10. 11.

Asymptoti ex cono eruuntur, eorumque proprietates expositæ. 540. pr. 12. vsque 18.

Propositiones variæ & fundamentales circa inuentionem & determinationem diametrorum, axis, centri, ordinatim applicatarum, contingentium, lateris recti hyperboles. 545. à pr. 19. vsque 31.

PARS SECVNDA

Sectionum oppositarum ac coniugatarum affectiones considerat.

SEctiones oppositæ communes habent diametros. item latera recta habent æqualia quæ communi inseruiunt diametro. 552. pr. 32. 33.

In sectionibus oppositis varia rectangula comparantur inter se. 553. pr. 34. 35. 36.

Diametri coniugatæ determinantur. 155. pr. 40. vsque 45.

Omnia rectangula asymptotis & hyperbolâ terminata; quorum latera asymptotis parallela sunt, æqualia sunt inter se. 558. pr. 46.

Omnes contingentes hyperbolam terminatæ ad asymptotos, cum iis faciunt triangula semper inter se æqualia. 559. pr. 47.

Axes minimæ sunt omnium diametrorum coniugatarum. 559. pr. 48.

In binis hyperbolarum coniugationibus, parallelogramma quæ fiunt sub lineis quæ æquidistant diametris coniugatis, & sectiones contingunt, omnia æqualia sunt inter se. 160 pr. 49.

Rectangulum quod fit à lineis extrema axium coniugatorum connectentibus, æquale est illi parallelogrammo, quod fit à lineis extrema diametrorum cuiusuis coniugationis connectentibus. 160. pr. 50.

Quadrata linearum extrema axium iungentium simul sumpta, minora sunt quadratis linearum quæ extrema diametrorum cuiusuis alterius coniugationis connectant. Atque hæ tres proprietates communes sunt hyperbolæ cum ellipsi vt suprà ostensum. 160. pr. 51.

Variæ

Variæ & iucundæ proprietates, circa æqualitates linearum, & rectangulorum cum quadratis, item triangulorum & trapeziorum inter se, denique rectangulorum, & quadratorum comparationes in sectionibus coniugatis pag.561.à pr.52.vsque 65. pag.569.pr.70.71.

In omni hyperbolâ diameter transuersa, eiusque coniugata, & rectum figuræ latus sunt in continuâ analogiâ. 567 pr 66.

Ex quouis puncto asymptoti vnius ordinatim positarum quadrata, sunt inter se vt latus rectum ad transuersum diametrorum coniugatarum. 568.pr 67.

Ordinatim quadam posita in hyperbolâ, secante diametrum, erit quadratum diametri ad rectangulum super tota diametro, & parte interiacente inter sectionem & ordinatim ductam vt latus rectum ad transuersum. 568 pr.68.

Omnes diametri coniugatæ sunt axibus proportionales in quibusuis hyperbolis coniugatis. 568.pr.69.

PARS TERTIA

Asymptotos & concauam contemplatur hyperbolam, ac linearum præsertim asymptotis æquidistantium exhibet proportionem.

VAriæ proprietates linearum parallelarum ad asymptotos, continuè & discretim proportionalium. 571.pr.73.vsque 80.pag.580.pr.96.

Item quatuor & quinque continuè proportionalium. 575.pr.86.pag.576.pr.88.

Imò & septem continuè proportionales lineæ designantur. pag. 574. propos. 81. 82.83.

Item lineæ quæ in duplicatâ & triplicatâ ratione sunt aliarum. 575.pr.84.85.pag. 576.pr.87.

Æqualitates & comparationes rectangulorum & quadratorum, quæ ex sectione parallelarum ad asymptotos exsurgunt. 576.à pr.89.vsque 93.

Quatuor proportionalium, quarum duæ vni asymptoto, aliæ alteri parallelæ sint, extremitates iunguntur sic vt duas figuras constituant æquales. 579.pr.94.

Æqualitates triangulorum & trapeziorum dictis parallelis determinatorum. 580. pr.96.pag.581.pr.99.100.101.

PARS QVARTA.

De segmentis hyperbolicis conuexis & concauis.

DE triangulis segmento hyperbolico inscriptis. 583.pr.102.vsque 105.

Segmenta hyperbolica conuexa æqualia variis modis determinantur. 585.propos.106 pag.588.pr.114.pag.589.pr.115.

Segmento conuexo hyperbolico segmentum æquale problematicè aufertur ab hyperbolâ. 589.pr.117.

Imò & æqualia in infinitum segmenta continuantur incipiendo à dato puncto. ibid in Coroll.

Item segmenta concaua variis modis æqualia designantur etiam quatuor vnica constructione. 585.pr.107.vsque 111.

* * *

Concaua

Concauo segmento hyperbolico inter duas asymptotos parallelas intercepto, aliud æquale aufertur ab hyperbolâ, ad datam lineam parallelam asymptoto constitutũ pag.587. pr.112.

Æquationes & comparationes variæ segmentorum duarum hyperbolarum conjugatarum. 591.*pr.*118.*vsque* 124.

Proprietates admirandæ de superficiebus inter hyperbolam, asymptoton vnam, & duas parallelas alteri asymptoto interiacentibus, toties sese continentibus, quoties certæ rationes linearum aut superficierum per parallelas illas abscissarum, continent rationes aliarum eiusmodi linearum aut superficierum. 594.*pr.*125.*vsque* 129.

Lineæ parallelæ vni asymptotorum, inter alterum asymptoton & hyperbolam interceptæ, quæ auferunt segmenta æqualia sunt omnes in continua analogiâ. Quin & terminus progressionis harum proportionalium assignatur. 597.*pr.*130.

Terminus progressionis exhibetur linearum quæ ad se inuicem sint in duplicata ratione. 598.*pr.*132.

Imò & minima exhibetur linea omnium quæ in tali progressione dari possunt. 599. *pr.*133.

Terminus progressionis exhibetur linearum quæ ad se inuicem sint in triplicata ratione. 600.*pr.*134.

Mira proprietas progressionis linearum quæ ad se inuicem sint in quadruplicatâ ratione, si terminus huius progressionis detur, ad inueniendas duas medias proportionales. 600.*pr.*135.*in Schol.*

Vna è duabus mediis proportionalibus inter duas datas assignatur in hyperbola. 601. *pr.*136.

Imò & duæ assignantur conicè. 602.*pr.*137.138.

Parallelogrammum assignatur æquale spatio comprehenso inter duas hyperbolas numquam concurrentes in infinitum, & semper magis ad se inuicem accedentes. 603. *pr.*139.

PARS QVINTA

Hyperbolam expendit à parabola intersectam.

Lineæ vni asymptoto parallelæ expenduntur quæ in duplicata, triplicata sint ratione altarum determinatarum. 604.*pr.*140.141.142. *pag.*608. *pr.*149. *pag.*613 *pr.*161.162.

Segmenta per eiusmodi parallelas ablatâ à concauâ hyperbola æqualia designantur. 605.*pr.*143.144.145.*pag.*607.*pr.*147.

Item segmenta segmentorum dupla, quadrupla. 606.*pr.*146. *pag.*607.*pr.*148.*pag.* 608.*pr.*150.*pag.*610.*pr.*155.

Item mixtilinea mixtilineorum dupla. 609.*pr.*151.152.

Spatium inter parabolam & hyperbolam, & quandam parallelam asymptoto interiacens, cum alia quadam superficie comparatur. 610.*pr.*153.154.

Segmenta per parallelas quasdam asymptoto ablata ab hyperbola conuexa comparantur inter se. 610.*pr.*156.

Si lineæ tres sint parallelæ asymptoto, quarum prima & proxima asymptoto cui est parallela, ducta sit per intersectionem parabolæ & hyperboles, ostenditur quod ratio secundæ

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [39] - -
PUBLIC DOMAIN

ſecundæ ad tertiam toties multiplicet rationem primæ ad ſecundam, quoties ſuperficies conuexa hyperbolica interiacens inter ſecundam & tertiam parallelam multiplex eſt ſuperficiei concauæ interiacentis inter primam & ſecundam. pag. 611. pr. 157.

De duabus hyperbolis inter eoſdem aſymptotos ſectis per parabolam. 611. pr. 158. 159. 160.

Duas præterea, quæ ad hanc materiam ſpectant, ſed locis ſuis excidêre, vide 631. pr. 189. 190.

Oſtenditur quod hæc materia vergat ad inuentionem duarum mediarum proportionalium. 614. *in Schol.*

De hyperbola inter aſymptotos conſtituta, & ſecta per duas parabolas, quarum axes ſint aſymptoti, & vertex ſit punctum concurſus aſymptotorum, ac in primis inueniuntur tres & quatuor continuè proportionales. 614. pr. 163 164.

Ex puncto concurſus eiuſmodi parabolarum, ad aſymptotos dimittantur duæ parallelæ, habebuntur tres ſuperficies æquales, duæ quæ inter vnam parallelam, vnam parabolam & hyperbolam interiacent, alia quæ duabus parabolis & hyperbola continetur. 616. pr. 166.

Item aliæ ſuperficies reſiduæ ad parallelogrammum quod ex parallelis dictis, & aſymptoto ſit, æquantur inter ſe. aliæ præterea comparationes figurarum aſſignantur. 616. pr. 167. 168. 169. pag. 618. pr. 171. 172. 173.

PARS SEXTA.

Solutio variorum problematum, aliaq; theoremata ad pleniorem hyperbolæ cognitionem ſpectantia.

Datarum conuexarum hyperbolarum exhibetur ratio. 620. pr. 174.

Hyperbolæ ad eandem applicatæ diametrum, & communem habentes diametrũ tranſuerſam, eandem habent inter ſe rationem, quam ordinatim poſitæ ex eodem puncto diametri. 621. pr. 175.

Datarum hyperbolarum concauarum exhibetur ratio. 621. pr. 176.

Hyperbolæ communem habentes diametrum tranſuerſam, habent ordinatim poſitas ex eodem puncto proportionales. 622. pr. 177.

Explicatur in quo conſiſtat ſimilitudo hyperbolarum. 623. *in Schol.*

Datæ hyperbolæ ſimilis exhibetur. 624. pr. 178. 179.

Duæ hyperbolæ, diuerſæ magnitudinis axem habentes reducuntur ad duas ſimiles, eandem diametrum habentes. 625. pr. 180.

Datis aſymptotis exhibetur hyperbola, quæ per datum intra aſymptotos punctum tranſeat. 625. pr. 181.

Datæ hyperbolæ alia æqualis datur, cuius aſymptoti datum contineant angulum. 626. pr. 182.

Problemata circa diuiſionem lineæ rectæ, quæ per hyperbolam abſoluuntur. 627. pr. 183. 184. 185.

In omni cono ſectiones hyperbolicæ parallelæ ſimiles hyperbolas exhibent. pag. 628. pr. 186.

In parabola pars diametri à vertice eiuſdem & contingente intercepta, æqualis eſt illi

lineæ quæ ab eiusdem vertice & lineâ contactus coniungente intercipitur, in ellipsi autem maior est, in hyperbola verò minor, idq; ex ipso cono demonstratur. pag. 629. pr. 187.

Linea aliqua in hyperbola in continuè proportionales diuisa. 630. *pr.* 188.

Item sic diuisa vt rectangula exhibeat proportionalia facta super segmentis lineæ 632. *pr.* 191.

PARS SEPTIMA.

Geneses variæ hyperbolæ, & ex hyperbola reliquæ sectiones ductæ.

Genesis ex rectangulo. 633. *pr.* 192.

Geneses ex tribus lineis se decussantibus. 634. *pr.* 193. 194.

Genesis ex duabus lineis angulum quemcumque constituentibus & assumpto intra eum puncto. 635. *pr.* 195.

Genesis hyperbolarum oppositarum ex duabus lineis se ad rectos intersecantibus. 635. *pr.* 196.

Item hyperbolarum coniugatarum. 636. *pr.* 197.

Geneses aliæ ex duabus lineis quemcumque angulum continentibus. 636. *pr.* 198. 199. 200.

Genesis ex triangulo. 646. *pr.* 220.

Geneses ex circulo, quarum aliquæ etiam oppositæ aliquæ etiam coniugatæ. 637. *pr.* 201. *vsque* 205. *pag* 641 *pr* 211.

Geneses ex pluribus circulis se tangentibus, secantibus, concentricis. 640. *pr.* 206. *vsque* 210. *pag.* 642. *pr.* 212. 213. 214.

Geneses ex parabola. 644. *pr.* 215. *vsque* 219. *pag.* 646. *pr.* 221. *vsque* 225.

Geneses ex hyperbola. 649 *pr.* 226. *vsque* 234.

Geneses ex ellipsi. 653. *pr.* 235. *vsque* 239. *pag.* 658. *pr.* 243. 244.

Omnes tres coni sectiones ex duabus parallelis vnâ rectâ decussatis, vnâ eademque praxi educuntur. 657. *pr.* 240.

Ex parabola & hyperbolâ generatur hyperbola. 658. *pr* 242.

In ellipsi ex puncto axis interiacente inter centrum & focum, ductæ ad peripheriam lineæ producunt hyperbolas oppositas. 659. *pr.* 245.

Ex puncto verò inter verticem ellipsis & focum interiacentes ductæ ad peripheriam, generant hyperbolam tangentem ellipsim in vertice. 660. *pr.* 246.

Ex foco verò ipso ellipsis ductæ ad peripheriam producunt lineam rectam. 317. *pr.* 139.

Hyperbola cuius axis communis est parabolæ ex qua orta est, reducitur ad parabolam. 661. *pr* 247.

Hyperbola communem habens axem cum ellipsi ex qua orta est, reducitur ad ellipsin. 662. *pr.* 248.

Parabola ad parabolam aut circulum è quibus orta est reducitur. 662. *in Schol.*

Hyperbola quæcumque reducitur ad hyperbolam, cuius asymptoti rectum continent angulum. 663. *pr.* 249.

Spiralis

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [41] - -

PUBLIC DOMAIN

Spiralis & parabolæ ſymbolizatio.

ARgumentum. pag.664.
Geneſis ſpiralis Archimedeæ applicatur geneſi planè ſimili parabolæ. 665 pr.1.
Parabola eadem continuatur eodem modo vti ſpiralem Archimedes continuat.667. pr.2.
Lineæ ex vertice parabolæ ductæ ad quandam rectam eodem modo ſecantur vt lineæ à principio ſpiralis ductæ ſecantur à ſpirali. 669.pr.3.4.
Pappi prop.19 l.4 de ſpirali applicatur parabolæ. 672.pr.5.
Archimedis 12.de ſpirali applicata parabolæ; nempe quod lineæ ex principio ſpiralis ad primam circumuolutionem ductæ quæ contineant angulos æquales, ſe æquali exceſſu excedant. 672.pr.6.
Applicatur parabolæ Archim. pr.14. in qua comparatur ratio linearum ductarum à principio ſpiralis, & quæ interiacent inter circulum & ſpiralem. 674.pr.7.
Applicatur parabolæ Archim.15.in qua comparatur ratio rectarum à principio reuolutionis ductarum ad reuolutionem ſecundam. 675.pr.8.
Applicatur parabolæ admiranda illa propoſitio Archim.18. qua ex contingente ſpiralis ad terminum ſecundæ reuolutionis, quadratur theorematicè circulus. 676.pr.9.
Applicatur parabolæ prop. Archim.19.cum manifeſto 8.qua per tangentem in termino ſecundæ circumuolutionis inuenit duplam ſecundi circuli. 678.pr.10.
Applicatur parabolæ prop. Archim.20. in qua proſequitur hanc materiam de tangentibus quæ non ſunt in terminis circumuolutionis. 680.pr.11.
Applicatur parabolæ prop. Archim.24 in qua oſtendit quod comprehenſum ſpatium à ſpirali ex prima reuolutione nata & prima linea, quæ principium eſt reuolutionis, tertia pars ſit circuli primi. 681.pr.12.
Applicatur parabolæ Pappi pr.21.l.4.qua vniuerſalius oſtendit etiam ſectorem ſpiræ, ſectoris circuli tertiam partem eſſe. 681.pr.13.
Applicatur parabolæ Arch.pr.25. qua oſtendit ſpatium contentum ſub ſecunda reuolutione ſpirali, ad ſecundum circulum habere rationem quam ſeptem ad duodecim. 683 pr.14.
Applicatur parabolæ Arch. pr.26.qua comparatur ratio ſectoris helices, ad ſectorem circuli, ſectorem ſpiralis includentem. 684 pr.15.
Applicatur parabolæ Arch.pr.27.qua oſtendit ſpatiorum comprehenſorum ſub ſpiralibus & rectis lineis quæ in circulatione ſunt, tertium quidem ſecundi duplum eſſe, quartum verò triplum, quintum eſſe quadruplum, &c. 686.pr.16.
Applicatur parabolæ Pappi pr.22.l.4. qua oſtendit, ſi recta quæ eſt in principio circulationis producta, per ſpiræ principium normaliter diuidatur rectâ, ſegmenta quoque eandem ſeruare rationem quam 1,7,19,37. 687.pr.17.
Applicatur parabolæ prop.Arch.29.in qua oſtendit, ſi in ſpiralem ex vna reuolutione ortam à principio ſpiralis recta inciderit, ſpatium comprehenſum ſub ſpirali & lineâ primâ, eam habere rationem ad ſpatium comprehenſum ſub prima ſpiralis parte, & lineâ incidente, quam cubus primæ lineæ ad cubum incidentis. 288 pr.18.
Applicantur viciſſim ſpirali quædam proprietates linearum quæ ſunt in parabola. 289.pr.19.20.21.22.pag.696.pr.25.
Quædam proprietas parabolæ applicatur ſpirali ortæ ex circulo, cum ſpirali orta ex ellipſi. 693.pr.23.

Eodem modo quo quædam puncta inueniuntur ad parabolam, inueniuntur quæ sint ad spiralem. pag.695.pr.24.

Prout in parabolâ designantur segmenta continuè proportionalia in infinitum, ita & assignantur suo modo in spirali. 697.pr.26.

Item prout in parabola inueniuntur segmenta semper proportionalia certis triangulis, & hoc in infinitum, ita & suo modo dantur in spirali. 698.pr.27.

Denique multiplices proprietates inuentæ in vnâ parabola, applicantur spirali. 699.pr.28.

LIBER SEPTIMVS.

De ductu plani in planum.

Definitiones & explicationes ductuum plani in planum. pag.704.

PARS PRIMA

Superficies primò exhibet, & quales sint determinat, vti & omnes intersectiones ortas ex ductu rectilinei in rectilineum. Deinde corpora sic producta inter se comparat.

Quadratum in se ductum producit cubum. 706.pr.1.

Triangulum rectangulum ductum in quadratum aut rectangulum eiusdem altitudinis producit corpus habens quatuor hædras planas, quarum intersectiones sunt lineæ rectæ. 707.pr.2.

Triangulum rectangulum in se ductum producit pyramidem cuius basis est quadratum. 707.pr.3.

Triangulum rectangulum in se subalternè ductum, pyramidem producit cuius basis est triangulum. 708.pr.5.

Triangulum rectangulum in se ductum subalternè, æquale est dimidio pyramidis quæ resultat ex ductu eiusdem trianguli in se. 708.pr.6.

Trianguli rectanguli latus vnum bifariam diuidatur per lineam alteri lateri angulum rectum constituenti parallelam, sic vt trapezium à triangulo auferat, ostenditur illud trapezium ductum in se, ad idem ductum in se subalternè rationem habere quam 14 ad 13. 709.pr.6.

Alia æquatio trapeziorum in se ductorum in eodem aut similibus & æqualibus triangulis. 710.pr.7.

Ostenditur proportio partium pyramidis diuisæ per interualla æqualis altitudinis. 711. Corr.2.

Triangula, rectangula, aut trapezia tria si eandem habeant altitudinem, & bases proportionales, corpus ortum ex ductu primi in tertium æquale est illi quod oritur ex ductu medij in seipsum. 711.pr.8.9.

Variè comparantur corpora ex ductu vario triangulorum, quæ exsurgunt ex trapeziis eiusdem altitudinis per diagonalem trapezia bissecantem. 113.pr.10.11.

Si quatuor rectangula aut triangula in eadem sint altitudine, & bases habeant proportionales, corpus quod fit ex ductu primi in quartum, æquale est ei quod oritur ex ductu secundi in tertium. 714.pr.12.

Idem

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [43] - -
PUBLIC DOMAIN

Idem eſt ſi triangula illa ſubalternè ponantur, ſecundum primo, & quartum tertio. pag 715.pr.13.

Idem eueniet ſi trapezia in eadem altitudine conſtituta, baſes habeant proportionales, & latera quæ baſibus opponuntur ijſque parallela eandem cum baſibus ſeruent rationem. 715.pr.14.

PARS SECVNDA

Superficies contemplatur, & communes interſectiones natas ex ductu plani circularis in rectilineum. Deinde corpora ſic producta exhibet.

SEmicirculus ductus in rectangulum eiuſdem altitudinis ſuperficiem producit cylindricam. 716.pr.15.

Semicirculus ductus in ſe, ſuperficies duas producit cylindricas, quarum communis interſectio eſt ellipſis. 717.pr.16.

Idem eſt ſi ſemicirculo adijciatur rectangulum eiuſdem altitudinis. 717.pr.17.

Semicirculo rectangulum circumſcriptum, figuram concauam cum ſemicirculo faciens ductum in totum rectangulum, corpus producet habens ſuperficiem concauam, & extimas tres planas. 718 pr.18.

Figura concaua orta ex rectangulo circumſcripto ipſi ſemicirculo ducta in ſe, duas ſuperficies cylindricas producit, quarum communis interſectio eſt ellipſis. 719.pr.19.

Eadem figura ducta in ſemicirculum cui congruit, producit ſuperficiem cylindricam. 719.pr.20.

Semicirculi duo æquales ſe tangentes ſic vt toti extra ſe inuicem cadant, ducti in ſe inuicem, ſuperficies producunt cylindricas quarum communis interſectio ellipſis. 720. pr.21.

Oſtenditur differentia corporis orti ex ductu ſemicirculi in ſe, & corporis orti ex ſemicirculo ducto in ſemicirculum æqualem, quem tangit & extra quem cadit. 720. in Schol.

Circuli duo æquales ſe exteriùs tangentes, in ſe ducti ſuperficies producunt cylindricas. 721.pr.22.

Et harum communis interſectio eſt ellipſis. 722.in Schol.

Exponitur quid ſegmenta circulorum ducta in reliquum circuli, aut in ſe ipſa producant. Item quid ſuperficies concauæ interiacentes inter tangentem & circulum, ductæ in reliquum circuli. 722.pr.23.vſque 30.

PARS TERTIA.

Vniuerſales quaſdam propoſitiones continet, & fundamentales quibus corpora inter ſe comparantur.

TRiangulis & figuris quadrilateris figuræ inſcribuntur quæ ſimul ſumptæ maiores ſint dimidio figuræ cui inſcribuntur. 728 pr.32.vſque 35.

Item figuris quæ lineis rectis angulum rectum continentibus, & linea curua terminantur ſic vt figuram mixtilineam concauam aut conuexam conſtituunt, parallelogramma

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [44] - -
PUBLIC DOMAIN

gramma inscribuntur quæ maiora sint simul sumpta dimidio figuræ cui inscribuntur. pag.730.pr.36.*vsque* 41.

Inscribuntur eiusmodi mixtilineis cõcauis aut conuexis rectangula æqualem habentia altitudinem, vt residuum ex figurâ mixtilineâ auferant quouis dato minus. 733. pr.40.

Corporibus quæ oriuntur ex ductu concauarum superficierum in seipsas, aut in se subalternè positas, inscribuntur parallelepipeda communem habentia altitudinem, quæ ab illis corporibus ablatâ relinquant residuum quouis dato minus. 733. pr.41. *vsque* 44.

Si tria plana qualiacumque eandem habeant altitudinem, lineæ verò parallelæ per illa plana ductæ eam habeant proprietatem, vt semper sint tres continuè proportionales, erit corpus ortum ex ductu primi plani in tertium æquale ei quod oritur ex secundo ducto in seipsum. 738 pr.45.

Et si quatuor plana fuerint in eadem altitudinẽ, lineæ verò parallelæ sint proportionales, erit corpus ortum ex ductu primi plani in quartum æquale ei quod oritur ex ductu secundi in tertium. 740.pr.46.

PARS QVARTA.

Comparantur corpora orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum corporibus ortis ex ductu partium circuli in se vel in alias circulares.

SEmicirculus ductus in se æquale profert corpus ei quod profertur à rectangulo triangulo in se ducto subalternè, cuius latera angulum rectum continentia æqualia sint diametro circuli. 741.pr.47.

Superficies concaua intercepta inter quadrantem circuli & duas tangentes quadrantem includentes, ducta in semicirculum & in illam ipsam superficiem dictis tangentibus contentam, æquale profert corpus illi quod fit à triangulo rectangulo in se ducto, cuius latera angulum rectum continentia, sint ipsæ tangentes. 742.pr.48.49.

Varia corpora orta ex partibus circuli ductis in alias partes circulorum, aut ductis in seipsas reducuntur ad corpora orta ex ductu triangulorum aut rectangulorum in se. 743 à pr.50.*vsque* 57.

PARS QVINTA.

VAriæ æquationes & proportiones solidorum quæ gignuntur ex ductu partium circularium cauarum aut conuexarum, in alias circulares cauas, conuexas, &c. 749.à pr.58.*vsque* 66.

PARS SEXTA

Ampliorem continet comparationem corporum productorum ex ductu plani circularis in circulare, cum ijs quæ oriuntur ex ductu circularium partium in Ellipticas parabolicas, hyperbolicas.

ASsignantur duæ partes ellipsis, quæ in se ductæ corpus proferunt æquale illi, quod oritur ex ductu semicirculi in se. 754.pr.67.

Aliæ

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [45] - -
PUBLIC DOMAIN

Aliæ comparationes corporum ortorum ex partibus ellipsis, & ex partibus circuli. pag 754 pr.68.69.

Assignantur partes parabolæ, quæ ductæ in se proferunt corpus æquale illi, quod fit à semicirculo ducto in se, cuius diameter æqualis est lateri recto parabolæ. 755.pr.70.

Semiparabola iam dicta, ducta in se æquatur semicirculo ducto in se, vnà cum triangulo rectangulo in se ducto, cuius latera angulum rectum continentia sint æqualia lateri recto parabolæ aut diametro dicti circuli. 756.pr.71.

Variæ æquationes corporum ortorum ex partibus circuli ductis in se, aut in alias partes circuli, aut etiam in partes parabolæ, cum corporibus ortis ex ductu partium parabolæ in se, aut in alias partes parabolæ, aut etiam in partes circuli. 756.à pr.72.vsque 90.pag.769.pr.96.

Corpora nata ex ductu partium hyperbolæ in se, aut etiam in alias partes hyperbolæ, æqualia, aut comparata corporibus natis ex ductu partium circuli in alias circuli partes. 766.à pr.91.vsque 95.pag.769.pr.97.98.

PARS SEPTIMA.

Confert inter se corpora nata ex ductu parabolici in parabolicum.

CORpori orto ex ductu partium parabolæ in alias parabolæ partes, æquale datur corpus ortum ex ductu parabolæ in seipsam. 771.prop.99. 100.101. pag.776. pr.107.108 pag.777.pr.110.111.113.

Aliæ æquationes corporum ortorum ex ductu partium parabolæ in alias parabolæ partes. 772.pr.102.103.104 pag.775.pr.105.106 pag 778.pr.112.

Comparantur corpora nata ex ductu parabolarum in parabolas subalternè positas. 774. pr.104.pag.776.pr.109.pag.778.pr.113.

PARS OCTAVA.

Corpora huc vsque ex vario planorum in plana ductu, reducit ad corpora determinatam habentia basim & altitudinem.

CORpora nata ex partibus circuli, ductis in partes circuli, reducuntur ad corpus habens pro basi partem circuli, & altitudinem notam. 780.à pr.115. vsque 118.pag.783.pr.120.pag.784.a pr.122.vsque 125.

Corpora nata ex ductu partium circuli in partes parabolæ, reducuntur ad corpus habens basim certam & altitudinem. 782.pr.119.pag.784.pr.121.pag.788.pr.126.

Corpora nata ex ductu partium ellipsis in partes ellipticas, comparantur cum corporibus ortis ex ductu partium circuli, in partes circuli. 787.pr.127.

Semicirculus ductus in se, corpus producit æquale illi quod fit ex parabolâ habente latus rectum æquale semidiametro illius circuli, ductâ in altitudinem lateris recti. 788. pr.128.

Aliter determinatur hoc corpus, habens pro basi aliam parabolam & aliam altitudinem. 790.pr.132.134.

Corporibus ortis ex ductu plani circularis concaui in conuexum, dătur corpora æqualia habentia basim mixtilineam, ex parabolâ & circulo, & certam altitudinem. 788. pr.129.pag.790.pr.133.

Corporibus ortis ex mixtilineâ superficie circulari & parabolicâ ductâ in mixtilineam

****

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [46] - -
PUBLIC DOMAIN

ſuperficiem ex parabolicâ & circulari, dantur corpora æqualia habentia ſuperficiem eiuſmodi mixtilineam & certam altitudinem. pag.788.pr.130.

Corporibus ortis ex ductu circularium conuexorum in conuexa, datur corpus æquale baſim habens mixtilineam ex circulo & parabolâ, & certam altitudinem. 790. pr.135. pag.796. pr.147. 148. pag.797. pr.150. pag.800. pr.155.156. pag.801. pr.158.159.

Corporibus ortis ex ductu circularium concauarum in conuexas, datur corpus æquale habens baſim parabolicam & certam altitudinem. 791.pr.136.pag.792.pr.139. pag.798.pr.151 pag.801.pr.157.pag.802.pr.160.pag.808.pr.175.

Corpori orto ex circulari concauo in conuexum, datur æquale ortum ex ductu parabolæ concauæ in conuexam. 791.pr.137.

Corpori orto ex conuexo circulari in ſe ducto, datur corpus æquale baſim habens parabolicam & certam altitudinem. 791.pr.138.pag.795.pr.146.pag.797.pr.149.

Idem fit de corpore nato ex circulari concauo in ſe ducto. 798.pr.152.153.

Corpori orto ex ductu circularis conuexi in conuexum, datur corpus æquale habens baſim parabolicam & certam altitudinem. 795.pr.145.

Corpori orto ex ductu circularium concauorum in concaua, datur corpus æquale habens baſim mixtilineam ex parabola & circulo, & certam altitudinem. 799.pr.154.

Corpora nata ex ductu ſuperficierum mixtarum ex circulo & parabola, reducuntur ad corpus habens baſim triangularem & altitudinem notam. 789.pr.131.

Corpora nata ex ductu partium parabolæ in partes parabolicas ſubalternè poſitas, reducuntur ad corpora cylindrica habentia altitudinem notam. 792.pr.140.141.142.

Corpori orto ex ductu parabolæ conuexæ in ſe ipſam, datur corpus æquale habens baſim triangulum, & notam altitudinem. 803.pr.161.

Corpori orto ex ductu parabolæ concauæ in certam altitudinem, datur æquale corpus ex triangulo in ſe ducto. 804.pr.163.pag.806.pr.170.

Corpus ortum ex parabola conuexa in concauam, reducitur ad corpus habens parabolicam baſim & notam altitudinem. 803.pr.162.

Corpus ortum ex ſegmento parabolico conuexo ducto in certam altitudinem, datur æquale corpus ex ductu trianguli in ſeipſum. 804.pr.164.

Corpori orto ex ductu ſuperficiei parabolicæ concauæ in conuexam, reducitur ad corpus habens baſim triangularem, & certam altitudinem. 804.pr.165.

Variæ æquationes ex ductu ſegmentorum parabolicorum in alia parabolica ſegmenta aut in triangula. 895.pr.166 167.168.pag.807.pr.172.173.pag.810.pr.178.179.

Segmento parabolico concauo in ſe ducto, datur corpus æquale, habens baſim parabolam concauam, & certam altitudinem. 806.pr.169.pag.897.pr.171.

Corpus ortum ex ſegmento mixtilineo circulari & parabolico, ducto in certam altitudinem, datur æquale corpori orto ex ſegmento circulari ducto in altitudinem determinatam. 808.pr.174.

Datur corpus ortum ex parabolâ ducta in certam altitudinem, quod ad ſemicirculum in ſe ductum habeat rationem quam linea ad lineam. 809.pr.176.

Corpori orto ex figura quam conſtituit rectangulum cum ſemicirculo eiuſdem altitudinis, in ſe ducta, datur corpus æquale quod baſim habeat notam & datam altitudinem. 810.pr.177.

Datur corpus habens altitudinem certam æquale corpori nato ex ſemiparabola conuexa ducta in ſuperficiem concauam, ſed ſubalternè poſitam. 811.pr.180.

PARS

MATERIARVM.

PARS NONA.

Praxis huius libri de planorum inter se ductu seu multiplicatione.

Applicantur variæ propositiones ex libro nostro de linearum potentiis, ad corpora nata ex superficierum in se ductu. pag.813 *à pr.*181. *vsque* 189.

Item variæ propositiones ex libro nostro de Progressionibus Geometricis, corporibus applicatæ. 821 *à pr.*190. *vsque* 198.

Applicantur ex l. 2. *Eucl. prop.* 4 5 6.10. 828. *à pr.*199. *vsque* 202.

Item vnica ex Frederico Commandino. 830 *pr.*203.

*Applicantur ex l.*7. *Pappi. prop.*23.24 41.42.43.63.149.151.160.178.179. 831. *à pr.*204. *vsque* 213.

PARS DECIMA.

De Parabolis virtualibus. item aliquæ materiæ quæ prioribus excidêre.

Vsus & definitio parabolarum virtualium. 840.

Inuētio certarū parabolarū, parabolis virtualibus subseruientiū. 841. *pr.*214 215.

Inuentio prima & descriptio virtualium parabolarum. 842. *pr* 216.

Variæ æquationes corporum ortorum ex segmentis parabolarum in se ductarum. 844. *pr* 219 220.

Inuentio secunda & descriptio parabolæ virtualis. 845. *pr* 221 222.

Inuentio tertia eiusdem. 847 *pr* 224.

Inuentio quarta parabolarum duarum virtualium sese implicantium, quas bifariam secant duæ veræ parabolæ. 849 *pr.*225.226.

Inuentio quinta eiusdem; item æquationes corporum ex ductu superficierum parabolæ; aut parabolæ virtualis, in alias superficies. 850. *pr.*227.228.

Inuentio sexta parabolæ virtualis. 852 *pr.*229.230.

Inuentio septima & octaua. 853. *à pr.*231. *vsque* 235.

Variæ ex hac corporum æquationes. 858 *pr.*236. *in Corr. pag* 859. *pr.*238. *pag.*860. *pr.*240.241.242.

Triangulum rectangulū sectum lineâ sit basi parallelâ sic vt triangulum à toto auferat; ostenditur triangulum hoc minus in se ductum ad totum in se ductum esse in triplicatâ ratione lineæ resectæ ad totam. 858. *pr.*237.

Triangulum in se ductum datur, quod ad totam parabolam in se ductam rationem habeat quàm duo ad tria. 859 *pr.*239.

Æquationes corporum ex ductu segmentorum interceptorum inter parabolas parallelas, ductorum in reliquam parabolam. 861. *pr.*243.

Æquationes segmentorum parabolarum subalternè positarum. 863. *pr.*244. *vsq;* 247.

LIBER OCTAVVS.

De Proportionalitatibns Geometricis.

Necessitas & vtilitas proportionalitatis Geometricæ. 865.

Definitiones proportionalitatum, earumque explicationes. 867. *& seq.*

Principia quæ in proportionalitatibus assumuntur. 870.

ELENCHVS

PARS PRIMA

Fundamentales propositiones complectitur naturam denominatorum concernentes.

Dvæ rationes habentes commune consequens, eam sortiuntur rationem quæ inter antecedentes terminos reperitur. pag.877.pr.1.

Ex præcedenti rationes proportionales quatuor assignantur, & ex quatuor proportionalibus rationibus, quatuor quantitates proportionales. 878.pr.3.vsque 6.

Rationes duæ commune antecedens sortitæ, eam obtinent rationem quam secundum consequens ad primum. 880.pr.7.

Item ex hac variæ rationes proportionales, & ex his rationibus quantitates proportionales dantur. 880 pr.8.vsque 11.

Datis tribus quantitatibus quibusuis, ratio primæ & secundæ, est ad rationem primæ & tertiæ, vt ratio primæ & tertiæ est ad rationem secundæ & primæ. 881.pr.12.

Denominatores datarum rationum inueniuntur. 882.pr.13.14.

Variæ comparationes rationum, expositæ in denominatoribus. 882.pr.15.vsque 19. pag.885.pr.23.

Æqualitates & comparationes quantitatum, ex rationibus variè inter se comparatis. 884 pr.20.21.22.

Datis duabus rationibus duæ aliæ rationes exhibentur quæ communes habeant rationibus datis denominatores. 886.pr.24.

Duas rationes exhibere quæ datam inter se rationem contineant. 886.pr.25.

Datis duobus terminis aliquam rationem continentibus, & datis duabus quantitatibus, duæ aliæ quantitates exhibentur, vt ratio primarum quantitatum sit ad rationem secundarum, vt terminus primus datus est ad secundum. 887.pr.26.

Datis duabus rationibus, & datâ rectâ, ea ita secatur, vt partes lineæ inter se sint vt data ratio prima est ad secundam. 887.pr.27.

Datâ ratione duorum terminorum, & duabus lineis, eæ ita secantur, vt ratio quam habent partes sectæ primæ lineæ ad rationem quam habent partes sectæ secundæ lineæ, sit vt primus terminus ad secundum. 887.pr.28.

Datâ ratione duorum terminorum, & duabus quantitatibus, exhibentur duæ rationes quarum antecedentes, aut quarum consequentes sint quantitates datæ, quæ habeant inter se rationem quam terminus primus ad secundum. 888.pr.29.30.

Datâ ratione duorum terminorum, & denominatoribus duarum rationum, & termino quouis assignatur quartus terminus, ita vt ratio data ad rationem inuentam, sit vt denominator primus ad secundum. 889 pr.31.

Datâ ratione quauis duorum terminorum, duæ quantitates exhibentur, vt ratio primæ ad secundam, ad rationem secundæ ad primam sit vt terminus primus datus ad secundum. 890.pr.32.

PARS SECVNDA.

De similitudine proportionum quæ inter rationes existunt.

Proportio rationum ex rationibus composita. 891.pr.33.vsque 36.

Variæ proportiones ortæ ex quatuor terminis datis, & ex proportionibus datis variæ rationes terminorum. 892.pr.37.vsque 42.pag.899.pr.54.55.56.

Duæ proportiones ortæ ex rationibus duabus similibus. 894.pr.43.

Duæ

Duæ proportiones comparantur inter se permutando, inuertendo, componendo, diuidendo rationes ex quibus proportiones constituuntur, item per conuersionem rationis, & argumentatio ex æquo propositis tribus proportionibus. pag 895. à pr. 44. *vsque* 49.

Variæ proportiones ortæ ex quatuor rationibus proportionalibus. 897. pr. 50. pag 900. pr. 57. 58. pag. 901. pr. 60. 61. pag. 903. pr. 64. 65.

Proportiones ortæ ex duabus rationibus & vna tertia. 898. pr. 51. 52.

Proportiones ortæ ex octo quibuscumque quantitatibus. 901. pr. 59.

Item ortæ ex quantitatibus quinque. 904. pr. 67.

Proportiones ortæ ex duabus rationibus & duabus quantitatibus. 902. pr. 62. 63.

Datis quotuis pari numero rationibus, exhibentur rationes quæ inter datarum rationum denominatores continentur. 904. pr. 68.

Datis tribus quibuscumque rationibus, & quantitate quauis inuenitur alia quantitas, sic vt ratio prima sit ad secundam, vt ratio tertia ad rationem quæ est inter inuentas quantitates, imò vt proportio primæ rationis & secundæ, ad proportionem tertiæ & quartæ datam habeat rationem. 905. pr. 69. 70.

Ex octo rationibus proportionum similitudines determinantur. 906. pr. 71.

Datis duabus rationibus, & quadam tertia, maior ratio ad illam tertiam maiorē habet proportionem quam minor ratio ad eandem. Et quæ ad eandem, maiorem rationem habet, ea maior est. 907. pr. 73. 74.

PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione seu compositione.

Determinatur quam rationem producat ratio in rationem ductæ. 908. pr. 75. 76. *hanc emendatam vide pag.* 954.

Variæ rationes quæ in se ductæ eandem producunt rationem. 909. pr. 77. *vsque* 80. pag. 913. pr. 88.

Data quæuis ratio duorum terminorum ducta in se, duplicata est eius quam habet primus terminus ad secundum. 911. pr. 82.

Duæ rationes similes in se ductæ producunt rationem æqualitatis. 911. pr. 83.

Datis quatuor quantitatibus considerantur rationes ortorum ex ductu primæ in quartam, & secundæ in tertiam. 912. pr. 84. 85.

Datis quatuor rationibus proportionalibus, idem producitur ex ductu primæ in quartam, quod ex ductu secundæ in tertiam. 912. pr. 86.

Et si prima in quartam idem producit quod secunda in tertiam, erunt eæ rationes proportionales. 916. pr. 94.

Si quatuor rationes proportionales sint, terminus primus primæ rationis, est ad secundum quartæ; vt terminus primus secundæ rationis est ad terminum secundum tertiæ. 913. pr. 87. *hanc emendatam v. pag.* 954.

Variæ proprietates rationum compositarum ex pluribus rationibus. 914. pr. 89. *vsq;* 92.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis, producit seipsam. 916. pr. 93.

Datis quatuor rationibus, exhibetur proportio rationum quas producunt prima ducta in secundam, & tertia in quartam. 916. pr. 95.

Quatuor proportiones rationum variè in se ductæ, idemque producentes. 917. pr. 96.

Datis quotcumque rationibus, proportio primæ ad vltimam ex proportionibus mediarum est composita. 918. pr. 97.

ELENCHVS

Datis quotcumque rationibus, ostenditur ex illa quomodocunque dispositis, earundem semper produci rationem. pag.918.pr.98.

PARS QVARTA

Rationum proportiones considerat, maximè secundùm rectangulorum comparationem quæ fiunt ex terminis rationum, termini autem statuuntur lineæ.

DAtis rationibus duabus linearum, rectangulum quod fit à prima linea & quarta, ad rectangulum ex secũda & tertiâ, est vt ratio prima ad secundã. 920.pr.99.

Comparationes rectangulorum inter se quæ fiunt ex terminis datarum rationum. 920. pr.100.101.103.pag.925.pr.112.

Datis duabus rationibus, ostenditur quomodo se habeat proportio illarum rationum ad rationẽ rectangulorũ quæ fiunt ex terminis datarũ rationũ in se ductis. 921.pr.102.

Mira comparatio rectangulorum ex terminis duarum serierum trium proportionalium certo modo in se ductis. 922.pr.104 pag.924.pr.110.

Variæ comparationes rectangulorum ortorum ex terminis quatuor rationum, quarum binæ inter se sunt similes. 922 pr.105.106.107.

Sint quatuor lineæ proportionales licet non continuè, quadratum primæ, rectangulum sub secunda & tertia, quadratum quartæ, eandem rationẽ continuant. 923.pr.108.

Duæ rationes quatuor linearum in se ductæ, æquantur rationi quam habet rectangulũ sub prima & quarta, ad rectangulum sub secunda & tertia. 924.pr.109.

Rectangula quinque assignantur eandem continuantia rationem, orta ex tribus proportionalibus, & duabus quibuscumque aliis quæ inter se rationem habeant quam prima continuarum ad secundam. 924.pr.111.

Proportio rectangulorum ortorum ex terminis quatuor proportionum, certo modo in se ductis. 925.pr.113.

PARS QVINTA.

Exponuntur ea quæ proportionalitatibus communia sunt cum operationibus Arithmeticis.

QVantitas quæuis diuisa sit vtcumque, & data sit alia quãtitas, ratio totius primæ ad secundam, eadem est cum rationibus partium primæ quantitatis, ad partes secundæ. 926.pr.114.

Quæuis duæ rationes reducuntur ad duas ipsis æquales quæ idem habeant antecedens aut consequens. 926.pr.115.116.

Datæ rationis dupla assignatur aut dimidiata, aut alia in data proportione. 927.p.117.

Datæ quæuis rationes in vnam illis æqualem aggregantur. 927.pr.118.

Data ratio minor ex maiori detrahitur. 928.pr.119.

Data ratio per datam multiplicatur tribus modis. 929.pr.120.121.122.

Data ratio in duas rationes ipsam componentes diuiditur, quæ tamen datam inter se habeant rationem. 929.pr.123.

Ostenditur quod omnis ratio, in duas ipsam componentes diuisa, rursus coalescat, per partium ex diuisione ortarum inter se multiplicatione. 930.pr.124.

Data ratio per alteram diuiditur. 930.pr.125.

Data proportione inæqualitatis duarum rationum, assignatur excessus quo maior minorem superat. 930.pr.126.

PARS

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [51] - -
PUBLIC DOMAIN

MATERIARVM.

PARS SEXTA

Varias proportionalitatum proprietates complectitur.

Datis tribus continuis, ratio primæ ad secundam, ducta in rationem secundæ ad tertiam, idem producit quod ratio tertiæ ad secundam, ducta in rationem secundæ ad primam. pag.932.pr.127.

Proprietates amœnæ serierum quæ ab eadem incipiunt. 932. pr.128.129. pag.934. pr.132.133.

Proprietates duarum serierum septem proportionalium quarum quartæ sunt æquales. 933.pr.130.131.

Proprietates serierum trium continuè proportionalium quæ ab eadem incipiunt. 935. pr.135.136.

Mira proprietas quatuor serierum continuè proportionalium, quarum binæ ab eadem incipiunt, & rursus ad duas alternatim terminantur. 936.pr.137.

Tres rationes continuè proportionales determinantur. 936.pr.138.139.140.

Inter duas datas rationes media proportionalis inuenitur. 937.pr.141.

Datis duabus rationibus media proportionalis inuenitur. 938.pr.142.143.

Datis tribus rationibus quarta proportionalis inuenitur. 939.pr.144 pag 940.pr.145.

Ostenditur differentia inter rationes continuè proportionales & quantitates quæ eamdem rationem continuant. 939.in Schol.

Si tres quantitates sint continuè proportionales, rationes primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam minimæ sunt omnium rationum, quæ rationem primæ ad tertiam componunt. 940.pr.146.

Determinantur rationes quæ duplicatam & quadruplicatam rationem habeant alterius rationis determinatæ 940.pr.147. *usque* 157.pag.947.pr.159.160.pag.950. pr.165.pag.952.pr.169.170.171.

Determinantur rationes quæ triplicatã habeant rationẽ. 946.pr.158.pag.950.pr.166.

Imò & series continuè proportionalium datur, in qua rationes ad se inuicem triplicatã, quadruplicatã, quintuplicatã & sic in infinitũ rationẽ habeãt. 947.pr.161 *usq;* 164.

Ostenditur diuersitas inter rationes simplices & rationum proportiones. 949 in Schol.

Dantur rationes quæ quadruplicatam habeant rationem eius, cuius alia determinata ratio est triplicata; imò & quæ sit sextuplicata, cuius alia est quintuplicata. 951. pr.167.168.

Vltimus terminus exhibetur progressionis rationum quæ ad se inuicem semper sunt in duplicata ratione. 953 pr.162.

LIBER NONVS.

De cylindro, cono, sphæra, sphæroide, & vtroque conoide parabolico & hyperbolico.

Definitiones. 955.

PARS PRIMA

Vngulas cylindricas, eiusq; partes, planis ad cylindri axem parallelis, resciſsas ad cubum reducit.

Prismata diuisa in certa ratione. 957.pr.12.

Segmẽto circuli inscribitur parallelogrammum maius dimidio segmenti. 958 pr.3.

ELENCHVS

Triangulum maximum cuiuis segmento circuli inscriptum, quod semicirculum non excedit, maius est segmenti dimidio. pag.959.pr.4.

Cylindro, & vngulæ inscribuntur prismata quæ ablata à cylindro & vngula relinquãt quantitatem quauis datâ minorem. 960.pr 5.6 pag.963 pr.10.11.12.

In eodem cylindro vngula ad vngulam est vt altitudo ad altitudinem. item aliæ vngularum æquationes. 961.pr.7.8.9.

Solidæ magnitudines habentes vtramque basim parallelam similiterque positam, eam inter se sortiuntur rationem quæ ex basibus & altitudinibus composita est. 965. pr.13.

Frustum cylindricum frusto cylindrico æquale datur. 965.pr.14.

Segmentũ cylindricũ duabus basibus parallelis inclusum diuiditur bifariam plano quodam transeunte per diametrum parallelogrammi quod est basis segmenti. 966.pr 15.

Segmentum cylindricum segmento vngulari æquale datur. 967.pr.16.

Partes vngulares dantur quæ inter se sunt vt altitudines. 967 pr.17.

Comparantur segmenta vngulæ inter se. 968.pr.18.19.

Ostenditur quod semicirculus ductus in se sit vera vngula cylindrica; item quibus superficiebus ductis in alias superficies æquualeant partes vngulæ. 969.in Schol.

Vngula ad vngulam triplicatam habet rationem laterum homologorum. 971.pr.20.

Vngula confertur cum suo segmento. 972 pr.21.22.

Basi vngulari inscripto hexagono, per cuius latera posita sint plana parallela axi auferentia segmẽta ab vngula, erit vngula ad reliquum ablatis segmentis vt octo ad sex. 973.pr.23.

Cubatura vngulæ. 974 pr.24.25.

PARS SECVNDA.

De inuolucro vngulari eiusq; ad cubum vel parallelepipedũ reductione.

AEquationes corporũ ortorũ ex ductu circulari concauo in conuexum. 976.pr.26.27

Ostenditur hoc corpus esse inuolucrum vngulæ, illudque exhibetur. 977. in Schol.

Inuolucrum totius vngulæ ad totam vngulam est vt pars inuolucri ad partem vngulæ quam inuolut. 978.pr.28.

Cubatura inuolucri vngulæ & ex hac noua cubatura vngulæ. 979 pr.29. & Corr.pr.30.

Alia comparatio inuolucri ad vngulam. 980.pr.31.

Comparationes & cubationes partium inuolucri. 981.pr.32.33.

Vngulæ quarum altitudines sunt æquales diametris basium cylindrorum à quibus decussantur, triplicatam habent rationem earundem diametrorum. 982.pr.34.35.

PARS TERTIA.

Superficies cylindrica quæ vngulam cingit ad rectilineum reducitur aliæq; eius affectiones notæ redduntur.

QVædam propositiones huic materiæ necessariæ præmittuntur. 985.pr.36.vsq; 40.

Quodlibet polygonum regulare semicirculo vngulæ à cylindro abscissæ inscribatur, & secundùm latera polygoni fiant sectiones quæ sint axi cylindri parallelæ; erunt plana omnia vngulæ inscripta æqualia rectangulo quod fit sub tota diametro, & latere quod omnia latera polygoni subtendit, dempto vltimo. 987.pr.41.

Item si eiusmodi polygonum circumscribatur circulo, perque eius latera fiant dictæ sectiones, quædam plana partem vngulæ ambientia dempto vltimo triangulo, æquãtur certo rectangulo. 989.pr.42.

Imò

Imò omnia plana totam vngulam ambientia demptis duobus vltimis triangulis æquantur quadrato diametri. pag 990.pr 43.

Tota ſuperficies cylindrica vngulæ cuius altitudo par eſt diametro circuli qui baſis eſt vngulæ, æqualis eſt quadrato diametri. 991 pr.45.

Partes ſuperficiales eiuſmodi vngulæ etiam quadrantur. 992 pr.46.47.

Omnia plana vngulam ambientia & ad ellipticam vngulæ baſim terminata, demptis triangulis lateralibus ſuperficiei cylindricæ vngulam cingentis, ſimul ſumpta æqualia ſunt. 993 pr.48.

Plana contingentia vngulam, parti determinatæ ſuperficiei vngularis æqualia. 994. pr.49.50.

Vngularis ſuperficies cylindrica ſecundùm datam rationem diuiditur. 995 pr.51.

Comparationes partium ſuperficierum vngularium. 995. pr.52.pag.997.pr.54. pag.998.pr 56.vſque 61.

Superficies vngularis ad cylindricam eam obtinet rationem quam diameter circuli ad perimetrum. 996 pr.53.

Cuiuſcumque vngulæ ſuperficies, ſiue altitudinem parem habeat diametro baſeos ſiue non, æqualis eſt rectangulo, quod diametro baſeos, & ipſius vngulæ altitudine continetur. 997.pr.55.

Corpora ambientia vngulam contenta planis ambientibus & polygonis duobus circulo & ellipſi circumſcriptis cubantur, & comparantur inter ſe. 1002.pr.62.63 64.

Cylindro parabolico datur pyramis æqualis. 1004 pr.65.

Ex hoc rurſus cubatur vngula. 1004 pr.66.

PARS QVARTA.

Comparatio vngulæ cylindricæ cum ſphæra & aliis corporibus.

QVædam neceſſaria præmittuntur. 1005.pr.67.68.

Prima vngulæ cum ſphæra proprietas quam Arch pr.38. l.1. de ſphæ. & cyl. demonſtrauit. 1007.pr.69.

Aliter demonſtratur prop.24 huius de cubatura vngulæ, & altera cum ſphæra analogia ex hac oſtenditur. 1007.pr.70.

Omnis vngula à cylindro recto abſciſſa, dupla eſt inſcriptæ ſibi pyramidis maximæ, cuius nimirum baſis eſt triangulum maximum quod ſemicirculo qui baſis eſt vngulæ inſcribi poteſt, altitudo verò eadem quæ vngula. Et in hoc mira oſtenditur ſymbolizatio ſphæræ & vngulæ. 1008.pr.71.

Priſma cuius vngulæ à cylindro recto abſciſſæ circumſcriptum, ipſius vngulæ ſeſquialterum eſt, in quo rurſus pulchra analogia ſphæræ cũ vngula oſtenditur. 1009.pr.72.

Analogiæ ſuperficierum vngularium cum ſuperficiebus ſphæricis. 1010.pr.73.74.75.

Imò in omnibus conuenire ſuperficiem vngularem cum ſphærica oſtenditur. 1012 pr.76.

Symbolizatio ſegmentorum vngularium cum ſegmentis ſphæricis. 1013.pr.77.

Symbolizatio pyramidũ vngulæ inſcriptarũ, cũ cono inſcripto ſphæræ. 1014.p.78.79.80.

Elenchus ſymbolizationum vngulæ cum ſphæra. 1017.

PARS QVINTA

Vngulam parabolicam conſiderat, inſuper cylindricam vngulam & ſphæram confert cum parabola & cylindro parabolico.

RAtio quam habet vngula cylindrica ad ſuum ſegmentum confertur cum parabola & eius ſegmento. 1020.pr.81.

Cylin-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [54] - -
PUBLIC DOMAIN

Cylindro parabolico datur corpus æquale ortum ex ductu trianguli in se subalternè. pag.1020.pr.82.

Sphæra diuiditur per circulum, prout parabola per lineam rectam, & ex hac aliter diuiditur sphæra secundùm datam rationem, quàm Archimedes pr.4.l.4. de sph. eam diuisit. 1021 *pr.83.84.*

Vngulæ totius sectæ per planum basi æquidistans, ad suum segmentum ratio datur in lineis rectis. 1023.*pr.86.*

Comparantur parabolæ quædam concauæ ductæ in se. item ductæ in se subalternè. 1024. *pr.87.88.*

Proprietates corporum inscriptorum cylindro parabolico eiusque vngulæ. *pag.*1027. *pr.91.92.93.*

Pyramis vngulæ inscripta ad pyramidem inscriptam eius segmento quod sit vngula, eam rationem habet quam vngula ad vngulam. 1029.*pr.94.*

Imò tota vngula ad vngulam quandam quæ sit per sectionem basi vngulæ primæ parallelam est vt triginta duo ad vnum. 1030.*pr.95.*

Ostenditur quantum superet vngula parabolica pyramidem sibi inscriptam. 1031. *pr.96.97.98.*

Vngula cylindri parabolici cubatur. 1033.*pr.99.*

Inuolucrum cylindri parabolici ad cylindrum parabolicum habet rationem vt vnum ad duo. 1034.*pr.100.*

Segmento cylindrico parabolico datur pyramis æqualis. 1034.*pr.101.102.*

Sphæra iterum secundùm quamuis rationem diuiditur, aliter quàm ab Archimede diuisa. 1036.*pr.103.104.*

PARS SEXTA.

De Sphæroide.

Definitiones. 1038.

Lemmata ad sequentem materiam necessaria. 1098.*pr.105.vsque* 108.

Omnis sectio sphæroideos per axem facta exhibet ellipsin à qua sphæroides formatum est. 1040.*pr.109.*

Omnis sectio sphæroidis per centrum facta, recta est ad aliquod planum ductum per axem sphæroideos. 1040.*pr.110.*

Omnis sectio sphæroidis per centrum non transiens recta est ad aliquod planum quod per axem sphæroideos duci potest. 1041.*pr.111.*

Omnis sectio sphæroidis normalis ad axem qui in constructione sphæroidis immotus fuit circulum exhibet. 1041.*p.112.*

Omnis sectio sphæroideos ellipsin exhibet, si obliqua est ad axem. 1042.*pr.113.*

De communibus intersectionibus sphæroidis secti per duo plana. 1043.*pr.114.115.116.*

Sectio sectioni per axem factæ æquidistans, eidem similis est, & si obliqua sit, dissimilis. 1044.*pr.117.pag.*1045.*pr.120.*

Dati sphæroidis axis & centrum exhibetur. 1045.*pr.118.119.*

Sectio per axem maiorem facta maxima est omnium sectionum quæ in sphæroide fieri possunt, & per axem minorem est minima. 1046.*pr.121.*

Data quauis recta quæ minor sit axe maiore sphæroidis, maior minore, exhibetur in sphæroide sectio, cuius axis æqualis sit datæ. 1046.*pr.122.*

Omnes sectiones per centrum sphæroideos transeuntes eam inter se sortiuntur rationem, quam

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [55] - -
PUBLIC DOMAIN

quam continent axes maiores inter se. pag.1047.pr.123.
Problemata varia circa inuentiones sectionum ellipticarum quæ certam habeant rationem. 1047.pr.124.vsque 128.
Comparantur sphæroides cum sphæroidibus. 1050.pr.129.130.
Sphæroides ad sphæram inscriptam eam obtinet rationem, quæ inter axes reperitur. 1051.pr.131.
Omnes coni maximi sphæroidi inscripti insistentes alicui sectioni quæ fit per centrum inter se sunt æquales. 1052.pr.132.
Ratio coni inscripti ad sphæroides in superficiebus parabolicis exponitur. 1052. pr.133.134.
Segmentorum sphæroidicorum ratio in partibus parabolæ exposita. 1054 pr.136.

PARS SEPTIMA.

De conoide parabolico.

Definitiones earumque explicatio. 1055.
Omnis conoidis parabolici sectio per rectam facta quæ in formatione conoidis immobilis fuit parabolam generat. 1055.pr.136.
Omnis sectio conoidis parabolici ad axem conoidis recta, circulum format. 1056.pr.137.
Omnis sectio conoidis parabolici ad axem obliqua ellipsin format. 1057.pr.140.
Omnis sectio axi conoidis parabolici æquidistans parabolam exhibet, & quidem eandem cum parabola factâ sectione per axem. 1058.pr.141.142.
Dati conoidis parabolici axis exhibetur. 1059.pr.143.
Variæ proprietates planorum parallelorum, conoides parabolicum secantium. 1060. pr.144.vsque 146.
Conoidium parabolicorum rationes in rectilineis expositæ. 1062.pr.148.149.
Conoides parabolicum ad conoides est vt conus inscriptus ad conum inscriptum. 1063. pr.150.
Comparantur partes conoidis parabolici inter se, imò inueniuntur quæ sint in ratione 1. 3.5.7.&c. *hoc est numerorum imparium.* 1064.pr.151.152.153.154.
Conoides parabolicum ad conum sibi inscriptum eam rationem habet quam sex ad quatuor. 1066.pr.156.
Conoides cylindri quo continetur dimidium est. Item conoidis ad cylindrum inscriptum nota fit ratio. 1066.pr.157.158.
Vnica sectione à cylindro, conoide parabolico, ei inscripto, item cono huic inscripto auferuntur sectiones similes. 1068.pr.160.
Conoides ad conoides est vt cylinder ad cylindrum quibus inscribuntur. 1070.pr.162.
Partes conoidium comparantur inter se. 1070.pr.163.164.

PARS OCTAVA.

De conoide hyperbolico.

Definitiones. 1072.
Omnis sectio conoidis hyperbolici per axem facta hyperbolam generat eandem cum illâ, quâ in formatione conoidis vsi sumus. 1072.pr.165.
Omnis sectio in conoide hyperbolico basi æquidistans circulum format. 1073.pr.166.
Omnis sectio conoidis hyperbolici ad axem obliqua ellipsim exhibet. 1075.pr.171.

Omnis

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [56] - -
PUBLIC DOMAIN

Omnis sectio conoideos quæ transeat per centrum hyperbolæ factæ per axem conoideos, hyperbolam exhibet. pag.1076 pr.172.
Duæ hyperbolæ in cono parallelæ inter se sunt similes. 1077.pr.173.
Omnes hyperbolæ inter easdem asymptotos constitutæ similes sunt. 1077.pr.174.
Conus factus ab asymptotis cum conoide hyperbolico numquã concurrẽs 1078.pr.175.
Aliæ proprietates dicti coni & conoidis. 1078.pr.176.177.178.
Omnis sectio conoidis hyperbolici axi parallela exhibet hyperbolam illi similem quæ fit per axem. 1080.pr.179.
Parabola generatur ex sectione quadam conoidis hyperbolici, & ex duabus ostenditur quæ sit minor. 1081.pr.180.pag.1082.pr.182.183.
Item ex cono & conoide nascuntur parabolæ parallelæ seu asymptotæ. 1082.pr.1811.
Aliæ proprietates sectionum hyperbolicarum in conoide hyperbolico. 1082.pr.184.185.
Similes ellipses, & similes hyperbolæ in conoide hyperbolico assignantur. 1083. pr.186.187.
Spatia conoides hyperbolicum cingentia comparantur inter se. 1087.pr.190 pag. 1088.pr.192.
Datur conus conoidi æqualis. 1087.pr.191.
Ratio conoidis hyperbolici ad conum inclusum exhibetur. 1088.pr.193.
Ratio conoidis ad cylindrum illud includentem assignatur. 1089.pr.194.
Conoides hyperbolicum cum conoide parabolico comparatur. 1090.pr.195.196.
Item cum sphæroide. 1092 pr.197.
Datur pars coni quæ ad pyramidem quandam rationem habeat quam quatuor ad tria. 1093.pr.198.
Partes coni cum partibus cylindri comparatæ. item inter se, si sectæ sint sectione faciente parabolam. 1093.pr.199.200.201.202.203.204.
Noua quadratura parabolæ. 1098.pr.205.

LIBER DECIMVS.

De ipsa circuli quadratura.

PARS PRIMA

VAria Lemmata complectitur quæ variis quadraturis concinnandis inseruire poterunt.

PARS SECVNDA.

COrpori producto ex ductu mutuo parabolarum subalternè positarum nihil prorsus habenti circulare, triplici viâ cylindrum inuenit æqualem pr.46.47.48.49.50. 51. item prop.68. item prop.75. & ipsius demum circuli varias quadraturas exhibet, modosque reducendi cylindrica corpora ad rectilineas magnitudines solidas.

PARS TERTIA.

HYperbolem quoque per cylindrum hyperbolicum ad rectilinea solida reductum ad figuras rectilineas planas reducit. Atque vnà miram quadraturæ hyperbolicæ cum circulari similitudinem prosequitur.

QVA-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [57] - -
PUBLIC DOMAIN

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER PRIMVS.

DE

LINEARVM POTENTIIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic fere Lemmaticus est, quemadmodum & alter, qui de Circulorum varijs proprietatibus tractat. Porrò quò magis materiæ Lectori ad manum sint, omnem in tres partes diuidere placuit.

Prima quidem maximè circa linearum proportionem versatur.

Secunda varias trianguli affectiones exhibet.

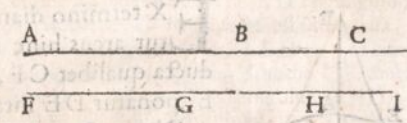
Tertia illas linearum contemplatur proprietates, quæ earum potentias concernunt.

PARS PRIMA.

De varia linearum inter se proportione.

PROPOSITIO PRIMA.

Sint AB, BC, CD, DE, lineæ in continua proportione; sit autem media FG, inter AB, BC; & inter AB, CD; media GH: Denique inter AB. DE. media sit HI.



Dico AB. FG. GH. HI. lineas esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVadratum AB est ad rectangulum ABC. vt AB. ad BC. & ABC. rectangulum ad AB. CD. rectangulum est vt BC. ad CD. id est vt AB, ad BC. Eodem modo rectangulum super AB. CD. ad AB. DE rectangulum, est vt CD ad DE; id est AB ad BC. Quadratum autem AB, ad FG. quadratum, est vt AB ad BC. Igitur quadratum AB. est ad quadratum FG, vt ABC rectangulum, ad rectangulum AB.CD. id est ad quadratum GH. Vnde eandem rationem continuant

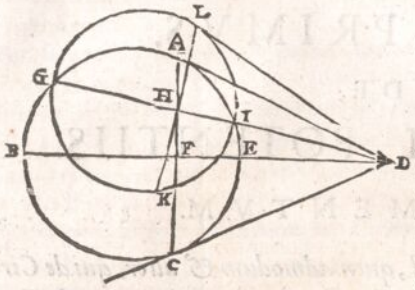
a 1. Sexti.

nuant quadrata AB. FG. GH. HI. ac proinde ipſæ lineæ; quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

CIrculum ABC contingant rectæ DA, DC. & ductâ AC, ponatur altera DG occurrens AC in H. & circulo in G & I.

Dico rectam DG. ſectam eſſe in I & H. vt ſit DG ad GH. quemadmodum eſt DI ad IH.



Demonſtratio.

SVper IG. diametro, deſcribatur circulus GLK & per H punctum erigatur normaliter HL, vel HK, ad diametrum GI; ponaturque DL, erit itaque GHI rectangulo, a hoc eſt AHC, æquale rectangulum LHK, ſiue LH quadratum; pertinent igitur ad eundem b circulum puncta LAKC. iuncta igitur DL eſt æqualis tangenti DA, adeoque tangens; nam LD quadratum eſt æquale quadrato LH; id eſt rectangulo GHI, id eſt c AHC vnà cum quadrato HD: id eſt quadratis HF, FD. vnde LD quadrato rectangulum d IDG æquale; ac proinde cum IG. diameter ſit circuli GLI. erit per Pappum e vt DG ad GH. ita DI ad IH. quod fuit demonſtrandum.

a 35. *Tertij.*

b *Ibid.*

c 34. *Tertij.*

d 36. *Sexti.*

e *Lib.* 7. *pr.* 155.

Scholion.

QVoniam multoties in hoc opere recurret diuiſio lineæ, prout præſenti propoſitione expoſita eſt; operæpretium exiſtimaui, aliquod illi peculiare nomen adiungere, quo illius cognitio magis innoteſcat; placuit autem nomenclaturam illi appropriare, ſectionis lineæ, ſecundùm mediam & extremam rationem proportionalem; quoniam ſimilitudinem non exiguam habet, cum ea diuiſione, quæ in elementis vocatur, ratio media & extrema: differt tamen ab ea, quòd illa ſolùm ſit æqualitatis, hæc verò de qua agimus, omnem omnino proportionem admittat; ſolam æqualitatis excludens.

PROPOSITIO III.

EX termino diametri circuli ABC: ſumantur arcus hinc inde æquales, BC. BD. & ducta qualibet CF, quæ occurrat perimetro in E, ponatur DE interſecans AB in G.

Dico rectam FB. ſectam eſſe in A & G. media & extrema ratione proportionali.



Demonſtratio.

DEmonſtratum inuenies libro noſtro de Circulis, propoſ. 101. rectam BF ad FA. eandem habere rationem, quam BG. GA. hoc eſt totam FB. ad alterum extremorum FA, eandem rationem obtinere, quam BG alterum extremum, habet ad medium AG; ergo ſecta eſt recta FB. in A & G. media & extrema ratione proportionali. Secundam explicationem præcedenti Scholio factam.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SEcta sit AB. in C & D. media & extrema ratione proportionali, & composita ex altera extremarum; & media, Verbi gratia CB, bifariam secetur in E.

F A C D E B

Dico CE quadratum, rectangulo DEA, æquale exsurgere.

Demonstratio.

PRoducatur CA. in F, vt CA, AF æquales sint inter se: quoniam est vt BA ad AC; ita BD ad DC; erit componendo, BA cum AC. hoc est BF. ad FA. id est AC, vt BC ad DC. sed totius BF, dimidia est AE, ipsius quoque BC, dimidia est EC, per constructionem.

Igitur AE, ad AC, est vt EC ad CD. & conuertendo vt AE. ad CE ita est, EC ad DE. ergo AE. CE. DE. sunt in continuata ratione. Vnde & quadrato a CE. rectangulum AED. æquale. Quod fuit demonstrandum. a 36. Sexti.

PROPOSITIO V.

POnantur tres in continua ratione ED, EC, EA. & EB, fiat æqualis EC, & ipsi CA. æqualis AF. dico AB. in C. & D. diuisam esse media & extrema ratione proportionali.

Demonstratio.

QVoniam est ratio continuata, trium ED. EC. EA. erit quoque diuidendo, DE ad DC. vt EC. ad CA. & componendo, vt CE ad DC. sic AE ad AC. quare & BC ad DC. ita BF. ad AC. hoc est ad AF. & diuidendo BD ad DC. vt BA ad AF. hoc est, ad AC. Quod fuit demonstrandum.

F A C D E B

Corollarium.

DVo hinc Consequuntur; primum, rectangulum BDC. rectangulo ADE. esse æquale, alterum BAC. rectangulo æquale existere, EAD rectangulum.

Primi demonstratio inde patet: quoniam BC. in E. secta est in æqualia, & non æqualia in D. rectangulum sub inæqualibus segmentis totius BDC. vnà cum a quadrato quod fit ab intermedia DE. æquale est ei, quod à dimidia CE. describitur quadrato. Rursus cùm AE secta sit in D: vtcunque erit rectangulum AED. b æquale rectangulo ADE, & quadrato DE. sed iam ostensum est, AED rectangulum quadrato CE æquale, Igitur BDC rectangulum, vnà cum DE quadrato, æquale est ADE rectangulo, vnà cum DE quadrato. Sublato itaque communi DE quadrato, residuum erit BDC rectangulum, rectangulo ADE æquale.

a 5. Secundi.

b 3. Secundi.

Alterum quoque sic manifestum erit. Quoniam BC in E, secta est bifariam, ipsique additur pars CA, erit rectangulum BAC, c vnà cum quadrato CE, æquale quadrato AE; sed cùm secetur AE in D. vtcunque, erit quadratum AE, æquale duobus d rectangulis AED, & EAD. Igitur rectangulum BAC, vnà cum quadrato CE, æquale est duobus rectangulis AED, EAD. sed horum alterum AED, ostensum est quadrato CE. esse e æquale, his itaque detractis, residuum manebit BAC rectangulum, rectangulo EAD æquale.

c 6. Secundi.

d 4. Secundi.

e 4. Huius.

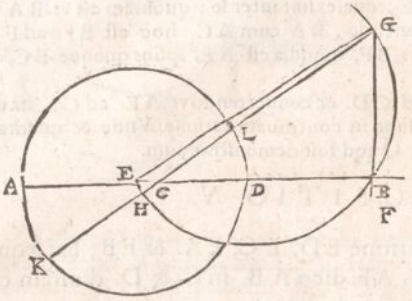
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [60] - 3
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VI.

LIneâ AB. sectâ in C. & D. secundùm mediam & extremam rationem proportionalem; fiat circulus super AD. diametro, cuius centum E, erigatur deinde BFG. normalis ad AB. ex puncto B.

Dico rectas omnes per C. ductas quæ circulo in K. & L. occurrunt & FB. normali in aliquo puncto G. diuisas esse secundùm mediam & extremam rationem proportionalem.

Demonstratio.

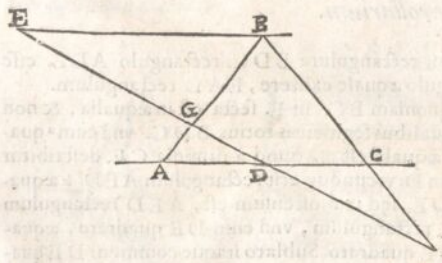


a 3. Tertij.
b 31. Tertij.
c 34. Tertij.
d Ibid.

EX E. centro Circuli ALD, ducatur recta EH, normalis ad rectam KG; erit itaque KL. bifariam [a] diuisa in H; & quia rectus est vterque angulorum ad H, & B, Circulus diametro GF descriptus, percurret puncta H, [b] & B: Rectangulum itaque BCE, [c] æquale est GCH rectangulo; est quoque rectangulum BCE, rectangulo ACD æquale; per Corollarium præcedentis propositionis; huic autem æquale est [d] rectangulum KCL, Igitur rectangulo GCH, rectangulũ KCL, æquale erit: adde ergo vtriq; rectangulo quod ex CH. fit quadratũ, erit denuo rectangulum KCL, vnà cum quadrato CH, æquale rectangulo GCH, vnà cum quadrato CH; sed rectangulo KCL, vna cum quadrato CH ostensum est æquari rectangulum GHC, siue GCH vnà cum quadrato CH id est quadratum [e] HL. Itaque rectangulum GHC, æquale est HL quadrato: vtque CH ad HL, ita eadem HL ad HG. quo fit, vt cùm sit HL æqualis HK. Ipsa GK. [f] in C. & L, secta sit secundùm rationem extremam & mediam proportionalem, per præcedentem propositionem. Quod fuit demonstrandum.

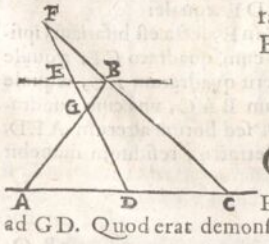
e 5. Secundi.
f 5. Huius.

PROPOSITIO VII.



ESto ABC trianguli basis AC diuisa bifariam in D; actâque per B lineâ BE, parallelâ basi AC, agatur per D linea quæcunque EF, occurrẽs trianguli ABC lateribus, In G.F.

Dico EF lineam in D & G punctis extrema & media ratione proportionali esse diuisam: id est esse vt EF ad FD, sic EG ad GD.



Demonstratio.

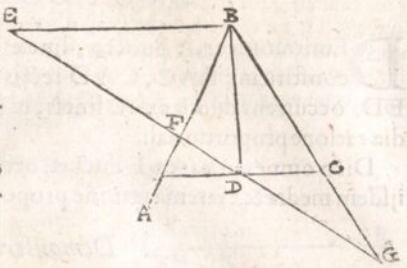
QVoniam EB, & AC lineæ æquidistant, erit vt EB ad DC, id est ad AD, sic EF ad DF; sed est vt EB ad AD, sic EG ad GD, igitur vt EF ad FD, sic EG ad GD. Quod erat demonstrandum.

In

In 2. figura eſt FD linea in E & G diuiſa media & extrema ratione proportionali.

PROPOSITIO VIII.

SIt angulus A B C diuiſus bifariam rectâ B D, ad quam erecta ex B normali B E, agatur linea quæcunque E G per punctum D.



Dico E G lineam in F & D, media & extrema ratione proportionali eſſe diuiſam.

Demonſtratio.

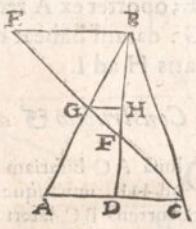
POnatur per D, linea A C, parallela rectæ B E: occurrens anguli A B C lateribus, in A & C. Quoniam igitur A C linea æquidiſtat, rectæ E B. quæ normalis ponitur ad lineam B D, erunt anguli A D B. C D B recti; ſunt autem per conſtructionem, & anguli A B D. C B D inter ſe æquales; & B D linea communis, igitur triangulum A B D æquale eſt triangulo C B D, & A D baſis, æqualis baſi D C: igitur per præcedentem vt E G ad G D, ſic E F ad F D. Quod erat demonſtrandum.

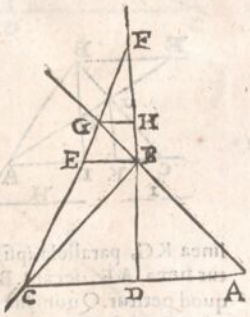


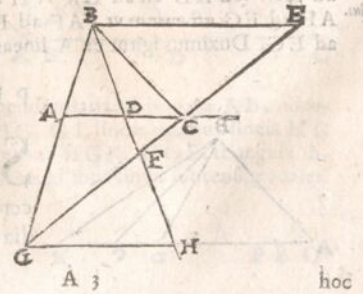
In 2 figura linea G D. diuiſa eſt, ſecundum mediam & extremam rationem proportionalem.

PROPOSITIO IX.

ESto A B C trianguli baſis A C, in D bifariam diuiſa, iunctiſque B D, agatur per B linea B E, parallela baſi A C; dein ex C, recta ducatur C E, occurrens vtcunque lineæ B E in E, B D rectæ in F, & lateri A B in G. Dico in prima figura: lineam E C; in ſecunda lineam F C; in tertia rectam E G, extrema & media ratione proportionali eſſe diuiſam.







Demonſtratio.

DVcatur G H linea, parallela baſi A C; Quoniam A C, E B. G H, lineæ æquidiſtant, erit A B ad B G. vt C E ad G E; ſed eſt vt A B ad G B, ſic A D ad G H,

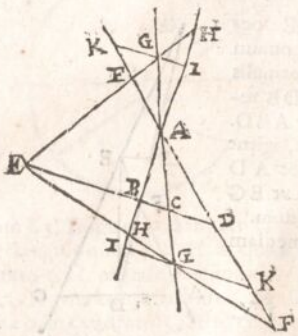
hoc est DC ad GH, hoc est CF ad FG, igitur vt CE ad EG, sic CF ad FG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

DEmittantur ex A puncto, lineæ tres AB, AC, AD, quæ angulos constituant BAC, CAD rectis minores. Ponatur autem quæuis ED occurrens ductis ex A. lineis, & diuisa in B. & C. extrema & media ratione proportionali.

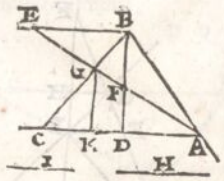
Dico omnes lineas ex E ductas, occurrentes rectis AB, AC, AD, ab ijsdem media & extrema ratione proportionali diuidi.

Demonstratio.



DVcatur ex E, quæuis linea EF, occurrens lineæ AD in F, rectæ AC in G, & AB lineæ in H. deinper G, agatur linea IK; parallela rectæ BD. Quoniam BD, IK lineæ æquidistant; erit vt DC ad CB, sic KG ad GI, sed per hypothesim est, DC ad CB, vt DE ad EB, igitur erit vt DE ad EB, sic KG ad GI, & permutando vt DE ad KG, sic EB ad IG. est autem vt DE ad KG, sic EF ad FG, & vt EB ad IG, sic EH ad HG, igitur vt EF ad FG, sic EH ad HG, & permutando vt EF ad EH, sic FG ad GH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.



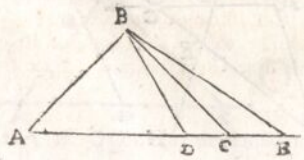
ESto ABC trianguli basis AC, cui per B, verticem agatur æquidistans BE; oportet ex A rectam ducere AE, vt AE ad EG. datam habeat rationem maioris inæqualitatis H ad I.

Constructio & demonstratio.

DIuisa AC bifariam in D, fiat, vt H ad I sic AD ad DK, iunctisque punctis BD, erigatur ex K linea KG, parallela ipsi BD, occurrens BC lateri in G, tum ex A per G, agatur linea AE, secans BD lineam in F, & rectam EB in E; dico factum esse quod petitur. Quoniam FD GK lineæ sunt parallelæ erit vt AD ad DK, sic AF ad FG, sed AD est ad DK vt H ad I per constructionem igitur, vt H ad I sic AF ad FG est autem vt a AF ad FG sic AE ad EG, igitur vt H ad I sic AE ad EG. Duximus igitur ex A lineam, &c. Quod erat faciendum.

a 9. *Huius.*

PROPOSITIO XII.



SIt AC linea vtcumque diuisa in D, oportet illi rectam quandam CE adijcere, vt AE tota, in D & C, diuisa sit media & extrema ratione proportionali.

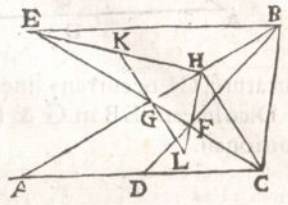
Con-

Constructio & demonstratio.

SVper AC vt basi constituatur triangulum rectangulum ABC, habens ad B rectum angulum, & ex B demittatur linea BE constituens angulum EBC æqualem angulo DBC; occurrens AC lineæ in E; dico factum esse quod petitur. Quoniam anguli DBC. CBE per constructionem sunt inter se æquales, & AB linea normalis ad rectam BC, [a] erit AD ad DC vt AE ad EC. datæ igitur lineæ AC, adiecimus, &c. Quod erat postulatum. [a] *Per 8. huius.*

PROPOSITIO XIII.

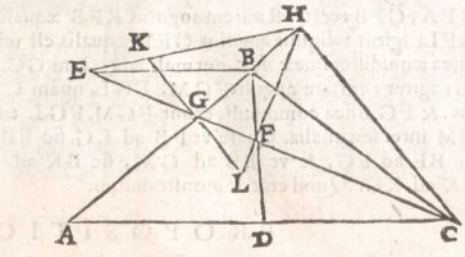
ESto ABC trianguli basis AC, in D bifariam diuisa, iunctisque BD, ponatur per B linea BE parallela basi AC: tum in EB linea, punctum sumatur quoduis E, ex quo linea demittatur EC, occurrens AB lineæ in G, & rectæ BD in F; dein ex C recta erigatur CH, secans orthonaliter lineam AB in H. iunganturque puncta HF EH.

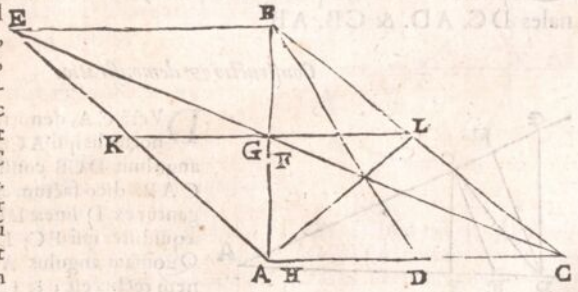


Dico angulos EHG, FHG esse inter se æquales.

Demonstratio.

DVcatur per G linea KL, parallela rectæ HC; occurrens HE lineæ in K, & FH rectæ in L. Quoniam igitur HC KG, lineæ sunt parallelæ, erit vt HC ad KG, sic CE ad EG: sed vt CE ad EG, sic CF [a] est ad FG, igitur vt HC ad KG, sic CF ad FG: est autem vt CF ad FG, sic HC ad GL, igitur vt HC ad KG, sic HC est ad GL; quare KG. GL. lineæ sunt inter se æquales. Rursum cũ HC lineæ, æquidistet linea KG, sit autem & HC normalis ex hypothesi ad rectam AB, erit & KG linea perpendicularis ad lineam AB, adeoque anguli HGK, HGL recti; igitur cum HG. GL lineæ duabus lineis HG GK sunt æquales, & anguli illis contenti recti, erunt HGK. HGL triangula inter se æqualia & similia, & anguli EHG, FHG æqualibus lineis subtensi, æquales. Quod erat demonstrandum.

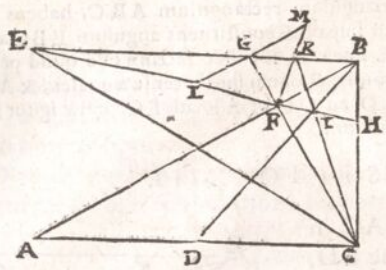




[a] *9. huius.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.



ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D; iunctisq; BD, agatur per B linea BE, parallela rectæ AC, in qua assumpto pũcto quouis E, ducatur recta EC, & ex C erigatur linea CF orthogona rectæ AB, occurrens EB lineæ in G; dein ponatur EF intersecans BD in I, & BC in H. ducaturq; CI, occurrens lineæ EB in K.

Dico lineam EB in G & K, diuisam extrema & media ratione proportionali.

Demonstratio.

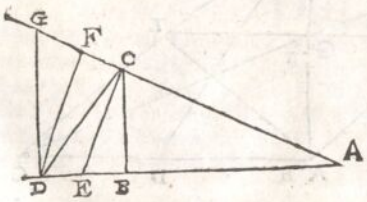
AGatur per G linea LM, parallela rectæ AB: occurrens FK in M. Quoniam linea GC, per constructionem normalis est ad rectam AB, erunt anguli GFA, GFB recti; est autem angulus KFB æqualis [a] angulo BFI, id est angulo AFL; igitur reliquus angulus GFL æqualis est reliquo GFK; rursum cùm LM linea æquidistet lineæ AB normali ad rectam GC, erunt anguli FGL, FGM recti; igitur cùm tam anguli FGM, FGL, quàm GFM, GFL sint inter se æquales, & FG linea communis, erunt FGM, FGL triangula, adeoque & latera LG, GM inter se æqualia. Quare vt FB ad LG, sic FB ad GM: sed est vt FB ad LG, sic BE ad EG, & vt FB ad GM, sic BK ad KG, igitur vt BE ad EG, sic BK ad KG. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per 13. huius.*

PROPOSITIO XV.

COnstituant AB, BC rectum angulum, & AB maius sit latere BC. Oportet AB latus producere in D, vt iunctâ DC. fiant proportionales DC. AD. & CB. AB.

Constructio & demonstratio.

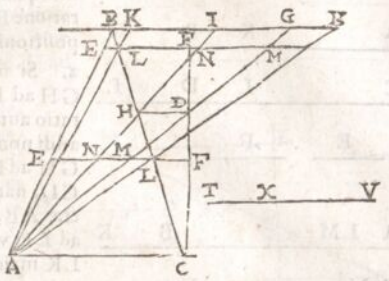


DVctâ CA, demittatur ex C linea CE, normalis ipsi AC, & alia quędã CD, quę angulum DCB constituat duplum anguli CAB. dico factum esse quod petitur. Erigantur ex D lineæ DF, DG; & DF quidem æquidistet ipsi EC; DG verò, rectæ CB. Quoniam angulus ACE per constructionem rectus est, & CB linea normalis ipsi AE, erunt ABC EBC triangula similia, & angulus ECB æqualis angulo CAB; quare & angulus DCB, rectâ CE bifariam est diuisus. Rursum cùm DG linea, per constructionem æquidistet rectæ BC; & FD lineæ, ipsi EC; erit angulus GDC æqualis angulo DCB, & angulus FDC, æqualis angulo ECD; adeoque GDC angulus, rectâ FD bifariam diuisus; sunt autem & anguli DFG, DFC recti (cùm FD linea æquidistet ipsi EC, normali ad AC) & FD linea communis, igitur triangulum DFC, æquale triangulo DFG, & DC latus, lateri GD æquale.

æquale. Quare CD ad DA vt GD ad DA; sed est GD ad DA, vt CB ad BA, igitur vt CB ad BA sic CD ad DA. Quoad igitur AB lineam produximus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XVI.

SInt ABC ADC triangula, inæqualis altitudinis, super eadem basi AC constituta; oportet ducere lineam EF, parallelam basi AC, vt EL ad MF datam habeat rationem TV ad XV.



Constructio, & demonstratio.

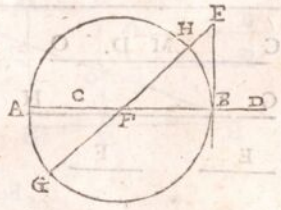
COnstituantur per B & D lineæ BG, DH parallelæ basi AC; & DH quidem occurrat triangulo ABC in H; dein AD producta, donec BG lineæ occurrat in G, agatur per H, linea AHI, occurrens BG lineæ in I: diuidaturque BI in K, vt BI ad IK datam habeat rationem TV ad VX; & ex K demittatur linea KA, occurrens BC lineæ in L, tum per L ducatur linea EF parallela basi AC, occurrens ABC triangulo in E & L, rectæ CD productæ in F, & AD lineæ in M.

Dico EL ad MF datam habere rationem in TV ad VX. EF recta occurrat Lineæ AI in N; Quoniam HAD, HCD triangula super eadem basi HD & inter easdem parallelas constituta sunt, erunt LF, MN lineæ inter se æquales: demptâ igitur communi NF, vel additâ ML, erunt LN, FM, lineæ æquales; igitur vt EL ad LN sic EL est ad MF, sed EL est ad LN, id est BK ad KI vt TV ad VX; igitur vt TV ad VX, sic EL est ad MF; duximus igitur lineam EF, &c. Quod erat præstandum.

Idem patet euenire si dicta duo triangula, æquales habeant bases in directū positas.

PROPOSITIO XVII.

SIt AB linea diuisa vtcunque in C, oportet illi rectam addere BD, vt tota AD sit ad AB, vt AC est ad BD.



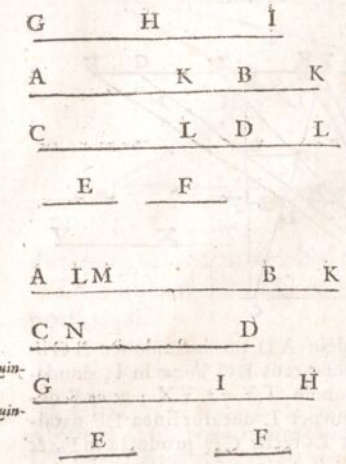
Constructio, & demonstratio.

DEscripto super AB vt diametro, circulo AHB, erigatur ex B tangens EB, quæ sit media inter AB & AC; dein ex E per F centrum circuli AHB recta ducatur EG occurrens circulo in H, addaturque lineæ AB quædam BD, æqualis ipsi EH. Dico factum esse quod petitur. Quoniam HE, BD lineæ sunt æquales, erunt HEG BDA rectangula inter se æqualia; sed HEG rectangulum est æquale quadrato EB, id est ex constructione rectangulo CAB, igitur CAB, BDA rectangula sunt inter se æqualia; quare AD est ad AB vt AC ad BD. datæ igitur lineæ AB quandam adiecimus vt, &c. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO XVIII.

DAtis duabus rectis AB, CD, rectas addere, vel detrahere, in data ratione E ad F; vt compositæ vel reliquæ datam habeant rationem GH ad HI.

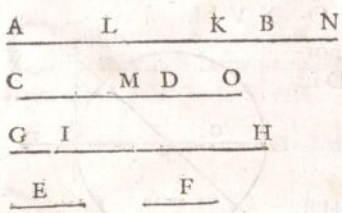
Constructio & demonstratio.



1. DAtæ rectæ AB CD sint inter se æquales, & tam ratio E ad F, quam GH ad HI, sit æqualitatis; addantur autē, vel detrahantur in ratione E ad F, lineæ BK, DL, patet veritas propositionis.

2. Si fuerit AB maior quàm CD; & ratio GH ad HI, maior quoque ratione AB ad CD, ratio autem E & F æqualitatis; Dico æquales addi non posse vt compositæ sint in ratione data GH ad HI. Cùm enim AB ponatur maior quàm CD, fiat LB æqualis ipsi CD; addaturque rectæ AB, quæuis BK; & si fieri possit, sit AK ad LK vt GH ad HI. erit igitur ratio AK ad LK maior ratione AB ad LB, id est ad CD: & quia ratio GH ad HI maior ponitur ratione AB ad LB, erit diuidendo [a] quoque ratio GI ad IH maior ratione AL ad LB: sed est vt GH ad HI sic AK ad LK ex hypothesi, adeoque vt GI [b] ad IH, sic AL ad LK, igitur & ratio AL ad LK maior est ratione AL ad LB: Quod fieri non potest; [c] cùm LB minor sit ipsa LK. Quare lineæ æquales addi non poterunt, vt, &c. Demi verò poterunt æquales, vt reliquæ sint in ratione GH ad HI: facta enim LB æquali ipsi CD, fiat vt GI ad IH, sic AL ad LM, cadet M inter L & B; (cùm AL ad LB ostensa sit minorem habere rationem, quàm GI ad IH) dein rectæ MB, fiat æqualis ND: Quoniam igitur per constructionem est vt GI ad IH, sic AL ad LM, erit componendo, AM ad LM, id est ad CN per constructionem vt GH ad HI. Quod erat demonstrandum.

a 19. Quinti.
b 17. Quinti.
c 8. Quinti.



3. Si AB linea rursum fuerit maior rectâ CD, & ratio GH ad HI minor ratione AB ad CD, ratio autem E ad F æqualitatis, æquales addi poterunt vt compositæ rationem habeant GH ad HI: fiat enim LB linea, æqualis rectæ CD; quoniam per hypothesim, ratio AB ad LB, id est CD per construct. maior est ratione GH ad HI, erit [a] diuidendo, ratio AL ad LB maior ratione GI ad IH; facto igitur vt GI, ad IH, sic AL ad LN, patet LN maiorem esse linea LB; nam ratio GH ad HI minor ponitur ratione AB ad LB, id est CD, adeoque & ratio GI [b] ad IH, id est AL ad LN minor est ratione AL ad LB: tum CD lineæ addatur quædam DO æqualis ipsi BN: Quoniam igitur est AL ad LN, vt GI ad HI, erit componendo, AN ad LN, id est CO, vt GH ad HI: Quod erat primum.

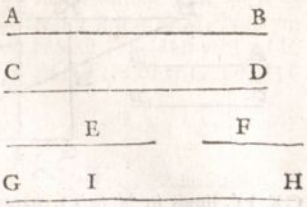
a 19. Quinti.
b Ibid.

Iisdem positis, æquales demi non poterunt, vt reliquę datam habeant rationem GH ad HI: auferantur enim æquales KB, MD; & si fieri possit, sit vt GH ad HI sic AK ad LK, id est ad CM. cùm igitur per hypothesim, ratio GH ad HI minor sit ratione AB ad LB, id est ad CD, sit autem vt GH ad HI, sic AK ad LK, id est ad CM, erit ratio AK ad LK, minor quoque ratione AB ad LB, & diuidendo, [a] ratio AL ad LK, minor ratione AL ad LB. Quod fieri non [b] potest cùm LB linea, maior sit lineâ LK. quare hoc casu demi æquales lineæ non poterunt vt reliquæ, &c.

a 19. Quinti.
b 8. Quinti.

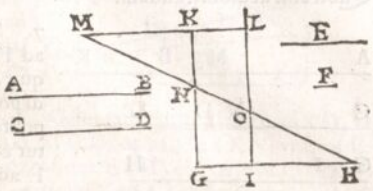
4. Si

4. Si fuerint AB, CB lineę æquales, & ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione GH ad HI;

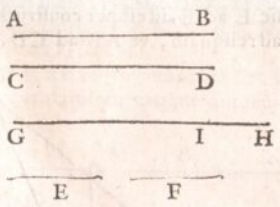


Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt compositę datam habeant rationem GH ad HI. Rationi enim GH ad HI non potest addi ratio æqualitatis, quin producatur ratio minor illa, quam habet GH ad HI. Ergo nec rationi æqualitatis potest addi ratio GH ad HI, quin producatur ratio minor illâ, quam habet GH ad HI. cùm eædem sint quę resultant.

Iisdem positis; demi rectę poterunt secundùm rationem E ad F, vt residuę obtineant rationem GH ad HI reciprocè: id est, vt vtriusque rationis antecedentes non sint in eadem linea: erigantur enim ex G & I parallelę GK, IL, æquales ipsis AB, CD; & ex L per K agatur linea LKM æqualis rectæ GH, ducaturque linea MH occurrens GK, IL rectis in N & O. Quoniam igitur NK OL lineę sibi mutuo æquidistant, erit OL ad NK ablata ad ablatam vt LM ad MK, id est vt GH ad HI, id est vt E ad F per hypothesim; & vt GH ad IH, sic NG est ad OI, residua ad residuam: igitur lineas abstulimus secundùm rationem E ad F, vt reliquę datam obtineant rationem reciprocè GH ad HI.

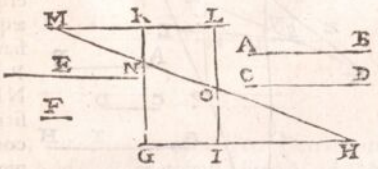


5. AB, CD lineę sint rursum inter se æquales, & ratio E ad F minor ratione GH ad HI:

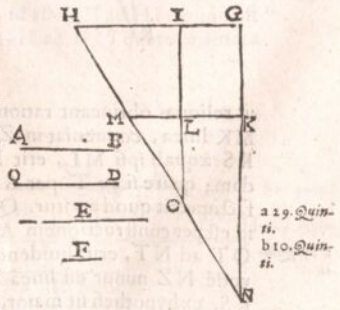


Dico addi non posse lineas secundùm rationem E ad F, vt compositæ rationem obtineant GH ad HI. patet: cùm ratio GH ad HI ponatur minor ratione E ad F; ratio verò E ad F aucta ratione æqualitatis, fiat minor ratione E ad F.

Iisdem positis: auferri poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant GH ad HI, reciprocè: erigantur enim ex G & I, parallelę GK, IL, æquales ipsis AB, CD: dein ex L per K, agatur linea LKM: factaque LM ad KM vt E ad F; ducatur recta MH occurrens GK, IL lineis in N & O: erit igitur LO ad NK, ablata ad ablatam, vt LM ad MK, id est vt E ad F; & NG ad OI, reliqua ad reliquam, vt GH ad IH.

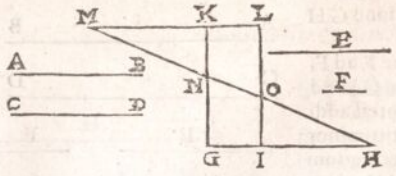


6. Sint iterum AB, CD lineæ æquales, & ratio E ad F, maior ratione GH ad HI;

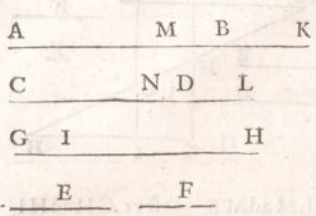


Dico addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem GH ad HI. Demittantur enim ex G & I, parallelæ GK, IL, datis AB, CD lineis æquales; & ex K per L agatur parallela GH recta KM, vt KM sit ad LM, sicut E ad F; tum ex H per M recta agatur HN; occurret illa lineis IL, GK in O & N: Cum enim ratio E ad F, id est KM ad LM, maior ponatur ratione GH ad HI, erit [a] diuidendo, ratio KL ad LM, maior ratione GI ad IH; adeoque LM recta minor [b] ipsâ HI. Quare & HM producta secabit lineas IL, GK in O & N: vnde NK est ad LO addita ad additam, vt KM ad LM, id est E ad F, & GN ad IO, tota ad totam, vt GH ad HI. Quod erat primum.

a 19. Quinti.
b 10. Quinti.



Iisdem positis, poterunt auferri lineæ, in ratione E ad F, vt residuæ datam habeant rationem G H ad H I reciprocè. Erigantur enim ex G & I parallelæ G K I L, æquales rectis A B C D; & ex L per K ducatur linea L K M, vt L M sit ad M K, quemadmodum est E ad F; ducaturque recta M H, occurrens G K I L lineis in N & O. patet L O ad N K ablatam ad ablatam esse, vt L M ad M K; id est E ad F; & N G ad O I, reliquam ad reliquam, vt G H ad H I. Quod erat demonstrandum.

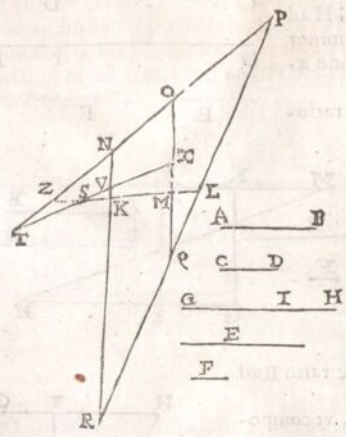


7. Sit A B maior rectâ C D, habeatque E ad F eandem rationem, quam A B ad C D, quæ & eadem sit cum ratione G H ad H I. Addi poterunt lineæ in ratione E ad F, vt compositæ, rationem habeant G H ad H I. addantur enim B K D L lineæ, secundùm rationem E ad F: Quoniam igitur per hypothesin, A B est ad C D, vt E ad F, id est per constructionem vt B K ad D L, erit [a] A K ad C L, vt A B ad C D, id est G H ad H I.

a 19. Quinti.

Iisdem positis: demi poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant G H ad H I: demantur enim B M, D N; Quoniam igitur est vt A B ad C D, sic E ad F, id est per constructionem B M ad N D, erit A M [b] ad C N, reliqua ad reliquam, vt A B ad C D, id est vt G H ad H I. Quod erat demonstrandum.

b Ibid.



8. Sit ratio A B ad C D inæqualitatis; & maior quidem, ratione G H ad H I; sit autem ratio E ad F, maior ratione A B ad C D.

Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ habeant rationem G H ad H I. Facto enim K L ad M L vt E ad F, erigantur ex K & M parallelæ, K N, M O, æquales ipsis A B, C D; iunctisque N, O, fiat vt G H ad H I, sic N P ad O P; & ex P per L linea agatur P R quæ (cùm ratio N P ad O P, id est G H ad H I, minor sit ratione K L ad M L, id est E ad F, adeoque P L nõ æquidistet ipsi O M) conueniet cum O M, N K lineis, in Q & R. Vnde patet M Q ad K R additam ad additam esse, vt K L ad L M, id est per constructionem vt E ad F; & O Q ad N R, totam ad totam, esse vt N P ad O P, id est G H ad H I. Iisdem positis:

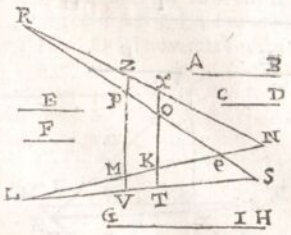
Dico demi posse lineas in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem G H ad H I. Producatur enim O N, donec cum M K linea, conueniat in Z: factoque O T ad N T, vt G H ad H I, & sumptâ K S æquali ipsi M L, erit N T maior ipsa N Z, & K S minor rectâ K Z, vt ostendam; quare si ex T per S agatur linea occurrens N K O M lineis, in V & X, factum erit quod petitur. Quoniam enim ratio O Z ad N Z, id est O M ad N K, id est per constructionem A B ad C D, maior ponitur ratione G H ad H I, id est O T ad N T, erit diuidendo, ratio O N ad N Z, [a] maior ratione O N ad N T: vnde N Z minor est lineâ N T. eodem modo cùm ratio E ad F, id est M S ad K S, ex hypothesi sit maior, ratione A B ad B C, id est O M ad N K, id est M Z

a 29. Quinti.

ad

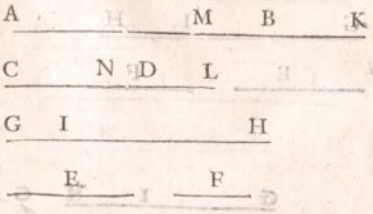
ad KZ, erit quoque dividendo, ratio MK ad KS, maior ratione MK ad KZ, quare & KS linea [b] minor lineâ KZ: & recta TS, secabit lineas OM, NK. vnde patet XM esse ad VK, ablatam ad ablatam, vt MS ad KS, id est vt E ad F; & OX esse ad NV, residuum ad residuum, vt OT ad NT, id est vt GH ad HI. [b] 10 *quinti*

9. Si fuerint AB, CD lineæ inæquales, & ratio E ad F eadem cum ratione GH ad HI, quæ minor sit ratione AB ad CD;



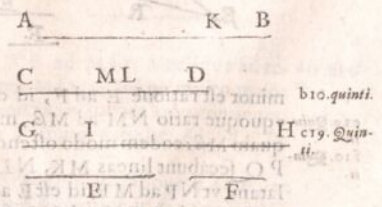
Dico addi posse lineas in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, reciprocè. Fiat enim vt E ad F sic KL ad ML. & MN ad KN; erectisque ex M & K, parallelis KO, MP, æqualibus, ipsis AB, CD; iungantur OP, fiatque vt GH ad HI, sic OK ad PR, & PS ad OS, & PO producta occurrat MN lineæ in Q, erit PS maior quàm PQ, & MQ minor quà MN, vt ostendâ; tũ recta ducatur SL; quæ secet MP OK lineas in V & T; Quoniam igitur MQ est ad KQ, vt PM ad OK, id est per constructionem vt AB ad CD, & MN ad KN, vt E ad F; sit autem ex hypothesi ratio AB ad BC, maior ratione E ad F, erit ratio MQ ad KQ, maior ratione MN ad KN, & dividendo, [c] ratio MK ad KQ, maior ratione MK ad KN, quare MQ linea minor est lineâ MN. eodẽ modo ostẽditur PQ recta minor rectâ PS. Vnde KT est ad MV addita ad additã vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT tota ad totam, vt PS ad OS, id est GH ad HI. Similiter additio fiet reciproca, si recta ducatur NR occurrens OK, PM lineis, in X & Z: erit enim XO ad ZB, addita ad additam, vt OR ad PR, id est per constructionem vt GH ad HI, id est ex hypothesi vt E ad F; & ZM ad XK, tota ad totam, reciprocè, vt MN ad KN, id est per constructionem vt P ad F, id est ex hypothesi vt GH ad HI. [c] 19. *Quinti.*

Iisdem positis: Dico addi non posse lineas in ratione E ad F, vt composita sit ad compositam, in ratione GH ad HI ordinatè; id est vt vtriusque rationis antecedentes sint in eadem linea: addantur enim secundùm rationem E ad F, lineæ BK, DL; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL sic BK ad DL, (quia ex hypothesi ratio E ad F, eadem est cum ratione GH ad HI) adeoque & AB ad CD, vt AK ad CL, id est vt GH ad HI; quod est contra Suppositum: nam ratio AB ad CD maior ponitur, ratione GH ad HI: quare ordinata additio non continget.



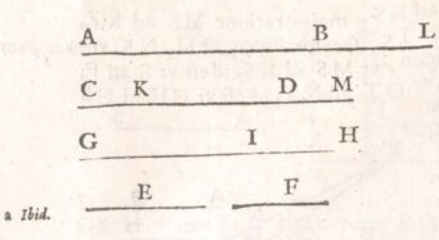
Sed neque hoc casu detractio ordinata, aut reciproca continget. Detrahantur enim ordinatim lineæ BM, DN, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AM ad CN, vt GH ad HI. Quoniam igitur AB ad CD, maiorem habet rationem, quàm BM ad DN, id est E ad F, erit AM reliqua [a] ad reliquam CN, in maiori ratione quàm AB ad CD; adeoque multò maiore quàm E ad F, id est GH ad HI; quod est contra hypothesim, cùm ponatur eadem cum ratione GH ad HI: quare ordinata detractionulla fiet. [a] 33. *Quinti.*

De reciproca detractione sic constabit: fiat vt E ad F sic LD ad KB; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Cùm igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi maior sit ratione AK ad CL, id est GH ad HI, fiat AK ad CM, vt AB ad CD; eritq; CM linea, [b] minor ipsâ CL: quare cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit quoque [c] KB ad MD, residua ad residuam vt AB ad CD; adeoque KB maior, quàm MD, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesim; non igitur detractio reciproca continget.



[b] 10. *Quinti.*

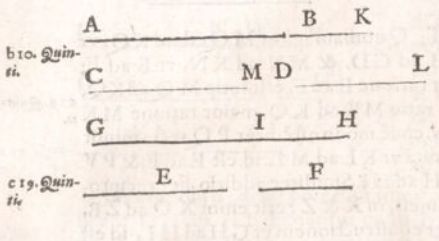
[c] 19. *Quinti.*



a *Ibid.*

10. Sint AB CB lineæ inæquales, & ratio E ad F, eadem cum ratione GH ad HI, quæ maior sit ratione AB ad CD.

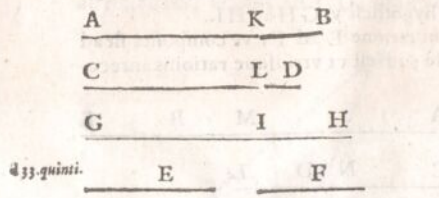
Dico additionem, neque ordinatam, neque reciprocam fieri posse. Addantur enim ordinatim in ratione E ad F, lineæ BL, DM. & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam est BL ad DM, vt AL ad CM, igitur erit quoque [a] ratio AB ad CD, eadem cum BL ad DM, hoc est E ad F, vel GH ad HI. quod est contra suppositum; ponitur enim ratio AB ad CD minor ratione E ad F. sed neque reciproca additio continget: fiat enim vt E ad F, sic DL ad BK, addita ad additam, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI. Fiatq; vt GH ad HI, sic AB ad CM [b] erit CM minor quàm CD, quia ratio AB ad CD minor est ratione GH ad HI, id est AB ad CM. igitur cùm sit vt AK ad CL, id est GH ad HI, sic AB ad CM, erit [c] BK ad ML, residuum ad residuum vt AB ad CM; adeoq; BK maior ipsa ML, & multo maior quàm LD. Quod est contra hypothesin: quare nec additio reciproca continget.



b 10. *Quinti.*

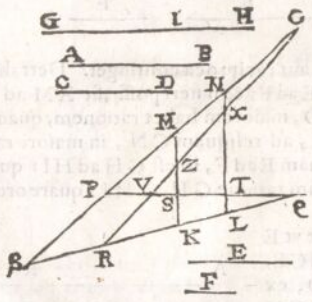
c 19. *Quinti.*

Iisdem positis, neque ordinata detractio continget: detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, ex hypothesi minor est ratione E ad F, id est KB ad LB, ablatæ ad ablatam, erit [d] ratio AK ad CL, reliquæ ad reliquam, minor ratione AB ad CD. adeoque multo minor ratione KB ad LD, id est GH ad HI: quod est cõtra suppositum: quare detractio ordinata non continget.



d 33. *quinti.*

Continget verò detractio reciproca hoc modo. Erigantur duæ parallelæ KM, LN, æquales ipsis AB CD; iunctisque punctis MN, KL fiat vt E ad F, sic MO ad NO, & NP ad MP, item vt GH ad HI, sic KQ ad LQ, & LR ad KR: cadent R & P intra concursum linearum OP, QR, vt ostendam: quare rectæ ducantur RO, PQ; & PQ quidem secet lineas KM, NL in S & T. RO verò lineam PQ in V, & rectas MK, LN in Z & X conueniant OP. RQ lineæ in β. Quoniam ratio AB ad CD, id est per constructionem MK ad NL, id est Nβ ad Mβ, minor est ratione E ad F, id est per constructionem PN ad MP, erit diuidendo, [e] quoque ratio NM ad Mβ, minor ratione NM ad MP; adeoque MP linea [f] minor quam Mβ: eodem modo ostenditur KR linea minor quàm Kβ: quare iunctæ RO, PQ secabunt lineas MK, NL, vt dictum est: vnde NT est ad MS, ablata ad ablatam, vt NP ad MP, id est E ad F, & SK est ad TL, reliqua ad reliquam, vt SQ ad TQ, id est GH ad HI: similiter erit MZ ad NX, ablata ad ablatam, vt MO ad



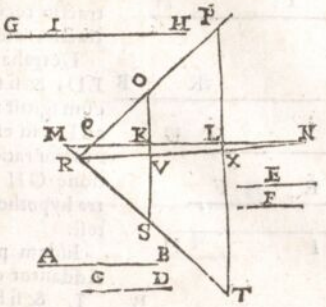
e 19. *Quinti.*

f 10. *Quinti.*

ad NO; id est E ad F, & XL ad ZK, reliqua ad reliquam, vt LR ad KR, id est GH ad HI.

11. Sint iterum AB CD lineæ inæquales, & ratio GH ad HI minor ratione AB ad CD; ratio autem E ad F minor ratione GH ad HI:

Dico tam ordinatim quàm reciprocè addi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI. fiat enim vt E ad F sic LM ad KM, & KN ad LN: erectisque ex K & L parallelis KO, LP, quæ rectis AB CD, sint æquales, iungantur puncta PO, fiatque vt GH ad HI, sic PR ad OR; occurrat autem PO recta ipsi LM in Q, erit OR maior rectâ OQ, & LQ minor ipsa LM: vt ostendam: quare ductâ ex M per R linea MR, occurret OK, PL lineis in S & T: iunctaque RN, eadem secabit in V & X. Quoniam ergo ratio LM ad KM, id est per constructionẽ ratio E ad F minor est ratione LQ ad KQ, id est LP ad OK, id est AB ad CD, erit diuidendo, [a] quoque ratio LK ad KM, minor ratione LK ad KQ, adeoque LM linea, [b] maior recta LK: eodem modo ostenditur OR recta maior rectâ OQ. Vnde LT ad KS, ordinatim addita ad additam est vt LM ad KM, id est E ad F; & TP est ad SO, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI. igitur ordinatim lineas adiecimus, &c.

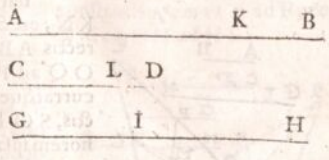


[a] 29. Quinti.

[b] 10 Quinti.

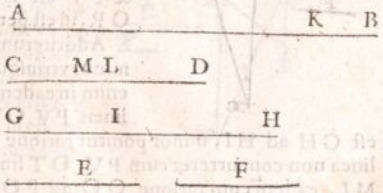
Reciprocè verò posse rectas adiici, in ratione E ad F, &c. sic ostendo. VK est ad LX addita ad additam, vt KN ad LN, id est per constructionem vt E ad F; & XP est ad OV tota ad totam, vt PR ad OR; id est GH ad HI; igitur, &c.

Iisdem positis: Dico detractionem tam ordinatam, quàm reciprocam fieri non posse. Detrahantur enim ordinatim lineæ KB LD, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad LC, vt GH ad HI: Quoniam igitur ratio AB ad CD maior ponitur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit quoque ratio AK ad CL residui ad residuum, [c] maior ratione AB ad CD, quod est contra hypothesim; cùm ratio AK ad CL id est GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. quare ordinata detractio non continget.



[c] 33. Quinti.

De reciproca detractione sic constabit. Detrahantur reciprocè LD KB, in ratione E ad F: & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; fiat deinde vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit recta CM minor quàm CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior ponitur ratione GH ad HI, id est AK ad CL. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, ablata ad ablatam, erit KB ad MD, [d] reliqua ad reliquam, vt AK ad CM: & KB linea, maior lineâ MD: adeoque multo maior rectâ LD. Quod est contra hypothesim: quare detractio reciproca non continget.



[d] 19. Quinti.

12. Sint AB CD lineæ inæquales, & ratio E ad F minor ratione AB ad CD, maior verò ratione GH ad HI:

Dico neque ordinatim, nec reciprocè lineas posse detrahi, in ratione E ad F, vt reliquæ obtineant rationem GH ad HI: demãtur enim reciprocè in ratione E ad F, rectæ



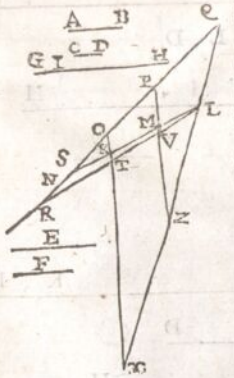
rectæ LD KB, & si fieri possit, sit AK ad CL vt GH ad HI, fiatque vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit CM minor ipsa CL, quia ratio AB ad CD, id est AK ad CM, maior est ratione GH ad HI, id est AK ad CL, cùm igitur sit vt AB ad CD, sic AK ad CM, erit & KB ad MD, residuum ad residuum, vt AK ad CM; adeoque KB maior ipsa MD, & multo maior recta LD. Quod est contra hypothesin: quare detractio reciproca non continget. Sed neque ordinata detractio, casu hoc continget.

a 33. Quinti.

Detrahantur enim in ratione E ad F, lineæ KB LD; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. cùm igitur ratio AB ad CD, maior ponatur ratione E ad F, id est KB ad LD, erit & ratio AK ad CL, a maior ratione AB ad CD; adeoque multo maior ratione GH ad HI, id est AK ad CL. Quod est contra hypothesim. Igitur neque ordinata detractio fieri potest.

b Ibid.

Iisdem positis, neque additio ordinata continget. Addantur enim in ratione E ad F, lineæ BL, DM: & si fieri possit, sit AL ad CM, vt GH ad HI. Quoniam igitur ratio AL ad CM, id est GH ad HI, minor ponitur ratione E ad F, id est BL ad DM, erit b ratio AB ad CD, minor ratione AL ad CM, id est GH ad HI. Quod est contra hypothesim; quare nec ordinata additio continget.

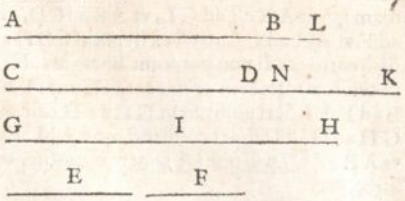


Iisdem positis additio reciproca fieri poterit: fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN, erectisque ex M & K parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD sint æquales, iungantur OP, & fiat OQ ad PQ, item PR ad OR, vt GH ad HI, occurratque PR linea, rectæ MN in S; patet ex sæpè dictis, SO lineam minorem esse rectâ OR, & SK minorem ipsa KN; quia ratio AB ad CD, id est MP ad OK, id est PS ad OS, maior est ratione GH ad HI, id est PR ad OR; item MS ad KS, maior ratione MN ad KN, id est E ad F. Quare iuncta RL secabit rectas, OK PM, in T & V. Vnde KT est ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & PV ad OT, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI.

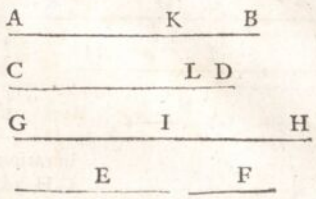
Addi iterum poterunt lineæ in ratione E ad F, vt OK minor vtriusque rationis antecedentes habeat: ducatur enim in eadem figura, ex Q per L recta; occurret illa lineis PV OT in Z, & X; quia ratio OQ ad PQ, id est GH ad HI, minor ponitur ratione KL ad LM, id est E ad F; nam si LQ linea non concurreret cum PV, OT lineis, sed illis æquidistaret, esset ratio KL ad ML, eadem cum ratione OQ ad PQ. Quod est contra hypothesim: occurret igitur LQ linea, rectis PV, OT in Z & X. Vnde KX est ad MZ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F. & OX ad PZ, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

13 Sint AB CD lineæ inæquales; ratio verò GH ad HI, minor ratione E ad F; quæ maior sit ratione AB ad CD. fieri non poterit additio reciproca. addantur enim DK, BL in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AL ad CK vt GH ad HI: dein fiat vt AB ad CD, ita BL ad DN; erit DN linea minor recta

recta DK, cum ipsa BL minor ponatur rectâ DK, adeoque tota CN minor, CK. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic BL ad DN, & componendo, vt AB ad CD, sic AL ad CN, erit ratio AL ad CN, minor ratione GH ad HI, id est per constructionem ratione AL ad CK. quod fieri non potest; cùm CN linea minor sit recta CK: quare additio reciproca non continget.



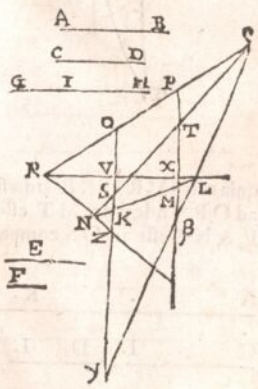
Neque etiam ordinata detractio fieri poterit: demantur enim lineæ KB, LD in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI; Quoniam igitur ratio AB ad CD, minor ponitur ratione KB ad LD, siue E ad F, erit ratio AK ad CL, id est GH ad HI, [a] minor ratione AB ad CD, quod est contra Suppositum: quare ordinata detractio non continget.



[a] 33. Quinti.

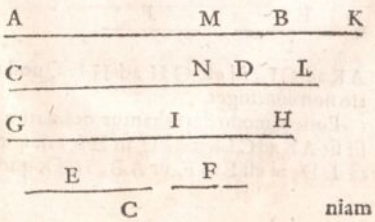
Detrahi tamen poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt reliquæ reciprocè habeant rationem GH ad HI. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, & MN ad KN; erectisque ex K & M parallelis KO, MP, quæ rectis AB, CD, sint æquales, iungantur OP; & fiat vt GH ad HI, sic OQ ad PQ, & PR ad OR: ostendetur vt in casu decimo huius propositionis puncta N & R, esse intra concursum linearum LN, QR, quare ductæ RL, NQ secabunt lineas OK, PM: & NQ quidem illas secet in S T, recta verò RL eisdem occurrat in V & X. patet TM esse ad SK, ablatam ad ablatam, vt MN ad KN, id est per constructionem vt E ad F, & SO esse ad PT, residuam ad residuam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

Addi etiam poterunt ordinatim lineæ in ratione E ad F, vt compositæ rationem habeant GH ad HI, agatur enim ex R per N linea RN, occurret illa rectis OK, PM: quod sæpius ostensum est, cùm ratio XR ad VR, id est PR ad OR, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione E ad F, id est MN ad KN. occurrat igitur in Z & α. erit Mα ad KZ, addita ad additam, vt MN ad KN; id est E ad F, & Tα ad OK, composita ad compositam, vt PR ad OR, id est GH ad HI.



Rursum addi possunt lineæ vt minor OK, vtriusque rationis, habeat antecedentes; ducatur enim ex Q per L recta, quæ cùm OK, PM lineis conueniet vt ostensum sæpius; quia ratio OQ, ad PQ minor est ratione KL ad ML: conueniat igitur in β & γ erit Kγ ad Mβ, addita ad additam, vt KL ad ML, id est per constructionem vt E ad F, & Oγ ad Pβ, tota ad totam, vt OQ ad PQ, id est GH ad HI.

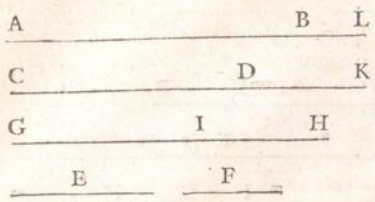
14 Sint iterum rectæ AB, CD inæquales, ratio verò E ad F maior ratione AB ad CD; quæ eadem sit, cum ratione GH ad HI: neque addi, neque demi ordinatim poterunt lineæ, in ratione E ad F, vt compositæ vel reliquæ, rationem habeant GH ad HI. addantur enim ordinatim lineæ BK, DL, in ratione E ad F; & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI. Quo-



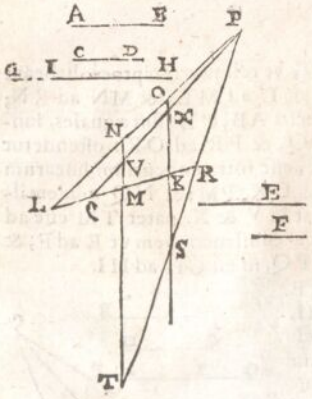
C niam

a 19. Quinti. niam igitur AK est ad CL, vt AB ad CD, erit a reliqua BK ad DL reliquam, id est E ad F, vt AK ad CL, id est ex hypothesi GH ad HI. Quod est contra Suppositũ. Quare ordinatim addi non poterunt lineæ, &c. Neque demi possunt lineæ in ratione E ad F vt residuæ rationem obtineant GH ad HI, auferantur enim lineæ MB, ND in ratione E ad F, & si fieri possit, sit vt GH ad HI, sic AM ad CN, cũ igitur sit vt AB ad CD, sic

b 19. Quinti. GH ad HI, id est per constructionẽ AM ad CN, erit b MB reliqua ad reliquam ND, vt AB ad CD; Quod est contra hypothesin. Quare neque ordinatim demi poterunt lineę, &c.



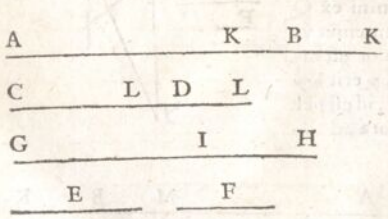
Iisdem positis; neque additio reciproca fieri poterit. addantur enim lineę DK, BL, secundùm rationem E ad F, & si fieri possit, sit AL ad CK vt GH ad HI. erit igitur AL ad CK, vt AB ad CD, & BL reliqua ad reliquam DK, vt AB ad CD: quare BL maior quàm DK. Quod est contra hypothesin. Vnde additio reciproca fieri non poterit.



c 10. Quinti.

Poterunt tamen detrahi reciprocè lineæ in ratione E ad F, vt reliquę rationem obtineant GH ad HI. fiat enim KL ad ML, vt GH ad HI, erectisque ex K & M parallelis KO MN, quæ æquales sint lineis AB, CD, ducatur recta ON; occurret illa lineę KL in L; quia OL est ad NL, vt OK ad NM, id est vt AB ad CD, id est GH ad HI; id est per constructionem vt KL ad ML: dein OP facta æquali ipsi NL fiat vt E ad F, sic KQ ad MQ, ducaturque recta QP: occurret illa lineis OK, NM, quia ratio OL ad NL, id est GH ad HI, id est ratio KL ad ML, minor ponitur ratione E ad F, id est KQ ad MQ: adeoque MQ linea c minor rectâ ML: secet igitur PQ linea, rectas OK, NM in V & X: patet VM esse ad XK ablatam ad ablatam, vt KQ ad MQ, id est E ad F: & NV esse ad OX, residuum ad residuum, vt NP ad OP id est GH ad HI.

Addi etiam poterunt lineæ in ratione E ad F, vt minor vtriusque rationis habeat antecedentes. Factâ enim KR æquali ipsi MQ, ducatur recta PR: occurret illa lineis OK, NM in S & T: quia ratio MR ad KR, id est E ad F, maior ponitur ratione GH ad HI, id est NP ad OP. Vnde patet MT esse ad KS, additã ad additam vt MR ad KR, id est E ad F, & NT esse ad OS, compositam ad compositam, vt NP ad OP, id est GH ad HI.

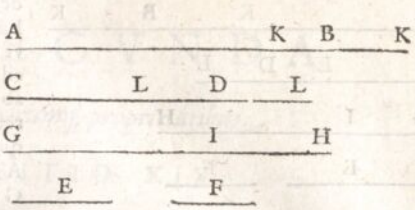


15 Sit iterum ratio AB ad CD, eadem cum ratione GH ad HI, quæ maior sit ratione E ad F; dico ordinatim addi, nec demi posse lineas, in ratione E ad F, vt compositę, vel reliquę, rationem habeant GH ad HI; addantur enim lineæ BK, DL in ratione E ad F, & si fieri possit, sit AK ad CL, vt GH ad HI: erit igitur vt AK ad CL, sic AB ad CD; vnde & BK ad DL, id est per constructionem E ad F, vt AK ad CL, id est GH ad HI: Quod est contra hypothesim: igitur ordinata additio non continget.

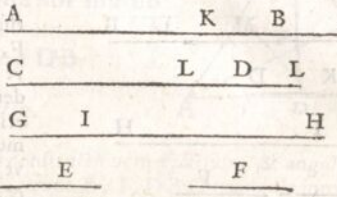
Eodem modo detrahantur ordinatim BK, LD, in ratione E ad F; & si fieri possit sit AK ad CL, vt GH ad HI; erit igitur AK ad CL, vt AB ad BC, quare & BK ad LD, id est E ad F, vt AB ad CD, quod est contra hypothesim. igitur, &c.

Neque

Neque etiam addi, vel demi reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt reſiduæ vel compoſitæ rationem habeant G H ad H I. addantur enim D L, B K in ratione E ad F, & ſi fieri poſſit ſit A K ad C L, vt G H ad H I: erit igitur vt A K ad C L, ſic A B ad C D, quare & B K ad D L, eſt vt A B ad C D, adeoque B K maior ipſa D L; Quod eſt contra hypotheſim: ergo, &c. eodem modo oſtenditur detractionem reciprocam fieri non poſſe.



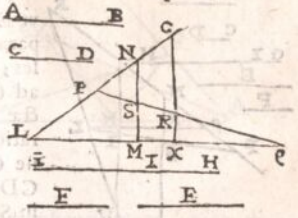
16 Sit ratio E ad F eadem cum ratione A B ad C D, minor autem ratione G H ad H I: dico ordinatim addi nec demi poſſe lineas in ratione E ad F, ſic vt compoſitæ vel reliquæ, rationem habeant G H ad H I. addantur enim B K, D L in ratione E ad F, & ſi fieri poſſit ſit A K ad C L, vt G H ad H I: erit igitur ratio A K ad C L, id eſt G H ad H I, maior ratione B K ad C L, id eſt E ad F, quare & ratio A B ad C D a maior ratione A K ad C K, id eſt G H ad H I, Quod eſt contra hypotheſim: igitur ordinata additio non continget.



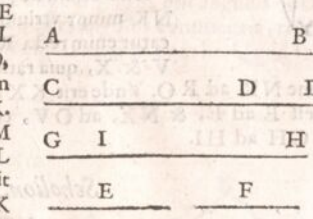
a 33. Quinti.

Eodem plane modo oſtenditur, ordinatam detractionem fieri non poſſe:

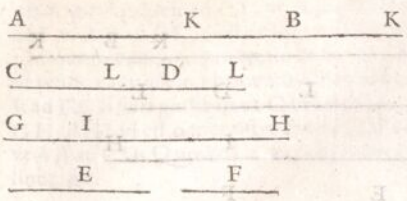
Detrahi tamen reciprocè poterunt lineæ in ratione E ad F, vt reliquæ rationem habeant G H ad H I. Fiat enim vt E ad F, ſic X L ad M L & M Q ad X Q, erectiſque ex X & M, parallelis X O, M N, quæ lineis A B, C D, ſint æquales; ducatur O N linea, quæ occurret X L lineæ in L, quia O X eſt ad N M, id eſt A B ad C D, vt X L ad M L, id eſt E ad F; dein fiat vt G H ad H I, ſic O P ad N P, erit N P linea minor lineâ N L, quia ratio O P ad N P, id eſt G H ad H I, maior ponitur ratione O L ad N L, id eſt X L ad M L, id eſt E ad F vt ſæpiùs oſtenſum: quare iuncta P Q ſecabit lineas O X, N M in R & S: eritque S M ad R X ablata ad ablatam, vt M Q ad X Q, id eſt E ad F, & reciprocè O R ad N S, vt O P ad N P, id eſt G H ad H I.



Addi verò reciprocè lineæ non poterunt in ratione E ad F, &c. addantur enim lineæ D L B K in ratione E ad F, & ſi fieri poſſit, ſit A K ad C L vt G H ad H I. Fiatque vt A B ad C D, ita B M ad D L, erit B M maior quàm D L, adeoque multo maior ipſa B K. cùm igitur ſit vt A B ad C D, ſic B M ad D L, & componendo, A M ad C L vt B M ad D L, id eſt A B ad C D, erit ratio A M ad C L minor ratione A K ad C L, id eſt G H ad H I; Quod fieri non poteſt, cùm A M recta maior ſit rectâ A K. quare reciproca additio non continget.

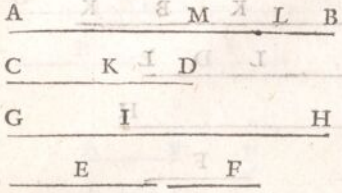


17 Sit iterum ratio E ad F inæqualitatis, & eadem cum ratione A B ad C D, quę maior ſit ratione G H ad H I, dico ordinatim lineas in ratione E ad F demi vel addi non poſſe, vt reliquæ vel compoſitæ rationem habeant G H ad H I.



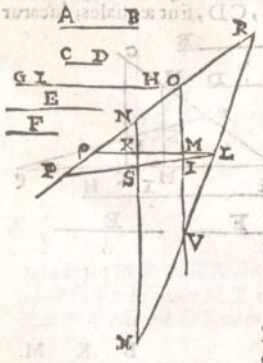
demantur enim in ratione E ad F, lineæ BKLD, sitque si fieri possit AK ad CL, vt GH ad HI; cum igitur sit vt AB ad CD, sic E ad F, id est KB ad LD, ablata ad ablatam; erit & AK ad CL reliqua ad reliquam, vt AB ad CD; quod est contra hypothesim: cum ratio AK ad CL, id est per constructionem GH ad HI, minor ponatur ratione AB ad CD. Quare ordinata detractio non continget.

Eodem modo probatur ordinatam additionem fieri non posse.



a 3. Quinti.

Sed neque detractio reciproca continget: demantur enim in ratione E ad F, lineæ KD, LB; & si fieri possit, sit vt GH ad HI, sic AL ad CK: fiat dein vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit MB maior, quàm KD, adeoque multo maior rectâ LB. igitur cùm sit vt AB ad CD, sic MB ad KD, erit & AM ad CK, vt AB ad CD; sed ratio AM [a] ad CK, minor est ratione AL ad CK, igitur & ratio AB ad CD minor est ratione AL ad CK, id est GH ad HI: Quod est contra hypothesim. quare nec reciprocè lineæ detrahi poterunt in ratione E ad F, &c.



Poterit tamen fieri additio reciproca, &c. Fiat enim vt E ad F, sic KL ad ML, erectisque ex K & M parallelis KN, MO, quæ AB, CD lineis sint æquales; ducatur recta ON, fiatque OP ad NP, item NR ad OR, vt GH ad HI: occurratque OP linea rectæ KM in Q; erit NQ linea minor rectâ NP, quia ratio OP ad NP, id est GH ad HI, minor est ratione OQ ad NQ, id est OM ad NK, siue AB ad CD: quare & iuncta PL secabit lineas NK, OM, in S & T. Vnde KS est ad MT, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & OT ad NS, vt OP ad NP, id est GH ad HI.

Addi etiam sic poterunt lineæ in ratione E ad F, vt NK minor vtriusque rationis habeat antecedentes. ducatur enim recta RL: occurret illa lineis OM NK in V & X, quia ratio KL ad ML id est E ad F maior ponitur ratione NR ad RO. Vnde erit KX ad MV, addita ad additam, vt KL ad ML, id est E ad F, & NX, ad OV, composita ad compositam, vt NR ad RO, id est GH ad HI.

Scholion.

Possent in hac propositione plures casus determinari, & aliqui etiam, quibus propositio absolui non potest; sed ne tædium Lectori adferam, consultò abstinui: satis esse ducens, viam ad reliquas determinationes Geometriæ studioso aperuisse.

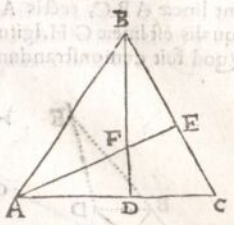
PARS

PARS SECVNDA.

De Triangulis, eorumq; proprietatibus.

PROPOSITIO XIX.

ESto A B C triangulum Isosceles, habens A B, A C, latera æqualia; ducanturq; ex A & B normales A E, B D, ad opposita latera, occurrentes sibi mutuo in F.



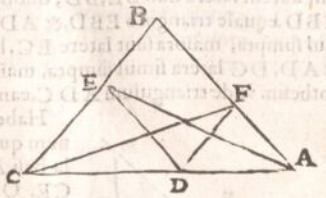
Dico esse A F ad B C, vt A D ad D B.

Demonstratio.

QVoniam anguli A E B, B D C, per constructionem recti sunt, & angulus E B F, communis triangulis E B F, D B C, erunt E B F, D B C triangula inter se similia. Eodem modo ostenditur triangulum A F D, simile triangulo D B C: vnde vt A D ad D B, sic A F ad B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

EX quouis puncto baseos trianguli A B C Isosceles eductæ D F, D E exhibeant angulos æquales E D C, F D A, iunganturque A E, C F.



Dico A E D, C F D triangula esse inter se æqualia.

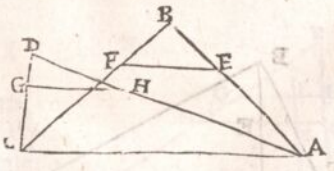
Demonstratio.

CVm enim tam angulus F D A, angulo E D C per constructionem, quàm angulus F A D, angulo E C D æqualis sit, erunt A F D, C E D triangula inter se similia. Quare vt A D ad D C, sic F D ad E D. Rursum cum angulus F D A, æquetur angulo E D C, addito communi angulo E D F, erit angulus E D A, æqualis angulo C D F. Vnde cùm & latera, æquales angulos continentia, reciprocè sint proportionalia, [a] erunt A E D, C F D triangula inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. *Sexti.*

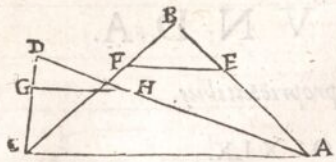
PROPOSITIO XXI.

SInt duo triangula Isoperimetra A B C, A D C, super eadem basi A C constituta; diuisisq; A B, C D lateribus proportionaliter in E & G, ducantur E F, G H parallelæ basi A C:



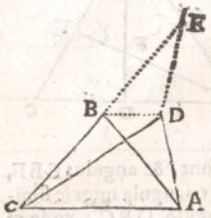
Dico Isoperimetra quoque fore E B F, D G H triangula.

Demonſtratio.



QVoniam in triangulis ABC, ADC proportionaliter ſectæ ſunt lineæ ſuper baſi erectæ erunt vt ABC ſimul ſumptæ, ad EBF ſimul ſumptas, ita ADC ſimul ſumptæ ad HDG ſimul ſumptas, & permutãdo vt ABC latera ad latera ADC, ſic EFB ad HDG ſimul ſumpta; ſed ex ſuppoſitione æquales ſunt lineæ ABC, rectis ADC: Ergo etiam EBF, rectis HDG. Sed & recta FE æqualis eſt lineæ GH. Igitur Iſoperimetra quoque ſunt triangula EBF & HDG. Quod fuit demonſtrandum.

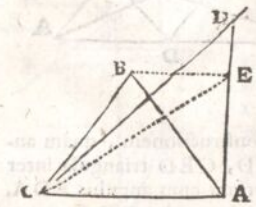
PROPOSITIO XXII.



TRiangulorum Iſoperimetrorum ſuper eadem baſi conſtitutorum, maximam habet altitudinem Iſoſcelium.

Demonſtratio.

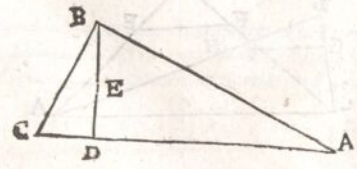
SInt ABC, ADC triangula iſoperimetra, & ABC quidem iſoſcelium; dico ABC maioris eſſe altitudinis quàm ſit ADC. Habeat enim ſi fieri poſſit triangulum ADC, eandem cum ABC triangulo altitudinem: producatur CB in E, vt BE linea ſit æqualis lineæ CB; iunganturque BD, ED. Quoniam AC, BD lineæ ex ſuppoſitione ſunt parallelę, erit angulus ABD, æqualis angulo CAB, id eſt angulo ACB, id eſt angulo EBD; ſunt autem latera duo BE, BD, duobus AB, BD lateribus æqualia; igitur triangulũ ABD æquale triangulo EBD, & AD latus, lateri ED æquale. Sed ED, DC latera ſimul ſumpta, maiora ſunt latere EC, hoc eſt lateribus AB, BC ſimul ſumptis; igitur & AD, DC latera ſimul ſumpta, maiora ſunt lateribus AB, BC. Quod eſt cõtra hypotheſin. vnde triangulum ADC, eandẽ non habet altitudinẽ cum triangulo ABC.



Habeat iam ADC triangulum, maiorem altitudinem quàm ABC; ducatur ex B linea BE, parallela baſi AC, occurrens AD lateri in E; iunganturq; CE. Quoniam AEC triangulum, eandem habet altitudinem cũ triangulo ABC, & ABC ſit Iſoſcelium; erunt AE, CE latera ſimul ſumpta, maiora lateribus AB, BC ſimul ſumptis per primam partem huius propoſitionis; ſed AD, DC latera maiora ſunt lateribus AE, EC; cùm E cadat infra D, igitur & latera AD, DC, multo maiora ſunt lateribus AB, BC. Quod eſt contra hypotheſim. igitur triangulum ADC, maiorem non habet altitudinem triangulo ABC; ſed neque æqualem habet; igitur triangulorum iſoperimetrorum ſuper eadem baſi conſtitutorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

Propoſitio hæc aliter demonſtratur libro noſtro de Ellipſi.

PROPOSITIO XXIII.



ESto ABC triangulum rectangulum, & ex B, ad AC baſim, demiſſa normalis BD.

Dico ABC triangulum, ad tria laterum quadrata, eam habere rationem, quam BD linea ad quadruplum lineæ AC.

Demon-

Demonstratio.

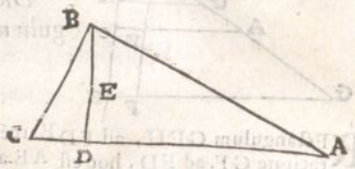
QVoniam Angulus ABC ponitur rectus, & BD normalis, erunt ABD, ABC triangula similia, & AB ad BD, vt AC ad CB, vnde ABC [a] rectangulum æquale rectangulo AC, BD, sed AC, BD rectangulum, est ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam [b] AC; igitur & ABC rectangulum, est ad quadratum AC, vt BD linea ad lineam AC; est autem quadratum AC, æquale quadratis [c] AB, BC, igitur rectangulum ABC, est ad tria laterum AB, BC, CA quadrata vt idem rectangulum, ad quadratum AC bis sumptum; id est vt BD linea ad AC lineam bis sumptam, sed ABC triangulum, dimidium est rectanguli ABC, igitur triangulum ABC, ad AC quadratum bis sumptum, id est ad tria laterum quadrata, illam habet rationem, quam BD linea, ad quadruplum lineæ AC. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. *Sexti.*
[b] 1. *Sexti.*
[c] 47. *Primi.*

PROPOSITIO XXIV.

ILsdem positis, diuidatur BD bifariam in E.

Dico ABC triangulum, ad quadratum BC, eam habere rationem, quam habet ED linea, ad lineam DC.

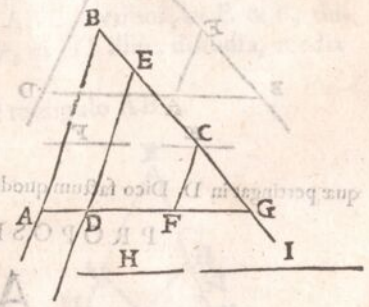


Demonstratio.

QVoniam BD linea in E diuisa est bifariam, erit ABC triangulum, æquale rectangulo AC DE; nam in præcedenti propositione ostensum est, rectangulum ABC, æquale rectangulo super AC & BD: rursum cùm ABC angulus sit rectus, & BD normalis, erit ACD rectangulo, æquale quadratum BC; quare ABC triangulum, est ad quadratum BC, vt AC DE rectangulum, ad rectangulum ACD, id est vt ED linea, ad lineam DC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

LAteri AB, anguli ABC, æquidistet DE. oportet per F punctum intra angulum DEC, rectam ponere AG, vt AD ad FG, datam habeat rationem H ad I.

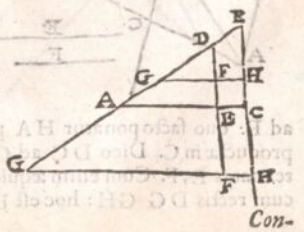


Constructio, & demonstratio.

DVcatur FC, quæ æquidistet ipsi AB; & fiat vt H ad I, sic BE ad CG: deinde ponatur GFA. Dico factū quod requiritur. cùm enim sit tam EB ad AD quàm CG ad FG, vt EG ad DG, (ob AB, ED, CF parallelas) erit EB ad AD, vt CG ad FG; & permutando AD ad FG vt BE ad CG; id est per constructionem vt H ad I. igitur &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

IN dato triangulo ABC, parallelam vni laterum constituere, rectam DE: vt quadratum ED, æquale sit AEC, rectangulo.



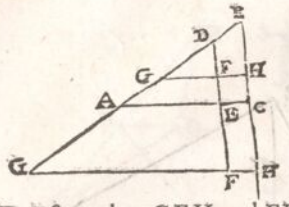
Con-

Constructio & demonstratio.

a *Per elementa.*

VT AC quadratum, ad CB quadratum, ita fiat linea AE ad a EC: & erigatur ED, quæ æquidistet ipsi BC. Dico ED soluere problema; quoniam enim DE æquidistat rectæ BC, erit quoque quadratum AE, ad ED, vt AC quadratum, ad CB: hoc est vt linea AE, ad EC: igitur sunt tres in continua ratione AE, ED, EC. cum ratio quadrati AE, ad DE quadratum, hoc est ratio AE, ad EC, duplicata sit rationis AE lineæ, ad ED lineam; est igitur quadratum DE, æquale rectangulo AEC. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO XXVII.



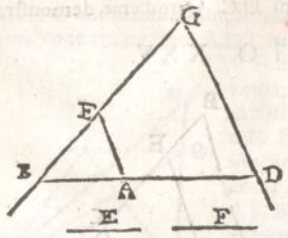
ILsdem positis constituatur GH, quæ æquidistet basi AC.

Dico rectangulo GFH æquari rectangulum FDE.

Demonstratio.

REctangulum GFH, ad FDE rectangulum, rationem habet compositam, ex ratione GF, ad FD, hoc est AE ad ED; & ex ratione FH, ad ED, hoc est EC ad ED; si igitur fiat vt EC, ad ED, ita ED ad aliam, erit illa per præcedentem ipsa AE: igitur vt AE ad AE, ita rectangulum GFH ad FDE: patet igitur æqualia esse rectangula illa inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

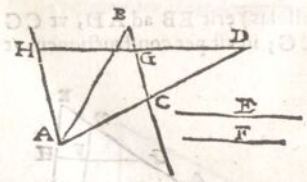


DAto A. puncto, intra angulum BCD, per illud lineam BAD ducere, quæ diuisa sit in A iuxta datam rationem E ad F.

Constructio, & demonstratio.

POnatur AE, æquidistans ipsi DC: & fiat vt E ad F, ita CE ad EB; deinde ex B, per A ducatur recta BAD, quæ pertingat in D. Dico factum quod quæritur: manifestum est ex elementis.

PROPOSITIO XXIX.



ADato puncto D extra angulum ABC. rectam ponere quæ diuidatur secundùm datam rationem à lineis angulum constituentibus.

Constructio & demonstratio.

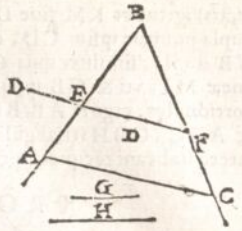
SIt data ratio E ad F, & ex D puncto ducatur quæuis GH: Ita vt sit DG ad GH vt E ad F: quo facto ponatur HA parallela ipsi BG. & ducatur DA, occurrens BG productæ in C. Dico DC ad CA, eandem rationem continere, quæ reperitur inter datas E, F. Cùm enim æquidistent AH, CG. erunt in eadem ratione DC, CA, cum rectis DG GH: hoc est E & F. præstitimus igitur quod requisitum fuit.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [81] - 24
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXX.

DAtoangulo ABC, & D puncto extra lineas datas: rectam DF ponere quæ rectas EB BF auferat, in data ratione G ad H.



Constructio & demonstratio.

FIat vt G ad H, ita BA ad BC. iunctæque AC ducatur DF æquidistans: patet ex elementis factum esse quod petitur.

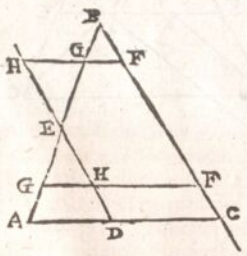
PROPOSITIO XXXI.

ESto ABC trianguli basis AC; quâ diuisâ in D, vt DE recta æquidistans lateri BC, media quoque sit, inter AD, DC: ducatur quæuis GF, parallela basi AC, occurrens ED lineæ in H.

Dico GHF rectangulum, æquari rectangulo DEH.

Demonstratio.

ESt enim vt AD ad DE, sic GH ad HE; quia AD, GH lineæ æquidistant; sed vt AD ad DE, sic DE est ad DC, ex hypothesi; ergo etiam vt GH ad HE, sic DE ad DC: est autem HF ipsi DC [a] æqualis, igitur vt GH ad HE, sic DE ad HF: & GHF rectangulum, [b] æquale rectangulo DEH. Quod fuit demonstrandum.



a 34. Primi.

b 17 Sexti.

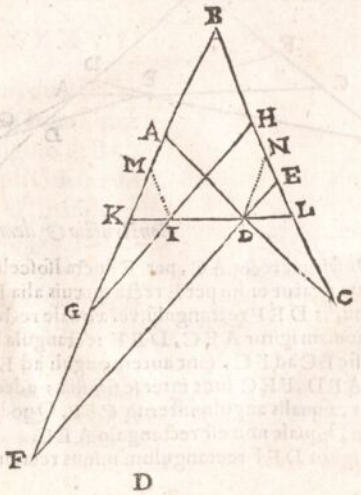
PROPOSITIO XXXII.

ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D; actâque per D lineâ EF, occurrente trianguli ABC lateribus, in E & F, ducatur quædam HG parallela rectæ EF, vt HI illius dimidia, media quoque sit inter ED & DF;

Dico GBH triangulum, æquale esse triangulo ABC.

Demonstratio.

ACtâ per D & I, lineâ KL, erigantur ex I & D lineæ IM, DN: & IM quidem lateri CB; DN verò AB lateri parallela. Vt FD ad GI, sic GI est ad DE per hypothesim, sed vt FD ad GI, sic DK est ad IK, & vt IH ad DE, sic IL ad DL, igitur vt DK ad IK, sic IL ad DL, & diuidendo vt DI ad IK, sic DI ad DL: quare IK, DL lineæ sunt inter [c] se æquales. ac proinde cùm (vt ex constructione patet,) triangula KMI, DNL, singula triangulo KBL similia sint, erunt & inter se similia, adeoque (cùm IK, DL rectæ æquentur) erunt & inter se æqualia; latusque KM,



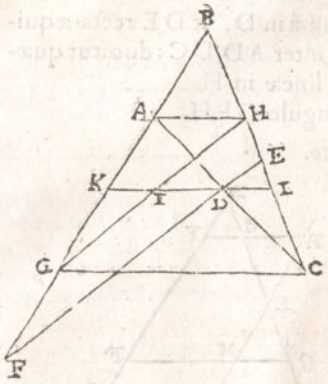
c 9. Quinti.

D lateri

lateri D N, & M I latus, N L lateri æquale: Rursum est vt K I ad I L, sic K M ad M B, & vt L D ad D K, sic L N ad N B. sed vt K I ad I L, sic L D ad D K, (ex antè dictis) igitur vt K M siue D N ad M B, sic L N siue I M ad N B : sed quia C A dupla ponitur ipsius C D, erit & A B ipsius D N, & C B ipsius C N, id est rectæ N B dupla : similiter quia G H linea, ipsius G I dupla est, erit quoque B H dupla lineæ M I; vti & G B ipsius M B; sunt autem D N, M B, I M, N B ostensæ proportionales, ergo & A B, B G, B H, B C illarum duplæ quoque sunt proportionales: & A B C, G B H a triangula inter se æqualia, cùm circa communem angulum A B C, latera habeant reciprocè proportionalia. Quod fuit demonstrandum.

a 15. Sexti.

PROPOSITIO XXXIII.



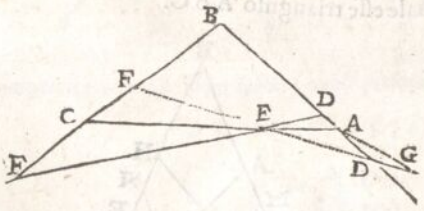
b 40. Primi.

ISdem positis quæ suprà: si H B G triangulum æquale fuerit triangulo A B C: Dico quadratum G I, dimidiæ scilicet ipsius G H, æquale esse rectangulo F D E.

Demonstratio.

IVngantur puncta A H, G C. Quoniam A B C triangulum per hypothesin æquale est triangulo G B H, ablato communi triangulo A B H, æqualia remanent triangula A G H, A C H, vnde & A H, G C lineæ b sibi mutuo æquidistant. & cùm L K linea, bifariam secet rectas A C, H G, ex hypothesi erit & L K, ipsi A H parallela, & I K recta, æqualis rectæ D L: quare vt D I ad I K sic I D ad D L, & componendo vt D K ad I K, sic I L ad D L: sed est vt D K ad I K, sic F D ad I G, & vt I L ad D L sic I H ad D E; igitur vt F D ad G I, sic H I siue G I ad D E: adeoque F D E rectangulum æquale quadrato G I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.



DAto angulo A B C, & intra illum puncto E, oportet per E rectam ducere, occurrentem vtrimque anguli lateribus, cuius segmenta minimum contineant rectangulorũ quod segmentis cuiusuis lineæ per E ductæ contineri potest.

Constructio & demonstratio.

COnstituat recta A C, per E ducta Isoscelem A B C, dico factum esse quod petitur; agatur enim per E recta quæuis alia F E D, & si C E A rectangulum non sit minimũ, sit D E F rectangulũ, vel æquale rectangulo A E C, vel minus: primo sit æquale. Quoniam igitur A E C, D E F rectangula sunt inter se æqualia, erit vt D E c ad A E, sic E C ad F C, sunt autem anguli ad E oppositi inter se æquales; igitur triangula A E D, F E C sunt inter se similia; adeoque angulus D A E, id est B C A externus, æqualis angulo interno C F E. Quod d fieri non potest; quare D E F rectangulum, æquale non est rectangulo A E C.

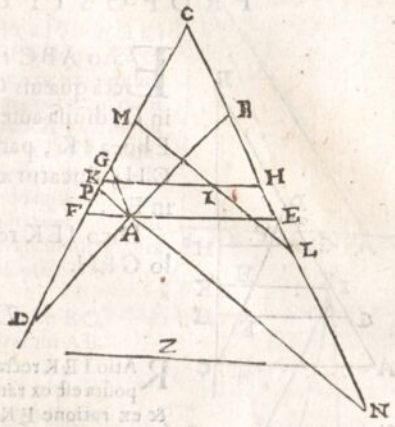
c 14. Sexti.

d 16. Primi.

Sit igitur D E F rectangulum minus rectangulo A E C. producatur F D linea in G, vt

PROPOSITIO XXXV.

DAto puncto A intra angulum BCD; per A rectam ducere pertingentem ad latera BC, CD, vt rectangulum quod sub segmentis continetur, æquale sit quadrato dato Z: quod oportet esse non minus minimo rectangulorum quæ segmentis linearum per A ductarum continentur.



Constructio & demonstratio.

QVadratum Z vel æquale est minimo rectangulorum quæ sub segmentis linearum per A describi possunt, vel maius. Si æquale, agatur per A linea EF exhibens ECF triangulum isosceles; patet per præcedentem EAF rectangulum æquari quadrato Z. sit igitur quadratum Z maius minimo rectangulorum. Ducatur per A linea DB vt in A diuisa sit bifariam (quod fiet si ducta ex A linea AG parallela lateri CB, fiat DG linea æqualis lineæ GC: & ex D per A recta ducatur DB) dein ducatur linea HK, parallela rectæ EF, [a] triangulum auferens HCK æquale triangulo BCD, eritq; HCK quoque isosceles, & HI quadratum [b] quod fit à dimidia lineæ HK, æquale rectangulo EAF: quod per hypothesim minus est quadrato Z. dupla igitur rectæ Z maior erit lineâ HK, poteritque auferre triangulum isosceles sub angulo C, maius triangulo HCK. Ducatur ergo LM, dupla rectæ Z, auferens [c] triangulum LCM æquale triangulo HCK; & per A recta agatur NP, parallela lineæ LM. Dico factum esse quod petitur. cùm enim recta BD in A diuisa sit bifariam, & per A ducta quædam NP, cuius parallela LM, triangulum aufert æquale triangulo HCK, id est per constructionem æquale triangulo BCD; erit NAP rectangulum æquale [d] quadrato dimidiæ ipsius LM, id est per constructionem quadrato Z duximus igitur per A lineam, &c. Quod erat faciendum.

[a] 32. *Huius.*
[b] 33. *Huius*
[c] 32. *Huius.*
[d] 33. *Huius.*

PROPOSITIO XXXVI.

ESto ABC triangulum scalenum ductâq; ex C, lineâ CD, ad oppositum latus, quæ angulum ACD æqualem faciat angulo ABC, ducatur ex D linea DE, parallela ipsi CB; quam in H secent rectæ quotcunque FG, parallelæ ipsi CD, occurrentes CAD trianguli lateribus in F, & G.

Dico DHE rectangula, æquari rectangulis FHG.



Demonstratio.

ANgulus AGF id est ACD, per constructionem est æqualis angulo ABC, id est ADE: sunt autem & anguli FHD, EHG ad verticem oppositi inter se

æquales,

æquales, igitur DFH, HEG triangula sunt similia. Vnde FH ad HD, vt HE ad
a 17. *Sexti.* HG, adeoque DHE [a] rectangula, æqualia rectangulis FHG. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.



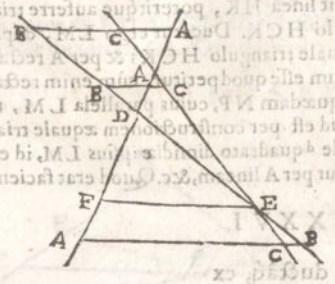
ESto ABC triangulum, ducaturque ex C, recta quæuis CD, secans AB latus oppositum in D; diuisa autem CD bifariam in E, agatur per E linea IK, parallela basi AC, cui & alia quęuis GH, ducatur æquidistans, occurrens CD lineæ, in F.

Dico IEK rectangulum, maius esse rectangulo GFH.

Demonstratio.

b 23. *Sexti.* RAtio IEK rectanguli, ad rectangulum GFH, [b] composita est ex ratione IE ad GF, id est DE ad DF, & ex ratione EK ad FH, id est EC ad FC: sed ex
c *Ibid.* ijsdem quoque [c] composita est ratio rectanguli DEC, ad rectangulum DFC. Igitur vt DEC rectangulum, ad rectangulum DFC, sic IEK rectangulum, est ad re-
d *Papp. l. 7. Prop. 13.* ctangulum GFH. est autem DEC rectangulum maius rectangulo [d] DFC (cùm DC in E diuisa sit bifariam) igitur & IEK rectangulum maius est rectangulo GFH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.



OCcurrant AB lineæ quotcunque inter se parallelæ, rectis EBD, EC, EF: quas omnes secet linea FAD.

Dico ABC rectangulum, ad rectangulum ABC, eam habere rationem, quam habet DBE rectangulum, ad rectangulum DBE.

Demonstratio.

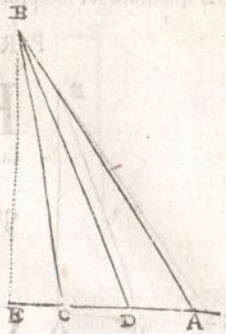
e 23. *Sexti.* RAtio rectanguli ABC, ad rectangulum ABC, [e] componitur ex ratione AB ad AB, id est DB ad DB, & ex ratione BC ad BC, id est BE ad BE, sed ex ijsdem composita est ratio rectanguli DBE, ad rectangulum DBE, igitur rectangulum ABC, ad ABC rectangulum, eam habet rationem, quam DBE rectangulum, ad rectangulum DBE. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

ESto ABC trianguli basis AC, bifariam diuisa in D, & recta ducta BD.

Dico

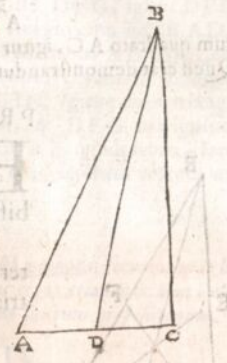
Dico quadrata AB, BC simul sumpta, æqualia esse quadratis AD, DB bis sumptis.



Demonstratio.

DEmittatur ex B linea BE, normalis ad basim AC; & BE quidem 1. cadat extra triangulum ABC: Quoniam igitur BE normalis, cadit extra triangulum ABC formans angulum AEB rectum, patet angulos BAE, BDE, BCE acutos esse; quare AB quadratum superat[a] quadrata AD, DB, rectangulo ADE bis sumpto. & BC[b] quadratum ab ijsdem deficit rectangulo CDE, id est ADE bis sumpto: addendo igitur ad quadratum BC, excessum quo AB quadratum, superat quadrata AD, DB, fit vt AB, BC quadrata simul sumpta æqualia sint quadratis AD, DB bis sumptis.

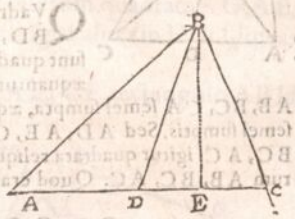
a 13. Secundi.
b 12. Secundi.



Sit iam EB normalis, eadem cum latere BC, adeoque angulus ACB rectus; quadratum AB, superat[c] quadrata AD, DB, rectangulo ADC bis sumpto. id est quadratum AB, est æquale quadratis AD, DB, & DC quadrato bis sumpto: sed BC quadratum, deficit[d] à quadrato BD, quadrato DC; igitur si quadratum DC, id est dimidium excessus quo AB quadratum superat quadrata AD, DB, addatur quadrato BC; patet AB, BC quadrata, æquari quadratis AD, DB bis sumptis.

c Ibid.
d 13. Secundi.

Cadat BE normalis, inter BC & BD lineas: Quoniam anguli AEB, CEB sunt recti, erunt AB, BC quadrata, æqualia quadrato BE bis sumpto; vna cum quadratis AE, EC: sed AE, EC quadrata, [e] dupla sunt quadratorum AD, DE; igitur quadrata AB, BC, æqualia sunt, quadratis BE, AD, DE bis sumptis; est autem BD quadratum bis sumptum, æquale quadratis DE, BE bis sumptis; igitur quadrata AB, BC simul sumpta, sunt æqualia quadratis AD, DB bis sumptis. Quod erat demonstrandum.

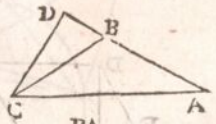


e 9. Secundi.

Est hæc Pappi Lib. 7. Prop. 122.

PROPOSITIO XL.

ESto ABC triangulum isosceles, & ex C, alterutro angulorum æqualium, ducta normalis CD, ad latus oppositum;



Dico quadrata tria laterum trianguli, ABC æquari quadrato AD semel; quadrato DB bis, & DC quadrato ter sumpto.

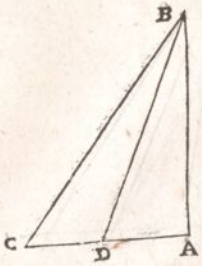


Demonstratio.

QVoniam angulus CDB per constructionem rectus est, erit CB quadratum, æquale quadratis CD, DB: sed AB linea ex constructione est æqualis lineæ CB; igitur & quadratum AB, æquale est quadratis CD, BD. Rursum quadratum AC, æquale est quadratis CD, DA: igitur tria laterum

trianguli A B C quadrata, ſunt æqualia quadrato A D ſemel, quadrato D B bis, & C D quadrato ter ſumpto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.



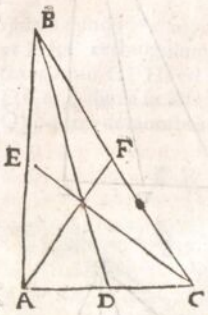
ESto A B C triangulum rectangulum, & ex B recta demittatur quæuis B D, ad oppoſitum latus A C.

Dico A D, B C quadrata ſimul ſumpta, æquari quadratis A C, B D ſimul ſumptis.

Demonſtratio.

QVoniam angulus B A C rectus ponitur, erit B C quadratum, vnà cum quadrato A D, æquale tribus quadratis A B, A C, A D: ſed ijſdem æquale eſt quadratum B D vna cum quadrato A C, igitur A D, B C quadrata, æqualia ſunt quadratis A C B D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.



ESto A B C triangulum, & ex ſingulis angulis ductæ lineæ B D, A F, C E ſecent latera oppoſita bifariam in D, E, F.

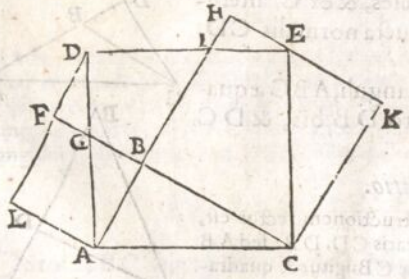
Dico A F, E C, B D, quadrata, ad quadrata tria laterum trianguli A B C, eam habere rationem, quam tria ad quatuor.

Demonſtratio.

QVadrata A B, B C ſimul ſumpta, æqualia ſunt quadratis B D, [a] A D bis ſumptis; & A C, B C quadrata, æqualia ſunt quadratis E C, A E bis ſumptis; quadrata verò A B, A C æquantur quadratis A F, C F bis ſumptis; igitur quadrata A B, B C, C A ſemel ſumpta, æqualia ſunt quadratis A F, C E, B D, A D, A E, C F ſemel ſumptis. Sed A D, A E, C F quadrata, ſunt quarta pars quadratorum A B, B C, A C; igitur quadrata reliqua A F, C E B D, tres habent quartas, quadratorum A B, B C, A C. Quod erat demonſtrandum.

[a] 39. Huius.

PROPOSITIO XLIII.

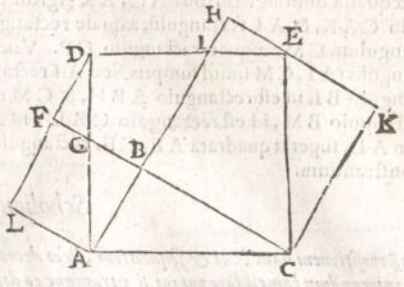


IN triangulis rectãgulis quadratum, quod fit à latere rectum angulum ſubtendente, æquale eſt eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus, deſcribuntur quadratis.

Demonſtratio.

SIt A B C triangulum rectangulum, & laterum quadrata ſint A E, A F, C H, & F B linea ſecet A D in G. Quoniam anguli K C B E C A ſunt inter ſe æquales dempto communi angulo E C B, erunt anguli A C B, E C K reliqui, inter

inter se æquales: sunt autem EC, KC duo latera, æqualia duobus lateribus AC, CB; igitur reliquum latus trianguli CKE, reliquo lateri trianguli ABC est æquale: vnde punctum E est in recta HK, & EKC triangulum, æquale triangulo ABC. Eodem modo ostenditur triangulum ABC æquale triangulo DLA, & punctum D esse in directum cum LF producta. Rursum cùm DL latus, æquale sit lateri CK, hoc est KH, & FL æquale ipsi AB, id est EK; erit reliquum latus EH, æquale reliquo DF; est autem angulus FGD (ob BF, LA parallelas) æqualis angulo DAL, id est IAC, id est angulo EIH; & angulus EHI, æqualis angulo DFG, igitur DFG, EHI triangula, & DG, IE latera sunt inter se æqualia. Iterum cùm anguli ADI, GAC sint inter se æquales, & AC, AG latera, æqualia lateribus AD, DI, erit IDA triangulum, æquale triangulo GAC; vnde dempto communi triangulo ABG, erit ABC triangulum, æquale Trapezio IBGDI. Igitur cùm triangulum ABC, id est EKC æquale sit trapezio IBGDI, & DFG triangulum, æquale triangulo EHI, reliqua verò sint communia, erit AE quadratum, lateris rectum angulum subtendentis, æquale quadratis AF, CH, laterum rectum angulum continentium. Quod erat demonstrandum.



Scholion.

DEmonstrat hanc Clauius ad 47. primi Element. triplici aliâ methodo; secus quàm Peletarius fieri posse existimauit: copiæ tamen, non necessitatis ergo, etiam nos illam, aliâ viâ demonstrandam assumpsimus, maximè occasione sequentium duarum propositionum.

PROPOSITIO XLIV.

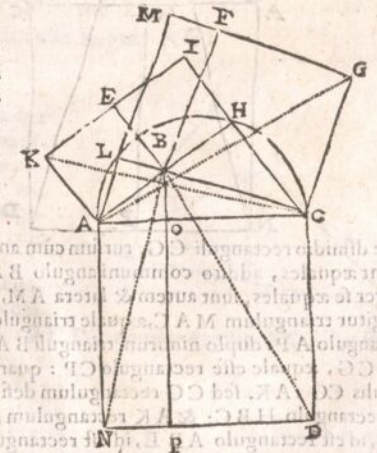
ESto ABC triangulum amblygonium, & laterum quadrata AD, AE, CF. ducaturq; ex C linea CH secans orthogonaliter in H & I, lineas AB, KE.

Dico AD quadratum, superare quadrata AE, CF, rectangulo ABH bis sumpto.

Demonstratio.

DVcatur ex A linea AM, secans in L & M orthogonaliter lineas CB GF, & super AC vt diametro describatur semicirculus AHC;[a] trãsibit is per H & L. Iunganturq; puncta AG, CK, BD, BN, dein ex B, recta demittatur BO, secans orthogonaliter in OP, lineas AC, DN. Quoniam AM, CG lineæ, per constructionem æquidistant, erit AGC triangulum æquale dimidio rectanguli GL: eodem modo triangulum CAK, æquale est dimidio rectanguli AI; Rursum cùm anguli ABE, CAN, per constructionem recti sint, addito communi angulo BAC, erunt anguli BAN, CAK inter se æquales: sunt autem AB, AN late-

[a] 31. Tertij.



ra,

ra, æqualia duobus lateribus AC, AK; igitur triangulum NAB, æquale est triangulo CAK, & AI rectangulũ, æquale rectangulo AP: eodem modo ostenditur rectangulum CM, æquari rectangulo CP. Vnde AD quadratum, æquale est rectangulis AI, CM simul sumptis. Sed AI rectangulum, superat quadratum AE, rectangulo BI, id est rectangulo ABH, & CM rectangulum, superat quadratum CF, rectangulo BM, id est rectangulo CBL, id est ABH rectangulo; igitur quadratum AD, superat quadrata AE, CF, rectangulo ABH bis sumpto. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

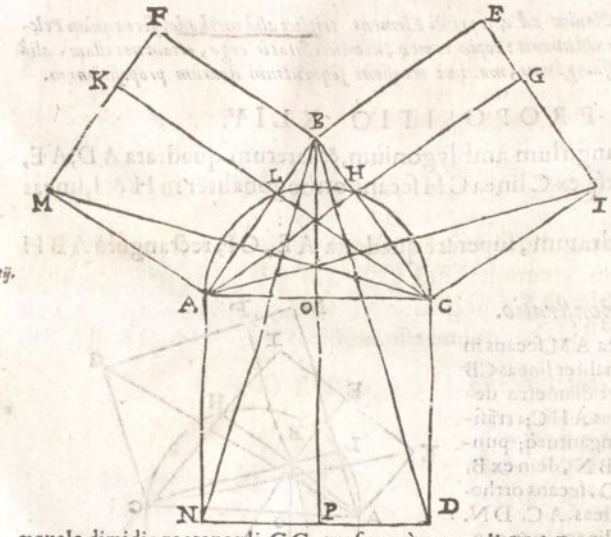
PRopositionem hanc, vti & sequentem, licèt demonstret Euclides Lib. 2. prop. 12. & 13. non iniucundum tamen fore putaui, si vtramque eo discursu quo Pythagoras 47. primi Element. hoc loco demonstrarem.

PROPOSITIO XLV.

ESTo ABC triangulum oxygonium, & laterum quadrata AD, CE, AF. Ducaturque ex A linea AG, secans orthogonaliter in H, & G, lineas CB, IE.

Dico AD quadratum deficere à quadratis CE, AF, rectangulo HBC bis sumpto.

Demonstratio.



231. Tertij.

DVcatur ex C linea, secans orthogonaliter in L & K lineas AB, FM, iunganturque puncta AI, CM, BD, BN. descripto dein super AC vt diametro, semicirculo AHC, (qui transibit per H & K) demittatur ex B, linea BO, secans orthogonaliter in O & P, lineas AC, DN. Quoniam AM, LC lineæ æquidistant, erit MAC triangulum, æquale dimidio rectanguli AK, eodemq; modo triangulũ AIC, æquale dimidio rectanguli CG. rursum cùm anguli MAB, CAN per constructionem sint æquales, addito communi angulo BAC erunt anguli MAC, BAN quoque inter se æquales, sunt autem & latera AM, AC æqualia duobus lateribus AB, AN, igitur triangulum MAC, æquale triangulo BAN, & AK rectangulum, æquale rectangulo AP: duplo nimirum trianguli BAN. Eodem modo ostenditur rectangulum CG, æquale esse rectangulo CP: quare AD quadratum, æquale est rectangulis CG, AK. sed CG rectangulum deficit à quadrato CE, rectangulo HE; id est rectangulo HBC; & AK rectangulum, deficit à quadrato AF, rectangulo LF, id est rectangulo ABL, id est rectangulo HBC; igitur quadratum AD, deficit à quadratis CE, AF, rectangulo HBC, bis sumpto. Quod erat demonstrandũ.

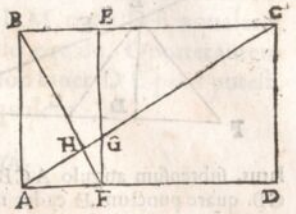
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [89] - 32
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLVI.

PArallelogrammi ABC, diametrum AC, ſecet EF, æquidiſtans ipſi AB in G. ponatur inſuper BF.
Dico GH, HA, HC. tres eſſe in continua ratione.

Demonſtratio.

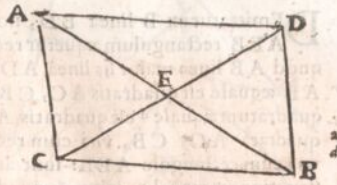


SImilia namque ſunt triangula, AHF, BHC, quemadmodum & triangula GHF, AHG: quare vt CH ad HA, hoc eſt BH ad HF, ita HA ad HG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

SInt AB CD cuiuſcumque parallelogrammi, diametri AB, CD.
Dico diametrorum quadrata ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis laterum figuræ.

Demonſtratio.



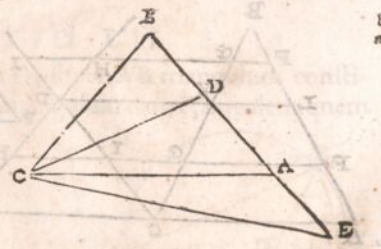
PEr trigeſimam nonam huius, quadrata AC, AD æquantur quadratis EC, EA bis ſumptis: & per eandem quadrata CB, BD æqualia ſunt ijſdem; ſcilicet quadratis EC, EB bis ſumptis, ſed quadratum CD a æquatur EC quadrato quater ſumpto, & AB quadratum, quadrato EA quater ſumpto: patet ergo veritas propoſitionis.

a 4. Secundi.

PROPOSITIO XLVIII.

ESto ABC triangulum iſoſceles, ductâque ex C, alterutro angulorum æqualium, vtcunque lineâ CD, quæ AB lateri, occurrat in D, fiat ipſi CD æqualis DE, iunganturque EC.
Dico angulum BCD, duplum eſſe anguli ACE.

Demonſtratio.



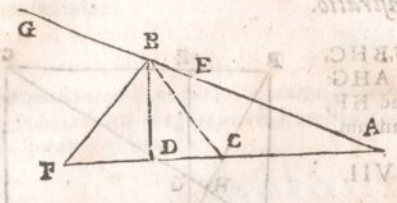
b 16. Primi.

ANgulus DAC æqualis b eſt duobus angulis DEC, ACE, id eſt per conſtructionem, angulo DCE vnà cum angulo ACE, id eſt angulo DCA vnà cum angulo ACE bis ſumpto. Sed angulo DAC æquatur angulus BCA, cùm ABC ſit iſoſceles; igitur angulus BCA, æquatur angulo DCA, vnà cum angulo ACE bis ſumpto, dempto igitur communi angulo DCA, manet angulus BCD, æqualis angulo ACE bis ſumpto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIX.

ESto ABC triangulum obtusangulum, oporteat AB latus subtensum angulo obtuso ita secare in E, vt AE, EB quadrata, æqualia sint quadratis AC, CB.

Constructio, & demonstratio.



PRoductâ AC in F, vt AC, CF lineæ sint inter se æquales, iungantur FB, producaturque AB in G vt GB, BF lineæ sint æquales: tum AG bifariam secetur in E: Dico factum esse quod petitur: Quoniam AC, CF lineę sunt inter se æquales, erũt ABC, CBF triangula æqualia, & quia angulus ACB obtusus est, erit AB latus, subtensum angulo ACB, maius latere BF, id est per constructionem, latere GB. quare punctum E cadet inter A & B. igitur cùm AG linea diuisa sit bifariam in E, & non bifariam in B, erunt AB, BG quadrata dupla [a] quadratorum AE, EB: sed & AB, BG quadrata, id est AB, BF, dupla [b] sunt quadratorum AC, CB, igitur quadrata AE, EB, æqualia sunt quadratis AC, CB. diuisimus igitur latus AB, &c. Quod erat faciendum.

a 9. Secundi.
b 39. Huius.

Aliter.

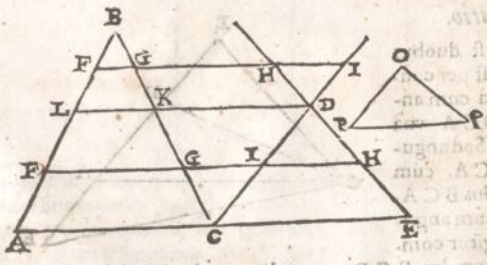
DEmittatur ex B linea BD, normalis ad rectam AC, secenturque AB in E vt AEB rectangulum æquetur rectangulo ACD (quod fieri posse ex eo constat, quòd AB linea maior sit lineâ AD.) Dico factum esse quod petitur. Quadratum AB æquale est quadratis AC, CB & ACD [c] rectangulo bis sumpto, sed & AB quadratum æquale [d] est quadratis AE, EB & AEB rectangulo bis sumpto, igitur quadrata AC, CB, vnà cum rectangulo ACD æqualia sunt quadratis AE, EB, vnà cum rectangulo AEB: sunt autem ACD, AEB rectangula inter se per constructionem æqualia, igitur & quadrata AC, CB, æqualia sunt quadratis AE, EB. diuisimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

c 12. Secundi.
d 4. Secundi.

PROPOSITIO L.

DAtis duobus triangulis ABC, CDE inæqualis altitudinis, super eadem, vel æquali basi in directum constitutis, lineam ducere, parallelam basi AC, quæ auferat triangula in data ratione M ad N.

Constructio & demonstratio.



DVcatur ex D linea DK, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus, in K & L: deinde fiat vt M ad N, sic LBK triangulum, ad triangulũ OPQ, quod simile sit triangulo CDE. tum quędam ducatur FG, parallela basi AC, occurrens ABC trianguli lateribus in F & G, & CDE trianguli lateribus in H & I, vt [e] FG sit ad HI, sicut LK ad PQ. Dico factum esse quod petitur. Quoniam FG est ad HI, vt LK ad PQ, erit permutando inuertendoque vt LK ad FG, sic PQ ad HI: sed LBK triangulum, est ad triangulum FBG, in duplicata [f] ratione eius, quam habet LK linea, ad lineam FG, & POQ triangulum est ad triangulum CDE in duplicata [g] ratione lineę PQ ad

e 16. Huius.
f 19. Sexti,
g Ibid.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [91] - 34
PUBLIC DOMAIN

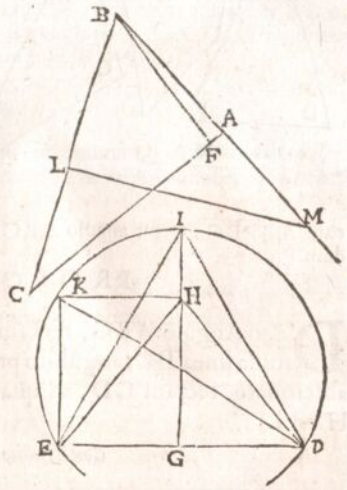
ad HI, quia POQ, HDI triangula sunt similia; igitur vt triangulum LBK ad triangulum FBG, ita est triangulum POQ, ad triangulum HDI, & permutando vt LBK triangulum, ad triangulum POQ, sic FBG triangulum, est ad triangulum HDI: sed LBK triangulum, per constructionem est ad triangulum POQ, vt M ad N, igitur vt M ad N sic FBG triangulum est ad triangulum HDI. Duximus igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LI.

DAto triangulo ABC, lineâ DE, & angulo ABC. Oporteat in eodem angulo ABC rectam subtendere LM, datæ DE æqualem, quæ auferat triangulum, dato ABC triangulo æquale. Oportet autem ABC triangulum, non esse maius isosceli, quod super DE poni potest, habens ad verticem angulum, dato ABC æqualem.

Constructio & demonstratio.

SVper DE linea segmentum fiat circuli, continens angulum, ABC æqualem. Diuisaque DE bifariam in G, erigatur recta GI, normalis ad lineam AC, iunganturque puncta DI, IE. Dein ex B demittatur linea BF, normalis ad basim AC: fiatque vt DE ad AC, ita BF ad HG, erunt ABC, DHE [a] triangula inter se æqualia, & H punctum non cadet supra I, quia ABC triangulum per constructionem non est maius, triangulo DIE: tum recta ducatur HK, parallela basi DE, occurrens circulo in K. Iunctisque punctis DK, EK, fiat BM æqualis ipsi DK, & BL æqualis ipsi KE, iunganturque LM. Dico LBM triangulum satisfacere petitioni: Quoniam HK, DE lineæ sunt parallelæ, erit EKD triangulum æquale triangulo DHE, id est per constructionem triangulo ABC; est autem angulus ABC, æqualis angulo DIE, id est angulo [b] DKE, & DK, KE latera per constructionem æqualia lateribus LB, BM, igitur triangulum LBM æquale est triangulo DKE, id est triangulo ABC, & ML latus æquale lateri DE. igitur angulo ABC rectam subtendimus, &c. Quod erat faciendum.

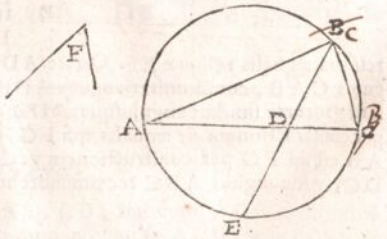


a *Clau. ad 23. sexti.*

b *21. Tertij.*

PROPOSITIO LII.

DAtâ rectâ AB, vtcunque diuisa in D; super AB triangulum constituere ACB, habens ad C verticem, angulum dato F, æqualem; quem recta ex C per D acta, diuidat bifariam.



Constructio & demonstratio.

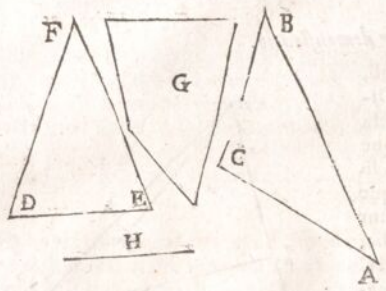
SVper AB recta segmentum describatur circuli, continens angulum BCA æqualem dato F; perfectoque circulo ACB, secetur arcus AEB bifariam in E, & ex E per D linea agatur EC, occurrens circuli peripheriæ in C; iunganturque puncta AC, CB. Dico factum esse quod petitur, cùm enim arcus AEB per

a 27. Tertij. constructionem bifariam in E sit diuisus, erunt ACE, BCE anguli inter se a æquales, adeoque angulus ACB bifariam diuisus, sed angulus ACB per constructionem est æqualis angulo dato F; igitur super AB recta triangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

DAto Angulo ABC, rectam subtendere, quæ ABC triangulum æquale constituat, figuræ rectilineæ G; sic vt AB, BC laterum, differentia sit æqualis datæ rectæ H.

Constructio, & demonstratio.



b *Per Andersonium & alios.*

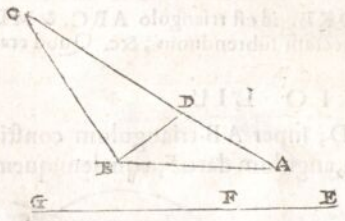
c 15. *Sexti.*

Fiat EFD triangulum isosceles æquale figuræ rectilineæ G, habens angulum ad verticem æqualē angulo ABC: habitâ dein mediâ DF, & excessu extremarum H, b inueniantur extremæ AB, BC iungantúrque puncta AC. Dico factum esse quod petitur. Quoniam angulo ABC, per constructionem æqualis est angulus EFD, sit autem vt AB ad DF sic DF ad BC per constructionem, id est EF ad BC, erit ABC triangulum c æquale triangulo DFE; id est per constructionem, figuræ rectilineæ G: est autem H differentia laterum AB, BC; igitur angulo ABC rectam subtendimus; &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIV.

DAto Angulo ABC, rectam subtendere AC, vt ex B in AC, demissa linea BD, angulum producat ADB, æqualem angulo ABC; abscindatq; rectam CD, ad quam AB linea, datam habeat rationem H ad I.

Constructio & Demonstratio.



Fiat vt H ad I, sic AB linea ad lineam FG. dataque AB mediâ, & FG extremarum differentia, inueniantur extremæ EG, EF: erit EG maior rectâ AB. Ducatur igitur ex A linea AC æqualis rectæ EG, occurrens BC lateri in C, sumptaque CD æquali ipsi FG, iungantur puncta DB. Dico factum esse quod petitur. Quoniam tam AC, EG lineæ, quàm DC, FG sunt inter se æquales, erit AD reliqua, æqualis reliquæ EF. Quare AD est ad AB, vt AB ad AC; est autem angulus CAB, communis triangulis ADB, ACB; igitur triangula ADB, ACB

d 23. *Sexti.* sunt d inter se similia: angulusque ADB æqualis angulo ABC. Rursum cùm DC per constructionem sit æqualis ipsi FG, erit vt AB ad FG, sic AB ad DC, sed AB est ad FG per constructionem vt H ad I, igitur vt H ad I, sic AB est ad DC; vnde angulo ABC rectam subtendimus &c. Quod erat faciendum.

PARS

PARS TERTIA.

De rectangulorum inter se proportione.

PROPOSITIO LV.

SI AB linea, diuisa fuerit vtcunque in C & D:
Dico ACB, CDB rectangula, æqualia esse rectangulis BDA, DCA.

A C D B

Demonstratio.

QVadratum AB, æquale est BA quadrato; sed AB quadratum æquatur quadratis AC, CD, DB, vnà cum rectangulis ACB, CDB, bis sumptis, & BA quadratum æquatur quadratis BD, CD, CA, vnà cum rectangulis BDA, DCA bis sumptis: Igitur ablatis communibus quadratis AC, CD, DB, remanent ACB, CDB rectangula, æqualia rectangulis BDA, DCA. [a] 4. Secun. & 4.

Corollarium.

PRopositio hæc quoque vera est, si AB linea, vtcumque & quotcumque punctis diuidatur. Eademque est methodus progrediendi, & demonstrandi, qua in propositione vsi sumus.

PROPOSITIO LVI.

SI fuerit vt AB ad BC, sic AD ad DF, & BC lineæ æqualis EF.
Dico ABDE, rectangulum æquale esse rectangulo CBD.

A B C D E F

Demonstratio.

QVoniam per constructionem est, vt AB ad BC, sic AD ad DF, erit permutando, inuertendo, vt AD ad AB, sic DF ad FE, id est ad BC: & *diuidendo*, vt AB ad BD, sic FE ad DE, id est BC ad DE; quare ABDE rectangulum, æquale est rectangulo CBD. Quod erat demonstrandum.

A B C E F
D

PROPOSITIO LVII.

SI fuerit AB recta diuisa in C & D vt AC DB, lineæ sint inter se æquales;

A C D B

Dico CB quadratum, æquari quadrato AC vnà cum rectangulo ABCD.

Demonstratio.

QVadratum AB, æquale est quadratis AC, CB, vnà cum ACB rectangulo bis sumpto: sed AC quadratum, vnà cum rectangulo ACB, æquale est rectangulo

ctangulo CAB, igitur quadratum AB, æquale eſt quadrato CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB. Rurſum AB quadratum, æquale eſt rectangulis AB CD, CAB, DBA; igitur quadratum CB, vnà cum rectangulis ACB, CAB, æquale eſt rectangulis AB CD, CAB, DBA. quare dempto communi rectangulo CAB; æqualia remanent CB quadratum, vnà cum rectangulo ACB, rectangulis ABCD, DBA, id eſt rectangulis ABCD, BDA, vnà cum quadrato DB: ablatis igitur æqualibus rectangulis BDA, ACB, manet CB quadratum, æquale quadrato DB, id eſt AC, vnà cum rectangulo ABCD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LVIII.

A B E C D

SI fuerit AD linea, diuiſa in B & C, vt AB CD lineæ ſint æquales, ſumatur autem inter B & C, punctum quoduis E;

Dico AED rectangulum, æquale eſſe rectangulis GEA, EBA, vnâ cum quadrato AB.

Demonſtratio.

a 1. *Secundi.* b *Ibid.*

REctangulum AED, æquale eſt rectangulis [a] ABEC, BEC, BECD, vnà cum quadrato AB: ſed ijſdem, æqualia ſunt rectangula AEC, ABE, vnà cum quadrato AB; (quia AEC, [b] æquatur rectangulis ABEC, BEC) igitur AED rectangulum, æquale eſt rectangulis CEA, EBA, vnà cum quadrato AB, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIX.

SI fuerit AC linea, vtcunque diuiſa in D, B, E;

Dico rectangula ADC, AEC, DBE; æqualia eſſe rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC.

A D B E C

Demonſtratio.

c *Ibid.* d *Ibid.*

REctangulum ADC, æquale eſt rectangulis ADB, [c] ADBE. ADEC: & AEC rectangulum, [d] æquale eſt rectangulis, CEB, CEBD, CEDA; quare addito rectangulo DBE, erunt ADC, AEC, DBE rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE, ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE. ſed & ABC rectangulum, æquale eſt rectangulis DBE, ADBE, CEBD, CEDA; additis igitur rectangulis ADB, BEC, ADEC, erunt ABC, ADB, BEC, ADEC rectangula, æqualia rectangulis ADB, ADBE; ADEC, CEB, CEBD, CEDA, DBE: ſed & ijſdem rectangulis, oſtenſa ſunt æqualia, rectangula ADC, AEC, DBE; Igitur rectangula ADC, AEC, DBE, æqualia ſunt rectangulis ABC, ADB. BEC, ADEC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.

SI fuerit AB linea, diuiſa in quinque partes æquales, punctis C, D, E, F. & ei quęuis in directum adijciatur GA.

Dico GD quadratum, æquale eſſe quadrato AG, vnà cum rectangulo GCB.

G A C D E F B

Demon-

Demonſtratio.

QVadratum GD, æquale eſt quadratis AG, AD vnà cum[a] rectangulo GAD bis ſumpto: ſed AD quadratum, æquale eſt quadratis AC, CD, vnà cum rectangulo ACD bis[b] ſumpto; id eſt vnà cum quadratis DE, EF; & GAD rectangulum bis ſumptum, æquale eſt rectangulis, GACE, GAEB, id eſt rectangulo GACB (ob CE, EB lineas æquales lineæ CB) igitur quadratum GD, æquale eſt, quadratis AG, AC, CD, DE, EF. vnà cum rectangulo GA, CB. Rurſum rectangulum GCB. æquale eſt rectangulis GACB, ACB: ſed ACB rectangulum æquale eſt, rectangulis ACD, ACDE, ACEF, ACFB, id eſt quadratis AC, CD, DE, EF, vnà cum rectangulo GACB; igitur addito quadrato AG, erit GCB rectangulum, vnà cum quadrato AG, æquale quadrato GD. Quod erat demonſtrandum.

[a] 4. Secundi.

[b] Per eandem.

PROPOSITIO LXI.

SEcetur AB, in quotuis partes vtcunque in C, D, E, &c.

A C D E B

Dico quadrata AC, CD, DE, EB, ſimul cum rectangulis ACB, CDB, DEB bis ſumptis, æquari quadrato totius AB.

Demonſtratio.

QVadratum enim AB, æquatur quadratis AC, CB & rectangulo[c] ACB bis ſumpto; eodem modo quadratum CB, æquale eſt quadratis CD, DB, & rectangulo CDB, bis ſumpto; denique & quadratum DB æquale eſt quadratis DE, EB, & rectangulo DEB bis ſumpto. collectis igitur in vnum quadratis AC, CD, DE, EB, & rectangulis ACB, CDB, DEB bis ſumptis; exſurget quantitas, quadrato AB æqualis. Quod fuit demonſtrandum.

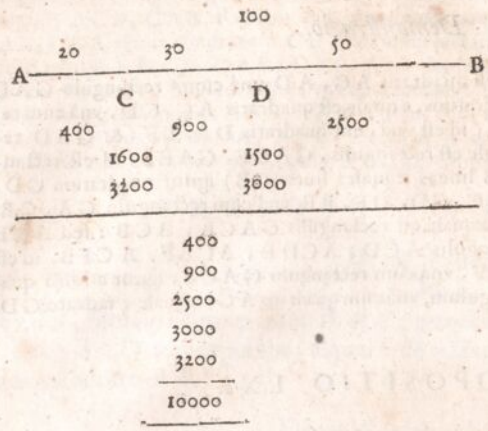
[c] 4. Secundi.

Corollarium.

HInc colligere licet; quod de duabus rectis lineis, quomodocumque diuiſis etiam ſecundùm diſſimillimas rationes, iudicium ferre debeamus. Ex diſcurſu enim poſito in demonſtratione huius propoſitionis conſtat; quadrata partium cuiuſcumque lineæ, cum rectangulis bis ſimul ſumptis, quę ſub partibus fiunt, ſecundùm tenorem propoſitione contentum, æqualia eſſe quadrato totius; vnde eam proportionem habere neceſſarium eſt quadrata partium vnius, ſimul cum rectāgulis bis ſumptis, ad quadrata omnia partium alterius, cum rectangulis ſuis bis ſumptis, quam ipſamet quadrata totarum inter ſe obtinent. Quod admiratione non caret, cùm vna quantitatum, in pauciſſimas partes poſſit diuidi, altera verò in quamplurimas.

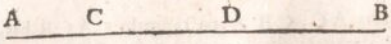
Hoc etiam quod ſubiungam, ignorantibus Geometriam maximè, videbitur parum credibile; ſi datum numerum verbi gratia 100. quis iubeatur, ſecum tacitus in plures pro libitu partes partiri, deinde ſingularum partium quadrata, in vnam ſummam collecta, ſeponat; quæ ſummæ, ex multiplicationibus partium inter ſe, ſecundùm ſenſum propoſitione contentum, coniuncta, certum quendam numerum ſibi computarit. Alter verò Geometrię gnarus, ſponſione cum eo facta, certet ſe diuinaturum eum numerum, quem ſupputatione facta, in codicillis conſcripſerit. Vt res etiam tyronum captui magis accommodetur; eam fuſiùs nonnihil deducam.

Ponatur



Ponatur numerus 100. expositus, diuisus in quotuis partes; verbi gratia in AC, CD, DB. sitque AC partium 20: CD, partium 30: residuum igitur partium 50. iubetur singulas partes multiplicare per seipsas; producent hæ multiplicationes tres summas; quarum prima 400. secũda 900. tertia 2500. partes continebit. Vlterius iubetur AC, multiplicare per numerum CB. hoc est 20. per 80. & emergit summa 1600. quæ bis sumpta, excrescit ad summam 3200. Denique hoc facto, etiam numerum CD ducere in DB. & exsurget summa 1500. quæ bis sumpta efficit numerum 3000. tandem colligit hæc producta in vnam massam, cuius summa est 10000. quam Geometra discursu propositionis iam positæ, sola multiplicatione numeri 100. per 100. factam illico manifestam habebit, scilicet 10000.

PROPOSITIO LXII.



SI fuerit AB linea, diuisa vtcunque punctis CD. Dico rectangulum sub AB, & composita ex ACDB; vnà cum rectangulo sub CD, & composita ex ACDB; æquale esse rectangulis BCA, DBC, ADB, CAD, simul sumptis.

Demonstratio.

a 1. *Secundi.* REctangulum super AB, & composita ex ACDB, æquale [a] est rectangulis CAB, DBA; id est rectangulis ACB, ADB, vnà cum quadratis AC, DB; id est æquale rectangulis CDB, ACDB, DCA, BDCA, vnà cum quadratis AC, DB. Rursum rectangulum super CD, & composita ex ACDB, æquale est rectangulis ACD, CDB: igitur rectangulum super AB, & composita ex ACDB, vnà cum rectangulo super CD, & composita ex ACDB, æquale est rectangulis, CDB, ACDB, DCA, BDCA, ACD, CDB, vnà cum quadratis AC, DB. Iterum rectangulum BCA, æquale est rectangulis DCA, BDCA; item DBC rectangulum, æquale est rectangulo BDC, vnà cum quadrato DB; item ADB rectangulum, æquale est rectangulis CDB, ACDB; denique rectangulum, CAD, æquale est rectangulo ACD, vnà cum quadrato AC; igitur rectangula BCA, DBC, ADB, CAD, æqualia sunt rectangulo sub AB, & composita ex ACDB, vnà cum rectangulo sub CD, & composita ex ACDB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIII.

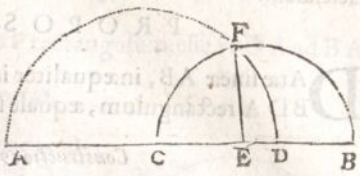
REctam AB, diuisam vtcunque in CD, iterum in E diuidere, vt AED rectangulum, æquale sit rectangulo BEC.

Con-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [97] - 40
PUBLIC DOMAIN

Constructio & demonstratio.

SVper AD, CB vt diametris, circuli describantur, AFD, DFC. qui occurrant sibi mutuo in F: tum ex F recta demittatur FE, normalis ad lineam AB. Dico punctum E, satisfacere petitioni. patet; cùm tam AED, quàm BEC rectangulum æquale [a] sit quadrato FE. igitur lineam AB, vtcumque in C & D diuisam, iterùm secuimus in E; &c. Quod erat faciendum.



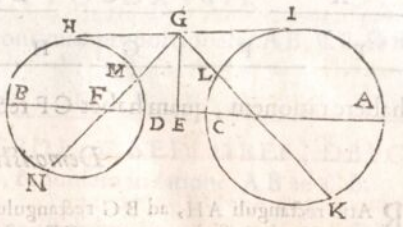
a 35. Tertij.

PROPOSITIO LXIV.

LIneam AB diuisam vtcunque in C, D. iterum diuidere in E, vt CEA rectangulum, æquale sit rectangulo DEB.

Constructio & demonstratio.

DEscribantur super AC, DB lineis, vt diametris, circuli AIC, BHD: quos in H & I contingat linea HI; quâ bifariam in G diuisa, demittatur ex G linea GE, normalis ad rectam AB. Dico punctum E, esse quod quæritur. secetur BE linea in F, vt EF quadratum sit æquale rectangulo DEB. & per F, ex G ducatur recta GN, occurrens circulo DHB in M, & N. & ex G ducatur altera GK, occurrens circulo AIC in L & K, factâ constructione vt priùs. Quoniam per constructionem, EF quadratum, æquale ponitur rectangulo DEB; & HG recta est tangens, erit FG quadratum, æquale [b] rectangulo MGN; sed FG quadratum æquale est quadratis EG, EF, igitur & MGN rectangulum æquale est quadratis, EG, EF: id est quadrato EG, vnà cum rectangulo DEB; eodem modo ostendetur LGK rectangulum, æquari quadrato EG, vnà cum rectangulo AEC. Vnde, cùm æqualia sint rectangula LGK, MGN, dempto communi quadrato EG, erunt AEC, DEB rectangula, inter se æqualia. Diuisimus igitur lineam AB in E, &c. Quod erat faciendum.



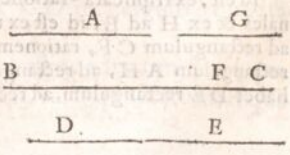
b Pappi L. 7. pr. 159.

PROPOSITIO LXV.

DAtæ sint duæ lineæ A & BF. oportet BF lineæ, quandam FC adijcere, vt quadratum A ad BCF rectangulum datam habeat rationem D ad E.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad E, sic A quadratum, ad quadratum G; dein FB lineæ quædam adiungatur FC, vt BC, G, FC, tres sint incontinua analogia: quod fieri si data differentia extremarum BF. & media G. inueniantur extremæ FC, CB per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur. Quoniam BC, G. FC lineæ sunt conti-



F

nuæ

nuæ proportionales, erit B C F rectangulum, æquale quadrato G: igitur quadratum A est ad rectangulum B C F vt A quadratum, ad quadratum G; id est per constructionem vt D ad E. Igitur rectæ B F quandam addidimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXVI.

DAtæ lineæ A B, inæqualiter in C diuisæ, quandam B D adiicere, vt B D A rectangulum, æquale sit quadrato C D.

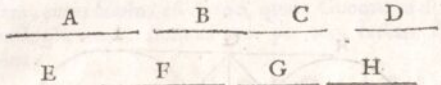
Constructio & demonstratio.



FIat A E æqualis C B. & fiat quadrato C B æquale rectangulum E C B D. Dico factum esse quod petitur. Sunt enim per constructionem continuæ D B, B C, C E, & quia A E æqualis est C B, erunt & B D, D C, D A [a] continuæ proportionales; vnde C D quadrato æquale est rectangulum B D A. addidimus igitur rectam. Quod erat faciendum.

[a] 5. *Huius.*

PROPOSITIO LXVII.



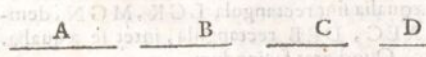
SI fuerit A ad B, vt C ad D, & E ad F, vt G ad H. Dico A H rectangulum, ad rectangulum B G, eam habere rationem, quam habet C F rectangulum, ad rectangulum D E.

Demonstratio.

RAtio rectanguli A H, ad B G rectangulum, est composita ex ratione A ad [b] B, & ex H ad G. Sed etiam ratio C F rectanguli, ad rectangulum D E, composita est ex ratione C ad D, id est per constructionem A ad B; & ex F ad E, id est H ad G. igitur rectangulum A H, ad rectangulum B G, eam habet rationem, quam C F rectangulum, ad rectangulum D E. Quod erat demonstrandum.

[b] 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LXVIII.



SI A, B, C, D lineæ fuerint in continua ratione, sint autem & aliæ quatuor E, F, G, H in continua analogia;

Dico A H rectangulum, ad rectangulum D E, rationem habere triplicatam eius, quam habet B G rectangulum, ad rectangulum C F.

Demonstratio.

RAtio rectanguli A H, ad rectangulum E D, [c] composita est ex ratione A ad D, id est, ex triplicata [d] ratione B ad C, quia A, B, C, D continuæ sunt proportionales & ex H ad E, id est ex triplicata ratione G ad F; sed B G rectangulum, ad rectangulum C F, rationem habet compositam ex [c] B ad C, & ex G ad F; igitur rectangulum A H, ad rectangulum D E, rationem habet triplicatam, eius quam habet D E rectangulum, ad rectangulum C F. Quod erat demonstrandum.

[c] *Ibid.*
[d] 10. *Defin. Quinti.*
[c] 23. *Sexti.*

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [99] - 42
PUBLIC DOMAIN

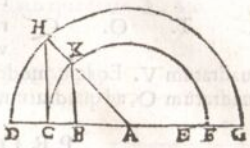
PROPOSITIO LXVII.

SI AB, AC, AD lineæ fuerint continuæ, quibus æquales fiant AE, AF, AG, in directum;

Dico DCG rectangulum, ad CBF rectangulum, esse vt DA ad BA.

Demonstratio.

CEntro A, interuallis AC, AD, semicirculi describantur DHG, CKF; erectâque ex C normali CH, ducatur recta AH, occurrens circulo CKF in K, iunganturque BK, vt AC ad AD, sic AK ad AH, sed vt AC ad AD sic AB est ad AC per constructionem; igitur vt AB ad AC, sic AK ad AH; adeoque BK, HC lineæ sunt parallelæ, & BK recta, normalis ad lineam AC: quare DCG rectangulum, est ad rectangulum CBF, vt HC quadratum, ad quadratum KB, id est in duplicata ratione lineæ HC ad KB, id est AC ad AB, id est vt AD, linea ad lineam AB. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO LXVIII.

SI fuerint quotcunque lineæ continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, FB, GB.

A C D E F G B

Dico rectangula ABDE, CBDE, CBEF, DBEF, DBFG, EBFG in continua esse analogia; & quidem in ratione AB ad CB.

Demonstratio.

REctangulum enim ABDE, ad rectangulum CBDE, est vt AB[a] linea, ad lineam CB; & CBDE rectangulum ad rectangulum CBEF, est vt[b] DE ad EF, id est, vt AB ad CB; Rursum rectangulum CBEF, ad rectangulum DBEF, est vt CB ad DB, id est AB ad CB, (quia AB, CB, DB, &c. ponuntur continuæ, & DBEF rectangulum, ad rectangulum DBFG, est vt EF ad FG, id est iterum AB ad CB; & sic de cæteris. Igitur rectangula ABDE, CBDE, CBEF, &c. in continua sunt analogia, & quidem in ratione AB ad CB. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. *Sexti.*
[b] *Ibid.*

PROPOSITIO LXIX.

SI fuerint tres ordines continuè proportionalium A, B, C, D. E, F, G, H. I, K, L, M. & AF rectangulo æquale fiat quadratum N: & R quadratum æquale rectangulo EK; sit autem & IF rectangulo, æquale quadratum O, & EB rectangulo, quadratum S. dein & rectangulo CH, æquale quadratum P; & T quadratum, æquale rectangulo GM; denique rectangulo LH, æquale quadratum Q, & GD rectangulo, quadratum V;

Dico quadratum N esse ad quadratum P, vt est quadratum S, ad quadratum V: & R quadratum, ad quadratum T, vt O quadratum ad quadratum Q.

Demonſtratio.

A. B. C. D.
E. F. G. H.
I. K. L. M.
N. P. S. V.
R. T. O. Q.

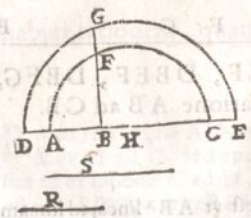
QVadratum enim N ad quadratum P, id eſt per conſtructionem, AF rectangulum, ad rectangulum CH rationem habet [a] compoſitam, ex A ad C, id eſt per hypotheſim ex duplicata ratione A ad B; & ex F ad H, id eſt duplicata ratione E ad F; ſed ratio quadrati S ad quadratum V, id eſt per hypotheſim rectanguli EB, ad rectangulum GD, etiam componitur ex ratione B ad D, id eſt duplicata ratione A ad B, & ex ratione E ad G, id eſt duplicata ratione E ad F, igitur vt quadratum N ad quadratum P: ſic quadratum S ad quadratum V. Eodem modo oſtenditur quadratum R, ad quadratum T eſſe, vt quadratum O, ad quadratum Q. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LXX.

SIt AC linea diuiſa inæqualiter in B, oportet vtrimque rectas æquales adijcere AD, CE, vt ABC rectangulum, ad rectangulum DBE, datam habeat rationem, R ad S.

Conſtructio & demonſtratio.



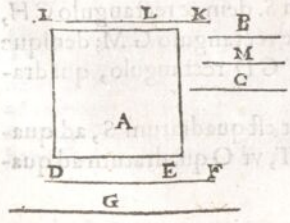
DEſcripto ſuper AC, vt diametro, ſemicirculo AFC, erigatur ex B, normalis BF; & fiat vt R linea ad S. lineam, ita BF quadratum, ad quadratum BG, tum centro communi H, interuallo HG, deſcribatur ſemicirculus DGE occurrens AC lineæ productæ in D & E. Dico AD, CE, lineas ſatisfacere petitioni. Rectangulum enim ABC, æquale eſt quadrato [b] FB, & GB quadrato, æquale eſt rectangulum DBE: igitur rectangulum ABC, eſt ad rectangulum DBE, vt FB quadratum, ad quadratum BG, id eſt linea R ad lineam S per conſtructionem. datæ igitur lineæ AC rectas æquales vtrimque adiecimus; &c. Quod erat præſtandum.

[b] 35. *Tertij.*

PROPOSITIO LXXI.

DAto quadrato A, & lineâ DF, vtcunque in E diuisâ, exhibere rectam, quæ diuiſa ſecundùm rationem DE ad EF, exhibeat quadratum ſub tota, vnà cum rectangulo ſub ſegmentis, ad quadratum A, in data ratione B ad C.

Conſtructio & demonſtratio.



INuentâ M, mediâ inter B & C, fiat vt quadratum B ad quadratum M, ita DF quadratum vnà cum rectangulo DEF, ad quadratum G, dein vt G linea, ad DF lineam, ſic latus quadrati, A fiat ad quandam IK; quæ ita ſecetur in L, vt DF eſt diuiſa in E. Dico IK lineam eſſe quæſitam. Quoniam eſt vt G linea, ad lineam DF, ſic latus quadrati A ad rectam IK, erit inuertendo, permutando, DF ad IK, vt G ad latus quadrati A. Rurſum cùm IK, DF lineæ proportionaliter ſint diuiſæ,

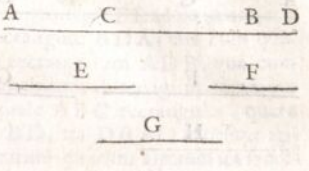
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [101] - 44
PUBLIC DOMAIN

diuisæ, erit vt IK ad DF sic LK ad EF. Est autem ratio rectanguli ILK ad rectangulum DEF, [a] composita ex ratione IL ad DE, & LK ad EF, id est ex duplicata ratione IK ad DF, item quadratum IK ad quadratum DF, duplicatam habet rationem, eius quam habet IK linea, ad lineam DF; igitur, erit ILK rectangulum vnà cum quadrato IK ad rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, in duplicata ratione IK ad DF. & quia est vt DF ad G sic IK ad latus quadrati A, erit vt rectangulum DEF vnà cum quadrato DF, ad quadratum G, sic ILK rectangulum vnà cum quadrato IK, ad quadratum A. sed per constructionem est DEF rectangulum vna cum quadrato DF, ad quadratum G, vt quadratum B ad quadratum M, id est vt linea B ad lineam C, igitur rectangulum ILK vnà cum quadrato IK, est ad quadratum A, vt B ad C. Vnde dato quadrato A, &c. Quod erat faciendum.

[a] 23. Sexti.

PROPOSITIO LXXII.

ESto AB linea diuisa vtcunque in C, oportet eam augere rectâ BD, vt ACB rectangulum, ad rectangulum ADB, datam habeat rationem E ad F.

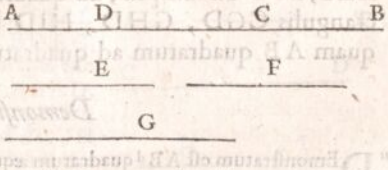


Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic ACB rectangulum ad G quadratum; deinde datâ mediâ G, & excessu extremarum AB, inueniantur extremæ AD, DB. per Andersonium & alios. Dico factum esse quod petitur: est enim vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad quadratum G. sed quadrato G, per constructionem æquale est rectangulum ADB, igitur vt E ad F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum ADB; datæ igitur lineæ AB, quandam adiecimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXXIII.

DAtam rectam AB diuisam in C vtcunque, iterum in D secare, vt DAB rectangulum, ad rectangulum DCB, datam habeat rationem E ad F.



Constructio & demonstratio.

Fiat vt E ad F, sic AB linea ad lineam G, dein AB secetur in D, vt AD sit ad DC, sicut CB est ad G. Dico factum esse quod petitur.

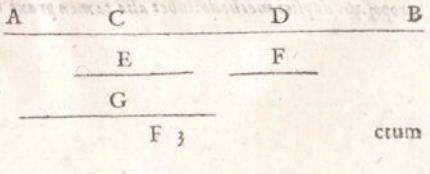
Ratio DAB rectanguli, ad rectangulum DCB, composita est ex ratione AB ad CB, & AD ad DC, id est per constructionem CB ad G. sed etiam ratio [b] AB ad G, id est E ad F, componitur ex ratione AB ad CB, & CB ad G, igitur rectangulum DAB ad rectangulum DCB, eam habet rationem quam AB linea ad G, id est E ad F; rectam igitur AB in D secuimus, &c. Quod erat faciendum.

[b] Defin. 5. sexti.

PROPOSITIO LXXIV.

REctam AB diuisam vtcunque in C, iterum secare in D, vt ABD rectangulum, ad quadratum CD, datam habeat rationem E ad F.

Constructio & demonstratio.



Fiat vt E ad F, sic AB ad G. dein AB secetur in D, vt DB, DC, & G lineæ sint continuæ. Dico fa-

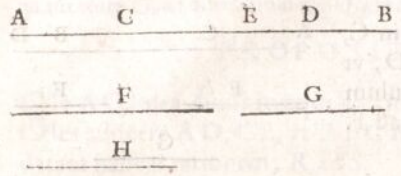
ctum

ctum esse quod iubetur. Ratio enim rectanguli ABD, ad quadratum CD, componitur ex ratione AB ad CD, & DB ad CD, id est ex ratione CD ad G. sed & ratio lineæ AB ad G (id est E ad F per constructionem) composita est ex ratione AB ad CD, & ex CD ad G, igitur ABD rectangulum ad quadratum CD, eam habet rationem, quam E ad F. diuisimus ergo AB lineam in D, &c. Quod erat faciendum.

a 5. Defin. sexti.

PROPOSITIO LXXV.

LIneam AB diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt EAC rectangulum ad rectangulum EBD, datam habeat rationem F ad G.



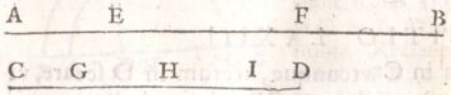
Constructio, & demonstratio.

FIat vt AC ad DB, sic F ad H, & AE ad EB, vt H ad G. Dico factum esse quod iubetur. Ratio lineæ F ad G b composita est ex ratione F ad H, & H ad G; sed ratio EAC rectanguli, ad rectangulum EBD, composita est ex c ratione AC ad DB, id est per constructionem F ad H, & ex AE ad EB, id est H ad G, igitur vt F ad G, sic EAC rectangulum, ad rectangulum EBD. Diuisimus igitur lineam AB in E, &c. Quod erat faciendum.

b 5. Defin. sexti.

c 23. Sexti.

PROPOSITIO LXXVI.



SInt AB, CD, diuisæ quomodocunque;

Dico quadrata partium AB, vnà cum rectangulis AEB, EFB bis sumptis, ad quadrata partium lineæ CD, vnà cum rectangulis CGD, GHD, HID bis sumptis, eam habere rationem quam AB quadratum ad quadratum CD.

Demonstratio.

DEmonstratum est AB d quadratum æquari quadratis partium lineæ AB vnà cum rectangulis AEB, EFB bis sumptis, quemadmodum etiam de quadratis partium CD eiusque rectangulis CGD, GHD, HID bis sumptis; patet ergo ea inter se illam obtinere rationem quæ inter quadrata ABCD reperitur.

d 61. Huius

PROPOSITIO LXXVII.

DAtarum duarum alteram ita secare, vt sectæ partes cum insecta, in continua sint analogia.

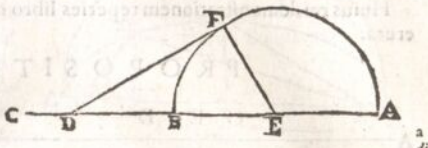
Propositionem hanc demonstratam inuenies in libro nostro de progressionibus geometricis propos. 36. duplici methodo: lubet aliâ tamen praxi hic eandem expedire.

Con-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [103] - 46
PUBLIC DOMAIN

Constructio & Demonstratio.

SInt AB, BC lineæ quarum alteram BC, ita oporteat partiri in D. vt sint in continua ratione, AB, BD, DC: diuisâ AB bifariam in E, fiat rectangulo super datis ABC contento, vnà cum quadrato dimidiæ, EB æquale quadratum ED, cadet punctum D, inter C & B, cùm EC quadratum sit æquale [a] quadrato BE vnà cum rectangulo ACB, quod maius est rectangulo ABC: adeoque & EC quadratum maius quadrato ED. Dico itaque peractum quod postulatur: constituto enim super AB semicirculo AFB, ducatur tangens FD, iungaturque FE ad centrum; erit itaque quadratum DE, quadrato DF, hoc est [b] rectangulo BDA; vnà cum quadrato EB, hoc est quadrato EF æquale. Adeoque rectangulum ADB, vnà cum quadrato EB, ipsi ABC cum eodem quadrato æquabitur, ablato igitur communi quadrato BE remanet ADB rectangulum, æquale ABC rectangulo, quare AD est ad AB, vt est BC ad DB. & vt AB ad BD, ita DB ad DC; sunt igitur CD, DB, BA in continua ratione; igitur datarum duarum alteram ita secuimus, &c. Quod erat faciendum.



[a] 6. Secundi.

[b] 35. Tertij.

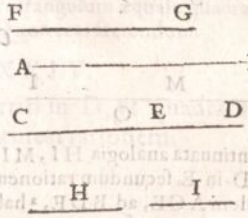
PROPOSITIO LXXVIII.

DAtarum duarum alteram ita partiri, vt rectangulum sub indiuisa & altera parte diuisæ, ad quadratum residuæ, datam habeat rationem.

Constructio, & demonstratio.

PRopositionem quam priùs particularem soluimus in ratione æqualitatis, conabimur quoque vniuersaliter soluere.

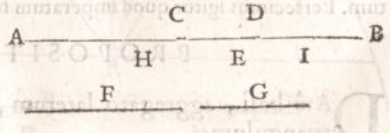
Sint igitur, AB, CD, lineæ, oporteatque diuidere CD, in E. vt rectangulum AB DE, ad quadratum CE, rationem habeat datam H, ad I. Fiat vt H ad I, sic AB ad FG; deinde CD diuidatur in E, vt ED, EC, FG sint continuæ per præcedentem. Dico factum esse quod petitur. erit enim rectangulum super ABED, ad quadratum CE; vt idem ABED rectangulum, ad rectangulum FG ED, id est vt AB, ad FG, id est per constructionem vt H ad I. Diuisimus igitur lineam CD, &c. Quod erat faciendum.



Huius Propositionis aliam inuenies demonstrationem in libro nostro de progressionibus. Propos. 37.

PROPOSITIO LXXIX.

DAtam AB sectam in C & D, ita secare in E puncto, inter C & D constituto, vt rectangulum AED, ad CEB rectangulum; datam obtineat rationem quadrati F, ad G quadratum.



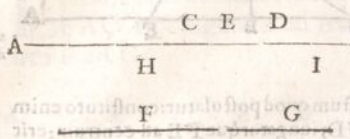
Con-

Constructio & demonstratio.

DIuidatur AD in H; & CB in I bifariam; & recta HI diuisa sit in E vt sit HE ad EI, sicut est F ad G. Dico rectangulum AED, ad CEB rectangulum habere rationem quadrati F, ad G, quadratum.

Huius rei demonstrationem reperies libro de parabola. Ex cuius proprietatibus est eruta.

PROPOSITIO LXXX.



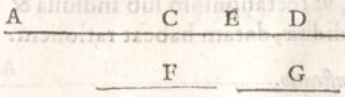
DAtam iterum AB, sectam vtcunque in C & D, denuo partiri in E, vt rectangulũ AEC ad BED datam rationem cõtineat quadrati F, ad G.

Constructio & demonstratio.

DIuidantur vt priùs rectæ AD, CB, in H, & I punctis bifariam; quo facto diuidatur HI recta in E, secundùm proportionem G, ad F. Dico rectangulum AEC, ad BED rectangulum, datam habere rationem quadrati F, ad G quadratum.

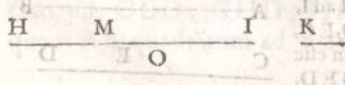
Huius quoque demonstrationem inuenies eodem libro de parabola.

PROPOSITIO LXXXI.



DAtam denuo AB, diuisam vtcunque in C & D, iterum diuidere in E, vt rectangulum ACE, ad BDE rectangulum, datam obtineat rationem quadrati F ad G.

Constructio & demonstratio.



FIat vt AC ad DB, ita HI, ad KL; & vt F ad G, ita IM ad KN, tandem fiant in continuata analogia HI, MI, OI; & similiter KL, NK, PK: denique diuidatur CD in E, secundùm rationem IO ad KP; Dico factum quod requiritur. Rectangulum ACE, ad BDE, [a] habet rationem compositam ex AC, ad DB, hoc est HI, ad KL, & ex ratione CE ad ED, hoc est OI, ad KP. Igitur rectangulum ACE, ad BDE eandem obtinet rationem, quam rectangulum HIO ad LKP; sed HIO ad LKP, eandem habet rationem, quam quadratum IM ad KN, (ex constructione enim sint tres in continua analogia tam IO, IM, IH, quàm KP, KN, KL.) hoc est quàm quadratum F, ad G, quadratum; Igitur rectangulum ACE, ad BDE, eandem rationem continet, quam F quadratum, ad G quadratum. Perfecimus igitur quod imperatum fuit.

[a] 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LXXXII.

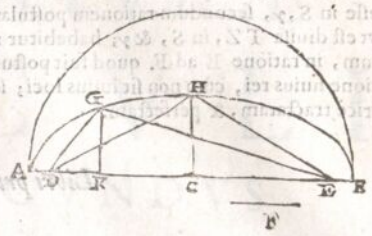
DAtâ basi, aggregato laterum, & altitudine trianguli, exhibere triangulum.

Con-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [105] - 48
PUBLIC DOMAIN

Constructio & demonstratio.

DAto laterum aggregato, æqualis ponatur AB; quâ bifariam diuisâ in C, fiat DE æqualis basi trianguli, bifariam diuisæ in C, & altitudini æqualis ponatur F; ex lateribus AC, CB; DE, fiat triangulum DHE; nam AC, CB simul sumptæ maiores sunt DE. erit igitur DHE Isosceles: deinde fiat vt HC quadratum, ad quadratum F, sic ACB rectangulum, ad rectangulum AKB, & erigatur KG æqualis ipsi F, parallela HC, iunganturque DG, GE. Dico DGE triangulum esse quæsitum.



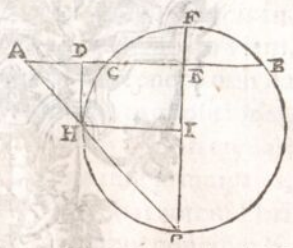
Demonstrationem huius inuenies libro de ellipsi Propos. 121.

PROPOSITIO LXXXIII.

DAtam AB sectam in C, diuidere in D, vt quadratum AD, æquale sit CDB. rectangulo.

Constructio & demonstratio.

Diuisa CB in E bifariam, ponatur ex E normalis EG, æqualis ipsi AE; iunctisque AG, describatur per C, B, G, puncta circulus CBG, occurrens EG lineæ in F: diuisâque FG bifariam in I, agatur per I recta IH parallela ipsi CB, occurrens AG lineæ in H puncto; ex quo normalis erigatur HD, occurrens CB lineæ in D. Dico factum esse quod petitur: cùm enim HI parallela sit ipsi AE, ponanturque AE, EG lineæ æquales, erunt & HI, IG quoque inter se æquales, & H communis intersectio linearum HI, HG cum circulo. Vnde & HD eundem contingit in H: estque CDB a rectangulum æquale quadrato HD, id est AD. Diuisimus igitur AB lineam, &c. Quod erat faciendum.



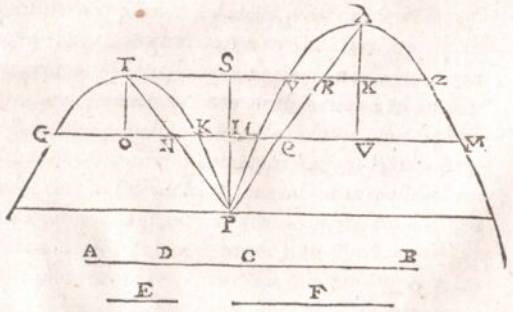
a 35. *Tertij.*

PROPOSITIO LXXXIV.

DAtam rectam AB sectam in C, denuo partiri in D, vt quadratum AD, ad rectangulum BDC, datam obtineat rationem.

Constructio & demonstratio.

DAta sit ratio E ad F, & fiat rectangulũ aliquod GIK, quod ad rectangulum LIM rationem eandem cũ ratione E ad F contineat; hoc facto ponatur quædam IS, orthogonalis ad GM, & inuentâ IN mediâ inter KI, IG; diuidatur KG bifariam in O, & erigatur OT parallela IS, donec concurrat cum TS, quæ æquidistet GM, in T: & iungatur TN, quæ SI productæ occurrat in P. Deinde inuentâ mediâ IQ inter LI, & IM, ducatur recta PQ, occurrens



rens T S protractæ in R. tandem diuidatur L M bifariam in V, & erigatur V X æquidistans T O, concurrens cum P Q in λ; & fiat vt V λ quadratum, ad quadratum X λ, ita quadratum V L, ad X γ quadratum: Dico T Z lineam diuisam esse in S, γ, secundùm rationem postulatam; vnde si diuidatur A B in D, & C. vt est diuisa T Z, in S, & γ; habebitur ratio quadrati A D, ad C D B rectangulum, in ratione E ad F. quod fuit postulatum. Vlterius non pergo in demonstratione huius rei, cùm non sit huius loci; sed eam reperies libro de parabola Geometricè tractatam, & perfectam.

Libri primi finis.



QVA-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [107] - 50
PUBLIC DOMAIN

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SECVNDVS

DE

PROGRESSIONIBVS GEOMETRICIS.

AD LECTOREM.

PRæsens liber, quem de progressionibus Geometricis inscribimus, omnino necessarius est ad sternendam viam, quam inimus circulo ad quadratum reducendo: non ita tamen hoc velim intelligas, vt omnes omnino propositiones, quę in toto eius decursu reperiuntur, ad eum finem requiri credas; sed quod sine vsu huius libri, quoad partes maximè principales, difficulter ad scopum peruenire quis possit: exigebat autem libri argumentum, ad doctrinæ formam vel leuiter saltem concinnari, & cognatis materijs exornari, ne fætum imperfectum ederemus. Idem de sequentibus libris iudicium ferre dignabere.

ARGVMENTVM.

PLurimi de hoc argumento Speculationes non tantùm Theorematicas, verùm etiam Problematicas conscripserunt: sed omnes, prout ex libris huc vsque conscriptis cognoscere potui, Arithmeticas materias concernentes, in medium attulerunt: quas authoribus suis omnino intactas relinquo; mei enim instituti est progressiones tractare Geometricas, non Arithmeticas: & per illas cognoscere quantitatum omnis speciei magnitudines, siue illæ in lineis, siue superficiebus, vel etiam solidis exhiberi debeant. Occasionem huic considerationi subministrarunt nonnulla, cùm in Archimede, tum in Euclide loca, quæ iubent in constructione Geometrica, auferri (verbi gratia,) ab aliqua quantitate dimidium, & huius iterum dimidij dimidium, & pro clausula adfertur, & hoc semper fiat. Titillauit me hæc particula & coëgit morosiore cogitatione circa hæc versari: tandem post longas vexas intellectus, ea quæ mihi inciderũt, tibi benigne Lector communico, vt quæ huic materiæ desunt supplere digneris. Illam etenim solùm direxi ad cognoscendas quantitates, quas instituto meo necessarias esse arbitratus sum: communi enim Geometriâ, quam à vete-

ribus accepimus, non existimaui posse quempiam viam sibi sternere, ad problemata soluenda, quæ à Mathematicis per tot sæcula desiderantur: vnde nouas artes & methodos nouas iudicaui excogitandas, quæ supplerent Geometriæ antiquæ defectus; dignaberis itaque benigne Lector, boni hæc consulere, & cùm aduerteris, multa hîc esse quæ incudi reddi debeant, vtpote malè tornata; memineris velim ita scientias in orbem esse ingressas; primò mutilas & inconcinnas, quas multorum tandem manus ad perfectum nitorem reduxerunt; facili etenim negotio inuentis quidpiam addi potest, plura quippe vident oculi, quàm oculus; qui domini sui iussu certis terminis se continere cogitur.

In quatuor partes partimur hunc tractatum, quo distinctiùs procedamus, & captui tyronum magis inseruiamus.

Prima inseruiet contemplationi progressionum inchoatarum, siue necdum terminatarum, quod terminus progressionum nondum in considerationem adducatur. quid autem sit Progressio Geometrica, quis eius terminus, & his similia, patebit ex sequentibus. Sed tribus verbis conabimur præsentis partis nomenclaturam explicare.

A B C
D E F G

Detur quæuis ratio A ad B; & petatur tertia proportionalis ad has duas quantitates, exhibeaturque tertia C: continuatio trium horum terminorum dicetur esse progressionis interminatæ; eo quod possit vlteriùs procedi in eadem serie: nam si dentur tres quantitates D, E, F, & addatur quarta G, quæ continuet eandem rationem D ad E, progressio terminorum D, E, F, G, vlterius est producta, quàm sit progressio terminorum A, B, C: cùm hæc consistat in duabus rationibus; illa verò in tribus. Porro hac methodo procedendo, continuò auctis rationibus; augetur progressio; manet interim semper interminata. Hæc igitur pars prima non perget vlterius, & sistet in sola consideratione Progressionis huius, quam vocamus interminatam, ad distinctionem alterius, quæ tota exhaurietur, ac proinde terminabitur seipsâ. varijs igitur proprietatibus in choatæ progressionis in medium allatis, subsequitur

Secunda pars, quæ tota versabitur circa progressionem terminatam, absolutam, siue exhaustam; atque hoc vniuersim in quocunque genere quantitatis: indagando scilicet cuiuscunque rationis, si in infinitũ censeatur continuata, magnitudinem, seu quantitatem. neque velim quis in animum inducat, nos materiam ingredi, quæ placitis philosophorum contradicat: imò ostendemus luce clarius, hâc nostrâ methodo dissolui etiam grauissimas difficultates, quibus in Gymnasijs & Philosophorum Licæis solent in materia quantitatis inuicem esse molesti. Quod vt exemplo vno manifestiùs explicetur, subeat memoria argumenti, quod Achilles Zenonis nominatur, quo omnem motum eliminare ex orbe se posse contendebat: omnibusque studebat persuadere, falli oculos, dum quid loco moueri arbitrarentur; argumento ad id formato duorum, quæ mouerentur; Achillis scilicet velocissimè currentis, & testudinis tardissimè reptantis.

A B D E C

Ponatur, inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A puncto, testudinem pergentem per semitam BC tardissimo motu, velle assequi suo cursu: Quo tempore Achilles tendit ex A in B, mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in D; igitur necdum Achilles assecutus est testudinem: iterum quo tempo-

re

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [109] - 52
PUBLIC DOMAIN

re ex B. Achilles currit, vt assequatur testudinem existentem in D, mota est testudo perueniens ad E punctum; igitur nondum assecutus est testudinem, atque hoc in infinitum continget; igitur nunquam assequetur Achilles testudinem. Argumentum hoc Zenonis facillimè expedietur per ea, quæ secundâ huius libri parte adferemus; nam ex doctrina illius partis, non solùm manifestum fiet, Achillem peruenturum ad testudinem, sed ipsum punctum assignabitur in quo apprehensio testudinis futura est.

Tertia Pars huius libri versabitur circa progressiones terminatas planorum præsertim similium, quæ commodiora sunt vt ad doctrinæ seriem reducantur: vt si datis duobus quadratis in ratione maioris inæqualitatis, quis requirat superficiem exhiberi, quæ æqualis existat magnitudini, quam tota illa series quadratorum produceret, orta ex progressione rationis primi quadrati ad secundum, & huius secundi ad tertium, & sic in infinitum: atque vt idipsum familiariùs exponam, ponatur quis equum generosissimum velle à quopiam mercari, qui vulgi opinione mille aureis æstimatur: cumque mille aurei eidem non sint ad manum, hac sponsione contrahit, se post mensem centum aureos ei donaturum; post secundum verò mensem quinquaginta, post tertium verò viginti quinque, atque ita deinceps; post singulos menses, perpetuo censu dimidium dimidij pretij pendat eius, quod postremo mense creditori persoluerit: tandem pertæsus molestiarum, conetur pacisci cum eodem, offerendo ducentos aureos pro residuo, vt ab illo censu sese expediat, quis horum duorum tali contractu decipitur; emptorne an venditor? huius & similium quæstionum solutiones, doctrina tertiæ partis huius libri, liquidissimè expediet: & assignabit, quæ post singulos menses summa sit residuè debiti; imò & si quis postularet nosse qualis summa residua esset futura, post centesimum, imò millesimum mensem, Geometricâ certitudine ex præsentis Partis scientia cognoscet.

Quarta Pars totam doctrinam prioribus partibus explicatam corporibus solidisque applicabit: Spero huius tractatus argumentum non fore illis ingratum, qui communi Geometria exculti sunt; admiranda enim Theoremata huius libri notitiâ eruuntur, & Problemata (quæ communi Geometria difficili methodo soluuntur) praxi commodissimâ expediuntur: sine adminiculo enim huius libri nulla esset huius operis lucubrationum certitudo, quæ maxima ex parte huic fulcimento innixa est.

DEFINITIO PRIMA.

GEometricam seriem voco quantitatem finitam, diuisam secundùm continuationem cuiuscunque rationis datæ.

Explicatio.

QVamuis sensus, quem verba indicant obscurus non videatur, nihilominus mentem meam circa definitionem præsentem censui apponendam: ponatur itaque linea quæuis A B, diuisa in C, secundùm quamcumque proportionem; & fiat quemadmodum est tota A B ad C B, ita C B ad D B, & denuo vt C B ad D B, ita

A C D E F G B

D B ad E B, & hoc semper fiat. Oritur in hac ratione procedendi duplex consideratio; prima, rationis A B ad C B, & C B ad D B, & vlterius D B ad E B, atque ita deinceps: altera rationis A C ad C D, & C D ad D E, iterum D E ad E F, & ita consequenter; & licet hæ considerationes videantur diuersæ, in vnum tamen scopum collimant: nam cùm ratio A B ad C B, & C B ad D B, eadem sit cum ratione A C ad C D, & C D ad D E, atque ita vlteriùs, si fiat rectæ A C æqualis H I & hæc H I,

H K L M I

diuidatur in punctis K, L, M, secundùm rationem A B ad C B, & C B ad D B, &c. tunc apparebit ratio, qua duæ istæ considerationes in vnam coalescunt; si quis igitur petat, quid velim intelligi nomine seriei? respondeo me nomine seriei, totam illam continuationem linearum intelligere, quarum prima est A C, secunda C D, ita vt ratio A C ad C D, eadem sit cum illa quam obtinet C D ad D E, atque ita deinceps terminatam eodem termino, quo terminatur ratio A B ad C B, &c. Et quia in definitione, particula adiuncta est *finitam*; hinc hoc loco explicare cogor seriem per rationes A B ad C B, & C B ad D B, & ita consequenter, cùm necdum demonstratum sit quo puncto lineæ A C D terminus existat seriei rationis A C ad C D. nam plusquam notum est, apud philosophos, nunquam perueniri posse ad terminum continuationis, per partes proportionales A C ad C D, & C D ad D E, cùm residua semper remaneat quantitas diuidenda, secundùm easdem rationes; quare terminus, hoc tenore progrediendi acquiri nequit: sed si quis procedat iuxta considerationem continuationis A B ad C B, & C B ad D B, & sic in infinitum, semper includit terminum, ad quem per continuationem rationis A C ad C D, peruenire nequit; seriem itaque voco, quantitatem finitam A B, diuisam secundùm continuationem rationis A C ad C D, & C D ad D E. quæ eadem semper existit cum ea quæ fit continuando rationes A B ad C B. Quotiescunque igitur occurret mentionem fieri continuationis alicuius seriei A C ad C D, & C D ad D E; subeat animo continuationem hanc finitam esse, & totam illam terminorum infinitorum collectionem, alibi terminatam esse: quę collectio series alicuius rationis Geometricæ nuncupatur.

DEFINITIO SECVNDA.

PRogressio Geometrica est quotcunque terminorum secundùm eandem rationem continuatio.

Explicatio.

ESt itaque omnis progressio pars seriei, cùm vt explicatum est, omnis series sit continuatio alicuius rationis eousque producta, donec ampliùs protrahi nequeat, modo priùs explicato; Progressio verò prout differt à serie, propriè interminata est; ac proinde eius pars: vbi tamen inueneris in contextu sequentium, agi de tota progressione rationis alicuius continuata, de serie agi memineris, neque enim hæc magis scru-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [111] - 54
PUBLIC DOMAIN

ſcrupulosè obſeruari volo, quàm à Geometris omnibus ſeruatur nomenclatura proportionis, vel rationis; quarum licet altera in duobus terminis conſiſtat, altera in pluribus, nihilominus, pro arbitratu ſcribentis, paſſim confunduntur. Sint igitur hæc præmiſſa, ſi non exactarum definitionum loco, ſaltem vberioris explicationis ſupplemento. Datis itaque A & B: vel ratio A ad B eſt maioris inæqualitatis, vel prorſus æqualitatis, vel minoris inæqualitatis: quod ſi fiant cõtinuæ proportionales A B C D. huiuſmodi continuatio progreſsio vocetur, quotcunque tandem termini exſtant.

A B C D

A B C D

A B C D

Progreſsio verò Geometrica iam explicata duplex eſt; alia continua, alia diſcreta. Continua eſt cùm omnes termini rationem connectentes, habent rationem antecedentis, & conſequentis; vt in ſcemate rationum explicatarum, ſi fuerit quemadmodum A ad B, ita B ad C; & quemadmodum B ad C, ita C ad D, atque ita in quouis tandem numero terminorum; huiuſmodi progreſsionem continuam voco.

Diſcreta progreſsio eſt ſimilium rationum ſecundùm aliquam continuationem poſitio, vt conſequentes non fiant antecedentes. exempli cauſa; ſi fiat quemadmodum A eſt ad B, ita C ad D. & B fuerit minor quam A, vel C, talem progreſsionem in quotlibet tandem terminis conſtituta ſit, voco diſcretam; etiam in his terminis 1. 2. 5, 10. 3, 6, 8, 16. Vbi diſcreta ratio valde interrupta eſt, quia eſt continuatio ſimilium rationum.

A B C D

DEFINITIO TERTIA.

TErminus progreſſionis eſt ſeriei finis, ad quem nulla progreſſio pertinget, licet in infinitum continuetur; ſed quouis interuallo dato propiùs ad eum accedere poterit.

Explicatio.

A C D E F G B

POnatur recta AB, diuiſa in C D E F G. vt continuent eandem rationem A B, CB, DB, EB, FB, GB. Cùm ſit eadem ratio AC ad CD, & CD ad DE, atque ita deinceps, cum ea, quæ reperitur inter lineas AB, CB, DB, &c. ſimilis quoque erit eiuſdem rationis progreſsio AC ad CD, cum progreſsione AB, ad CB. terminus autem rationis AC ad CD, *dicitur punctum* B, ſiue illum intrinſecum velis, ſiue extrinſecum, per me licet; nam de re nobis eſt hîc quæſtio, non de verbo: ad quod punctum nulla progreſsio pertingere valet, cùm omnis progreſsio interminata pars ſeriei exiſtat: nihilominus tamen, poterit ad illum progreſſio per continuationem magis ac magis accedere, ita vt vicinior vltimus terminus progreſſionis interminatæ exiſtat ipſi termino ſeriei, quàm ſit diſtantia quæcunque propoſita.

An autem talis detur terminus progreſsionis, & quo pacto inueſtigari debeat, libro ſecundo huius tractatus diſceptabitur, illud interim inſinuatũ hoc loco deſidero, huiuſmodi terminum ſolùm reperiri in ijs progreſsionibus, quę proportionem maioris inæqualitatis continuant, nam earum progreſsionum quæ vel terminis ſemper æqualibus conſtant, vel certè terminis minoris inæqualitatis, nullum aſsignari poſſe terminum, manifeſtum nimis eſt, quàm vt explicatione indigeat; quandoquidem dictæ progreſsiones, ſi continuentur, magnitudinem quauis data maiorem exhibere natæ ſint. Itaque ſecundo libro, tertio, & quarto, in quibus progreſsiones iam terminatæ conſi-

considerantur, nullæ proponentur, præter eas, quæ maioris erunt inæqualitatis: in primo verò, quoniam illic à termino adhuc abstrahitur, etiam progressiones æqualitatis, & minoris æqualitatis contemplabimur. Terminus igitur progressionis talis est, quemadmodum explicuimus, cùm scilicet aggregatum, siue summa terminorum progressionis, quantumuis continuatæ, numquam excedit quandam magnitudinem; excedit verò omne minus illa magnitudine, atque ita posset etiam dici productum siue quantitas totius, datæ progressionis, & magnitudo illa æqualis dicetur toti progressioni datæ; hoc est omnibus terminis proportionalibus simul sumptis. Idem igitur quoad rem erit, siue terminum quærere progressionis, siue magnitudinem toti progressioni parem, siue ipsammet integram seriem progressionis exhibere. sed hæc meliùs propositione quinta, secundæ partis, huius libri, percipi poterunt. Si quid prætereà pertinebit ad terminorum explanationem, in decursu operis exponetur.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [113] - 56
PUBLIC DOMAIN

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS PRIMA

Progreßiones conſiderat indeterminatas.

PROPOSITIO PRIMA.

COntinuè proportionalium differentiæ ſunt in continua analogia eiuſdem rationis ſuorum integrorum

A B C D E F G

Sint magnitudines continuæ proportionales AG, BG, CG, DG, EG, FG. oſtendendum eſt AB, BC, CD, DE, EF differentias in continua eſſe analogia ſuorum integrorum, & contrà ſi AB, BC, CD, &c. fuerint continuæ, & FG addatur vt AG, BG, AB, BC ſint proportionales; Dico & AG, BG, CG, &c. eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

QVoniam AG eſt ad BG, vt BG ad CG: erit diuidendo vt AB ad BG, ſic BC ad CG: & permutando AB ad BC, vt BG ad CG, ſiue vt AG ad BG. Similiter BG eſt ad CG, vt CG ad DG: & diuidendo BC ad CG vt CD ad DG, & permutando BC eſt ad CD, vt CG ad DG, id eſt vt BG ad CG, id eſt vt AG ad BG. atqui erat vt AG ad BG, ſic AB ad BC, ergo BC eſt ad CD vt AB ad BC. Continuæ ſunt igitur proportionales AB, BC, CD, & quidem in analogia ſuorum integrorum AG, BG. ſimili ratione oſtendam reliquas cum his tribus eſſe continuas: quod erat primum.

Sint iam AB, BC, CD, &c. continuæ, quibus addita ſit FG, ſic vt AG ſit ad BG vt AB ad BC. Dico omnes AG, BG, CG, DG, &c. eſſe in continua analogia differentiarum. Quia vt AB ad BC, ſic AG ad BG, ergo permutando & diuidendo, & rurſum permutando vt AB ad BC, hoc eſt ex datis vt AG ad BG, ſic BG ad CG. quoniam autem iam BG eſt ad CD, vt AG ad BG, hoc eſt ex datis vt AB ad BC, hoc eſt rurſum ex datis vt BC ad CD, eodem planè diſcurſu oſtendemus BG, CG, DG eſſe continuas, & quidem in ratione BC ad CD, hoc eſt AB ad BC. Quare cùm etiam AG, BG, CD ſint in eadem ratione continuæ, omnes quatuor AG, BG, CG, DG erunt in ratione AB ad BC continuæ. ſimiliter oſtendemus & reliquas cum iiſdem eſſe continuas. Patet igitur veritas propoſitionis.

PROPOSITIO II.

SI quatuor fuerint quantitates in continuata analogia, erunt aggregata ex prima & ſecunda, ex ſecunda & tertia, ex tertia & quarta, in continua proportione.

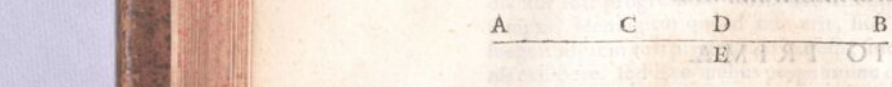
A B C D E

Demonſtratio.

SVnto quatuor in continua analogia AB, BC, CD, DE. Dico etiam AC, BD, CE, eſſe continuè proportionales. cùm enim ſit vt AB ad BC, ita BC ad CD,

a 12. Quinti. erit[a] vtraque antecedens AC, ad vtramque consequentem BD, vt AB ad BC, vnà antecedens, ad vnam consequentium: simili modo quia BC ad CD, est vt CD ad DE, erit vtraque antecedens BD, ad CE vtramque consequentem, vt BC ad CD, id est vt AB ad BC, hoc est vt AC ad BD. Sunt igitur AC, BD, CE in continua analogia, quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO III.



SIt AB diuisa in C & D. vt ratio AB ad AC duplicata sit eius, quam habet BD ad DC.

Dico AC, AD, AB. tres esse in continua ratione.

Demonstratio.

POnatur AE, media inter AB, & AC; igitur tres erunt continuæ quantitates AC, AE, AB. quare per primam huius erit ratio AB ad AE, eadem cum ratione BE ad EC. sed ratio AB ad AC, duplicata est rationis AB ad AE, igitur & ratio AB ad AC duplicata est rationis BE ad EC. quare diuisa est CB in E, vt diuisa est eadem CB in D: ac proinde punctum D, vnum idemq; est cum puncto E. Vnde cùm sint tres continuæ proportionales AC, AE, AB, ex constructione, erunt quoque in continuata ratione AC, AD, AB. Quod demonstrandum fuit.

PROPOSITIO IV.

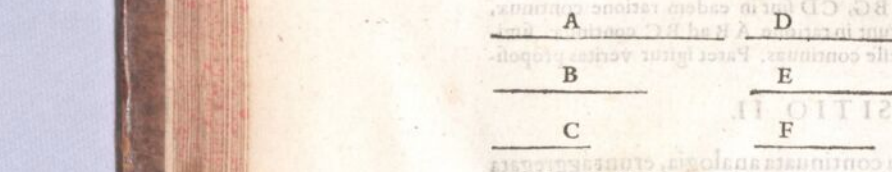
QVod si AB, AC, AD, sint quantitates proportionales:
Dico AD ad AB, rationem eius habere duplicatam, quam habet DC ad CB.



Demonstratio.

RAtio enim AD ad AB, duplicata est rationis AD ad AC, sed per primam huius vt AD ad AC, ita quoque est DC ad CB, igitur ratio AD ad AB duplicata est rationis DC ad CB: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.



SInt tres continuæ proportionales A, B, C; sit autem ratio A ad B, triplicata eius, quam habet D ad E: ratio quoque B ad C, triplicata rationis E ad F.

Dico D, E, F quantitates, in continua fore analogia.

Demonstratio.

CVm ratio A ad B, sit eadem cum ratione B ad C; igitur etiam ratio B ad C triplicata est rationis D ad E. est autem & ratio B ad C ex suppositione triplicata eius quam habet E ad F; igitur ratio D ad E, est eadem cum ratione E ad F. Sunt igitur in continuata proportione D, E, F. Quod demonstrandum fuit.

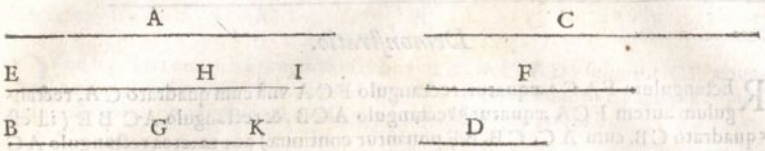
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [115] - 58
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VI.

SIt A ad BK in minore ratione, quàm C ad D.
Dico A ad EI mediam proportionalem inter A & BK, esse in minori ratione, quàm sit C ad F mediam inter C & D.

Demonstratio.



Fiat enim A ad BG in ratione C ad D, erit [a] BG minor quàm BK. Et fiat inter A & BG media EH, erit quoque EH minor quàm EI. Rursum quia A ad BG, duplicatam habet rationem A ad EH, & C ad D eamdem ex constructione habet rationem, quam A ad BG; habebit etiam C ad D rationem duplicatam eius, quam habet A ad EH: sed & C ad D duplicatam habet eius, quam C ad F; igitur ratio C ad F, eadem est cum ratione A ad EH; sed EI ostensa est maior quàm EH, igitur A ad EI [b] minorem habet rationem, quàm A ad EH, id est quàm C ad F. Quod erat ostendendum.

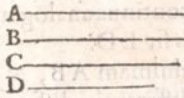
[a] 10. Quint.
[b] 8. Quinti.

Corollarium.

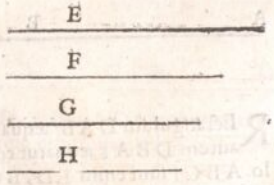
SImili modo demonstrabitur si plures mediæ inter primam & secundam, & inter tertiam & quartam ponantur, fueritque in prioribus maior proportio vel minor primæ ad secundam, quàm in posterioribus tertiæ ad quartam; fore etiam in prioribus primæ ad primam mediarum, vel secundam, aliamque quamcumque maiorem vel minorem proportionem, quàm tertiæ ad similem ordine mediam inter posteriores.

PROPOSITIO VII.

SInt duo ordines continuè proportionalium A, B, C, D, & E, F, G, H: & maior sit ratio A ad B, quàm E ad F.



Dico maiorem quoque esse rationem A ad C tertiam, vel D quartam, quàm E ad G tertiam, vel H quartam.



Demonstratio.

CVm enim sit eadem ratio A ad B, quæ B ad C, & C ad D; Similiter F ad G ratio, & G ad H eadem, quæ est E ad F, sitque A ad B maior ratio, quàm E ad F; erit etiam tam B ad C quàm C ad D maior ratio, quàm F ad G, aut G ad H: & proinde erit A ad [c] C maior ratio, quàm E ad G: & similiter B ad D maior ratio, quàm F ad H; & A ad D maior quàm E ad H: quæ erant demonstranda.

[c] 31. Quinti.

PROPOSITIO VIII.

SInt tres magnitudines AC, AB, AF; & FE æqualis sit CB. Dico si AC minima trium, & CB minor differentia, & BE, vtriusque differentiæ, differentia sint continuè proportionales, ipsas quoque magnitudines AC, AB, AF esse in continua ratione.

A C B E F

Demonstratio.

REctangulum FAC [a] æquatur rectangulo FCA vnà cum quadrato CA, rectangulum autem FCA æquatur [b] rectangulo ACB, & rectangulo AC BE (id est [c] quadrato CB, cum AC, CB, BE ponantur continuæ) ac præterea rectangulo AC EF; id est ACB, quia æquales sunt CB, EF; igitur rectangulum FAC æquatur quadratis AC, CB, & rectangulo ACB bis, hoc est quadrato [d] AB; sunt [e] igitur tres proportionales magnitudines AC, AB, AF. Quod erat demonstrandum.

a 3. *Secundi.* b 1. *Secundi.* c 17. *Sexti.* d 4. *Secundi.* e 17. *Sexti.*

Aliter.

VT BC ad CA, sic EB ad BC, id est EF: igitur componendo vt BA ad CA, sic BF ad EF, hoc est BF ad BC: ergo permutando & componendo FA ad BA, vt BA ad CA. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

A C B E F

SI autem AC, CB, EF fuerunt proportionales, & BE æqualis CB minori differentiæ, erunt rursum AC, AB, AF continuæ proportionales. Demonstratio eadem est, quæ propositionis iam positæ.

PROPOSITIO IX.

SInt in continua analogia AB, AC, AD, & minori differentiæ BC, æqualis sit ED.

Dico minimam AB, & minorem differentiam BC, deinde & CE, vtriusque differentiæ differentiam, esse proportionales.

A B C E D

Demonstratio.

REctangulum DAB [f] æquatur rectangulo DBA, & quadrato AB: rectangulum autem DBA [g] æquatur rectangulis ABC, & AB ED, id est rursus rectangulo ABC (sunt enim ED, BC lineæ æquales) & rectangulo AB CE: ergo rectangulum DAB, æquatur quadrato AB, & rectangulo ABC bis, & præterea rectangulo ABCE; quadratum verò AC, æquatur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC: Atqui cùm AB, AC, AD ponantur continuæ proportionales, erit rectangulum [h] DAB æquale quadrato AC; ergo quadratum AB, rectangulum ABC bis, & rectangulum AB CE simul sumpta, æquantur quadrato AB, rectangulo ABC bis, & quadrato BC simul sumptis. Itaque demptis communibus quadrato AB, & rectangulo ABC bis, æqualia remanent quadratum BC, & rectangulum AB CE; quare AB, [i] BC, CE, sunt tres continuæ proportionales. quod erat demonstrandum.

f 3. *Secundi.* g 1. *Secundi.* h 17. *Sexti.* i *Ibidem.*

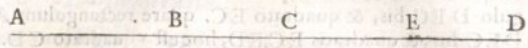
Aliter.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [117] - 60
PUBLIC DOMAIN

Aliter.

QVoniam DA, CA, BA ponuntur proportionales, ergo per primam huius DC ad CB est vt CA ad BA: quare (cùm æquales sint DE, BC ex hypothesi) vt CD ad ED, sic CA ad BA; ergo diuidendo CE ad ED, hoc est, CB, vt CB ad BA. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

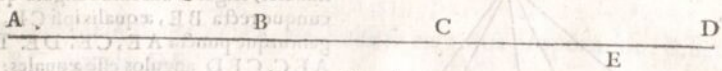


QVod si positis continuè proportionalibus AB, AC, AD, sumatur CE, æqualis minori differentiæ BC, erunt AB, BC, ED in continua analogia: quod demonstrabitur prorsus eodem modo quo propositio iam posita.

PROPOSITIO X.

SInt tres magnitudines AB, AC, AD, in continua analogia; ponantur autem maxima trium AD, & maior differentia CD, dein & tertia quæpiam ED, continuæ proportionales.

Dico BC, CE, æquales esse lineas.



Demonstratio.

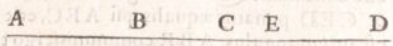
CVm tres ponantur continuæ AB, AC, AD, erit DC ad [a] CB, vt DA ad CA: quare [b] rectangulum DCA rectangulo DABC, æquale est. Similiter cùm ponantur continuæ AD, CD, ED, est AC ad CE, [c] vt AD ad CD: ergo rectangulum idem ACD æquatur etiam rectangulo ADCE. rectangula ergo ADBC, AD, CE, inter se æquantur; vnde BC, [d] CE æquales sunt. quod erat demonstrandū.

[a] 1. *Huius*
[b] 16. *Sexti.*
[c] 1. *Huius.*
[d] 1. *Sexti.*

Aliter.

QVandoquidem ponantur continuæ AB, AC, AD, ergo per primam huius vt DA ad CA, sic DC ad CB. Iterùm quoniam ponuntur continuæ AD, CD, ED; per primam huius vt AD ad CD, sic AC ad CE; & permutando vt AD ad AC, sic CD ad CE. Sed vt AD ad AC, sic ostendi esse CD ad BC; ergo CD est ad CE, vt CD est ad BC. æquales igitur sunt BC, CE. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

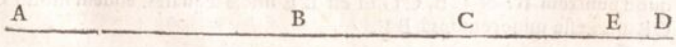


SImili planè modo, si positis continuis AB, AC, AD, etiam AD trium maxima, CD maior differentia, & tertia quæpiam CE fuerint continuæ proportionales. Dico BC, ED æquales esse. Demonstratio eadem est quę propositionis decimæ.

PROPOSITIO XI.

SInt AB, AC, AD in continua analogia, & minori differentiæ BC æqualis sit CE.

Dico ED, CD, AD in continua quoque analogia esse.



Demonstratio.

A B C E D

a 3. *Secundi.* b 2. *Secūdi.* REctangulum ADE æquatur[a] rectangulo AED cum quadrato ED: rectangulum autem AED, æquatur rectangulo[b] DEC, & DECB, hoc est rursus rectangulo DEC (cùm CE, CB sint æquales) & rectangulo DEBA. Sed per corollarium nonæ huius, AB, BC, ED sunt continuę, ergo rectangulum EDAB æquale est quadrato BC, hoc est quadrato EC. rectangulum igitur AED æquatur rectangulo DEC bis, & quadrato EC. quare rectangulum ADE æquatur rectangulo DEC bis, & quadratis EC, ED, hoc est[c] quadrato CD. Vnde AD, CD, ED sunt tres continuæ proportionales, quod erat demonstrandum.

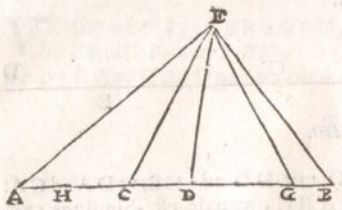
c 4. *Secundi.*

Aliter.

QVoniam DA, CA, BA ponuntur continuæ, erit per primam huius DA ad CA, sicut DC ad CB, id est CE: quia æquales sunt ex datis BC, CE: Itaque diuidendo vt DC ad CA, sic DE ad EC: & inuertendo vt AC ad CD, ita CE ad ED, & componendo vt AD ad CD, sic CD ad ED. Quod erat demõstrandum.

Corollarium.

EX hac propositione educitur hoc Theorema. Sint AB, CB, DB proportionales, erigatur autem ad angulũ quemcunque recta BE, æqualis ipsi CB, iunganturque puncta AE, CE, DE. Dico AEC, CED angulos esse æquales: & si AEC, CED anguli fuerint æquales, & CB linea æquetur rectę BE, dico AB, CB, DB esse proportionales: si verò AEC, CED anguli æquentur, & AB, CB, DB sint proportionales; dico CB, EB lineas esse æquales.



Demonstratio.

d 7. *Sexti.* QVoniam ponitur vt AB ad CB, hoc est BE, sic BE ad DB, & angulus ABE sit communis, erit DEB[d] triangulum, AEB triangulo simile, adeoque anguIus DEB angulo EAB æqualis. Rursum cùm CB, EB latera æquentur, erunt

e 32. *Primi.* anguli CEB, ECB æquales; est autem angulus ECB, æqualis[e] duobus angulis EAC, AEC. igitur angulus CEB æquatur duobus angulis AEC, EAC: sed DEB æqualis ostensus est angulo EAC; demptis igitur æqualibus EAC, DEB, manent AEC, CED reliqui æquales.

f *Ibid.* Sint iam anguli AEC, CED & CB, BE lineæ æquales, dico AB, CB, DB esse continuas. Quoniam angulus ECB hoc est CEB æquetur angulis EAC,[f] AEC; & CED ponatur æqualis ipsi AEC, erit DEB reliquus reliquo EAC æqualis: est autem angulus ABE communis; ergo tertius tertio æquatur, adeoque & AEB, DEB triangula similia: vnde vt AB ad EB hoc est CB, ita EB siue CB ad DB. Quod erat secundum.

Iam verò sint AEC, CED anguli æquales, & AB, CB, DB tres continuę proportionales: dico CB, EB lineas æquari: si enim non sint æquales, sit CB maior, fiatque CG ipsi BE æqualis. erunt igitur per secundã partem huius propos. AG, CG, DG

g 11. *Huius.* continuę proportionales. vnde si fiat HC æqualis ipsi CD, erunt tam[g] AG, AC, AH; quàm AB, AC, AH continuę proportionales; igitur tam AGAH rectangulum, quàm ABAH rectangulum, æquale quadrato AC medię communi: quare

h 14. *Sexti.* AGAH, ABAH rectangula æquantur inter se. Vnde vt AH, ad AH[h] sic AB ad AG; sed AH sunt æquales, ergo AG, AB rectæ æquantur, & G punctum idem est quod punctum B: & CB, CG, id est BE lineæ æquales. eodem modo ostenditur CB non esse minorem ipsâ BE.

PRO-

PROPOSITIO XII.

DEntur tres lineæ in continua ratione AB, BC, CD, ita vt BC sit maior AC, & fiat rectæ AC æqualis BE.
Dico AB, BE, ED esse proportionales.

A C E D B

Demonstratio.

CVm ponantur in continua analogia AB, BC, CD, igitur erit vt BC [a] ad CD ita AC, hoc est ex constructione BE ad BD. Ergo diuidendo vt BD ad DC, ita ED ad DB; & inuertendo vti CD ad BD, ita se habet BD ad DE. Quare [b] BD quadratum æquatur EDC rectangulo; quadratum autem [c] BE æquale est quadratis BD, DE, & rectangulo EDB bis sumpto: atqui rectangulum ABED æquatur iisdem: nam rectangulum ABED, æquatur EDC [d] rectangulo (hoc est, vt ostendi, quadrato BD) & rectangulo EDAC (hoc est rectangulo BED, id est rursum [e] quadrato ED cum rectangulo EDB, & rectangulo insuper EDB, rectangulum itaque ABED, cùm ijsdem æquale sit, æquabitur BE quadrato: patet igitur AB, [f] BE, ED esse in continua analogia. quod demonstrandum fuit.

[a] 1. *Huius.*
[b] 17. *Sexti.*
[c] 4. *Secundi.*
[d] 1. *Secundi.*
[e] 3. *Secundi.*
[f] 17. *Sexti.*

PROPOSITIO XIII.

POnantur AB, BC, CD, tres lineæ in continua proportione; & fiat BC æqualis DE.
Dico AE, EC, CD, esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVandoquidem ponuntur esse continuæ proportionales lineæ AB, BC, CD, etiam erunt continuæ proportionales AB, DE, CD; & BC mediæ æqualis DE erit quadratum DE rectangulo ABCD æquale. quadratū autem [g] CE æquatur CD, DE quadratis, & rectangulo CDE bis sumpto: quibus etiam æquatur rectangulum AECD. nam rectangulum AECD æquatur ECD rectangulo (hoc est quadrato [h] CD cum rectangulo CDE) & rectangulo DCB, hoc est (quia ex constructione BC, DE æquantur) iterum rectangulo CDE & rectangulo insuper ABCD, (id est, vt modò ostendimus, quadrato DE) quare rectangulum AECD cùm ijsdem æquale sit, quadrato CE æquari necesse est: adeoque CD, CE, EA esse in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

A B C D E

[g] 4. *Secundi.*
[h] 3. *Secundi.*

PROPOSITIO XIV.

SInt AB, AC, AD, in continua analogia; & fiat vt AB ad BC, ita BC ad E lineam; & vt AD ad DC, sic DC fiat ad F.
Dico E & F esse inter se æquales.

Demonstratio.

A B C G D

E F

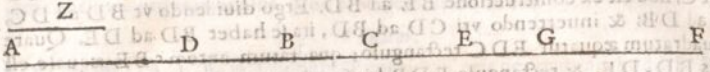
QVoniam supponuntur continuæ AB, AC, AD, si fiat DG æqualis BC, erunt continuæ [i] AB, BC, CG, ergo cùm ex datis etiam sint in continua ratione, AB, BC,

[i] 9. *Huius.*

AB, BC, & E, erit linea E æqualis CG: deinde quia continuæ sunt AB, AC, AD,
a 11. Huius. si fiat BC æqualis GD, erunt quoque in continua analogia [a] CG, DC, DA: ponuntur autem continuæ AD, DC & F; erunt igitur continuæ F, DC, AD; est igitur F æqualis CG: vnde F & E quoque sunt æquales, vtpote ipsi CG æquales. Quod erat propositum demonstrare.

Lemma.

DAti sunt duo ordines trium quantitatum CA, BA, DA & CF, EF, GF; & sit vt CA ad DA, sic CF ad GF, sitque item vt BA ad DA, sic CF ad EF. Dico etiam esse CA ad BA, vt EF est ad GF.



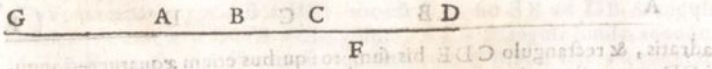
Demonstratio.

SI enim non est CA ad BA, vt EF ad GF, erit ergo aliqua maior vel minor, quàm CA, nempe Z ad BA, vt EF est ad GF; quoniam ergo vt CF prima ad EF secundam, ita in altero ordine BA secunda est ad DA tertiam, & vt EF secunda ad GF tertiam, ita in ordine altero Z prima, est ad BA secundam, ergo ex
b 23. Quinti. æquo in proportione perturbata, vt CF ad GF, ita Z [b] ad DA: atqui ex hypothesi etiam CA erat ad DA, vt CF ad GF, ergo vt CA ad DA, sic Z (maior vel minor quàm CA) est ad DA, quod est [c] absurdum: non est igitur CA ad BA, in alia
c 8. Quinti. proportione, quàm EF ad GF.

PROPOSITIO XV.

SInt proportionales AB, AC, AD; & linea BD composita ex vtraque differentia BC, CD, diuidatur bifariam in F, ac mediæ proportionali AC, æqualis sit producta AG.

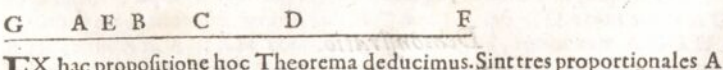
Dico FC, FB, FG in continuata esse proportione.



Demonstratio.

CVm enim GC bisecta sit in A, & BD in F, erit CG ad AG, vt BD ad FD. præterea cùm AB, AC, AD ponantur continuæ, erit per primam huius BC ad CD, vt AB ad AC, id est AG; & componendo vt BG ad AG, ita BD ad CD: sed ante ostenderamus esse vt CG ad AG, ita BD ad FD. Quare per lemma præcedens etiam erit vt CG ad BG; ita CD ad BF, hoc est FD; & diuidendo CB ad BG, vt CF ad FD, hoc est FB; Itaque inuertendo, permutando, & componendo erit vt GF ad BF, ita BF ad CF; ergo GF, BF, CF sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.



EX hac propositione hoc Theorema deducimus. Sint tres proportionales AB, BC, CD, diuisaque sit AB bifariam in E. Dico AE, EC & compositam ex AE & lineis BC, CD bis sumptis, esse proportionales, & si AE, EC, & composita ex AE & BC, CD lineis bis sumptis, sint continuæ; dico AB, BC, CD esse in continua analogia.

Demon-

Demonſtratio.

PRoducatur CD in F, vt DF linea æquetur BD compoſitæ: BA verò producatur in G, vt GA, BC æquentur. Quoniam GA, BC lineæ ſunt æquales, erunt [a] DC, DB, DG continuæ proportionales. Rurſum cùm GA æquetur rectæ BC, & AE ipſi EB ſit æqualis, erit GC in E bifariam quoque diuiſa: eſt autem DF æqualis ipſi BD per conſtructionem: ergo EB, EC, [b] EF, hoc eſt AE, EC, & compoſita ex AE & BC CD bis ſumptis, ſunt continuæ proportionales. quod erat primum.

[a] 8. *Huiut.* [b] 15. *Huiut.*

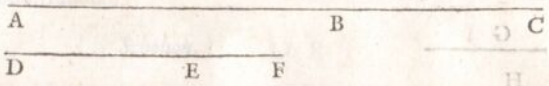
2. Quoniam EB, EC, EF ſunt continuæ, & EC lineæ æquatur EG. & BF linea ex conſtruc. ſit in D bifariam diuiſa, erunt DC, DB, [c] DG continuæ: quare & AB, BC, CD tres erunt [d] continuæ proportionales. quod erat demonſtrandum.

[c] *Ibid.* [d] 9. *Huiut.*

PROPOSITIO XVI.

SI ſit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, erit vt prima cum ſecunda ad tertiam, ita omnes quatuor ad primam cum tertia; vel vt prima cum ſecunda ad ſecundam, ita omnes quatuor ad ſecundam cum quarta.

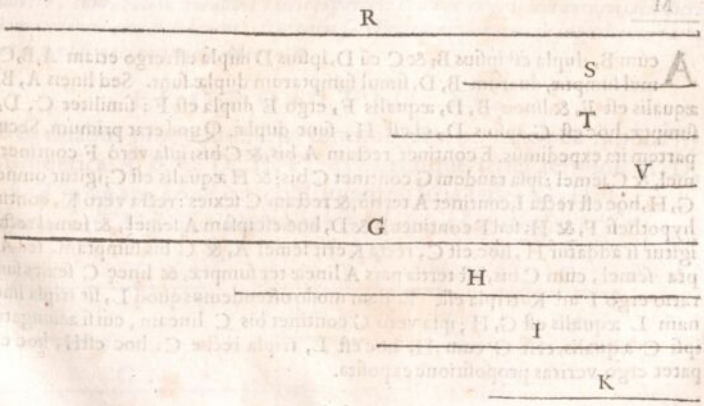
Demonſtratio.



ESto AB ad BC, vt DE ad EF, dico eſſe AC ad AB, vt aggregatum ex AC & DF ad aggregatum ex AB, DE. Cùm enim ſit AB ad BC, vt DE ad EF, erit inuertendo & componendo AC ad AB, vt DF ad DE: quapropter erit etiam vtraque antecedens AC, DF [e] ad vtramque conſequentem AB, DE, vt vna antecedens AC ad AB vnam conſequentem. quod erat propoſitum.

[e] 12. *Quinti.*

Corollarium.



SI igitur ex quatuor proportionalibus fiat vna æqualis omnibus quatuor, verbi gratiâ R: & fiat altera S æqualis primæ, ac tertiæ, & tandē recta T exhibeatur æqualis primæ & ſecundæ: denique ſi ponatur V æqualis primæ, erit R ad S, vt T ad V: ſimiliter ſi omnibus quatuor fiat æqualis G, & ſecundæ cum quarta, æqualis H, & primæ cum ſecunda æqualis I, & ſecundæ æqualis K, erit vt G ad H, ſic I ad K. res hæc à

Pappo lib. tertio propoſitione decimaſeptima in tribus continuè proportionalibus propoſita fuit; quæ cùm vniuerſalis ſit, cenſuimus etiam hoc ipſum verbo indicandum ad ampliorem vſum.

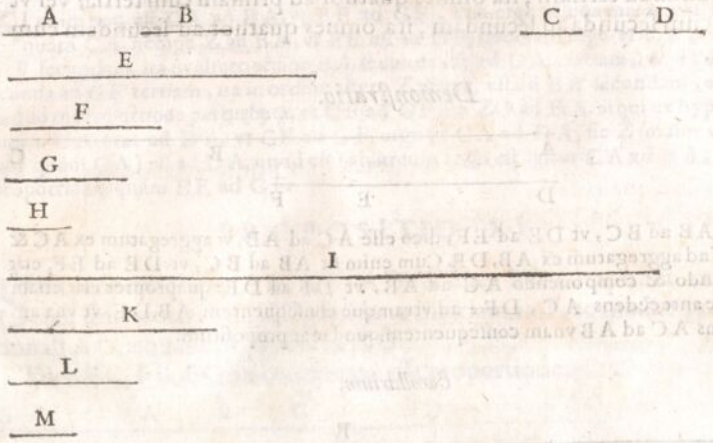
PROPOSITIO XVII.

SIt A æqualis B, & C æqualis D; omnibus autem A, B, C, D, ponatur æqualis E; duabus verò B, D, ponatur æqualis F: ſimiliter duabus C, D, æqualis G; & rectæ D, æqualis H.

Dico rationem E ad F, & G ad H eſſe duplam. Quod ſi rectis E, F, G, H, æqualis ponatur I, & duabus F & H, æqualis ſtatuatur K, & lineis G, H, æqualis ponatur L, denique reſiduæ H, fiat M æqualis;

Dico rationem I ad K, & L ad M eſſe triplam.

Demonſtratio.



ACum B, dupla eſt ipſius B; & C cũ D, ipſius D dupla eſt: ergo etiam A, B, C, D ſimul ſumptæ, duarum B, D, ſimul ſumptarum duplæ ſunt. Sed lineis A, B, C, D æqualis eſt E, & lineis B, D, æqualis F, ergo E dupla eſt F: ſimiliter C, D, ſimul ſumptæ, hoc eſt G, ipſius D, id eſt H, ſunt duplæ. Quod erat primum. Secundam partem ita expedimus. E continet rectam A bis, & C bis; ipſa verò F continet A ſemel, & C ſemel: ipſa tandem G continet C bis; & H æqualis eſt C; igitur omnes E, F, G, H, hoc eſt recta I, continet A tertiò, & rectam C ſexies: recta verò K, continet ex hypotheſi F, & H; ſed F continet B & D, hoc eſt ipſam A ſemel, & ſemel rectam C, igitur ſi addatur H, hoc eſt C, recta K erit ſemel A, & C bis ſumptam. ſed A ſumpta ſemel, cum C bis, eſt tertia pars A lineæ ter ſumptæ, & lineę C ſexies ſumptæ: ratio ergo I ad K tripla eſt. Eodem modo oſtendemus quod L, ſit tripla lineę M, nam L æqualis eſt G, H; ipſa verò G continet bis C lineam, cui ſi adiungatur H, ipſi C æqualis, erit G cum H, hoc eſt L, tripla rectæ C, hoc eſt H, hoc eſt M: patet ergo veritas propoſitione expoſita.

Scholion.

PAppus lib. 3. propoſitione 18. tribus continuis quantitatibus applicuit hanc materiam, quæ ſcilicet eandem continuant rationem; quia verò aduerti non ſolùm continuis rationibus conuenire hanc proportionalium proprietatem, verùm etiam diſcretiſſimis, modò rationes ſimiles aſſumantur: hinc operæ pretium duxi, hoc inſinuare. Notatu autem dignum exiſtimo, ſi quis vlterius

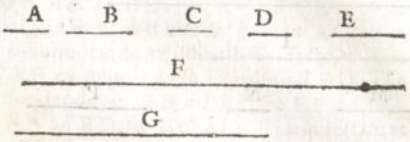
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [123] - 66
PUBLIC DOMAIN

teriùs proportiones ita conuertat, quemadmodum hac propositione fecimus, in infinitum reperiet plures ac plures subdiuisiones rationum, solâ praxis in propositione positæ obseruatione.

PROPOSITIO XVIII.

SInt quæcumque & quotcumque magnitudines A, B, C, D, E; ponaturque F omnibus (præter vltimam) bis sumptis, ac vltimæ E semel sumptæ æqualis; G verò æqualis omnibus simul sumptis, denique H æqualis vltimæ E.

Dico F, G, H arithmeticam analogiam continuare.



Demonstratio.

LInea F, id est A, B, C, D, bis sumptæ, vnà cum E semel, excedit rectã G, id est A, B, C, D, E semel sumptas, excessu A, B, C, D, semel sumptis. Sed eodem excessu excedit linea G, ipsam H, quæ æqualis ponitur rectæ E, igitur F, G, H lineæ arithmeticam continuant proportionem. Quod erat demonstrandum.

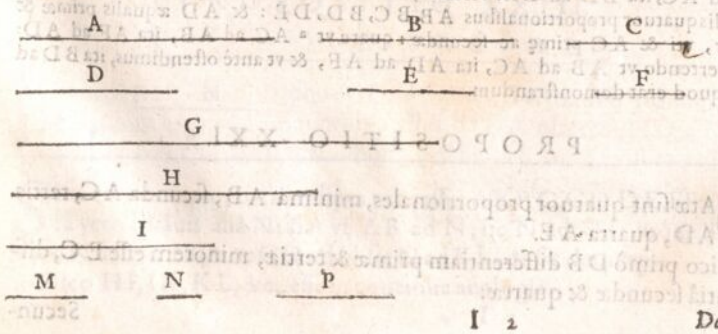
Scholion.

QVare mirum videri non debuit Frederico Commandino, Pappum, cùm lib. 3. ex Geometrica proportione, analogias, ac medietates eruit, Arithmeticas neglexisse; quandoquidem non ex Geometrica tantum sed quacumque quantitatum serie producatur; quod Pappum in cæteris sagacißimum latere potuiße vix credi potest; vel certè oportuisset Commandinum dum Pappi defectum, vt vocat, eodem libro propositione 19. supplere nititur, continuitatem Geometricam assignare, ex qua, cùm quapiam ratione Arithmeticam analogiam deduxisset, non ideò cæteris non proportionalibus quantitatibus commune esse, posset demonstrari: siquidem à problematici nitoris splendore alienum videtur, certum & determinatum quid in constructionem adhibere, cùm obuium quodlibet fuerit sufficiens. Sed hæc in gratiam antiquitatis dicta sint, quam venerari omnes deberent: illius enim sæculi virorum labores, & ingeniorum parta hucusque non vidi à recentioribus adæquata.

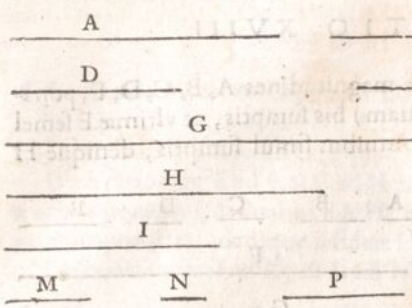
PROPOSITIO XIX.

DAtis duabus progressionibus terminorum in continua ratione Arithmetica A, B, C, D, E, F; ex vtriusque seriei terminis A, D, B, E, C F in vnum conflatis constituatur tertia series G, H, I.

Dico etiam G, H, I esse in continua Arithmetica analogia.



Demonſtratio.



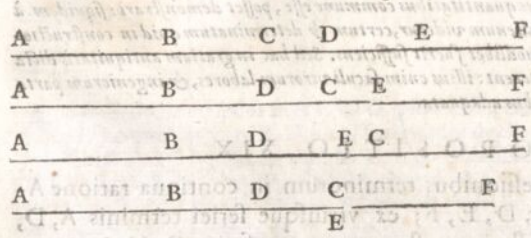
TErminorum ſeriei A,B,C, mutuus exceſſus ſit M; N, verò exceſſus alterius: M autem & N ſibi additi, faciant P: quoniam igitur A ſuperat B exceſſu M, & D ſuperat E exceſſu N, A & D ſimul ſumpti, hoc eſt G, ſuperabunt B & E ſimul ſumptos, hoc eſt H, exceſsibus M & N ſimul ſumptis, hoc eſt exceſſu P: ſimiliter oſtendemus H ſuperare I exceſſu P. ſunt igitur G, H, I in Arithmetica analogia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

ESto AB ad BC, vt BD ad DE; & fiat ipſi BC æqualis EF, vbicumque tandem cadat punctum E.

Dico eſſe vt AB ad AC, ſic AD ad AF, & BD ad BE.

Demonſtratio.



QVoniam eſt vt AB ad BC, ita BD ad DE, erit componendo, conuertendo vt AB ad AC, ita BD ad BE: vlteriùs, cùm ſint EF, BC æquales, erit tota AF æqualis quatuor proportionalibus AB, BC, BD, DE: & AD æqualis primæ & tertiæ, vti & AC primę ac ſecundæ: quare vt [a] AC ad AB, ita AF ad AD: & inuertendo vt AB ad AC, ita AD ad AF, & vt antè oſtendimus, ita BD ad DE: quod erat demonſtrandum.

a 16. *Huius.*

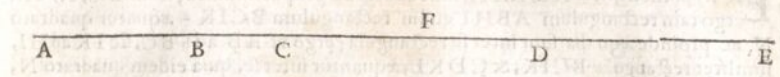
PROPOSITIO XXI.

DAtæ ſint quatuor proportionales, minima AB, ſecunda AC, tertia AD, quarta AE.

Dico primò DB differentiam primæ & tertiæ, minorem eſſe EC, differentiâ ſecundæ & quartæ:

Secun-

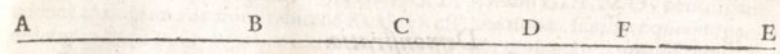
Secundò si BD minori auferatur æqualis EF, ex CE maiori, vt AB ad BD, vel vt AC ad CE, sic BC differentiam primæ & secundæ, fore ad CF differentiam differentiarum BD & CE.



Demonstratio.

CVm ex hypothesi AB sit ad AC, vt AD ad AE: igitur permutando vt AB ad AD, sic AC ad AE; & diuidendo vt AB ad BD, sic AC ad CE; igitur permutando vt AB ad AC, sic BD ad CE: atqui AB minor est quàm AC, igitur & BD minor est quàm CE. Quod erat primum. deinde ex discursu iam facto, vt AB, ad AC, sic est BD ad CE; quare cum EF ex hypothesi sit æqualis ipsi BD, erit etiam AB ad AC, vt EF ad CE; ac diuidendo vt AB ad BC, sic EF ad FC. & permutando vt AB ad EF, id est vt AB ad BD. sic BC ad CF: atqui etiam vt AB ad BD, sic est AC, ad CE, (vt antè ostendi) ergo vt AB ad BD, vel AC ad CE, sic est BC ad CF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.



DAtæ sint quatuor proportionales, minima AB, secunda AC, tertia AD, quarta AE.

Dico primò, differentiam primæ & secundæ BC, minorem esse differentiâ DE, tertiæ & quartæ:

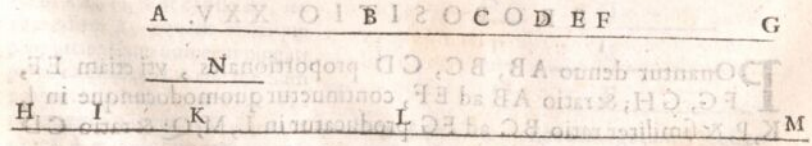
Secundò si ex ED maiori tollatur EF, æqualis minori BC, fore vt AD ad DE, sic BD differentiam primæ & tertiæ, ad DF differentiam differentiarum BC, DE.

Demonstratio.

CVm sit AB ad AC, vt AD ad AE, igitur inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo, vt AB ad BC, sic AD ad DE: Itaque permutando vt AB ad AD, sic BC ad DE. sed AB minor est AD, ergo & BC minor est quàm DE: Quod erat primum.

Deinde cùm modò ostensum sit, esse AB ad AD, vt BC est ad DE; & cùm FE ponatur æqualis BC, etiam AB est ad AD, vt EF ad DE. Itaque inuertendo, ac conuertendo vt AD ad BD, sic DE ad FD: ac demum permutando vt AD ad DE, sic BD ad DF. Atqui etiam vt AD ad DE, sic est AB ad BC, (vt antè ostendi) ergo vt AD ad DE, vel AB ad BC, sic est BD ad DF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.



SInt continui proportionalium processus AB, BC, CD, DE, EF: assumtâ vero quâuis aliâ N, fiat vt AB ad N, sic N ad HI: vtque BC ad N, sic N fiat ad IK, & vt CD ad N, sic N ad KL, & sic deinceps:

Dico HI, IK, KL, &c. esse in continua analogia.

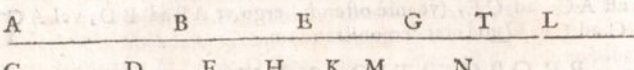
Demonſtratio.

EX hypotheſi lineæ AB, N, HI, ſunt continuæ proportionales; item BC, N, IK; ergo tam rectangulum ABHI quàm rectangulum BCIK [a] æquatur quadrato N, ac proinde æqualia ſunt inter ſe rectangula; ergo vt AB ad [b] BC, ſic IK ad HI, ſimiliter rectangula BCIK, & CDKL, æquantur inter ſe, quia eidem quadrato N, æqualia ſunt; igitur vt BC ad CD, ſic KL ad KI: atqui ex datis BC eſt ad CD, vt AB ad BC, hoc eſt, vt oſtendi, ſicut IK ad HI, ergo KL, eſt ad IK, vt IK ad HI: continuæ ſunt proportionales igitur HI, IK, KL. Quod erat demonſtrandum.

[a] 17. *Sexti.*
[b] 16. *Sexti.*

PROPOSITIO XXIV.

SI continuè proportionalium rectangulorum baſes ſint in continua analogia: erunt & altitudines in continuata proportione.



Demonſtratio.

SInt AB, BE, EG, GI, IL, inſuper & rectangula ABCD, BEDF, EGFH &c. in continua analogia. Dico etiam CD, DF, FH &c. eſſe continuè proportionales. Rectanguli enim ABCD proportio ad rectangulum BEDF, [c] componitur ex rationibus AB ad BE, & CD ad DF: item rectanguli BEDF proportio ad EGFH rectangulum, componitur ex rationibus BE ad EG, & DF ad FH: quare cùm ex hypotheſi rectangulorum ABCD, BEDF, EGFH, æquales ſiue eędem proportiones ſint, erunt quoque rationes AB ad BE, & CD ad DF, ſimul ſumptæ æquales, ſiue eædem cum rationibus BE ad EG, & DF ad FH ſimul ſumptis. ſunt autē ex hypotheſi etiam æquales rationes AB ad BE, & BE ad EG; Quare ſi ab æqualibus rationibus, nempe à compoſita ex rationibus AB ad BE, & CD ad DF, itemque à compoſita ex rationibus BE ad EG, & DF ad FH, auferas æquales rationes, AB ad BE, & BE ad EG; patet reliquas proportiones CD ad DF, & DF ad FH fore æquales: vt conſtat ex definitione compoſitionis proportionum. continuę ſunt igitur proportionales CD, DF, FH. Simili diſcurſu etiam reliquæ HK, KM, &c. cum præcedentibus eandem continuabunt rationem. conſtat ergo quod propoſitum erat demonſtrare.

[a] 3. *Sexti.*

Corollarium.

EOdem genere diſcurſus, ſi rectangula ABCN, BEDN, EGFN, &c. itemque baſes AB, BE, EG, &c. ſint in continua analogia, demonſtrabimus eorum altitudines CN, DN, FN, &c. continuam quoque ſeruare analogiam.

PROPOSITIO XXV.

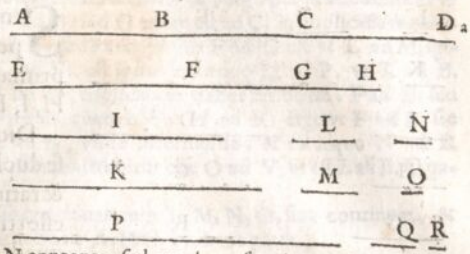
POnantur denuo AB, BC, CD proportionales, vti etiam EF, FG, GH; & ratio AB ad EF, continuetur quomodocunque in I, K, P; & ſimiliter ratio BC ad FG producatur in L, M, Q: & ratio CD ad GH, pergat in N, O, R, &c.

Dico etiam I, L, N, & K, M, O, item P, Q, R, continuare ſuam rationem.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [127] - 70
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

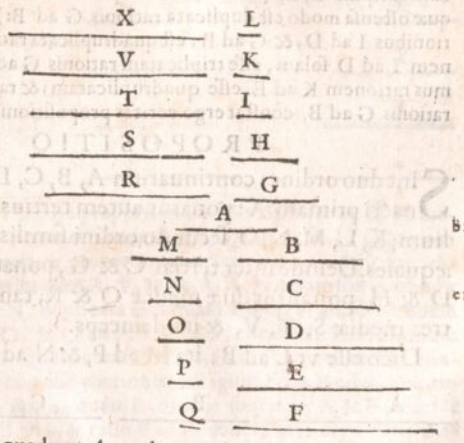


QVadratum enim EF eſt æquale rectangulo ſub AB & I; & quadratum FG, æquale eſt rectangulo ſub BC & L; vti etiam quadratum GH, rectangulo ſub CD & N contento: igitur vt quadrata EF, FG, GH inter ſe ſunt, ita etiam rectangula ſub lateribus AB & I, ſub BC & C, item ſub CD, & N contenta: ſed quadrata ſunt in continuata analogia, (cùm latera ſuper quibus fiunt ex hypotheſi ſint in continua analogia) igitur etiam rectangula, ſub lateribus AB & I, BC & L, CD & N, ſunt continuè proportionalia: cùm autem ipſorum baſes ponantur in continuata ratione AB, BC, CD; etiam I, L, N, altitudines erunt in continuata analogia per præcedentẽ. Eodem modo quia ex hypotheſi EF, FG, GH, & ex demonſtratis modò I, L, N, ſunt continuæ; itemque ex hypotheſi EF, I, K: & FG, L, M; item G, H, N, O, continuam ſeruant analogiam: demonſtrabimus K, M, O eſſe continuas. ſimiliter quoque procedetur in lineis P, Q, R, atque ita in infinitum. conſtat ergo veritas propoſitionis. a 17. *Sexti.*

PROPOSITIO XXVI.

SInt ſeries continuæ proportionalium, habentes primum terminum A, communem, A, B, C, D, E, F, & A, M, N, O, P, Q; continuatâ autem ſerie vtriuſque, fiat vt B ad A, ita A ad G, &c. & vt M ad A, ita A ad R, ſic vt omnes F, E, D, C, B, A, G, H, I, K, L: item omnes Q, P, O, N, M, A, R, S, T, V, X ſint in continuata analogia.

Dico eſſe B ad M, vt R ad G, & C ad N, vt S ad H, & D ad O, vt T ad I, &c.

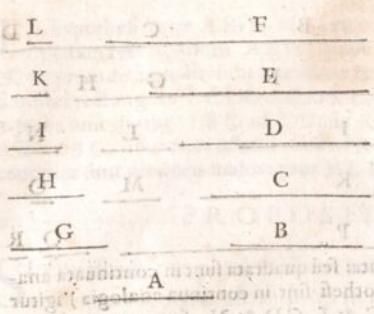


Demonſtratio.

CVm B, A, G, ſint tres continuæ, item M, A, R, erit tam [b] rectangulum B G, quàm rectangulum M R, quadrato A, ideoque & inter ſe æqualia. Quare vt B ad M, ſic [c] R ad G: ſimiliter quoniam C, B, A, G, H, ſunt continuæ, ita vt mediam A, æqualis vtrimque proportionalium numerus cingat: patet ex elementis, A eſſe mediam proportionalem, inter C & H: rectangulum igitur H C æquatur quadrato A; eodem modo rectangulum S N quadrato A æquale erit: ergo inter ſe æquantur rectangula H C, S N. Quare [d] vt C ad N, ſic S ad H, ſimili diſcurſu erit vt D ad O, ſic T ad I, & ſic de cæteris. Quod erat demonſtrandum. b 17. *Sexti.* c 16. *Sexti.* d *Ibid.*

PRO-

PROPOSITIO XXVII.



Sint duo ordines continuè proportionalium eandem habentes primam, A, B, C, D, E, F, & A, G, H, I, K, L.

Dico proportionem H ad C, esse duplicatam proportionis G ad B; & rationem I ad D, rationis G ad B esse triplicatam: & rationem K ad E, quadruplicatam: L verò ad F quintuplicatam eiusdem rationis G ad B: & sic in infinitum.

Demonstrat hanc Eucl. lib. 14. pr. 28. de quatuor continuè proportionalibus. Noseandem de quotcunq;, & aliâ planè methodo demonstrabimus.

Demonstratio.

a 17. *Sexti.* QVoniam tam A, G, H quàm A, B, C sunt continuæ proportionales, rectangulum H A, quadrato G, & rectangulum C A, quadrato a B æquale erit. vnde rectangulum H A, ad rectangulum C A, est vt quadratum G, ad quadratum B: itaque

b 20. *Sexti.* cùm quadrata G, B, sint b induplicata ratione basium G ad B, erit & rectangulorum proportio duplicata, rationis G ad B: sed ratio rectanguli H A, ad rectangu-

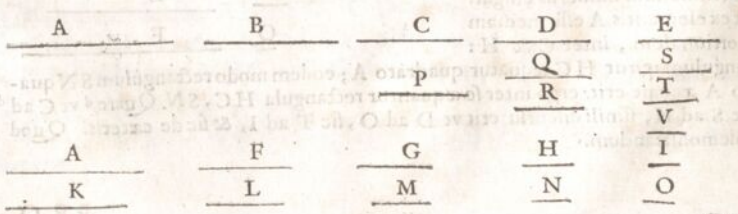
c 1. *Sexti.* lum C A, est ratio c H ad C; ergo proportio H ad C est duplicata rationis G ad B. Deinde quoniam tam G, H, I, quàm B, C, D, sunt continuæ, erit rectangulum I G, quadrato H, & rectangulum D B, quadrato C æquale. itaque ratio rectangulorum

d 23. *Sexti.* I G, D B, hoc est ratio d composita ex proportionibus laterum I ad D, & G ad B, æqualis est rationi quadrati H, ad C: atqui ratio quadratorum H, C, est quadruplicata rationis G, B; (est enim ratio quadratorum H, C duplicata rationis H ad C, quæ ostensa modò est duplicata rationis G ad B:) ergo proportio composita ex rationibus I ad D, & G ad B, est quadruplicata rationis G ad B. ex quo patet rationem I ad D solam, esse triplicatam rationis G ad B. Simili discursu demonstrabimus rationem K ad E, esse quadruplicatam; & rationem L ad F, quintuplicatam rationis G ad B. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XXVIII.

Sint duo ordines continuarum A, B, C, D, E; & A, F, G, H, I eandem nacti primam A: ponatur autem tertius ordo continuè proportionalium; K, L, M, N, O, secundo ordini similis; ita tamen vt A & K, sint inæquales. Deinde inter tertias C & G, ponatur media P; & inter quartas D & H, ponantur duæ mediæ Q & R; tandem inter quintas ponantur tres mediæ S, T, V, & ita deinceps.

Dico esse vt L ad B, ita M ad P, & N ad R, vt O ad V, &c.



Demon-

Demonstratio.

QVoniam vtriusque seriei, primus terminus idem est A, ergo per præcedentem G est ad C, in duplicata ratione F ad B: sed G etiam est ad C, in duplicata ratione G ad P, igitur G est ad P, vt F ad B: sed ex supposito F ad G est vt L ad M; igitur alternando M est ad G, vt L ad F; est igitur ex æquo M ad P, vt L ad B. Simili modo per præcedentem H ad D, triplicatam habet rationem, F ad B; sed etiam H ad D, habet triplicatam eius, quam habet H ad R; ergo vt F ad B, sic H ad R: deinde est F ad H, vt L ad N, vnde alternando, & ex æquo N ad R vt L ad B. Eadem prorsus ratione demonstrabitur esse O ad V, vt est L ad B. Quare patet veritas propositionis.

Hinc etiam patet B, P, R, V esse continuas cum L, M, N, O, sint continuæ, & quidem in eadem analogia in qua sint lineæ A, F, G, H, I. vt patet.

PROPOSITIO XXIX.

POnantur duæ series continuarum; A, B, C, D; & A, E, F, G, communem habentes primam A; & inter secundas B, E, sint quotuis mediæ H, I, K, L; totidemque inter tertias interponantur, M, N, O, P; Similiter inter quartas D & G, ponantur mediæ Q, R, S, T.

Dico A, H, M, Q; item A, I, N, R; & A, K, O, S; & A, L, P, T esse in continua analogia.



Demonstratio.

POnantur enim inter A & M, media proportionalis V; & inter A & N media X; similiter Y, Z, α, mediæ ponantur inter A, O, & A, P, & A, F. Quoniam ergo A, B, C, & A, V, M sunt continuæ proportionales; erit [a] ratio C ad M, duplicata eius, quam habet B ad V. vlterius cùm A, V, M, & A, X, N etiam sint continuæ proportionales, erit ratio [b] M ad N, duplicata eius quam habet V ad X: eodem pacto ostendetur, rationes N ad O, & O ad P, & P ad F, esse duplicatas rationum X ad Y, & Y ad Z, & Z ad α: Quare cùm C, M, N, O, P, F ponantur esse continuæ, etiam B, V, X, Y, Z, α, patet esse continuas. Est igitur ratio B ad α, quintuplicata rationis B ad V, & quia tam α, quàm E, mediæ sunt inter A & F, inter se æquales erunt; ideoque & ratio B ad α, & ratio B ad E, eadem est; ergo ratio B ad E, quintuplicata est rationis B ad V. quia autem B, H, I, K, L, E ponuntur continuæ, etiam ratio B ad E, est quintuplicata rationis B ad H; est igitur B ad V, vt B ad H. vnde æquales sunt H & V. Similiter ostendetur I & X, K & Y, L & Z æquales esse. Quare cùm ex constructione A, V, M; A X N; A Y O; A, Z, P, sint continuæ; etiam A, H, M; A, I, N; A, K, O; A, L, P continuæ erunt. Non alia ratione ostendemus, etiam ipsas A, H, M, Q; item A, I, N, R, &c. esse in continuata analogia;

[a] 27. huius.

[b] Ibid.

(Si nempe ipsis A,H, M inueniamus quartam β, & ipsis A ,I,N quartam γ; & ipsis A, K, O quartam δ. & ipsis A, L, P quartam ε, denique ipsis A, E, F quartam ξ) demonstrabimus esse vt priùs ipsas β, γ, δ, ε, ξ, ipsis Q, R, S, T, G æquales; ac proinde omnes quatuor A, H, M, Q; A, I, N, R; &c. esse continuas. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.

A B C D E F G H I

K L M N O P Q R S

DEntur binæ series continuè proportionalium in diuersis rationibus; A, B, C, D, &c. K, L, M, N, &c. ita tamen vt A K, L B sint etiam continuæ proportionales.

Dico omnes A, K, L, B, N, O: C, Q, R, D, & sic deinceps, (omisso in serie K L tertio quoque termino M, P, S) esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVia A, K, L, B ponuntur continuę, ergo vt K ad L, sic L ad B: sed etiam est ex hypothesi vt K ad L, sic L ad M, ergo L ad B, & M eandem habet rationem; æquales [a] igitur sunt B & M. ideoque rationes [b] B ad C, M ad C æquales sunt. Quoniam autem A, K, L, B sunt quatuor continuę proportionales, erit ratio A ad B, id est ex hypothesi ratio B ad C, id est ex demonstratione ratio M ad C, triplicata rationis A ad K: sed ratio A ad K, ex hypothesi est ratio K ad L, id est ratio M ad N: ergo ratio M ad C, triplicata est rationis M ad N: est autem ratio M ad P, triplicata rationis M ad N, (sunt enim M, N, O, P continuæ) igitur vt M ad C, sic M ad P: vnde & æquales sunt C & P. quare cùm loco M, in serie statuatur illi æqualis B, & loco P, illi æqualis C. erunt A, K, L, B, N, O, C continuę proportionales. similiter ostendemus seriem hanc per terminos Q, R, D, &c. continuari in infinitum. Quod erat demonstrandum.

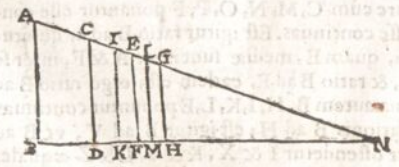
[a] 9. Quinti.
[b] 7. Einsdt.

Corollarium.

HInc sequitur: rationem A ad B, triplicatam esse rationis, K ad L: & B ad C, triplicatam ipsius L ad M: item C ad D, triplicatam ipsius M ad N: & sic de ceteris. nam ratio A ad B continuatur, estque illa triplicata rationis K ad L, quę per reliquos terminos continuatur.

PROPOSITIO XXXI.

IN triangulo quouis A B N quatuor ponantur parallelæ A B, C D, E F, G H, in continua analogia: ac inter A B, G H, media sit I K; inter E F verò & G H, media sit L M:



Dico rationem A B ad I K triplicatam esse rationis L M ad G H.

Demonstratio.

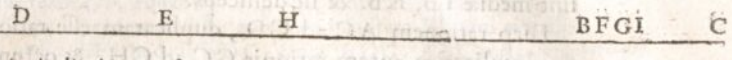
RAtio A B ad G H, duplicata est ex hypothesi, rationis A B ad I K: & ratio E F ad G H, duplicata rationis L M ad G H; ergo cùm iterum, ex hypothesi ratio A B ad G H triplicata sit rationis E F ad G H, erit ratio A B ad I K, quæ

quæ dimidiata est rationis AB ad GH, triplicata rationis LM ad GH, quæ dimidiata est rationis EF ad GH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

QVantitas ex quotuis continuè proportionalibus composita, ad aliam ex pari numero terminorum eiusdem seriei productæ conflatam, multiplicem rationem habet proportionis primæ ad secundam, ex quot terminis alterutra quantitatum componitur.

Demonstratio.

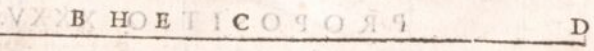


PONatur series rationis alicuius, constituere quantitatem AB, & series vlteriùs producta conficiat quantitatem BC; hoc tamen pacto vt vtraque pari numero constet terminorum continuè proportionalium eiusdem seriei productæ; verbi gratia si numeret AB quantitas terminos octo continuè proportionales, & BC totidem eiusdem seriei productæ; dico AB ad BC, octuplicatam habere rationem eius quã AD ad DE. Cùm enim tota series rationis AD ad DE, pergat vniformiter & continuè ex supposito vsque ad C, & sint tot termini eiusdem seriei in AB, quot sunt in BC, exempli causa in singulis octo; habebit ergo prima AD ad BF, octuplicatam rationem eius, quam habet AD [a] ad DE: similiter ratio DE ad FG, octuplicata est rationis DE ad EH, id est rationis AD ad DE: quare cùm rationes AD ad BF, & DE ad FG, octuplicatæ sint eiusdem rationis AD ad DE, erit vt AD ad BF, sic DE ad FG: eodem modo erit vt DE ad FG, sic EH ad GI, & sic de cæteris. Quare omnes [b] antecedentes, id est octo termini qui constituunt AB, se habent ad omnes consequentes, hoc est ad octo terminos qui constituunt BC, vt vna antecedens AD, ad vnam consequentem BF. Quare cùm AD ad BF, rationem habeat octuplicatam rationis AD, ad DE, habebit quoque AB ad BC octuplicatam eius, quam habet AD ad DE. Quod erat demonstrandum.

[a] *Defin. 5. sexti.*

[b] 12. *Quinti.*

PROPOSITIO XXXIII.



INter tres continuè proportionales AD, BD, CD, mediæ sint GD, ED: rursum inter AD, GD, media sit FD, & inter BD, ED, media sit HD: & hoc semper fiat:

Dico esse vt AB ad BC, sic AG ad BE, & AF ad BH, &c.

Demonstratio.

CVm inter tres continuas AD, BD, CD, mediæ sint GD, ED, erunt AD, GD, BD, ED, CD, (vt patet ex elementis) omnes continuæ proportionales: proindeque etiam [c] AG, GB, BE, EC erunt continuæ proportionales: ergo AG ad GB, vt BE ad EC: & componendo ac per conuersionem rationis AB ad AG, vt BC ad BE. Igitur alternando AB ad BC, vt AG ad BE: Deinde quoniam AD, GD, BD, ED, sunt continuæ, AD est ad GD, vt BD ad ED: Quare si inter AD, GD media sit FD, & inter BD, ED, media HD, patet ex elementis esse AD ad FD, vt BD ad HD. atqui cùm AD, FD, GD, sint continuæ, AF est ad FG, vt AD ad FD. per 1. huius. Et cùm BD, HD, ED sint continuæ etiam BH est ad HE, vt BD ad HD, hoc est (sicut iam ostendi) vt AD ad FD, ergo AF est ad FG, vt BH ad HE. Quare componendo ac per conuersionem

[c] 1. *Huius.*

uersionem rationis vt AG est ad AF, sic BE ad BH: & permutando vt AG ad BE, hoc est (sicut ostendi) vt AB ad BC, sic AF ad BH. Constat ergo propositionis veritas.

PROPOSITIO XXXIV.

A E G I C K H F D B

SInt in continua analogia AB, CB, DB, & inter AB, CB media sit EB; inter CB verò & DB sit media FB; deinde inter EB, CB, ac CB, FB mediæ sint GB, HB: Denique inter GB, CB, & CB, HB sint mediæ IB, KB. & sic deinceps.

Dico rationem AC ad CD, duplicatam esse rationis EC ad CF; quadruplicatam autem rationis GC ad CH; & octuplicatam rationis IC ad CK: atque ita in infinitum.

Demonstratio.

a *Ibid.* CVm AB, CB, DB sint continuæ proportionales, erit AC ad CD [a] ratio eadem cum ratione AB ad CB: item quia continuæ sunt AB, EB, CB, erit ratio AE ad EC eadem cum ratione AB ad EB: & quia inter tres continuas AB, CB, DB mediæ sunt EB, FB, patet ex elementis AB, EB, CB, FB, DB omnes esse continuè proportionales: quare ratio AB ad CB, id est vt iam ostendi, ratio AC ad CD, duplicata est rationis AB ad EB; id est vt ostendi, rationis AE ad EC. quia autem continuæ proportionales sunt AB, EB, CB, FB, etiam erunt b 1. *Huius.* AE, EC, [b] CF continuæ: ergo vt AE ad EC, sic EC ad CF: ergo ratio AC ad CD, etiam duplicata est rationis EC ad CF; quod erat primum. Eodem discurrendi modo demonstrabimus, rationem EC ad CF, duplicatam esse rationis GC ad CH: adeoque rationem AC ad CD, quadruplicatam esse rationis GC ad CH: denique ostendemus etiam simili ratiocinatione, rationem GC ad CH, duplicatam esse rationis IC ad CK. Vnde manifestum est rationem AC ad CD, eiusdem octuplicatam esse. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XXXV.

DAtam lineam secare in quotuis continuè proportionales, secundùm datam rationem.

Constructio & demonstratio.

A H I K B

C D E F G

DAta sit linea AB diuidenda sicut postulat propositio, in quatuor continuas, secundùm rationem datam CD ad DE. Continuetur toties ratio CD ad DE, quot continuas numero desideras in linea data AB, nempè CD. DE, EF, FG: tum diuide lineam c AB, sicut diuisa est linea CG: c 10. *Sexti.* in punctis H, I, K. Dico AB, esse diuisam prout exigit propositio: patet demonstratio ex constructione.

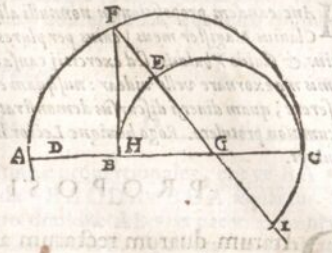
PROPOSITIO XXXVI.

DAtarum linearum alteram ita secare, vt partes lineæ sectæ, cum in secta, sint in continua analogia.

Con-

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint duę lineæ AB & BC, quarum alteram scilicet AB, oporteat diuidere in D puncto, vt AD, DB, BC sint in cõtinua analogia. pro constructione, super BC diametro describatur circulus, item super linea AC, composita ex duabus datis AB & BC, qui sint BEC & AFC; & ex puncto B erigatur perpendicularis BF, ad rectam AC; ducaturque ex F puncto, linea FI. per centrum minoris circuli G; fiat denique rectæ GF, æqualis GD. Dico factum esse quod imperatum fuit: quoniam quadrato FB tam æquatur rectangulum ABC, quàm [a] EFI, hoc est BDC, erunt BDC, ABC rectangula æqualia inter se: sed ABC rectangulo æquantur rectangula ADBC, DBC; & BDC rectangulo æquatur rectangulum DBC, vnà cum quadrato DB; dempto igitur communi rectangulo DBC, manet DB quadrato, æquale rectangulum ADBC. igitur AD, DB, BC sunt continuæ.



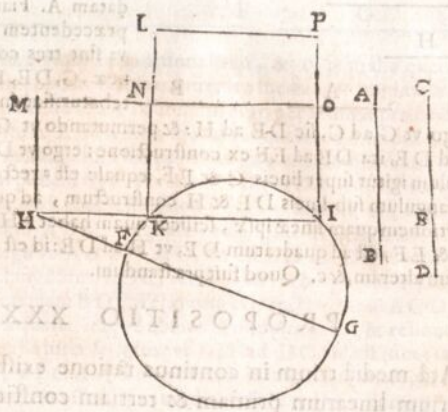
[a] 35. Tertij.

Aliter.

DAtæ sint AB, CD, quarum vna CD, ita secanda sit in E, vt AB, CE, ED sint in analogia continua.

Constructio & demonstratio.

ASsumptâ FG lineâ maiori quàm AB, fiat super FG tanquam diametro circulus FIG: deinde (quod ex elementis facilè perficitur) rectangulũ GHF æquale fiat rectangulo ABCD; & ex pũcto H ita ducatur HKI, vt KI æqualis sit AB (quod ab alijs factum, & nos libro *nostro de circulis* alia atque alia methodo præstabimus) denique ex K erectâ normali KL, æquali ipsi CD, præscindatur ex KL (ostendam enim esse maiorem) linea KN, æqualis ipsi HK. Dico factum quod petebatur.



Nam rectangulum [b] IHK æquatur rectangulo GHF, id est ex constructione rectangulo ABCD, id est rursum ex constructione IKL, ergo vt IH ad KI, ita est reciprocè KL ad KH: atqui IH maior est quàm IK, ergo & LK, quàm KH maior erit, quod assumptum fuerat in constructione: perficiantur iam rectangula IHK, IKL, ductis per N & L parallelis ad HI, & normalibus HM, IOP. Quoniam igitur rectangula IM, IL æqualia sunt, ablato communi KO, reliqua OL, KM æqualia erunt. Quare cum KM (vt ex constructione patet) sit quadratum, erunt NO, KN, LN tres continuæ. Atqui NO est KI, hoc est AB; & KL est CD. Factum igitur est quod petebatur.

[b] 36. Sexti.

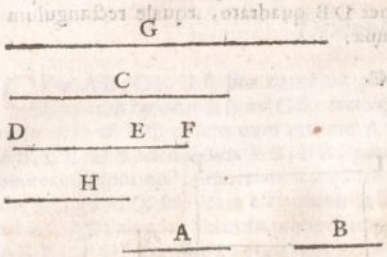
Scholion.

HAnc eandem propositionem nonnulli alij & proposuerunt, & feliciter soluerunt. Vti R.P. Clauius Magister meus (cuius per plures annos familiaris & domesticus auditor fui) Peletarius, & Guido Vbaldus: sed exercitij causa, etiam meo eam Marte expedire volui, ne alienis plumis me exornare velle videar: nusquam enim propositionem statui meis lucubrationibus interserere, quam diuersi discursus demonstratione meam non fecero; vel authoris nomen in publicum non protulero. Rogo benigne Lector huius rei memor esse velis, dum in posterum simile occurret.

PROPOSITIO XXXVII.

DAtarum duarum rectarum alteram ita secare, vt rectangulum sub insecta, & parte lineæ sectæ, ad residuæ lineæ quadratum, datam habeat rationem.

Constructio & demonstratio.



DAta sit ratio A ad B, deinde datæ lineæ sint C & DF, postulat propositio, secari rectam DF in E; vt rectangulum sub C & EF, ad quadratum DE, eam rationem habeat, quam data B ad datam A. Fiat C ad G, vt B ad A, & per præcedentem secetur DF in puncto E, vt sint tres continuæ proportionales lineæ, G, DE, EF. Dico factum quod petebatur. fiat enim vt B ad A, sic H ad DE: erit ergo vt G ad C, sic DE ad H: & permutando vt G ad DE, ita C ad H: sed vt G ad DE, ita DE ad EF ex constructione; ergo vt DE ad EF, ita C ad H: rectangulum igitur super lineis C & EF, æquale est [a] rectangulo sub DE & H. porrò rectangulum sub lineis DE & H constructum, ad quadratum DE, eam habet proportionem quam lineæ ipsæ, scilicet quam habet [b] H ad DE; ergo & rectangulum C & EF, est ad quadratum DE, vt H ad DE: id est vt B ad A: igitur datarum rectarum alteram, &c. Quod fuit præstandum.

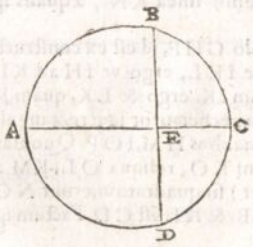
a 16. Sexti.

b 1. Sexti.

PROPOSITIO XXXVIII.

DAtâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato trium linearum primam & tertiam constituentium, exhibere primam & vltimam.

Constructio & demonstratio.



SVper aggregato tanquam diametro, circulus describatur ABC; in quo recta accommodetur BD, quæ æqualis sit duplæ, datæ mediæ: quod fieri posse cõstat ex datis & ex constructione: dein agatur per centrum linea AC, secans orthogonaliter in E, lineam BD. Dico factum esse quod petitur, est enim AC linea æqualis aggregato, & BE ([c] dimidia ipsius BD) datæ mediæ æqualis: quare cùm AC orthogona sit ad BE, erit AEC [d] rectangulum æquale quadrato EC: igitur datâ mediâ trium continuè proportionalium, illarumque aggregato; exhibuimus primam & tertiam. Quod erat faciendum.

c 3. Tertij.

d 35. Tertij.

Lemma.

Lemma.

SI fuerint tres BA, DA, CA in continua analogia, rectangulum ſuper maxima AB, & exceſſu CD ſecundæ ſupra tertiam, non erit maius quadrato dimidiæ ipſius AB.

Demonſtratio.

A C D B

QVoniam enim BA, DA, CA ſunt continuæ proportionales, erit vt BA [a] ad DA, ſic BD ad DC. Quare rectangula [b] BACD, & BDA æquantur. Sed rectangulum BDA, non eſt maius quadrato dimidiæ AB [c] vt patet. ergo neque rectangulum BACD maius erit quadrato dimidiæ AB. Quod erat demonſtrandū.

[a] 11. *Huiuſm.* [b] 16. *Sexti.* [c] 5. *Secundi.*

PROPOSITIO XXXIX.

DAtâ maximâ trium continuarum, & exceſſu quo media ſuperat minimam, exhibere mediam & minimam.

Conſtructio & demonſtratio.

A C D B

E F G

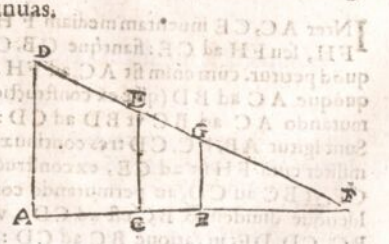
DAta ſit AB linea maxima trium proportionalium, & G æqualis exceſſui quo media ſuperat minimam: oporteat igitur inuenire mediam & minimam. fiat rectangulo ABG æquale quadratum EF: quoniam ergo per lemma præcedens quadratum EF, id eſt rectangulum ABG, non maius eſt quadrato dimidiæ AB. patet ita [d] ſecari poſſe AB, vt rectangulum ſub partibus, æquale ſit quadrato EF. Itaque diuidatur recta AB, in puncto D, vt rectangulum ADB æquale ſit quadrato EF. Dico punctum D eſſe quod problema ſoluit: fiat enim rectæ G, æqualis linea DC: erit itaque rectangulum ABCD æquale rectangulo ADB, cùm vtrumque æquale ſit quadrato EF; ergo vt AB ad [e] AD, ita eſt BD ad DC: ſi iam à rectangulo ABCD, auferas rectangulum BDC, remanebit rectangulum ADC; ſi verò a rectangulo ADB, auferas idem BDC, reliquum erit rectangulum ACDB: atqui tota ABCD, ADB ſunt æqualia, itaque ablato communi, erunt & reliqua rectangula ADC, ACDB æqualia inter ſe; igitur vt BD ad DC, [f] id eſt (ſicut iam oſtendi) vt BA ad DA, ſic DA ad CA. Sunt igitur tres in continua analogia AB, AD, AC; & CD æqualis G, eſt exceſſus, quo media AD, excedit minimam AC. Factum igitur eſt quod requirebatur.

[d] 5. *Secundi.* [e] 16. *Sexti.* [f] 14. *Sexti*

PROPOSITIO XL.

DAtis duobus exceſſibus, trium magnitudinum in continua analogia exiſtentium, exhibere tres continuas.

Conſtructio & demonſtratio.



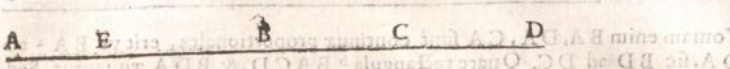
DAti ſint exceſſus AC, CB, qui ponantur in directum, & erigantur AD, CE parallelæ, quæ inter ſe eandem rationem ſeruent quam AC ad CB; & ducta per puncta D & E recta DE, conueniat cum AB producta in puncto quodam F. Dico factum quod poſtulatur:

nam

nam AD ad CE, eandem habet rationem, quam linea AF ad CF. Sed quam rationem habet DA ad CE, eandem ex constructione habet AC ad CB; igitur quam rationem habet tota AF ad totam CF, eandem habet AC ablata ad CB ablatam. Ergo vt AF tota ad CF totam sic quoque a CF reliqua ad reliquam BF. Quare rectæ AB adiuncta est linea BF, quæ faciat AF, CF, BF in continua proportione; quod petebatur.

a 19. Quinti.

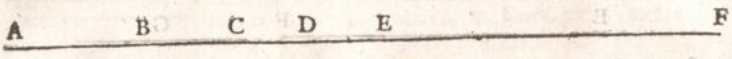
Aliter.



CVm hæc constructio solis lineis conueniat, subiungamus aliam, quæ in omni genere quantitatis locum habeat:

Dati igitur sint excessus AB, BC: fiat AE differentia datorum excessuum, ipsique AE, AB inueniatur tertia proportionalis continua AD: Dico AD absoluere problema. Cùm enim ex constructione AE sit ad AB, vt AB ad AD, erit diuidendo AE ad EB, vt AB ad BD: & componendo AB erit ad BE, hoc est BC, vt AD ad BD; & permutando AB ad AD, vt BC ad BD; & diuidendo AB ad BD vt BC ad CD; componendo igitur AD, BD, CD sunt continuæ. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO XLI.



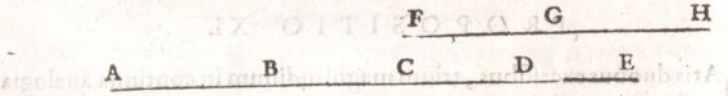
DAtam magnitudinem AE semel sectam in C, proportione maioris inæqualitatis, ita in duobus alijs punctis B & D subdiuidere, vt quatuor partes AB, BC, CD, DE sint in continua proportione; quæ dimidiata sit rationis AC ad CE, ex prima diuisione ortæ.

Constructio & demonstratio.

PEr quadragesimam huius addatur EF, vt AF, CF, EF sint proportionales; tum inter AF, CF media ponatur BF: inter CF quoque & EF, media DF. Dico factum quod petebatur. Cùm enim inter tres continuas AF, CF, EF, mediæ sint BF, DF, patet ex elementis omnes AF, BF, CF, DF, EF, esse continuè proportionales. Quare etiam AB, BC, CD, DE, sunt b continuæ, & quidem in ratione AF ad BF, quæ ex constructione dimidiata est rationis AF ad CF, hoc est AC c ad CE. Factum igitur est quod petebatur.

b 1. Huius.
c Ibid.

Aliter.



INter AC, CE inuentam mediam FH ita diuide, vt FG sit ad GH, vt AC ad FH, seu FH ad CE: fiantque CB, CD ipsis FG, GH æquales. Dico factum quod petitur. cùm enim sit AC ad FH, vt FG ad GH, id est BC ad CD, erit quoque AC ad BD (quæ ex constructione æqualis est FH) vt BC ad CD: & permutando AC ad BC vt BD ad CD: & diuidendo AB ad BC, vt BC ad CD. Sunt igitur AB, BC, CD tres continuæ proportionales in ratione BC ad CD. Similiter cùm FH sit ad CE, ex constructione vt FG ad GH, erit quoque BD ad CE, vt BC ad CD, ac permutando conuertendo BD ad CD, vt CE ad DE: Ideoque diuidendo BC est ad CD, vt CD ad DE. Sunt igitur tres continuæ BC, CD, DE, in ratione BC ad CD: ac proinde omnes quatuor sunt continuæ proportionales in ratione BC ad CD, id est FG ad GH, id est AC ad FH, quæ

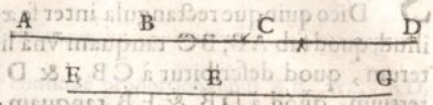
ex

ex constructione dimidiata est rationis AC ad CE; fecimus ergo quod fuerat propositum.

Corollarium.

EX hoc problemate licebit praxim desumere; non solùm subdiuidendi duas in quatuor continuas, sed etiam in sex continuas; imò quotuis datas in duplo plures continuas, & quidem in ratione dimidiata eius, in qua ipsæ existunt.

PROPOSITIO XLII.



SInt AB, BC, CD in continua analogia; deinde fecerut quæpiam linea FG in E, vt FE ad EG, eandem habeat rationem, quam AB ad BC.

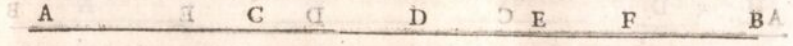
Dico rectangulum BCFG, æquale esse duobus ABEG & EFCD rectangulis.

Demonstratio.

CVm enim sit vt AB ad BC, ita FE ad EG, rectangulum BCEF, [a] æquale est rectangulo ABEG. Similiter quia vt BC ad CD, ita FE est ad EG, erit etiam rectangulum BCEG æquale rectangulo CDFE. duo igitur BCEF, BCEG rectangula, id est [b] rectangulum BCFG, æqualia sunt duobus ABEG, CDFE rectangulis. Quod erat ostendendum.

[a] 16. Sexti.
[b] 1. Secundi.

PROPOSITIO XLIII.



SI fuerint quotuis continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, &c.

Dico rectangula ABEF, CBDE, DBCD, EBAC esse inter se æqualia. Hoc est rectangula sub lineis seriei AB, CB, DB, &c. & sub residuis EF, DE; CD, AG esse inter se æqualia; modò retrogradè coniungantur.

Demonstratio.

QVoniam est vt AB ad [c] CB, sic DE ad EF, rectangulum ABEF æquatur [d] rectangulo CBDE. similiter quia vt GB ad DB, ita CD est ad DE, erit rectangulum CBDE, æquale rectangulo DBCD. rursus quoniam DB est [e] ad EB vt AC ad CD, rectangulum DBCD æquale erit ipsi EBAC; æqualia sunt igitur omnia inter se. Quod erat demonstrandum.

[c] 1. Huius.
[d] 16. Sexti.
[e] 1. Huius.

PROPOSITIO XLIV.

IIsdem positis:

Dico rectangula EBAC, DBCD, CBDE esse inter se æqualia.

Demonstratio.

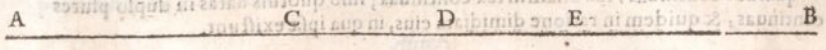
CVm enim vt CB ad DB, ita CD [f] sit ad DE; igitur rectangulum CBDE æquale est [g] rectangulo DBCD. Sed rursum vt DB ad EB, sic AG ad [h] CD, quare etiam rectangulum DBCD, æquale erit rectangulo EBAC; ostensum autem fuit rectangulum CBDE, esse rectangulo DBCD æquale, quare & hæc duo EBAC & CBDE, proindeque omnia tria inter se erunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

[f] Ibid.
[g] 16. Sexti.
[h] 1. Huius.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [138] - 81
PUBLIC DOMAIN

Pari ratione si ponatur vlteriùs produci series progressionis, ita vt AB, CB, DB, EB, FB, &c. ponantur continuæ proportionales, demonstrari poterit quatuor rectangula FBAC, EBCD, DBDE, & CBEF inter sese æqualia esse.

PROPOSITIO XLV.



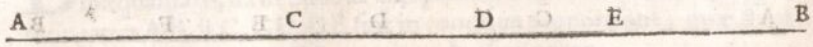
SInt AB, CB, DB, EB in continua analogia, &c.

Dico quinque rectangula inter se æqualia esse; quorum primum est illud, quod sub AB, BC tanquam vnâ linea, & sub DE continetur: alterum, quod describitur à CB, & DB tanquam vnâ, ac rectâ CD; tertium, quod à DB & EB tanquam vnâ, & rectâ AC conficitur: quartum, quod ab EC, & CB; denique illud quod ab AD, DB describitur.

Demonstratio.

a 43. *Huius.* b *Ibid.* REctangulum enim ABDE æquale est a rectangulo CBCD: & rectangulum CBDE æquale est rectangulo b DBCD: duo igitur rectangula ABDE, & CBDE, id est rectangulum sub ABCB tanquam vnâ, & DE, æqualia sunt duobus CBCD & DBCD, id est contento sub CBDB tanquam vnâ, & sub rectâ CD: eodem modo ostendam sub DBEB & AC contentum, æquari prioribus; de reliquis quoque idem simili discursu demonstrabitur. Constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XLVI.



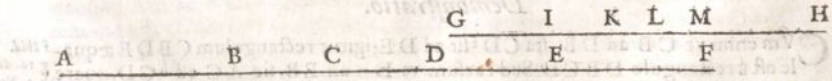
SInt continuæ proportionales AB, CB, DB, EB, &c.

Dico rectangula ABCE, CBAD, & duo simul sumpta ACB, ACDB, denique trium aggregatum, scilicet quadrati CE, rectanguli ACE, & rectanguli CEB, esse inter se æqualia.

Demonstratio.

c 1. *Huius.* d 16. *Sexti.* e 1. *Secundi.* f 1. *Secundi.* QVoniam est vt AC ad CD, ita CD ad DE, erit componendo & alternando, vt AD ad CE, sic CD ad DE: sed vt CD ad DE, ita est AB c ad CB; igitur vt AD ad CE, sic est AB ad CB, & rectangulũ d ABCE, æquale erit rectangulo CBAD. Insuper quia est vt AB ad CB, ita AC ad CD, erit rectangulum ABCD, æquale rectangulo AC, CB. Quia verò ex æquo etiam est vt AC ad DE, ita AB ad DB, erit quoque rectangulum ACDB, æquale ipsi ABDE: sed rectangulum AB DE, vnà cum AB CD, æqualia e sunt rectangulo ABCE; rectangulum igitur AB CE, æquale etiam est duobus ACB & AC DB. Deinde quia recta AB secta est in C & E, erit f AB CE æquale tribus CE in CA, & CE in CE ducto, (hoc est quadrato CE) & eidem CE in EB ducto: æqualia sunt igitur inter se. Quod fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.



SInt in continua analogia minoris inæqualitatis, AB, AC, AD, AE, AF, &c. & totidem aliæ maioris inæqualitatis eiusdem seriei, GH, IH, KH, LH, MH, &c.

Dico

Dico rectangula AB GH, A CIH, item AD KH, AELH, AFMH, &c. esse omnia inter se æqualia.

Demonstratio.

EX datis vt AB ad AC, sic IH ad GH, ergo rectangulum, [a] AB GH, æquatur rectangulo ACIH. rursum ex datis vt AC ad AD, sic KH ad IH; ergo rectangulum ACIH [b] rectangulo ADKH æquale erit. Simili discursu reliquorum æqualitatem ostendemus. manifestum est igitur quod fuerat demonstrandum.

[a] 16. Sexti.
[b] Ibid.

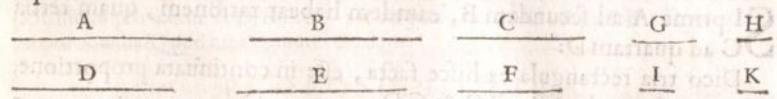
Corollarium.

QVoniam per primam huius positis continuè proportionalibus AB, AC, AD, AE, AF, itemque GH, IH, KH, LH, MH, earum differentiæ FE, ED, DC, &c. GI, IK, KL, &c. sunt etiam in ratione continua, manifestè patet eâdem discurrendi methodo demonstrari rectangula FELM, DEKL, CDIK, BCGI quoque inter se æqualia esse.

PROPOSITIO XLVIII.

SInt duæ series quotcumque continuarum eiusdem rationis, A, B, C, G, H; D, E, F, I, K: sit autem rectangulum AB, æquale DE rectangulo:

Dico etiam rectangula BC, EF; CG, FI; GH, IK; & sic deinceps æqualia esse.



Demonstratio.

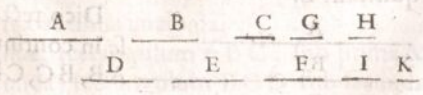
PRoportio rectanguli AB, ad rectangulum DE, componitur [c] ex rationibus A ad D, & B ad E; sed rectanguli BC, ad rectangulum EF, proportio quoque componitur ex rationibus B ad E, & C ad F, hoc est A ad D (nam cùm ex datis & ex æquo sit A ad C, vt D ad F, erit permutando A ad D, vt C ad F) ergo ex ijsdem rationibus componuntur proportiones rectangulorum AB, DE: BC, EF, adeoque eædem sunt. quare cùm ratio rectangulorum AB, DE ponatur æqualitatis, rectangulorum quoque BC, EF æqualitatis proportio erit; eodem modo reliqua reliquis ostendentur æqualia. Quod erat demonstrandum.

[c] 23. Sexti.

PROPOSITIO XLXIX.

SI rectangula AB, BC, CG, GH; & DE, EF, FI, IK singula singulis sint æqualia:

Dico esse A ad C, vt D ad F, & B ad G, vt E ad I, & sic deinceps.



Demonstratio.

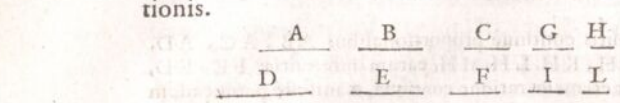
CVm rectangulum AB, æquale sit rectangulo DE, & rectangulum BC, rectangulo EF; ergo vt rectangulum AB ad DE, sic BC ad EF: & permutando

vt AB ad BC, ſic DE ad EF. atqui rectangulum AB ad BC, eſt vt A ad C, & DE ad EF eſt vt D ad F; ergo A ad C, vt D ad F. Eodem diſcurſu erit B ad G, vt E ad I. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

SI rectangula AB, BC, CG, GH, &c. rectangulis DE, EF, FI, IK ſingula ſingulis æqualia ſint:

Dico vtramque laterum ſeriem A, B, C, G, H; & D, E, F, I, K, ſi ponantur eſſe continuæ proportionales, eſſe quoque continuas eiuſdem rationis.



Demonſtratio.

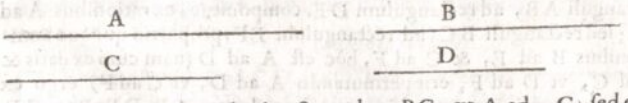
PEr præcedentem eſt A ad C, vt D ad F: quia autem tam A, B, C, quàm D, E, F, ſunt continuæ proportionales ex datis, erit tam ratio A ad C, (id eſt D ad F,) rationis A ad B duplicata; quàm ratio D ad F (id eſt A ad C) duplicata ſit rationis D ad E. Quare vt A ad B, ſic D ad E; & B ad C, vt E ad F, &c. ſunt igitur A, B, C, G, H, & D, E, F, I, K continuæ eiuſdem proportionis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

SI prima A ad ſecundam B, eamdem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D:

Dico tria rectangula ex hiſce facta, eſſe in continuata proportione; nempe rectangula AB, BC & CD.

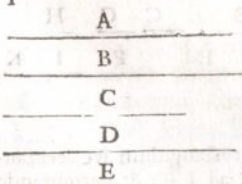
Demonſtratio.



a 1. *Sexti.* REctangulum AB, eſt ad rectangulum BC, vt A ad a C; ſed etiam rectangulum BC, ad CD, (ob eandem rationem) eſt vt B ad D. cùm igitur ſit ratio A ad C eadem cum ratione B ad D; eam quoque rationem habet rectangulum AB, ad BC, quam habet BC ad CD rectangulum: ſunt igitur in continuata ratione, prout erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LII.

SI prima A ad ſecundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D, fiatque vt prima A ad tertiam C, ita tertia C ad quintam E:



Dico rectangula ex his lineis conſtituta, eſſe in continuata ratione; nempe rectangula AB, BC, CD, DE.

Demonſtratio.

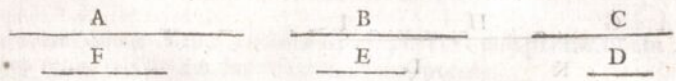
b 1. *Sexti.* REctangulum AB ad BC rectangulum, habet eam rationem, b quam A ad C; ſed ratio A ad C, eadem

eadem est, cum ratione C ad E ex constructione, igitur ratio rectanguli A B, ad B C, eadem est cum ratione C ad E. sed quoniam vt A est ad B, ita C ad D, erit permutando A ad C, vt B ad D: ergo ratio rectanguli A B ad B C, est ratio B ad D: sed rectangulum B C ad C D, etiam est [a] vt B ad D; ergo ratio A B rectanguli ad rectangulum B C, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum. est autem ratio B ad D, hoc est A ad C, eadem quæ est C ad E; vnde etiam ratio rectanguli C D, ad D E rectangulum, eadem est cum ratione rectanguli B C, ad C D rectangulum; quocirca in continua analogia sunt rectangula A B, B C, C D, D E, cùm sint in ratione A ad C. Constat igitur veritas propositionis. [a] *Ibid.*

PROPOSITIO LIII.

SInt A, B, C, tres in continua ratione. Sintq; D, E, F, in eadem vel diuersa continuata ratione.

Dico rectangula C D, C E, C F; item B D, B E, B F: item A D, A E, A F esse in continua analogia.



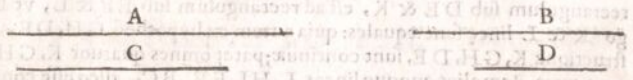
Demonstratio.

REctangulum C D est ad rectangulum C E, vt D [b] linea est ad E: & C E rectangulum est ad rectangulum C F, vt E ad F: sed D, E, F ex hypothesi sunt continuæ proportionales; ergo & rectangula C D, C E, C F sunt in continua analogia. Eodem modo probantur B D, B E, B F rectangula, item A D, A E, A F esse continuè proportionalia. Quod erat demonstrandum. [b] 1. *Sexti.*

PROPOSITIO LIV.

SIt A prima ad B secundam, vt C tertia ad D quartam.

Dico quadratum sub prima, rectangulum sub secunda & tertia, & quadratum quartæ, in continua esse analogia.



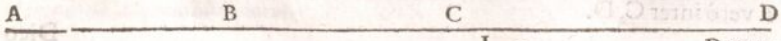
Demonstratio.

RAtio quadrati A, ad rectangulum C B, [c] componitur ex ratione A ad B (hoc est C ad D,) & ex ratione A ad C. Sed ratio rectanguli B C, ad D quadratum, composita est ex ijsdem rationibus: nam ratio rectanguli B C, ad D quadratum, componitur ex ratione B ad D, hoc est A ad C, & ex ratione C ad D, hoc est A ad B: ergo sunt tres continuæ quantitates, quadratum A, rectangulum B C, & quadratum D. Quod erat demonstrandum. [c] 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LV.

SInt tres lineæ A B, B C, C D in continua analogia.

Dico A B quadratum primæ, rectangulum A B C, sub prima & secunda; quadratum B C sub secunda; rectangulum B C D sub secunda ac tertia; denique C D quadratum tertiæ, esse in continuata serie eiusdem rationis A B ad B C.



Demonſtratio.

A B C D

a 1 *Sexti.* b *Ibid.* QVadratum AB a eſt ad rectangulum ABC, vt AB ad BC: & rectangulum ABC eſt ad quadratum BC, vt AB ad BC. Rurſum quadratum BC b eſt ad rectangulum BCD, vt BC ad CD, id eſt ex datis, vt AB ad BC; & rectangulum BCD eſt ad quadratum CD, vt BC ad CD, hoc eſt iterum vt AB ad BC, ergo quinque illæ figuræ ſunt in continuata ſerie rationis AB ad BC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVI.

A B M C M

D E F

G H I

K L

LIneæ GI, DF, AC ita ſint diuiſæ in H, E, B, vt ratio DE, ad EF duplicata ſit rationis GH ad HI; & ratio AB, ad BC triplicata rationis GH ad HI: ſintque præterea GH, DE, AB, in continua analogia.

Dico & rectangula GHI, DEF, ABC, in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.

FIat vt DE ad GH, ſic GH ad K, & vt EF ad HI, ſic HI ad L; igitur rectangulum ſub DE & K, quadrato GH, & rectangulum ſub EF & L, quadrato HI, c æquale eſt; ergo rectangulum DEK, eſt ad rectangulum EFL, vt quadratum GH ad quadratum HI. ex hypotheſi autem DE eſt ad EF, induplicata ratione GH ad HI, hoc eſt, DE eſt ad EF, vt quadratum GH, ad quadratũ HI: ergo rectangulum ſub DE & K, eſt ad rectangulum ſub EF & L, vt DE ad EF. Ergo d K & L lineę ſunt æquales: quia autem ex hypotheſi GH, DE, AB, & ex conſtructione K, GH, DE, ſunt continuæ; patet omnes quatuor K, GH, DE, AB eſſe continuas. Iam alias quoque lineas L, HI, EF, BC, dico eſſe continuas; ſi enim non ſint, fiat tribus lineis L, HI, EF, quæ ex conſtructione ſunt continuæ, quarta continuè proportionalis, quæuis BM, maior vel minor quàm BC. habemus ergo duas continuarum ſeries K, GH, DE, AB: L, HI, EF, BM quæ incipiant ab æqua-

c 17. *Sexti.* d *Ibid.*

e 27. *huius.* libus terminis K & L. quare ratio AB ad e BM, erit triplicata rationis GH ad HI: Atqui ex hypotheſi etiam ratio AB ad BC, erat triplicata rationis GH ad HI, eſt ergo vt AB ad BC, ita AB ad BM, quod eſt abſurdum. ergo L, HI, EF, BC etiam ſunt continuæ. Itaque ratio compoſita ex rationibus GH ad DE, & HI ad EF,

f 23. *Sexti.* hoc eſt, ratio rectanguli GHI f ad rectangulum DEF, eadem eſt cum ratione compoſita ex rationibus DE ad AB, & EF ad BC, hoc eſt cum ratione rectanguli DEF, ad rectangulum ABC. rectangula igitur GHI, DEF, ABC ſunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

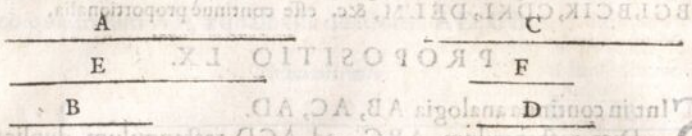
PROPOSITIO LVII.

SIt ratio A ad B, eadem cum ratione C ad D; & inter vtramque tam A, B quàm C, D interponantur quæuis lineæ: E quidem inter A, B; F verò inter C, D.

Dico

Dico rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habere rationem, quam habet rectangulum CF ad FD rectangulum.

Demonſtratio.

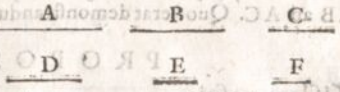


RAtio rectanguli AE ad EB rectangulum, eſt ea [a] quam habet A ad B; ſed vt A ad B, ita ponitur C ad D; ergo rectangulum AE ad EB, eſt vt C ad D: ſed rectangulum CF, ad FD rectangulum, etiam eſt vt linea [b] C ad D, igitur rectangulum AE, ad EB rectangulum, eandem habet rationem, quam habet CF ad FD rectangulum. Quod demonſtrare oportebat. [a] 1. Sexti. [b] Ibid.

PROPOSITIO LVIII.

POnantur tres lineæ A, B, C, & aliæ tres D, E, F, vt tam primæ, quàm ſecundæ, ſuam analogiam licet diuerſam continuent.

Dico etiam rectangula AD, BE, CF eſſe in continua analogia.



Demonſtratio.

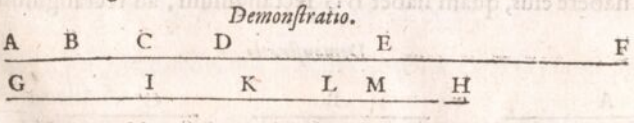
REctangulum ſub A & D, ad rectangulum ſub B & E habet [c] rationem compoſitam ex rationibus A ad B, & D ad E: proportio quoque rectanguli ſub B & E ad rectangulum ſub C & F compoſita ex rationibus B ad C, hoc eſt A ad B, & ex ratione E ad F, hoc eſt D ad E; vnde ratio rectanguli ſub B & E, ad rectangulum CF, componitur ex ijſdem, ex quibus ratio rectanguli ſub A & D, ad rectangulum ſub B & E eſt compoſita: Quare cùm proportiones ex ijſdem rationibus compoſitæ eædem ſint, erunt rectangula AD, BE, CF in continua analogia. Quod erat demonſtrandum. [c] 23. Sexti.

PROPOSITIO LIX.

SInt duæ diuerſarum rationum ſeries continuè proportionalium AB, AC, AD, AE, AF; GH, IH, KH, LH, MH.

Dico rectangula ABGH, ACIH, ADKH, AELH, AFMH eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.



REctangulum enim ſub ABGH, ad rectangulum ſub ACIH rationem habet compoſitam ex ratione AB ad AC, & ratione GH ad IH: & rectangulum ACIH, ad rectangulum ADKM rationẽ habet compoſitam ex rationibus AC ad AD, & IH ad KH. Quare cùm ex datis ſit vt AB ad AC, ſic AC ad AD, & vt GH ad IH, ſic IH ad KH; igitur ratio rectangulorum ACIH & ADKH, ex ijſdem rationibus componitur, ex quibus rectangulorum ABGH, ACIH, ſunt igitur rectangula ABGH, ACIH, ADKH in continua analogia: idemque in reliquis eodem diſcurſu oſtendetur.

Corol-

Corollarium.

POrro cùm per primam huius, etiam continuè proportionalium, differentiæ sint in continua analogia suorum integrorum; manifestum est rectangula quoque ABGI, BCIK, CDKL, DELM, &c. esse continuè proportionalia.

PROPOSITIO LX.

SInt in continua analogia AB, AC, AD.
Dico rectangulum ABC, ad ACD rectangulum, duplicatam habere rationem eius, quam habet AB ad AC lineam.

Demonstratio.

A B C D

QVoniam DA, CA, BA ponuntur continuè proportionales, erit DC ad BC, vt CA ad BA, & inuertendo BC ad CD, vt AB ad AC: itaque cùm rectangulorum ABC, [b] ACD ratio componatur ex laterum rationibus AB ad AC, & BC ad CD; quę iàm ostensę sunt æquales, constat eam esse duplicatam, rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

a 1. *Huius.*
b 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LXI.

IIsdem positis:
Dico ABC rectangulum ad rectangulum ADC, triplicatam habere rationem eius quam habet AB ad AC.

Demonstratio.

EX datis ratio AB ad AD, duplicata est rationis AB ad AC: & vt patet ex præcedente & per primam huius ratio BC ad CD, æqualis est rationi AB ad AC: ergo ratio composita ex rationibus AB ad AD, & BC ad CD, triplicata est rationis AB ad AC. Quare cùm rectangulorum ABC, ADC ratio ex proportionibus laterum AB ad AD, & BC ad CD [c] componatur, patet eam esse triplicatam rationis AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

c 23. *Sexti.*

PROPOSITIO LXII.

PONantur duæ series quatuor continuarum A, B, C, D; & E, F, G, H.
Dico rectangulum AH, ad ED rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam habet BG rectangulum, ad rectangulum FC.

Demonstratio.

A B C D

E F G H

REctanguli sub A & H, ad rectangulum sub E & D, ratio est composita, [d] ex ratione A ad D, & H ad E: ratio verò rectanguli BG, ad rectangulum FC, composita est ex ratione B ad C, & G ad F: ratio autem A ad D, triplicata est rationis B ad C, & ratio H ad E etiam triplicata est rationis G ad F; igitur ratio rectanguli AH ad DE, triplicata est rationis eius, quam habet BG rectangulum, ad FC. Quod erat propositum demonstrare.

d 23. *Sexti.*

PRO-

PROPOSITIO LXIII.

DAtæ sint tres continuæ proportionales, AC, CD, DE: & DE bisecta sit in B.

Dico quadratum AB, æquale esse quadratis AD, CB.

Demonstratio.

A C D B E

QVia AC, CD, DE sunt in continua proportione, quadratum CD [a] æquatur rectangulo ACDE: hoc est (quoniam DE bisecta ponitur in B) rectangulo ACDB bis sumpto. Quare si vtrisque commune addatur rectangulum CDB bis, erit quadratum CD, cum rectangulo CDB bis, æquale rectangulo ACDB bis, cum rectangulo CDB bis; quæ quatuor rectangula constituunt [b] rectangulum ADB bis. Rursum ergo communi addito quadrato DB, erit quadratum CD, cum rectangulo CDB bis, & quadrato DB, id est [c] quadratum CB, æquale rectangulo ADB bis, cum quadrato DB: itaque communi addito quadrato AD, erit rectangulum ADB bis, cum quadratis DB, AD, id est [d] quadratum AB, æquale quadratis CB, AD: Quod erat demonstrandum.

a 17. *Sexti.*
b 1. *Secundi.*
c 4. *Secundi.*
d *Ibid.*

PROPOSITIO LXIV.

A C E D B

SInt tres lineæ in continua analogia AB, BC, CD, & diuidatur CD bifariam in E.

Dico quadratum AE, æquari quadratis AC, EB.

Demonstratio.

CVm sint continuæ proportionales AB, BC, CD, erit vt BC [e] ad CD, sic AC ad DB. vnde rectangula CBD, ACD æquantur. sed rectangulum CBD, est rectangulum CDB, cum quadrato DB, hoc est (quoniam ex datis CD bisecta est in E) rectangulum EDB bis, cum quadrato DB: rectangulum verò ACD, est rectangulum ACE bis; ergo rectangulum EDB bis, cum quadrato DB, æquatur rectangulo ACE bis: & communibus additis quadratis AC, CE, siue ED, erunt rectangulum EDB bis, & quadrata BD, ED, AC, simul sumpta, æqualia rectangulo ACE bis, & quadratis AC, CE: Atqui rectangulum EDB bis, cum quadratis DB, ED, AC, æquale est quadrato [f] EB, & quadrato AC; rectangulum verò ACE bis, cum quadratis AC, CE, æquantur [g] quadrato AE; ergo quadrata EB, AC æquantur quadrato AE. Quod erat demonstrandum.

e 1. *Huius.*
f 4. *Secundi.*
g *Ibid.*

PROPOSITIO LXV.

COntinuæ proportionales sint AB, AC, AE; & ex BC, sumi possit BD æqualis AC.

Dico rectangulum sub BA & sub CD, AE, tamquam vnâ lineâ constructum, æquari quadrato AD.

Demonstratio.

A E C D B

REctangulum BACD, [h] æquatur rectangulo BCD (id est [i] quadrato CD, & rectangulo BDC) vnà cum rectangulo ACD: sed (quoniam æquales sunt posi-

h 1. *Secundi.*
i 3. *Secundi.*

A E C D B

tæ AC, BD) æqualia sunt rectangula BDC, ACD; ergo rectangulum ABCD, æquatur rectangulo ACD bis, cum quadrato, CD: & quia sunt continuæ BA, CA, EA, rectangulum BAE, æquale est quadrato CA: Itaque si rectangulo ABCD addas rectangulum BAE: & rectangulo ACD bis, cum quadrato CD, addas quadratum CA, erunt rectangula BACD, BAE, (id est rectangulum [a] ex BA in CDAE tanquàm vnam lineam) æqualia quadratis CD, CA, & rectangulo ACD bis, id est [b] quadrato AD. Quod erat demonstrandum.

a 2. Secundi.
b 4. Secundi.

PROPOSITIO LXVI.

POnatur linea AB, diuisa in tres proportionales AB, CB, DB: duabus autem CB, DB, in directum constituantur æquales, BF, BE; Dico rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale esse.

Demonstratio.

A C D B E F

QVoniam AB, CB, DB, ponuntur continuæ, erit rectangulum ABD (id est [c] rectangulum ADB cum quadrato DB) æquale quadrato CB; atqui etiam (cùm ex datis CF bisecta sit in B) rectangulum CDF cum quadrato DB, [d] æquatur quadrato CB; ergo rectangulum ADB, cum quadrato DB, æquatur rectangulo CDF, cum quadrato DB. Quocirca ablato communi quadrato DB rectangulum CDF, rectangulo ADB æquale erit. Quod fuit demonstrandum.

c 3. Secundi.
d 5. Secundi.

PROPOSITIO LXVII.

SIt AB ad AC, vt AD ad AE.

Dico primò rectangulum sub prima AB, & DE differentia quartæ & tertiæ, æquari rectangulo sub BC, differentia primæ & secundæ, & sub AD tertia:

Secundò rectangulum sub prima AB, & BE differentia primæ & quartæ, æquari duobus rectangulis sub AC, BD, & sub AB, BC.

Demonstratio.

A B C D E

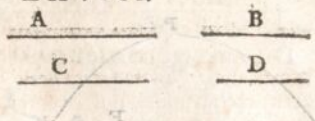
CVm sit vt AB ad AC, sic AD ad AE, itaque inuertendo & diuidendo vt CB ad BA, sic ED ad DA; quare rectangulum EDAB æquatur rectangulo DACB. quod erat primum. Deinde cùm sit vt EA ad DA, sic CA ad BA, ergo rectangulum EAB æquatur rectangulo DAC, hoc est [e] rectangulo DCA cum quadrato CA. Quod si autem à rectangulo EAB abstuleris quadratum AB, remanet rectangulum EBA; & si idem abstuleris à rectangulo DCA cum quadrato CA remanent [f] rectangulum DCA, rectangulum CBA bis cum quadrato BC. Itaque cùm tota fuerint æqualia, erunt ablato communi, æqualia adhuc reliqua; rectangulum nempe EBA, & rectangula DCA semel, CBA bis, & quadratum BC simul sumpta. atqui rectangulum ACB, æquale est rectangulo ABC cum quadrato BC; cui si addas rectangulum ACD, orietur [g] rectangulum ACBD, quod cum rectangulo ABC æquale erit rectangulo ABC bis cum quadrato BC, & rectangulo ACD: quæ cùm simul sumpta æqualia esse ostenderim rectangulo EBA, erit quoque rectangulum AC, BD cum rectangulo ABC æquale rectangulo EBA, quod erat demonstrandum.

e 3. Secundi.
f 4. Secundi.
g 1. Secundi.

PRO-

PROPOSITIO LXVIII.

SI quatuor lineæ proportionales fuerint, maximæ & minimæ, quadrata simul sumpta, maiora sunt reliquarum quadratis simul sumptis.



Demonstratio.

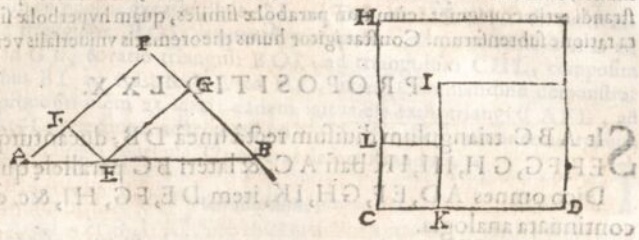
CVm enim quatuor lineæ ponantur proportionales, etiam [a] earum quadrata erunt proportionalia, ita tamen vt quadratum maximæ lineæ maximum sit, quadratum verò minimę, sit minimum, vt patet ex elementis; igitur [b] constat propositum. Theorema eadem fere posita demonstratione quibusuis planis & solidis similibus applicari potest.

[a] 22. *Sexti.*

[b] 25. *Quinti.*

PROPOSITIO LXIX.

DVabus lineis AB, CD secundũ eandem rationem diuisis in E, & K, fiat super earum vna AB quæuis figura APB: & sub partibus duæ similes ei quæ fit à tota, nempe AFE, EGB. Deinde sub alia CD fiat quæcumque alia figura CHD, siue similis præcedentibus, siue dissimilis seu rectilinea seu curuilinea; sub partibus autem statuantur duæ aliæ CLK, KID, similes ei quæ fit à tota.



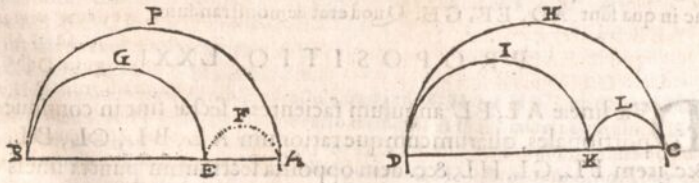
Dico vt APB ad CHD, sic duæ AFE, EGB adduas CLK, KID.

Demonstratio.

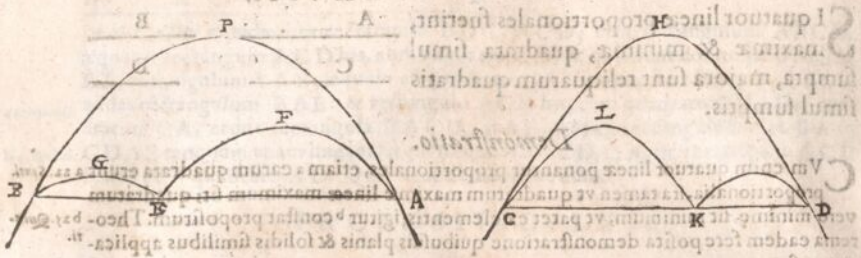
COmparemus primò rectilinea cum rectilineis; quia figuræ similes sunt AFE, APB, erit AFE, ad APB, in duplicata ratione laterum [c] homologorum AE, AB: similiter quia CLK, CHD sunt figuræ similes, erunt in duplicata ratione CK ad CD, id est ex datis, in duplicata ratione AE ad AB: ergo AFE est ad APB, vt CLK ad CHD: non aliter ostendemus EGB esse ad APB, vt KID ad CHD. igitur AFE [d] cum EGB, est ad APB, vt CLK cum KID, ad CHD. Itaque permutando AFE est cum EGB, ad CLK cum KID, vt APB, ad CHD.

[c] 19. *Sexti.*

[d] 24. *Quinti.*



Comparemus deinde rectilinea cum curuilineis. Super CD constituatur segmentum circuli CHD; & super CK, KD, segmenta CLK, KID, similia segmẽto CHD: cùm igitur similia circulorum segmenta, duplicatam habeant proportionem subtensarum, si rectilinea lineæ AB, cum segmentis lineæ CD comparentur, eâdem prorsus demonstratione concludetur propositum, qua vsi fuimus in prima comparatione: Tertiò si curuilinea cũ curuilineis eiusdẽ speciei cõferantur, patet à fortiori propositũ:



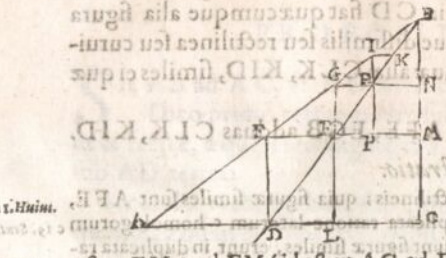
Eodem modo ſi curuilinea, cum diuerſæ ſpeciei curuilineis, tres nempe parabolæ ſimiles, cum tribus hyperbolis ſimilibus, conferantur, eadem his quoque demonſtrandi ratio conueniet: cùm tam parabolæ ſimiles, quàm hyperbolæ ſint in duplicata ratione ſubtenſarum. Conſtat igitur huius theorematis vniuerſalis veritas.

PROPOSITIO LXX.

SIt ABC triangulum diuiſum rectâ lineâ DB; ducanturq; lineæ DE, EF, FG, GH, HI, IK baſi AC, & lateri BC parallelæ quot libuerit.

Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, &c. eſſe in eadem continuata analogia.

Demonſtratio.



PRoducantur enim lineæ GF in L, EF in M, GH in N, & IH in P. Igitur cùm parallelæ ſint AC, EM, erit AD ad DC, vt EF ad FM; & componendo AC ad DC, vt EM ad FM, id eſt vt DC ad LC: ſunt igitur in continua ratione AC, DC, LC; quare & AD [a] ad DL, id eſt EF vt AC eſt ad DC. Similiter oſtendam eſſe continuas EM, FM, PM: vnde rurſus eſt vt EM [b] ad FM (id eſt vt AC ad DC, id eſt AD ad EF) ſic EF ad FP, id eſt GH. continuè proportionales ſunt igitur AD, EF, GH: eodem modo oſtendam IK, & alias quotcumque in eadem ſerie eſſe continuas. Deinde cùm AD ipſi EF, & DE ipſi FG ſit parallela, patet ſimilia eſſe triangula ADE, EFG: ergo vt AD ad EF, ita DE ad FG: ſimiliter oſtendam eſſe vt EF ad GH, ita FG ad HI. quare erunt etiam DE, FG, IH, &c. continuæ, & quidem in ea ratione in qua ſunt AD, EF, GH. Quod erat demonſtrandum.

a 1. *Huius.*

b *Ibid.*

PROPOSITIO LXXI.

DVæ lineæ AL, FL angulum facientes, ſectæ ſint in continuè proportionales, quarumcumque rationum AL, BL, CL, DL, EL, &c. item FL, GL, HL, &c. dein oppoſita ſectionum puncta lineis AF, BG, CH, DI, &c. coniungantur.

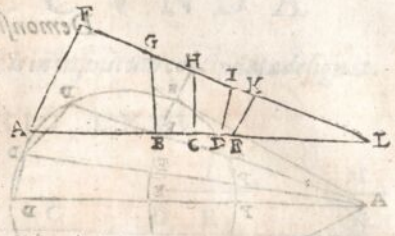
Dico triangula AFL, BGL, CHL, & cætera in infinitum eſſe in continua analogia.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [149] - 92
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.

CVm AL, BL, CL, &c. ponantur continuæ proportionales, est vt AL ad BL, sic BL ad CL, & CL ad DL, &c. similiter cùm ponantur continuæ FL, GL, &c. erit vt FL ad GL, ita GL ad HL, atque ita semper: igitur ratio composita ex rationibus AL ad BL, & FL ad GL, eadem erit cum ratione composita ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL; & composita ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL, eadem erit, cum composita ex rationibus CL ad DL, & HL ad IL: Atqui triangulí AFL, ad triangulum BGL proportio composita est ex rationibus AL ad BL, & FL ad GL; & ratio trianguli BGL, ad triangulum CHL, composita est ex rationibus BL ad CL, & GL ad HL, vt ex Commandino demonstrat Clauius, ad propositionem 23. sexti: eadem igitur est ratio trianguli AFL, ad triangulum BGL, quæ huius, ad triangulum CHL. Similiter ostendentur reliqua triangula esse in analogia continua. Quod erat demonstrandum.



Corollarium.

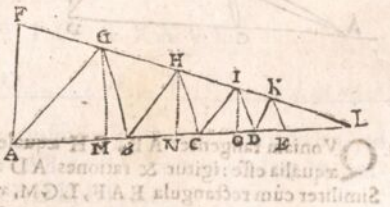
HInc consequitur etiam Trapezia AG, BH, CI, &c. esse in continua analogia; sunt enim trapezia, triangulorum continuè proportionalium differentiæ, vnde ex prima huius patet corollarij veritas.

PROPOSITIO LXXII.

IIsdem positis ducantur in singulis trapezijs diametri, AG, BH, CI, &c. Dico triangula inde nata, AGB, BHC, CID, &c. itemque triangula FAG, GBH, &c. esse continuè proportionalia.

Demonstratio.

EX punctis enim G, H, I, &c. ad AL, demittantur normales GM, HN, IO, &c. ratio trianguli AGB, ad triangulum BHC, componitur ex a rationibus AB ad BC, & altitudinis GM, ad altitudinem HN: sed quia AL, BL, CL, &c. ponuntur continuæ proportionales etiam AB, BC, CD, b &c. erunt continuæ in ratione suorum integrorum AL, BL, CL, &c. & quia GM, HN, &c. ad AL normales, ideoq; inter se parallela sunt, erit GM ad HN, vt GL ad HL, hoc est ex datis, vt HL ad IL; igitur ratio trianguli AGB, ad triangulum BHC, componitur ex rationibus BC ad CD, & HL ad IL: simili planè discursu ostendemus, rationem trianguli BHC, ad triangulum CID, ex ijsdem rationibus esse compositam: igitur triangula AGB, GHC, CID sunt in continua analogia, similiter de alijs idem demonstrabitur. Patet igitur veritas propositionis.



a *Claui. ad 23 sexti.*

b 1. *Huius.*

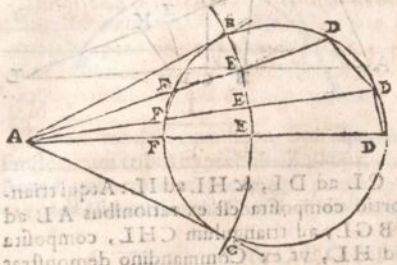
PROPOSITIO LXXIII.

COntingant circulum BCD duæ lineæ AB, AC, ex eodem puncto eductæ; & centro A interuallo B, C, describatur arcus BEC. deinde

de ex puncto A, ductis quotcumque lineis, secantibus AFED iungantur DD, EE, FF.

Dico triangula inde nata DAD, EAE, FAF esse in cõtinua analogia.

Demonstratio.



a 36. Tertij.

b 72. huius.

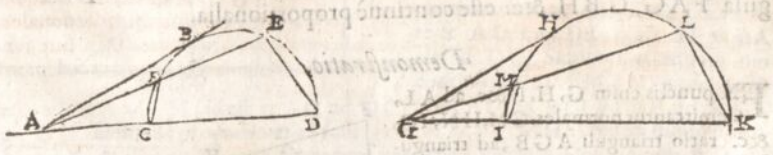
CVm AB contingat circulum, erit a rectangulum DAF, æquale quadrato AB, hoc est quadrato AE. Vnde DA, EA, FA sunt continuæ proportionales. Similiter reliquæ omnes lineæ DA, EA, FA, erunt in continua analogia. triangula igitur DAD, EAE, FAF b etiam in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

DVos circulos inæquales CBD, IKL, contingant æquales lineæ AB, GH: & ex punctis A, G educantur secantes ACD, AFE, GIK, GML continentes angulos æquales EAD, LGK: iunganturq; FC, ED, MI, LK.

Dico reciprocam esse triangulorum EAD, KGL; MIG, FAC proportionem.

Demonstratio.



c 36. Tertij. d 14. Sexti.

QVoniam tangentes AB, GH æquales sunt, patet c rectangula DAC, KGI, æqualia esse: igitur & rationes AD ad KG, & IG d ad CA æquales sunt. Similiter cùm rectangula EAF, LGM, æqualium tangentium quadratis æquentur, inter se erunt æqualia; quare & rationes EA ad LG, MG ad FA eædem sunt; si igitur rationibus æqualibus AD ad KG, & IG ad CA, æquales addantur rationes, EA ad LG, & MG ad FA, erit ratio composita ex rationibus AD ad KG, & EA ad LG æqualis compositæ ex rationibus IG ad CA, & MG ad FA; hoc est ratio trianguli EAD, ad LGK triangulum æqualis rationi trianguli MGI, ad FAC triangulum; cùm ob angulorum AG æqualitatem, rationem ex lateribus habeant compositam. Vnde veritas patet propositionis.

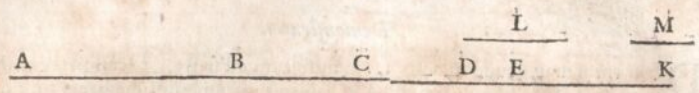
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [151] - 94
PUBLIC DOMAIN

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS SECVNDA

Terminum cuiuscunq; progressionis in infinitum continuatæ designat.

PROPOSITIO LXXV.



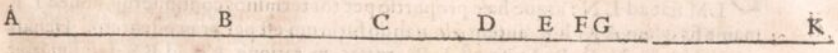
SI fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, vt magnitudo BC ad magnitudinem CK.

Dico proportionem AB ad BC, sine termino continuari actu posse intra magnitudinem AK, ita vt numquam ad K perueniatur.

Demonstratio.

FIat enim vt AB ad BC, sic BC ad L. quia igitur AB est ad BK, vt BC ad CK, erit alternando vt AB ad BC, id est vt BC ad L, sic BK ad CK: & rursum alternando, vt BC ad BK, sic L ad CK: quare cùm BC ex datis, minor sit, quàm BK, erit etiam L, minor quàm CK: poterit ergo ipsi L, ex CK sumi æqualis CD: erant autem AB, BC, L, tres continuæ proportionales; ergo & AB, BC, CD tres sunt continuæ. Fiat iam his tribus magnitudinibus continuè proportionalibus AB, BC, CD, quarta proportionalis continua M: quoniam igitur paulò antè ostendi esse BK ad BC vt CK est ad L, siue CD, erit diuidendo & inuertendo, BC ad CK, vt CD ad DK: eodem planè discursu ostendam, M esse minorem ipsâ DK, quo antè L ostendi esse minorem ipsâ CK: poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE æqualis. Sunt igitur quatuor magnitudines AB, BC, CD, DE continuæ proportionales. Atque ita demonstrabimus proportionem AB ad BC, intra lineam AK sine termino posse actu continuari, ita vt nunquam ad K perueniatur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.



SI fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, vt magnitudo BC, ad magnitudinem CK; & proportio AB ad BC, continuetur in magnitudine AK, per plures terminos CD, DE, EF, &c.

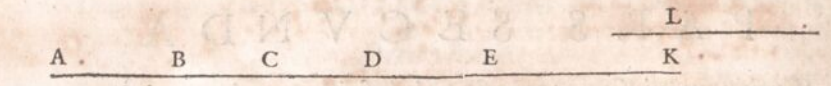
Dico etiam CD, fore ad DK, & DE ad EK, & sic deinceps, vt AB est ad BK & BC ad CK, &c.

Demonstratio.

QVandoquidem AB est ad BK, vt BC ad CK, erit alternando AB ad BC, hoc est ex datis BC ad CD, vt BK ad CK: & rursum alternando ac inuertendo KB ad BC, vti KC ad CD; & diuidendo ac inuertendo, vt BC ad CK, sic CD, ad DK: non aliter ostendemus vt CD ad DK, sic esse DE ad EK; atque ita deinceps in infinitum. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.



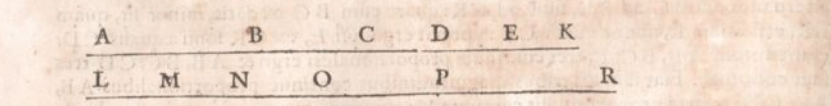
DAta sit proportio quæuis minoris inæqualitatis AB ad AC. Dico si hæc continuetur, exhibendam magnitudinem quauis datâ maiorem.

Demonstratio.

DEtur enim magnitudo quæuis L: manifestum est si BC, excessus secundæ magnitudinis AC, supra primam AB, aliquoties sumatur, maiorem fore magnitudine L: debeat ergo sumi BC quater, vt excedat L: continuetur ratio AB ad AC per quinque terminos AB, AC, AD, AE, AK: atque ita habebimus quatuor differentias BC, CD, DE, EK. quoniam autem est vt [a] DA ad CA, sic DC ad CB, & cùm DA maior sit CA, erit quoque DC maior quàm BC: similiter erit ED maior quàm CD, & KE quàm ED. ergo KB ex quatuor differentiis composita maior erit quàm BC quater sumpta. Quare cùm BC quater sumpta maior ponatur quàm L: erit KB multò maior quàm L, ideoque AK adhuc multò quàm L maior erit: constat igitur quod fuerat demonstrandum.

a 1. Huius.

PROPOSITIO LXXVIII.



AMagnitudine AK auferatur quæuis pars AB; & à residuo BK auferatur BC, ea lege vt sicut est AB ad BK, ita sit BC ad CK.

Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex AK quantitatem data minorem. *est vniuersalis primæ decimi.*

Demonstratio.

DEtur enim quantitas LM aut alia quantumuis parua: dein vt KB ad KA, sic LM fiat ad LN: atque hæc proportio per tot terminos continuetur, donec LR maior sit quàm AK; hoc autem aliquando futurum est per præcedentem. Deinde quoties in M, N, O, P diuisa est LR, toties in ratione AB ad BK subdiuidatur AK in B, C, D, E. Quoniam ergo ex constructione LM, LN, LO, &c. sunt continuæ, erit vt LM ad LN, id est vt BK ad KA, sic LP ad LR. quare inuertendo vt AK ad BK, sic RL ad PL, & permutando vt AK ad RL, sic BK ad PL. Atqui ex constructione AK minor est quàm RL, ergo & BK quàm PL minor erit. deinde quoniam ex constructione est AB ad BK, vt BC ad CK, & CD ad DK, & DE ad EK, patet componendo omnes AK, BK, CK, DK, EK esse continuas: itaque BK est ad CK, vt AK ad BK, id est ex constructione vt NL ad ML: sed PL est ad OL, vt NL ad ML, quia omnes RL, PL, OL, &c. sunt ex constructione continuæ; ergo BK est ad CK, vt PL ad OL; & permutando vt BK est ad PL, sic CK est ad OL. atqui iam ostendimus BK minorem esse quàm PL, ergo & CK quàm OL minor erit. similiter demonstrabimus DK minorem esse quàm NL; ac tandem EK esse minorem quàm ML, quæ erat data quantitas minor; ergo relinquitur quantitas: quod erat demonstrandum.

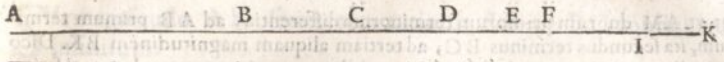
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [153] - 96
PUBLIC DOMAIN

Scholion.

Nota: dum in propositione dicitur, si hæc ablatio semper fiat, dico relinqui ex AK quantitatem datâ minorem: *sensum propositionis non esse, relinqui ex AK quantitatem data minorem, post ablationem terminorum in infinitum continuatam; siue post totam seriem absolutam, relinqui adhuc quantitatem data minorem: sed auferendo terminos ex AK, in ratione ante dicta, aliquando tot auferendos, vt residua pars totius AK, minor sit quantitate datâ: quod in gratiam quorundam dictum sit.*

PROPOSITIO LXXIX.



DAta sit magnitudo quæcumque AK: si fuerit

AB ad BK, vt BC ad CK.
AB ad AK, vt BC ad BK.
vel AK, BK, CK continuè proportionales.
AB ad BC, vt BK ad CK.
AB ad BC, vt AK ad BK.

Dico magnitudinem AK æqualem esse toti progressioni magnitudinum continuè proportionalium, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ; siue quod idem est, rationis AB ad BC in infinitum continuatæ terminum esse K.

Demonstratio.

CVm AB sit ad BK, vt BC ad CK, poterit ratio [a] AB ad BC, intra magnitudinem AK semper continuari, ita vt numquam perueniatur ad K, id est AK maior erit quacunque serie finita terminorum; ergo AK, non est minor serie totâ rationis AB ad BC. Deinde quia AB est ad BK, vt BC ad CK, si ratio AB ad BC semper continuetur, erit vt AB ad [b] BK, siue vt BC ad CK, sic CD ad DK & DE ad EK, atque ita deinceps in infinitum: Itaque si continuetur semper ratio AB ad BC, relinquetur [c] tandem ex AK magnitudo quauis datâ minor. Quare AK nequit esse maior, serie rationis AB ad BC: nam si maior esset deberet aliquo excessu esse maior. ponatur is IK; igitur AI seriei rationis AB ad CD æqualis erit: ergo ratio AB ad BC quantumuis continuata non transiliet vnquam I. ergo relinquetur ex AK magnitudo semper maior quàm IK. ergo non minor quauis datâ, contra iam demonstrata. non erit igitur AK maior serie rationis AB ad BC: Quare cùm neque minorem esse anteà sit ostensum, æqualis sit necesse est. Quod erat demonstrandum.

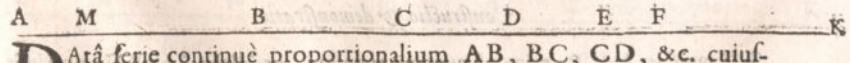
[a] 75. huius.
[b] 78. huius.
[c] 78. huius.

Reliquarum hypothesium demonstrationes ad primam reducuntur. nam si fuerit AB ad AK vt BC ad BK, erit diuidendo AB ad BK, vt BC ad CK. ergo per primam demonstrationem, rationis AB ad BC semper continuatæ terminus est in K.

Deinde si fuerint AK, BK, CK continuæ, erit diuidendo AB ad BK, vt BC ad CK. Rursum igitur per primam demonstrationem patet propositum.

Denique si fuerit AB ad BC, vt BK ad CK, vel AK ad BK, erit permutando vel AB ad BK, vt BC ad CK, vel AB ad AK vt BC ad CK. Vnde iterum per primam demonstrationem conficitur propositum.

PROPOSITIO LXXX.



DAtâ serie continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. cuiuscumque proportionis, & quocumque in genere quantitatis; inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis:

Constructio prima.

A M B C D E F K

SIt AM, differentia primorum duorum terminorum : fiatque vt AM ad BC secundum terminum, sic BC ad tertium quempiam CK. Dico CK magnitudinem cum primo AB. & secundo termino BC, æqualem esse seriei vniuersæ AB, BC, CD, &c.

Constructio secunda.

FIat vt AM duorum primorum terminorum differentia, ad AB primum terminum, ita secundus terminus BC, ad tertiam aliquam magnitudinem BK. Dico magnitudinem BK, cum primo termino, exhibere quantitatem æqualem toti seriei.

Constructio tertia.

DIfferentiæ duorum primorum terminorum AM, & primo termino AB, tertia proportionalis fiat AK. Dico AK totam seriem exhibere.

Demonstratio

PRimæ constructionis; AM est ad BC, vt BC ad CK; igitur componendo AM cum BC, hoc est AB, erit ad BC, vt BK ad CK : & permutando, AB ad BK, vt BC ad CK. Quare [a] AK magnitudo, hoc est CK, cum AB & BC primis terminis, toti seriei æqualis est.

a 79. huius

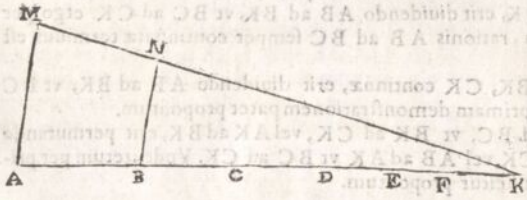
Secundæ constructionis; AM est ad AB, vt BC ad BK ex constructione : igitur diuidendo, vt AM est ad MB, id est vt AM ad BC, sic BC ad CK. itaque per demonstrationem primæ constructionis, AK (hoc est BK vnà cum primo termino AB) æquatur toti seriei.

Tertiæ constructionis, Cùm sit ex constructione AM ad AB, vt AB ad AK, erit inuertendo, diuidendo, rursumque inuertendo AM ad MB, vt AB ad BK : & componendo AB ad MB, hoc est BC, vt AK ad BK. Quare AK [b] toti seriei æqualis est. Factum igitur est quod petebatur.

b 79. huius.

Primâ igitur constructione exhibetur tota series præter primum & secundum terminum. 2. constructione habetur series tota præter primum terminum. 3. constructione simul tota producitur series. Huius autem problematis, ac constructionis eiusdem vniuersalitatem, amplius deductam habes in propositione 123. *huius, & corollario quarto ibidem.*

PROPOSITIO LXXXI.



QVia verò vltimo ratio quarumcumque quantitatum ad lineas reduci potest, hinc etiam sequenti methodo, lineam toti seriei proportionalium linearũ, reperiemus æqualẽ.

Constructio & demonstratio.

EX punctis A & B, erige ad quemuis angulum, parallelas AM, BN; quæ ipsis AB, BC sint proportionales; & per puncta M & N ducatur recta MN, concurrens cum ABC in K. Dico AK, toti seriei AB, BC, CD, &c. æqualem esse.

Quod autem MN, occurrere debeat ABC productæ, patet ex eo, quod BC ex hypo-

hypotheſi, minor ſit quàm AB: ac proinde etiam BN: cùm AM, BN proportionales ſint ipſis AB, BC; ſit igitur concurſus in K; erit vt AB ad BC, ſic MA ad NB; ſed vt MA ad NB, ſic AK ad BK, ergo AB eſt ad BC, vt AK ad BK. Vnde [a] AK toti ſeriei æqualis eſt. Factum igitur eſt quod petebatur. [a] *Ibid.*

PROPOSITIO LXXXII.

A N B C D E F G M K M

SIt magnitudo AK, ſeries tota rationis AB ad BC continuatæ in infinitum.

Dico eſſe { AB ad BK, vt BC ad CK. / AB ad AK, vt BC ad BK. / AK, BK, CK, &c. continuè proportionales. / AB ad BC, vt BK ad CK. / AB ad BC, vt AK ad BK.

Demonſtratio.

EX AB abſcindatur NB, æqualis BC: ſi ergo non eſt AB ad BK, vt BC ad CK, neque permutando AB erit ad BC, id eſt BN, vt BK ad CK; ergo neque dividendo AN, erit ad NB, vt BC ad CK. Fiat igitur vt AN ad NB, ſic BC ad aliam magnitudinem CM, maiorem vel minorem quàm CK. Itaque componendo, AB erit ad NB, hoc eſt BC, vt BM ad CM: & permutando AB ad BM, vt BC ad CM. Quare totius ſeriei [b] rationis AB ad BC, terminus erit M; ſiue AM æqualis erit ſeriei rationis AB ad BC, quod eſt abſurdum, cùm AK maior vel minor quàm AM, ſit ex hypotheſi æqualis ſeriei datæ. non erit igitur alia ratio AB ad BK à ratione BC ad BK, ergo eadem. quod erat demonſtrandum. [b] 79. *huius*

Reliquas autem aſſertionis partes ex prima deducemus. Cùm enim iam demonſtratum ſit ex hypotheſi theorematis, ſequi AB eſſe ad BK vt BC ad CK, componendo erit AK ad BK, vt BK ad CK: quod erat ſecundum.

Et quoniam AK eſt ad BK, vt BK ad CK, igitur per conuerſionem rationis, AK eſt ad AB, vt BK ad BC; & inuertendo AB ad AK, vt BC ad BK. quod erat tertium. rurſum quoniam AB eſt ad BK, vt BC ad CK, erit permutando AB ad BC, vt BK ad CK. quod erat quartum. denique quoniam oſtenſum eſt AB eſſe ad AK, vt BC ad BK, etiam permutando AB eſt ad BC, vt AK ad BK: quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium.

EX quinta aſſertionis parte hoc theorema deducitur: data ſit ſeries magnitudinum continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. ſine termino continuata. Dico eſſe vt vna antecedentium, nempe AB, ad vnam conſequentium BC. ſic omnes, hoc eſt infinitas antecedentes, ſiue AK, ad omnes ſiue infinitas conſequentes, ſiue BK.

PROPOSITIO LXXXIII.

A M B C D E F K

SIt AK magnitudo producta ex ratione AB ad BC, in infinitum continuata; primi autem & ſecundi termini differentia ſit AM;

Dico primò; differentiam AM, BC ſecundũ terminum, & CK totam

ſeriem, (præter duos primos terminos) in continua eſſe analogia.

Dico ſecundò, AM differentiam, ad primum terminum AB, eſſe vt BC ſecundus terminus, ad BK totam ſeriem, præter primum terminum.

Dico tertiò, differentiam AM, primum terminum AB, & totam ſeriem AK, in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.

A M B C D E F K

QVoniam AK magnitudo producta eſt ex ratione AB ad BC in infinitum continuata, erit per præcedentem AB ad BK, vt BC ad CK: igitur permutando vt BK ad CK. ſic AB ad BC, hoc eſt MB, & diuidendo AM ad MB, hoc eſt BC, vt BC ad CK. quod erat primum.

Rurſum cùm ſit vt AM ad BC, hoc eſt MB, ſic BC ad CK, erit componendo inuertendo, vt AB ad MB, ſic BK ad CK; & conuertendo inuertendo vt AM ad AB, ita BC ad BK. quod erat ſecundum.

Iterum cùm ſit vt AM ad AB, ſic BC ad BK, erit permutando, vt AM ad BC, hoc eſt MB, ſic AB ad BK; & inuertendo componendo, & iterum inuertendo vt AM ad AB, ſic AB ad AK. quod erat tertio loco demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

A B C D E K

M N O P R

DAtæ ſint ſeries binæ AK, MR (quas ſimiles licebit appellare) magnitudinum continuè proportionalium, in eadem proportione.

Dico ſeriem totam AK, eſſe ad ſeriem MR vt AB primus terminus ſeriei AK, ad MN primum terminum ſeriei MR.

Demonſtratio.

PEr octuageſimam ſecundam huius AK eſt ad BK, vt AB ad BC, hoc eſt, (cùm ex hypotheſi AB ad BC, MN ad NO, ſimiles ſint rationes) vt MN ad NO: ſed per eandem etiam eſt MR ad NR, vt MN ad NO, igitur AK eſt ad BK vt MR ad NR. vnde per conuerſionem rationis AK eſt ad AB, vt MR ad MN: & permutando ſeries AK, eſt ad ſeriem MR, vt primus terminus AB primæ ſeriei, ad primum terminum MN ſecundæ ſeriei; quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXV.

QVamquam ex iis, quæ hactenus vniuerſaliter demonſtrauimus propoſitione octogeſimâ, & octogeſimâ primâ, nota ſit proportio totius ſeriei, ad primam magnitudinem; placuit tamen exercitij causâ, notißimis quibuſdam proportionibus applicare; maximè cùm de illis ſæpè mentio futura ſit.

PRimùm igitur data ſit, quocumque in genere quantitatis, proportio dupla, AB ad BC.

Dico totam ſeriem proportionis huius, ſine termino continuatæ, conſtituere magnitudinem, quę dupla ſit primæ magnitudinis.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [157] - 100
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

A I B C D E K

FIat enim ipſi BC, æqualis BI, & fiat vt AI ad AB, ſic AB ad AK: erit K terminus [a] rationis AB ad BC, ſemper continuatæ. & quoniam BA, dupla eſt BC, eſtque BI æqualis BC, erit quoque BA dupla IA; Quare cùm ſit ex conſtructione vt BA ad IA, ſic AK ad AB, erit etiam AK, (id eſt tota ſeries rationis AB ad BC) dupla BA; primæ magnitudinis. Quod erat demonſtrandum. [a] 80. huius.

PROPOSITIO LXXXVI.

DEtur deinde proportio tripla AB ad BC.
Dico totam ſeriem, fore ſeſquialteram primæ magnitudinis.

Demonſtratio.

A I C D K
B

FIat enim ſecundæ magnitudini BC, æqualis BI; erit ergo BI, tertia pars AB; & AI exceſſus, ſeu differentia primæ & ſecundæ; vnde ſi fiat vt AI ad AB, ſic AB ad AK; erit AK [b] æqualis toti ſeriei; & quia IB, tertia pars eſt BA, erit BA ſeſquialtera ipſius AI: quare cùm ſit vt BA ad AI, ſic AK ad AB; erit quoque AK, ſeſquialtera primæ magnitudinis AB. Quod erat demonſtrandum. [b] *Ibid.*

PROPOSITIO LXXXVII.

A I B CDE K

DEnique proportio data ſit quadrupla AB ad BC.
Dico totam ſeriem eſſe ſeſquitertiam primæ magnitudinis: ſiue eam habere rationem ad primam magnitudinem, quam quatuor ad tria.

Demonſtratio.

FIat enim BC æqualis BI; erit ergo BI quarta pars AB; & conſequenter BA ſeſquitertia ipſius IA. Fiat igitur vt AI ad AB, ſic AB ad AK, erit AK tota ſeries. Quare cùm KA ſit ad BA, vt BA ad IA, erit KA ſeſquitertia primæ magnitudinis BA. Quod erat demonſtrandum. [c] *Ibid.*

Sed de his modò ſatis: poterit enim quilibet ex propoſitione ex octuageſima huius benè intellecta, datæ proportionis rationalis, ſeu numeri ad numerum, totam ſeriem, & conſequenter rationem ſerici, ad primum terminum exhibere.

Scholion.

QVod ſi conſtructionem ſecundam octuageſimæ propoſitionis adhibere placuerit, habebitur vnica operatione proportio primæ magnitudinis ad reliquam ſeriem: ſi verò primâ conſtructione vtamur, exhibebitur proportio primæ & ſecundæ magnitudinis ſimul ſumptarum, ad ſeriem reliquam.

Præſens materia memorem me facit eius, quod in argumento huius libri præfatus ſum, cùm mentio incideret Zenonici diſcurſus, quo ſe credebat omnem motus rationem è medio tollere poſſe: nucleus autem argumenti tantæ apud authorem authoritatis exſtitit, vt eundem Achillis inuictiſſimi Ducis nomenclaturâ dignaretur: perſuaſum habens, eum nucleum vſque adeò duro tortice futurum, qui par foret omnibus Philoſophicorum Elenchorum malleis ſuſtinendis.

Repetam diſcurſum Zenonis, iiſdem verbis, quibus in præfatione huius libri ſum vſus. conſiſtebat ille in duobus, quæ mouerentur; primo Achillis, velociſſimè currentis, altero teſtudinis tardiſſimè reptantis.

A B D E C

Ponatur inquiebat ille, Achilles cursor pernicissimus, ex A *punctο testudinem reptantem per semitam* B C, *lentissimo motu, velle assequi; quo tempore Achilles tendit ex* A *in* B, *mota est testudo ad aliquod spatium, perueniens in* D: *igitur necdum Achilles assecutus est testudinem; iterùm quo tempore Achilles ex* B *currit, vt assequatur testudinem existentem in* D, *mota est testudo ad* E *punctum; igitur Achilles existens in* D *nondum assecutus est testudinem; atque hoc in infinitum eueniet: quoniam continuum diuisibile est in infinitum, vnde numquam Achilles assequetur testudinem. Incumbit igitur nobis hunc nucleum effringere, ex doctrina huius libri; quod assecutos nos esse cognosces, cùm ipsissimum punctum assignauerimus, quo Achilles testudinem apprehendet.*

Vt nodum hunc Gordium, ex principiis huius libri dissoluamus, supponemus, non minùs Achillem, quàm testudinem in suo cursu vniformiter procedere; ita vt celeritas, primâ parte motus assumptâ, perseueret in eodem statu, vsque ad vltimum temporis momentum quo sua spatia decurrunt; supponemus insuper, (quoniam omnis motus species est quantitatis) duos hosce motus, cùm vniformes ponantur, in suis partibus, sortiri inter se aliquam proportionem, quod necesse est eueniat inter omnes quantitates, quæ in eadem specie versantur: vt sunt duo motus recti & vniformes.

Ponatur igitur proportio duorum horum mobilium, secundùm celeritatem, consistere in ratione dupla; ita vt Achilles duplo celerius spatium decurrat, quàm testudo: igitur quo tempore testudo ad quartam partem stadij promota fuerit, medium stadium confecerit Achilles. Educ̃ta itaque lineæ A C, D C, *in ratione dupla ex* C *punctο, diuidantur in* B, F, H, *&c. &* E, G, I. *secundùm rationem duplam; vt* A C *dupla, sit* B C, *&* D C *dupla* E C. *item* B C *dupla* F C, *&c.* E C *dupla* G C, *&c.*

A B F H C

D E G I

Consistat itaque Achilles in A. *sitq;* A C *semitam repræsentans stadio longitudine æqualem; testudo verò constituta in dimidio stadij, in punctο* B, *vel* D. *positâ* D C *æquali ipsi* B C. *Quoniam Achilles ex* A *moueri incipit, quo tempore ex* D *inchoat cursum testudo; igitur peruenerit Achilles ex* A *in* B, *quo tempore ex* D, *testudo pertinget in* E: *& quo tempore Achilles ex* B *pertinget in* F, *eodem peruenerit testudo ex* E *in* G. *& sic consequenter: quia vero terminus progressionis rationis* A B *ad* B F *terminatur in* C, *prout propositione octuagesimâ quintâ demonstratum est; similiter cùm progressio, secundùm rationem* B F, *ad* F H, *vel* D E *ad* E G, *finem sortiatur in punctο* C, *secundùm eandem propositionem: igitur concursus duorum horum mobilium, Achillis scilicet & testudinis, continget in punctο* C: *Quod si loco proportionis duplæ, assumatur proportio tripla, tunc assignabitur concursus per propositionem octuagesimam sextam huius. Si verò quadrupla, inseruiet propositio octuagesima septima, & sic de reliquis.*

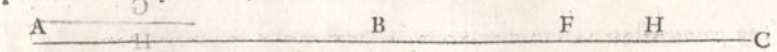
Captiosus Zenonis discursus molestias creat non consideranti discrimen, quod in eo exsurgit, inter duplicem progressionem, quæ argumentationis filum dubium facit; alia enim est progressio per partes æquales; alia per partes proportionales; hîc vtriusque cursus supponitur fieri per partes vniformes, siue per passus æquales, cùm passus primus à secundo, vel tertio non discrepet, licet duos passus Achillis, verbi gratia, eodem contingant tempore quo vnus passus testudinis; secundùm verò hos passus fit vtriusque cursus: Zeno autem in decursu argumenti sui, distinguit motus cursorum per partes proportionales, secundùm quas mobilia nullo modo mouentur; ac proinde in idem eius discursus recidit, ac si dicat quis, eo tempore quo diui-

A B C D E

dam lineam A E, *in partes quatuor æquales, alius eam subdiuidet secundùm aliquam seriem per partes proportionales, profectò citiùs assignabuntur termini quatuor partium æqualium, quã infiniti termini partium proportionalium: Achilles enim & testudo decurrentes* A E. *spatium, per partes æquales, suorum passuum æqualium terminum tandem acquirunt; Zeno verò dum hæc contingunt, à cursoribus diuidi vult spatium* A E, *in partes proportionales, secundùm quas mobilia non succedunt.*

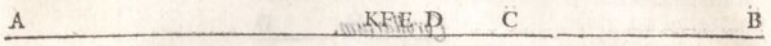
Ad

Ad argumentum porrò respondendum est, dum dicitur: Priusquam Achilles ex A perueniat ad B punctum, mota est testudo ex B in F:



sensum huius propositionis coincidere cum hoc quo dicetur, prius debet Achilles assignare punctum B, quam notet punctum E. quod repugnat cursui secundum rationem motus: nam omnis assignatio in hac materia continet rationem subsistentiæ; vt Mathematici sentiunt, saltem secundum intellectum, ac proinde alicuius quietis, quæ motui repugnat. Verum hæc in gratiam Philosopherum dicta sufficiant.

PROPOSITIO LXXXVIII.



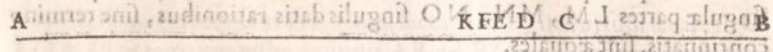
DAtâ AB, cuius tertia pars sit CB, fiat vt tota AB, ad CB tertiam sui partem, ita CB ad CD, & CD ad DE, & DE ad EF, atque ita semper.

Dico K terminum huius progressionis, bifariam diuidere propositam magnitudinem AB.

Demonstratio.

ERit enim ex hypothesi AB cum BK, æqualis toti seriei proportionis triplæ. atqui tota series rationis triplæ, [a] sesquialtera est magnitudinis primæ, ergo AB cum BK, sesquialtera est primæ magnitudinis AB; ergo BK, est eiusdem dimidia. quod erat demonstrandum. [a] 86. *huius.*

PROPOSITIO LXXXIX.



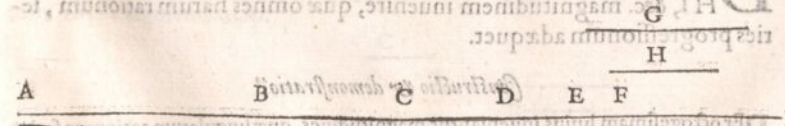
DEtur quantitas AB, cuius quarta pars sit BC; si fiat vt tota AB ad quartam sui partem BC, ita BC ad CD, & CD ad DE, & DE ad EF; atque ita semper continuando, punctum K huius progressionis terminus emergat:

Dico BK esse tertiam partem propositæ quantitatis AB.

Demonstratio.

NAm ex hypothesi AB cum BK, est tota series proportionis quadruplæ. Atqui tota series rationis quadruplæ, est [b] ad primam magnitudinem, vt quatuor ad tria, ergo BK cum AB, est ad AB, vt quatuor ad tria. & diuidendo KB ad AB, vt vnum ad tria, hoc est KB tertia pars est ipsius AB. Quod erat demonstrandum. [b] 87. *huius.*

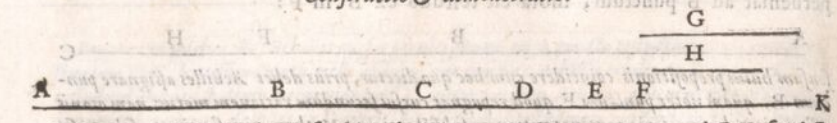
PROPOSITIO XC.



DAtam magnitudinem AK, ita in duobus punctis B, C, diuidere, vt AB ad BC, habeat rationem datam, G ad H. Et proportionis AB ad BC continuatæ progressio terminetur in K.

Cor-

Constructio & demonstratio.



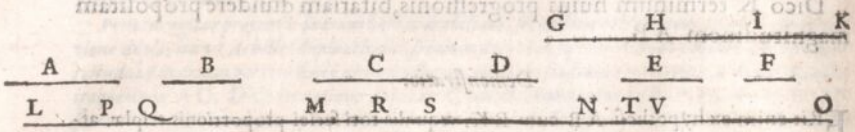
DIuide AK in B, ita vt sit AK ad BK, vt G ad H; & vt AK ad BK, sic AB fac ad BC. Dico factum esse quod petebatur. cùm enim sit vt AK ad BK, sic AB ad BC, erit & reliquum BK [a] ad reliquum CK, vt AK ad BK: vnde rationis AB ad BC [b] terminus est K: est autem AB ad BC ratio eadem cum ratione AK ad BK, id est G ad H. constat igitur propositum.

[a] 19. Quinti.
[b] 79. huius.

Corollarium.

EX hac propositione manifestum est, omnem magnitudinem, omnes rationum series continere.

PROPOSITIO XCI.

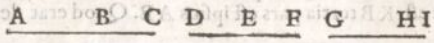


DAtis quotcumque rationibus A ad B, C ad D, E ad F, datam magnitudinem LO, oporteat diuidere in tot partes, quot datæ sunt rationes, nempe in LM, MN, NO, ita vt partes illæ eandem habeant rationem, quam primi datarum rationum termini, A, C, E; & præterea singulæ partes LM, MN, NO singulis datis rationibus, sine termino continuatis, sint æquales.

Constructio & demonstratio.

FIat GHIK, omnibus A, C, E, æqualis; & vt diuisa est GK, sic diuide LO in M & N: denique per 90. huius LM ita diuide in P & Q, vt sit LP, ad PQ, sicut A ad B: & rationis LP ad PQ, terminus sit M. similiter MN, NO diuide in punctis R, S, T, V secundùm rationes C ad D, E ad F, ita vt rationum MR ad RS, NT ad TV, termini sint N & O. Dico factum quod petebatur. Demonstratio ex ipsa constructione est manifesta.

PROPOSITIO XCII.



DAtis quotcumque rationibus AB ad BC, DE ad EF, GH ad HI, &c. magnitudinem inuenire, quæ omnes harum rationum, series progressionum adæquet.

Constructio & demonstratio.

PEr octogesimam huius inueniantur magnitudines, quæ singularum rationum series adæquent; atque omnibus illis magnitudinibus, vna fiat æqualis. hæc, vt patet, adæquabit omnes series datarum rationum.

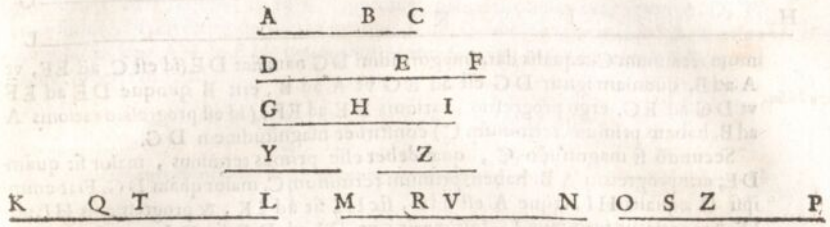
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [161] - 104
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XCIII.

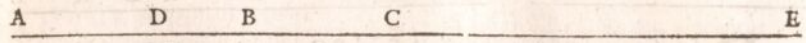
DAtas quotcumque series diuersarum rationum ita constituere, vt sint in continua analogia datæ proportionis.

Constructio & demonstratio.



RAtiones diuersæ sint AB ad BC, DE ad EF, GH ad HI. & alia data ratio Y ad Z. Fiant tres magnitudines KL, MN, OP continuè proportionales, in ratione Y ad Z. & KL ita [a] diuidatur in QT, &c. vt seriem constituat rationis AB ad BC; & MN ita diuidatur in RV, &c. vt adæquet seriem rationis DE ad EF: ac demum diuidatur similiter OP in S & Z, vt rationis GH ad HI constituat seriem, factumque erit quod petebatur. [a] 90. *huius.*

PROPOSITIO XCIV.



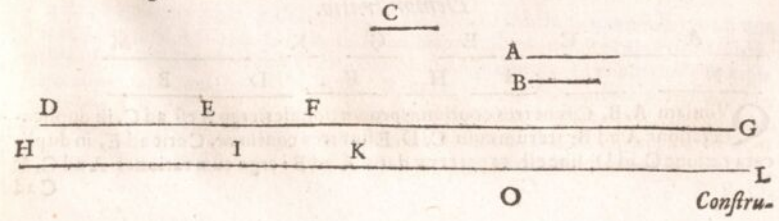
DAtam magnitudinem AE, semel sectam in B, ita rursum secare in C & D, vt tam progressio rationis AB ad BC, quàm progressio rationis AD ad DB, terminetur in E.

Constructio & demonstratio.

REperiatur primò ipsis AE, BE, tertia proportionalis CE. Dico progressionem AB, BC, terminari in E. patet ex septuagesima nona huius. Deinde inter AE, BE, inueniatur media DE. patet rursum progressionem AD, DB terminari in E, per eandem propositionem: fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO XCV.

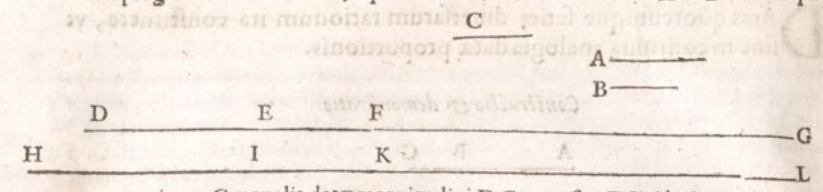
DAtâ magnitudine DG, & proportione maioris inæqualitatis A ad B; itemque aliâ magnitudine C: examinare quomodo series progressionis datæ rationis A ad B, cuius primus terminus sit C, se habeat ad datam DG magnitudinem.



Constru-

Constructio & demonstratio.

Fiat vt A ad B, sic D G ad E G. Primò igitur si data magnitudo C, quę primus terminus progressionis esse debet, æqualis sit D E, erit series rationis A ad B habens primum terminum C, æqualis datæ magnitudini D G nam fiat D E (id est C ad E F, vt A ad B. quoniam igitur D G est ad E G vt A ad B, erit B quoque D E ad E F vt D G ad E G. ergo progressio [a] rationis D E ad E F, (id est progressio rationis A ad B, habens primum terminum C) constituet magnitudinem D G.



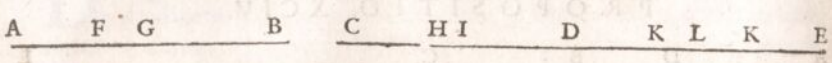
[a] 79. *huius.*

Secundò si magnitudo C, quæ debet esse primus terminus, maior sit quàm D E, erit progressio A B, habens primum terminum C, maior quàm D G. Fiat enim ipsi C æqualis H I, vtque A est ad B, sic H I sit ad I K, & progressionis H I ad I K [b] reperiatur terminus L. Igitur erit [c] vt H I ad D E sic H L tota series progressionis, H I, I K, ad D G totam seriem progressionis D E, E F. atqui H I maior est, quàm D E; ergo & H L, maior est quàm D G.

[b] 80. *huius.*
[c] 84. *huius.*

Si denique C, minor sit quàm D E. erit quoque progressio rationis A ad B, habens primum terminum C, minor quàm D G; quod eodem modo ostendemus, quo primum. Fecimus igitur quod petebatur.

PROPOSITIO XCVI.



DAta sit progressio rationis A F ad F G, terminata in B; & alia magnitudo C E: Oporteat in magnitudine C E, ita vtrimque ad C & E constituere progressionem rationis A F ad F G (progressiones, nempe C H, H I, &c. & E K, K L, &c.) vt eundem habeant terminum D, qui ita diuidat C E, vt A B, C D, D E, sint in continua analogia.

Constructio & demonstratio.

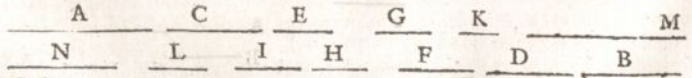
REctam C E ita diuide per trigesimam sextam huius vt A B, C D, D E sint continuę proportionales. Deinde per nonagesimam huius ita diuide C D, in H & I, vt ratio C H ad H I, eadem sit cum ratione A F ad F G, ac simul progressio C H, H I, terminetur in D. Idem facito in E D. Factumque erit quod petebatur.

PROPOSITIO XCVII.

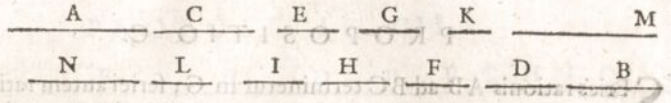
SI duarum serierum A M, B N termini A, B, C, D, E, F, G, &c. alternatim in continua sint analogia.

Dico illas inter se eam proportionem habere, quam primi termini.

Demonstratio.

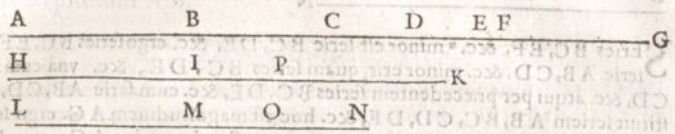


QVoniam A, B, C sunt tres continuæ proportionales; ergo A est ad C, in duplicatâ ratione A ad B; iterùm cum C, D, E sint tres continuæ, C erit ad E, in duplicata ratione C ad D; hoc est, vt patet ex datis A ad B: ergo cùm rationes A ad C, & C ad



C ad E eiuſdem duplicatæ ſint, erunt A, C, E tres continuè proportionales in ratione duplicata A ad B. Quare ſeries AM eſt ſeries rationis duplicatæ; rationis A ad B: deinde quia B, C, D ſunt continuæ proportionales, erit ratio B ad D, duplicata rationis B ad C. ſimiliter oſtendemus, rationem D ad F, duplicatam eſſe rationis B ad C. continuæ proportionales ſunt igitur B, D, F. vnde ſeries BN, eſt ſeries duplicatæ rationis B ad C, id eſt ex datis, A ad B: ſimiles igitur ſeries ſunt AN & BN. quare ſunt [a] inter ſe, vt primi termini A & B. quod erat demonſtrandum. [a] 84. *huius*

PROPOSITIO XCVIII.



COntinuetur ratio AB ad BC, habeatque terminum G. deinde fiat ſeriei rationis AB ad CD, æqualis magnitudo HK: ſeriei autem rationis AB ad DE, æqualis LN.

Dico HK magnitudinem maiorem eſſe quàm ſit LN.

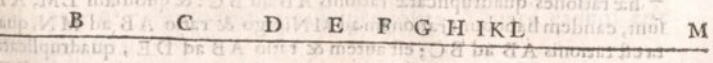
Demonſtratio.

QVia HK eſt ſeries AB, CD, &c. & LN eſt ſeries AB, DE, &c. ſumantur ex HK, partes HI, IP æquales ipſis AB, CD: ex LN verò partes LM, MO æquales ipſis AB, DE. Quoniam igitur ſeriei HI, IP terminus eſt K, erit HK [b] ad IK, vt HI ad IP: & quia ſeriei LM, MO, &c. terminus eſt N, erit LN [c] ad MN, vt LM ad MO. ſed HI ad IP minorem habet rationem, quàm LM, id eſt HI ad MO. Ergo HK ad IK, minorem habet, quàm LN ad LM, & per conuerſionem rationis KH ad HI, maiorem habet quàm LN ad LM. ergo permutando HK ad LN, maiorem habet, quàm HI ad LM. Quare cùm ex conſt. HI, LM ſint æquales, neceſſe eſt HK maiorem eſſe quàm LN. Quod erat demonſtrandum. [b] 81. *huius.* [c] *Ibid.*

PROPOSITIO XCIX

SEries rationis AB ad BC, terminetur in M; aſſumatur autem ex ſerie AM, terminus quicumque DE.

Dico rationis AB ad DE ſeriem, vnà cum ſerie rationis BC ad EF, ac ſerie rationis CD ad FG, æquari ſeriei rationis AB ad BC.



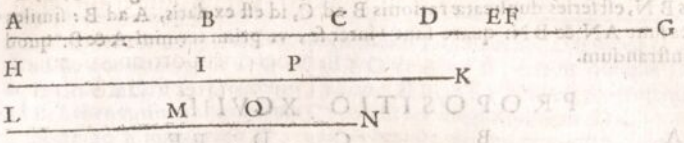
Demonſtratio.

QVandoquidem omnes AB, BC, CD, DE, &c. in continua ſint analogia, patet ex elementis AB, DE, GH & ſic in infinitum eſſe continuè proportionales. Similiter BC, EF, HI, &c. itemque CD, FG, IK eſſe continuè proportionales; ergo ſeries trium rationum AB, DE, BC, EF, CD, FG, continuantur perpetuò; intra ſeriem AB, BC, CD, &c. ita vt in his tribus ſeriebus ſimul ſumptis, nec plures, nec pauciores termini reperiantur, quàm ſint in ſerie AB, BC, CD, &c. manifeſtum igitur eſt has tres ſeries, ſeriei AB, BC, &c. æquales eſſe. Quod erat demonſtrandũ.

PROPOSITIO C.

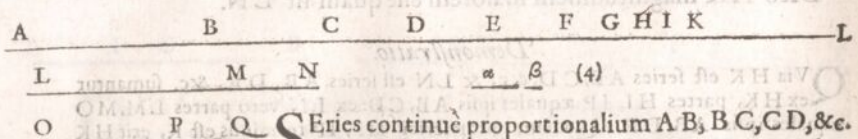
SEries rationis AB ad BC terminetur in G; seriei autem rationis AB ad CD, æqualis sit HK; item seriei rationis BC ad EF, æqualis sit LN. Dico seriem AG, duabus HK, LN, maiorem esse.

Demonstratio.



a 98.huius. SEries BC, EF, &c. [a] minor est serie BC, DE, &c. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minor erit, quam series BC, DE, &c. vnà cum serie AB, CD, &c. atqui per præcedentem series BC, DE, &c. cum serie AB, CD, &c. constituit seriem AB, BC, CD, DE, &c. hoc est magnitudinem AG. ergo series BC, EF, &c. cum serie AB, CD, &c. minorem constituit, quàm AG: ergo HK, LN series æquales seriebus AB, CD, &c. BC, EF, &c. minores sunt, quàm series AG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.



SEries continuè proportionalium AB, BC, CD, &c. terminetur in L. Detur autem proportio α ad β, multiplicata rationis AB ad BC, iuxta datum aliquem numerum (quatuor exempli causa) & quot sunt vnitates in dato numero, tot vna minùs fac magnitudines LM, OP, RS, æquales datæ seriei terminis AB, BC, CD.

Dico series, rationis α ad β, quarum primi termini sint L, O, R, simul sumptas, constituere eandem magnitudinem, quam series rationis AB ad BC.

Demonstratio.

FIat vt α ad β, sic LM ad MN, & OP ad PQ, & RS ad ST; erunt ergo omnes hæ rationes quadruplicatæ rationis AB ad BC: & quoniam LM, AB, æquales sunt, eandem habebunt rationem ad MN; ergo & ratio AB ad MN, quadruplicata est rationis AB ad BC; est autem & ratio AB ad DE, quadruplicata rationis AB ad BC. ergo vt AB ad DE, ita AB ad MN. æquantur igitur DE & MN: series igitur rationis LM ad MN, est series rationis AB ad DE. Similiter ostendam seriem rationis OP ad PQ, esse seriem rationis BC ad EF; & seriem rationis RS ad ST, seriem esse rationis CD ad FG. atqui hæ tres [b] series simul sumptæ, adæquant seriem rationis AB ad BC; ergo etiam & illæ eandem adæquabunt. Quod erat demonstrandum.

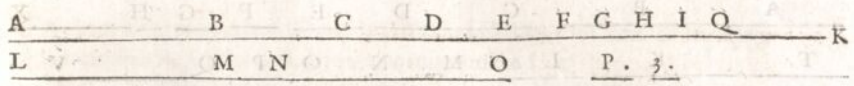
M

b 99.huius.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [165] - 108
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CII.



SEries rationis AB ad BC continuatæ, terminetur in K. Data autem sit LM æqualis AB, & quiuis numerus (putà 3.) deinde fiat ratio LM, ad MN multiplicata rationis AB ad BC, iuxta datum numerum; sitq; rationis LM ad MN terminus O.

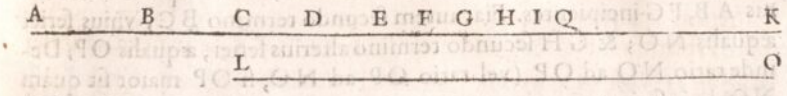
Dico seriem AK, ad seriem LO, eandem habere proportionem, quam totidem termini seriei AB, BC, CD quot sunt vnitates in dato numero, habent ad primum AB.

Demonstratio.

CVm, exempli causa, numerus datus ponatur ternarius, erit ratio LM ad MN, triplicata rationis AB ad BC; ostendendum nobis est, AK esse ad LO, vt tres primi termini DA ad primũ AB. ex serie AK sume sex terminos AG: Igitur proportio AD [a] ad DG, triplicata est proportionis AB ad BC; æqualis igitur est rationi LM ad MN, hoc est [b] rationi LO ad MO. cùm enim O sit terminus seriei LM, MN, erit LO ad MO, vt LM ad MN; Deinde quia K terminus est seriei AB, BC, erunt [c] tres AK, BK, CK continuæ proportionales: adeoque omnes etiam sequentes erunt continuæ: Quare & AK, DK, GK, inter quas par continuè proportionalium numerus interijcitur, ex elementis patet esse continuè proportionales. Vnde AK, [d] est ad DK, vt AD ad DG, id est (quemadmodum iam ostendi) vt LO ad MO. Itaque per conuersionem rationis AK est ad AD, vt LO ad LM, & permutando AK ad LO, vt AD ad LM, id est ex datis AB. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. *huius.*
[b] 82. *huius.*
[c] *Ibid.*
[d] 1. *huius.*

PROPOSITIO CIII.



EX serie continuè proportionalium AK, sumatur quiuis terminus vt HI.

Dico seriem rationis AB ad BC, habere proportionem ad seriem rationis AB ad HI, quam habet HA (omnes nempe termini ipsum HI præcedentes) ad AB primum terminum.

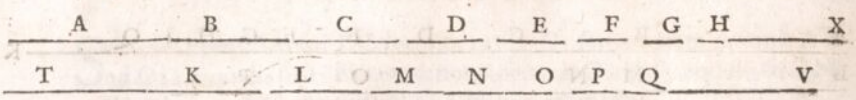
Hæc propositio, vt consideranti facilè patebit, eadem est cum præcedenti, sed aliter & commodiùs fortasse proposita. Quare eadem erit vtriusque demonstratio.

Corollarium.

EX hoc theoremate licebit praxim desumere, assignato quouis termino HI, in serie AK, rationis AB ad BC, reperiendi magnitudinem toti seriei rationis AB ad HI æqualem. Nam si fiat vt HA ad AB, sic KA ad aliam LO, erit LO æqualis toti seriei rationis AB ad HI.

Fateor tamen opus non esse ad hanc praxim recurrere, cùm vniuersalem methodum, eamque facillimam reperiendi magnitudinem, toti seriei cuiuscumque rationis æqualem, propositio 80. huius suppeditet.

PROPOSITIO CIV.



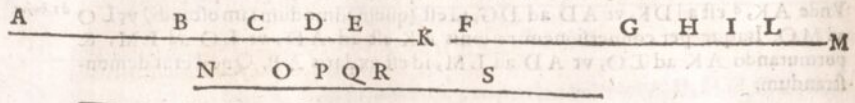
DAtæ ſint continuè proportionalium ſeries binæ, AX, KV rationum diuerſarum, ita tamen vt A, K, L, B etiam ſint continuæ.

Dico ſeriem A,K,L,M,N, &c. terminatam in V, eam habere proportionem ad ſeriem A,B, C, D, &c. terminatam in X, quam A, K, L ſimul ſumpti ad A primum terminum.

Demonſtratio.

ADdatur ipſi K terminus T in directum, æqualis ipſi A: ratio igitur (quod ex hypotheſi colliges) T ad M, triplicata eſt rationis T ad K. Quia autem A, K, L, B ponuntur continuæ proportionales, erit L ad B, vt K ad L: ſed etiam L eſt ad M, vt
a 9. *Quinti.* K ad L; ergo L ad B, & M, eandem habet rationem: adeoque a B & M æquales ſunt. Sunt verò etiam æquales A T, ergo ratio A ad B, eadem eſt cum ratione T ad M. quare ratio A ad B, triplicata eſt rationis T ad K. cùm ergo vtriuſque ſeriei initium, idem ſit terminus A, erit ſeries T, K, L, &c. id eſt ſeries A, K, L, M, &c.
b 102. *Huius.* b ad ſeriem A, B, C, D, &c. vt tres primi termini L, K, T, hoc eſt L, K, A, ſimul ſumpti ad T, hoc eſt ad A, primum terminum: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.



DAtæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium magnitudinum in diuerſis rationibus, terminatæ in K & M; & ab æqualibus terminis A B, F G incipientes. Fiat autem ſecundo termino B C, vnius ſeriei æqualis N O; & G H ſecundo termino alterius ſeriei, æqualis O P; Deinde ratio N O ad O P (vel ratio O P ad N O, ſi O P maior ſit quàm N O) in infinitum continuetur.

Dico N O eſſe ad P Q, vt C D ad H I; & N O eſſe ad Q R vt D E ad I L, atque ita in infinitum.

Demonſtratio.

c 27. *huius.* CVm ſeries A K, F M incipiant ab æqualibus terminis, erit ratio c C D ad H I, rationis B C ad G H, hoc eſt, ex conſtructione, rationis N O ad O P, duplicata; Atqui etiam ratio N O ad P Q, duplicata eſt, ex datis, rationis N O ad O P, eædem igitur ſunt rationes C D ad H I, & N O ad P Q; ſimiliter ratio D E ad I L, triplicata eſt rationis B C ad G H, hoc eſt rationis N O ad O P: Quare cùm & ratio N O ad Q R, eiuſdem rationis N O ad O P, ſit triplicata, eædem erunt rationes D E ad I L, & N O ad Q R. Atque ita in infinitum, ſimili demonſtratione procedemus. Patet igitur Theorematis veritas.

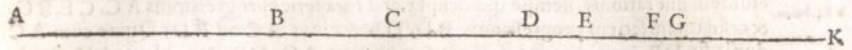
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [167] - 110
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CVI.

DAtæ sint duæ rationes similes, AB ad CD, & BC ad DE, quæ terminis sic alternatim positis, continuentur.

Dico vtriusque rationis in infinitum continuatæ eundem terminum futurum.

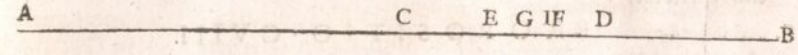


Demonstratio.

QVoniam ex hypothesi AB est ad CD, vt BC ad DE; erit permutando componendo, tursumque permutando AC ad CE, vt BC ad DE: similiter quia CD est ad EF, vt DE ad FG, erit permutando componendo, tursumque permutando, CE ad EG, vt DE ad FG; hoc est ex hypothesi vt BC ad DE, hoc est ex iam demonstratis, vt AC ad CE: sunt igitur AC, CE, EG continuæ proportionales. Quod si rationes AB ad CD, & BC ad DE, in infinitum continuentur, ostendam pariter, rationem AC ad CE, in infinitum continuari, per terminos continuè proportionales AC, CE, EG, &c. Inueniatur igitur [a] terminus seriei AC, CE, EG, &c. sitque K. Itaque non est punctum assignabile, inter puncta A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus seriei AC, CE, EG. Quare cùm rationum AB ad CD, & BC ad DE continuatarum, termini omnes ita contineantur in serie AC, CE, &c. vt singuli termini seriei AC, CE, &c. contineant vnum terminum rationis AB ad CD, & vnum terminum rationis BC ad DE; manifestum quoque est nullum punctum assignari posse inter A & K, vltra quod non cadat aliquis terminus, tam rationis AB ad CD, quàm rationis BC ad DE; neutra igitur series terminabitur inter A & K: sed neque vlli dictarum rationum termini transilient K, cùm perpetuò contineantur in serie AC, CE, EG, &c. (quæ ex constructione non transilit vnquam K) ergo binæ series rationum AB ad CD, & BC ad DE, eundem habent terminum K. Quod erat demonstrandum.

[a] 8. huius.

PROPOSITIO CVII.



MAgnitudo AB bisecta sit in C; BC autem in D; & CD in E; & DE in F; & EF in G; & FG in I; atque hoc semper fiat:

Dico alternæ huius progressionis terminum fore in puncto, quo magnitudo AB, diuiditur in partes, habentes rationem quam vnum ad duo, siue terminum progressionis abscindere BG, tertiam partem magnitudinis AB.

Demonstratio.

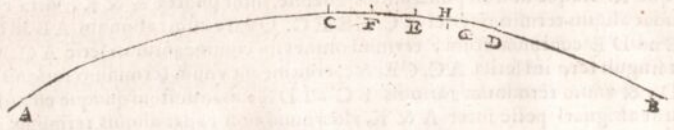
QVoniam DC dupla est CE, & BC dupla DC, erit BC, hoc est AC, quadrupla ipsius CE: similiter cùm FE dupla sit GE, & DE dupla FE, erit & DE, hoc est CE, quadrupla EG; sunt igitur AC, CE, EG tres continuæ in proportione quadrupla. Deinde cùm ED ex hypothesi dupla sit DF, & CD dupla ED; erit iterum CD, hoc est BD, quadrupla DF: similiter quia GF dupla est FI, & EF dupla GF, erit EF, hoc est DF quadrupla FI: sunt igitur BD, DF, FI continuæ in ratione quadrupla. Itaque si alterna illa bisectio sine statu continuetur, constituetur vtrimque progressio in infinitum, proportionis quadruplæ: & quoniam AC quadrupla est CE, erit & BC eiusdem CE quadrupla: est verò & CE, quadrupla EG, atque ita in infinitum; progressio igitur AC, CE, EG, &c. eadem est cum progressione

A C E G IF D B

a 89. huius. gressione B C, C E, E G, &c. & eundem terminum habet: Atqui progressionis quadruplæ B C, C E, &c. terminus H, secat[a] C B in ratione vnius ad duo, ergo etiam terminus progressionis A C, C E secat C B, in ratione vnius ad duo. Quare C H dimidia est ipsius H B, & C B sesquialtera H B: ideoque A B tripla ipsius H B; ac denique A H dupla H B; ergo terminus progressionis A C, C E, &c. secat A B, in ratione vnius ad duo. vlteriùs cùm progressiones A C, C E, &c. B D, D F, F I, &c. eiusdem sint rationis, nempe quadruplæ, erit tota series progressionis A C, C E, E G,

b 84. huius. &c ad totam seriem progressionis B D, D F, &c.[b] vt A C ad B D: Quare cùm A C dupla sit D B, erit quoque series progressionis A C, C E, &c. id est A H, dupla seriei B D, D F, &c. Atqui A H iam ostendimus etiam duplam esse H B; ergo A H, ad seriem progressionis B D, D F, eandem habet rationem quam ad H B: vnde H B æqualis est seriei B D, D F: vnde progressionis B D, D F, series terminatur etiam in puncto H. Quare per eadem procedens puncta, cùm alterna illa bisectio constituat vtramque progressionem, illius quoque terminus erit punctum H. quo diuiditur A B in ratione vnius ad duo: quod erat demonstrandum.

Corollarium.



EX hoc Theoremate reperietur arcus trisectio, si independenter à trisectione, alternæ illius progressionis terminus inueniatur. Cùm enim Theorema vniuersale sit, & in quauis magnitudine demonstratio allata valeat, si in arcu dato A B, similis alterna fiat bisectio, terminus quoque progressionis alternæ H, abscindet tertiam arcus partem B H: proindeque reperto aliâ viâ dicto termino, arcus etiam dati trisectio reperietur.

PROPOSITIO CVIII.

A 1 B 3 E 5 H 7 K 18 G 6 F 4 D 2 C

P

DAta sit magnitudo A C vtcunque secta in B: Deinde fiat vt A C ad B C, sic B C ad B D, & B D ad E D, & E D ad E F, & E F ad H F; atque sic alterna diuisio semper fiat;

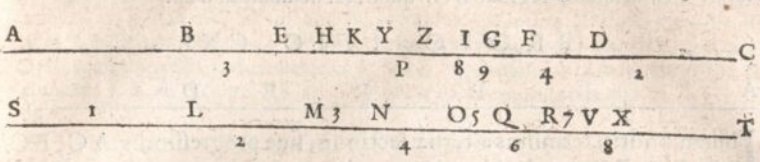
Dico vtrimque constitutum iri duas progressiones similes, magnitudinum A B, B E, E H, &c. & C D, D F, F G, &c. continuè proportionalium in ratione duplicatâ proportionis A C ad B C.

Demonstratio

c 1. huius. QVoniam ex datis A C, B C, B D, E D, E F, &c. sunt continuæ proportionales, erunt eorũ differentiæ[c] A B, C D, B E, D F, E H, F G, &c. etiam in continua analogia, & quidem eo ordine vt prima, tertia, quinta, septima, & sic deinceps (intermisso semper numero medio) constituant seriem A; secundo verò, quarta, sexta, octaua, & sic deinceps (semper omisso numero medio) seriem C, conficient. igitur vt A B ad B E, prima ad tertiam, sic C D est ad D F, secunda ad quartam; & sic deinceps; adeoque rationes A B ad B E, & B E ad E H, &c. similes erunt rationibus C D ad

CD ad DF, & DF ad FG, &c. est autem AB ad BE, vt AC ad BD, hoc est [a] in ratione duplicata AC ad BC; & CD est ad DF, vt BC est ad ED secunda ad quartam, hoc est in ratione duplicata BC ad BD, hoc est AB ad BC, ergo duæ illæ progressiones, similes erunt, & in ratione duplicata AB ad BC. Quod erat demonstrandum. [a] *Ibid.*

PROPOSITIO CIX.



Iisdem positis progressio vtraque AB, BE, EH, &c. CD, DF, FG, &c. ex alternâ illâ diuisione nata, terminum habebit eundem in magnitudine AC.

Demonstratio.

SVmatur ST æqualis AC; & capiantur ex ea magnitudines LT, MT, NT, OT, &c. quæ æquales sint continuè proportionalibus BC, BD, ED, EF, &c. erunt igitur SL, LM, MN, NO, &c. ipsis quoque AB, CD, BE, FD, &c. æquales; cùm enim tota AC, ST, & ablata BC, LT, æqualia sint, necesse est etiam reliqua AB, SL esse æqualia: & rursum quia tota BC, LT, & ablata BD, MT æqualia sunt, patet quoque reliqua CD, LM æqualia esse. Similiter ostendam & BE ipsi MN, DF ipsi NO, atque ita in infinitum, reliqua reliquis æqualia esse. ergo vtraque progressio A & C, progressioni SL, LM, æquales sunt simul sumptæ. & quoniam ST, LT, MT, &c. æquantur continuè proportionalibus AC, BC, BD, &c. etiam ipsæ erunt continuæ [b] ideoque SL, LM, MN, &c. sunt continuæ proportionales. atque ita sine termino continuatur ratio, SL ad LM; ergo progressio [c] SL ad LM, terminatur in T, siue constituit magnitudinem ST: quare cùm vtraque progressio A & C simul sumptæ, æquentur progressioni SL, LM; etiam constituent magnitudinem ST, hoc est AC ex constructione: eundem igitur terminum habeant in magnitudine AC necesse est. nam si diuersos habeant, sint illi Y & Z. vel inter vtrumque terminum Y, Z supererit media quædam magnitudo, quę ad neutram seriem pertineat, vel aliqua erit magnitudo, vtrique seriei communis, eritque Z terminus seriei A, & Y terminus seriei C: neutrum autem fieri potest; nam primo dato, constitueret vtraque series magnitudinẽ minorem quàm AC; & posito altero, maiorem quàm AC. Quod vtrumque repugnat modò demonstratis; non igitur diuersos habebunt terminos dictę progressiones, sed eundem: quod erat demonstrandum.

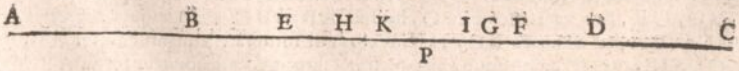
[b] 1. *huius.*

[c] 79. *huius.*

PROPOSITIO CX.

Iisdem positis, geminæ progressionis AB, BE, & CD, DF ex alterna sectione natæ, communis terminus P, magnitudinem AC, diuidet in ratione AC ad BC.

Demonstratio.



PEr præcedentem ponatur P esse communis vtriusque terminus; quoniam igitur similes sunt proressiones A & C, erit tota series progressionis A, hoc est AP, ad [d] 108. *huius.*
P

A B K H K I G F D C

P

a 84. huius. b 1. huius. ad totam seriem progressionis C hoc est CP, [a] vt AB ad CD. quia autem ex hypothesi AC, BC, BD sunt continuæ proportionales, erit AB ad CD, [b] vt AC ad BC; est igitur AP ad CP, vt AC ad BC. terminus ergo P vtriusque progressionis, diuidit AC, in ratione AC ad BC: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXI.

A B E P F D C

IIsdem positis; terminus alternæ sectionis, siue progressionis AC, BC, BD, ED, EF, &c. diuidet magnitudinem AC, in ratione AC ad BC.

Demonstratio.

VTriusque progressionis AB, BE, & CD, DF, termini simul sumpti sunt iidem cum terminis progressionis AC, BC, BD, ED, &c alternatim sumptis. ergo progressio alterna AC, BC, BD, &c. eundem habet terminum quem progressiones AB, BE & CD, DF. sed harum terminus per præcedentem, diuidit AC, in ratione AC ad CB; ergo & alternæ progressionis AC, BC, BD, &c. terminus in eadem ratione diuidet magnitudinem AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.

DAta sit continuè proportionalium series, constituens magnitudinem AK: sit autem LN, æqualis AK, fiatque primæ AB, æqualis LM; secundæ verò BC, æqualis fiat NO; tertiæ autem CD, sit æqualis MP, & quartæ DE, æqualis OR: atque hoc alternatim semper fiat, ita vt omnes AB, CD, EF, GH, &c. sint ex parte L; omnes verò BC, DE, FG, HI, &c. sint ex parte N.

Dico terminum huius alternę progressionis, AB, NO, MP, OR, PQ, RS, &c; diuidere LN, in ratione AB ad BC.

Demonstratio.

A B C D E F G HI K

L M P Q T Y Z V S R O N

X

QVoniam AB, BC, CD, DE, sunt continuæ proportionales, etiam AB, CD, EF, &c sunt continuæ, & quidem in ratione duplicata AB ad BC; vt patet ex elementis. Similiter in eadem ratione duplicata AB ad BC, erunt continuæ proportionales omnes BC, DE, FG, &c atqui omnes AB, CD, &c. sunt ex parte L, & omnes, BC, DE, &c ex parte N. Igitur in magnitudine LN per alternam illam progressionem, constituuntur duæ series appositæ similes, eiusdem nempe ratio-
c 84. huius. nis duplicatæ AB ad BC. Quare series tota LM, [c] MP, &c est ad seriem totam NO, OR, &c vt LM ad NO, hoc est AB ad BC. Deinde quia per series AB,
d 99. huius. [d] CD, EF, &c & series BC, DE, &c. simul sumptæ, æquantur seriei AB, BC, CD, DE, &c series quoque L, & N, simul sumptæ æquabuntur seriei AB, BC, CD, DE, &c Quare cùm hæc ex hypothesi constituat magnitudinem AK, id est ex hypothesi LN, etiam series L & N, magnitudinem LN constituent, ergo eundem

dem in magnitudine LN, habeant terminum necesse est: si enim diuersos habeant vt Y, Z; vel inter vtrumque terminum supererit media quædam magnitudo, quæ ad neutram seriem pertineat, vel aliquid erit vtrique commune, ita vt terminus seriei L, sit Z. terminus verò seriei N, sit Y. neutrum autem fieri potest: nam primo dato constitueret vtraque series magnitudinem minorem quàm LN, altero autem posito maiorem; quod vtrumque iam demonstratis repugnat. eundem igitur terminum X, habebunt series L & N: cùm igitur ostensum prius sit, seriem L esse ad seriem N, vt AB ad BC, vtriusque seriei terminus communis X diuidet magnitudinem LN, in ratione AB ad BC. Atqui alterna illa magnitudinum LM, NO, MP, OR, &c. progressio, constituit series L & N, ergo ipsius quoque terminus erit X, diuidens LN in ratione AB ad BC: quod erat demonstrandum.

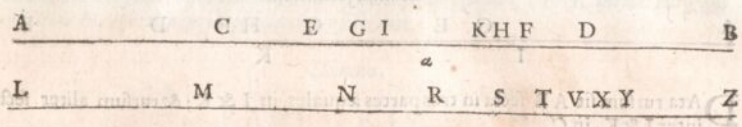
PROPOSITIO CXIII.

Centesima vndecimaliter demonstratur.

DAta sit magnitudo AB vtcumque diuisa in C; fiat autem vt AB ad BC, sic BC ad CD, & CD ad DE, & DE ad EF, & EF ad FG: atque hoc semper fiat.

Dico alternæ huius progressionis terminum α, diuidere AB, in ratione AB ad BC.

Demonstratio.



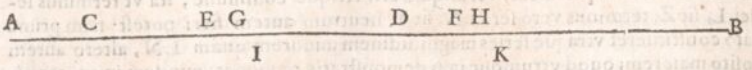
SVmatur enim LZ æqualis AB, & singulis in quas diuiditur alternatim AB, continuis proportionalibus AB, BC, CD, DE, &c. æquales fiant MZ, NZ, RZ, &c. erunt igitur etiam hæ [a] ideoque & LM, MN, NR, &c. continuæ proportionales; & progressionis huius LM, MN, &c. [b] terminus erit Z; & quoniam AB, LZ & BC, MZ, æquantur, etiam AC, LM æquales erunt. rursus quia BC, MZ, & CD, NZ, æquales sunt, etiam BD, MN æquales erunt. Similiter ostendam CE, ipsi NR, & DF ipsi RS, & GE ipsi ST, & FH ipsi TV (& sic in infinitum) æquales esse: habemus igitur progressionem alternam magnitudinum AC, BD, CE, DF, &c. qualis in præcedente propositione proponebatur, cuius terminus X diuidit AB in ratione LM ad MN. Igitur cùm ex progressione alterna hic proposità AB, BC, CD, DE, EF, &c. illa altera oriatur, ita vt tam progressio AB, BC, CD, DE, &c. quàm progressio AC, BD, CE, DF, &c. *in punctis ijsdem* C, D, E, F, G, H, &c. diuidant magnitudinem AB, huius quoque terminus erit α, diuidens AB in ratione LM ad MN, [c] hoc est in ratione LZ ad MZ, hoc est ex constructione in ratione AB ad CB. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. *huius.*
[b] 79. *huius.*
[c] 61. *huius.*

Corollarium.

SI verò fiat vt AC ad CB, sic BD ad DC, & CE ad ED, & DF ad FE, atque ita semper: huius quoque alternæ progressionis terminus, diuidet AB in ratione AB ad BC. cùm enim sit vt AC ad CB, sic BD ad DC & CE ad ED, &c. componendo erit AB ad BC, vt BC ad CD, & CD ad DE, &c. atqui terminus progressionis AB, BC, DC, CD, &c. diuidit AB in ratione AB ad BC. ergo & progressionis AC, CB, BD, DC, &c. terminus, diuidet AB in ratione AB ad BC; cùm enim vtraque hæc progressio in punctis semper ijsdem secet AB, eundem vtraque terminum habere debet.

Lemma primum.



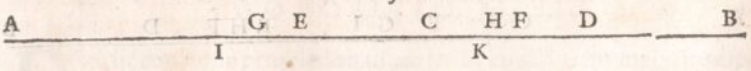
DAta ſit magnitudo AB ſecta in tres partes æquales, in I & K: & rurſum aliter ſecta in C, inter A & I.

Dico biſectionem partis CB, cadere inter I & K in D; & biſectionem partis DA, cadere inter I & C in E; rurſum biſectionem partis EB, contingere inter D & K, in F; ipſius autem FA biſectionem, inter E & I in G: atque ita in infinitum.

Demonſtratio.

QVoniam CB maior eſt, quàm IB dupla AI; erit ipſius CB dimidia, maior quàm AI. ergo biſectio ipſius CB, cadit vltra I, verſus B. Iterum CB plus eſt, quàm dupla KB, adeoque ipſius CB dimidia, maior quàm BK; quare biſectio CB, cadit vltra K, verſus A: adeoque cadit inter I & K, in D. Deinde cùm CB plus ſit quàm duæ tertiæ, ipſius AB, erit CD eius dimidia, plus quàm vna tertia ipſius AB; ſit autem AC ex datis minor, quàm vna tertia; ergo CD maior eſt AC. & biſectio ipſius DA, cadet vltra C verſus B. ſimiliter cùm AI etiam maior ſit quàm DI, cadet biſectio ipſius DA vltra I verſus A, adeoque inter C & I, in E; non aliter oſtendemus reliqua, quæ in aſſertione propoſuimus. Conſtat igitur veritas lemmatis.

Lemma ſecundum.



DAta rurſum ſit AB ſecta in tres partes æquales, in I & K; & rurſum aliter ſecta inter I & K, in C.

Dico biſectionem partis CB cadere inter K & B in D; & biſectionem partis DA, cadere inter C, & F, in E; biſectionem autem partis EB, cadere inter K & D in F; partis verò FA, biſectionem contingere inter E & I in G; atque ita in infinitũ.

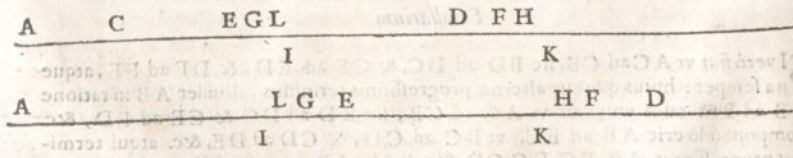
Demonſtratio eadem propè quæ lemmatis præcedentis.

PROPOSITIO CXIV.

EX magnitudine AB ſecta in tres partes æquales in I & K, ſumatur AC minor vel maior tertiâ parte totius AB, & bifariam diuidatur CB in D, & DA bifariam in E, & EB in F, & FA in G. Rurſum GB bifariam in H, & HA in L. atque hoc ſemper fiat.

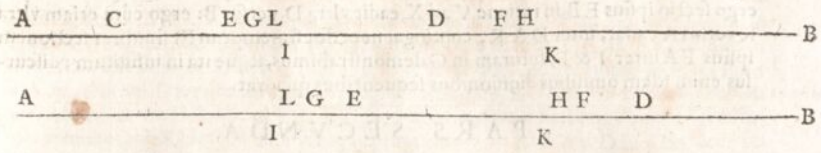
Dico huius progreſſionis alternæ terminos diuidere magnitudinem AB in tres partes æquales.

Demonſtratio.



CVm CB dupla ſit DB, & EB dupla FB, erit CB ad DB, vt EB ad FB, ergo CE ad DF, [a] vt EB ad FB. Quare cùm EB dupla ſit FB, etiam CE, ipſius DF dupla erit. Deinde cùm DA dupla ſit EA, itemque FA dupla ipſius GA, erit

a 19. Quinti.



GA, erit DA ad EA, vt FA ad GA; ac proinde DF erit [a] ad GE, vt DA ad EA. Quare cùm DA ipsius EA dupla sit, etiam DF dupla erit EG. vnde CE quadrupla est ipsius EG. Similiter ostendemus EG duplam esse FH, ipsam autem FH duplam esse GL, proindeque EG ipsius GL quadruplam esse: atque ita continuando sine statu, per alternam illam bisectionem constitui progressionem magnitudinum CE, EG, GL, &c. proportionis quadruplæ. eodem autem discursu quo priùs vsi fuimus, demonstrabimus DF esse quadruplam FH, & FH quadruplam sequentis termini, ac proin de etiam hic progressionē rationis quadruplæ statui. Vlterius quoniam tam ratio CB, ad DB, quàm IB ad KB, dupla est, erit CB ad DB, vt IB ad KB, & [b] CI ad DK, vt IB ad KB. Itaque cùm IB dupla sit KB, etiam CI ipsius DK dupla erit; similiter DK ipsius EI duplam esse demonstrabimus. Igitur CI quadrupla est EI: ideoque CI est ad EI, vt CE ad EG. vnde progressionis CE [c] EG, &c. terminus est I; eâdem methodo discurrendi, ostendetur DK esse ad FK, vt DF est ad FH. Quare & progressionis DF, FH, &c. terminus erit K. dum igitur vtraque progressio CE, EG, &c. DF, FH, &c. constituatur ab alterna illa bisectione, in propositione proposita, ipsius quoque termini erunt in I & K; vbi trifariam diuiditur magnitudo AB. Quod erat demonstrandum.

[a] *ibid.*

[b] *ibid.*

[c] *79. huius.*

Assumpsimus AC *minorem aut maiorem tertiâ parte magnitudinis datæ* AB; *quia si æqualis vni tertiæ foret, bisectiones alternæ in eadem semper puncta* I *&* K *inciderent; vti manifestum est, assertionem propositionis consideranti.*

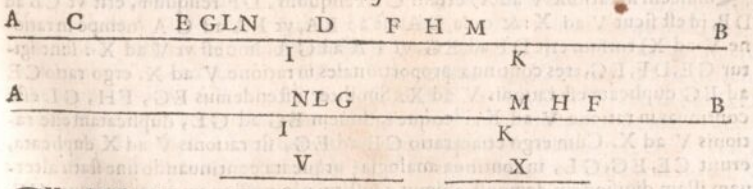
Lemma.

PARS PRIMA.

DAta sit magnitudo AB secta in I & K secundùm rationem V ad X: ita vt AK sit ad KB, vt BI ad IA. diuisa sit deinde AB adhuc aliter inter A & I in C.

Dico si CB diuidatur in ratione V ad X, sectionem fieri vltra K in D, item si DA diuidatur in ratione V ad X sectionem cadere vltra I in E: rursum si EB diuidatur in eadem ratione, sectionem contingere inter K & D in F; & si FA, sectionem fore inter I & E in G. atque ita in infinitum.

Demonstratio.



CVm AK sit ad KB, vt BI ad IA, erit componendo AB ad KB, vt AB ad IA: ergo KB, IA, additoque communi IK etiam AK, IB æquantur: vnde cùm AK sit ad KA, vt V ad X, vtique IB ad KB, in eadem ratione erit: quare CB (ex datis maior quàm IB) maiorem habet rationem ad KB, quàm V ad X: erga sectio ipsius CB, in ratione V ad X, cadit vltra K in D: similiter cùm AK sit ad KB, id est IA, sicut V est ad X, erit DA ad eandem IA, in minori ratione, quàm V ad X: vnde sectio ipsius DA in ratione V ad X, cadet vltra I in E: Quod autem sectio ipsius EB cadat vltra K, eodem quo priùs modo ostenditur: item quod vltra D, versus B sic ostendo: factâ CB ad DB, in ratione V ad X; erit EB ad DB, in minori ratione quàm V ad X.

ergo sectio ipsius E B, in ratione V ad X, cadit vltra D, versus B: ergo cùm etiam vltra K versus A cadat, inter D & K, contingat necesse est, nempe in F; similiter sectionem ipsius F A inter I & E, futuram in G demonstrabimus, atque ita in infinitum; discursus enim idem omnibus diuisionibus sequentibus quadrat.

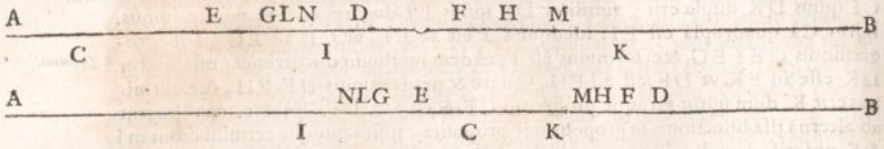
PARS SECVNDA.

Ilsdem positis, si C cadat inter I & K (nã si inter B & K caderet, foret casus primæ partis) simili planè discursu demonstrabimus eadem omnia contingere quę priùs, hoc tolùm mutato, quod signa diuisionum E, G, L, K, &c. D F, H M, &c. ad alterum latus ordine constituantur.

V

X

PROPOSITIO CXV.



DAta sit proportio V ad X, & magnitudo A B ita secta in I & K, vt A K sit ad K B, & B I ad I A, sicut V est ad X. Aliter deinde diuidatur A B in C; quocumque tandem loco cadat C, modo non incidat in I aut K:

Fiat autem C B ad D B, vt V ad X; & D A ad E A, vt V ad X: item E B ad F B, & F A ad G A, & G B ad K B, & H A ad L A, fuerint inter se vt V, est ad X: Atque hoc semper continuetur.

Dico alternæ huius progressionis terminos, fore in I & K, vbi A B, diuiditur in ratione V ad X.

Demonstratio.

QVoniam est ex constructione C B ad D B, vt E B ad F B (sunt enim vtraque ad inuicem in ratione V ad X) etiam C E reliquum a D F reliquum, erit vt C B ad D B, id est sicut V ad X: & quia D A est ad E A, vt F A ad G A (nempè in ratione V ad X) rursum erit D F ad E G, vt F A ad G A, hoc est vt V ad X: sunt igitur C E, D F, E G, tres continuæ proportionales in ratione V ad X. ergo ratio C E ad E G duplicata est rationis V ad X. Similiter ostendemus E G, F H, G L esse continuas in ratione V ad X, ideoque rationem E G ad G L, duplicatam esse rationis V ad X. Cùm ergo etiam ratio C E ad E G, sit rationis V ad X duplicata, erunt C E, E G, G L, in continua analogia; atque ita continuando sine statu alternam illam diuisionem, demonstrabimus constitui progressionem magnitudinum C E, E G, G L, L N, &c. continuè proportionalium in ratione duplicata V ad X. ab altera verò parte, eodem planè discursu ostendemus D F, F H, H M, &c. esse continuas in ratione duplicata V ad X; ac proinde sic quoque constitui progressionem proportionis duplicatæ V ad X. vlterius quia A K est ad K B, vt B I ad I A, componendo A B erit ad K B, vt A B ad A I; ideoque K B, A I æquantur: additaq; I K communi, æquales erunt I B, A K; ergo vt A K ad K B, id est ex cõstructione vt V ad X, sic I B ad K B: Quare cùm & C B ad D B, sit vt V ad X, etiam C B erit ad D B, vt I B ad K B. allatis ergo I B, K B, C I erit b ad D K, vt C B ad D B reliquum ad reliquum, hoc est ex cõstructione vt V ad X. similiter demõstrabimus D K esse ad E I, vt V ad X,

a 19. Quinti.

b 19. Quinti.

erunt

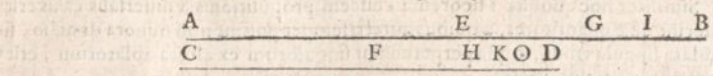
erunt igitur CI, DK, EI continuę proportionales in ratione V ad X: ideoque ratio CI ad EI, duplicata erit rationis V ad X; quare cùm & ratio CE ad EG, eiusdem ostensa sit esse duplicata, erit CI ad EI, vt CE ad EG, & permutando vt CE ad CI, sic EG ad EI, vnde terminus [a] progressionis CE, EG, &c. est I. simili discursu ostendetur, etiam DK esse ad FK, vt DF est ad FH; quare huius quoque progressionis terminus erit K: Itaque cùm vtraque progressio CE, EG, &c. DF, FH, &c. ab alterna illa diuisione constituatur, ipsius quoque termini erunt I & K; vbi magnitudo AB, diuiditur in ratione V ad X. Quod erat demonstrandum. [a] 79. huius.

Scholion.

Hic quoque voluimus punctum C non incidere in I aut K; eò quod si in alterutrum incideret, diuisiones quoque alternæ, in eadem semper puncta I & K, deberent incidere; vt patet consideranti statum Theorematis.

Cæterùm qui hanc propositionẽ cum priori contulerit, facilè intelliget hanc vniuersalem esse, illam verò particularem casum complecti. placuit enim id subinde tum hic, tum alibi factitare, tum quia in particularibus casibus eiusdem Theorematis veritas, clariùs non raro atque illustrius emicat, tum quia à particularium casuum cognitione, facilius ad percipiendas vniuersalium Theorematum demonstrationes proceditur.

PROPOSITIO CXVI.

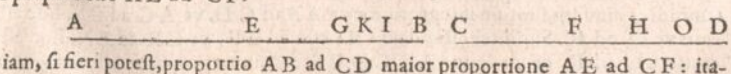


SInt duæ quantitates AB, CD; sitque AB diuisa in E & G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, & EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F & H, sintque AE, EG, CF, FH proportionales: & hoc semper fieri possit.

Dico totam AB esse ad totam CD, vt est AE ad CF.

Demonstratio.

SI enim non est proportio AB ad CD æqualis proportioni AE ad CF, erit vel maior vel minor: sit primò minor. cùm ergo ponatur AB ad CD, minorem habere rationem, quàm AE ad CF, habebit AB ad aliquam [b] minorem quàm CD nempè ad CK, eandem proportionem, quam AE ad CF: & quoniam ex quantitatibus AB, CD, earumque residuis semper non minùs dimidio aufertur, si continuetur hæc ablatio per aliquos terminos, verbi gratia per tres CF, FH, HO, relinquetur tandem OD [c] minor quàm KD; ideoque CO erit maior quàm CK: si iam ex AB totidem partes ad mentem propositionis AE, EG, GI, tollantur, erit ex hypothesi AE ad EG, vt CF ad FH, & EG ad GI, vt FH ad HO: ideoque permutando vt AE ad CF, sic EG ad FH, & vt EG ad FH, sic GI ad HO. ergo [d] vt AE vna antecedentium, ad CF vnam consequentium, sic omnes antecedentes, id est linea AI ad omnes consequentes, id est ad lineam CO: sed vt AE ad CF, sic est ex constructione AB ad CK; ergo AI, est ad CO, vt AB ad CK; quod est absurdum; vt patet ex elementis. non est igitur proportio AB ad CD minor proportione AE ad CF. [b] 8. Quinti. [c] 1. Decimi. [d] 8. Quinti.



Sit iam, si fieri potest, proportio AB ad CD maior proportione AE ad CF: itaque aliqua [e] minor quàm AK, habebit ad CD eandem rationem quam AE ad CF. & quoniam aufertur semper non minùs dimidio, post aliquot partes, exempli gratiâ post tres AE, EG, GI, ablatas, relinquetur tandem IB minor quàm AK; ideoque AI erit maior quàm AK. Si iam totidem auferantur ex quantitate CD, nempè partes CF, FH, HO, erit ex hypothesi, & permutando AE, ad CF, vt EG, ad [e] 8. Quinti.

A E G K I B C F H O D

a 12. quinti. ad F H, item vt G I ad H O. ergo [a] vt A E vna antecedentium, ad C F vnam conſequentium, ita omnes antecedentes, id eſt linea A I, ad omnes conſequentes, nempè lineam C O. Atqui ex conſtructione vt A E ad C F, ſic erit A K ad C D; ergo A I eſt ad C O vt A K ad C D, quod eſſe abſurdum patet ex elementis. non eſt igitur ratio A B ad C D, maior ratione A E ad C F. patet ergo propoſitionis veritas.

Corollarium.

A E G I B

C F H K D

A Duabus quantitatibus A B, C D, auferri poſsint A E, C F, æqualia, & non minora dimidio ipſarum A B, C D; & à reſiduis E B, F D rurſum auferri poſsint E G, F H, æqualia & non minora dimidio reſiduorum: ſi hoc ſemper fieri poſsit, æquales erunt quantitates A B, C D. Patet ex demonſtratione propoſitionis.

Quamquam fatear hoc Theorema aliud non continere, quàm particularem caſum propoſitionis prioris: tamen quia in libris ſequentibus non ſemel vſui veniet, viſus mihi ſum operæ pretium facturus, ſi facilitatis cauſâ explicitè hîc apponerem.

Similiter hoc quoque Theorema eiuſdem propoſitionis vniuerſalis caſus erit: ſi fuerint duæ quantitates, à quibus auferri ſemper poſsint non minora dimidio, ſic vt ablata ſingula vnius, dupla perpetuò ſint ſingulorum ex altera ablatorum, erit vna quantitas alterius dupla.

Quòd ſi ablata vnius, ſemper tripla fuerint ablatorum alterius, erit vna quantitas, alterius quadrupla. Atque ita in infinitum per proportiones quadruplam, quintuplam, &c. licebit procedere.

PROPOSITIO CXVII.

Q R

A G H I B C K L M D E N O P F

DAtæ ſint tres magnitudines, aut plures A B, C D, E F & à ſingulis auferri poſſit non minùs dimidio, ita vt ablata A G, C K, E N ſint in continua analogia Q ad R. Deinde à reſiduis auferri poſsit iterùm non minùs dimidio, ita vt ablata G H, K L, N O ſint continuè proportionalia in ratione eadem Q ad R: & hoc ſemper fieri poſſit.

Dico propoſitas magnitudines A B, C D, E F eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

QVoniam A G eſt ad C K, ex hypotheſi vt Q ad R; & G H ad K L, & H I ad L M, vt Q ad R, erunt partes ablatæ A G, C K, G H, K L; H I, L M, atque ita in finitum inuicem proportionales: Quare cùm ex hypotheſi etiam ſingulæ ſint non [b] minores dimidijs ſuorum integrorum, erit A B ad C D, vt A G ad C K, hoc eſt ex datis vt Q ad R. Similiter oſtendam C D eſſe ad E F, vt C K ad E N, hoc eſt ex datis vt Q ad R. erunt igitur A B, C D, E F, continuæ proportionales magnitudines. Quod erat demonſtrandum.

b 116. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.

A G H I B C K L M D E N O P F Q R

PRoposítæ sint tres, aut plures magnitudines A B, C D, E F, & ratio Q ad R quæcumque, minoris inæqualitatis: Auferantur à singulis A G, C K, E N, ita vt ablata A G, C K, E N, sint ad sua tota, in ratione Q ad R & in eadem ratione Q ad R inter se continuè proportionalia;

Dico si hoc semper fieri possit, propositas magnitudines A B, C D, E F esse in continua analogia.

Demonstratio.

QVia ex hypothesi A G est ad A B, vt G H ad G B, erit etiam [a] reliquum G B ad reliquum H B, vt tota A B ad totam G B; sunt igitur A B, G B, H B & eodem discursu etiam I B reliquæque in infinitum continuæ proportionales: vnde etiam [b] ablata A G, G H, H I, &c. sunt in continua analogia, & [c] terminus huius progressionis A G, G H, &c. est B. similiter ostendam ablata C K, K L, L M, &c. esse in continua analogia, cuius terminus sit D. & quoniam ex hypothesi A G est ad A B, vt Q ad R; & C K ad C D, vt Q ad R, erit A G ad A B vt C K ad C D; & inuertendo ac per conuersionem rationis A B ad G B, vt C D ad K D. Atqui A G, G H, H I, &c. sunt [d] continuæ proportionales in ratione A B, ad G B; hoc est vt iam ostendi C D ad K D; & per eandem C K, K L, &c. sunt etiam continuæ in ratione C D ad K D: Igitur A G, G H, &c. C K, K L, &c. similium rationum series sunt. Quare A B est ad [e] C D, vt A G ad C K. simili prorsus discursu ostendam C D esse ad E F vt C K ad E N. sunt autem ex datis A G, C K, E N, tres continuæ proportionales; ergo & A B, C D, E F in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. Quinti.
[b] 1. Huius.
[c] 79. huius.
[d] 6. huius.
[e] 24. huius.

PROPOSITIO CXIX.

A
B
C
D
E
F
G
H
I
K

SI data quælibet proportio maioris inæqualitatis A ad B, continuetur perpetuò, deuenietur tandem ad magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

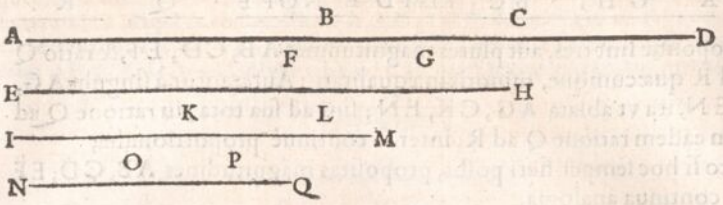
POnatur enim magnitudo quæuis F; & fiat F ad aliam G, vt B ad A; continuetur que ratio F ad G, donec per septuagesimam septimam huius habeatur K magnitudo, maior A magnitudine: & per totidem terminos continuetur ratio A ad B. Dico E minorem esse quàm F. est enim vt A ad B, sic G ad F; & vt B ad C, sic H ad G, &c. ergo ex æquo in proportione perturbata, vt A ad E, sic K ad F, sed A minor est quàm K, ergo & E [f] quàm F. Quod erat demonstrandum.

[f] 14. Quinti.

Scholion.

HVc etiam pertineret propositio septuagesima septima, nisi illam, quòd ad terminum progressionis inueniendum esset necessaria, coacti essemus citeriori loco collocare.

PROPOSITIO CXX.



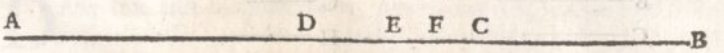
SIt magnitudo aliqua AD, secta in tres partes AB, BC, CD: ablatâ mediâ BC vel alterutrâ extremarum, residuis AB, CD fiat æqualis EH, quæ diuidatur in tres partes EF, FG, GH in eadem ratione qua secta est AD: si hoc continuetur;

Dico relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

a 11. Quinti. QVoniam AB est ad BC, vt EF ad FG, & BC ad CD, vt FG ad GH: igitur permutando AB ad EF, vt BC ad FG, & CD ad GH: ergo [a] vt AB ad EF, sic AD, ad EH: & permutando AB ad AD, vt EF ad EH. similiter b 24. Quinti. demonstrabimus DC esse ad DA, vt HG ad HE: ergo AB [b] cum CD, ad AD, vt EF cum GH ad EH: & inuertendo AD ad AB cum CD, id est ex hypothesi EH, vt EH ad EF cum GH, id est ex hypothesi IM. sunt igitur AD, EH, IM in continua ratione minoris inæqualitatis. non aliter demonstrabimus NQ, cæteraque residua in infinitum cum prioribus eandem proportionem minoris inæqualitatis continuare. Quare c 119. Huius. [c] relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXI.



DAta sit AB magnitudo vtcumque secta in C, ac inter AB, CB media proportionalis ponatur DB; rursum inter DB, CB media sit EB, & hoc continuetur.

Dico ex AC relinqui tandem magnitudinem datâ minorem.

Demonstratio.

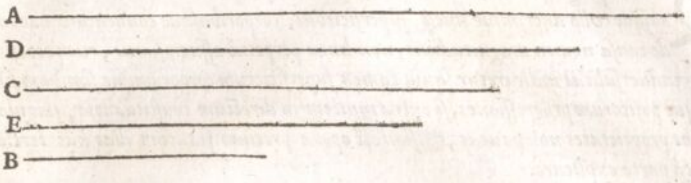
PEr primam huius; AD est ad DC vt AB ad DB; atqui AB maior est quàm DB, ergo etiam AD est maior quàm DC: ergo AD maior est quàm dimidia AC: Similiter quoniam DB, EB CB sunt continuæ, erit DE ad EC, vt DB ad EB: quare DE maior est quàm EC, ideoque & maior quàm dimidia DC. Eodem modo probabitur EF esse plus dimidio EC. atque ita in infinitum semper plus dimi- d 1. Decimi. dio ab AC, eiusq; residuis auferetur. Quare [d] relinquetur tandem magnitudo datâ minor. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXXII.

INter duas magnitudines inæquales A B, inueniatur media proportionalis C, & inter has tres A, C, B, inueniantur duæ mediæ D & E: rursum inter illas quinque, quatuor ſtatuantur mediæ, & hoc ſemper fiat.

Dico hac praxi tandem exhibendas lineas quæ ſimul ſumptæ maiores ſint datâ quauis magnitudine.



Demonſtratio.

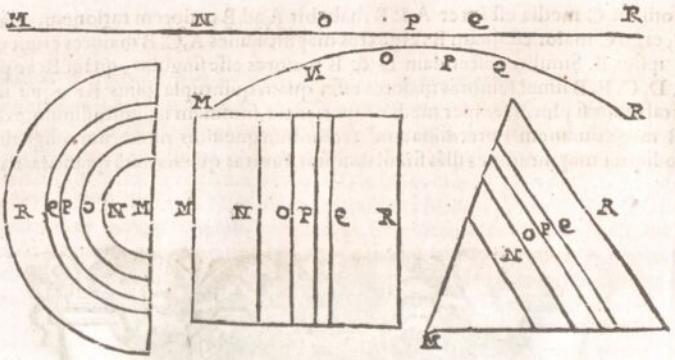
QVoniam C media eſt inter A & B, habebit A ad B maiorem rationem, quàm ad C; ergo C maior eſt quàm B; ergo tres magnitudines A, C, B maiores erunt quàm tripla ipſius B. Similiter oſtendam D & E maiores eſſe ſingulas, quàm B: ac proinde A, D, C, E, B ſimul ſumptas maiores eſſe, quàm quintupla ipſius B: atque ita demonſtrabimus ſi plures ſemper mediæ reperiantur, ſummam magnitudinum, exceſſuram B magnitudinem determinatam, ſecundùm quemuis numerum aſſignabilem. ex quo liquet magnitudines illas ſimul ſumptas, futuras quauis datâ quantitate maiores.



PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM PARS TERTIA

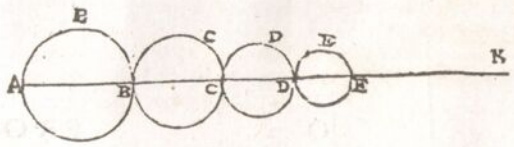
Progreßiones terminatas planis applicat, præsertim similibus.

QVæ de progreſſionibus Geometricis ſecundâ parte hactenus demonſtrauimus, abſque vllo diſcrimine lineis, ſuperficiebus, corporibuſque conueniunt: hac enim de cauſa nomen magnitudinis, non lineæ perpetuò aſſumpſimus, vt propoſitionum vniuerſalitas indicaretur. quia tamen ſuperficierum corporumque ſimilium ſimiliterque poſitorum progreſſiones, ſi extra inuicem in directum conſtituantur, ſingulares habent proprietates non paucas, viſum eſt operæ pretium futurum illas hac tertiâ ac quartâ parte explicare.

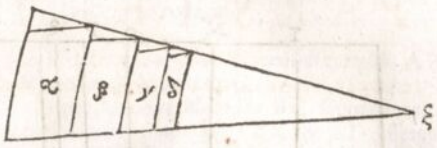


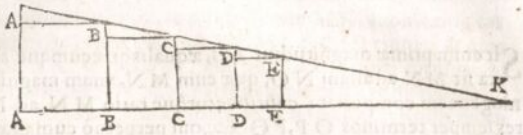
Nota, duplici modo planorum ac corporum progreſſiones inſtitui poſſe. primò quidem vt termini progreſſionis ſimul ſumpti, vnam magnitudinem continuam, ac homogeneam componant: vt in figuris appoſitis exhibetur. ſecundus enim terminus N O *cum primo* M N, *vnam magnitudinem* M O *componit; & tertius* O P, *cum ſecundo ac primo, conſtituit vnam magnitudinem* M P; *omnes denique termini ſimul ſumpti vnam componunt magnitudinem* M R, *continuam ac homogeneam.*

Secundus modus eſt quando termini progreſſionis ſimiles inter ſe ſunt, ſimiliterque poſiti, neque iuxta poſitionem qua dantur, conſtituunt ſimul ſumpti vnam magnitudinem: huiuſmodi progreſſiones (quas quidem in ſequentibus proſequemur) exhibent figuræ appoſitæ A, B, C, D, E, K: *in quibus termini omnes ſimiles ſunt ſimiliterque poſiti, ac in directum conſtituti, ita vt neque ſecundus terminus* B C, *cum primo* A B, *neque tertius* C D, *cum primo & ſecundo, neque cæteri ſubſequentes cum præcedentibus componant vnam*



vnam magnitudinem. & figuris sic positis terminum quidem ad quem bases illarum figurarum excurrent scilicet K, per præcedentia reperiemus; in heterogeneæ verò illius seriei (ita enim lubet appellare) quam figuræ similes similiterq; & extra se positæ componunt, cognitionem non veniemus, nisi figuras has similes similiterque extra se positas, ad illas reuocando, quarum prima cum secunda, & secunda cum tertia, & sic deinceps vnam aliquam magnitudinem constituit. Vt si exempli gratia sint figuræ AB, BC, CD *& similes similiterque & extra se inuicem positæ; harum termini in infinitum continuati ut sumpti magnitudinem non vnam aliquam, sed aggregatum quoddam figurarum constituent: si igitur magnitudo huic seriei figurarum æqualis quæratur, oportebit figuras similes* AB, BC, CD, DE, *&c. ad figuras* MN, NO, OP, *&c. reuocare. quæ figuræ* MN, NO, OP *magnitudinem vnam constituunt; & si proportio* MN *ad* NO, *&* NO *ad* OP *continuata terminetur in* R: *erit* MR *toti seriei progressionis figurarum* AB, BC *&c. æqualis; quæ omnia sequenti propositione demonstrata fient clariora.*

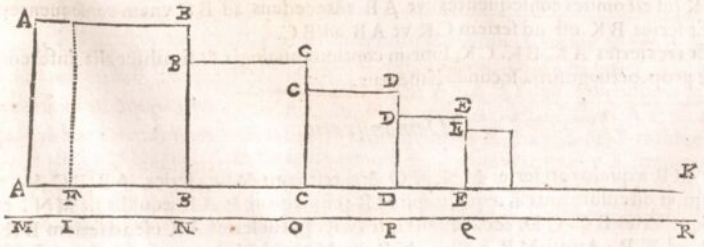




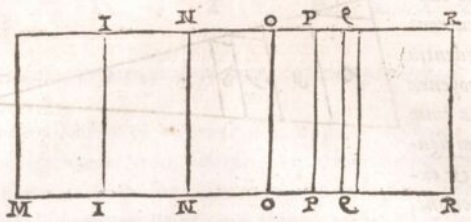
PROPOSITIO CXXIII.

DAta igitur sit secundi generis progressio AB, BC, CD, DE, &c. conflata ex similibus terminis similiterq; & in directum positis, siue planis, siue solidis, & quidem planis vel solidis cuiuscumque generis.

Dico omnes progressionum proprietates superiori parte demonstratas huiusmodi etiam progressionibus conuenire, ac proinde propositiones, in quibus illæ proprietates demonstrantur, prorsus vniuersales esse: in hac igitur demonstratione, progressio posterior siue heterogenea, reducitur ad priorem siue homogeneam.



Demonſtratio.



SIt enim primæ magnitudini AB, æqualis quæcumque alia MN; & vt AB ad BC, ita ſit MN ad aliam NO, quæ cum MN, vnam magnitudinem continuam & homogeneam componat: continueturque ratio MN ad NO, in infinitum per plures ſemper terminos OP, PQ, &c. qui perpetuò cum præcedentibus terminis vnam magnitudinem componant. Quoniam igitur æquales ſunt AB, MN, erit AB ad NO, vt MN ad NO; ſed MN eſt ad NO, vt AB ad BC; ergo AB eſt ad NO, vt AB ad BC: æquales ergo ſunt BC, NO; ergo BC eſt ad OP, vt NO ad OP; ſed NO eſt ad OP, vt MN ad NO, id eſt vt AB ad BC, id eſt vt BC ad CD; ergo BC eſt ad NO, vt BC eſt ad CD: æquales ergo ſunt CD, OP. ſimiliter oſtendam ſingulos vtriuſque progreſſionis terminos inter ſe æquari in infinitũ. Quare & ſeries tota AB, &c. æqualis eſt toti ſeriei MN, &c. vtpote conſtans æqualibus ſiue ijſdem terminis: atqui quæcumque toto ſecundo libro demonſtrata ſunt de progreſſionum proprietatibus, conueniunt progreſſioni MN, NO, &c: ergo etiam conueniunt progreſſioni AB, BC, &c. Quod erat demonſtrandum. Verùm vt res clariùs pateat, idipſum per aliquot conſectaria ſeu corollaria explicabimus.

Corollarium primum.

EX his igitur (ijſdem poſitis) infero primò: progreſſionem vniuerſam magnitudinum AB, BC, &c. producere eandem determinatam magnitudinem ſeu quantitatem quam ſeries MN, NO.

Demonſtratio.

SEries enim AB, BC, &c. æqualis eſt ſeriei MN, NO, &c. ergo eandem producit quantitatem: atqui ſeries MN conſtituit [a] finitam & determinatam quantitatem (exempli cauſa MR) ergo & ſeries AB producit quantitatem finitam MR.

a 79. huius.

Corollarium ſecundum.

IIſdem poſitis infero ſecundò, ſeries AK (id eſt omnes antecedentes) eſt ad ſeriem BK (id eſt omnes conſequentes) vt AB antecedens ad BC vnam conſequentem.

Et ſeries BK eſt ad ſeriem CK vt AB ad BC.

Et tres ſeries AK, BK, CK, ſunt in continua analogia. & ſimiliter alia inferemus quæ prop. octuageſimâ ſecundâ habentur.

Demonſtratio.

SIt MR æquale toti ſeriei MN, NO, &c. erit ergo & tota ſeries, AB, BC, &c etiam, vt oſtenſum anteà, æqualis ipſi MR: cùm igitur & AB æqualis ſit MN, erit quoque ſeries BC, CD, &c. æqualis ipſi NR. Igitur ſeries AK eſt ad ſeriem BK vt MR ad NR: Atqui MR [b] eſt ad NR vt MN ad NO. ergo ſeries AK eſt ad ſeriem

b 81. huius.

riem BK vt MN ad NR, id est vt AB ad BC. quod erat primum. Similiter reliqua quoque demonstrabimus.

Corollarium tertium.

IIsdem positis infero tertiò; AF differentia primi & secundi termini, AB primus terminus, tota series AK, sunt in continua analogia.

Et AF differentia, est ad AB primum terminum, vt BC secundus terminus ad totam seriem dempto primo termino nempe ad seriem BK: & AF differentia, BC secundus terminus, tota series demptis duobus primis terminis, (series nempè CK,) sunt in continua analogia.

Demonstratio.

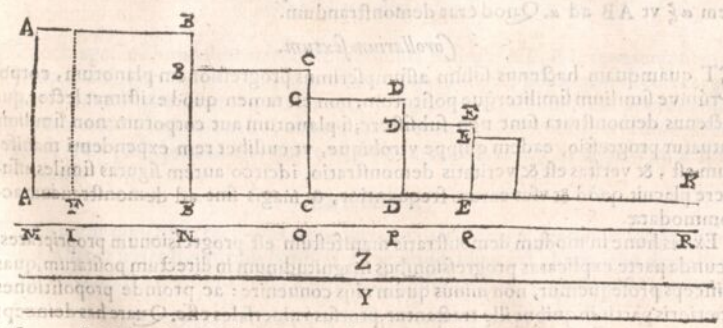
SIt MI differentia primi & secundi termini, in progressione MR. quoniam igitur AB, MN, BC, NO, æquantur, excessus quoque AF, MI, æquales erunt: & quia iam AF ipsi MI, & AB ipsi MN, æqualis est, ipsis AF, AB eadem magnitudo erit tertia proportionalis, quæ ipsis MS, MN, vt patet ex elementis: atqui ipsis [a] MI, MN, tertia proportionalis MR: est tota series rationis MN ad NO; ergo ipsis etiam AF, AB eadem tota series MR, tertia proportionalis erit: atqui series AB, BC, per corollarium primum, eandem producit magnitudinem MR, quàm series MN, NO, ergo etiam productum seriei AB, BC, &c. siue tota series AK, erit tertia proportionalis ipsis AF, AB: sunt itaque AF differentia, AB primus terminus, tota series AK in continua analogia. Quod erat primum. Similiter reliquas corollarij partes demonstrabimus. [a] 83. huius.

Corollarium quartum.

IIsdem positis infero quartò, hic etiam valere vniuersalem illam ac triplicem constructionem quâ propositione datæ seriei magnitudinem æqualem inuenimus.

Fiat enim vt AF differentia primorum terminorum ad AB, sic AB ad aliam magnitudinem Z. Dico, Z æqualem esse toti similium magnitudinum seriei AK.

Demonstratio.

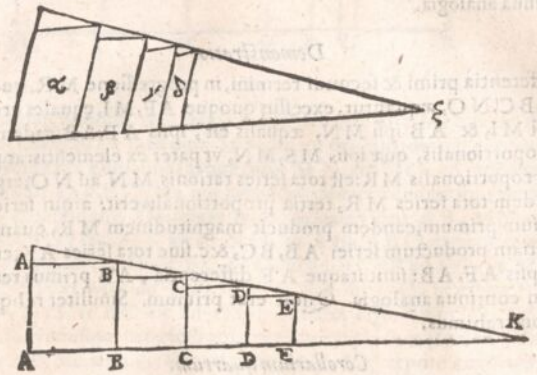


SI non est Z æqualis toti seriei, ergo alia magnitudo maior vel minor quàm Z ipsi æqualis erit; (aliqua enim magnitudo per Corollarium primum toti seriei AK æqualis est.) sit illa Y. ergo per corollarium præcedens AF, AB, Y, sunt continuæ. atqui etiam ex constructione AF, AB, Z sunt continuæ, ergo AB est ad Z, vt AF est ad AB: & AB est ad Y, vt AF est ad AB. eandem igitur AB ad Z & Y rationem habet: æquales igitur sunt Z & Y contra hypothesim: ponebatur enim Y maior aut minor quàm Z. non erit ergo alia minor maiorúe quam Z, æqualis seriei AK. ergo Z æqualis erit. similiter duas alias propositionis octuagesimę huius constructiones demonstrabimus.

Corol-

Corollarium quintum.

Ilsdem positis infero quintò: si fuerit progressio AB, &c. similium magnitudinum itemque alia progressio similium inter se magnitudinum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. siue similes illæ sint terminis alterius siue dissimiles; sit autem progressio vtraque eiusdem proportionis: infero inquam totas series AK, $\alpha\xi$ eam habere rationem inter se, quam primi termini AB & α.



Demonstratio.

PEr corollarium secundum series AK, est ad seriem BK, vt AB ad BC: sed ex hypothesi AB est ad BC, vt α ad β; ergo series AK est ad seriem BK, vt α ad β, hoc est per idem corollarium vt series $\alpha\xi$ ad seriem $\beta\xi$. Igitur per conuersionem rationis series AK est ad AB, vt series $\alpha\xi$, ad α: & permutando series AK est ad seriem $\alpha\xi$ vt AB ad α. Quod erat demonstrandum.

Corollarium sextum.

ET quamquam hactenus solùm assumpserimus progressionem planorum, corporúmve similium similiterque positorum, non est tamen quod existimet lector, quę hactenus demonstrata sunt non subsistere, si planorum aut corporum non similium statuatur progressio, eadem quippe vtrobique, vt cuilibet rem expendenti manifestum est, & veritas est & veritatis demonstratio. idcirco autem figuras similes assumere placuit, quòd & vsus earum frequentior, & magis sint ad demonstrandum accommodatæ.

Ex his hunc in modum demonstratis manifestum est progressionum proprietates, secunda parte explicatas progressionibus magnitudinum in directum positarum, quas deinceps prosequemur, non minùs quàm alijs conuenire: ac proinde propositiones superioris partis in quibus illę tractantur, prorsus vniuersales esse. Quare has deinceps vti reuera tales in sequentium theorematum demonstrationibus citabimus.

PROPOSITIO CXXIV.

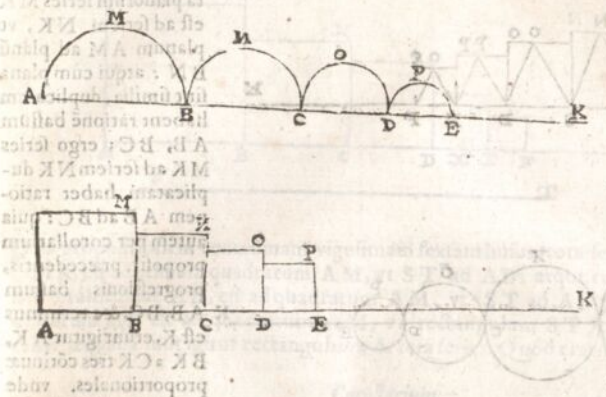
DAtæ sint proportionales continuæ AB, BC, CD, &c. & super ijs constructa plana similia.

Dico plana esse in continua analogia: & si plana dentur continuè proportionalia:

Dico etiam bases fore continuè proportionales.

Demon-

Demonstratio.



PLanum AM est ad planum BN, in duplicata ratione AB ad BC; & planum BN est ad planū CO, in duplicata ratione BC ad CD, id est ex datis AB ad BC: similiter planum CO est ad planū DP, in duplicata ratione CD ad DE, id est rursū AB ad BC: similiter ostendam omnia reliqua inter se esse in duplicata ratione AB ad BC: manifestum est igitur omnia esse in continua analogia; Quod erat primum. secunda pars simili planè discursu ostendetur; patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO CXXV.

FAdem posita figurâ data sint duo plana similia, basibus homologis indirectum positis, AM maius, BN, minus. Petitur inueniri terminus longitudinis, ad quem proportio dictorum planorum sine statu continuata excurret.

Constructio & demonstratio.

PEr octuagesimā huius inueniatur progressionis basium AB, BC terminus; sitq; K. Dico etiam K terminum esse longitudinis ad quem series planorum excurret: plana enim similia quæ fient super terminis progressionis basium, per præcedentem erunt continuè proportionalia, ac proinde linearum planorumq; in infinitum progressio, pari passu procedent: quare vtriusque terminus erit K. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

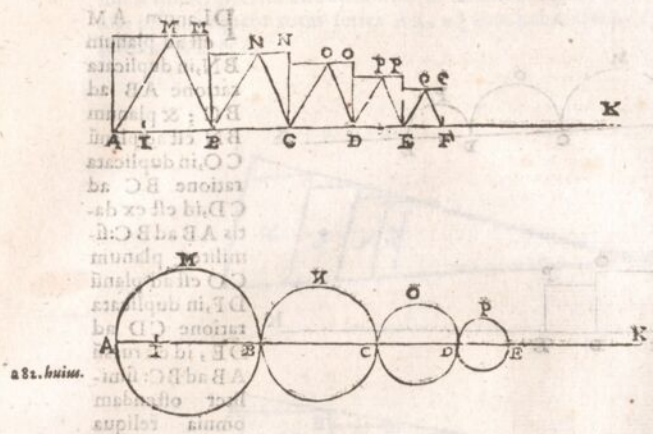
IDem igitur punctum, terminus est progressionis basium, & terminus longitudinis, quem habet series figurarum similium: siue, quod idem est, linea quæ æqualis est seriei basium, est longitudo seriei figuratum similium, super basibus descriptarum.

PROPOSITIO CXXVI.

DAta sit planorum similium continuè proportionalium series, homologis basibus AB, BC, CD, &c. in directum positis, habens terminum longitudinis punctum K;

Dico, totam planorum seriem MK esse ad primum terminum AM, vt est tota series basium imparium AB, CD, EF, &c. ad primam AB.

Demonſtratio.



a 82. *huius.*

PEr octuageſimam ſecundam huius, tota planorum ſeries MK eſt ad ſeriem NK, vt planum AM ad planũ BN: atqui cùm plana ſint ſimilia, duplicatam habent rationẽ baſium AB, BC; ergo ſeries MK ad ſeriem NK duplicatam habet rationem AB ad BC: quia autem per corollarium propoſit. præcedentis, progreſſionis baſium AB, BC, &c. terminus eſt K, erunt igitur AK, BK, & CK tres cõtinuæ proportionales. vnde ratio AK ad CK, duplicata eſt rationis AK

b 1. *huius.* ad BK, ideſt rationis AB ad BC: ergo ſeries MK eſt ad ſeriem NK, vt AK ad CK:

c 103. *huius.* quare per conuerſionem rationis ſeries MK, eſt ad planum AM, vt AK ad CA: deinde quia ſeries AB, BC, CD, DE, &c. id eſt linea AK, eſt ad ſeriem AB, CD, &c. vt CA ad BA, erit alternando AK ad CA, vt ſeries AB, CD, &c. ad AB: ſed ſeries planorum MK, eſt ad planum AM, vt AK ad CA, ergo ſeries MK eſt ad planum AM, vt ſeries AB, CD, &c. ad AB. Quod erat demonſtrandum.

Manifeſtum.

EX demonſtrationis diſcurſu patet totam planorum ſeriem eſſe ad primum planum, vt KA ad CA. Quod quia poſteà vſui veniet, ſigillatim notare placuit.

PROPOSITIO CXXVII.

IIſdem poſitis ſit AI differentia primæ AB, & tertiæ CD.

Dico totam ſimilium planorum ſeriem eſſe ad primum planum AM, vt AB prima baſis, ad AI primæ & tertiæ differentiam.

Demonſtratio.

d 79. *huius.* FIat lineis AI, AB tertia ST continuè proportionalis. Igitur ST æqualis eſt toti ſerici baſium imparium AB, CD, EF, &c. ergo per præcedentem tota ſeries planorum MK eſt ad planum AM vt ST ad AB: Atqui ex conſtructione AB eſt ad AI, vt ST ad AB; ergo tota ſeries eſt ad planum AM, vt AB ad AI. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXVIII.

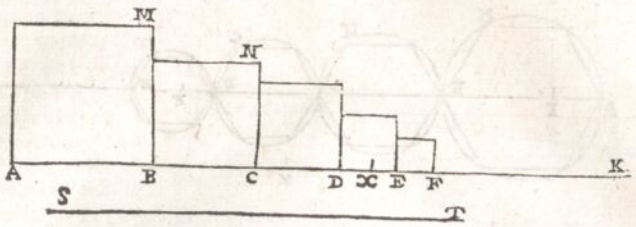
EAdem manente figurâ, data ſit quadratorum ſeries baſibus in directum poſitis, terminum habens longitudinis, punctum K: fiat autem per octuageſimã huius ST, æqualis ſeriei baſium imparium AB, CD, &c.

Dico rectangulum ſuper ST in altitudine AB æquari toti ſeriei quadratorum MK.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [187] - 130
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



PEr propoſitionem centeſimam vigeſimam ſextam huius, tota ſeries quadratorum MK, eſt ad primum quadratum AM, vt ST ad AB; atqui rectangulum ſuper ST in altitudine AB, eſt ad quadratum AM, vt [a] ST ad AB; ergo ſeries quadratorum MK eſt ad quadratum AM, vt rectangulum STAB ad quadratum AM: æqualia ſunt igitur rectangulum, & tota ſeries. Quod erat demonſtrandum. [a] 1. *ſexti.*

Corollarium.

HInc ſequitur quadratum ST, totam ſeriem MK, & quadratum AM in continuâ eſſe analogia; nam quadratum ST ad rectangulum ſuper ST & AB, eſt vt ST linea ad AB lineam: ſed rectangulum idem, hoc eſt tota ſeries MK, eſt ad AM quadratum in eadem ratione; ergo, &c.

PROPOSITIO CXXIX.

IIſdem poſitis vt AB ad BC, ſic fiat AX ad XK.
Dico rectangulum XAB, toti quadratorum ſeriei æquale eſſe.

Demonſtratio.

QVia AX eſt ad XK, vt AB ad BC, erit inuertendo ac componendo, KA ad XA, vt CA ad BA: Atqui etiam KA [b] eſt ad ſeriem linearum AB, CD, vt CA ad BA; ergo KA eandem habet rationem ad XA, & ad ſeriem AB, CD, æquales ſunt igitur ſeries AB, CD & linea XA. vnde per præcedentem rectangulum XAB, toti quadratorum ſeriei eſt æquale. Quod erat demonſtrandum. [b] 103. *huius.*

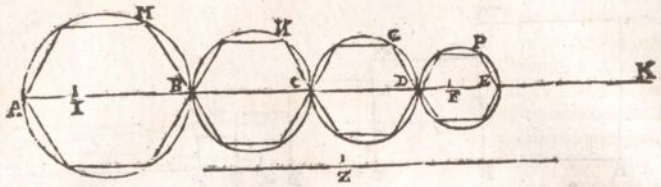
Corollarium.

EX duabus propoſitionibus colligere modum licet, quo quadratorum datæ ſeriei reperiri poſsit quadratum vnum æquale. nimirum ſi inter AB & ST, vel inter AB, &c. AX, media fiat proportionalis; erit hæc latus quadrati æqualis, toti seriei: vt patet ex duobus iam demonſtratis theorematibus: Verùm luculentius & vniuerſalius hoc Theorema ſequenti propoſitione conſtruemus.

PROPOSITIO CXXX.

DAta ſit ſeries planorum quorumcumque baſibus in directum AB, BC, CD, &c. poſitis, ac terminum habens longitudinis punctum K. petitur planis ſeriei vniuerſæ planum æquale ac ſimile exhiberi.

Conſtructio ac demonſtratio prima.



FIat vt AC ad AK, ſic primum ſeriei planum AM, ad aliud ſimile cuius diameter vel baſis ſit Z. Dico hoc toti ſeriei æquale eſſe.

Per manifeſtum propoſitionis 126. huius, tota planorum ſeries MK, eſt ad planum AM, vt AK ad AC, id eſt ex conſtructione vt planum Z, ad AM planum: ergo planum Z eſt ad planum AM, vt tota ſeries MK, ad idem planum AM. æquantur igitur inter ſe planum Z, & tota ſeries MK. Cùm itaque etiam ſimile ſit ex conſtructione planum Z, planis ſeriei datæ MK, perfecimus quod in problemate petebatur.

Conſtructio & demonſtratio ſecunda.

SVmatur AI primæ AB. ac tertiæ CD, baſium differentia: fiatque vt AI ad AB, ſic primum ſeriei planum AM, ad aliud ſibi ſimile Z:

Dico Z planum ſatisfacere problemati. Nam tota ſeries MK eſt ad planum AM vt AB ad AI: Atqui ex conſtructione etiam planum Z eſt ad idem planum AM, vt AB ad AI; ergo planum Z, & tota ſeries æqualia ſunt. Inuenimus igitur datæ planorum ſimilium ſeriei, planum æquale ac ſimile. Quod erat demonſtrandum.

a 127. huius.

Conſtructio ac demonſtratio tertia.

FIat vt AB ad ſeriem baſium imparium AB, CD, &c. ſic primum planum ad aliud ſimile Z.

Dico hoc ſeriei planorum datæ æquari. vel (quod idem eſt) Fiat vt AB ad BC, ſic AF ad FK, vtque AB eſt ad AF, ſic planum primum fiat ad aliud ſimile.

Dico etiam hoc conficere problema: demonſtratio eadem eſt quæ primæ ac ſecundæ conſtructionis, ea tantùm differentia, quod propoſitio 126. huius, ſit adhibenda. Dixi autem ſecundum huius tertiæ conſtructionis modum coincidere cum primo, eiuſdem conſtructionis tertiæ, quod ex præcedenti manifeſtum fit, F A æqualem eſſe ſeriei baſium imparium.

Scholion.

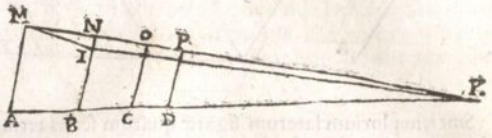
ADuerte conſtructionem illam triplicem propoſitionis octuageſimæ huius, cùm vniuerſalis ſit, huic etiam ſeriei conuenire: verùm quia in progreſſionibus huius generis, faciliores ſubinde ac magis expeditæ conſtructiones ſuppetunt, viſum eſt operæ pretium illas tum hoc loco, tum alijs etiam deinceps in medium proferre.

Lemma.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [189] - 132
PUBLIC DOMAIN

Lemma.

ESto linearum AB, BC, CD progreſſio terminata in K, & ex punctis A, B, C, &c. erigantur parallelę AM, BN, CO, &c. quæ proportionales ſint ipſis AB, BC, CD, &c. ducaturq; ex puncto M ad terminum progreſſionis K, linea MK. Dico hanc per omnium parallelarum extremitates, N, O, P, &c. tranſire.



Demonſtratio.

COnſideremus primò lineam BN; ſi ergo MK non tranſit per N, ſecabit lineam BN ſupra aut infra N, in I. erit ergo MIK vna recta. Et quoniam progreſſionis AB, BC, &c. terminus eſt K per 82. huius, erit vt AK ad BK ſic AB ad BC, hoc eſt, ex datis AM ad BN: atqui etiam vt AK eſt ad BK, ſic AM ad BI; ergo AM eſt ad BN, vt AM ad BI maiorem aut minorem quàm BN, quod eſt impoſſibile. Non ergo ſecabit MK ipſam BN ſupra aut infra N, ergo in N ſimiliter oſtendemus rectam NK (hoc eſt rectam MNK. oſtendimus enim modò punctò MNK eſſe in vna recta) tranſire per O. & ſic de cæteris in infinitum: Patet igitur veritas lemmatis.

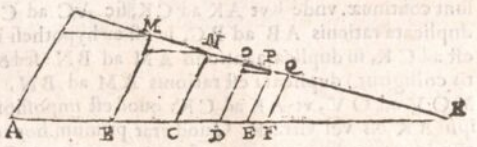
PROPOSITIO CXXXI.

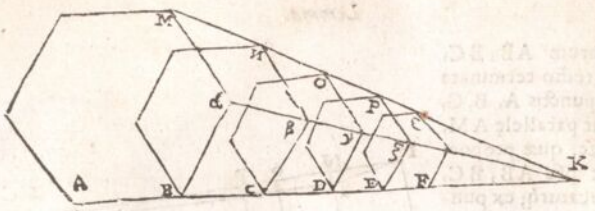
ESto planorum rectilineorum ſimilium ſimiliterq; poſitorum ſeries MK, baſibus indirectum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K. Ex vertice autem M, ad K ducatur recta MK.

Dico hanc per omnes omnium angulorum totius ſeriei vertices N, O, P, Q, &c. tranſire: ſiue totam planorum ſeriem angulo AKM inſcriptam eſſe.

Demonſtratio.

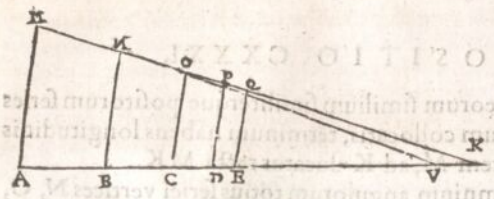
DAta ſit primùm ſeries figurarum trium quatuorue laterum. Cùm igitur ex hypotheſi planorum ſeries terminetur in K, baſium quoque progreſſionis terminus erit K per 124. huius: & quoniam plana AM, BN, &c. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ex elementis patet latera BM, CN, DO, &c. inter ſe parallela eſſe, ipſiſque AB, BC, &c. proportionalia. ergo per lemma præcedens MK tranſit per omnes vertices N, O, P, Q, &c. Quod erat demonſtrandum.





Sint iam plurium laterum figuræ quarum series terminetur in K. Quoniam igitur plana AM, BN, &c. similia sunt similiterque posita, erunt Bα, Cβ, Dγ, Eξ, parallelæ inter se, ipsisque AB, BC proportionales. quare per lemma præcedens puncta α, β, γ, &c. cum puncto K sunt in vnâ eademque linea αK. quę cùm similiter diuisa sit, ac linea BK, manifestum est progressionem linearum αβ, βγ, &c. terminari quoque in K. Sunt autem ex punctis α, β, γ, &c. erecta parallela latera αM βN, γO, &c. quæ lateribus BC, CD, DE, hoc est ipsis αβ, βγ, γξ, sunt proportionalia (quæ omnia patent ex eo quod AM, BN, CO, &c. similia plana sint similiterque posita) ergo per lemma, linea MK transit per omnia puncta M, N, O, P, Q, &c. Quod erat demonstrandum.

Lemma.



Esto linearum AB, BC, CD, &c. progressio terminata in K. & ex punctis A, B, C, &c. erigantur AM, BN, CO, DP, &c. inter se parallelæ; & proportionales ipsis AB, BC, CD, &c. assumptisque duabus lineis AM, CO, per M & O ducatur recta MO.

Dico hanc productam incidere in K ac per omnium reliquarum extremitates transire.

Demonstratio.

Si enim ita non sit; igitur MO producta, cis vel vltra K in B concurret cum linea AK; & quoniam progressionis AB, BC, CD terminus est K, erunt AK, BK, [a] CK, DK, EK proportionales continuæ. quare etiam AK, CK, EK ex æquo sunt continuæ. vnde [b] vt AK ad CK, sic AC ad CE. Atqui [c] AC est ad CE, in duplicata rationis AB ad BC, id est ex hypothesi rationis AM ad BN; ergo AK est ad CK, in duplicata rationis AM ad BN: sed & ratio AM ad CO (vt ex datis colligitur) duplicata est rationis AM ad BN, ergo AM est ad CO, hoc est MOV ad OV, vt AK ad CK; quod est impossibile: non igitur occurret MO ipsi AK cis vel vltra K. Quod erat primum. hoc autem sic demonstrato, patet secunda pars ex lemmate propositionis præcedentis. Quæ erant demonstranda.

a 81. *huius.*
b 1. *huius.*
c 106. *huius.*

PROPOSITIO CXXXII.

Esto planorum rectilineorum similium similiterque positorum series MK, vti priùs; & terminus sit K, per quorumlibet autem duorum planorum AM, CO vertices ducatur recta MO.

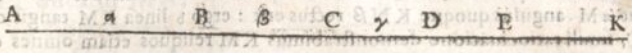
Dico hanc productam cadere in terminum K ac per omnium reliquorum

quorum vertices N, P, Q, &c. transire; siue totam planorum seriem angulo AKM inscriptam esse.

Demonstratio.

DIscursus demonstrationis planè idem erit qui propositionis præcedentis. Nam quemadmodum illic per lemma illi propositioni appositum demonstrauimus propositum, ita hic per lemmatis proximi applicationem propositionis veritatem concludemus.

Lemma.



SInt AK, BK, CK, DK, &c. in continua analogia, & differentiæ illarum nempè AB, BC, CD, DE, &c. bisectæ sint in α, β, γ, &c. Dico etiam αK, βK, γK, &c. esse continuas.

Demonstratio.

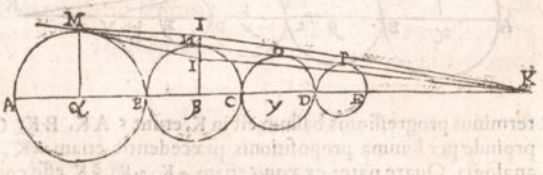
QVia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ per primam huius, AB est ad BC, hoc est Aα est ad Bβ, vt AK ad BK. cum ergo ablatum Aα sit ad ablatum Bβ vt totum AK ad totum BK, erit & reliquum αK ad reliquum βK, vt totum AK ad totum BK. similiter ostendemus βK esse ad γK vt BK est ad CK, hoc est ex hypothesi vt AK ad BK, hoc est ex demonstratis vt αK ad βK. Sunt igitur αK, βK, γK continuæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXIII.

ESto circulorum progressio diametris in directum positis; terminum habens longitudinis punctum K : & ex K ducta linea KM tangat quemuis datæ seriei circulum, verbi gratia circulum AMB.

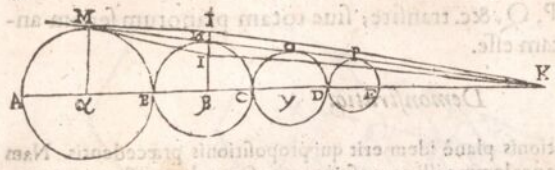
Dico lineam KM totam circulorum seriem contingere.

Demonstratio.



EX centro α ad contactum ducatur αM linea, cui ex centro β parallela sit βX secans circulum BNC in N. Recta igitur MK occurrit ipsi βX vel in puncto N, vel supra aut infra N in I. non autem supra aut infra posse occurrere, sic demonstro. occurrat enim, si fieri potest; supra vel infrà N in I. quoniam igitur dantur circuli in continua analogia, etiam per 124. huius AB, BC, CD, &c. sunt continuæ : ergo AB est ad BC, vt BC ad CD, hoc est vt Bβ ad Cγ : sed & AB est ad BC, vt αβ ad βC; ergo vt AB est ad BC, sic αβ est ad βγ. Præterea quoniam K terminus est progressionis basium AB, BC, &c. per corollarium 125. huius, erunt per 82. huius continuæ proportionales AK, BK, CK, DK, quare per lemma etiam αK, βK, γK erunt continuæ. ergo per primam huius vt αK ad βK, sic est αβ ad βγ. hoc est sicut antè ostendimus AB ad BC, hoc est αM ad βN. Atqui etiam est vt αK ad βK, sic αM ad βI : sunt enim

ex



ex constructione lineæ αM, βI parallelæ: ergo αM est ad βI, vt αM ad BN maiorem aut minorem quàm BI. quod est absurdum. Nõ igitur recta MK occurret rectæ βI supra vel infra N: ergo in N. Quoniam autem ex centro ad contactum ducta est αM angulus KMα a rectus est; quare cùm ex constructione βN parallela sit αM, angulus quoque KNβ rectus erit: ergo b linea KM tangit circulum BNC. simili ratiocinatione demonstrabimus KM reliquos etiam omnes circulos contingere. Quod erat demonstrandum.

a 17. quinti.
b 16. tertij.

Corollarium.

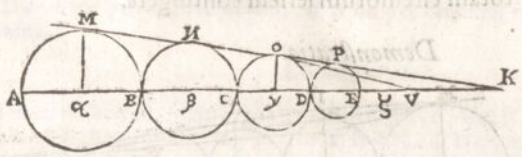
QVod in hoc Theor. de circulis demonstrauimus, etiam de similibus Ellipsibus, Parabolis, Hyperbolis demonstrari potest.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis duos quoscumque circulos seriei datæ circulos, verbi gratia AMB, COD tangat recta MO.

Dico hanc productam cadere in terminum longitudinis K, & reliquos circulos omnes contingere.

Demonstratio.



CEntra circulorum sint α, β, γ, ξ, &c. tum ex α ac γ ad contactus ducantur αM, γO. si igitur negetur assertio, tangens MO producta occurret lineæ AK cis vel vltra K in V. & quoniam per corollarium propositionis 125. huius terminus progressionis basium est in K, erunt c AK, BK, CK, DK, EK, &c. ac proinde per lemma propositionis præcedentis etiam αK, βK, γK, in continua analogia. Quare patet ex æquo etiam αK, γK, ξK esse continuas; ergo αK est d ad γK, vt αγ ad γξ. Atqui αγ est ad γξ, vt AC ad CE (quod simili modo ostendemus quo in præcedenti ostendimus AB esse ad BC vt αB ad Bγ) & AC est ad CE in e duplicata rationis AB ad BC, id est vt AB ad CD; & AB est ad CD vt αM ad γO, ergo αK est ad γK, vt αM ad γO. Deinde cùm αM, γO ex centris ad contactus ductæ sunt, erunt perpendiculares ad MV, ideoque parallelæ inter se. Quare MV erit ad OV, vt αM ad γO, hoc est per iam demonstrata vt αK ad γK, quod est absurdum. non igitur MO occurret ipsi AK cis vel vltra K, sed in K. Quod erat primum. Quo demonstrato, patet per præcedentem secunda pars, quæ erant demonstranda.

c 82. huius.
d 1. huius.
e 106. huius.

Quòd si loco circuli COD assumatur circulus BNC, ita vt linea duos vicinos circulos contingat, demonstratio longè erit facilior, quam proinde omisimus.

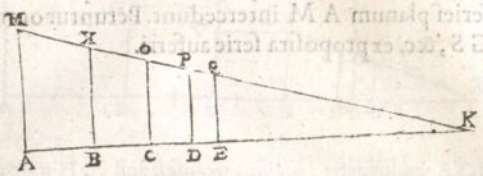
Corol-

Corollarium.

HOc quoque Theorema non tantùm circulis, sed etiam alijs similibus sectionibus applicari potest.

PROPOSITIO CXXXV.

LInearum AB, BC, CD, &c. progressio terminetur in K: erectaq; ad quemuis angulum rectâ AM, ducatur MK: Deinde ex singulis punctis in progressione AK repertis, ad AM, parallelæ erigantur BN, CO, DP, atque ita semper.



Dico ex triangulo AMK relinquendum tandem triangulum aliquod quauis data superficie minus.

Demonstratio.

QVoniam similia sunt triangula AMK, BNK, COK, &c. erit duplicata eorum proportio, proportionis laterum AK, BK, CK, &c. quia autem progressionis AB, BC terminus est K, erunt [a] AK, BK, CK, &c. continuæ proportionales. vnde similia triangula AMK, BNK, &c. etiam sunt in ratione continuâ & diuidendo trapezium AMNB ad triangulũ BNK, vt trapezium BNOC ad triangulum COK, & trapezium CP ad triangulum DPK: atque ita semper. Igitur [b] relinquetur tandem triangulum dato minus. Quod erat demonstrandum.

[a] 82. huius.

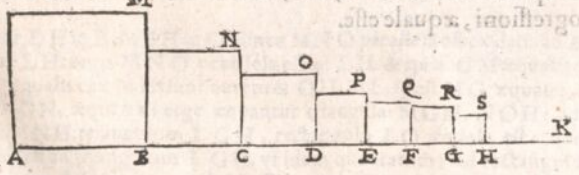
[b] 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

ESto planorum series lateribus homologis indirectum constitutis, terminus autem longitudinis sit K.

Dico ex ablatione continuata planorum AM, BN, CO, &c. relinqui residuum seriei, quouis dato plano minus.

Demonstratio.

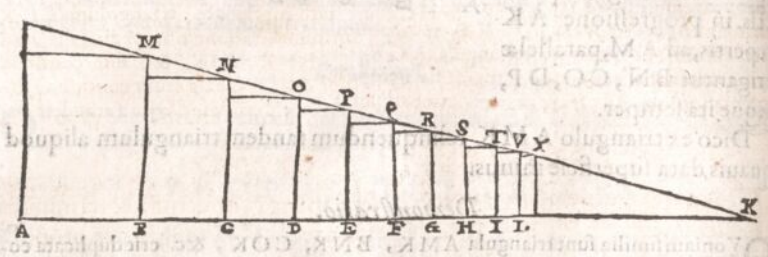


PEr octuagesimam secundam huius, AM est ad reliquam seriem planorum NK, vt planum BN est ad reliquam seriem OK: & per eandem planum BN est ad reliquam seriem OK, vt planum CO, est ad seriem reliquam PK: Atque ita in infinitum. ergo ex perpetua planorum AM, BN, &c. ablatione residuum seriei propositę erit tandem quouis dato plano minus. Quod erat demonstrandum.

[c] 78. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

DEtur ſeries planorum ſimilium, homologis baſibus in directum collocatis, terminum habens longitudinis punctum K: ſumpto autem quouis plano CO, numerentur alia plana in infinitum EQ, GS, IV, &c. totidem ſemper intermiſſis quot inter planum CO & primum ſeriei planum AM intercedunt. Petuntur omnia plana AM, CO, EQ, GS, &c. ex propoſita ſerie auferri.



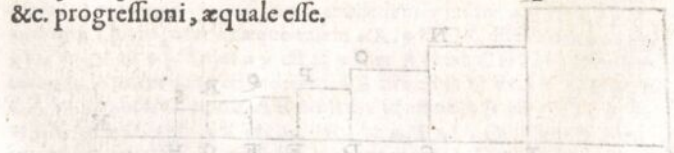
Conſtructio & demonſtratio.

QVoniam ex hypotheſi plana AM, BN, CO, DP, EQ, FR, GS, ſunt in continua ratione, etiam ex æquo plana AM, CO, EQ, IV, in continua ſunt analogia. igitur per propoſitionem 126. huius, ſeriei planorum continuè proportionalium AM, CO, EQ, &c. inueniatur planum æquale. hoc ſi aufers ex plano, quod per eandem propoſitionem 126. factum fuerit æquale ſerici datæ MK, habebitur propoſitum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

DEtur progreſſio quadratorum habens baſes indirectum, & terminum longitudinis K: & ex K per H ducatur recta KH, quæ per propoſitionem 131. huius contingat omnia ſeriei quadrata & concurrat cum AL in G.

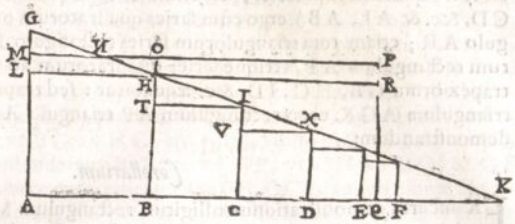
Dico triangulum AGK, toti trapeziorum GB, HC, ID, &c. ſiue vtrique quadratorum AH, BI, &c. ac triangulorum LGH, THI, &c. progreſſioni, æquale eſſe.



Demon-

Demonstratio.

PEr corollarium propositionis 125. huius series basium AB, BC, CD terminatur in K. vnde AK, [a] BK, CK, &c. sunt continuæ proportionales, & triangula [b] AGK, BHK, CIK, &c. in cõtinua sunt analogia. Quare toti seriei proportionis quam habet trapezium GB ad trapezium HC, sine statu continuatę, triangulum AGK æquale est. Atqui trapezia ID, XE, &c. continuant rationem trapezij GB, ad trapezium HC; (cùm enim triangula AGK, BHK, CIK, &c. sint continuè proportionalia, eorum quoque differentiæ nempè dicta trapezia erunt continua) ergo triangulum AGK, trapeziorum seriei vniuersæ est æquale: Quod erat demonstrandum.



a 82. huius.

b 124. huius.

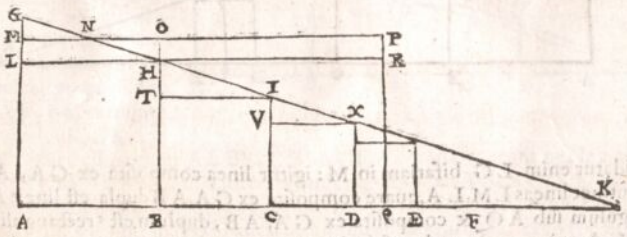
c 79. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

ESto quadratorum series HK, bases habens in directum, & terminum longitudinis K: & ex K per H ducta recta KH tangat per propositionem 131. huius omnia seriei quadrata, ac concurrat cum AL in G; inuentâ deinde per propos. 80. huius lineâ AQ, quæ æqualis sit seriei basium impariũ AB, CD, EF, diuisáq; bifariam LG in M, fiat rectangulũ QAMP.

Dico hoc triangulo AGK, æquale esse.

Demonstratio.



PRoducãtur LH in R, & BH in O; linea MNO parallela est ex datis ad AQ, quę æquidistat LH; ergo MNO parallela est ad LH. & quia GM æqualis est ML; etiam GN æqualis erit NH; sunt autem & OH, ML, id est MG æquales, & anguli OHN, MGN, æquales: ergo æquantur triangula MGN, NOH: additoque communi LMNH, triangulum LGH, rectangulo LO æquale est: quare quadratum AH est ad triangulum LGH, vt idem quadratum, ad rectangulum LO, hoc [d] est vt linea AL ad lineam LM. Præterea triangula LGH, THI, VIX, similia sunt, & homologa latera LH, TI, VX; adeoque in duplicata [e] ratione laterum LH, TI, VX, &c. igitur cùm quadrata AH, BI, &c. sint in eorundem laterum duplicata ratione; patet triangula dicta, quadratis proportionalia esse. vnde permutando vt quadratum AH ad triangulum LGH, sic quadratum BI ad triangulum THI, & quadratum CX, ad triangulum VIX: atque ita in infinitum. Ergo vt quadratum AH ad triangulum LGH, hoc est ex antè demonstratis vt AL ad LM,

d 1. Sexti.

e 19. Sexti.

a 12. quinti. LM, [a] sic omnia quadrata, ad omnia triangula. Atqui vt AL ad LM sic etiam est rectangulum AR ad rectangulum LP. Igitur vt omnia quadrata, ad omnia triangula, sic rectangulum AR ad rectangulum LP. Atqui rectangulum AR, æquale est toti b quadratorum seriei, (est enim AQ æqualis seriei basium imparium AB, CD, &c. & AL, AB) ergo cùm series quadratorum ostensa sit æqualis esse rectangulo AR; etiam tota triangulorum series rectangulo LP c æqualis erit. quare totum rectangulum AP, vtrique seriei quadratorum ac triangulorum, hoc est seriei trapeziorum GB, HC, ID, &c. æquabitur: sed trapeziorum series, d constituit triangulum AGK. ergo rectangulum AP triangulo AGK æquale est. Quod erat demonstrandum.

b 79. huius.

c 14. quinti.

d 138. huius.

Corollarium.

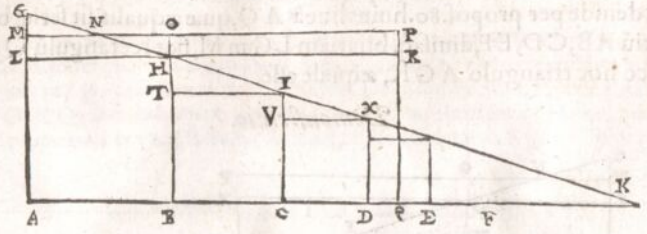
EX discursu demonstrationis colligitur, rectangulum MLRP, progressioni triangulorum GLH, HTI, &c. esse æquale: rectangulum verò GLR, duplum esse eiusdem triangulorum progressionis.

PROPOSITIO CXL.

ESto, vt priùs, quadratorum series HK, inscripta triangulo AGK; sitque AQ æqualis seriei basium imparium AB, CD, &c.

Dico rectangulum sub AQ, & lineis GA, AB, tamquam vna contentum, rectangulo GAK æquale esse.

Demonstratio.

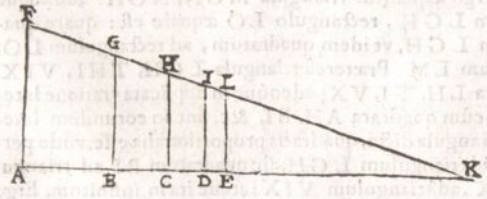


Diuidatur enim LG bifariam in M: igitur linea composita ex GA, AB, bis continet lineas LM, LA. quare composita ex GA, AB dupla est lineæ AM. ergo rectangulum sub AQ & composita ex GA, AB, duplum est [c] rectanguli sub AQ & AM. Atqui per rectangulum sub AQ & AM, æquatur [f] triangulo AGK: ergo rectangulum sub AQ & GA, AB tanquam vna linea, duplum est trianguli AGK. Quare cùm & rectangulum GAK, eiusdem trianguli GAK sit duplum, æquabuntur inter se, rectangulum sub AQ & composita ex GA, AB, & rectangulum GAK. Quod erat demonstrandum.

c 1. Sexti.

f 139. huius.

Lemma.



LAtus AK trianguli AFK, sit diuisum per lineas lateri AF parallelas, in continuè proportionales AK, BK, CK, &c.

Dico trapezia FB, GC, HD, &c. esse similia.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [197] - 140
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.

OBlinearum AF, BG, CH æquidistantiam, angulus FAB, angulo GBC; & GFA, angulo HGB, & BGF, angulo CHG, & ABG, angulo BCH, æqualis est. Deinde quia AK, BK, CK, &c. sunt continuæ proportionales, erit AB ad BC, [a] & BC ad CD, vt AK ad BK. Cùm igitur etiam FA sit ad GB, vt AK ad BK, erit FA ad GB, vt AB ad BC, & permutando FA ad AB, vt GB ad BC: similiter cùm AB sit ad BC [b] vt AK ad BK, hoc est ex hypothesi, vt BK ad CK, hoc est vt BG ad HC; erit permutando AB ad BG, vt BC ad CH: non aliter etiam ostendemus BG esse ad GF, vt CH ad HG, & GF ad FA, vt HG ad GB. quare cum trapeziorum FB, GC & anguli omnes sint æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia, Trapezia [c] FB, GC & omnia reliqua, erunt similia. Quod erat demonstrandum.

a 1. huius.
b Ibid.
c Def. 1. sexti.

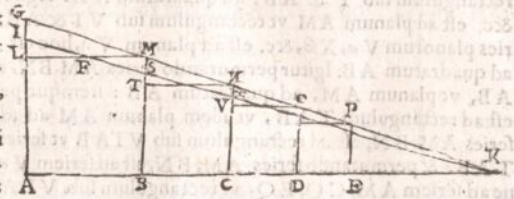
PROPOSITIO CXLI.

DAta sit quadratorum series, habens bases indirectum, & terminum longitudinis K, inscripta triangulo AGK; ac primi quadrati latere LM bisecto in F, per F ducatur recta FK, occurrens ipsi AG in I.

Dico triangulum AIK seriei quadratorum; triangulum verò IGK, seriei triangulorum LGM, TMN, &c. æquale esse.

Demonstratio.

CVm LM bisecta sit in F, & SM, IL ex hypothesi sint parallelæ, patet triangula IFL, SFM æqualia esse, ac proinde addito communi ALFSB, trapezium AISB quadrato AM æquale. Deinde cũ per corollarium propositionis 125. huius, progressionis basium AB, BC terminus sit K, erunt [d] AK, BK, &c. continuæ: quare cùm etiam AI, BS, CX, &c. sint parallelę, erunt per lemma, trapezia IB, SC, XD, &c. similia inter se. vnde & [e] trapezia IB, SC, XD, &c. sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB, BC, CD, &c. atqui & quadrata AM, BN, CO, &c. sunt in dictorum laterum duplicata ratione, ergo trapezia sunt quadratis proportionalia, & vt primum [f] trapezium IB, ad primum quadratum, ita tota trapeziorum series, ad quadratorum seriem. Atqui primum trapezium, ostendimus primo quadrato æquale esse, ergo trapeziorum etiam & quadratorum series æquales sunt. Deinde series trapeziorum g GB, MC, ND, constituit triangulum AGK, ergo & series trapeziorum IB, SC, triangulo AIK æqualis erit; Quare triangulum AIK, quadratorum seriei æquabitur: Quod erat primum; ex quo etiam patet secundum. quæ erant demonstranda.



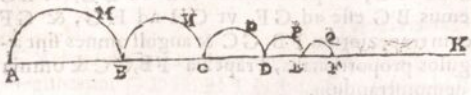
d 82. huius.
e 20. sexti.
f 12. sexti.
g 138. huius.

PROPOSITIO CXLII.

DAta sit planorum similium series habens bases homologas in directum, & terminum longitudinis punctum K; sitque seriei rationis AB primæ, ad tertiam CD, æqualis linea VI: linea verò T seriei rationis AB primæ, ad EF quintam sit æqualis;

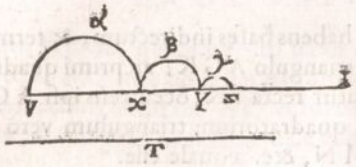
Dico ſeriem totam planorum AM, BN, CO, DP, &c. eſſe ad ſeriem planorum imparium AM, CO, EQ, &c. vt linea VI eſt ad lineam T.

Demonſtratio.



SEries baſium imparium AB, CD, EF, &c. conſtituatur ſeparatim; vt VX ipſi AB, & XY ipſi CD, & YZ ipſi EF ſit æqualis: itemque plana ſuper his facta planis AM, CO, EQ, æqualia ſint, & ſimilia; patet igitur ſeries rationis AB ad EF, & rationis VX ad YZ, eaſdem eſſe. quare cùm T æqualis ſit ſeriei AB, EF, etiam ſeriei VX, YZ, æqualis erit. Deinde ſeries a planorum AM, BN, CO, eſt ad planum AM, vt linea VI ad AB: & ſeries planorum V α, X β, &c. eſt ad planum VX, id eſt ad planum AM, vt T ad V α, id eſt AB: Atqui vt VI ad AB, ſic rectangulum ſub VI & AB, ad quadratum AB: & vt T ad AB, ſic

a 12. 6. huius.



rectangulum ſub T & AB, ad quadratum AB: ergo ſeries planorum AM, BN, &c. eſt ad planum AM vt rectangulum ſub VI & AB, ad quadratum AB: & ſeries planorum V α, X β, &c. eſt ad planum V α, hoc eſt AM, vt rectangulum TAB ad quadratum AB. Igitur permutando ſeries AM, BN, eſt ad rectangulum ſub VI, AB, vt planum AM, ad quadratum AB: itemque permutando ſeries V α, X β eſt ad rectangulum TAB, vt idem planum AM ad idem quadratum AB. ergo ſeries AM, BN, eſt ad rectangulum ſub VIAB vt ſeries V α, X β ad rectangulum TAB: & permutando ſeries AM, BN, eſt ad ſeriem V α, X β, id eſt ex conſtructione ad ſeriem AM, CO, EQ, vt rectangulum ſub VI AB ad rectangulum TAB, hoc eſt vt linea VI ad lineam T: Quod erat demonſtrandum.

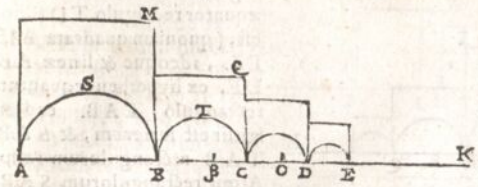
PROPOSITIO CXLIII.

DAtæ ſint quadratorum ſeries binæ, quæ habeant baſes indirectum, & longitudinum terminos puncta K & R. ſit autem AK diuiſa in O, in ratione AB ad BC; & FR diuiſa ſit in P, ſecundùm rationem FG ad GH.

Dico ſeriem quadratorum NK, ad ſeriem quadratorum NR, rationem habere compoſitam ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP.

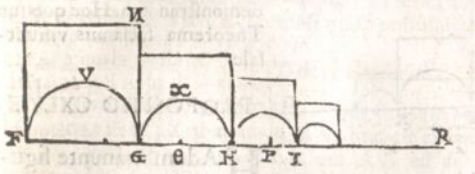
PRO-

Demonſtratio.



SEries quadratorum MK, æquatur rectangulo OAB. & ſeries quadratorum NR, rectangulo PFG æqualis eſt. Atqui ratio rectangulorum OAB, PFG ex laterum AB, FG, & AO, FP, rationibus componitur, ergo etiam ſerierum MK, NR, ex ijſdem rationibus proportio componitur. Quod erat demonſtrandum. Sed hoc Theorema vniuerſale reddamus. a 139. huius.

PROPOSITIO CXLIV.



EAdem manente figura, datæ ſint ſeries binæ planorum ſimilium, quarum longitudines ſunt AK, FR: ſit autem AK diuiſa in O, in ratione AB ad BC, & FR in P, in ratione FG ad GH.

Dico ſeriem planorum ſimilium MK, ad ſeriem planorum ſimilium NR, habere rationem compoſitam ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP.

Demonſtratio.

SVper ijſdem baſibus fiant binæ quadratorum ſeries, & lineis CD, HI, æquales fiant αB, ξG: deinde vt Aα, ad AB, & Fξ, ad FG fiat quadratum AB, ad Aβ quadratũ, & quadratum FG ad quadratum Fθ. itaque quadratum ſuper Aβ æquabitur b ſeriei quadratorum MK: planum verò ſuper Aβ ſimile planis AS, BT, FV, GX, &c. æquabitur ſeriei planorum SK: ſimiliter ab altera parte quadratum ſuper Fθ ſeriei quadratorum NR, & planum ſimile ſuper eadem Fθ, planorum ſeriei VR æqualia erunt. Itaque ſeries planorum SK eſt ad ſeriem planorum VR, vt planum ſuper Aβ, ad planum Fθ: Item ſeries quadratorum MK eſt ad ſeriem quadratorum NR, vt quadratum ſuper Aβ, ad quadratum ſuper Fθ. Atqui planum Aβ eſt ad planum Fθ, vt quadratum Aβ ad quadratum Fθ: (cùm enim tam quadrata, quàm plana ex conſtructione ſint ſimilia, vtraque ſunt in duplicata rationis Aβ ad Fθ:) ergo ſeries planorum SK eſt ad ſeriem planorum VR, vt ſeries quadratorum MK ad ſeriem quadratorum NR. Atqui per præcedent. ſeries quadratorum MK ad ſeriem quadratorum NR, rationem habet compoſitam, ex rationibus AB ad FG, & AO ad FP, ergo & planorum ſeries SK ad ſeriem planorum VR, rationem habet ex ijſdem rationibus compoſitam: quod erat demonſtrandum. b 130. huius.

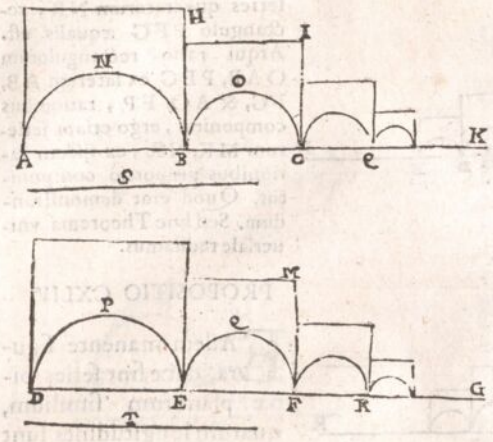
PROPOSITIO CXLV.

DAtæ ſint quadratorum ſeries HK, LG, in quibuſuis rationibus, ab æqualibus quadratis incipientes: ſitque linea S ſeriei rationis primæ AB ad tertiam CQ, itemque linea T, ſeriei rationis DE primæ ad tertiam FR æqualis.

Dico ſeries quadratorum eam proportionem habere quam lineæ, S, T.

Demon-

Demonſtratio.



a 118. huius.

b 1. ſexti.

SEries HK a æquatur rectangulo SAB, item ſeries LG æquatur rectãgulo TDE, hoc eſt, (quoniam quadrata AH, DL, ideoque & lineæ AB, DE. ex hypotheſi æquantur) rectangulo TAB. eadem igitur eſt ſerierum, & SAB, TAB rectangulorum ratio. Atqui rectangulorum SAB, TAB, eadem eſt ratio b quæ rectarum S, T, ergo & ſerierum eadem quæ S, T, linearum eſt proportio. Quod erat demonſtrandum. Hoc quoque Theorema faciamus vniuerſale.

PROPOSITIO CXLVI.

EAdem manente figurâ; dentur planorum ſimilium binæ ſeries quarumuis proportionum NK, PG, quæ ab æqualibus incipiant planis, ſintque lineæ S, T, æquales ſeriebus AB, CQ, &c. AB, FR, &c.

Dico eandem eſſe ſerierum & rectarum S, T, proportionem.

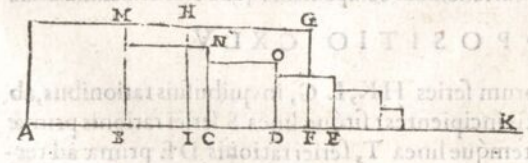
Demonſtratio.

AD huius Theorematis demonſtrationem, eandem lector conſtructionem ac ratiocinationem ſi adhibeat, quâ propoſitione præcedenti fuimus vſi, non aliter propoſitionis præſentis veritatem ex præcedenti deducet, quàm propoſitionis 144. ex 143. huius deduximus.

PROPOSITIO CXLVII.

ESto rectangulum altera parte longius AG, à quo AM quadratum ablatum ſit. Petitur exhiberi ſeries quadratorum, quę æqualis ſit rectangulo AG, & incipiat à quadrato AM.

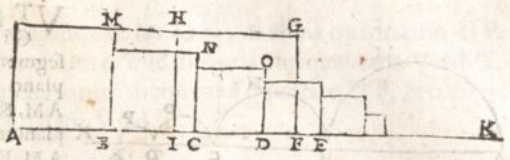
Conſtructio & demonſtratio.



c 125. huius.

VT AF ad BF, ſic AB fiat ad BI: & ex I ducta IH, parallela ad BM rectangulo IBMH, æquale fac quadratum BN, baſi BC indirectum poſita cum AB: tum progreſſionis quadratorum AM, BN, c continuatæ inueniatur K terminus longitudinis. Dico ſeriem quadratorum MK, problemati

blemati satisfacere. Nam cùm ex constructione AB sit ad BI, vt AF ad BF; erit AF æqualis [a] seriei rationis AB ad BI. Deinde ex constructione rectangulum BH æquatur quadrato BN, ergo quadratum AM ad rectangulum BH, & quadratum BN, eandem habet rationem; vnde cùm quadratum AM, sit ad quadratum BN vt AB ad CD, erit quoque quadratum AM ad rectangulum BH, vt AB ad CD. atqui vt quadratum AM ad rectangulum BH, sic AB ad BI: ergo AB est ad CD, vt AB ad BI: æquantur igitur CD, BI, ergo AF etiam æqualis est seriei rationis AB ad CD: quare rectangulum FAB, id est rectangulum AG [b] æquale est seriei quadratorum AM, BN, CO, &c. hoc est seriei MK. factum igitur est quod postulabatur.



[a] 129. huius.

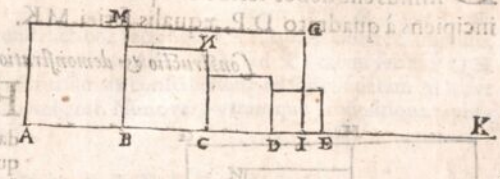
[b] 128. huius.

Demonstratio alia.

TOta series quadratorum MK est per 82. huius ad reliquam seriem NK, vt quadratum AM ad quadratum BN, hoc est ex const. ad rectangulum BH. Atqui ex constructione, rectangulum AG est ad rectangulum BG, vt rectangulum AM ad rectangulum BH, ergo series MK est ad seriem NK, vt AG ad BG. Igitur diuidendo quadratum AM, est ad reliquam seriem NK, vt quadratum idem AM ad reliquum rectangulum BG; ergo series NK, & rectangulum BG æquantur. Quare communi addito quadrato AM, tota series MK, & rectangulum AG sunt æqualia.

Corollarium.

ESto linea AI secta in B, Petitur addi IK, vt AI sit ad IK, vt AK ad BK.



Constructio & demonstratio.

SVper AI fiat in altitudine AB rectangulum AG, cui æqualis [c] mueniatur series quadratorum basibus in directum positis MNK; incipiens à quadrato AB, siue AM, & terminum habens longitudinis K: Dico factum quod petebatur. Cùm enim rectangulum AG ex constructione sit æquale seriei MK, AI erit ad IK, vt AB ad BC, vti ex 129. huius facilè demonstrari potest: & quia terminus longitudinis seriei quadratorum est K, progressionis etiam basium terminus [d] erit K; ergo AK est [e] ad BK, vt AB ad BC, hoc est per demonstrata vt AI ad IK. Factum igitur est quod petebatur.

[c] 147. huius.

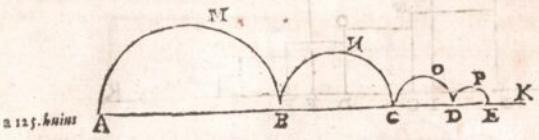
[d] 125. huius.

[e] 82. huius

PROPOSITIO CXLVIII.

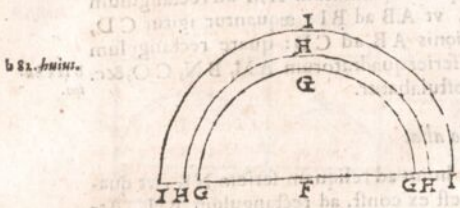
ESto figura plana quæcumque FI, à qua similis auferatur FG, petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano ablato FG, & dato plano FI sit æqualis.

Constructio & demonstratio.



a 125. huius

VT planum FI ad segmentum GI, sic planum FG, fiat ad segmentum aliquod GH, deinde plano FG fac simile & æquale AM, & segmento GH æquale sit planum BN, simile autem planis AM, FG, FI. Denique progressionis planorum AM, BN, continuatæ [a] inueniatur terminus lõgitudinis K. Dico seriem planorum similium MK postulato satisfacere. est enim tota series planorum MK, ad reliquam seriem NK, vt [b] planum AM ad planum BN, hoc est ex constructione, vt planum FG ad segmentum GH: sed rursum ex constructione planum FI est ad segmentum GI, vt planum FG ad segmentum GH, ergo series MK, est ad reliquã NK, vt planum FI ad segmentum GI. Quare per conuersionem rationis



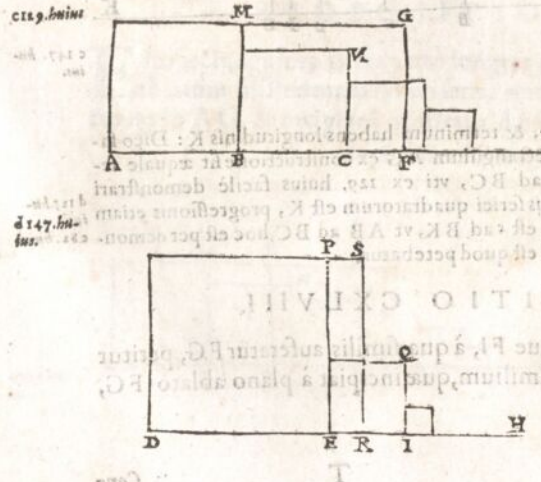
b 82. huius.

series MK, est ad planum AM, vt planum FI ad planum FG: sed ex constructione plana AM, FG æqualia sunt; ergo etiam series planorum similium MK, & planum FI æqualia sunt. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXLIX.

DAta sit progressio quadratorum MK, & quadratum aliud DP, quod minus esse debet serie MK. petitur exhiberi alia series quadratorum, incipiens à quadrato DP, æqualis seriei MK.

Constructio & demonstratio.



c 129. huius

d 147. huius.

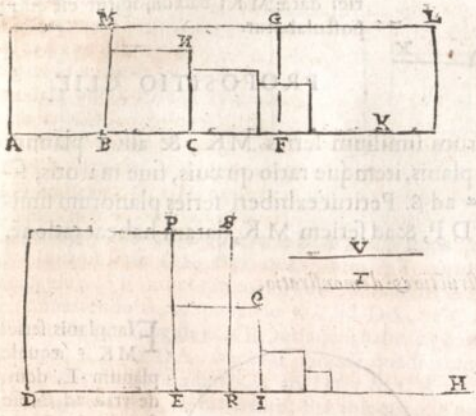
FIat rectangulum AG in altitudine AB, [c] æquale seriei datæ MK. deinde, (quoniam quadratum DP ponitur minus serie MK, id est ex constructione rectangulo AG,) auge quadratum DP, rectangulo ES, vt rectangulum totum DS, æquale sit rectangulo AG: tum rectangulo DS [d] inueniatur æqualis series quadratorũ PQH, incipiens à quadrato DP. Dico seriem PQH soluere Problema. Nam ex constr. series quadratorum PQH incipit à quadrato dato DP, & æqualis est rectangulo DS, hoc est ex constructione rectangulo AG, hoc est rursum ex constructione seriei datæ MK. Factum igitur est quod petebatur.

PRO.

PROPOSITIO CL.

DAta sit iterum quadratorum series MK, & aliud quadratum DP, item ratio quæuis siue maioris siue minoris inæqualitatis V ad T. petitur exhiberi series quadratorum incipiens à quadrato DP, & habens ad seriem MK, rationem datam V ad T.

Constructio & demonstratio.



FIat a rectangulum AG æquale seriei MK, & in eadem altitudine rectangulum AL, quod ad rectangulum AG, datam habeat rationem. si iam quadratum DP maius sit aut æquale rectangulo AL, impossibile est problema. Minus ergo sit oportet quadratum DP rectangulo AL. Itaque augeatur rectangulo ES, ita vt totum DS b rectangulo AL æquale sit. Tum rectangulo DS inueniatur æqualis series, quadratorũ PQH incipiens à quadrato DP. Dico hanc soluere problema.

a 119. huius.

b 147. huius.

Ex constructione enim series PQH incipit à quadrato DP, & æqualis est rectangulo DS, id est ex constructione rectangulo AL. quare cum rectangulum AL ex constructione sit ad rectangulum AG, vt V ad T, etiam series PQH erit ad rectangulum AG, id est rursum ex constructione ad seriem datam MK, vt V ad T. Fecimus ergo quod petebatur. Nunc verò vtramque propositionem præcedentem vniuersalem faciamus.

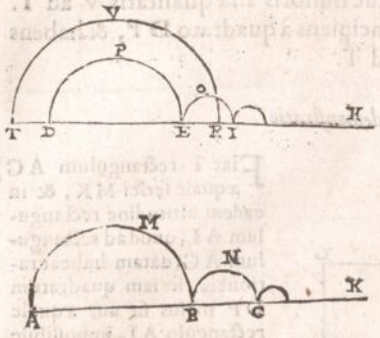
PROPOSITIO CLI.

DAta sit planorum similium progressio vt priùs disposita MK, & aliud planum DP simile planis seriei MK: Petitur exhiberi similium planorum series, incipiens à dato plano DP, æqualis verò seriei datæ MK.

Constructio & demonstratio.

a130.huius.

b148.huius.



PLanis a seriei MK æquale ac simile fiat planum TVR, si iam planum datum DP, æquale aut maius sit plano TVR, fieri problema non poterit: minus ergo sit necesse est. Itaque inueniatur series b planorum similium PQH, quæ æqualis sit plano TVR, & incipiat à plano dato DP. Dico hanc soluere problema.

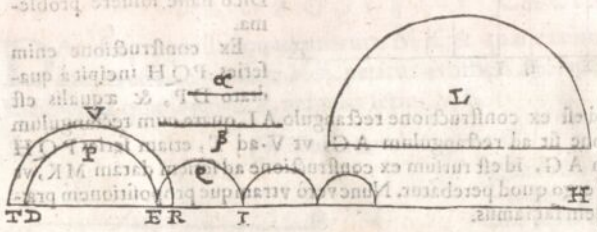
Nam ex constructione, series PQH incipit à dato plano DP, & æqualis est plano TVR, id est ex constructione seriei datæ MK; Factum igitur est quod postulabatur.

PROPOSITIO CLII.

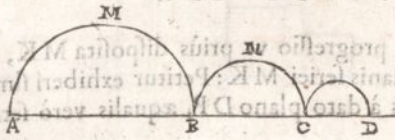
DAta sit iterum planorum similium series MK, & aliud planum DP, simile datæ seriei planis, itemque ratio quæuis, siue maioris, siue minoris inæqualitatis α ad β. Petitur exhiberi series planorum similium, quæ incipiat à plano DP, & ad seriem MK, datam habeat rationē.

Constructio & demonstratio.

130.huius.



d148.huius.



FIat planis seriei MK c æquale planum L, deinde vt α ad β, sic fiat planum simile TVR ad planum L, si iam planum datum DP, æquale vel maius est plano TVR, fieri problema non poterit. Minus ergo planum DP sit oportet, plano TVR: Itaque inueniatur d series planorū similium PQH, incipiens à plano DP, æqualis verò plano TVR. Dico hanc problema soluere, nam ex constructione series PQH, incipit à plano dato DP, & æqualis est plano TVR, quare cùm planum TVR ex constructione datam habeat rationem ad planum L, etiam series PQH ad planum L, hoc est rursum ex constructione ad seriem datam MK, habebit rationem datam: Factum igitur est quod petebatur.

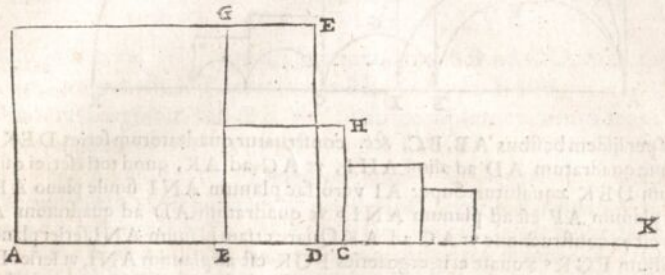
PRO-

PROPOSITIO CLIII.

ESto progreſſio quadratorum GHK, baſibus in directum poſitis, & terminum longitudinis habens punctum K.

Dico quadratum ſuper tota AK factum, ad ſeriem datam, proportionem habere compoſitam, ex ratione KA ad BA, & CA ad BA.

Demonſtratio.



FIat enim AD ad DK, vt AB ad BC. Igitur rectangulum DAB, ſiue AE, [a] æquatur ſeriei GK. ergo quadratum AF, eandem ad ſeriem GK, & ad rectangulum AE habet rationem. quoniam autem AD eſt ad DK, vt AB ad BC, erit inuertendo ac componendo KA ad DA, vt CA ad BA. Ergo cùm quadratum AF ad rectangulum AE, rationem habeat [b] compoſitam ex rationibus KA ad DE, & KA ad DA, habebit quoque quadratum AF, ad idem rectangulum, compoſitam ex rationibus KA ad DE, & CA ad BA: quare cùm ſeries GK & rectangulum AE, æqualia ſint, habebit quoque quadratum AF ad ſeriem GK rationem compoſitam ex rationibus KA ad DE, hoc eſt BA, & CA ad BA. Quod erat demonſtrandum. placet hoc quoque theorema vniuerſaliter demonſtrare.

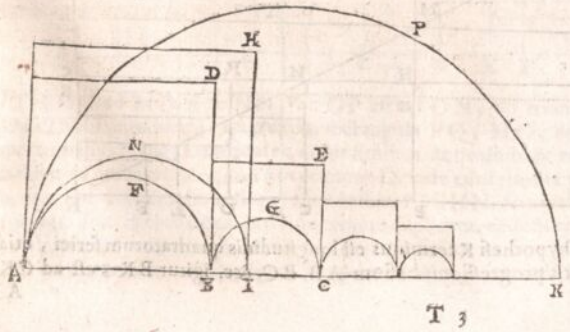
[a] 129. huius.

[b] 23. ſexti.

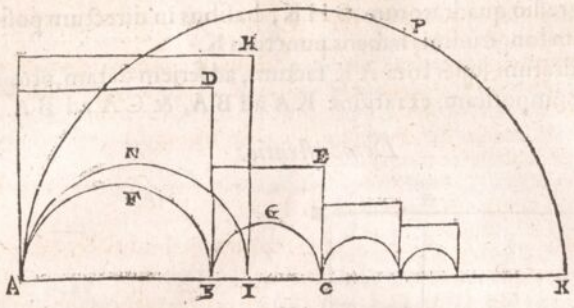
PROPOSITIO CLIV.

DAta ſit planorum ſimilium quorumcunque progreſſio FGK, habens baſes homologas indirectum, & terminum longitudinis K, datæ progreſſionis.

Dico planum APK ad totam ſeriem FGK habere rationem compoſitam, ex rationibus KA ad BA, & CA ad BA.



Demonſtratio.



SVper ijſdem baſibus AB, BC, &c. conſtruatur quadratorum ſeries DEK: fiatque quadratum AD ad aliud AHI, vt AC ad AK, quod toti a ſeriei quadratorum DEK æquabitur. Super AI verò fac planum ANI ſimile plano AF. Itaque planum AF eſt ad planum ANI b vt quadratum AD ad quadratum AHI, hoc eſt ex conſtructione vt AC ad AK. Quare etiam planum ANI, ſeriei planorum ſimilium FGK c æquale erit; ergo ſeries FGK eſt ad planum ANI, vt ſeries DEK ad quadratum AHI: atqui planum ANI eſt ad planum APK, d vt quadratum AHI ad quadratum totius AK: igitur ex æqualitate ſeries FGK eſt ad planum APK, vt ſeries DEK ad quadratum AK, & inuertendo planum APK eſt ad ſeriem FGK, vt quadratum AK ad ſeriem DEK. ſed quadratum AK e ad ſeriem DEK, proportionem habet compoſitam ex rationibus KA ad BA, & CA ad BA. ergo & planum APK ad ſeriem FGK, proportionem habet ex ijſdem rationibus compoſitam; quod erat demonſtrandum.

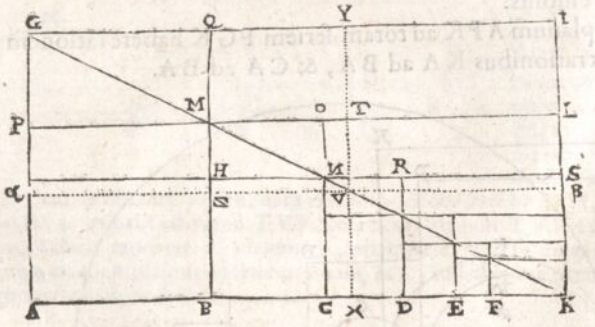
a 130. huius.
b 22. Sexti.
c 130. huius.
d 22. ſexti.
e 133. huius.

PROPOSITIO CLV.

ESto quadratorum ſeries habens baſes in directum, & terminum longitudinis K, inſcripta triangulo AGK, iuxta propoſitionem 131. huius, & completo rectangulo AI, latera quadratorum producantur in LS, &c. item in Q, O, R, &c.

Dico ex hac laterum productione perpetua, oriri progreſsionem rectangulorum MI, NL, &c. ſimilium, & continuè proportionalium, quæ progreſsioni quadratorum quoque ſit æqualis.

Demonſtratio.



QVoniam ex hypotheſi K terminus eſt longitudinis quadratorum ſeriei, etiam K terminus f erit progreſſionis baſium AB, BC, &c. igitur BK g eſt ad CK, vt AB ad

f 125. huius.
g 82. huius.

AB ad BC, hoc est vt PM ad HN, hoc est vt GM ad MN, hoc est (quia QGM, HMN similia sunt triangula) vt QM ad MH, hoc est denique vt QM ad ON: à primo igitur ad vltimum, BK est ad CK, hoc est ML ad NS, vt QM ad ON: rectangula igitur MI, NL, proportionalia habent latera. Quare cùm sint & æquiangula, erunt similia; quod erat primum.

Deinde dicta rectangula complementa sunt eorum, quę circa diametrum sunt, Ergo singula quadratis singulis datæ seriei [a] æquantur. ergo & progressio tota toti progressioni æqualis erit; ex quo etiam secundum patet. Cùm enim quadrata ex hypothesi sint in ratione continua, etiam complementa illis æqualia, in continua erunt analogia: quæ erant demonstranda. [a] 43. primi.

PROPOSITIO CLVI.

ISdem positis fiat AX [b] æqualis seriei rationis AB ad CD, & ex puncto X, ducta normalis XY secet lineas PL, GK, in T & V. [b] 8. huius.

Dico rectangulum sub BKVY, toti complementorum seriei MI, NL, &c. æquari.

Demonstratio.

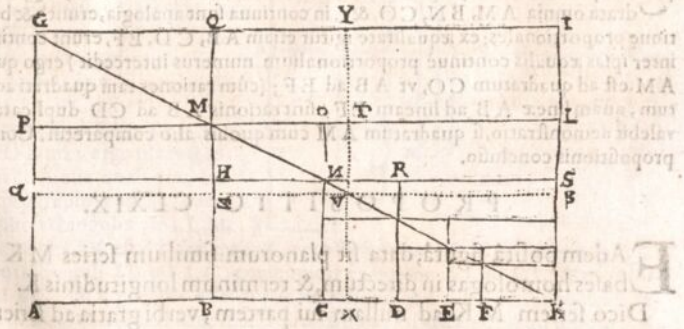
DVcatur enim AK per punctum V parallela αβ. Igitur rectangula [c] VI, AV, itemque rectangula MY, αM, æqualia sunt inter se. Igitur figura MQIβV figuræ MPAXV æqualis est. quare communi addito rectangulo ZT, erunt rectangula ZI, AT æqualia. Atqui rectangulum ZI est rectangulum sub Zβ, id est BK, & sub ZQ, id est VY; rectangulum verò AT seriei quadratorum, [d] est æquale. ergo rectangulum sub BKVY, seriei quadratorum, hoc est per præcedentem seriei complementorum est æquale. Quod erat demonstrandum. [c] 43. primi. [d] 128. huius.

PROPOSITIO CLVII.

ISdem positis, quæ suprà,

Dico ea quæ circa diametrum sunt rectangula PQ, HO, &c. esse similia inter se & continuè proportionalia; rectangulum verò sub AB & VY, toti eorum progressioni esse æquale.

Demonstratio.



VT PM est ad MO, siue HN, sic GP est ad ON, ob triangulorum GMP, MON, similitudinem: quare cùm rectangula PQ, HO, & latera habeant proportionalia, & angulos æquales, erunt similia; ac proinde & reliqua omnia eodem discursu similia erunt: quod fuit primum. Deinde cùm similia sint dicta rectangula, erunt in duplicata homologorum laterum PM, HN, &c. ratione. Quare cùm & quadrata sint in eorumdem laterum ratione duplicata, eadem erit rectangulorum ac quadratorum proportio. Atqui hæc ex hypothesi sunt in continua analogia, ergo & illa; quod erat alterum. Deniq; rectangulum αM, æquatur [e] rectangulo MY. Addito [e] 43. primi.

dito igitur communi PQ, æquabitur rectangulum [a] Q, hoc eſt rectangulum ſub AB & VY, rectangulo PY: Atqui rectangulum PY, [a] duplum eſt progreſſionis triangulorum GPM, MHN, &c. ergo & rectangulum ſub AB & VY, progreſſionis triangulorum eſt duplum: quare cùm progreſſio rectangulorum PQ, HO, &c. etiam ſit progreſſionis triangulorum dupla, rectangulum ſub AB & VY, & progreſſio rectangulorum æqualia erunt: Quod poſtremum fuit eorum, quæ erant demonſtranda.

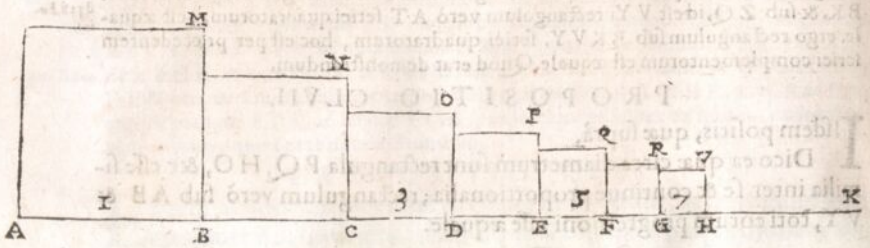
a 139. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

DAta ſit quadratorum ſeries, baſibus indirectum poſitis, & terminum habens longitudinis K: impares autem quadratorum baſes AB, CD, EF, &c. notentur numeris imparibus 1.3.5.7. &c.

Dico, primum quadratum AM eſſe ad ſecundum BN, vt AB ad CD: & rurſum primum quadratum AM eſſe ad tertium CO, vt AB ad EF; & ad quartum DP, vt AB ad GH. Atque ita in infinitum, baſes notatæ imparibus numeris, ſunt primo quadrato cum ſubſequentibus comparato, proportionales.

Demonſtratio.



COmparemus exempli gratia quadratum AM, cum tertio CO; Quoniam quadrata omnia AM, BN, CO, &c. in continua ſunt analogia, erunt [b] & baſes continuę proportionales; ex æqualitate igitur etiam AB, CD, EF, erunt continuæ; (cũ inter ipſas æqualis continuè proportionalium numerus intercedit) ergo quadratum AM eſt ad quadratum CO, vt AB ad EF; (cùm rationes tam quadrati ad quadratum, quàm lineæ AB ad lineam EF, ſint rationis AB ad CD duplicatæ) eadem valebit demonſtratio, ſi quadratum AM cum quouis alio comparetur. Conſtat ergo propoſitionis concluſio.

b 124. huius.

PROPOSITIO CLXIX.

EAdem poſitâ figurâ; data ſit planorum ſimilium ſeries MK habens baſes homologas in directum, & terminum longitudinis K.

Dico ſeriem MK ad nullam ſui partem, verbi gratia ad ſeriem NK aut ſeriem OK, vel ſeriem PK, &c. eam habere rationem, quam inter ſe habent duæ quæcumque in hac baſium ſerie, rectæ lineæ, inter quas par linearum numerus intercedit.

Demonſtratio.

SEries enim data MK, cum ea ſui parte comparatur, vt inter vtriuſque primum terminum, vel par intercedat planorum numerus, vel impar; comparentur primò ſeries MK & OK, inter quarum initia, impar terminorum numerus intercedit; quia igitur

igitur plana sunt in continua analogia, etiam bases AB, BC, &c. erunt [a] continuæ proportionales. Quare ex æquo etiam AB, CD, EF, erunt continuæ: ergo planum AM est ad planum CO, vt [b] AB ad EF. Atqui series MK [c] est ad seriem OK, vt planum AM ad planum CO, (sunt enim similium rationum series) ergo series MK est ad seriem OK, vt AB ad EF; inter quas impar numerus basium intercedit, nempè, 3. Atqui in tota serie basium, non possunt reperiri duę aliæ lineæ, quæ eandem rationem habeant, quàm AB, EF, nisi illæ inter quas idem ternarius numerus linearum intercedit, vti ex elementis demonstratur; igitur nullæ lineæ ex serie basium, inter quas impar linearum numerus interiicitur, eandem habent rationem, quam series MK ad sui partem OK.

[a] 124. *huius.*
[b] 20. *sexti.*
[c] 84. *huius*

Comparentur modò duæ series MK, PK, inter quarum initia par planorum sit numerus: Rursum igitur ostendemus vti priùs seriem MK esse ad seriem PK, vt AB ad GH. quare cùm inter AB & GH, impar linearum sit numerus, nempe 5; tota demonstratio primæ partis huic etiam quadrat: vnde patet propositionis veritas.

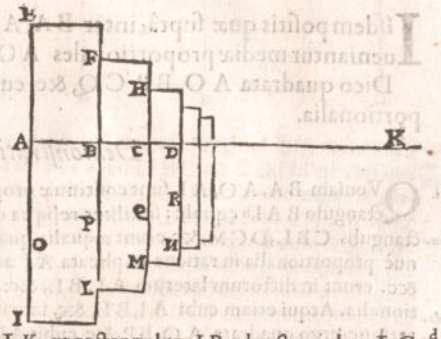
PROPOSITIO CLX.

DAta sit quadratorum series habens bases in directum & terminum longitudinis K. Deinde ex singulis punctis B, C, D, &c. erectæ sint perpendiculares AI, BL, CM, &c. proportionales continuæ in ratione dimidiata proportionis AB ad BC; & super illis perpendicularibus in altitudine linearum AB, BC, &c. fiant rectangula IB, LC, MD, &c.

Dico seriem rectangulorum IK, ad seriem rectangulorum LK, triplicatam habere proportionem rationis AI ad BL; cuius quadruplicatam habet series quadratorum EK, ad seriem quadratorum FK.

Demonstratio.

PRimum enim rectangula IB, LC, &c. esse in continua analogia sic ostendo. ratio rectanguli IB ad LC, cõponitur ex rationibus AI ad BL, hoc est ex hypothesi BL ad CM, & AB ad BC, hoc est BC ad CD; Atqui etiam rectangulorum LC, MD, ratio componitur ex rationibus BL ad CM, & BC ad CD; ergo eadem est rectanguli IB ad LC, & LC ad MD ratio: ergo illa rectangula sunt in continua analogia, habeturque progressio continuè proportionalium rectangulorum I,L,M, N,K: quare series IK est [d] ad seriem LK, vt rectangulum IB, ad rectangulum LC: Atqui ratio rectanguli IB ad LC, componitur ex ratione AI ad BL, & ex ratione AB ad BC, quæ ponitur esse duplicata rationis AI ad BL; ergo ratio rectanguli IB ad LC, hoc est sicut modò ostendimus, ratio seriei IK ad seriem LK, est triplicata rationis AI ad BL. Series autem quadratorum EK est ad seriem FK, [e] vt quadratum BE ad quadratum CF, hoc est in duplicata rationis AB ad BC, hoc est (vt ex hypothesi colligitur) in quadruplicata rationis AI ad BL, cuius triplicata est ratio seriei rectangulorum IK, ad seriem LK. Quod erat demonstrandum.



[d] 82. *huius.*
[e] *Ibid.*

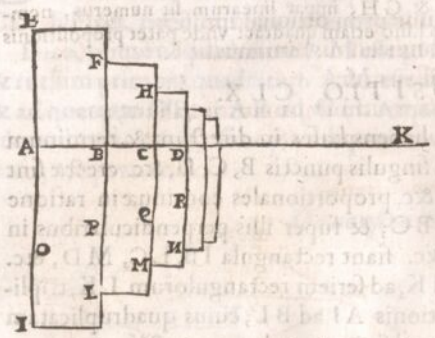
PROPOSITIO CLXI.

ISdem positis loco rectangulorum intelligatur super normalibus AI, BL, &c. construi series quadratorum.

Dico seriem quadratorum EK, ad seriem FK, duplicatam habere rationem eius, quam habet series quadratorum AI, BL, CM, &c. ad seriem quadratorum BL, CM, DN, &c.

Demonstratio.

a *Ibid.*



SEries EK est ad seriem a FK vt quadratum BE ad quadratum CF, hoc est in duplicata rationis AB ad BC. similiter ratio fieri quadratorum AI, BL, &c. ad seriem quadratorum BL, CM, &c. eadem est quæ quadrati AI ad quadratum BL, hoc est duplicata rationis AI, ad BL: hoc est ex hypothesi ratio seriei quadratorum AI, &c. ad seriem quadratorum BL, &c. eadem est quæ AB ad BC. quare cùm ostensum sit rationem seriei EK, ad seriem FK, esse duplicatam rationis AB ad BE, erit quoque duplicata rationis, quam habet series rectangulorum IK, ad seriem rectangulorum LK: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

ISdem positis quæ suprà; inter BA, AI, CB, BL, DC, CM, &c. inueniantur mediæ proportionales AO, BP, CQ, &c.

Dico quadrata AO, BP, CQ, &c. cubis AI, BL, CM, &c. esse proportionalia.

Demonstratio.

b 17. *sexti.*

c 160. *huius.*

d 33. *undecimi.*

QVoniam BA, AO, AI, sunt continuæ proportionales, erit quadratum AO, rectangulo BAI b æquale: similiter reliqua quadrata BP, CQ, &c. reliquis rectangulis CBL, DCM, &c. erunt æqualia, quare cùm rectangula c dicta sunt continuè proportionalia in ratione triplicata AI ad BL, quadrata quoque AO, BP, &c. erunt in dictorum laterum AI, BL, &c. triplicata ratione continuè proportionalia. Atqui etiam cubi AI, BL, &c. sunt in laterum AI, BL, &c. d triplicata ratione; ergo quadrata AO, BP, &c. cubis AI, BL, &c. sunt proportionalia. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROGRESSIONVM GEOMETRICARVM
PARS QVARTA

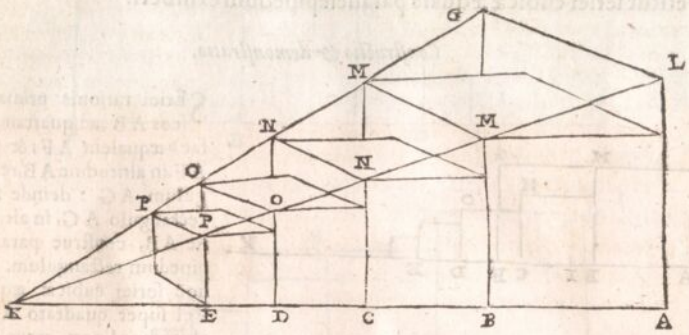
Doctrinam præcedenti parte in planis demonstratam, corporibus, solidisq; applicat.

PROPOSITIO CLXIII.

DAta sit quadratorum continuè proportionalium series, basibus in directum positis, cuius longitudinis terminus sit K; super singulis autem quadratis cubi construantur.

Dico constitui seriem cuborum continuè proportionalium, quæ eumdem quoque habeant terminum longitudinis K.

Demonstratio.



RAtio cubi AM ad cubum BN, triplicata est rationis [a] AB ad BC, item ratio cubi BN ad cubum CO, triplicata est rationis [b] BC ad CD; id est rationis AB ad BC; (ponuntur enim quadrata AM, BN, CO &c. in continua analogia) quare cùm rationes vtræque, cubi AM ad cubum BN, & cubi BN ad cubum CO, triplicatæ sint rationis AB ad BC, eædem erunt. Sunt igitur cubi AM, BN, CO in continua analogia: eodem modo erunt & reliqui omnes continuè proportionales. Quod erat primum. ex quo patet etiam secundum: Cùm enim quadratorum & cuborum series, pariter semper procedant, idem vtriusque terminus sit longitudinis necesse est. Quæ erant demonstranda.

[a] 33. undecimi.
[b] 22. sexti.

PROPOSITIO CLXVI.

IIsdem positis, primæ AB, & quartæ DE, æquales fiant RS, ST: continueturque ratio RS ad ST, per plures semper terminos TV, VX, &c.

Dico cubum primum AM, esse ad quemlibet cubum seriei propositæ, verbi gratia ad quartum DP, vt est linea RS ad quartam VX.

R S T V X

Demonſtratio.

R S T V X

a 33. *vndecimi.* CVbus AM ad cubum DP, eſt in triplicata[a] rationis AB ad DE, hoc eſt per conſtructionem rationis RS ad ST. Atqui etiam RS ad quartam VX, eſt in triplicata ratione eius, quam habet RS ad ST: ergo vt RS ad VX, ſic cubus AM ad cubum DP. Simili ratiocinatione oſtendemus cubum primum, ad quemuis ſeriei cubum, eandem habere rationem, quam habet RS ad lineam quæ æquè diſtabit à prima RS, atque cubus à cubo primo AM. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

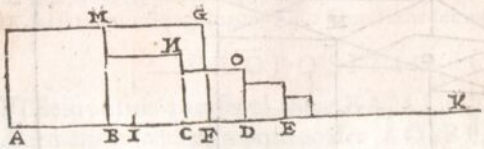
DVo hæc theoremata eâdem ſeruatâ demonſtratione, ad omnia ſimilium corporum genera licebit extendere.

PROPOSITIO CLXV.

DAta ſit quadratorum ſeries, habens baſes in directum, & terminum longitudinis K. ſuper quadratis autem ſingulis, exſtructi ſint cubi: Petitur ſeriei cubicæ æquale parallelepipedum exhiberi.

Conſtructio & demonſtratio.

b 80. *huius.*



SEriei rationis primæ baſeos AB, ad quartam DE, fac[b] æqualem AF; & ſuper AF, in altitudine AB, rectangulum AG: deinde ſuper rectangulo AG, in altitudine AB, conſtrue parallelepipedum rectangulum. Dico hoc ſeriei cubicæ æquari. Vel ſuper quadrato AB in altitudine lineæ, æqualis ſeriei rationis AB ad DE, fac parallelepipedum. Dico hoc eſſe quæſitum. Fiat enim BI æqualis DE. Quoniam igitur ex conſtructione ſeriei rationis AB ad BI, ſiue AB ad DE, æqualis eſt AF, erit[c] AF ad BF, vt AB ad BI, hoc eſt vt AB ad DE: quia autem quadrata ex hypotheſi ſunt continua, erunt[d] lineæ AB, BC, CD, DE, &c. in continua analogia; vnde & cubus[e] AM ad cubum BN, vt AB ad DE, hoc eſt (ſicut oſtendi) vt AF ad BF: Quare cùm parallelepipedum AG, ſit ad parallelepipedum BG, [f] vt baſis AG ad baſim BG, hoc eſt vt[g] AF ad BF, erit cubus AM ad cubum BN, vt parallelepipedum AG, ad parallelepipedum BG: Atqui tota[h] ſeries cubica MK, eſt ad ſeriem cubicam NK, vt cubus AM ad cubum BN, ergo parallelepipedum AG, eſt ad parallelepipedum BG, vt ſeries cubica MK, ad ſeriem cubicam NK: ergo diuidendo cubus AM, eſt ad parallelepipedum BG, vt cubus idem AM, ad ſeriem cubicam NK; (cùm enim parallelepipeda AG, BG conſtructa ſint ſupra baſes AG, BG, in communi altitudine AB, patet cubum AM eſſe exceſſum parallelepipedi AG ſuper parallelepipedum BG.) Itaque ſeries cubica NK & parallelepipedum BG, erunt æqualia; communique addito cubo AM, tota ſeries cubica, & parallelepipedum AG æqualia erunt. Factum igitur eſt quod petebatur.

c 82. *huius.*
d 22. *ſexti.*
e 33. *vndecimi.*
f 25. *vndecimi.*
g 1. *ſexti.*
h 81. *huius.*

Corol-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [213] - 156
PUBLIC DOMAIN

Corollarium.

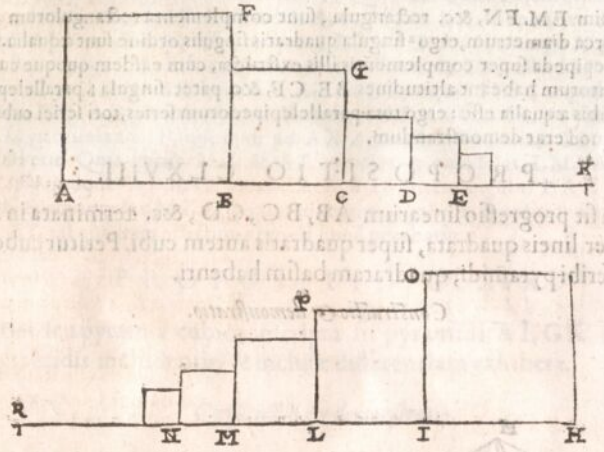
ITaque ſi fuerint propoſitæ binæ, vel plures cuborum progreſſiones, etiam rationum diſſimilium, cognoſcetur earum proportio inter ſe, ſi per hanc propoſitionem ſingulis cuborum progreſſionibus æqualia parallelepipeda conſtituantur.

PROPOSITIO CLXVI.

DEntur binæ, ſed æquales cuborum progreſſiones rationum diſſimilium.

Dico ſeriem cubicam AK, ad ſeriem cubicam HR, rationem habere compoſitam, ex ratione primi quadrati AF, ad primum quadratum HO, & ratione ſeriei rationis AB primæ, ad quartam DE, ad ſeriem rationis HI, primæ, ad quartam MN.

Demonſtratio.



PArallelepipedum factum ſuper quadrato AB, in altitudine lineæ ſeriei rationis AB ad DE, per præcedentem ſeriei cubicæ AK, erit æquale: ſimiliter parallelepipedum ſuper quadrato HI, in altitudine lineæ ſeriei rationis HI ad MN, ſeriei cubicæ HR æquale eſt. Quare cùm ſeries cubicæ ponantur æquales, dicta quoque parallelepipeda æqualia erunt; ergo reciprocam habent baſium & [a] altitudinum rationem, hoc eſt habent rationem compoſitam ex rationibus baſium & altitudinũ: Quare & ſeries cubicę AK & HR illis æquales, rationem habent compoſitam ex ratione dictarum altitudinum, hoc eſt ex ratione ſeriei AB, DE, &c. ad ſeriem HI, MN, &c. & ex ratione baſium, hoc eſt ex ratione quadrati AF ad quadratum HO. Quod erat demonſtrandum.

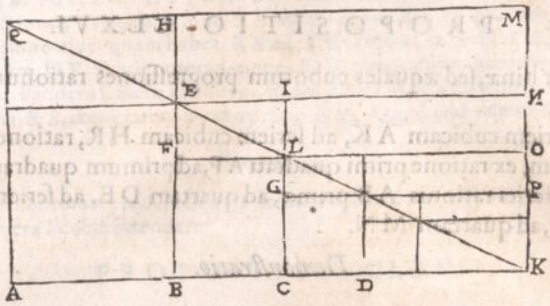
[a] 34. *undecimi.*

PROPOSITIO CLXVII.

DAta ſit quadratorum progreſſio, baſibus in directum poſitis, quæ terminum longitudinis habeat K. & iuxta 131. huius inſcripta ſit triangulo AQK; completo autem rectangulo AM, producantur latera quadratorum in N, O, P, &c. & in H, I, L, &c.

Dico ſeriem parallelepipedorum, ſuper rectangulis EM, FN, GO, &c. in altitudine linearum BE, CF, DG, &c. æqualem eſſe ſeriei cubicæ, ſuper quadratis exſtructæ.

Demonſtratio.



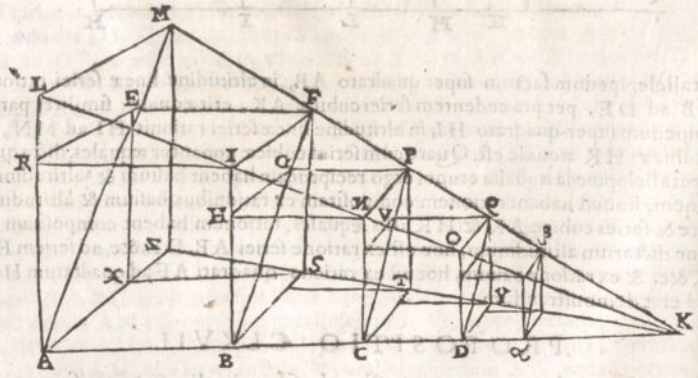
a 43. primi. b 7. duodecimi.

Dicta enim EM, FN, &c. rectangula, ſunt complementa rectangulorum, quæ ſunt circa diametrum, ergo[a] ſingula quadratis ſingulis ordine ſunt æqualia. Quare parallelepipeda ſuper complementis illis exſtructa, cùm eaſdem quoque cum cubis quadratorum habeant altitudines BE, CF, &c. patet ſingula[b] parallelepipeda ſingulis cubis æqualia eſſe: ergo tota parallelepipedorum ſeries, toti ſeriei cubicę æquatur: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Data ſit progreſſio linearum AB, BC, CD, &c. terminata in K, & ſuper lineis quadrata, ſuper quadratis autem cubi. Petitur cuborum ſeries inſcribi pyramidi, quadratam baſim habenti.

Conſtructio & demonſtratio.



Ex puncto K, per I, S, F, ducantur rectę KI, KS, KF, quarum duę primę KI, KS, occurrant lineis AR, AX productis in L & Z: producto deinde plano AE, occurrat linea KF in M, iunganturque LM, ZM. Dico factum quod petebatur; Ducantur enim in aduerſis cuborum planis diametri AE, BF, CP, DQ, &c. primò igitur ex hypotheſi manifeſtum eſt vtriuſq; ſeriei quadrata AI, BN, CO, &c. AS,

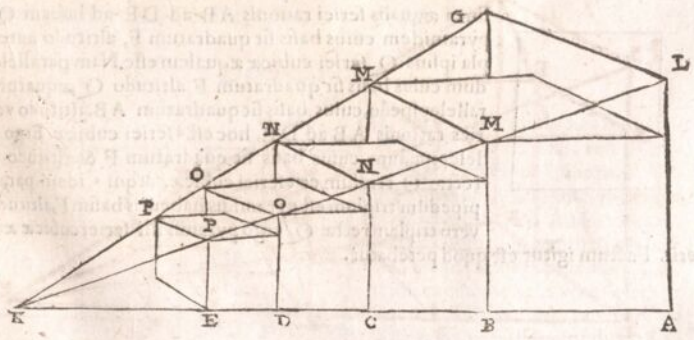
AS, BT, &c. esse in eodem plano. quare lineæ [a] KIL, KSZ transeunt per omnia puncta N, O, &c. T, Y, &c. hoc est tangunt totam cuborum seriem. Superest ergo vt demonstremus lineam KFM transire etiam per omnia puncta P, Q, &c. quod sic præstabimus. IF est ad HG, vt IB ad HB, id est vt IK ad NK, hoc est vt BK ad CK; Atqui cùm seriei AB, BC, CD terminus sit K, [b] AK, BK, CK sunt continuæ proportionales; ergo BK est ad CK, vt AB ad BC: & IF ad HG vt AB ad BC: quare cùm AB, IF æquales sint, etiam BC & intercepta HG, æquales erunt; ergo BF transit per verticem anguli G, quadrati SBHG, cùm intercipiat parallelam HG æqualem lateri dicti quadrati; vnde B, G, F sunt in directum. Itaque cùm ex elementis constet diametros aduersas CP, BG esse parallelas, etiam CP, BF erunt parallelæ. Quia igitur linea BF est in [c] plano BFK, etiam CP in eodem [d] plano BFK erit. Similiter ostendemus lineas DQ, CP, esse parallelas, & proinde cùm CP sit in plano BFK, etiam DQ esse in plano BFK. eodem discursu demonstrabimus omnes BF, CP, DQ, Xβ, &c. esse in eodem plano BFK, siue AMK: deinde BF, CP, &c. cùm sint in oppositis planis parallelis, productæ nunquam conuenient. quare cùm sint omnes in plano BFC, erunt omnes inter [e] se parallelæ. Præterea ex elementis & ex datis patet diametros BF, CP, &c. esse lateribus IB, NC, &c. hoc est AB, BC, CD, &c. proportionales: quare [f] KFM transit per omnia puncta P, Q, β, &c. Quod autem etiam basis ZM quadrata sit, sic ostendo: ZA est ad XA, vt ZK ad SK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt LK ad IK, hoc est denique vt LA ad RA: Quia ergo XA, RA æquales sunt, etiam ZA, LA [g] æquales erunt. Præterea LM est ad IF vt LK ad IK, hoc est vt AK ad BK, hoc est vt AZ ad BS, atqui IF, BS æquales sunt, ergo etiam LM, AZ æquales erunt. Deinde cùm LK sit ad IK, vt [h] MK ad FK, erit LM parallela ad IF, quę cùm ad AXZ parallela sit, etiam LM ad AXZ parallela erit. Quia igitur MZ & AL æquales & parallelas LM, AZ connectunt, ipsę quoque [i] æquales & parallelæ erunt; est autem angulus LAZ rectus, ac proinde etiam angulus MZA, & consequenter anguli illis oppositi sunt recti, basis igitur ZL est quadrata: Factum ergo est quod petebatur.

a 131. huius.
b 82. huius.
c 2. vndecimi.
d Defin. 34. primi.
e ibid.
f Lemma ad 131. huius.
g 14. quinti.
h 17. vndecimi.
i 33. primi.

PROPOSITIO CLXIX.

SEries seu pyramis cubica inscripta sit pyramidi ALGK. Oporteat pyramidis includentis, & inclusæ differentiam exhibere.

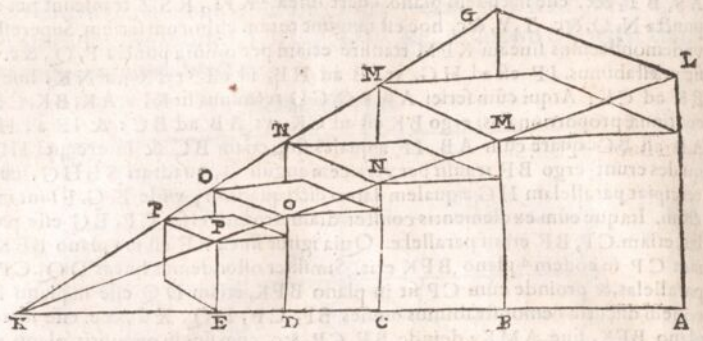
Constructio & demonstratio.



SVper quadrato AB in altitudine lineæ æqualis seriei rationis AB ad DE fac parallelepipedum, hoc est seriei [k] cubicæ æquale erit. Deinde fiat vt quadratum AB ad quadratum AL G, ita pyramidis GLK altitudo AK ad aliquam Q: denique super quadrato AB in altitudine lineæ, quę contineat vnam tertiam rectæ Q fiat parallelepipedum, erit hoc pyramidi LK æquale; nam parallelepipedum super quadrato

k 165. huius.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [216] - 159
PUBLIC DOMAIN



drato AB in altitudine lineæ Q, æquale eſt [a] parallelepipedo ſuper quadrato AG in altitudine AK, cùm habeant baſes ex conſtr. & altitudines reciprocas. Quare cùm pyramis [b] LK ſit vna tertia parallelepipedi ſuper AG in altitudine AK (eſt enim AK altitudo pyramidis, quia AK vt ex conſtruct. præcedentis propoſitionis patet, eſt normalis ad AL) itemque parallelepipedum ſuper quadrato AG in altitudine tertiæ partis rectæ Q, ſit eiuſdem parallelepipedi tertia pars, erunt pyramis & dictum parallelepipedum æqualia. Quare cùm pyramis maior ſit inſcripta cubica pyramide, etiam dictum parallelepipedum nempe ſuper quadrato AB in altitudine tertię partis rectę Q, erit maius parallelepipedo quod pyramidi cubicę æquale feceramus. Eadem igitur erit pyramidis includentis & incluſæ quæ horum parallelepipedorum differentia. exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

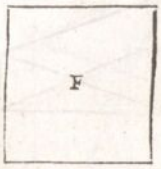
a 34. *vndecimi.*

b 7. *vndecimi.*

PROPOSITIO CLXX.

DAtæ ſeriei ſiue pyramidi cubicæ, pyramidem ſuper F quadrato dato, æqualem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt ſeries cuborum AM, BN, CO, &c. & datum quadratum ſit F, & fiat vt quadratum F ad quadratum AB, ita linea æqualis ſeriei rationis AB ad DE ad lineam Q. Dico pyramidem cuius baſis ſit quadratum F, altitudo autem tripla ipſius Q ſeriei cubicæ æqualem eſſe. Nam parallelepipedum cuius baſis ſit quadratum F altitudo Q æquatur [c] parallelepipedo, cuius baſis ſit quadratum AB, altitudo verò ſeries rationis AB ad DE, hoc eſt [d] ſeriei cubicæ. Ergo parallelepipedum cuius baſis ſit quadratum F & altitudo tripla rectæ Q triplum erit ſeriei cubicæ. atqui [e] idem parallelepipedum triplum eſt pyramidis habentis baſim F, altitudinem verò triplam rectæ Q, ergo pyramis illi ſeriei cubicæ æqualis erit. Factum igitur eſt quod petebatur.

c 34. *vndecimi.*

d 165. *huius*

e 7. *duodecimi.*

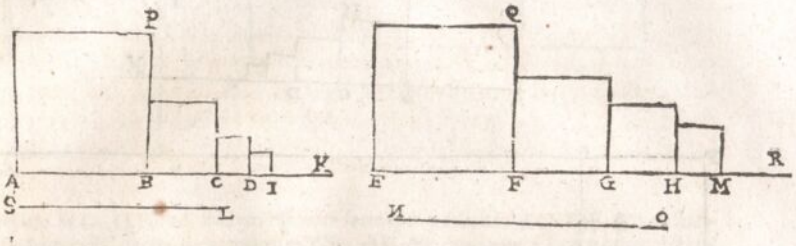
PRO-

PROPOSITIO CLXXI.

BInæ cuborum ſeries quarumuis rationum ab æqualibus cubis AD, EQ incipiant.

Dico cubicas ſeries eamdem habere ad inuicem proportionem, quam habent lineæ SL, NO æquales ſeriebus rationum AB ad DI, & EF ad HM.

Demonſtratio.



PArallelepipedum ſuper quadrato AB in altitudine SL, æquatur [a] ſeriei cubicæ PK. Item parallelepipedum ſuper quadrato EF in altitudine NO, æquatur ſeriei cubicæ QR: cùm autem cubi AP, EQ ponantur æquales, etiam quadrata AB, EF æqualia erunt. Quare dicta parallelepipeda eaſdem baſes habebunt; itaque dicta parallelepipeda, hoc eſt ſeries cubicæ eamdem habebunt rationem, quam altitudines SL, NO, hoc eſt quam habent ſeries rationis AB ad DI, & rationis EF ad HM: quod erat demonſtrandum.

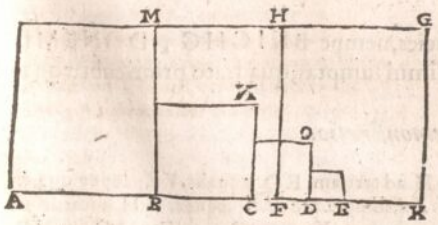
[a] 165. huius

PROPOSITIO CLXXII.

DAta ſit quadratorum progreſſio ſolita, ſuperque illis exſtructa ſeries cuborum, & inſcripta parallelepipedo AG, cuius baſis ſit quadratum AB, altitudo AK, eadem nempè quæ longitudo ſeriei cubicæ.

Dico parallelepipedi ad ſeriem cubicam, eamdem eſſe rationem, quæ eſt DA trium primorum laterum, ad latus primum AB.

Demonſtratio.



LInea AF æqualis fiat ſeriei rationis AB ad DE; erit parallelepipedum ſuper quadrato AB in altitudine AL (quod vocemus parallelepipedum AH) æquale [b] ſeriei cubicæ; ſed parallelepipedũ AG eſt ad parallelepipedum AH, (cùm eadem ſit baſis vtriuſque) vt AK ad AF, hoc eſt vt [c] DA ad BA; ergo parallelepipedum AG etiam erit ad ſeriem cubicam vt DA ad BA. Quod erat demonſtrandum.

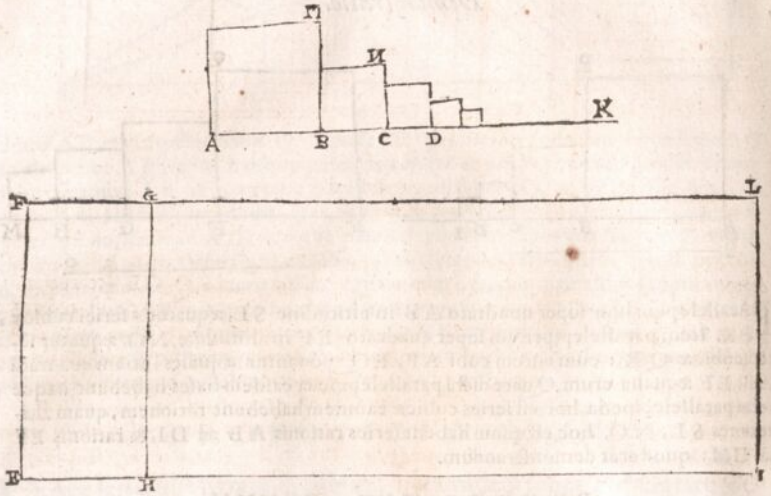
[b] Ibid.

[c] 103. huius

PROPOSITIO CLXXIII.

DAta ſit vt ſuprà cubórum ſeries. Oportet exhibere ſuperficiem omnibus ſuperficiebus omnium cuborum progreſſionis datæ æqualẽ.

Demonſtratio.



a 130. *huius* FIat a rectangulum EHGF æquale progreſſioni quadratorum AM, BN, &c. tum EI ſextupla fiat lineæ EH. Dico rectangulum FI eſſe id quod quæritur. Cùm ſuperficies ſingulorum cuborum conſtet ſex quadratis æqualibus, manifeſtum eſt omnes ſeriei cubicæ ſuperficies conſtitui ex ſex ſeriebus quadratorum AM, BN, &c. atqui rectangulum HF ex conſtructione ſeriei quadratorum AM, BN, eſt æquale. Ergo ſex rectangula FH, hoc eſt ex conſtruct. rectangulum FI, conſtituet omnes ſeriei cubicæ datæ ſuperficies. Fecimus ergo quod petebatur.

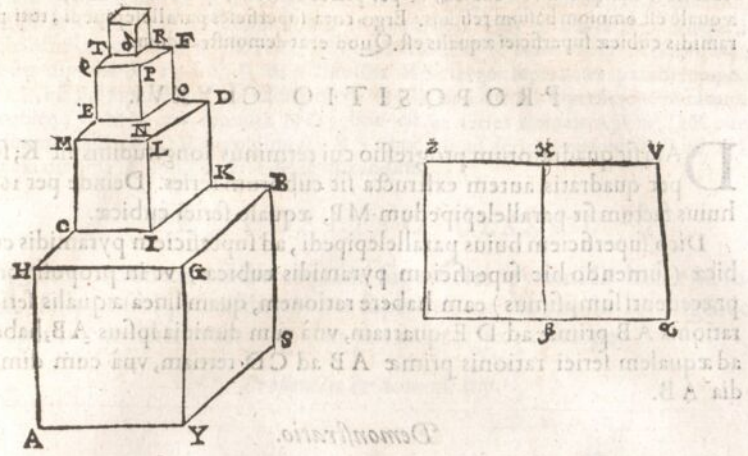
PROPOSITIO CLXXIV.

DAta ſit cuborum progreſſio ſibi mutuo inſiſtentium, conſtituens pyramidem cubicam.

Dico reſiduas baſium ſuperficies, nempè BKICHG, DONEML & reliquas omnes in infinitum ſimul ſumptas, quadrato primi cubi æquales eſſe.

Demonſtratio.

FIat enim ſeriei rationis primæ AH ad tertiam EQ æqualis VZ; ſuper qua in altitudine AH fiat rectangulum Zα, ſumptâque VX æquali, AH ducatur ad Vα parallela Xβ, quæ abſcindat quadratum Xα æquale quadrato AG ſeu HB. Rectangulum αZ per 79. huius æquatur ſeriei quadratorum AG, CL, EP, &c. hoc eſt (quoniam cuborum plana omnia ſunt quadrata æqualia) ſeriei quadratorum HB, MD, QF, &c. ergo cum αX ex conſtr. quadrato AB æquale ſit, erit reliquum βZ reliquæ quadratorum ſeriei MD, QF, &c. æquale. Atqui ſeries quadratorum



dratorum MD, QF, &c. eadem est cum serie quadratorum KC, OE, &c. rectangulum igitur βZ seriei quadratorum CK, OE, &c. æquatur. Quare cùm rectangulum αZ & series quadratorum HB, MD, QF, &c. itemque rectangulum βZ & series quadratorum CK, EO, &c. æqualia sint, etiam excessus rectanguli αZ super βZ, & excessus seriei HB, MD, &c. super seriem CK, EO, &c. æquales erunt. Atqui excessus αZ super βZ est αX, id est ex construct. quadratum HB: excessus verò seriei quadratorum BH, MD, &c. super seriem quadratorum CK, EO, &c. sunt figuræ BKICHG, DONEML, FRδTQP, &c. ergo figuræ illæ omnes simul sumptæ æquantur quadrato HB. Quod erat demonstrandum.

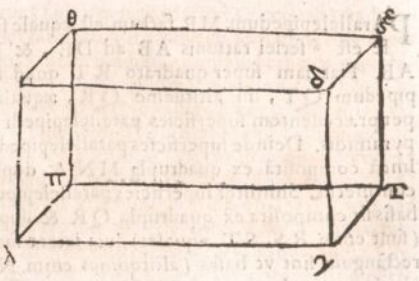
PROPOSITIO CLXXV.

IIsdem positis,

Dico superficiem cubicæ pyramidis, æqualem esse superficiei parallelepipedi γθ, cuius basis γξ sit primi cubi quadratū, altitudo verò γλ æqualis seriei rationis primæ AH ad tertiam EQ. Per superficiem autem pyramidis cubicæ intelligo hîc superficies omnium cuborum, exceptis quadratis CK, EO, TR, &c.

Demonstratio:

REctangulum λδ continetur lineâ γλ, æquali seriei rationis AH ad EQ, & altitudine γδ, quę æqualis est AH; est enim quadratum γξ æquale quadrato AG: igitur a rectangulum λδ omnibus quadratis AG, CL, &c. æquale est: reliquæ igitur hederæ rθ, δθ, γπ æquales sunt seriei quadratorum oppositæ seriei AG, CL, &c. & seriei quadratorum BY, DI, &c. nec non illi quę infra huius opposita est: est autem & quadratum γξ basis parallelepipedi æqualis qua-



a 11 2. hu

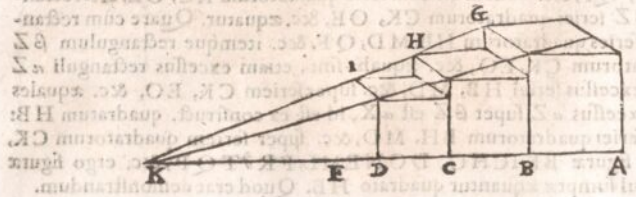
drato AS basi pyramidis cubicæ, & per præcedentem, quadratum HB, id est λθ æquale est omnium basium residuis. Ergo tota superficies parallelepipedi, toti pyramidis cubicæ superficiei æqualis est. Quod erat demonstrandum.

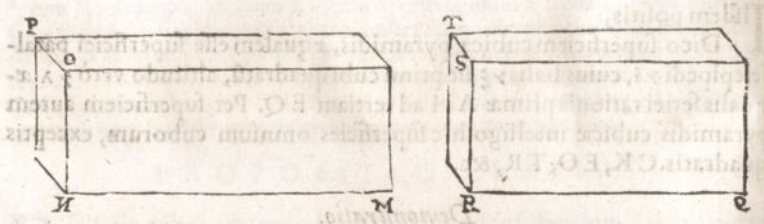
PROPOSITIO CLXXVI.

DAta sit quadratorum progressio cui terminus longitudinis sit K; super quadratis autem exstructa sit cuborum series. Deinde per 165. huius factum sit parallelepipedum MP, æquale seriei cubicæ.

Dico superficiem huius parallelepipedi, ad superficiem pyramidis cubicæ (sumendo hic superficiem pyramidis cubicæ, vt in propositione præcedenti sumpsimus) eam habere rationem, quam linea æqualis seriei rationis AB primæ ad DE quartam, vnà cum dimidia ipsius AB, habet ad æqualem seriei rationis primæ AB ad CD tertiam, vnà cum dimidia AB.

Demonstratio.





PArallelepipedum MP factum est æquale seriei cubicæ, igitur latus MN æquale est [a] seriei rationis AB ad DE, & NO, OP æquales sunt singulæ ipsi AB. Fiat iam super quadrato RT quod sit æquale quadrato AB, parallelepipedum QT, in altitudine QR, æquali seriei rationis AB ad CD. ergo per præcedentem superficies parallelepipedi QT æqualis erit superficiei cubicæ pyramidis. Deinde superficies parallelepipedi MP æqualis est rectangulo [b] quod lineâ compositâ ex quadrupla MN & dupla NO, & altitudine NO siue OP continetur. Similiter superficies parallelepipedi QT æqualis est rectangulo cuius basis sit composita ex quadrupla QR & dupla RS; altitudo verò RS siue ST (sunt enim RS, ST æquales) quia latera sunt quadrati RT. Quare cùm dicta rectangula sint vt bases (altitudines enim NO, RS æquales habent eidem AB, ideoque æquales inter se) etiam erit parallelepipedi MP superficies, ad superficiem

[a] 165. huius.

[b] 1. sexti.

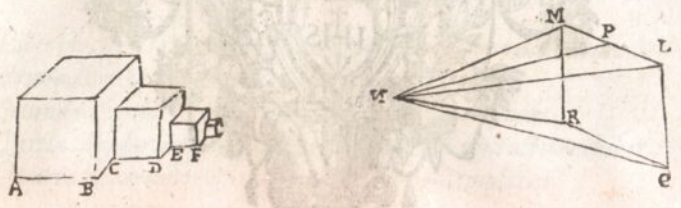
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [221] - 164
PUBLIC DOMAIN

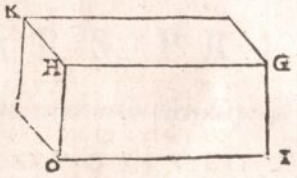
ciem parallelepipedi QT, vt basis ad basim, nempè vt composita ex quadrupla MN & dupla NO, ad compositam ex quadrupla QR & dupla RS. Atqui vt quadrupla MN cum dupla NO, ad quadruplam QR cum dupla RS, sic MN cum dimidia NO ad QR cum dimidia RS; ergo superficies parallelepipedi MP, est ad superficiem parallelepipedi QT, hoc est ad superficiem pyramidis cubicę, vt MN cum dimidia NO, hoc est vt series rationis AB ad DE cum dimidia AB, ad QR cum dimidia RS, hoc est ad seriem rationis AB ad CD cum dimidia AB: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVII.

PRoportionem exhibere quam superficies pyramidis habet ad inscriptæ sibi pyramidis cubicæ superficiem: eo modo intelligendo superficiem seriei cubicæ, quo in præcedenti propositione.

Constructio & demonstratio.





ASsumemus hoc loco pyramidem isosceliam, facilitatis gratiâ. sit ergo pyramis QLMRN isosceles, cuius basis sit quadratum QM, cui pyramis cubica AB, CD, &c. inscripta intelligatur, factoque quadrato OK æquali quadrato AB reperiatur linea GH æqualis seriei rationis AB primę ad tertiam EF; & super quadrato OK in altitudine GH, fac parallelepipedum, cuius superficies æquabitur [a] superficiei pyramidis cubicæ. Dico vt rectangulum super dupla LN & LM tamquam vnâ recta, in altitudine LM, est ad rectangulum super quadrupla GH & dupla AO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO, sic pyramidis includentis superficies, ad superficiem inclusæ pyramidis cubicæ. Ducatur enim ex vertice pyramidis N ad LM normalis NP, quæ vt ex datis facilè colliges, bisecat LM in P: rectangulum igitur NLP duplum est trianguli rectanguli LPN, vt patet ex elementis; ergo rectangulum NLP, æquale est triangulo LMN. & rectangulum NLM duplum est trianguli LMN. ergo rectangulum super dupla LN, in altitudine LM, est quadruplum trianguli LMN, hoc est æquatur tóti superficiei pyramidis prętęr basim: quare rectangulum super dupla LN & LM tam-

[a] 175. huius.

a 1. *secundi.* quam vnâ rectâ in altitudine LM, æquatur toti a ſuperficiei pyramidis. ſimili diſcurſu demonſtrabimus rectangulum ſuper quadrupla GH & dupla HO tamquam vnâ rectâ, in altitudine HO æquari ſuperficiei parallelepipedi; ergo ſuperficies pyramidis N, eſt ad ſuperficiem parallelepipedi, hoc eſt ex conſtruct. ad ſuperficiem pyramidis cubicæ, vt ſunt dicta rectangula inter ſe. Exhibuimus ergo, &c. quod petebatur.

Libri ſecundi finis.



QV A-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER TERTIVS DE CIRCVLIS.

ARGVMENTVM.

Liber hic omnis in quatuor partes veluti membra diuiditur.
Prima de linearum in circulis agit proportione.
Secunda angulos & arcus circulares inter se comparat.
Tertia circulorum mutuas intersectiones & contactus exhibet.
Quarta linearum in circulis potentiam contemplatur.

CIRCVLORVM PARS PRIMA.

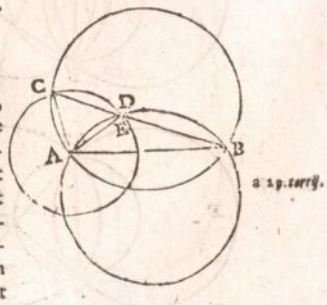
De linearum in Circulis proportione.

PROPOSITIO PRIMA.

AEquales circuli seſe intersecent in A & B; centroque A, interuallo AC, circulus describatur, occurrens æqualibus circulis in CD.

Dico C,D,B, puncta esse in directum.

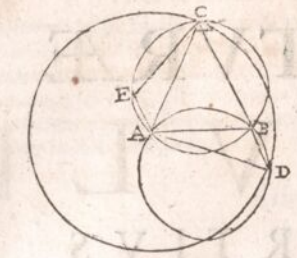
Demonstratio.



SIt primò radius AC, minor AB, ducaturque CB, occurrens ADB, perimetro in E. iunganturque AE, AC Quoniam angulus ABC, vtrique circulorum æqualium ADB, ACB communis est, erunt arcus[a] AE, AC, illorumque subtensæ æquales; hoc est recta AE, æqualis AC, & E punctum in peripheria circuli ADC; sed idem E, per constructionem est in perimetro circuli ADB, igitur E punctum cum D, idem est, transitq; CB recta, per D, & C. quare in directum sunt puncta C, D, B.

[a] 29. tertij.

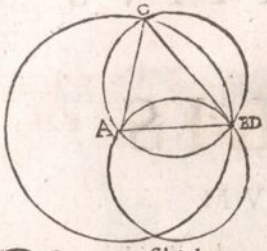
2. Ra-



a *Ibid.*

b 26. *tertij.*

c 21. *tertij.*



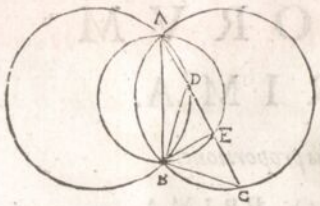
2. Radius A C maior ſit rectâ A B: iungantur C B, B D: & A B rectæ, æqualis applicetur C E, iunganturq; A E, A D. Quoniam igitur C E linea, æqualis ponitur rectæ A B, & C A æqualis ipſi A D, ſint autem & circuli A B C, A B D per conſtruc. inter ſe æquales, erit arcus [a] C E æqualis arcui A B, & arcus C E A, æqualis arcui A B D: vnde angulus A B D, æqualis [b] angulo A E C. ſed angulus A E C vnà cum angulo [c] A B C duobus rectis eſt æqualis, igitur & angulus A B D, cum angulo A B C duobus rectis æquatur. quare C B, B D lineæ in directum ſunt.

3. Radius A C. æqualis ſit radio A B. patet punctum D, incidere in B. igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum.

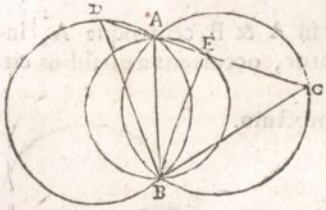
PROPOSITIO II.

OCcurrant ſibi denuo æquales duo circuli in A & B. circuli quoque A E B diameter ſit A B, ducaturq; recta quæuis A D, occurrens perimetris circulorum æqualium in D, & C, & circulo A E B in E. Dico in E bifariam diuidi rectam D C.

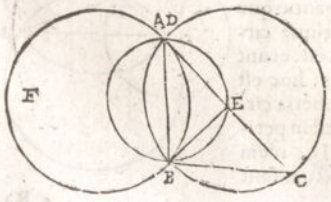
Demonſtratio.



CAdant primò puncta E & D, ad eandem partem lineæ A B; ducantur rectæ D B, C B, E B: Quoniam angulus C A B, duobus arcubus D B, C B circulorum æqualium inſiſtit, æquales erunt ſubtenſæ D B, C B; ac proinde anguli E D B, E C B, æquales; ſunt autẽ anguli D E B, C E B, recti ob A E B ſemicirculum, & E B vtrique triangulorum D B E, B E C communis, triangula igitur D E B, C E B, æqualia ſunt inter ſe, & ſimilia; quare & C Đ in E bifariam diuiſa.



Secundò ſit A punctum medium inter D, & E: Cum circuli A C B, A D B, ſint æquales, & A B linea, vtrique communis triangulo D E B, E B C, erunt anguli A D B, A C B, inter ſe æquales; quare cùm anguli quoque ad E recti ſint, erunt triangula D E B, E B C inter ſe æqualia & ſimilia; ac proinde D E rectæ E C æqualis.

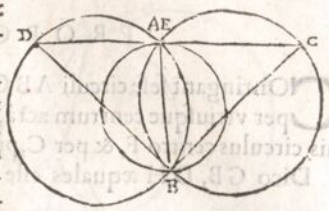


Tertiò linea A C contingat circulum A F B in A: punctum quoque D idem ſit cum A, quia igitur A C contingit circulum A F B, erit angulus C A B, æqualis [d] angulo ſegmenti D F B, ac proinde angulo A C B (cum A F B, A C B ſegmenta ſint æqualia) quare æquales quoque ſunt anguli B A C, B C A: & quia angulus A E B rectus eſt in ſemi-

d 32. *tertij.*

ſemicirculo AEB, erunt ſimilia triangula & æqualia ABE, EBC: vnde & AE, EC æquales ſunt lineæ.

Quartò. Contingat recta CD, circulum diametri AB in A, adeoq; & punctum E, idem ſit cum puncto A. cùm igitur DC ſit contingens, [a] erunt BAD, BAC anguli recti: ſunt autem æquales anguli ADB, ACB, æqualium ſegmentorum; igitur triangula ADB, ABC, ſimilia ſunt & æqualia. Quod fuit demonſtrandum.



a 18. tertij.

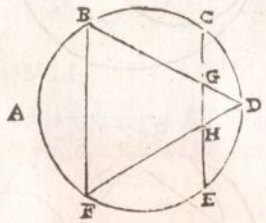
PROPOSITIO III.

Diuiſo circulo in ſex partes æquales, punctis A, B, C, D, E, F. ductiſque BF, CE, ponantur BD, FD, occurrentes CE in G & H.

Dico CE lineam in G & H trifariam eſſe diuiſam.

Demonſtratio.

CVm enim arcus BD, DF, FB ponantur æquales, erit BDF triangulum æquilaterum. vnde cùm CE æquidiſtet BF, erit & GDH æquilaterum: eſt autẽ GD æqualis [b] CG & HD æqualis HE; igitur CG, GH, HE lineæ, ſunt inter ſe æquales, & CE in G & H trifariam diuiſa. Quod erat demonſtrandum.



b *Deducitur ex* 109. *&* 111. *Pappi lib.* 7.

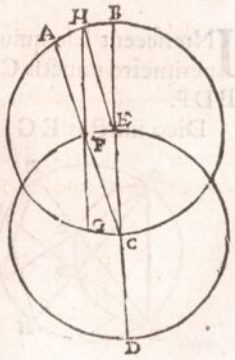
PROPOSITIO IV.

SEcent ſe inuicem æquales duo circuli ABC, DEF. per mutua centra C, E, tranſeuntes: lineæ verò BD, per vtriuſque centrum actæ, parallela ponatur quæuis HG, occurrens perimetro in F; & per F linea CFA.

Dico GF, FA, æquales eſſe.

Demonſtratio.

DVcatur EH; quoniam HG, æquidiſtat BC erit angulus FHE æqualis angulo HEB. & quia arcus HB, FE ob circulorum æqualitatem æquales quoque ſunt, erit angulus FCE æqualis angulo HEB, adeoque angulo FHE; vnde parallelogrammum vel Rhombus eſt CH: & HF lineæ æqualis CE, id eſt CF; eſt autem rectangulo CFA, æquale [c] HFG rectangulum; igitur AF, GF lineæ [d] quoque inter ſe æquantur. Quod fuit demonſtrandum.



c 35. tertij. d 1. ſexti.

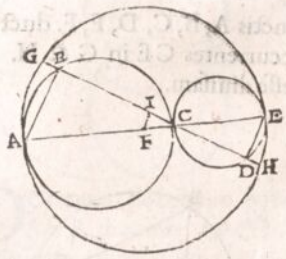
Corollarium.

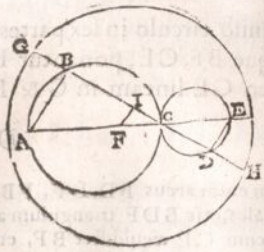
HInc ſequitur HF, BE lineas quoque inter ſe æquari, cùm HF linea æquetur ipſi EC: & quia HG eſt quæcumque æquidiſtans diametro BC, ſequitur parallelas omnes rectæ BE, cauâ circuli ABC, & conuexa FED peripheria interceptas, eſſe inter ſe æquales, cùm ſingulæ æquentur ipſi BE.

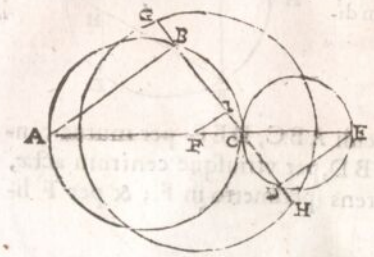
PROPOSITIO V.

COntingant seſe circuli ABC, CDE exterius in C, lineâ vero AE, per vtriuſque centrum actâ, ac diuiſâ bifariam in F, deſcribatur quiuis circulus centro F, & per C, punctum contactus, recta ponatur GCH: Dico GB, DH æquales eſſe lineas.

Demonſtratio.





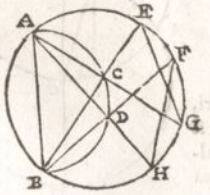


IVngantur AB, ED, illiſq; æquidiſtans, ponatur FI, erit hæc normalis ad GH, cùm ABC angulus rectus ſit; vnde & GH in I diuiſa eſt bifariam, eſtq́ue AF ad FC, vt BI ad IC: & permutando AF ad BI, vt FC ad IC. Deinde vt EC ad CF, ita DC eſt ad CI, & cõponendo, permutando, vt FC ad IC, ita EF ad ID; ſed vt FC ad IC, ſic AF ad BI, igitur vt AF ad BI, ita EF ad DI, & permutando vt AF ad EF, ita BI ad DI, ſunt autem lineæ AF, FE ex hypotheſi æquales inter ſe; ergo DI, BI, quoque inter ſe æquantur; quæ ſi demantur ab æqualibus IH, IG, manent reſiduæ GB, DH, inter ſe æquales. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

INterſecent ſeſe quiuis duo circuli in A & B; aſſumptiſq́ue in ACD perimetro punctis C, D, agantur per illa lineæ ACG, ADH: & BCE, BDF.

Dico iunctas EG, FH æquales eſſe.



Demonſtratio.

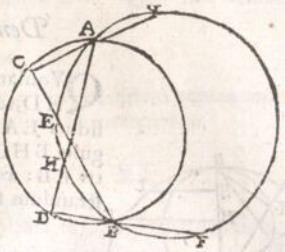
PRimò, arcus ACB ambitu AGB interceptus, vtrumque punctorum C & D, contineat; quo caſu cùm anguli CAD, CBD arcui CD inſiſtentes [a] æquentur, erunt EF, GH arcus [b] quoque inter ſe æquales; addito igitur communi arcu FG, erunt FH, EG arcus adeoq́ue & lineæ [c] æquales.

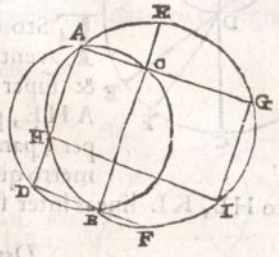
Secundò arcus ACB, extra AFB ambitum; conten-

a 27. tertij.
b 26. tertij.
c 29. tertij.

contentus, puncta C & D obtineat; cùm igitur anguli CAD, CBD, arcui CD insistentes sint æquales, erunt quoque anguli HAG, FBE reliqui æquales; ac proinde arcus FGE, FGH, adeoque iunctæ EG, HF æquales.

Tertiò punctum C intra AGB circuli spatium contineatur; D verò punctum extra collocatum sit. Ducatur GI æquidistans CB, iunganturque HI: quoniam GI, CB æquidistant, anguli ACB, AGI, æquales sunt; vnde & angulus AHI æqualis est angulo ADB: quia AHI, a cum AGI, hoc est ACB duobus rectis æqualis est, sicut est angulus ACB cum ADB. Vnde æquidistantes sunt HI & DF, adeoque & arcus HB, FI & consequenter HF, BI æquales. quare & iuncta HF id est BI ipsi EG æquatur. Quod erat demonstrandum.





a 21. huius.

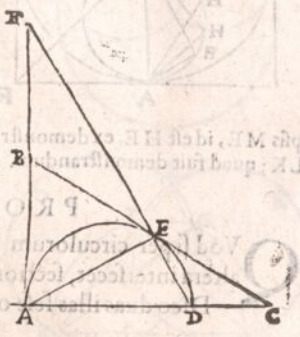
PROPOSITIO VII.

ESto ABC triangulo rectangulo, semicirculus inscriptus AED contingens AB, BC latera in A & E: & per E ponatur recta DE occurrens AB, in F.

Dico AB, BF lineas, æquales esse.

Demonstratio.

IVngantur AE: erit igitur angulus AED in semicirculo rectus, vti & reliquus AEF: qui proinde æqualis est duobus angulis EFA, EAF: est autem angulo EAF æqualis BEA, cùm AB, BE sint contingentes ex eodem puncto eductæ; adeoque æquales; reliquus igitur angulus AFE, reliquo BEF æqualis est: quare BF rectæ BE, hoc est AB, æqualis est. Quod erat demonstrandum.



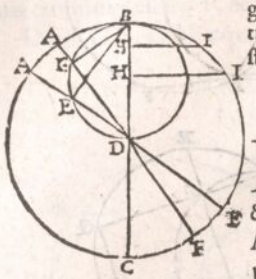
PROPOSITIO VIII.

CIrculum ABC, contingat intus circulus DEB, in B. transiens per D centrum circuli ABC; ductis insuper per D rectis ADF quæ circulo DEB occurrant in E: fiant DE rectis æquales DH, & perpendiculares ponantur HI ad diametrum BC.

Dico EB, HI lineas, æquales esse.

Demonſtratio.

QVoniam BD, lineę ipſi DA ſunt æquales; veluti & HD, rectis ED ex hypotheſi, erunt reſiduæ HB, reſiduis EA æquales. quare AEF rectangula, rectangulis BHC æqualia, hoc eſt quadrata HI, quadratis EB: æquales igitur ſunt EB, HI. Quod demonſtrandum fuit.

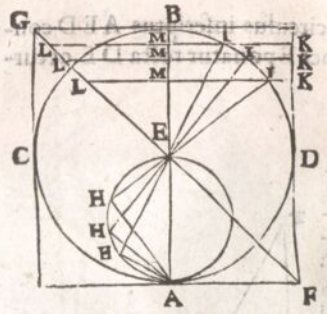


PROPOSITIO IX.

ESto circulo ABC, cuius diameter AB, & centrum E circumſcriptum quadratum GF: & ſuper AE vt diametro, deſcripto circulo AHE, per centrum E, lineæ ponantur HI, & per I parallelæ rectæ AF, occurrentes FG, diametro quadrati in L, rectæ verò FD in K.

Dico HL, KL lineas inter ſe æquales eſſe.

Demonſtratio.



a 18. tertij.

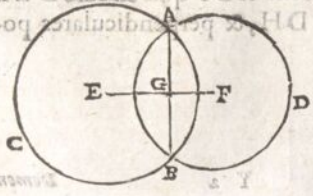
COniungantur H, A; & rectæ KL, ſecent AB, diametrum in M: Quoniam LK lineæ, tangenti GB æquidiſtant, erunt IM, a normales ad diametrum AB, adeoque anguli IME, angulis EHA æquales; ſunt autem & IEM anguli, æquales angulis HEA, ad verticem poſitis, & EI lineæ, æquales rectæ EA; triangula igitur HEA, triangulis IME ſunt æqualia: vnde HE, lineis EM, & HA, rectis MI æquales. Rurſum cùm LM, lineæ GB æquidiſtent, erit vt GB ad BE, ita LM, ad ME. ſunt autem GB, BE æquales, ergo & LM, EM æquales quoque ſunt. Quare cùm MK, hoc eſt EB, lineis EI, & rectæ LM, ipſis ME, id eſt HE, ex demonſtratis ſint æquales, erunt HI lineę, æquales rectis LK; quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

QVod ſi per circulorum ſeſe ſecantium centra, recta ducta ſit, quam altera interſecet, ſectionum puncta coniungens.

Dico duas illas ſeſe orthogonaliter decuſſare.

Demonſtratio.



SInt enim circuli duo ABC, ADB quorum centra E, F; coniungat EF recta; & puncta interſectionum recta AB, occurrens EF lineæ in G, oportet oſtendere angulos ad G rectos eſſe. ductâ EG normaliter ad AB, ſecta erit AB bifariam in G; ſed recta quæ ex G ducitur, ad F centrum, diuidens AB bifariam in circulo ADB, eidem quoque AB orthogonaliter inſiſtit; patet igitur

igitur lineas AB, EF sibi inuicem normales esse. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

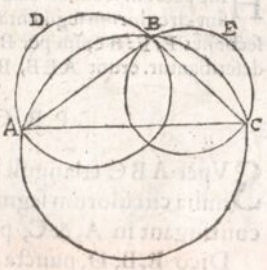
HInc patet, EF lineam, quæ circulorum sese intersecantium centra coniungit, bifariam quoque diuidere arcus, mutuis peripherijs interceptos.

PROPOSITIO XI.

ESto ABC triangulum, super cuius basi AC, descriptum sit quodlibet circuli segmentum; oportet super reliquis trianguli lateribus, segmenta describere, similia illi, quod super base descriptũ est segmento.

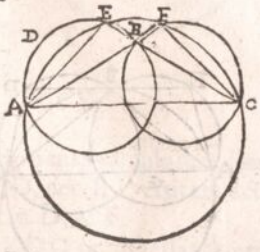
Constructio & demonstratio.

TRanseat primò segmentum super basi positum, per singula trianguli extrema; describatur autem circulus per BC, vti & per BA, qui rectas AB, BC contingat in B. Dico factum quod postulatur. Quoniam BC linea contingit circulum ADB in B: erit angulo ABC, æqualis angulus[a] segmenti ADB. eodem modo angulus segmenti BEC, æqualis est angulo ABC. quare segmentorum anguli AEB, ABC, BDC, æquales sunt inter se; & similia proinde segmenta.

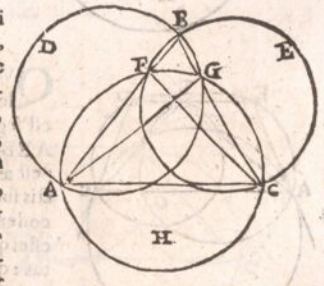


a 32. tertij.

Secundò B vertex trianguli ABC, cadat infra perimetrum segmenti, super AC exstructi: productis lateribus AB, BC, donec occurrant peripheriæ circuli AEC, in F & E, describantur circuli per AEB, BFC: eritque peractum quod postulatur: iunctis enim AE, CF. exsurgent anguli AEC, AFC eidem arcui insistentes æquales, ac proinde ADB, AEC segmenta similia erunt: rursum cùm angulus AEC sit æqualis angulo AFC, id est BFC, erunt & segmenta AEC, BFC, inter se similia. quare tria ADB, AEC, BFC, similia sunt.

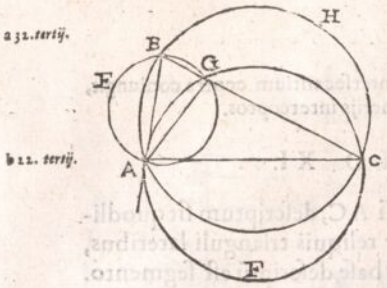


Tertiò B vertex trianguli ABC, extra segmenti ambitum constitutus sit, quod super basi exstructum est; occurratque perimeter trianguli lateribus in punctis F, & G. Tum per BFC, BGA, circuli describantur. Dico factum esse quod petitur. Iungantur AG, FC. Quoniam anguli AFC, AGC æquales sunt, erunt & BFC, BGA reliqui æquales. quare & arcus ADB, BEC quibus insistunt, similes sunt. Rursus cùm angulus AGC tam cũ angulo[b] segmenti AHC, quàm cum AGB angulo, duobus rectis æquetur, dempto communi angulo AGC: erunt anguli AGB, AHC, adeoque & residuorum segmentorum anguli ADB, AGC, æquales, & AGC, BDA, segmenta similia: est autem BEC segmentum ostensum simile segmento ADB, tria igitur segmenta AGC, ADB, BEC sunt inter se similia.



b 22. tertij.

Quartò B punctum cadens extra segmentum baseos, constituat BA, trianguli latus, contingens circulum AGC in A: latus verò BC, eundem secet in G. per puncta B, A, C, & A, B, G, circuli describantur; dico illos satisfacere petitioni iun-



a 32. tertij.

b 22. tertij.

iungantur A, G. Quoniam AB contingit circulum AGC in A, erit angulo a BAC, æqualis angulus segmenti AFC. vnde BAC, AFC, ideoque reliqua AGC, BHC segmenta sunt similia: vlterius cùm angulus AGC tam cum angulo AGB, quàm cum angulo segmenti AFC, b duobus rectis sit æqualis, dempto communi angulo AGC, erunt AGB, AFC æquales anguli; vnde & angulus segmenti AEB, æquatur angulo AGC, adeoque AEB, AGC segmenta sunt similia. igitur constat veritas propositionis.

Corollarium.

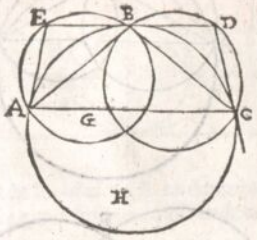
HInc patet in secundo casu, si super ABC, trianguli lateribus similia descripta sint circulorum segmenta rectas AB, CB productas cadere in communes intersectiones E, F: si enim per B & puncta quibus AEC perimetro occurrunt circuli describantur. erunt AEB, BFC segmenta similia segmento ABC.

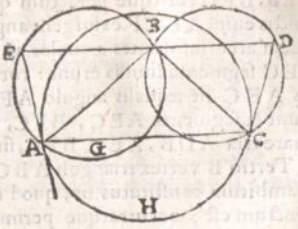
PROPOSITIO XII.

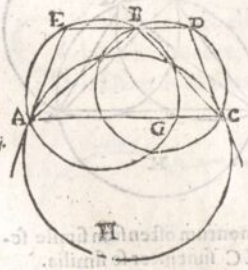
SVper ABC trianguli lateribus descripta sint AEB, ABC, BDC similia circulorum segmenta; ductæque lineæ ex A & C circulum ABC, contingant in A, & C, peripherijs autem occurrant in D, & E.

Dico E, B, D, puncta esse in directum posita.

Demonstratio.







c 32. tertij.

d 22. tertij.

QVoniam EA, contingit circulum ABC erit angulo c EAC, æqualis angulus segmenti AHC, hoc est segmenti AGB quod illi simile est, sed angulus AEB, vnà cum angulo segmenti AGB, duobus rectis d est æqualis, igitur AEB, EAC anguli duobus rectis sunt æquales; adeoque EB, AC lineę parallelæ: eodem modo ostenduntur AC, BD, æquidistantes esse: quare constat EB, BD, in directum esse constitutas: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

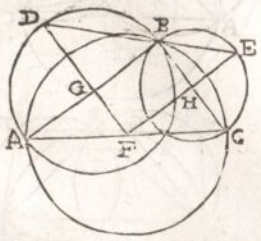
SVper lateribus trianguli ABC, similia circulorum segmenta descripta sint per quorum centra G, H, ex centro F, segmenti super AC basi

basi trianguli descripti educantur rectæ occurrentes perimetris in D & E.

Dico puncta D, B, E, in directum constituta esse.

Demonstratio.

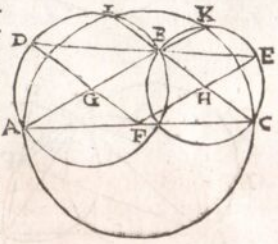
PRimò vertex trianguli ABC in perimetro sit circuli, qui super basi AC, describitur. iunganturque DB, EB. Quoniam FD, per centra F & G, acta est, secabit bifariam, tum [a] rectã AB, tum arcum ADB. eadem quoque ratione radius FH, diuidet bifariam cum BC rectam, tum BEC arcum. Igitur cũ ADB, BEC similia sint segmenta anguli ABD, CBE similibus arcubus insistentes, æquales sunt: quare & angulus ABD æqualis est angulo BCE, quia, EB arcus æqualis est arcui EC. est autem angulus ABC æquales angulo BEC ex hypothesi, igitur anguli ABD, ABC, CBE æquales sunt tribus angulis trianguli BEC adeoque duobus rectis æquales. quare lineæ DB, BE [b] sunt in directum.



a 10. *huius.*

b 14. *primi.*

Secundò B apex trianguli, super basi ABC erecti, intra segmenti AKC aream cadat; producantur AB, CB, cadẽt illæ in cõmunes [c] circulorum intersectiones I & K; Quoniam FG, FH lineæ centra cõiungunt circulorũ sese intersecantium erunt arcus ADI, KEC in D & E bifariam [d] diuisi, vnde ABD, DBIA anguli, item KBE, CBE sunt æquales, sed & anguli ABI, CBK ad verticem oppositi quoque inter se æquantur, igitur & angulus ABD, ipsi KBE & IBD, angulo EBC est æqualis. quare in directum sunt D, B, E puncta. Quod erat demonstrandum.



c *Coroll. prop. vndec. huius.*

d 10. *huius.*

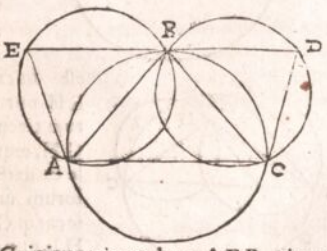
PROPOSITIO XIV.

QVod si super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia, describta fuerint; & recta quædam ED, per B, verticem acta, circulorum AEB, BDC, perimetris occurrat in D, & E.

Dico lineas inter cauas circulorum AEB, BDC peripherias & extimam circuli ABC interceptas, æquales esse.

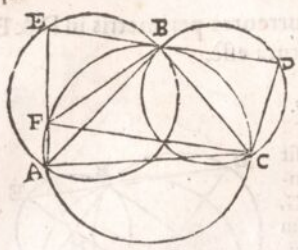
Demonstratio.

SIt primò triangulum Isoscelium ABC; & ED contingat circulum ABC in B: iunganturque AE, CD; Quoniam EB est contingens, erit angulo EBA, æqualis [e] angulus ACB: eadem ratione angulus CAB æqualis est angulo CBD: vnde cùm anguli BAC, BCA per hypothesim sint æquales, erunt quoque anguli EBA, CBD inter se æquales. sunt autem & anguli AEB, CDB, (ob AEB, CDB segmenta similia) æquales, insuper & AB, linea æqualis lineę BC; igitur triangulum AEB, triangulo CBD & EB latus, lateri BD est æquale.

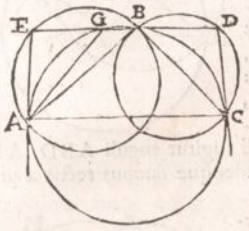


e 32. *tertij.*

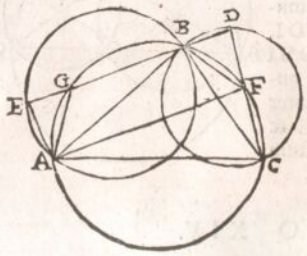
Secundò ED ponatur contingens, triangulo ABC existente Scaleno, dico ED in B bifariam secari. sit AB latus, altero BC maius, & ED contingenti, ponatur



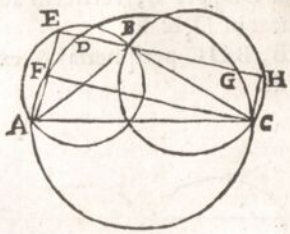
natur æquidistans CF: iunctaque AF, concurrat cum DB, producta in E. quoniam parallelæ sunt CF, DE, erit angulus AFC angulo AED æqualis: sed AFC æqualis ponitur angulo segmenti AEB; igitur concursus AF, cum DB producta, fit in perimetro circuli AEB: Rursum quia contingens est ED, eidemque æquidistat CF, erunt segmenta BF, BC æqualia, ac proinde iunctæ FB, BC, quoque inter se æquales. vnde similia sunt, & æqualia triangula FEB, BDC, id eoque EB æqualis BD.



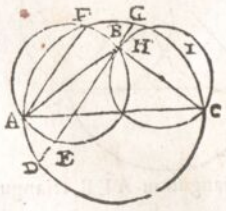
Tertiò, recta ED circulum non contingat super basi AC erectum, sed intersecet in puncto quodam G. sitque ED æquidistans AC. dico EG, BD lineas æquari. cùm enim ED, AC æquidistent, erunt, AG, BC arcus adeoque & subtensæ æquales: vnde & anguli GAC, BCA æquales sunt, vti & anguli illis alternatim positi EGA, DBC; quocirca similia sunt & æqualia triangula EAG, BDC; & recta EG, ipsi BD æqualis.



Quartò, quod si recta ED per B ducta occurrens perimetro ABC in G, non æquidistet AC, ducatur AF parallela ED, & ducta CF, occurrat EB, productæ in D. quoniam parallelæ sunt ED, AF, erit AFC angulus angulo EDC æqualis: sed AFC æquatur angulo segmenti BDC ex positione, igitur D in perimetro est circuli BDC; & quia æquidistant ED, AF erunt arcus AG, BF, æquales, adeoque & subtensæ AG, BF. cumque æquales sint anguli GAF, BFA, æqualibus arcubus insistentes, erunt & anguli EGA, DBF quoque æquales; sunt insuper æquales anguli AEG, BDF, ob segmenta similia; igitur triangula similia sunt & æqualia AEG, BDF; vnde & lineæ EG, BD, æquales.

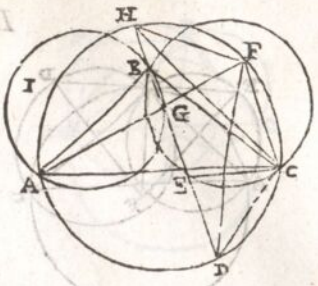


Quintò cadat B vertex trianguli ABC: intra aream circuli supra basim trianguli descripti: & primò recta EH per apicem B transiens, basi trianguli non occurrat. ducatur CF æquidistans EH, donec conueniat cum AF producta in E. ostendetur vti priùs punctum E in perimetro esse circuli AEB, & FED, GHC triangula, adeoque & latera ED, GH inter se æquari. Secundò recta per apicem B acta, occurrat basi trianguli: quo casu demonstrandum est lineam ED, rectæ GH æqualem esse. Quoniam EH per B ducta occurrit basi trianguli AC; vel alterum circulorum contingit in B, (quo casu apparet ED, GH, æquales esse: cum FHG, ADE triangula facile ex datis ostendantur æqualia.) vel vtrumque circulorum super lateribus trianguli ABC descriptorum secat in G, & E, circulum autem super basi factum, in D, & HI; quo casu ducatur ex A per G, linea AGF, iungaturque puncta EC, CF, FH, CD; angulus AGB vnà cum angulo segmenti AIB, æqualis est duobus rectis;

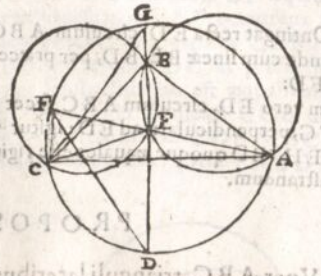


22. tertij. sed angulo AIB, æqualis est angulus AFC ex hypothesi, & angulo AGB æqualis

lis angulus EGF ipsi AGB ad verticem positus; igitur anguli AFC, EGF, sunt duobus rectis æquales; adeoque BD,FC parallelæ, & arcus HF, CD, eorumque subtensæ æquales; vnde & anguli DHF, HDC æqualibus arcubus insistentes, æquales sunt: est autem angulus AGB, æqualis angulo CEB, (cum AGB, BEC segmenta reliqua sint similia) adeoque & reliquus FGH, æqualis reliquo CED; igitur triangula FHG, CED, sunt inter se æqualia; & HG latus æquale lateri ED.

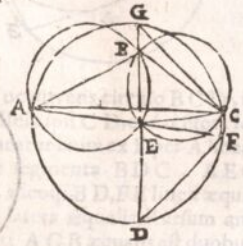


Sextò, quod si recta GD per apicem acta, per communem intersectionem E transeat; sic ostendetur æquales esse rectas GE, ED: sint primò segmenta similia, semicirculis maiora; ductaque ex A per E, rectâ AEF, iungantur CE, CF, FD, CG: Quoniam igitur segmenta similia, semicirculis sunt maiora, erit E extra lineam AC. si enim fieri possit, sit CEA vna eademque linea cum AC. cùm ergo ob similitudinem segmentorum, anguli BEA, BEC sint inter se æquales, erunt etiam recti: quod fieri non potest, cùm segmenta sint semicirculis maiora, quare punctum E non est in linea AC. Cùm igitur angulus AFC, vnà cum angulo segmenti ADC, duobus rectis sit æqualis, sitque angulo ADC, æqualis angulus AEB (ob ADC, AEB segmenta similia) id est angulus DEF ad verticem oppositus, erit angulus AFC vnà cum angulo DEF, duobus rectis æqualis; vnde FC, BD, lineæ æquidistant; & arcus GF, DC, adeoque & arcus GC, DE eorumque subtensæ æquales, &c. vt priùs.



a *Ibid.*

Si verò segmẽta similia minora fuerint semicirculis: demonstrabitur vt priùs, punctum E, esse extra lineam baseos AC. quia verò AFC, AEB segmenta sunt similia, erunt anguli AEB, AFC æquales; sed angulo AEB æqualis est angulus ad verticem DEF; igitur anguli DEF, AFC sunt æquales, & BD, FC rectæ æquidistantes; quare & arcus GC, DF, eorumque subtensæ æquales sunt: &c. vti priùs.

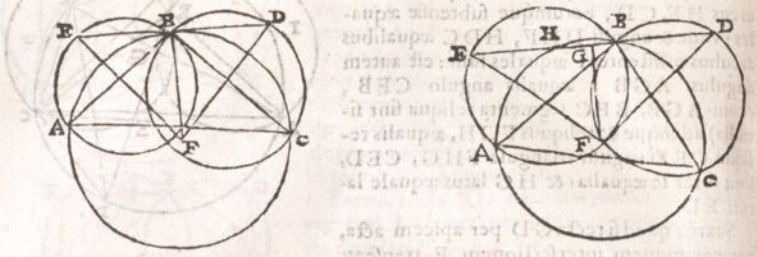


Reliquum esset casus eosdem explicare cùm vertex trianguli ABC *cadit in peripheriam vel extra aream circuli qui supra basim* AC *constitutus est; sed quia omnes illi, demonstrationes communes habent & constructiones cum casibus quos explicuimus, dum nimirum vertex* B, *ipsa area continetur, lectorem non vlterius defatigandum censeo: hoc tamen præmoneo, vt dum* B *vertex trianguli, cadit extra segmentum baseos, casus excludat, quos in medium protulimus qui* BD *lineam iubent ea ratione duci, vt cum basi trianguli non conueniat, quos ineptos esse huic materiæ manifestum est.*

PROPOSITIO XV.

Si denuo super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia constructa fuerint; ac per B verticem ponatur ED, ad cuius extrema ex centro F circuli super basi descripti, ducantur FE, FD. Dico eas inter se æquales esse.

Demonstratio.



a 28. tertij. COntingat recta E D, circulum A B C in B; erit igitur B F normalis a ipsi ED: vnde cùm lineæ B E, B D, per præcedentem æquales sint, erunt etiam æquales F E, F D:

Iam verò E D, circulum A B C secet in puncto quodam H: ducaturque ex F recta F G, perpendicularis ad E D: igitur b H G, G B æquales sunt; ostendimus autem E H, c B D quoque æquales esse; igitur F E, F D æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

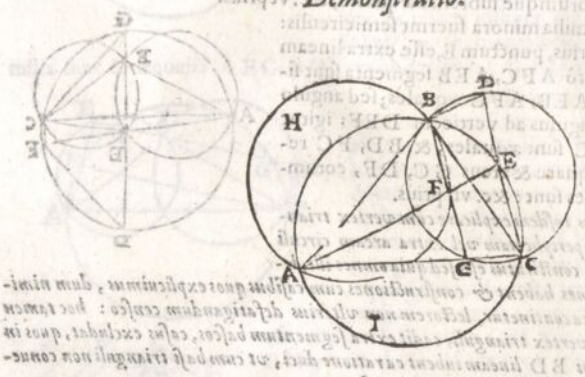
b 3. tertij. c 14. hnius.

PROPOSITIO XVI.

SVper A B C, trianguli lateribus, segmenta circulorum similia constituta sint, & ex C recta educta C D, cui ex B vertice trianguli parallela ponatur B F, occurrens circulo A H B in F:

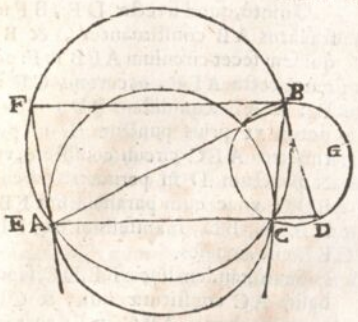
Dico E D, B F, æquales esse lineas.

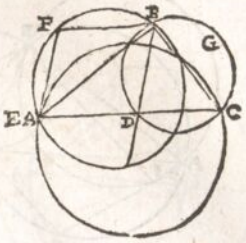
Demonstratio.



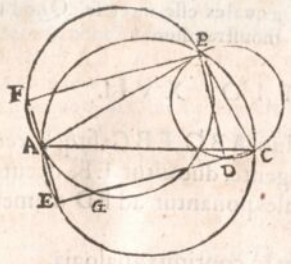
SIt primò vertex trianguli in perimetro circuli A B C constitutus; linea verò D C sit extra triangulum A B C: ponatur iunctæ B D æquidistans A F, occurrens rectæ C D in E; igitur angulo B D C, æqualis est A E C, sed & B D C angulo æquatur angulus segmenti A E C, igitur punctum E, communis est intersectio circuli A B C & rectæ C D: & quia segmenta circulorum A B C, B D C similia sunt, erit angulus A F B æqualis illi qui segmento A I C continetur; igitur & punctum F communis est intersectio circuli A H B, & rectæ B F: cùm igitur parallelogrammum sit B F E D, manifestum est E D, B F lineas inter se æquales esse. Quod oportuit demonstrare.

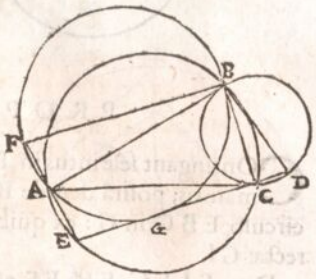
Secundò





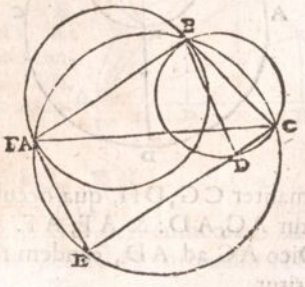
Secundò, C D linea in directum posita sit, cum A C, & recta B F æquidistans basi A C; iungantur A F; & B D ponatur æquidistans ipsi A F occurrens A C in D. Quoniam A C, B F, item A F, B D æquidistant, erit angulus C A F (id est C D B in secunda figura) vnà cum angulo B F A (id est B D C in prima figura) æqualis duobus rectis. sed angulo B F A, per constructionem est æqualis angulus segmenti C G B. Igitur C D B angulus, vnà cum angulo segmenti C G B duobus rectis est æqualis. quare punctum D est in perimetro circuli C G B & A C linea eidem bis occurrit: quare cùm F D parallelogrammum sit: patet F B, E D lineas æquari.

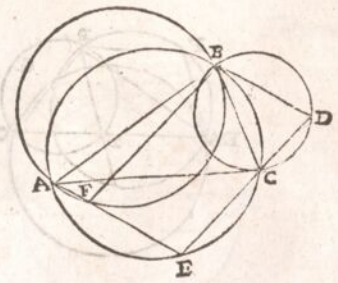




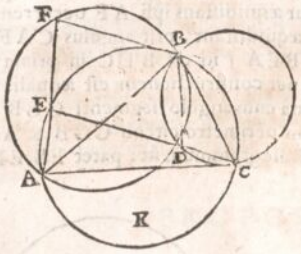
Tertiò, recta C D cadat infra basim trianguli A B C, occurrens circulo B C D, in D; & circulo A B C in E; ita tamen vt ducta B F parallela ipsi C D, cadat supra latus A B, dico B F, D E lineas esse inter se æquales. ducatur enim ex E per A linea, occurrens B F in F iunganturque B D, cùm igitur segmenta B D C, A E C similia sint, erit angulus B D C, æqualis angulo A E C, adeoq; B D, F E lineæ æquidistantes. vnde F D parallelogrammum est & F B, D E latera æqualia. Rursum angulus E F B vnà cum angulo F E D id est angulo segmenti A G B æqualis est duobus rectis: quare punctum F, est in peripheria circuli A F B. in secunda verò figura, quia angulus B D C id est A B C vnà cum angulo A E C, duobus rectis est æqualis, erunt B D, A E parallelę: reliqua vt antè.

Quartò, sit B F linea eadem cum recta A B; ducatur ex C recta C E æquidistans A B: iunctaque F E, demittatur ex B recta B D, quæ æquidistet E F: occurrens C E in D: ostendetur vt priùs punctum D esse communem intersectionem circuli B D C, & rectarum B D, C E: quare cùm F B, C E & B D, F E, sint æquidistantes, patet F B, E D æquales esse.





Quintò, quod si rectæ DE, BF infra latus AB constituantur, & BF quidem secet circulum AFB in F: ponatur recta AFE, occurrens CE in E: & AF æquidistans BD; ostendetur vt priùs punctum E in perimetro AEC circuli consistere, vti & punctum D in perimetro circuli BDC: vnde cùm parallelæ sint FB, DE, FE, BD, manifestum est, FB, ED esse æquales.



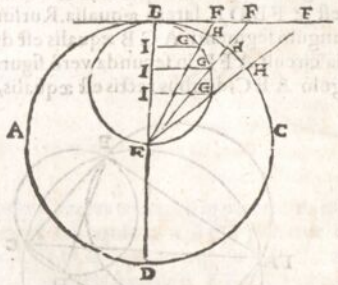
Sextò, tandem lineæ FB, DC, supra basim AC constitutæ sint, & CD occurrat circulo ABC in E; agaturque per E. recta AE, occurrens FB in F: deinde ex B ponatur BD parallela ipsi AF: erit angulus AFB in segmento AFB: & punctum D, communis intersectio rectarum CD, BD, & perimetri BDC: cùm angulus BDC æqualis sit angulo segmenti AKC. qui cum angulo AEC, hoc est AFB, hoc est BDE, duobus rectis est æqualis: patet igitur lineas FB, DE, æquales esse inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

COntingant sese intus in B circuli duo ABC, EBG: sitq; E centrum maioris; positâ deinde BF contingente, ducantur EF, occurrentes circulo EBG in G: ex quibus normales ponantur ad BD diametrum, rectæ GI.

Dico EI, EG, EH, EF esse quatuor in continua analogia.

Demonstratio.



SVnt enim ex elementis continuæ proportionales EI, EG, EB, hoc est EH: sed vt EI, ad EG, ita est EB, id est EH, ad EF; sunt igitur in continua ratione EI, EG, EH, EF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

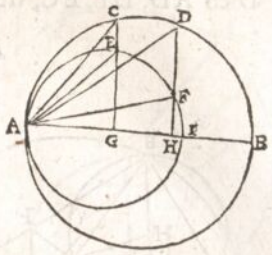
COntingant sese item circuli duo ABC, AEF, in A; quorum centra contineat diameter maioris AB, ad quam positis normaliter CG, DH, quæ occurrant perimetro AEI, in E & F. collocentur AC, AD: & AE, AF.

Dico AC ad AD, eandem rationem habere, quæ inter AE, AF, reperitur.

Demon-

Demonſtratio.

QVadratum enim AC, ad AD quadratum eſt vt GAB rectangulum ad rectãgulum HAB per elementa: hoc eſt vt GA linea a ad lineam HA: ſed vt GA ad HA, ſic GAI rectangulum ad rectangulum HAI, id eſt quadratum AE, ad AF quadratum; ergo vt quadratum AC, ad AD quadratum, ita eſt AE quadratum ad quadratum AF, quare vt AC linea ad AD lineam, ita AE, ad AF. Quod erat demonſtrandum.



a 1. ſexti.

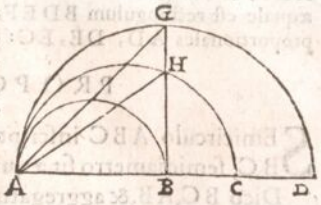
PROPOSITIO XIX.

SInt continuæ proportionales AB, AC, AD, diametri circulorum ſeſe intus in eodem puncto contingentium, erectaque ex B normaliter BG occurrente perimetris in H & G, iungantur AG, AH.

Dico AB, AH, AG, eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

SVnt enim in continuata ratione AB, AH, AC, veluti etiam AB, AG, AD per elementa, quare AG media eſt inter AB, AD; ſed ex hypotheſi ipſa quoq; AC media ponitur inter AB, AD. Igitur AC, AG lineæ ſunt æquales; adeoque in continua ſunt ratione AB, AH, AG. Quod fuit demonſtrandum.



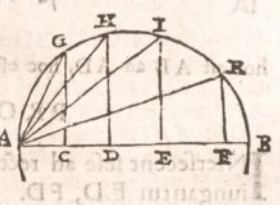
PROPOSITIO XX.

SI diuiſa fuerit diameter AB in cõtinuè proportionales AC, AD, AE, AF, &c. ponanturque normaliter ad diametrum, CG, DH, EI, FK.

Dico iunctas AG, AH, AI, AK, in continua quoque eſſe analogia.

Demonſtratio.

SVnt enim quadrata AG, AH, AI, AK inter ſe vt rectangula BAC, BAD, BAE, BAF vt ex elementis patet; ſed rectangula illa ſunt vt AC, AD, AE, AF; igitur & quadrata AG, AH, AI, AK ſunt vt lineæ AC, AD, AE, AF: quæ cùm ponantur continuæ proportionales, patet & quadrata AG, AH, AI, AK, adeoque & lineas, in continua eſſe analogia. Quod erat demonſtrandum.



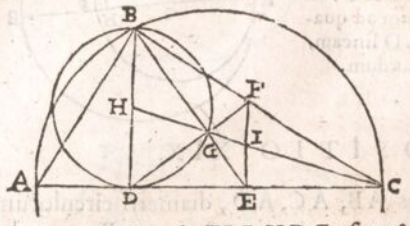
PROPOSITIO XXI.

IN ſemicirculo ABC recta collocata ſit BD perpendicularis ad diametrum AC, quâ diuiſa bifariam in H: centro H, interuallo HB, deſcriba-

ſcribatur circulus B G D, ponanturq; H C, quidem occurrens perimetro circuli B G D in G, recta verò B G, diametro A C in E.

Dico A D, D E, E C, tres lineas, eandem rationem continuare.

Demonſtratio.



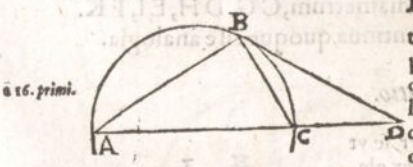
POnatur E F, æquidiſtans B D, iunganturque D G, G F, A B, quoniam E F æquidiſtat B D quæ in H diuiſa eſt bifariam, erit E I æqualis I F: vnde vt E I ad B H, id eſt F I ad H D, ſic E G ad G B id eſt I G ad G H, & permutando vt F I ad I G, ita D H ad H G. quare cùm anguli D H G, F I G lateribus proportionalibus contenti ſint æquales (ob H D, F I parallelas) ſimilia erunt triangula F I G, H D G: ſicut & G I E, B H G, item F E G, B D G: ſunt ergo in directum D, G, F, puncta, vt ex elementis patet. Vlterius quia ſimilia ſunt triangula B D G, D G E, erit B D ad D E vt B G, ad D G: id eſt E G ad G F: ſed vt E G ad G F ſic D E eſt ad E F cùm D G E, G E F ſimilia ſint triangula, igitur B D eſt ad D E vt D E ad E F; quare ſunt proportionales B D, D E, E F & rectangulum B D F E, quadrato D E æquale. ſunt autem ſimilia quoque triangula A D B, E F C. igitur vt A D, ad D B, ita F E ad E C. vnde rectangulo A D E C. æquale eſt rectangulum B D E F, hoc eſt quadratum D E. ſunt igitur continuæ proportionales A D, D E, E C: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

SEmicirculo A B C inſcriptum eſto triangulum cuius alterum latus B C, ſemidiametro ſit æquale.

Dico B C, A B, & aggregatum ex A C, C B, tres eſſe in continua ratione.

Demonſtratio.



ex 16. primi.

FIat A D ſeſquialtera C D: iungaturque B D: arcus A B duplus eſt arcus B C, quia C B latus hexagoni eſt; igitur & angulus B C A, duplus anguli B A C: ſed angulus B C A, quoque duplus eſt anguli a B D A cùm ſit B C D Iſoſceles per conſtructionem; igitur angulus B D A æqualis eſt angulo B A D & A B, B D latera æqualia inter ſe; vnde ſimilia ſunt triangula B D C, B D A: & vt C D id eſt B C ad D B, ita D B hoc eſt A B ad A D, hoc eſt ad A C, C B. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

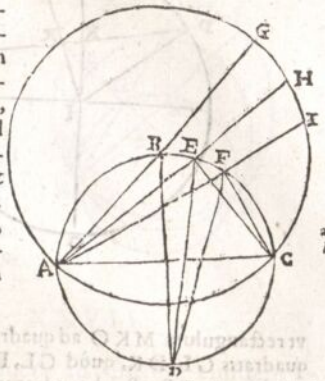
INterſecent ſeſe ad rectos, diametri A C, B D; poſitiſque A E C, A F C, iungantur E D, F D.

Dico D E, ad D F, eandem habere rationem quam aggregatum duarum A E, E C, ad aggregatum A F, F C.

Demon-

Demonſtratio.

CEntro B, interuallo A B deſcribatur circulus A C G, cui productæ A B, A E, A F, occurrant in G, H, I; Quoniam A G, B D, circulorum ſuorum diametri ſunt, anguli A H G, A I G æquales erunt angulis D E B, D F B, ſed & anguli B A E, E A F æquales ſunt angulis B D E, E D F, quòd ijſdem inſiſtant arcubus; ſimilia igitur ſunt triangula G A H, H A I triangulis B D E, E D F; & A H, A I lineę proportionales ipſis E D, F D. quare cùm ſint æquales A H, A I, rectis [a] A E C, A F C, patet aggregatum A E, E C, ad aggregatum A F, F C, eandem obtinere rationem, quam recta D E, ad D F. Quod fuit demonſtrandum.



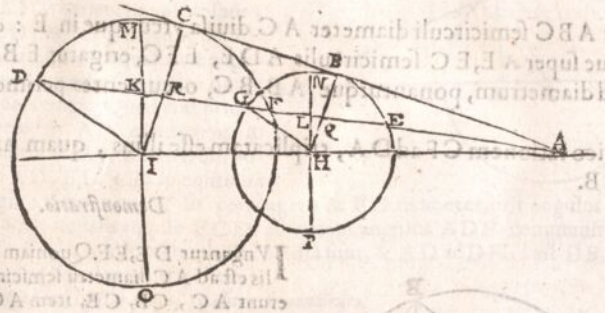
a *Serenus l.2. prop.45*

PROPOSITIO XXIV.

COntingat A B inæquales circulos, conueniens cum recta per vtriuſque centrum acta in A: ex quo ponatur A D occurrens circulis in E, F, G, D.

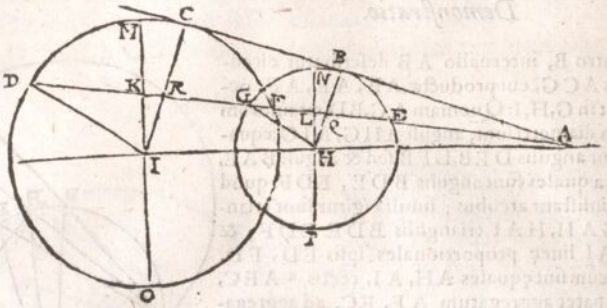
Dico A B ad A C eandem continere rationem, quam obtinet A G ad A D, vel A E ad A F.

Demonſtratio.



AD puncta contactuum ex centris ducantur diametri I C, H B, itemque aliæ binę diametri H N, I M, & ad rectam D A normales, quoniam igitur anguli ad B & C recti ſunt, parallelæ erunt rectæ H B, I C. Ergo vt A B, ad A C, ſic H B ad I C, hoc eſt H Q ad I R. Deinde, quia anguli, I K R, H L Q recti ſunt, & I R K, H Q L anguli (quòd H Q, I R ſint parallelę,) ſunt æquales; triangula I R K, H Q L, erunt ſimilia; ac proinde H L eſt ad I K, vt H Q ad I R, hoc eſt (ſicut iam oſtendi) vt H B ad I C, hoc eſt (quoniam H N, I M diametri, æquantur diametris H B, I C) vt H N ad I M. Quia igitur eſt H L ad I K, vt H N ad I M, erit permutando ac inuertendo N H ad P H, vt M I ad K I, adeoque quadratum N H ad quadratum L H, vt quadratum M I ad quadratum K I. ſed [b] quadratū N H æquatur rectāgulo N L P cū quadrato L H, & quadratū M I, rectangulo M K O cū quadrato K I. ergo rectangulū N L P, cum quadrato L H eſt ad quadratū L H, vt rectangulū M K O cū quadrato K I ad quadratū K I: ergo diuidendo rectangulū N L P eſt ad quadratū L H, vt

b *5. ſecundi.*



vt rectangulum MKO ad quadratũ KI. Atqui rectangula NLP, MKO æquantur quadratis GL, DK, quòd GL, DK sint ad diametros NP, MO normales; ergo quadratum GL est ad quadratum LH vt quadratum DK ad quadratum KI. ergo recta GL est ad rectam LH, vt recta DK ad rectam KI; quoniam igitur anguli quoque GLH, DKI, vtpote recti ex constr. æquales sunt, erunt triangula [a] GLH, DKI similia, adeoque anguli HGL, IDK æquales. ergo GH, DI parallelæ sunt. Ergo vt AG est ad AD, sic AH, ad AI, hoc est quia HB, IC etiam sunt parallelæ, vt AB ad AC. Quod erat primum. simili ratione ostenduntur iunctæ IF, HE æquidistare, adeoque esse vt AH ad AI, id est AB ad AC, sic AE ad AF. Quod erat demonstrandum.

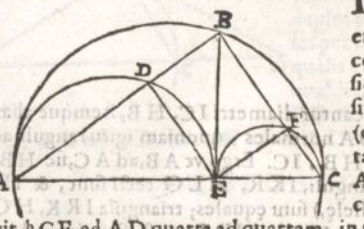
a 6 sexti.

PROPOSITIO XXV.

SIt ABC semicirculi diameter AC diuisa vtcunque in E: descriptisque super AE, EC semicirculis ADE, EFC, erigatur EB normaliter ad diametrum, ponanturque AB, BC, occurrentes perimetris in D & F.

Dico rationem CF ad DA, triplicatam esse illius, quam habet CB, ad AB.

Demonstratio.



IVngantur DE, EF. Quoniam EB normalis est ad AC diametrũ semicirculi ABC, erunt AC, CB, CE, item AC, AB, AE continuè proportionales; sed vt BC ad CE sic EC ad CF (ob EFC, BEC triangula similia,) & vt AB ad AE sic AE ad AD (ob ABE, ADE triangula similia) igitur tam AC, CB, CE, CF, quàm AC, AB, AE, AD sunt continuæ proportionales: vnde cùm vtrique seriei prima sit communis AC, erit [b] CF ad AD quarta ad quartam, in triplicata ratione CB ad AB, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.

b 27. de progressionibus.

PROPOSITIO XXVI.

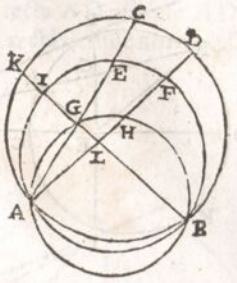
SEcent sese tres circuli in punctis A, B, & ex A quæuis rectæ AC, AD, eductæ perimetris occurrant in E, F, G, H:

Dico GE, EC, rectis HF, FD, esse proportionales.

Demon-

Demonſtratio.

AGatur recta BK per G, occurrens AD in L & perimetris in I & K, cùm rectangula ALH, GLB, [a] æqualia ſint; vti & rectangula ILB, ALF; & KLB, ALD; erunt rationes [b] laterum reciprocæ: hoc eſt, erit AL ad LB, vt GL ad HL, & AL ad LB, vt IL ad LF, vel KL ad LD: quare etiam vt GL ad LH, [c] ita IG ad HF, & LK ad LD, ſiue IK ad FD. rurſum cùm ſit vt AG ad GB, ita IG ad EG vel KG ad GC (ob AGE, IGB, item KGB, AGC rectangulorum æqualitatem) erit IG ad GE, vt KI ad EC. quare ex æquo EC ad FD vt GE ad HF. Quod fuit demonſtrandum.



a 35. tertij.
b 14. ſexti.
c 19. quinti.

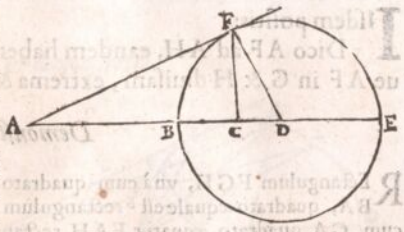
PROPOSITIO XXVII.

EPuncto A extra circulum poſito, ducta ad centrum eiuſdem linea AD diuiſa ſit in tres continuò proportionales. quarum media ſit ſemidiameter BD, tertia CD: erectaque ex C perpendiculari CF, iungantur AF.

Dico AF contingentem eſſe & contra.

Demonſtratio.

POnatur DF. Quoniam DC, DB id eſt DF, DA, circum angulum communem ADF proportionales ſunt, erunt FCD, AFD triangula ſimilia: vnde angulus AFD æqualis eſt angulo FCD per hypotheſim recto: quare AF circulũ cõtingit. Quod erat primũ.



Iam verò ſit AF contingens & FC normaliter ad AD diametrum poſita. Dico AD, BD, CD in continua eſſe analogia: cùm enim AF ſit contingens & FD diameter, erit angulus AFD rectus adeoque æqualis angulo FCD, eſt autem angulus ADF communis triangulis AFD, FCD, igitur triangula illa ſimilia ſunt, & AD ad DF, id eſt DB, vt DF ad DC. Quod erat demonſtrandum.

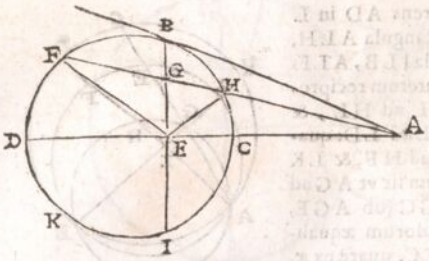
Eſt hæc Apollonij l. prim. propoſ. 35. aliter demonſtrata.

PROPOSITIO XXVIII.

COntingat AB linea circulum BCD: ductaque AD per centrum ponatur ad illam orthogonalis BE, quam in G ſecet quædam AF, occurrens circulo in H, F:

Dico quadratum AB, æquari rectangulo FGH, vnà cum quadrato GA.

Demonſtratio.



ESt enim quadratũ AB æquale quadratis BE, EA, hoc eſt rectangulo BGI, vnà cũ quadratis GE, EA, vt ex elementis patet: eſt autem quadratum GA, æquale duobus GE, EA; ergo AB quadratum æquatur BGI hoc eſt GFH rectangulo vnà cum quadrato GA: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

ILſdem poſitis ſi iungantur HE, FE;
Dico lineas tres HE, BE, FE, in continua eſſe analogia:

Demonſtratio.

SI enim HE intelligatur produci in K, erit EK æqualis ipſi EF, vt ex elementis educitur, vnde & HEF rectangulum, æquale eſt rectangulo BEI, id eſt quadrato BE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXX.

ILſdem poſitis:
Dico AF ad AH, eandem habere rationem quam FG ad GH, ſiue AF in G & H diuiſam, extrema & media ratione proportionali.

Demonſtratio.

a 28. *huius.* b 35. *tertij.* c 2. *ſecundi.* d 1. *ſecundi.*

REctangulum FGH, vnà cum quadrato GA, æquatur BA [a] quadrato, ſed BA, quadrato æquale eſt [b] rectangulum FAH, igitur FGH rectangulum vnà cum GA quadrato æquatur FAH rectangulo: quadratum autem AG, æquale eſt [c] rectangulis AGH, GAH; rectangula igitur FGH, AGH, GAH, æquantur FAH rectangulo: Rectangulo autem FAH, æqualia quoque ſunt [d] rectangula FGHA, GAH. ablato igitur communi rectangulo GAH, manet FGHA rectangulum, rectangulis AGH, FGH, id eſt rectangulo FAGH æquale. vnde vt FA, ad HA, ſic FG ad GH. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

HAec propoſitio proponitur à Pappo libro ſeptimo propoſitione 154. ſed quia ſoli caſui videtur applicata quo recta AD, per centrum ducta eſt circuli BDC. adeoq; & videatur caſum rectæ AF excludere, placuit oſtendere vniuerſalem prorſus eſſe: Quod ipſum præſtat Apollonius lib. 3. propoſitione 37. ſed diuerſo à præſenti diſcurſu.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [243] - 186
PUBLIC DOMAIN

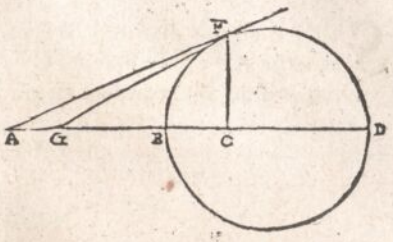
PROPOSITIO XXXI.

EX A ducta sit per centrum circuli B D F recta A D, sitque A D ad A B ratio eadem, cum ratione D C, ad C B: erectâ deinde normali C F, iungatur A F.

Dico A F contingere circulum.

Demonstratio.

SI enim non contingat, ponatur per F contingens F G occurrens A D in G; erit ergo per præcedentem D G ad G B, vt D C ad C B; sed ex hypothesi vt est D C ad C B, ita est D A ad A B, Igitur vt D G ad G B sic D A ad A B, & diuidendo vt D B ad B G, sic D B ad D A: quod fieri non potest; cùm puncta A & G supponantur diuersa: quare F G non est tangens: sed A F. Quod erat demonstrandum.

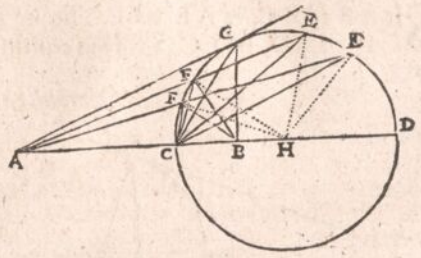


PROPOSITIO XXXII.

SIt A B vtcunque diuisa in C, & ex A ducta quæuis A E, exhibens angulum E A B recto minorem: Oporteat in linea A E, puncta assignare E & F, à quibus ad C & B rectæ eductæ, angulos A F B, A E B bifariam secent.

Constructio & demonstratio.

PRoducta A B in D, fiat vt A C ad C B, ita A D ad D B: & super C D diametro descriptus sit circulus C F D: cuius centrum H: secabit autem ille, vel continget rectam A D vel neutrum præstabit: Secet igitur primò A E lineam in F & E punctis; Dico illa esse, quę desiderantur: erecta enim B G, perpendiculariter ad diametrum C D, iungantur A G, F C, F B, F H: C E, B E, H E. quoniam igitur vt A C ad C B, ita est A D ad D B, & normalis sit B G, diametro C D: erit A G recta contingens [a] circulum. vnde & A H, C H, [b] B H, continuæ sunt proportionales. est autem F H, vel E H, mediæ C H, æqualis; ergo [c] anguli A F B, A E B, per rectas C F, C E. diuisi sunt bifariam:



[a] 31. huius.
[b] 17. huius.
[c] 11. de progressionibus.

Quod si circulum C G D contingat A G, in G: iungantur puncta G B, G C, G H: quoniam A H, C H, B H, sunt in continuata ratione; & G H linea mediæ C H, æqualis est, [d] erit A G B angulus bifariam diuisus per rectam C G:

[d] Ibid.

Manifestum autem est si A E F recta circulo non occurrit, cessare materiam propositam.

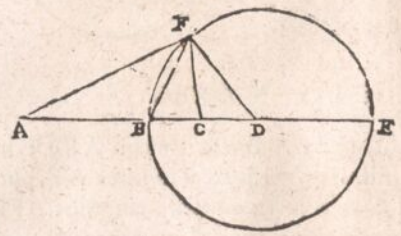
Corollarium.

IN idem recidit, eodemq; modo soluitur problema, quo ijsdē positis petuntur in AE linea exhiberi puncta F & E; ad quę ductis ex C & B lineis; fiant AC, CB proportionales rectę AF, FB, AE, EB: inuenta enim per præcedentem puncta F & E à quibus ad C & B ductæ lineæ, angulos AFB, AEB bifariam secant, problema soluunt: nam angulis AFB, AEB, diuisis bifariam per rectas FC, EC, erunt AF ad FB, & AE ad EB vt AC ad CB.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt BFE circuli diameter BE producta vtcunque in A: ex qua secans ponatur AF: & ex F, recta CF, vt AF sit ad FC, sicut AB ad BC. Dico AB ad BC eandem rationem obtinere quam AE ad EC.

Demonstratio.



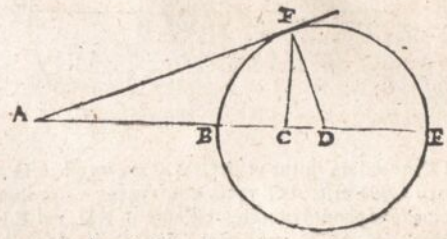
a 3. *sexti.*
b 11. *de progressionibus.*
c 1. *de progressionibus.*
d 5. *lib. de lineis.*

IVngantur DF, BF: cùm igitur sit AF ad FC vt AB ad BC, erunt anguli AFB, BFC æquales; Rursum cùm DF, æqualis sit DB, erunt [a] AD, BD, CD in continua analogia. vnde AB est ad BC, vt [b] [c] AD ad BD. & cùm DE recta sit æqualis DB, erit vt [d] AB ad BC ita AE ad EC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

SIt AB ad BC, vt AE ad EC sitque BE diuisa bifariam in D. Dico AD, BD, CD fore in continua analogia.

Demonstratio.



e 31. *huius.*
f 27. *huius.*

DEscribatur circulus centro D, interuallo BD, & erigatur CF normaliter ad AE: occurrens circulo in F. ducanturque DF, AF: cùm igitur sit AB ad BC, vt AE ad EC, erit linea [e] AF contingens circulum, vnde AD, BD, CD [f] lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrādum.

Inuenies hanc in libro de lineis propositione quarta vel quinta aliter demonstratam.

PROPOSITIO XXXV.

SIt AB recta, per centrum circuli CFD ducta; fiat autem vt AC ad AD, ita CB ad BD, & ducta AF secante circulum in F: iungantur BF, CF:

Dico AC, CB, & AF, FB, proportionales esse lineas.

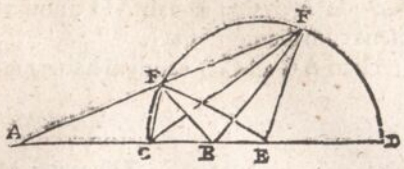
Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [245] - 188
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

EX E centro ponatur EF. Quoniam ponitur vt AD ad AC; ſic DB ad CB, erunt AE, CE, BE lineæ [a] in continua ratione. Igitur cùm FE ſit æqualis mediæ CE, eſt AC [b] ad BC, vt AF ad FB:

Eſt hæc conuerſa trigeſimæ tertiæ huius.



a 34. huius.

b 11. lib. de progreſſionibus.

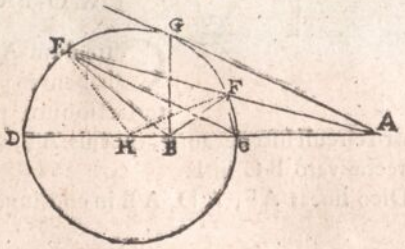
PROPOSITIO XXXVI.

SIt AD linea vtcunque diuiſa in C: deſcriptoq; ſuper CD circulo, ponatur ex A linea AE occurrens circulo in F: ducatur autem FB, vt AF, FB proportionales ſint, lineis AC, CB, & ex B erecta normalis occurrat circulo in G.

Dico AG lineam circulum contingere.

Demonſtratio.

CVm ſit AF ad FB, vt AC ad CB, erit angulus AFB diuiſus [c] bifariam: quia verò linea FH, rectæ CH æqualis eſt, erunt AH, [d] CH, BH in continua ratione: vnde & GA circulum [e] contingit. Quod fuit demonſtrandum.



c 3. Sexti.

d 11. de progreſſionibus.

e 27. huius.

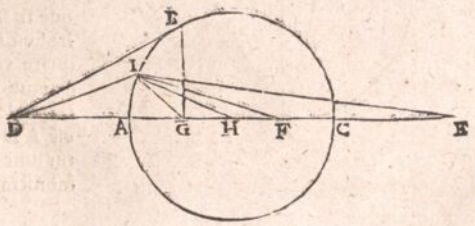
PROPOSITIO XXXVII.

CIrculi ABC diameter AC, vtrimque producta ſit in D & E puncta, æqualiter à centro H diſtantia, poſitâ deinde DB contingente in B, demiſſaque normaliter BG, ad CA diametrum, fiat CF, æqualis AG: ductiſque rectis DI, IE: iungantur IG, IF.

Dico DI, IE, ipſis IG, IF proportionales eſſe.

Demonſtratio.

IVngatur HI. quoniam DB contingit circulum & BG normalis ponitur ad diametrum, erunt [f] DH, AH, GH in continua analogia vti & EH, CH, FH: eſt autem HI, ipſi AH æqualis; igitur vt EC ad CF ita [g] EI ad IF. ſed vt EC ad CF, ita DA ad AG, hoc eſt DI ad IG, quarevt EI ad IF, ita DI ad IG. & permutando inuertendo DI ad IE vt IG ad IF.



f ibid.

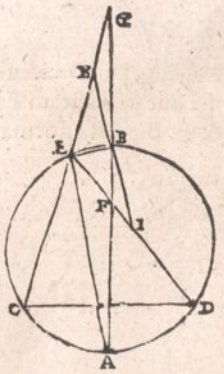
g 11. de progreſſionibus

PROPOSITIO XXXVIII.

CIrculi ABC diametrum AB, secet in F recta quæuis DE, sumptoque AC arcu æquali AD, ponatur ex C per E linea C G conueniens cum diametro in G.

Dico A G ad GB eandem habere rationem quam AF ad FB.

Demonstratio.



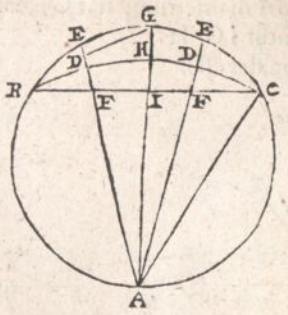
IVngantur AE, EB, & per B ponatur IK æquidistans ipsi AE: quoniam AC, AD arcus sunt æquales, erunt & anguli AEC, AED quoque æquales: quia verò angulus AEB in semicirculo rectus est, adeoque duobus AEC, GEB angulis æqualis, demptis AEC, AED æqualibus, æquales remanent anguli DEB, GEB. sunt autem & anguli EBG, EBI recti, cùm IK æquidistet AE, æqualia igitur sunt latera IB, KB: quare vt AE ad IB est B, id est AF, ad FB, sic AE est ad KB, id est A G ad GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

CIrculum ABC intersecet alter, centrum habens in perimetro ABC: iunctisque intersectionum punctis BC, ponantur ex A centro circuli intersecantis, quæuis AE, occurrentes perimetris in D & E, rectæ verò BC in F.

Dico lineas AF, AD, AE in continua esse analogia.

Demonstratio.



4 10. huius.

POnatur ex A per centrum circuli ABE diameter A G occurrens perimetris in G & H, rectæ verò BC in I, iunganturque GE, AC: cùm igitur AG transeat per centra circulorũ sese intersecantium, erit BC in I [a] normaliter diuisa: vnde angulus AIF æqualis angulo AEG in semicirculo posito: est autem GAE angulus communis vtrique triangulorum AIF, AGE, similia sunt igitur triangula AIF, AGE: quare vt AI, AF, sic AE ad GA: adeoque FAE rectangulum æquale, rectangulo IAG, id est quadrato AC, id est AD quadrato: proportionales igitur sunt AF, AD, AE. Quod erat demonstrandum.

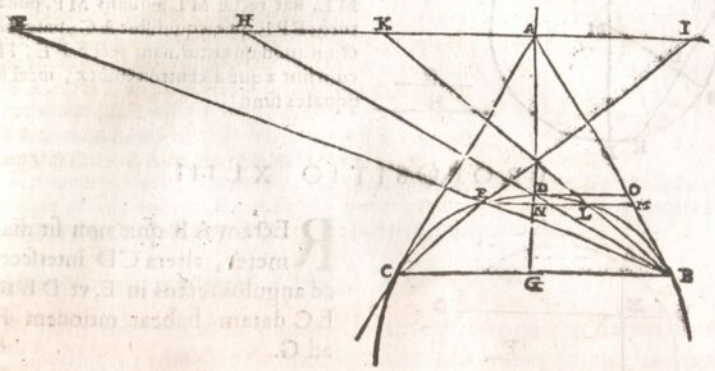
PRO.

PROPOSITIO XL.

SInt AB, AC contingentes circulum BDC. ductæque BC, ponatur æquidistans AE, & ex A diametер AG, occurrens perimetro in D: per quod ex B, agatur BH; dein per quodlibet punctum in perimetro assumptum F ducantur CFI, BFE.

Dico rectangulum IAE quadrato AH æquale esse.

Demonstratio.



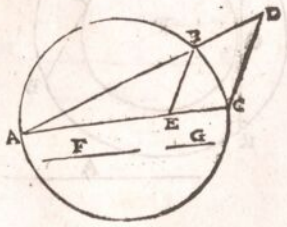
SVmatur arcui CF, æqualis BL, & per L ducta BL occurrat AE in K: LF quoque iuncta secet AB, contingentem in M, & HB in N: denique ponatur DO contingens. Quoniam CF, BL arcus ponuntur æquales, erit LF ipsi BC adeoque & rectæ AH æquidistans: quia verò OD, OB contingentes ex eodem educuntur puncto æquales sunt OB, OD, adeoque & MB, MN: ac proinde quia ML, MB, MF sunt proportionales, erunt & ML, MN, MF quoque continuę: sed vt ML ad MN sic AK ad AH, & vt MN ad MF sic AH est ad AE, proportionales igitur sunt AK, AH, AE: est autem ipsi AK æqualis AI (quia BC illi æquidistans, ab AG diametro diuisa sit bifariam) igitur AI, AH, AE in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

DAto segmento circuli ABC & recta CD, vtcunque ad AC posita; oporteat rectam ducere AD, quam diuidat arcus ABC in B, secundùm datam rationem F ad G.

Constructio & demonstratio.

DIuidatur AC basis segmenti in E, secundùm datam rationem F ad G: erecta deinde EB, quæ æquidistet CD, occurrente perimetro in B, ponatur ABD: Dico factum quod petitur. patet ex elementis.



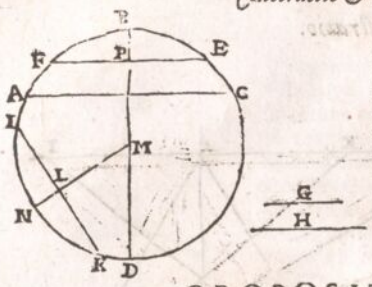
Hic notatu dignum est, quod punctum C, assumi possit non solùm in termino rectæ AC, sed vel intra, vel extra circulum, in quauis parte AC productæ.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

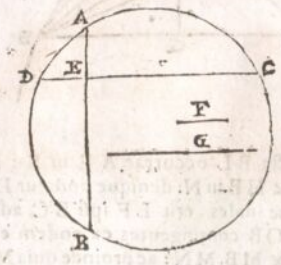
DAto circulo ABC, lineâ AC, quæ non sit maior diametro BD, & ratione G ad H, oporteat alteram FE, circulo inscribere, quæ æquidistet AG, vt quam G, ad H, habet rationem, habeat quoque FE ad AC.

Constructio & demonstratio.



POnatur BD diameter normaliter ad AC, fiatque vt H ad G, ita AC ad IK: quæ in circulo ABC applicata, diuidatur bifariam in puncto L; iunctaque ML, fiat rectæ ML æqualis MP, ponaturq; FPE, quæ æquidistet AC; patet factum quod quæritur. nam rectæ FE, IK cùm sint æquè à centro remotæ, interse æquales sunt.

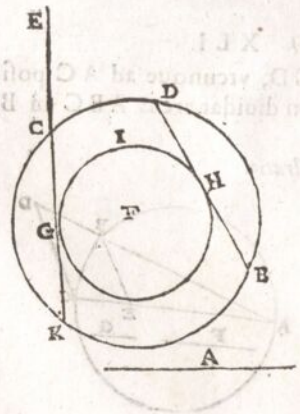
PROPOSITIO XLIII.



REctam AB quæ non sit diameter, altera CD intersecet ad angulos rectos in E, vt DE ad EC datam habeat rationem F, ad G.

Constructionem & demonstrationem huius inuenies in libro nostro de ellipsi: quæ hic non ponendas iudico eò quod ab ellipsi planè sit dependens.

PROPOSITIO XLIV.



APuncto extra circulum dato, lineam circulo immittere quæ datæ sit æqualis, modò ea diametro circuli non sit maior.

Constructio & demonstratio.

APplicetur datæ rectæ A in circulo BCD æqualis BD; dein ex F centro describatur alter circellus, contingens BD, in H: Deinde tum ex E puncto dato ponatur EG, contingens eundem circellum in G; occurrens verò circulo ABDC in K & C. Dico CK, fore quæsitam; cùm enim æqualiter DB, GK, distent à centro F (quia contingunt eundem circulum GIH;) æquales sunt inter se: ac proinde rectæ A, æqualem ponimus GK: quod fuit præstandum.

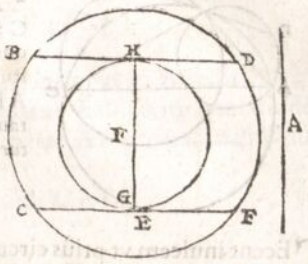
PRO-

PROPOSITIO XLV.

IDem præstare à puncto intra aream circuli posito. oportet autem datâ A hoc casu non minorem esse rectâ illâ, quæ per E posita ad diametrum, per E quoque transeuntem normalis sit.

Demonstratio.

DAtæ A vt priùs, accommodetur in circulo, æqualis BD: centroque F circulus describatur contingens BD in H, transibit ille per punctum datum E, vel infra illud cadet: cùm enim ex hypothesi normalis per E ducta ad diametrum, per E quoque ductam, maior esse non possit datâ lineâ A, id est DB: patet & EF diametrum, quæ rectam per E ductam secat orthogonaliter, maiorem non esse diametro, quæ lineam DB datæ A æqualem orthogonaliter diuideret. vnde circulus radio FH descriptus, *vel transit per E, vel infrà cadet.* vtroque casu agatur per E contingens circulum radio FH descriptum, patet illam æquari rectæ DB, id est datæ A: quare fecimus quod postulabatur.

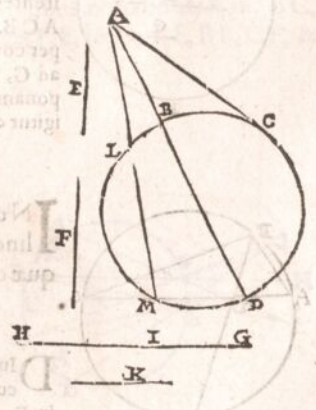


PROPOSITIO XLVI.

ADato extra circulum puncto lineam educere quæ in data ratione à perimetro diuidatur: oportet autem rationem datam, maiorem non esse illa quę reperitur inter partes lineæ quæ à dato puncto per centrum ducitur.

Constructio & demonstratio.

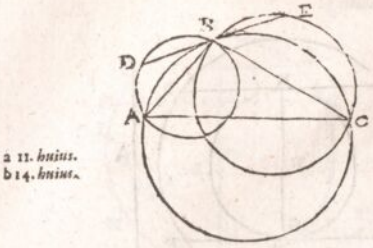
SIt datum punctum A & circulus BCD: data quoque ratio sit E ad F, quæ minor sit rationis AB ad BD, partium diametri: fiat rectis E, F æqualis GH, & GI quidem ipsi E: intentaque K media inter IG, GH, ponatur ex A contingens AC, & vt K ad GI sic AC fiat ad AL: patet ex datis AL minorem esse AC, & non minorem AB, adeoque punctum L in perimetro esse circuli: ducatur igitur per L ex A linea AM occurrens circulo in L & M, dico AM satisfacere petitioni; cùm enim LAM rectangulum æquale sit quadrato AC & IGH rectangulum quadrato K, ponatur autem & LA ad AC vt IG ad K, erunt GI, K, GH lineæ proportionales eiusdem rationis cum AL, AC, AM; vnde vt prima GI ad excessum HI, id est per constructionem vt E ad F, sic AL quarta ad excessum LM. eduximus igitur à dato puncto, &c. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO XLVII.

INterſecent ſeſe inuicem duo circuli A B D, B E C in B. Oporteat per B, rectam D B E ponere, quæ B D rectæ, æqualem B E conſtituat.

Conſtructio & demonſtratio.



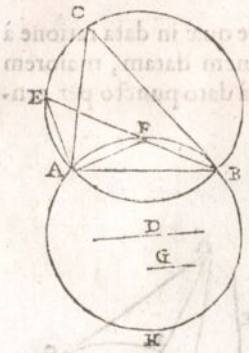
POnantur A B, C B contingentes in B, circulos A B D, B E C; occurrentes perimetris in A & C: dein per A, B, C, circulus deſcribatur A B C, quem in B contingat D E: dico factum quod poſtulatur. oſtenſum eſt enim ſegmenta, A D B, B E C, A B C eſſe inter [a] ſe ſimilia adeoque D E tangentem in B diuiſam [b] bifariam: poſuimus igitur per B rectam, &c. Quod erat faciendum.

a 11. huius.
b 14. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

SEcent inuicem vt priùs circuli duo A B C, A H B in A & B. Oporteat ex B rectam educere B E F, vt E F perimetris intercepta ſit datæ D, æqualis.

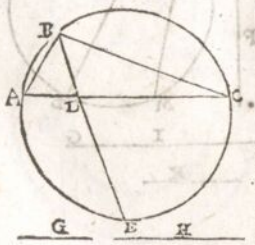
Conſtructio & demonſtratio.



COnſtituatur B C contingens circulum A H B in B. oportet datam lineam D, hac contingente maiorem non eſſe; iunctis A C fiat vt C B, ad A B, ita D, ad G. Dein ipſi G, fiat æqualis A F, & iuncta B F pertingat in E: dico factum eſſe quod petitur. Ducatur enim A E. quoniam angulus A F B tam cum angulo ſegmenti A H B, id eſt A B C angulo (ob C B tangentem) quàm cum A F E, duobus rectis eſt æqualis; dempto communi A F B remanebunt æquales anguli A F E, A B C; ſunt autem & anguli A C B, A E B eidem inſiſtentes arcui æquales: ſimilia igitur ſunt triangula A E F, A C B. vnde A F eſt ad F E vt A B ad B C, id eſt per conſtructionem vt G ad D: & permutando vt A F ad G, ſic E F ad D: quare cùm A F, & G æquales ponantur, erunt & E F, D lineæ æquales. Perfecimus igitur quod poſtulabatur.

PROPOSITIO XLIX.

IN dato ſegmẽto circuli A B C, ex A, & C duas lineas inclinare, ſeſe in perimetro decuſſantes: quæ datam inter ſe rationem contineant G ad H.



Conſtructio & demonſtratio.

DIuiſâ in D rectâ A C, ſegmentum ſubtendente, ſecundùm rationem G, ad H; biſecetur arcus A E C in E, & per D ex E, recta ponatur E D B, iungantur A B, B C: Dico A B, B C eſſe quæſitas. Cùm enim anguli A B E, E B C æqualibus arcubus inſiſtentes æqua-

c 3. ſexti. les ſint, erit [c] A B ad B C vt A D ad D C, id eſt per conſtructionem vt G ad H.

CIRCV-

CIRCVLORVM PARS SECVNDA

De Angulorum & arcuum circularium comparatione.

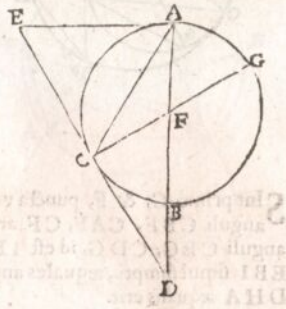
PROPOSITIO L.

CIrculum ABC, cuius diameter AB, contingat in A recta AE, in qua assumpto quouis puncto E, ponatur EC contingens quidem circulum in C, occurrens autem diametro AB protractæ in D, iunganturque CA.

Dico angulum CEA duplum esse anguli CAD.

Demonstratio.

PEr centrum F diameter ponatur CG: Quoniam ED circulum contingit in C, & CG diameter est, erit a angulus GCD rectus, adeoque angulo EAD æqualis. est autem angulus EDA communis triangulis CFD, EDA; igitur CFD angulo, angulus AED æqualis est. sed angulus b CFD duplus est anguli CAD, igitur & angulus AED, eiusdem CAD duplus est. Quod erat demonstrandum.



a 18. tertij.

b 20. tertij.

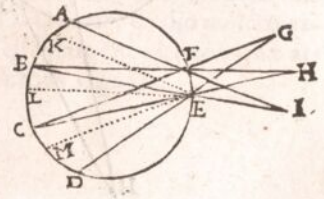
PROPOSITIO LI.

ASsumptis in perimetro ABC, tribus arcubus æqualibus, AB, BC, CD, ducantur per duo quædam puncta F, E, rectæ AF, BF, CF, & BE, CE, DE, occurrantque in G, H, I.

Dico angulos I, H, G, inter se æquales esse.

Demonstratio.

POnantur ex puncto E, rectæ EK, EL, EM, quæ æquidistent lineis AF, BF, CF. erunt itaque anguli KEB, LEC, MED, æquales angulis I, H, G; quia verò arcus AB, BC, CD ponuntur æquales, & AK, BL, CM arcus æquantur arcui EF, adeoque & inter se, reliqui quoque arcus KB, LC, MD, & anguli KEB, LEC, MED illis insistentes æquales sunt: quare & anguli I, H, G, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

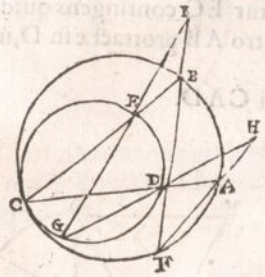


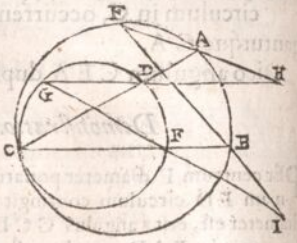
PROPOSITIO LII.

COntingant inuicem interius circuli duo ABC, DEC, in puncto C: ex quo eductis CA, CB, ſumantur puncta G, F, in ſingulorum arcubus ex quibus rectæ ponantur GE, GD, FB, FA.

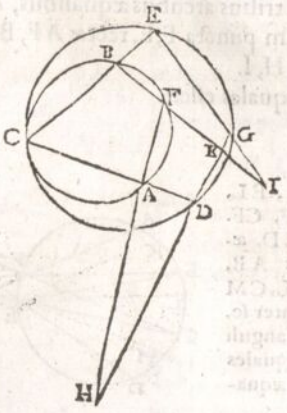
Dico ſi lineæ illæ conueniant, angulos GIF, FHG æquales eſſe.

Demonſtratio.





a 21. tertij. SInt primò G, & F, puncta vel ſupra vel infra angulum ACB poſita: Quoniam anguli CBF, CAF, CF arcui inſiſtentes æquales a ſunt, vti ob eandem cauſam, anguli CEG, CDG, id eſt IEB, HDA ad verticem poſiti, erunt anguli IEB, EBI ſimul ſumpti, æquales angulis HDA, DAH; quare & tertius EIB, tertio DHA æqualis erit.

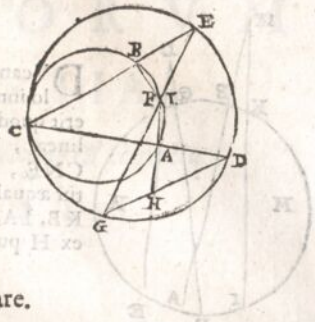


b 22. tertij. Quod ſi vtrumque punctorum F, & G, angulo ACB, contineantur, hac ratione aſſertionẽ d emõſtrabimus: cũ anguli b ACB, AFB, duobus rectis æquales ſint, vti & anguli ECD, EGD: dempto igitur communi angulo ECD, manet AFB, angulo EGD, ac proinde reliquis AFI, reliquo DGI æqualis. ſunt autem ad verticem anguli FKH, GKI æquales, igitur reliqui FIG, FHG æquales quoque ſunt.

Cadat iam alterutrum punctorum, puta F, intra, & aliud extra angulum ACB: dico rurſum angulos H, I eſſe inter ſe æquales, cùm enim angulus FBC tam cum angulo FAC, quàm cum EBF duobus rectis ſit c æqualis, dempto communi

c Ibid.

muni FBC, erit angulus EBI æqualis angulo FAC id est DAH, sunt autem & anguli CEG, CDG eidem insistentes arcui æquales, igitur reliquus I, æquatur reliquo angulo H. Quod erat demonstrandum.



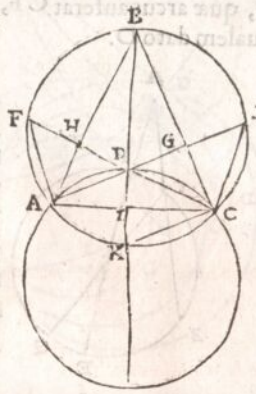
PROPOSITIO LIII.

DVctæ sint normales à terminis trianguli ABC, ad opposita latera.

Dico illas sese in eodem puncto decussare.

Demonstratio.

CIrcumscribatur ABC triangulo circulus, & per AC puncta alter circulus describatur ADC, æqualis circulo ABC. Productaque BI, occurrat perimetris in D, & K, & per D quidem ex A & C, agantur CDF, ADE, iunganturq; AF, CE, CK. erunt itaque anguli AFC, AEC arcui AC insistentes æquales; quia verò angulus EAC, vtrique circulorum æqualium communis est, arcus quoque DC, CE æquales sunt, vti illorũ subtensæ; ob eandem rationem quoque lineæ AF, AD sunt æquales. Rursum cùm angulo DKC, id est KDC (ob circulos æquales) duo anguli interni DCB, DBC, æquales sint, erunt duo arcus FB, KC id est DC æquales duobus arcubus BE, EC; ablatis itaque æqualibus arcubus KC, CE, remanent quoque æquales arcus FB, BE; quare anguli FCB, BCE quoque sunt æquales. sicut & anguli FAB, BAD. vnde cùm AF, AD lineę, adeoque & anguli AFD, ADF æquales sint, erunt & reliqui FHA, DHA quoque inter se æquales, adeoque & recti. eodem modo ostenditur angulos ad G positos, esse rectos. quare patet normales BI, CH, AG, sese in eodem puncto decussare. Quod fuit demonstrandum.



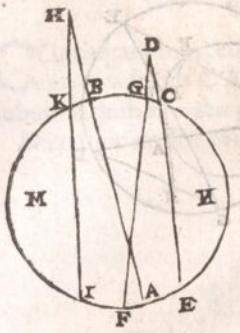
ex 21. tertij.

PROPOSITIO LIV.

IN datum circulum ABC, à dato extra eum puncto D, ductæ sint DCE, DGF auferentes arcus FE, GC. Oportet ex alio puncto extra circulum assignato, H, duas rectas in circulum immittere, quæ arcus duos intercipiant, duobus FE, GC arcubus æquales.

Conſtructio & demonſtratio.

a 44. huius.



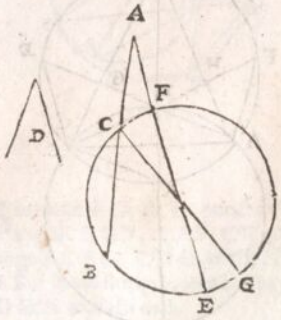
DVcantur ex H lineæ HI, HA, a vt KI, BA, circulo interceptæ, æquales ſint rectis CE, GF; & factum erit quod fuit imperatum. cùm enim AB, FG ſint æquales lineæ, erunt arcus GEF, AIB æquales, vti & arcus CNE, KMI, ob IK, CE æquales lineas. ablatis igitur æqualibus arcubus KMI, CNE, remanebunt arcus KB, IA, arcubus GC, FE æquales. demiſimus igitur ex H puncto lineas, &c. Quod præſtandum fuit.

PROPOSITIO LV.

ADato extra circulum puncto, demiſſa ſit per eundem recta AB; oporteat alteram ducere AE, quæ arcus auferat CF, BE, qui ſimul ſumpti, angulum contineant æqualem dato D.

Conſtructio & demonſtratio.

b Ibid.



FIat angulo D, æqualis BCG: & ex A ponatur AE, quæ rectam FE, æqualem lineæ CG b exhibeat; eritque peractum quod requiritur: cùm enim CG, FE lineæ æquentur, erit arcus FBE, æqualis arcui CBG; vnde ablato communi CB, remanet arcus BG, æqualis duobus BE, CF. quare angulo D, æqualis eſt angulus, qui duobus arcubus CF, BE ſimul ſumptis continetur. perfecimus igitur quod petebatur.

CIR-

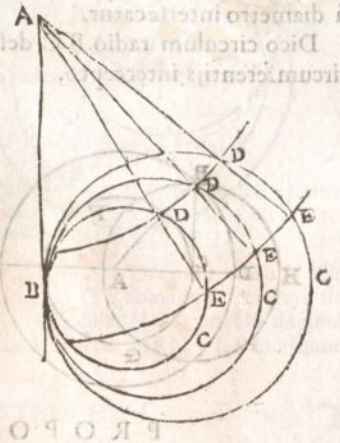
CIRCVLORVM PARS TERTIA

De mutua circulorum interſectione & contactu.

PROPOSITIO LVI.

REcta AB, contingat circulos BDC, ſeſe in eodem B puncto, contingentes, centroque A, quouis interuallo circulus deſcribatur, occurrēs perimetris circulorū ſeſe contingentium in D, ponanturq; rectæ ADE.

Dico DE rectas inter ſe æquales eſſe, ſiue ad eundem eſſe circulum.



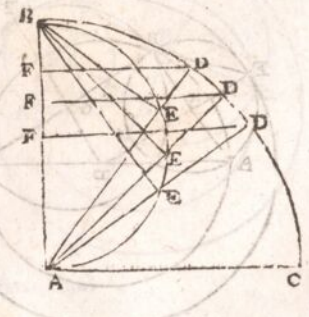
Demonſtratio.

CVm enim AB ſit contingens rectangula DAE, æqualia erunt quadrato AB, adeoque & inter ſe; igitur lineæ DA, DB, DE, in continua ſunt analogia; ſunt autem DA primæ inter ſe æquales & AB media communis, igitur etiam primarum & tertiarum differentiæ DE, æquales erunt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LVII.

SVper AB radio quadrantis circularis ABC, circulus deſcriptus ſit AEB; ductiſque rectis AED, occurrentibus circulo in EE, pet EE ponantur DF normales ad radium AB.

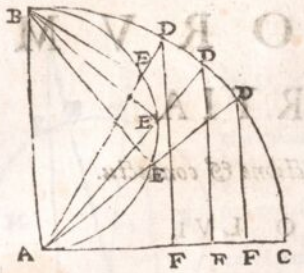
Dico rectis AF, æquales eſſe AE.



Demonſtratio.

JVngantur BE: cùm AD æquales ſint AB, & anguli AEB, AFD recti; ſint autem & anguli FAE communes; erunt BEA triangula æqualia & ſimilia triangulis AFD: vnde reliqua AF, AE latera æqualibus angulis ſubtenſa ſunt æqualia.

Quod



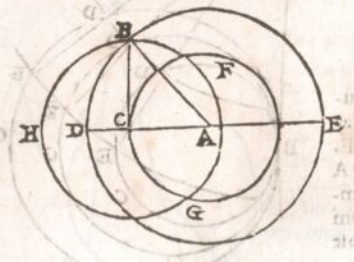
Quod si rectæ DF demittantur normaliter ad basim AC, sic ostendetur propositum: cùm DF sint æquidistantes AB, igitur anguli BAD, ADF, æquales sunt: proindeq; cũ & anguli AEB, AFD, recti sint, similia sunt & æqualia triangula ABE, ADF, & latera æqualibus angulis subtensa. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

PEr duorum circulorum parallelorum BDE, CFG centrum A actâ diametro DCE, ponatur CB contingens minorem à puncto quo à diametro intersecatur.

Dico circulum radio BC descriptum æqualem esse annulo duabus circumferentijs intercepto.

Demonstratio.



a 12. *duodecimi.*

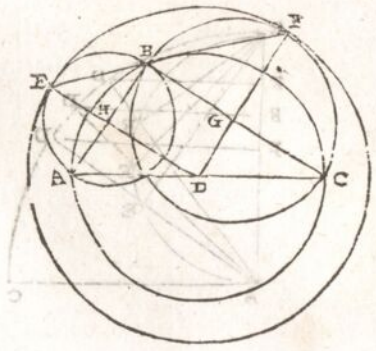
DVcatur AB; vt AB quadratum, ad duo quadrata BC, CA, ita circulus a DBE, ad circulos HBG, CFG; sed AB quadratum æquale est quadratis AC, CB, igitur & circulus DBE æqualis est circulis HBG, CFG, simul sumptis, ablato igitur communi circulo CFG, remanebit annulus perimetris æquidistantium circulorum interceptus, circulo BHG æqualis: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

SVper trianguli ABC, lateribus segmenta circulorum similia constituantur, centroque circuli, qui super basi exstructus est, circulus describatur qui alterutrum circulorum AEB, BFC contingat.

Dico quod & tertium quoque continget.

Demonstratio.



b 11. *tertij.*

c 13. *huius.*

d 15. *huius.*

DVcantur ex D, per H & G cẽtra circulorũ AEB, BFC rectæ DE, DF: & circulus ED radio descriptus contingat circulũ AEB in E; igitur recta DHE per centra D, & H transiens occurret vtrique in b puncto contactus E. quia verò segmenta super trianguli lateribus descripta, similia sunt iuncta c BF in directum erit ipsi EB; vnde cùm DE, d DF lineę sint æquales, erit F punctum commune peripherijs circulorũ EF, BFC; &

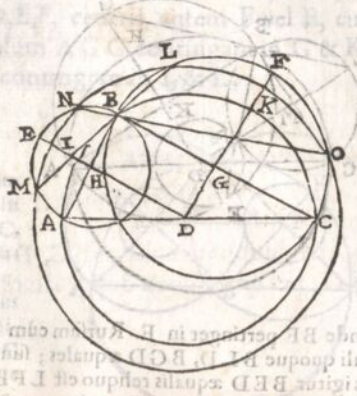
& cum eadem DF centra DG vtriusque coniungat, patet circulum EF, a in F contingere circulum BFC. Quod erat demonstrandum. a Schol. ad 13. tertij.

PROPOSITIO LX.

Ilsdem positis: si circulus centro D descriptus alterutrum circulorum AEB, BFC secuerit:

Dico quod & alterum secabit; & secures ab vtroque auferet similes.

Demonstratio.



b 15. huius.

OCcurrat circulus centro D descriptus, circulo AEB in M & N: cadet igitur infra E & ED lineam secabit in I; quia verò rectæ DE, DF, æquales sunt, patet circulum radio DI descriptum, quoque infra F cadere, adeoque & circulum BFC secare in L & O. Quod erat primum.

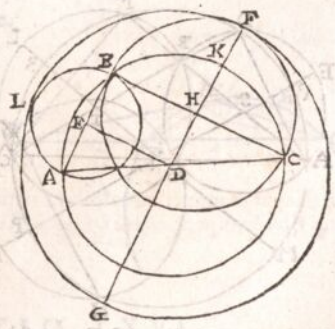
Hoc posito dico secures MEN, LFO ablatas inter se esse similes. ducta MB occurrat circulo LFO in L, ostensum est propositione 15. huius, iunctam DL, æquari rectæ DM, quare cùm punctum M in perimetro est circuli NLO, erit & punctum L in eadem perimetro. eadem ratione ostenderur, iunctam OB communi occurrere intersectioni circulorum MEB, MLO in N, vnde cùm NBM angulo angulus LBO ad verticem insistens, æqualis sit; similes erunt arcus MEN, LFO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXI.

SVper ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ALB, AKC, BFC quos contingat circulus centro D, descriptus, in F & L.

Dico FG diametrum circuli vtrumque contingentis, æqualem esse diametris circulorum ALB, BFC.

Demonstratio.



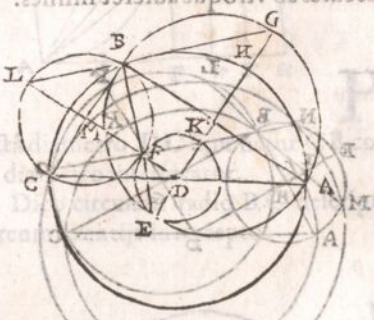
PEr centra D & H ponatur recta FG, iunganturque centra D, E; quoniam segmenta similia super trianguli lateribus descripta, semicirculi sunt, & AB BC à diametris DH, DE in circulo ABC bifariam diuisæ, erunt anguli DHB, DEB recti, vnde AB, DH æquidistant & HE parallelogrãmum, adeoq; BE, HD, item BH, ED lineæ æquales sunt. quare cùm FG dupla sit DF id est dupla duarum FH, HD, id est BH, BE, erit FG æqualis duabus diametris AB, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXII.

ITerum similia segmenta constructa sint super singulis lateribus trianguli ABC centroque D circuli super basi descripti, circulus describatur KFE, qui circulum AGB contingat interius in E.

Dico quod & alterum BLC continget in F.

Demonstratio.



PEr cẽtra circulorum AGB, BLC; rectæ ponantur ex D, DG, DL: & DG quidem producta occurret perimetro circuli AGB in puncto contactus E; DL verò in aliquo puncto F circuli BLC, iungantúrque BF, FE, cùm igitur DL, DG transeant per centra circulorum AGB, BLC, erunt LB, GB ductæ [a] in directum: quia verò LMF diameter est circuli BLC, erit angulus LBF adeoque & GBF rectus, ac proinde BF pertinget in E. Rursum cùm LD, DG lineæ sint æquales, erunt & anguli quoque BLD, BGD æquales; sunt autem anguli ad B ostensi recti, reliquus igitur BED æqualis reliquo est LFB, id est EFD: vnde & æquales lineæ sunt DE, DF & punctum F perimetro circuli KFE commune: & cùm MD, linea per F ducta, centra coniungat D & M, patet circulum KFE [b] in F contingere circulum BLC. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. huius

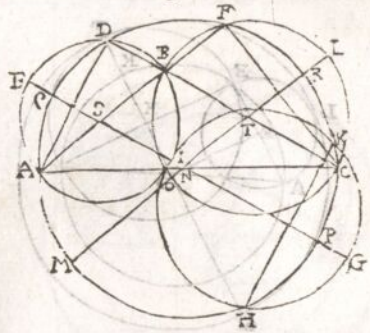
[b] 13. tertij.

PROPOSITIO LXIII.

SVper trianguli lateribus constructa sint segmenta similia AEB, AD, FC, BLC. & ab intersectionum punctis D, F, ad puncta A, C ductis lineis DA, FC, aptetur in circulo KH æqualis FC, & parallela rectæ DA: describatur deinde circulus IKGH æqualis circulo BLCO, & transiens per puncta K, H.

Dico hunc tangere circulum ADI.

Demonstratio.



TRium circulorum AEB, ADFC, BLC centra sint S, N, T. per centra S, N ducatur recta QSINPG, occurrens circulo AEB in I, & circulo KGH in G: per centra verò T, N ponatur recta LRTNO occurrens circulo BLC in O. Quoniam QG iungit centra N, S, normalis [c] est ad AD, ac proinde & ad HK ipsi AD parallelam. centrum igitur circuli KGH est quoque in linea QG. considereturque iam punctum I quatenus est intersectio circuli AEB a rectæ QG. Quoniam NR, est æqualis NP, & RL [d] æqualis PG, erit NL æqualis NG. Est verò per demonstrata 63 huius, etiam ON æqualis IN. ergo OL æqualis est IG, quæ nempe posita est inter punctum G, & punctũ I, in

[c] 10. huius.

[d] patet ex elementis.

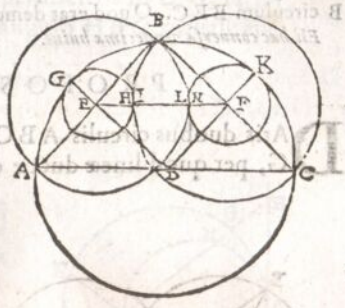
in quo circulus AEB secabat rectam QG. Quare cùm circuli KGH diameter æqualis sit rectæ OL, diametro circuli BLCO, æqualis quoque erit rectæ IG. circulus igitur KGH transit per I. Atqui etiam supra ostendimus centrum eius esse in recta QG transeunte per centrum circuli AEB; ergo circulus KGH tangit circulum AEBC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

SVper ABC trianguli lateribus semicirculi describantur ABL, BIC, AGC, quorum centra sint D, E, F, centris autem F vel E, circuli construantur HG, KN, qui circulum AGC contingant in G & K.

Dico eosdem, quoque reliquos contingere in I, & L.

Demonstratio.



a 2. *Senti.*

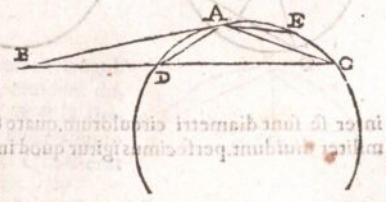
DVcantur FE, DEG, DF. quoniam diametri AB, CB bisectæ sunt in centris E, & F, erit EF parallela AC, ergo vt AB ad EB sic AC ad EF. quare cùm AB dupla sit EB, erit AC dupla quoque EF. Ergo AD dimidia ipsius AC, hoc est GD, æqualis erit EF. similiter quoniam tres diametri AC, AB, BC bisectæ sunt in centris D, E, F patet a ED, BC, & DF, AB esse parallelas; parallelogrammum igitur est EBFD. ergo FB hoc est FI æqualis est DE. Quare cùm tota FB toti GD, & pars FI, parti DE æqualis sit, residuum quoque IE æquale erit residuo GE, hoc est circuli diametro GE, siue EH. quare punctum I, commune est duabus peripherijs GH & BIC siue puncta H & I omnino eadem sunt inter se. Vnde cùm EF per centra circulorum ducta per I punctum transeat, manifestum est in eo contactum fieri. eodem pacto de altero circulo centro F descripto demonstratio procedet.

PROPOSITIO LXV.

IN triangulo ABC, sint in continua analogia BD, BA, BC: & per puncta A, D, C describatur circulus.

Dico eum rectam AB contingere.

Demonstratio.



b *Ex elementis.*

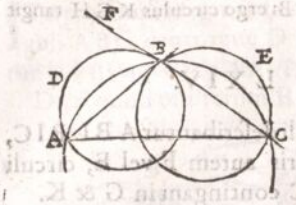
QVoniam ADC, puncta in perimetro sunt circuli, igitur si non contingat recta AB, circulum, occurrat eidem in altero puncto E: igitur rectangulũ ABE, æquale erit rectangulo DBC, hoc est per hypothesim quadrato BA, quod b est absurdum: quare non occurret BA, circulo nisi in A.

PROPOSITIO LXVI.

SI super ABC trianguli lateribus segmenta circulorum similia descripta fuerint,

Dico AB, CB latera trianguli producta contingere in B segmenta ADB, BEC.

Demonſtratio.



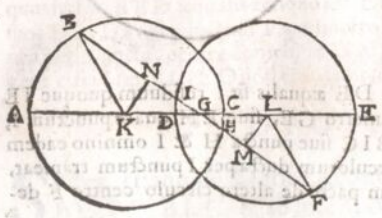
ANgulus ABC tam cum angulo ABF quàm angulo ſegmenti reſidui in eodem circulo duobus rectis æqualis eſt: igitur angulus reſidui ſegmẽti, angulo FBA æqualis eſt: quia verò ADB, ABC ſegmenta ſunt ſimilia adeoque & illorum anguli æquales, erit angulus FBA ſimul cum angulo ſegmenti ADB duobus rectis æqualis: quare angulus ABF, æquatur angulo reſidui arcus circuli ADB: vnde FC eundem contingit in B, vt ex elementis patet. eodem modo oſtenditur AB contingere in B circulum BEC. Quod erat demonſtrandum.

Eſt hæc conuerſa vndecimæ huius.

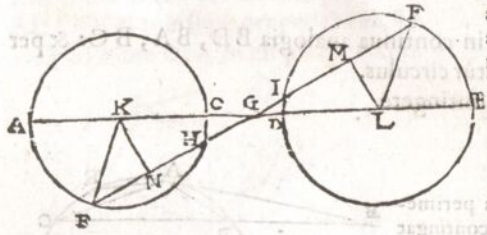
PROPOSITIO LXVII.

DAtis duobus circulis ABC, DEF, oporteat exhibere punctum G, per quod lineæ ductæ diuidant circulos in ſimiles partes.

Conſtructio & demonſtratio.



ACtâ per vtriuſque centra KL rectâ AE, diuidatur in G, vt ratio AG ad GE, ſit eadem cum ratione AC ad DE. Dico punctum G eſſe quod quæritur. ducatur enim quæuis BGF occurrens perimetris in I & H: quoniam AG ad GE, eandem habet rationem quam AC ad DE, ex conſtructione, erit AC ad CG, vt DE ad DG, ac proinde AG ad GK vt EG, ad GL, & GK ad GL vt KA ad LE, id eſt BK ad LF. demiſſis igitur perpendicularibus KN, LM ad FB lineam, erit ſimile triangulum KGN, triangulo GML. quare vt KG ad GL, hoc eſt AK ad EL, id eſt AC ad DE, ita eſt KN, ad LM; igitur BH ad IF, eſt vt AC ad DE, cùm eadem proportione diſtent à centris quæ inter ſe ſunt diametri circulorum, quare ſimilia ſegmenta ſubtendunt & circulos ſimiliter diuidunt. perfecimus igitur quod imperatum fuit.



CIR-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [261] - 204
PUBLIC DOMAIN

CIRCVLORVM PARS QVARTA

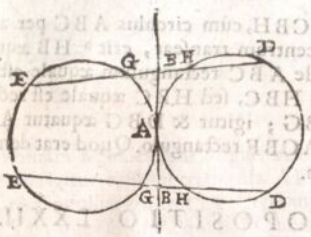
De linearum in circulis potentia.

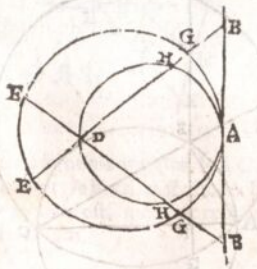
PROPOSITIO LXVIII.

COntingant sese circuli duo in A puncto, per quod acta contingens AB, occurrat cuiuis EBD secanti perimetros in E, G, H, D.

Dico GBE rectangulum, rectangulo HBD æquale esse.

Demonstratio.





PAtet, cùm vtrumque quadrato contingentis AB, æquale sit.

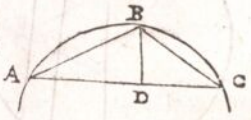
PROPOSITIO LXIX.

SEgmento circuli ABC inscriptum sit triangulum ABC, à cuius vertice B, normalis demittatur BD.

Dico parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquari rectangulo AC,BD.

Demonstratio.

PArallelogrammum ABC, duplum est a trianguli ABC; sed & AC, BD rectangulum, eiusdem duplum est, cùm basim habeat eandem AC, & BD altitudinem; igitur parallelogrammum ABC in angulo ABC, æquale est rectangulo ACBD. Quod erat demonstrandum.



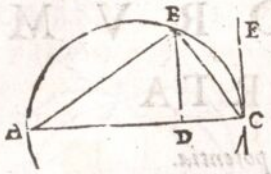
a Per elementa.

PROPOSITIO LXX.

SI rursum segmento ABC inscriptum fuerit triangulum, à cuius vertice demissa BD, æquidistet contingenti CE.

Dico rectangulum ABC rectangulo ACBD æquale esse.

Demonſtratio.



CVm enim EC, BD æquidiſtent, erunt anguli DBC, BCE. id eſt anguli DBC, BAC ob EC tangentem æquales; ſimilia igitur ſunt triangula DBC, ABC. vnde vt AC ad AB, ita [a] BC eſt ad BD: patet igitur ABBC, & ACBD. rectangula eſſe æqualia.

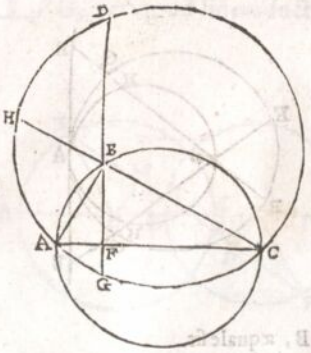
a 17. 8exti.

PROPOSITIO LXXI.

SEcent inuicem circuli duo quorum vnus per centrum alterius tranſeat ſic vt ducta AC quæ puncta ſectionum coniungit, ſit diameter circuli tranſeuntis per centrum alterius; ad quam erigatur per B, in perimetro ABC aſſumptum, normalis DBG, occurrens ADC perimetro in D & G, & AC in F:

Dico rectangulo DBG æquari ACBF rectangulum.

Demonſtratio.



b Seremus lib. 2. prop. 45.

c 69. huius.

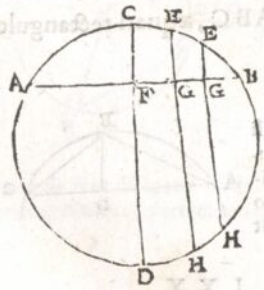
DVcâ CBH, cùm circulus ABC per alterius centrum tranſeat, erit [b] HB æqualis AB. vnde ABC rectangulum æquale eſt rectangulo HBC, ſed HBC æquale eſt rectangulo DBG; igitur & DBG æquatur ABC id eſt [c] ACBF rectangulo. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXII.

DIametrum circuli ABC, ſecet AB, normaliter in F, ponanturq; quæuis EH, occurrentes AB in G.

Dico EGH rectangulum vnà cum FG quadrato, æquari EGH rectangulo vnà cum quadrato FG.

Demonſtratio.



d 5. ſecundi.

c 35. tertij.

QVoniam AB normalis eſt ad diametrum CD, erit bifariam diuiſa in F; & quia non bifariam diuiſa eſt in G, erit AGB, rectangulum vnà cum quadrato FG, [d] æquale quadrato AF. ſed AGB rectangulo æquale eſt EGH [e] rectangulum; addito igitur FG quadrato, erit EGH rectangulum vnà cum quadrato FG, quadrato AF æquale. igitur & EGH rectangulum, vnà cum quadrato FG, æquale eſt EGH rectangulo vnà cum quadrato FG. Quod erat demonſtrandum.

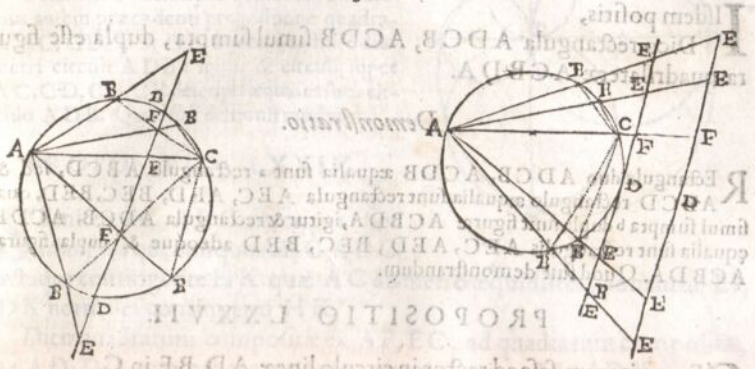
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

SIt ABC segmentum circuli, cuius AC subtensa, secetur rectâ ED occurrente AC in F vt angulus AFE sit æqualis angulo segmenti ABC: ductæ deinde ex A quotuis rectæ AE occurrant perimetro in B: & ED lineæ in E.

Dico rectangula EAB, inter se esse æqualia.

Demonstratio.



QVoniam æquales sunt anguli AFE, ABC, & communis angulus BAC, similia igitur existunt triangula AFE, ABC, vnde vt AF ad AE, sic AB ad AC, rectangulum igitur CAF rectangulo EAB [a] æquale est. quare & rectangula EAB, inter se sunt æqualia. Quod fuit demonstrandum.

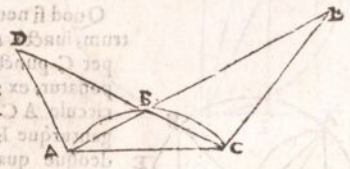
[a] 17. *sexti.*

PROPOSITIO LXXIV.

SEgmento ABC inscripti trianguli ABC latera producta exhibeant triangula ADC, CAE habentia angulos DAC, ACE singulos angulo segmenti æquales.

Dico quadrato AC, æquari rectangulum ADCE.

Demonstratio.



QVoniam angulus ABC æqualis est angulo DAC, & ACB communis triangulis ABC, ADC, similia erunt triangula ABC, ADC. eodem modo similia ostendenter triangula ABC, AEC: igitur & ADC triangulum simile est triangulo AEC, & DA, AC, CE latera proportionalia: vnde [b] AC quadrato æquale est rectangulum DACE. Quod fuit demonstrandum.

[b] *Ibid.*

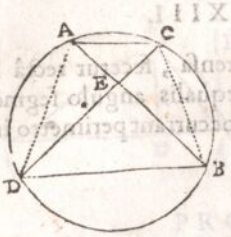
PROPOSITIO LXXV.

OCcurrant inuicem ad rectos in circulo ABC lineæ AB, CD, in E. iunctisque extremis, exsurgat quadrilaterum ACBD.

Dico quadratis AC, BD, æquari AD, CB, quadrata.

Demon-

Demonſtratio.



CVm enim anguli ad E recti ſint, erunt quadrata AD, CB, æqualia quadratis AE, ED, CE, EB, ſed iiſdem æqualia quoque ſunt quadrata AC, DB; igitur quadratis AC, BD, æqualia ſunt AD, CB quadrata.

PROPOSITIO LXXVI.

IIſdem poſitis,
Dico rectangula ADCB, ACDB ſimul ſumpta, dupla eſſe figuræ quadrilateræ ACBDA.

Demonſtratio.

a *Lud. à Ceul. & alij.*

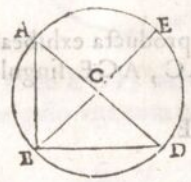
b *Patet ex elementis.*

REctangula duo ADCB, ACDB æqualia ſunt a rectangulo ABCD, ſed & ABCD rectangulo æqualia ſunt rectangula AEC, AED, BEC, BED, quæ ſimul ſumpta b dupla ſunt figuræ ACBDA, igitur & rectangula ADCB, ACDB æqualia ſunt rectangulis AEC, AED, BEC, BED adeoque & dupla figuræ ACBDA. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVII.

SEcent iterum ſeſe ad rectos in circulo lineæ AD, BE in C.
Dico quatuor quadrata partium AC, CD, CB, CE, ſimul ſumpta, quadrato diametri eſſe æqualia.

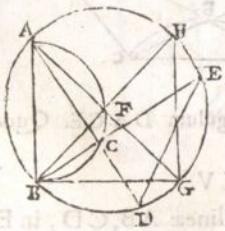
Demonſtratio.



TRanſeat primò altera linearum, putà AD per centrũ circuli, iunganturque AB, BD. cùm igitur anguli, ACB, DCB recti ſint, erunt quadrata AB, BD, æqualia quadratis AC, CB, & CB, CD ſiue CE, CD, (quia BE in C ab AD diametro diuiſa eſt bifariam) ſed quadratum AD, quadratis AB, BD quoque æquale eſt, cùm ABD ſit angulus ſemicirculi adeoque rectus, igitur etiam quadratum AD, æquale eſt quatuor quadratis AC, CB, & CB, hoc eſt CE, CD: quod fuit primò demonſtrandum.

Quod ſi neutra linearum AD, BE tranſeat per centrum, iunctâ AB, deſcribatur ſemicirculus ACB, qui per C punctum tranſibit, cùm angulus ACB rectus ponatur. ex A, verò diameter ducatur AG occurrens circulo ACB in F, per quod collocetur BFH: iunganturque HG, ED, erunt igitur HG, ED lineæ adeoque quadrata inter c ſe æqualia: quia verò quadrata AB, HG, ſunt æqualia quadratis HF, FG, AF, FB, id eſt quadrato diametri AG vt priùs oſtenſum eſt; igitur & quadrata ED, AB, quadrato diametri AG æqualia ſunt; ſed quadrata ED, AB, æqualia ſunt quadratis EC, CD, & AC, CB, igitur & quadrata EC, CD, AC, CB, quadrato diametri ſunt æqualia. Quod fuit demonſtrandum.

c 18. *huius.*

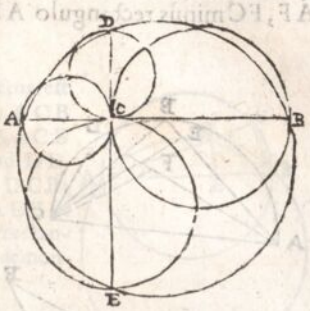


PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

SEcent sese denuo in C ad rectos duæ quæuis AB, DE, in circulo ABD, & super partibus, circuli describantur.
Dico illos simul sumptos æquales esse circulo ABD.

Demonstratio.



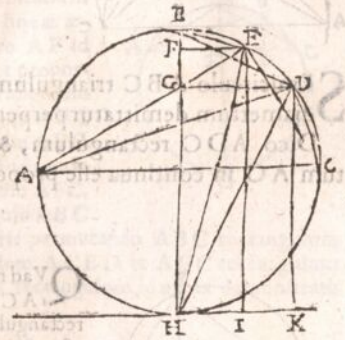
CIrculi inter se eam rationem habent quam à diametris a descripta quadrata: ostendimus autem præcedenti propositione quadrata AC, CD, CB, CE, æquari quadrato diametri circuli ADB; igitur & circuli super AC, CD, CB, CE, descripti æquales sunt circulo ADB. Quod fuit demonstrandum.

a 12. *duodecimi.*

PROPOSITIO LXXIX.

SEmicirculo ABC inscripta sint triangula quęcunque AEC, ADC, actaque contingente HK quæ AC diametro æquidistet, ponantur EI, DK normales contingenti HK.
Dico quadratum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ, ex AD, DC eam habere rationem quam continet EI ad DK;

Demonstratio.



POsitâ HB diametro ducantur ad illam normaliter EF, DG, iunganturque EH, DH, EB, DB, quoniam FE normaliter insistit rectę BH, erunt FH, HE, HB, lineæ in cõtinua analogia, vt ex elementis patet. vnde rectangulo FHB, æquatur HE quadratum; eademque de causa quadrato HD, rectangulum GHB; quare vt FH ad GH, hoc est EI, ad DK, sic EH quadratum ad DH quadratum: Rursum cùm sit vt HE ad HD, ita composita b ex AE, EC, ad compositam ex AD, DC, erit vt quadratum HE, ad HD quadratum, sic quadratum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ ex AD, DC; igitur vt EI ad DK, ita quadratum compositæ ex AE, EC, ad quadratum compositæ ex AD, DC. Quod demonstrandum fuit.

b 24. *huius.*

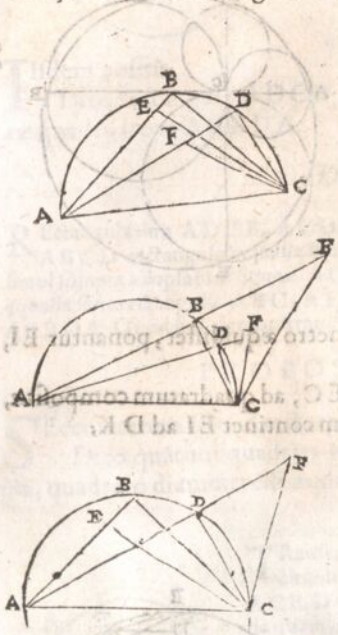
PROPOSITIO LXXX.

SEmicirculo ABC inscripta sint triangula duo ABC, ADC; atque ex C, ad opposita latera rectę ducantur CE, CF, vtcunque.
Dico si intra aream circuli occurrant rectis AB, AD, in E, F, quadra-

ta AE, EC, vnà cum rectangulo AEB bis sumpto, æquari quadratis AF, FC vnà cum rectangulo AFD bis sumpto:

Si verò extra circulum occurrant, dico quadrata AE, EC, minùs AEB rectangulo bis sumpto, æquari quadratis AF, FC minùs AFD bis sumpto;

Quod si autem altera intra aream circuli cadat, altera extra, dico quadrata AE, EC cum AEB rectangulo bis sumpto, æquari quadratis AF, FC minùs rectangulo AFD bis sumpto.



Demonstratio.

SI enim cadat CE, CF, intra aream semicirculi, constituent angulos obtusos, AEC, AFC, cùm ABC, ADC recti sint, vnde per elementa quadrata AE, EC, cum rectangulo AEB, bis sumpto, quadrato AC æqualia erunt; sed eidem AC quadrato æqualia sunt AF, FC, quadrata vnà cum rectangulo AFD bis sumpto; igitur quadrata AE, EC cum AEB rectangulo bis sumpto æqualia sunt quadratis AF, FC vnà cum rectangulo AFC bis sumpto. Quod erat primum.

Si verò CE, CF extra cadant; patet angulos AEC, AFC esse acutos: quare tam quadrata AE, EC minùs rectangulo AEB bis sumpto, æquabuntur quadrato AC, quàm quadrata AF, FC minùs AED rectangulo bis sumpto: vnde veritas secundæ partis quoque manifesta est.

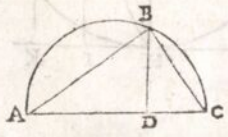
Partis tertiæ demonstratio ex ante dictis clarè patet; igitur, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

SEmicirculo ABC triangulum inscribatur ABC, à cuius vertice ad diametrum demittatur perpendicularis BD.

Dico ADC rectangulum, & rectangulum ABC, denique quadratum AC in continua esse proportione.

Demonstratio.



a 70. *huius.*
b 1. *sexti.*
c 35. *tertij.*

QVadratum AC est ad rectangulum ABC, hoc est a ACBD rectangulum vt b AC ad DB: sed & rectangulum ACBD est ad quadratum BD c hoc est rectangulum ADC, vt AC ad BD, igitur continuant eandem rationem AC quadratum, rectangulum ABC, vnà cum rectangulo ADC. Quod fuit demonstrandum.

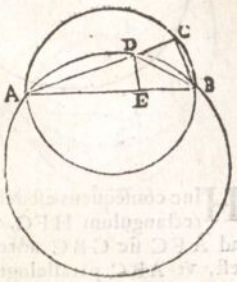
PRO-

PROPOSITIO LXXXII.

PEr extrema diametri AB circuli ABC, circulus describatur ADB, positâque AC, quæ occurrat ADB perimetro in D, demittatur normaliter DE ad diametrum AB, iunganturque DB, CB.

Dico rectangulum ex AB, DE, ad rectangulum ADB, eam rationem habere quæ est inter rectas CB, DB.

Demonstratio.



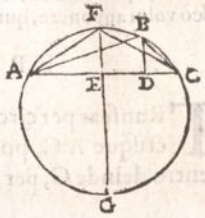
QVoniam angulus ACB in semicirculo rectus est adeoque æqualis angulo AED; & AED, ACB triangulis communis angulus DAE, erunt ADE, ACB triangula similia. vnde vt AB ad CB sic AD ad DE, & ABDE rectangulum æquale rectangulo ADCB: sed rectangulum ADCB est ad rectangulum ADB vt CB ad DB, *igitur* & rectangulum ABDE ad rectangulum ADB est vt CB ad DE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

OCcurrat circuli ABC diametro FG in E orthogona AC, quam in D secet normaliter BD, iunganturque AB, BC.

Dico rectangulum ABC ad rectangulum ACBD rationem obtinere eandem, quam FG diameter ad AC lineam.

Demonstratio.



IVngantur AFC. quoniam AC linea in E bifariam adeoque ad rectos est diuisa, erunt AF, FC lineæ æquales, & AFC rectangulum æquale quadrato AF id est [a] rectangulo EFG: quia FE, FA, FG sunt proportionales. Sed EFG rectangulum est ad rectangulum ACFE vt FG ad AC; igitur & rectangulum AFC ad ACFE rectangulum id est [b] parallelogrãmum AFC, vt FG ad AC; quia verò est AFC rectangulũ ad rectãgulũ ABC vt AFC parallelogrãmum in angulo AFC, ad parallelogrammum ABC, in eodem angulo ABC (cũ ex ijsdem rationes habeant compositas) erit permutando ABC rectangulum ad parallelogrãmum ABC, id est ad rectangulum ACBD vt AFC rectangulum ad parallelogrammũ AFC id est ad [c] ACFE rectangulum, id est ex demonstratis vt FG ad AC. Quod erat demonstrandum,

[a] 47. primi & 5. secundi.

[b] 69. huius

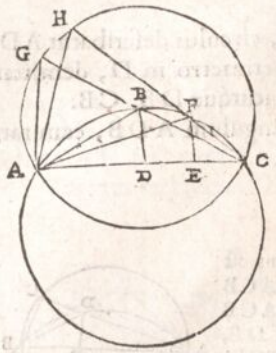
[c] Ibid.

PROPOSITIO LXXXIV.

SEcent se vtcunque circuli ABC, ADC in punctis AC, iunctaque AC ponantur CEH, CBG, occurrentes perimetris circulorum in B, E, G, H. iunganturque AB, AE.

Dico rectangulum ABC, ad AEC rectangulum eam rationem obtinere, quam GBC, ad rectangulum HEC.

Demonſtratio.



IVngantur AG, AH: quoniam anguli ABC, AFC eiuſdem ſegmenti æquales ſunt, erunt & reliqui ABG, AFH quoque inter ſe æquales: vnde cùm & anguli AGC, AHC eidē inſiſtentes arcui ſint æquales, erūt AGB, AHF triangula ſimilia: & AF ad AH, vt AB ad AG. eſt autem ratio rectanguli ABC, ad AFC rectangulum compoſita ex ratione AB ad AF, hoc eſt GB ad HF, & ex BC ad GC, & ex ijſdem quoque compoſita eſt ratio rectanguli GBC ad HFC; igitur vt rectangulum ABC ad AFC, ſic GBC rectangulum ad HFC. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium primum.

HInc conſequens eſt demiſſis normalibus BD, FE eſſe GBC, rectangulum ad rectangulum HFC, vt eſt recta BD, ad EF. eſt enim vt ABC rectangulum ad AFC ſic GBC ad rectangulum HFC; ſed ABC ad AFC, rectangulum eſt, vt ABC parallelogrammum in angulo ABC, ad parallelogrammum, AFC in angulo AFC (quia ex ijſdem rationem habent compoſitam) hoc eſt vt rectangulum ACBD ad [a] rectangulum ACFE; igitur vt rectangulum ACBD, eſt ad rectangulum ſuper ACFE, ſic GBC rectangulum ad rectangulum HFC: quare vt BD ad EF, ſic GBC rectangulum ad rectangulum HFC. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *69. huius.*

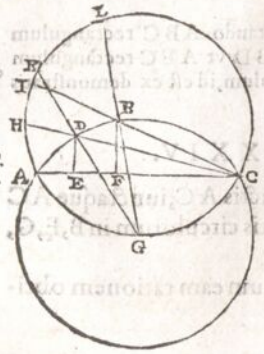
Corollarium ſecundum.

EAdem manente figura, patet AG eſſe ad AH vt AB ad AF, ſiue vt GB ad HF, quia AGB, AHF triangula oſtenſa ſunt inter ſe ſimilia: quod ſpeciatim ideò volui apponere, quia aliquoties poſteà aſſumendum eſt.

PROPOSITIO LXXXV.

TRanſeat per circuli ABC centrum, perimeter circuli AGC, iunctiſque AC, ponantur quæcunque BF, DE normales ad AC: ex centro deinde G, per B & D, agantur rectæ GBL, GDK.

Dico DE, BF lineis KD, LB, eſſe proportionales.



Demonſtratio.

POnantur per D & B rectæ CDH, CBI. vt DE, ad BF, ſic HDC [b] rectangulum ad IBC rectangulum, hoc eſt KDG ad LBG: ſed eſt quoque vt KD ad LB, ſic KDG rectangulum ad rectangulum LBG, cùm DG, BG lineæ ſint æquales; igitur vt DE ad BF; ſic KD ad LB. Quod fuit demonſtrandum.

[b] *Per coroll. præcedentis.*

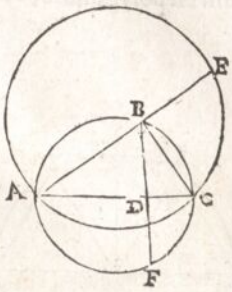
PRO.

PROPOSITIO LXXXVI.

OCcurrat iterum circulus A B C, cuius diameter A C, centro circuli A E C, ductaque ex A recta A B E, ponatur normalis B D F ad A C.

Dico lineas A C, A E, & compositam ex A C & B F, in continua esse analogia.

Demonstratio.



QVadratum A E, æquatur quadratis A B, B E, & A B E [a] rectangulo bis sumpto: est autem quadratum B E æquale B C [b] quadrato, & A B E rectangulum bis sumptum æquale A B C rectangulo (hoc est [c] A C B D) bis sumpto, hoc est rectangulo A C B F semel sumpto; igitur quadratum A E, æquale est quadratis A B, B C, hoc est quadrato A C, & rectãgulo A C, B F, semel sumpto. Sed A C, quadrato vnà cum rectangulo A C B F, æquatur rectangulum super A C & composita ex A C, B F; igitur quadratum A E, æquale est rectangulo super A C & composita ex A C B F. Vnde lineæ A C, A E & composita ex A C B F in continua sunt analogia. Quod fuit demonstrandum.

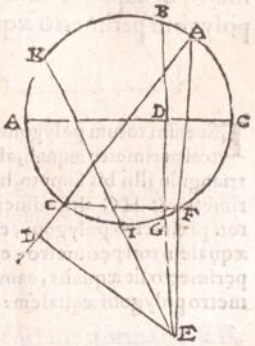
a 4. *secundi.*
b *Serenus lib. 2. propos. 45.*
c 69. *huius.*

PROPOSITIO LXXXVII.

EXtra aream circuli A B C, sumpto puncto E, demittatur ad diametrum A C normalis E D, ponaturque quæuis alia E I K.

Dico si D punctum communis linearum A C, D E intersectio cadat intra circulum, quod E D quadratum superet rectangulum I E K rectangulo A D C: si verò D, extra cadat, dico quod E D quadratum deficiat à rectangulo I E K, rectangulo A D C.

Demonstratio.



PRoducta D E, circuli perimetro occurrat in B: quadratum D E æquale est quadratis D G, G E vnà cum D G E rectangulo bis sumpto id est rectangulo B G E semel sumpto. sed B G E rectangulum vnà cum quadrato G E æquatur rectangulo B E G, igitur quadratum D E æquale est quadrato D G, id est rectangulo C D A vnà cũ rectangulo G E B id est I E K.

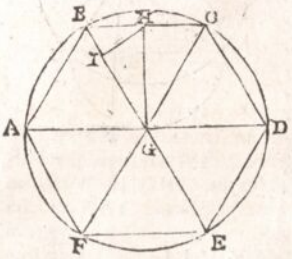
Quod si D extra circuli aream occurrat diametro A C productæ, ducatur ex E recta E A, occurrens perimetro circuli in F, iungaturque C F: erunt itaque similia triangula A D E, & C A F, & D A, A E latera proportionalia lateribus A F, A D: vnde & rectangula C A D, F A E, sunt inter se æqualia; quia verò quadratum A E æquatur rectangulis A E F, E A F, eidemque A E quadrato æquantur quadrata A D, D E; quadratum autem A D, æquale est rectangulis A D C, D A C, erunt rectangula A E F, E A F, æqualia rectangulis A D C, D A C vnà cum quadrato D E, ostensum autem est rectangulum D A C, rectangulo F A E æquale, quare residua quoque inter se æqualia sunt, id est C D A rectangulum auctum quadrato D E, æquale rectangulo F E A, id est I E K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVIII.

CIrculo A B C, quodlibet polygonum inscribatur regulare; ductaque ex G centro, G H quæ lateri B C normaliter insistat; ex H ponatur H I, ad rectos angulos ipsi B G.

Dico totum polygonum, ad B G quadratum toties sumptum, quot laterum est polygonum, eam rationem obtinere quam H I recta, ad B G.

Demonstratio.



a 70. huius.

DVeantur ex G centro ad angulos polygoni, rectæ A G, B G, C G, &c. Quoniam polygoni regularis latera æqualia sunt, erunt singula triangula A G B, B G C, C G D, &c. inter se æqualia: ac proinde duplicia trianguli B H G, cùm B C in H diuisa sit bifariam: sed & B H G trianguli, duplum est rectangulum B H G, hoc est a B G H, igitur B C G triangulo æquale est B G H I rectangulum, est autem B G H I, rectangulum, ad quadratum B G, vt H I, ad B G; igitur etiam B C G triangulum, est ad B G quadratum, vt H I ad B G: quia verò idem de singulis polygoni triangulis eodem modo demonstratur, patet totum polygonum ad quadratum B G toties sumptum, quot laterum est polygonum eam proportionem habere quam H I linea, ad rectam B G. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

IIsdem positis,

Dico duplum polygoni ad quadratum lineæ, quæ polygoni perimetro sit æqualis, eam rationem habere, quam H G linea ad lineam polygoni perimetro æqualem.

Demonstratio.

b Per elementa.

ESt enim totum polygonum, æquale triangulo basim habenti æqualem b lineæ toti perimetro æquali, altitudinem verò H G; igitur duplum polygoni æquatur triangulo illi, bis sumpto, hoc est rectangulo basim habenti æqualem polygoni perimetro & H G altitudinem; sed rectangulum hoc ad quadratum lineæ æqualis toti perimetro polygoni, eam obtinet proportionem, quam H G linea ad lineam æqualem toti perimetro; ergo polygonum bis sumptum ad quadratum lineę, quæ perimetro sit æqualis, eam habet rationem, quam H G linea, ad rectam toti perimetro polygoni æqualem: quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HOc loco non videtur omittendum sequi ex hac propositione per ea quæ in libro de progressionibus Geometricis diximus, circulum bis sumptum, ad quadratum suæ peripheriæ, eam seruare rationem, quam semidiameter ad perimetrum, circulum autem semel sumptum ad quadratum perimetri circularis, eam proportionem continere, quam quarta pars diametri ad circuli perimetrum, atque adeò

propositio-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [271] - 214
PUBLIC DOMAIN

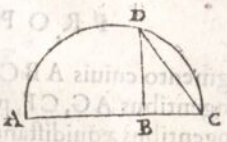
propositionis Archimedeæ veritatem de comparatione circuli ad rectangulum & æquale aliter hinc posse demonstrari.

PROPOSITIO XC.

Diametro circuli ABC insistat ad rectos angulos recta BD, iungaturque DC.

Dico rectangulum ABD, ad ACD rectangulum triplicatam eius habere rationem, quam obtinet linea DB ad DC lineam.

Demonstratio.



QVia DB normalis est ad diametrum AC rectæ CB, BD, BA, item CB, CD, CA per elementa in continua sunt analogia; vnde cùm prima BC vtrique seriei communis sit, erit a ratio AC ad AB tertiæ ad tertiam duplicata eius quam habet secunda CD, ad DB secundam, sed ratio rectanguli ABD, ad rectangulum ACD composita est ex ratione AC ad AB, hoc est duplicata DC, ad DB, & ex ratione DC, ad DB, patet igitur rationem ABD rectanguli ad rectangulum ACD, triplicatam esse lineæ DC ad DB. Quod fuit demonstrandum.

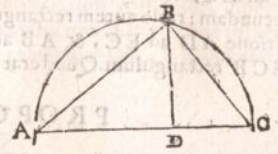
a 17. Lib. 1 de progressionibus.

PROPOSITIO XCI.

SEmicirculo ABC triangulum inscribatur ABC, è cuius vertice ad basim demissa sit normalis BD.

Dico rectangulum DAB, ad DCB rectangulum, triplicatam rationem habere eius, quam linea AB ad BC.

Demonstratio.



CVm enim BD normalis sit ad diametrum AC, erunt denuo tres AC, AB, AD, & AC, CB, CD in continuata ratione: quia verò communem habent primam AC, erit AD ad DC, in triplicata ratione AB ad BC; sed DAB rectangulum ad DCB rectangulum rationem habet compositam ex ratione DA ad DC, id est duplicata AB ad BC & ex AB ad BC, igitur rectangulum DAB, ad DCB triplicatam habet rationem AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

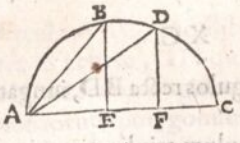
PROPOSITIO XCII.

SEmicirculi ABC diametro AC in E & F occurrant normales EB, FD, iunganturque AB, AD.

Dico EAB rectangulum, ad FAD rectangulum, rationem habere triplicatam rectæ AB, ad AD.

Demon-

Demonſtratio.



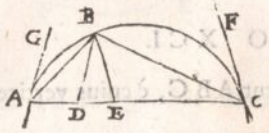
LInea AE ad AF duplicatam habet rationem AB ad AD, cùm tam AC, AB, AE, quàm AC, AD, AF continuè ſint proportionales, habeantque communem primam A, vnde cùm ratio rectanguli EAB ad FAD compoſita ſit ex ratione AE ad AF, & AB ad AD, patet EAB rectangulum ad rectangulum FAD triplicatam habere rationem eius quam habet AB ad AD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCIII.

SEgmento cuiuis ABC triangulum inſcribatur ABC, ductiſque contingentibus AG, CF, ponantur ex B vertice trianguli duæ BD, BE, contingentibus æquidiſtantes.

Dico rectangulum DAB, ad ECB, triplicatam continere rationem eius, quam habet AB ad BC.

Demonſtratio.



a 16. tertij.

CVm AG ſit contingens, erit angulo GAB id eſt ABD (ob AG, BD parallelas) æqualis angulus a ACB: & quia FC quoque circulum contingit, angulo FCB id eſt EBC (ob EB, FC parallelas) æqualis eſt angulus BAC: triangula igitur ABD, BEC ſimilia ſunt triangulo ABC: vnde vt AC ad AB, ſic AB ad AD: & vt AC ad CB, ita CB ad CE: duæ igitur continuè proportionalium ſeries communem habent primam AC; vnde AD ad EC, tertia ad tertiam b duplicatam habet rationem AB ad BC ſecundæ ad ſecundam: ratio autem rectanguli DAB ad ECB, rectangulum, compoſita eſt ex ratione AD ad EC, & AB ad CB, triplicata igitur ratio eſt rectanguli DAB ad ECB rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

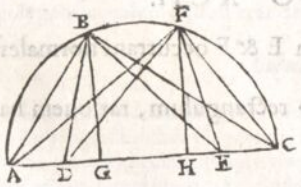
b 27. de progreſſionibus.

PROPOSITIO XCIV.

CIrculi ABC diameter ſecetur in D & E, punctis, æqualiter à centro ſemotis; ex quibus binæ ad duo quædam perimetri puncta B, F rectæ deducantur DB, DF, EB, EF.

Dico quadrata DB, BE ſimul ſumpta quadratis DF, FE eſſe æqualia.

Demonſtratio.

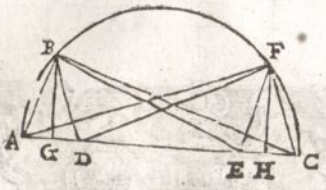


c 12. ſecundi.

IVngantur AB, BC, AF, FC, ex B & F demittantur perpendiculares BG, FH ad diametrum AC, quæ cadant primò inter D & E; erunt igitur anguli ADF, CEF rectis maiores; vnde quadratum c FC excedit quadratum FE, quadrato CE vnà cum rectangulo CEH bis ſumpto, & quadratum

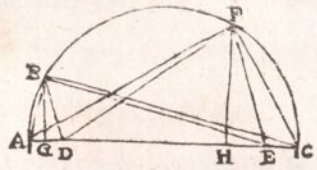
tum IAF ſuperat DF quadratum quadrato AD, vnà cum rectangulo ADH bis ſumpto, eſt autem rectangulum CEH, bis ſumptum, vnà cum rectangulo ADH bis ſumpto, [a] æquale rectangulo CED bis ſumpto; additis igitur quadratis æqualibus EC, AD, erit CED rectangulum bis ſumptum vnà cum quadratis AD, EC, hoc eſt rectangulum ECA ſemel ſumptum, exceſſus quo AF, FC, quadrata ſuperant quadrata duo DF, FE. Eodem modo oſtendetur quadrata duo AB, BC excedere quadrata duo DB, BE, rectangulo DAC id eſt ECA; igitur cùm quadrata AF, FC æqualia ſint quadratis AB, BE, & exceſſus DAC, ECA, ſuper quadratis DF, FE, DB, BE, æquales quoque ſint, illis ablatis manent DB, BE quadrata, æqualia quadratis AF, FE.

a *Per elementa.*



Secundò normales ex B & F demiſſæ cadant intra puncta AD, EC; BG quidem inter A & D; FH verò inter E & C, cùm angulus ADF recto maior ſit, quadratum AF, ſuperat quadrata AD, DF, rectangulo [b] ADH, bis ſumpto, hoc eſt rectangulo ADE, vnà cùm rectangulo ADEH bis ſumptis: quia verò FEC angulus recto minor eſt, quadratum FC deficit à quadratis [c] EF, EC rectangulo CEH hoc eſt ADEH bis ſumpto; igitur ADE rectangulum bis ſumptum eſt exceſſus quo quadrata duo AF, FC ſuperant quadrata quatuor AD, DF, CE, EF. demptis igitur æqualibus quadratis AD, CE, remanet ADE rectangulum bis ſumptum exceſſus quo AF, FC, quadrata, excedunt quadrata DF, EF; eadem ratione oſtenditur quadrata DB, BE, ſuperari à quadratis AB, BC, rectangulo CED bis ſumpto. igitur cùm AB, BC, quadrata æqualia ſint quadratis AF, FC, & ADE rectangulum (exceſſus quadratum AF, FC, ſuper DF, FE quadratis) æquale ſit CED rectangulo, (exceſſui quo AB, BC quadrata, ſuperant DB, BE quadrata) demptis exceſſibus, remanent DF, FE quadrata, æqualia quadratis DB, BE.

b 12. *ſecundi.*
c 13. *ſecundi.*



Tertiò normalium BG, FH, altera intra DE, altera verò intra AD, ſpatium contineatur: oſtendetur vt priùs, CED rectangulum bis ſumptum, demptis æqualibus quadratis AD, EC æquale eſſe exceſſui quo CB, BA quadrata ſuperant EB, BD; item DF, FE, quadrata ſuperari à quadratis AF, FC, rectangulo ADE bis ſumpto demptis quadratis AD, EC: igitur cùm tota ſint æqualia & exceſſus inſuper æquales ſint, reſidua quoque quadrata DF, FE, erunt reſiduis quadratis DB, BE æqualia. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

Posset aliter & commodius propositio hæc demonstrari, ac facilius fortassis, sed aliam studio in aliquorum gratiam adhibere volui demonstrationem.

Libri Tertij Finis.



PRO-

PROLEGOMENA AD SECTIONES CONI.

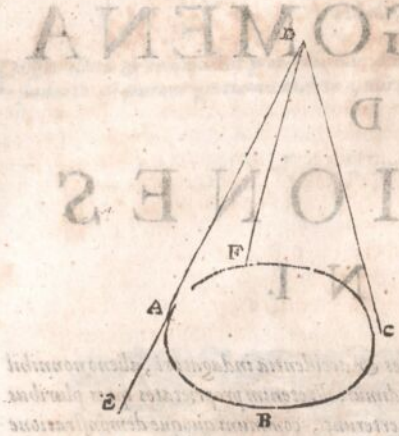
COnicarum sectionum affectiones & accidentia indagaturi, alieno nonnihil ab antiquis consilio rem aggredimur: illi etenim proprietates quas pluribus sectionibus communes esse aduerterunt, communi quoque demonstratione inuoluerunt, nec immeritò, exigente talem scribendi rationem ipso doctrinæ tenore, ordine ac nitore: nos autem in alium scopum collimãtes, in gratiam eorum, qui Geometriæ afficiuntur, singillatim singulas explanare intendimus, quo faciliore methodo & minùs confusâ, tyrones ad conicarum Speculationum contemplationem inuitentur & alliciantur. Nam vt rectè Fredericus Commandinus ait, quod si aliqua pars est Matheseos quæ nostris incognita Philosophis, interpretationis lumen aliquod postulet, ea profectò est quæ de Conicis appellatur: quanquam enim à veteribus diligenter tractata sit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruenerunt, aut ita peruenerunt vt vix propter vetustatis iniurias maximasque difficultates intelligantur. conabimur autem ita planas reddere quas præ manibus habemus conicas materias, vt vel leuiter in elementis Euclidis versati eas percipere queant, sine vllo tædio, imò verò cum orexi ad vlteriora tendendi, & has lucubrationes in immensum extendendi. neque enim Geometriæ scientia terminis contineri potest, multoque minùs exhauriri, cùm abyssus sit vastissima, omnem Oceanum quarumcumque Speculationum absorbens. Ordiemur itaque ab ipsius nominis notione, phaleris omissis, exponentes, quid Coni nomenclaturâ & natura ex ipsius descriptione aut construendi ratione denotetur.

DEFINITIO.

Quid sit Conus.

COnum appello corpus habens originem ex circumductu lineæ à puncto in sublimi posito in infinitum protensæ circa perimetrum circularem, quæ in diuerso ab eodem puncto plano constituta sit.

Expositio.



COncipiatur in hunc finem circulus quidam A B C, extra cuius planum in quo iacet, assumatur quoduis punctum D, à quo ducta sit linea A E contingens perimetrum circularem in puncto aliquo A: agatur verò linea D E circa peripheriam integram circuli A B C donec in A redeat, hac tamen conditione vt D punctũ fixum permaneat, hoc est, vt extremum punctum lineæ D A, quod applicatum est initio circumuolutionis puncto D, ab ipso numquam recedat, tali inquam circumlatione lineæ D E, orietur figura D A B C binas habens superficies, vnã motu rectæ D E efformatam, alteram verò circulum A B C. Priorem appellare solent superficiem præter basim, secundam autem ipsam coni basim; punctum D vertex coni nuncupatur, axis verò linea à vertice D ad centrũ baseos pertingens.

Ex hac coni descriptione sequitur à quouis puncto in superficie conica assignato posse duci rectam lineam ad ipsum verticem D. cùm enim per rectam D A circa basim A B C circulatione facta, producta sit coni superficies, necesse est vt à quouis puncto perimetri A B C duci possit recta ad verticem D.

Hinc superuacaneum credo demõstrare quod rectæ omnes sint lineæ quæ à vertice ad quodlibet punctum in conica superficie ducuntur; proindeque satis esse manifestum ex ipsa ratione construendi conum, omnem sectionem quæ fit per verticem, triangulum exhibere cuius latera sint in coni superficie.

Suppono quoque æquè notum, omnem lineam à puncto in superficie coni assumpto ductam ad quoduis aliud, quod in recta non existat quæ ad verticem tendit intra conum ipsum penetrare si infinitè vtrimque producatur, licet hæc omnia placuerit Apollonio demonstrare: quarum demonstrationes si lector desideras, in eodem poteris cognoscere.

Hoc loco occurrit notandum pluribus alijs vijs conum describi posse; pura circumducendo ex eodem puncto D, in sublimi posito rectam A D circa figuram ellipticam aut quamlibet aliam è conicis: sed placuit non sine causa antiquis circulo solo vti, eò quod, vt in decursu libri apparebit, commodior figura sit ad demonstrationes formandas: adde quod figurarum aliarum efformatio conum priùs supponat, ex quo ferè solo ortum habent, præter ellipsin, quæ vt rectè Serenus ostendit, ex Cylindro quoque excludi potest.

Quotuplex sit conus.

DVplex est conus; alius Isoscelius est siue Æquicruris, qui & rectus dicitur; alius Scalenus. Æquicruris est à cuius vertice linea ad basim normaliter demissa in baseos centrum pertingit. Scalenus autem omnis ille conus appellatur, qui perpendicularem ductam a vertice ad circularem basim, si opus est etiam extensam infinitè, extra centri punctum constitutam habet, quod basis medium est.

Vnde rectum quoque dicunt conum qui æquicruris est, obliquum qui scalenus: discrimen inter vtrumque in eo maximè situm, quod rectum conum si per axem plano dispescas, Isoscelium resultabit in partibus diuisis triangulum, cuilibet alteri æquale & simile quod per axem fit: scalenus autem sine numero varia producit triangula sectionibus per axem repetitis, quæ inter se neque similia sint, neque æqualia; circa quæ has sequentes propositiones præmittemus. Ad quas perlegendas priusquam accedas amice Lector,

NO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [277] - 220
PUBLIC DOMAIN

NOTA

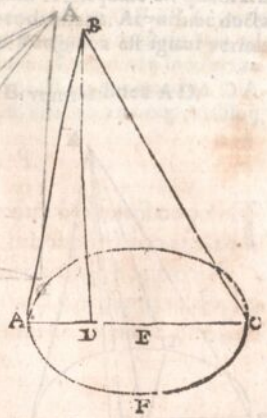
PLeraque theoremata, quæ in hisce prolegomenis adferemus, proponi etiam ac demonstrari à Sereno Antisensi Philosopho ac Geometra, libro secundo de sectione coni. Omnino mihi memoria exciderat tractatam à Sereno eandem esse materiam: iam enim anni sunt viginti & amplius quod authorem illum non legerim. Velim itaque, qui hæc leget plagij reum me ne faciat; sed cogitet, si deinceps fortasse quædam mihi cum Sereno communia occurrent, mihi eadem, quæ Sereno olim, potuisse incidere.

PROPOSITIO PRIMA.

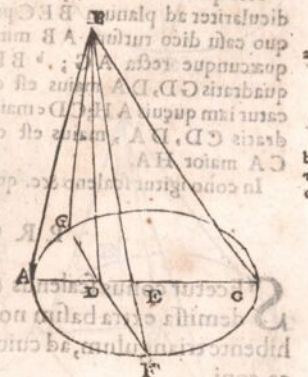
IN cono scaleno si à vertice linea ad perpendiculum demittatur, & per verticem, centrum basis, ac punctum à perpendiculo denotatum planum agatur,

Dico triangulum per hanc sectionem factum continere maximam & minimam linearum quæ in superficie conica exhiberi possunt.

Demonstratio.



TRiplex est hic casus: vel punctum perpendiculo denotatum intra peripheriam baseos existit, vel in ipsa peripheria, vel denique extra ipsum circulū. Pro primo igitur casu ponatur conus ABC & baseos centrum E: vertex autem B: à quo demissa perpendicularis, occurrat basi intra peripheriam in puncto D, per quod, & per centrum, agatur planum quod pertingat vsque ad B coni verticem; exhibebit hæc sectio triangulum ABC: nam ex constructione coni BA, BC sunt rectæ lineæ; ostendendum est itaque AB esse minimam omnium linearum, BC verò maximam quæ in superficie conica existunt.



Ductâ quauis BG, ponatur ex G recta GDF, quoniam ADC per centrum transit, erit AD minor a quàm GD, & quadratum AD, minus quadrato GD: additoque communi quadrato DB, quadrata AD, DB, minora sunt quadratis GD, DB. angulus autem GDB b rectus est, quemadmodum & angulus ADB: igitur quadratum AB, æquatur c quadratis AD, DB, quadratum verò GB æquatur quadratis GD, DB. ergo quadratum AB, minus est quadrato GB. ergo linea AB minor rectâ BG.

a 7. tertij.

b 4 sup. 5. vndecimi.

c 47. primi.

Eodem pacto ostendetur recta BC omnium maxima: ex puncto quippe quouis F, si ducatur quæuis FB: & per D ponatur FD, quia ADC per centrum transit, d DC maior est quàm EF. vnde quadrata CD, DB maiora sunt quadratis FD, DB, sed cùm rursum anguli CDB, FDB sint recti, quadratum CB quadratis CD, DB, & quadratum FB quadratis FD,

d 7. tertij.

DB æquale est. Ergo quadratum CB maius est quadrato FB, adeoque recta CB maior quàm FB. vnde maxima BC est earum quę in superficie coni assignari possunt; AB verò minima. Quod demonstrari oportuit.

Iam verò BD perpendicularis è coni vertice demissa cadat in perimetrum circuli AFC; dico iterum AB lineam esse minimam, & BC maximam illarum quæ in superficie coni existunt.

Ducatur enim quæuis BF, iungaturque AF, rursum igitur quadratum BF [a] æquatur quadratis AF, AB, adeoque maius est quadrato AB. Vnde BF, linea maior est rectâ AB: clarum est insuper BC rectam omnium esse maximam, nam quadratum BC æquale quadratis CA, AB maius est quadrato BF æquali quadratis FA, AB.

[a] 47 primi.

Reliquus casus est in quo dato scaleno cono ABC, linea AD demissa perpendiculariter ad planum BEC productum, extra ipsum conum signat punctum D: quo casu dico rursum AB minimam esse, AC verò maximam. Ducatur enim quæcunque recta AG; [b] BD minor est DG, igitur quadratum AG æquale quadratis GD, DA maius est quadrato AB. ergo AB minor est quàm AG, ducatur iam quęuis AH; CD [c] maior est quàm HD, ergo quadratum CA, æquale quadratis CD, DA, maius est quadrato HA, æquali quadratis HD, DA. ergo CA maior HA.

[b] 8. tertij.

[c] 8. tertij.

In cono igitur scaleno &c. quod fuit demonstrandum.

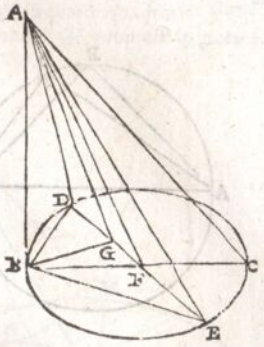
PROPOSITIO II.

SEcetur conus scalenus (à cuius vertice linea ad basim perpendiculo demissa extra basim non cadit) per centrum & verticem, sectione exhibente triangulum, ad cuius basim demittatur normaliter recta à vertice coni.

Dico illam intra conum cadere.

Demon-

Demonſtratio.

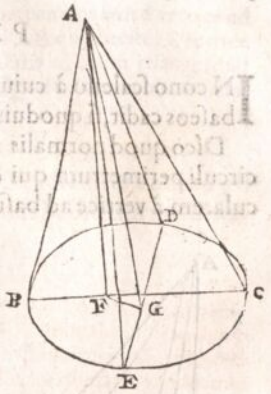


DVplex eſt caſus; primus quo conus A B C cuius baſis B D C, habet B A perpendicularem à perimetro aliquo puncto ad verticem erectam; alterdum linea à vertice ad baſim ducta perpendiculariter intra baſim cadit. Igitur fiat ſectio per centrum F, & apicem A, exhibens triangulum A D E: oſtendere igitur oportet, normalem ex A ad baſim D E demiſſam intra conum, hoc eſt inter puncta D & E occurſuram diametro D E. Ducantur enim B D & B E; deinde ex puncto B ponatur B G, normalis ad diametrum D E (cadet hæc neceſſariò inter puncta D, E) & iungantur A G. quoniam A B ex hyp. normalis eſt baſi, recta E B in baſi ad ipſam ducta per defin. 3. 11. normalis eſt. ergo quadratum A E æquatur quadratis A B, B E: hoc eſt [a] quadratis A B, B G, G E. quadratum autem A G quod [b] angulus A B G [b] etiam rectus ſit æquatur quadratis A B, B G, igitur quadratum A E excedit quadratum A G, quadrato G E. vnde quadratum A E æquale eſt quadratis A G, G E. angulus ergo A G E, rectus eſt, & A G perpendicularis. Atqui hæc ducta eſt à vertice coni & occurrit baſi trianguli intra conum. Perſpicua eſt igitur veritas propoſitionis in caſu primo.

[a] 47. primi.
[b] ibid.

Eodem modo procedet demonſtratio ſi loco lineæ A E, vtamur linea A D.

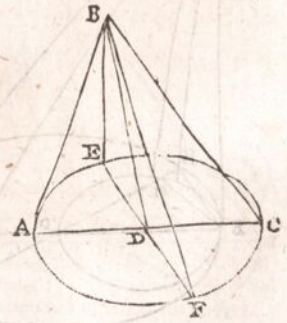
Quod ſi perpendicularis à vertice coni ad coni baſim demiſſa cadat intra conum vt A F rurſum ducatur F G normalis ad E D, iungaturque A G. Eodem planè diſcurſu demonſtrabimus quadratum A E æquari quadratis A G, E G; adeoque angulum A G E rectum eſſe, & A G perpendicularem ad baſim trianguli A D E, ex quo manifeſta in hoc etiam caſu propoſitionis eſt veritas.



PROPOSITIO III.

LAterum quadrata cuiuſcunque trianguli in cono ſcaleno per axem facti æqualia ſunt quadratis laterum cuiuſcunque alterius trianguli per eundem axem.

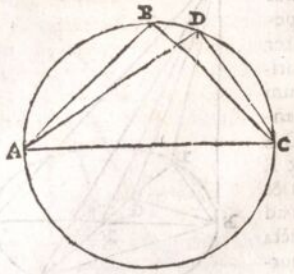
Demonſtratio.



SIt enim A B C conus ſcalenus cuius axis B D: per quem fiat quæuis ſectio B E F: fiat autem A B C triangulum aliud ſectum per axem B D. Dico quadrata A B, B C, quadratis B F, B E eſſe æqualia, quadrata enim A B, B C oſtenſa ſunt libro quem de linearum potentijs ſcripſimus, æqualia eſſe quadratis A D, D C, & B D bis ſumpto; at etiam eodem diſcurſu oſtenſum eſt quadratis B F, B E æquari quadrata F D, D E vnà cum quadrato B D bis ſumpto: igitur cùm F E, A C lineæ earumque dimidiæ F D, D E, A D, C D ſint inter ſe æquales, patet veritas demonſtrationis.

Corolla-

Corollarium.

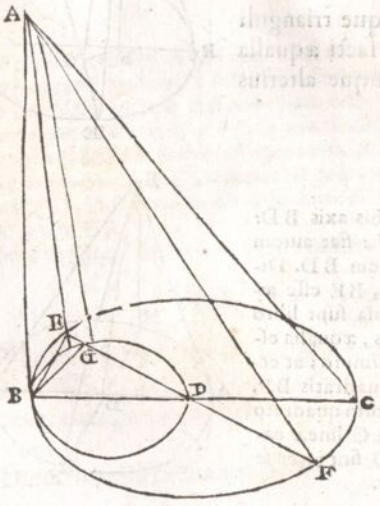


HInc colligere licet facilem praxim cognoscendi latera triangulorum quæ per axem sectione facta emergunt,& proportionem illorum inter se.ponatur enim semicirculus A B C : cui A B C triangulum sit inscriptum habens latera A B, B C æqualia lateribus maximi trianguli alicuius coni per axem secti : Quoniam ergo quadrata laterum minimi trianguli per axem eiusdem coni æquantur quadratis laterum maximi A B, B C, (hoc est quadrato A C) poterunt & minimi latera inflecti in semicirculo, quæ sint A D, D C. quod si tertia quędam sectio fiat per eundem axem, proportio laterum illius trianguli, reperietur necessariò in aliquo triangulorum quod habebit basim A C, & verticē in vno punctorum quę sunt in parte perimetri B D. cùm enim æqualia sint quadrata laterum vnius trianguli quadratis laterum alterius, quod per axem facta sectione resultat, sintque A B C trianguli quadrata A B, B C æqualia quadratis laterum maximi; quadrata verò A D, D C æqualia sint quadratis laterum minimi; sequitur latera cuiuscunque alterius, quod per axem coni producitur, in aliquo triangulorum reperiri debere quod basim habeat A C & latera reliqua sese in aliquo punctorum decussantia quę in arcu B D, assignari possunt, quod ex decursu sequentium propositionum magis elucidabitur.

PROPOSITIO IV.

IN cono scaleno à cuius vertice demissa perpendicularis in perimetrum baseos cadit, si quoduis triangulum per axem sectione facta exhibeatur:

Dico quod normalis à vertice coni ducta ad basim trianguli cadet in circuli perimetrum qui describetur diametro intercepta inter perpendicularem à vertice ad basim ducta & centrum baseos eiusdem.



Demonstratio.

SIt igitur A B C conus cētrū baseos D. à coni vertice A recta A B demissa perpendiculariter, cadat in B punctum perimetri baseos B E C, descripto deinde circulo B G D, super diametro B D, agatur planum per axem quodcumque A E F, exhibens triangulum A E F; cuius basis primò secet circulū in punctis D G: ad G ex A puncto verticis, demittatur A G. Dico illam esse quæ basi E F normaliter insistit; ducatur enim recta linea B G, iungaturque B F. Quoniam igitur ex hypothesi A B recta est plano basis B E, C F. a angulus A B F rectus est: adeoque quadratum A F æquale quadratis A B, B F; hoc est, quoniam angulus B G F in semicirculo etiam rectus

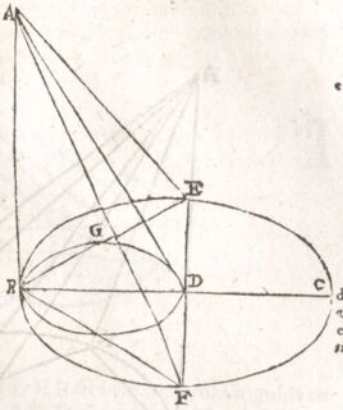
a *def. 3. vndecimi.*

rectus est, quadratis AB, BG, GF. quadratum autem AG æquale est quadratis AB, BG, quod angulus ABG [a] similiter rectus sit. Igitur excedit quadratum AF quadratum AG, quadrato FG: quare quadratum AF æquatur quadratis AG, GF. vnde normaliter insistit [b] recta AG, ipsi GF in puncto G. quod est in perimetro circuli habentis diametrum BD.

[a] def. 3. vndecimi.

[b] 48. primi.

Secundò basis trianguli EF contingat circulum BGD in puncto D; ducaturque AD, ad punctum contactus, quod idem est cum centro basis coni BHC; iunganturque AE, AF: quoniam [c] anguli BDE, BDF recti sunt, & ED latus lateri DF, ac BD sibi ipsi æquale est, etiam bases BE, BF æquales erunt. ergo quadrata BE, BA, quadratis BF, BA æqualia sunt. Atqui quadratum FA æquatur quadratis BF, BA, & quadratum EA quadratis BE, BA, quod recta AB plano basis coni sit recta, adeoque anguli [d] ABF, ABE recti: quadrata igitur FA, EA, ac proinde etiam rectæ FA, EA æquantur. Quare cùm in Isoscele FAE, basim bisecet AD, erit hæc [e] perpendicularis ad basim. Itaque in hoc etiam casu perpendicularis AD est ad circulum BGD.



[c] 18. tertij.

[d] def. 3. vndecimi.

[e] ex elementis.

Tertiò si triangulum per axem, transeat per AB normalem à vertice ad basim coni ductam, ac proinde eius basis eadem sit cum BDC: tum perpendicularis à vertice ad basim trianguli, eadem quoque erit cum perpendiculari AB quę ducitur à vertice ad basim coni. Quare etiam hoc casu tertio perpendicularis ad basim trianguli ad circuli peripheriam existet; in cono igitur scaleno, &c. Quod fuit demonstrandum.

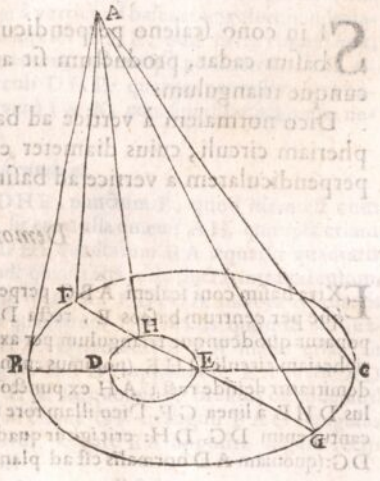
PROPOSITIO V.

COnus scalenus à cuius vertice perpendicularis cadit intra conum, si secetur per axem exhibens triangulum, ad cuius basim normalis ducatur à vertice procedens:

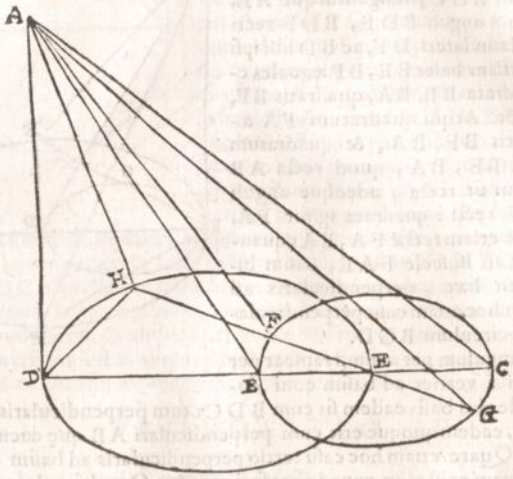
Dico illam perimetro circuli occursuram cuius diameter æqualis erit lineæ inter perpendicularem à vertice coni & centrum baseos eiusdem coni interceptæ.

Demonstratio.

ESto conus ABC, à cuius vertice perpendicularis AD demissa cadat intra conum, occurrens basi in D: à quo ducta sit DE recta ad centrum baseos, super qua vt diametro circulus DHE, describatur: deinde per axem fiat quęcunque sectio exhibēs triangulū AFG: cuius basis FG primò secet circulū in E & H, tū ex vertice A demittatur AH ad rectam FG. Dico illam in perimetrum circuli DHE incidere. ducatur enim ad punctum H, in quo GE circulo occurrit recta DH; iunganturque



DG: erit igitur quadratum AG æquale quadratis AD, DG, hoc eſt quadratis AD, DH, HG: quadratum autem AH æquale eſt quadratis AD, DH: igitur excedit AG quadratum, quadratum AH, quadrato HG: igitur quadratum AG, quadratis AH, HG eſt æquale, adeoque recta AH normalis ad lineam FG. vnde patet normales omnes à vertice A hoc in caſu ad baſes triangulorum per axem demiſſas in circulum DHE cadere.



Caſus ſecundi & tertij quando baſis trianguli aut contingit circulum DHE, aut incidit in BEC, eadem eſt demonſtratio, quæ pro ijſdem caſibus ſuperiori propoſitione allata eſt; conus igitur ſcalenus, &c. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

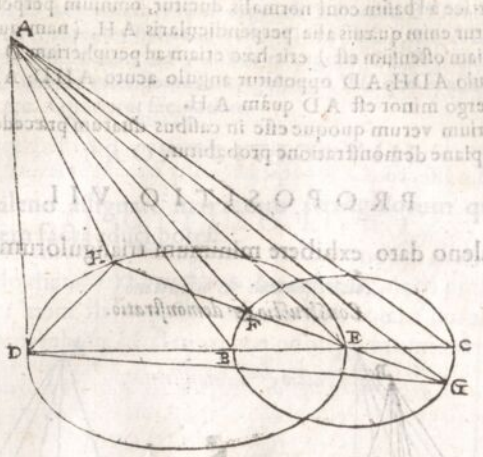
SI in cono ſcaleno perpendicularis à vertice ad baſim ducta extra baſim cadat, productum ſit autem ſectione per axem factâ quodcunque triangulum:

Dico normalem à vertice ad baſim trianguli ductam, eſſe ad peripheriam circuli, cuius diameter eſt recta inter centrum baſis coni & perpendicularem à vertice ad baſim coni interiecta.

Demonſtratio.

EXtra baſim coni ſcaleni ABC perpendicularis à vertice cadat recta AD. actaque per centrum baſeos E, recta DE circa quam circulus deſcribatur DHE, ponatur quodcunque triangulum per axem FAG: & protractâ GF vſque ad peripheriam circuli DHE (ponimus enim primò baſim EF ſecare circulum DHE) demittatur deinde recta AH ex puncto verticis A, ad punctum quo ſecatur circulus DHE à linea GF. Dico illam fore normalem, ad rectam GF productam. ducantur enim DG, DH: erit igitur quadratum AG æquale duobus quadratis AD, DG: (quoniam AD normalis eſt ad planũ baſeos productum, adeoq; etiam ad DG)

hoc



hoc est tribus quadratis AD, DH, HG, cùm DHE sit in semicirculo angulus rectus; sed quadratum HA æquatur quadratis AD, DH, quòd angulus ADH iterum [a] rectus sit; igitur quadratum AG excedit quadratum AH quadrato HG. vnde AG quadratum, duobus quadratis AH, HG æquale existit: quare angulus rectus est AHG. estque punctum H in perimetro circuli DHE ex constructione; manifestum igitur est in primo casu omnem normalem à vertice scaleni ad trianguli per axem basim in circuli DHE perimetrum incidere.

[a] def. vndecimi.

Secundi casus tertijque quando basis trianguli aut contingit circulum DHE, aut incidit in rectam DEC, demonstratio conuenit cum ea, quam propos. 4. pro ijsdem casibus attulimus.

Si igitur in cono scaleno, &c. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium primum.

HInc patet in omni casu quo è vertice coni scaleni ad basim eiusdem protractam, demittitur perpendicularis, extra basim coni, in triplici differentia producenda triangula per axem coni: cum linearum quæ à vertice ad bases triangulorum normaliter ducuntur, quædam occurrant punctis circuli DHE, quæ extra conum sunt; nonnullæ punctis intra eum cõstitutis, duæ autem numero ipsi perimetro basεos, videlicet I & K, quod patet ex partibus circuli DHE: quarum nonnullæ extra basim existunt, quædam verò intus, puncta verò I & K, cùm sint intersectionum necessariò in vtroque circulorum consistunt.

Corollarium secundum.

PErpendicularis incidens in perimetri DHE, punctum E, quod idem est cum centro basis coni, est omnium maxima. sit enim alia quæuis AH, quæ ipsa etiam incidet in perimetrum DHE, & iunge DH: quadratum EA æquatur quadratis ED, DA; quia autem ED diameter circuli quauis aliâ rectâ ductâ intra circulum, ac proinde & rectâ DH maior est, erunt quadrata ED, DA maiora quadratis HD, DA, hoc est quadrato HA. Quare quadratum EA maius quoque est quadrato HA, & recta EA maior quàm HA. Quod autem EA maior etiam sit quàm AD, manifestum est, cùm in triangulo EAD, opponatur EA recto, AD acuto, EA maiorem esse quauis alia v.g. HA; sic quoque & breuius ostendemus: quoniam HA ex hypothesi normalis est ad basim GF trianguli FAG, angulus AHE rectus est, adeoque alter AEH acutus. Quare EA opposita angulo recto maior est quàm HA quæ acuto opponitur.

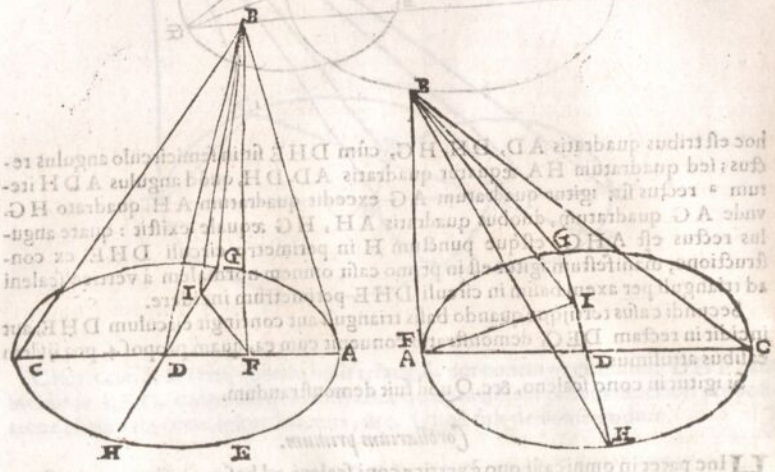
Perpendicularis verò quæ incidit in punctum D, ac proinde eadem est cum recta AD quæ à vertice ad basim coni normalis ducitur, omnium perpendicularium est minima. Ducatur enim quæuis alia perpendicularis AH, (nam quod AD minor sit quàm EA, iam ostensum est) erit hæc etiam ad peripheriam DHE: iungatur DH: in triangulo ADH, AD opponitur angulo acuto AHD; AH verò angulo recto ADH. ergo minor est AD quàm AH.

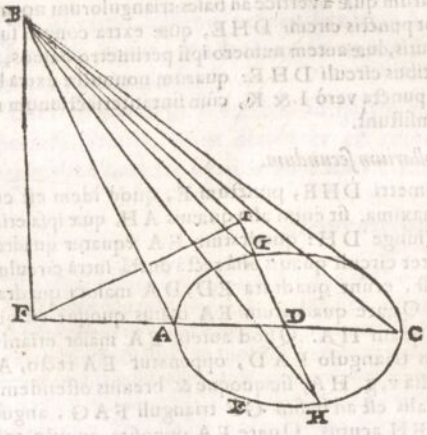
Hoc corollarium verum quoque esse in casibus duarum præcedentium theorematum, eadem planè demonstratione probabitur.

PROPOSITIO VII.

IN cono scaleno dato exhibere minimum triangulorum sectione per axem factâ.

Constructio & demonstratio.





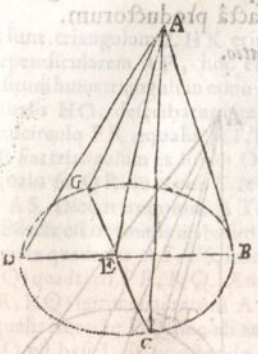
COnus scalenus ABC, datus sit, cuius vertex B: centrum baseos D: axis verò BD. demittatur ad basim coni perpendicularis BF, & iungantur FD. quæ continuetur vsque ad perimetrum baseos vtrimque in A & C, factâ igitur sectione coni per apicem B, & lineam AC, producetur triangulum per axem ABC. Dico hoc esse minimum eorum quæ ex cono ABC possunt educi per axem sectione factâ. Demonstratio est manifesta ex corollario 2. propos. præced. fiat enim quæuis alia sectio per axem, scilicet BGH: & è vertice B demittatur normaliter BI ad diametrum GH, iunga-

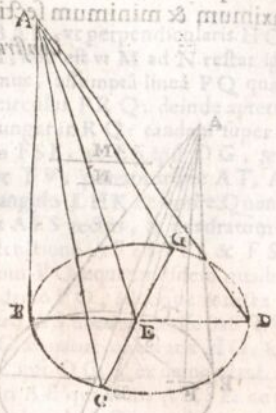
iungaturque recta FI. Cùm BF recta sit plano AHC, angulus BFI rectus erit; quare angulus BIF acutus est, maior ergo est BI quàm BF. itaque cùm triangula GBH, ABC æquales habeant bases GH, AC, erit ABC triangulum minorem habens altitudinem BF, minus triangulo GBH, maiorem habente altitudinem BI. Similiter ostendemus triangulum ABC quouis alio minus esse. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VIII.

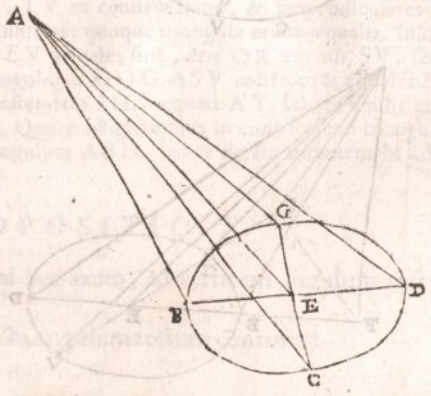
IN cono scaleno assignare maximum triangulorum quod sectione quæ per axem facta educi potest.

Constructio & demonstratio.





SIt conus scalenus ABCD, per præcedentem verò propositionem inueniatur triangulum minimum eorum quæ per axem fiunt, nimirum ABD: deinde per centrum E collocetur CEG diameter normaliter ad rectam BD, secundùm quam & verticem A plano ducto statuatur triangulum ACG. Dico hoc omnium esse maximum. ex casu enim secundo propositionis quartæ patet AE normalem esse ad basim CG: & ex corollario secundo propositionis sextæ patet perpendicularem AE, ad basim trianguli CAG, esse maximam omnium perpendicularium, quæ ad bases reliquorum per axem triangulorum ducuntur. Quare cùm omnium per axem triangulorum bases sint diametri basis coni, ac proinde æquales, triangulum CAG maximam habens perpendicularem, hoc est altitudinem, omnium est maximum; in cono igitur scaleno exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.



Corollarium primum.

HInc & ex corollario ſecundo ſextæ huius patet triangulum maximum ſectione per axem ad triangulum minimum, factum eadem ſectione, eſſe in proportione, axis ad centrum baſis ducti, ad perpendicularem AF, in fig. propoſitionis ſeptimæ; cum illę vtriuſque trianguli æquali baſi inſiſtentis perpendiculares ſint.

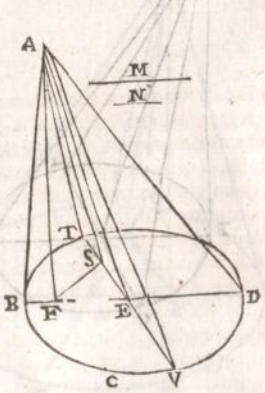
Corollarium ſecundum.

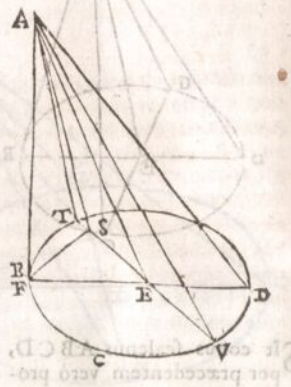
PAtet deinde in cono ſcaleno triangulum maximum factâ ſectione per axem natum, Iſoſcelium eſſe, cùm AE perpendicularis oſtenſæ ſit ſecare lineam CG in partes æquales.

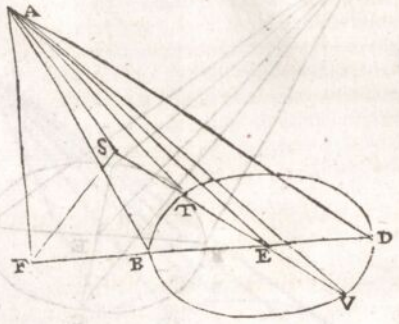
PROPOSITIO IX.

PRopoſitum ſit in cono ſcaleno triangulum per axem exhibere quod cum minimo triangulorum per eundem facto datam obtineat rationem: quæ tamen maior non exiſtat illâ quæ eſt inter triangulorum maximum & minimum ſectione per axem factâ productorum.

Conſtructio & demonſtratio.

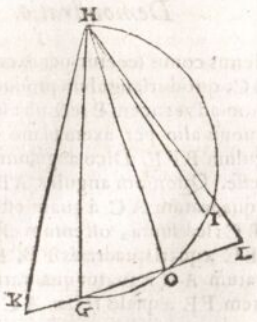






DAtus ſit conus ſcalenus, baſim habens BCD, in quam normalis cadat AF: axis ſit AE, centrum baſis E. Ratio autem data ſit M ad N. Et quoniam illa ponitur non maior ratione maximi per axem trianguli ad minimum, neque maior erit ratione ipſius AE ad AF, vt colligitur ex coroll. præced: Ducto iam per A, F, E, puncta plano producatur triangulum ABD quod per 7. huius erit minimũ per axem triangulorum; aſſumptâ deinde rectâ GH, quę ſit æqualis EA, deſcribatur ſemicirculus GIH, cuius diameter GH, & rectæ AF æqualem HI inſcribe ſemicirculo: denique vt N ad M, ita fiat HI ad HO, quæ ex puncto H aptari poterit in ſemicirculo inter puncta I, G, cùm ratio data M ad N, non ſit maior ratione AE ad AF, hoc eſt, ſob linearum ex conſtr. æqualitatem, HG ad HI. Deinde iuncta OG, quæ cum HO angulum rectum conſtituet, vtpote in ſemicirculo, fiant GL, GK æquales ſemidiametro EB, iungaturque HL, HK. Quoniam igitur baſes BD, LK, æqua-

les





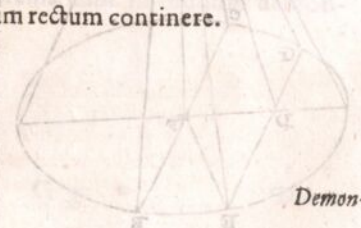
les sunt, triangulum LHK erit ad triangulum BAD, vt perpendicularis HO ad perpendicularem AF, hoc est vt HO ad HI, hoc est vt M ad N. restat igitur vt situm huius trianguli in cono ABCD assignemus, assumptâ lineâ PQ quæ sit æqualis HO, describatur interuallo PQ semicirculus PRQ, deinde aptetur in semicirculo PR æqualis HI, hoc est AF, & iungatur RQ: tandem super basę FE fiat triangulum ex lineis OG, RQ, nimirum FSE, vt ES ipsi OG, & FS æqualis sit QR. tum per E & S agatur diameter TV, ponanturque AT, AV, & AS. Dico triangulum ATV, esse æquale triangulo LHK & simile. Quoniam AF ducta est normalis ad basim coni, erit[a] angulus AFS rectus, & quadratum AS æquale quadratis AF, FS, hoc est (quia ex constructione AF est PR, & FS est RQ) quadratis PR, RQ. Atqui etiam quadratum PQ æquatur ijsdem quadratis PR, RQ: igitur quadratum AS æquale est quadrato PQ, adeoque & recta AS æqualis est rectę PQ, hoc est rectæ HO. Iam verò AS normalem esse basi TV, vt HO est basi LK, sic ostendo. Quadratum HG æquatur quadratis HO, GO: quare cùm ex constructione AE ipsi HG, & SE ipsi OG, & ex demonstrat. AS ipsi HO sit æqualis, æquabitur etiam quadratum AE quadratis AS, SE: ac proinde angulus ASE rectus est, & AS perpendicularis basi. Quare cùm in triangulis LHK, TAV & bases LK, TV ex constructione, & perpendiculares siue altitudines HO, AS, æquales sint, ipsa quoque triangula erunt æqualia. Insuper cùm OG ipsi SE, & GK ipsi EV æquales sint, erit OK æqualis SV, sed & HO ostensa est æqualis AS, angulique HOG, ASV recti sunt & æquales. Ergo HK æqualis est AV. similiter ostendam HL, æquari AT. Itaque similia etiam sunt triangula LHK, TAV. Quare assignauimus in cono scaleno triangulum per axem ATV quod ad triangulum ABD, habet datam rationem M ad N. Quod erat faciendum.

[a] *def. 3. vndecimi.*

PROPOSITIO X.

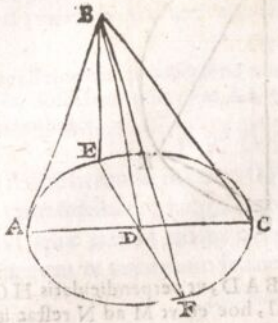
SI coni scaleni triangulum per axem, ad verticem angulum rectum contineat:

Dico omnia per axem facta angulum rectum continere.



Demon-

Demonſtratio.



a 3. huius.

b 48. primi.

SCalenus conus ſecetur per axem ſectione ABC, quod triangulum producat habens angulum ad verticem B rectum: ſecetur autem quouis alio per axem plano exhibente triangulum BFE. Dico angulum FBE, rectum eſſe. Quoniam angulus ABC eſt rectus, quadratum AC æquale eſt quadratis AB, BC; ſed ſuprà a oſtenſum eſt quadrata AB, BC æquari quadratis FB, EB. Ergo quadratum AC æquatur quadratis FB, EB. eſt autem FE æqualis rectæ AC, ergo & FE quadratum iiſdem quadratis FB, BE æquale erit, quare b angulus FBE rectus. Itaque ſi coni ſcaleni, &c. Quod fuit demonſtrandum.

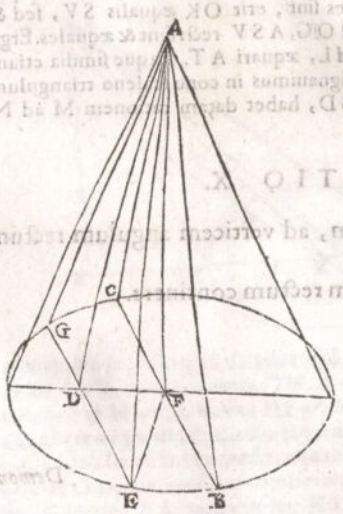
Scholion.

PRæter triangula quæ eruuntur ex cono ſectione per axem factâ, alia quoq; aſſignantur quæ per verticem quidem tranſeunt, minimè verò per axem; quæ cùm ſine numero ſint, hinc determinationẽ exigunt vt ſolutiones problematum quæ circa ea verſantur, rectè expediantur.

PROPOSITIO XI.

IN cono recto acutangulo & rectangulo impoſſibile eſt triangulo per axem facto, æquale triangulum exhibere non per axem. ſiue triangulũ, per axem maius eſt quolibet non per axem.

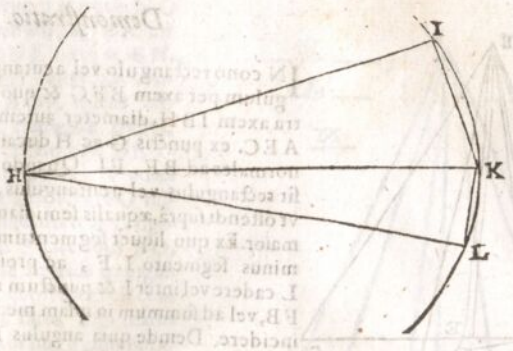
Demonſtratio.



c def. 3. vndecimi.

NAm ſi fieri poteſt, ponatur triangulum aliquod AEG non tranſiens per axem AF, æquale triangulo per axem ducto BAC, quod ita in cono ductum concidet, vt eius baſis BC ſit parallela baſi EG, quod fieri poſſe conſtat, cùm omnia in cono recto per axem triangula ſint æqualia. Ducatur ex centro F recta FD biſecans baſim EG, iungaturq́ue AD, FE, & ſuper recta HK æquali ipſi AE, conſtitue bina triangula HIK, HLK, æqualia & ſimilia triangulis AEF, ADE, ſic vt latera HI, IK, lateribus AF, FE, & latera HL, LK, lateribus AD, DE æqualia ſint, adeoq́ue anguli I & L, angulis AFE, ADE ſint æquales. Quoniam igitur axis AF ex hypot. rectus eſt plano baſis, erit c angulus AFE rectus. Angulus quoque ADE rectus eſt, vt colligitur ex demonſtratis in ſecundo caſu quartæ huius. Quare recti etiam ſunt anguli I & L, puncta igitur I, L, H, K ſunt ad circulum cuius diameter HK. Et quoniam conus datus eſt rectangulus vel acutangulus, axis AF erit

vel



vel æqualis ſemidiametro FE, vel maior. Quare cùm AI ipſi AF, & IK ipſi FE ſint æquales, erit quoque HI aut æqualis IK, aut maior. Ergo vertex I trianguli AIK, vel biſecabit arcum HIK, vel erit alterũ punctum biſectionis verſus K. Deinde quia AD, hoc eſt AL, maior eſt quã AF hoc eſt HI, erit arcus HL maior arcu HI, ac proinde vertex L trianguli HLK non ſolùm cadet vltra punctum quo biſecatur arcus HLK, ſed etiam propius adhuc incidet verſus K, quàm alterius trianguli vertex I. Minor igitur eſt altitudo trianguli HLK, quàm trianguli HIK, adeoque minus eſt ALK hoc eſt ADE, triangulum, triangulo HIK hoc eſt AFE. Arqui triangulum AFE æquatur triangulo AFB, cùm omnia vtriuſque latera vicißim ſint æqualia. Ergo triangulum ADE minus etiam eſt triangulo AFB: ac proinde triangulum EAG duplum ipſius ADE (eſt enim EG ex conſtructione biſecta in D) minus eſt triangulo BAC duplo ipſius AFB. ſimiliter demonſtrabimus quoduis aliud triangulum quod per axem non ſit factum, minus eſſe triangulo per axem. In cono igitur recto, &c. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem in demonſtratione fuit aſſumptũ, (in recto) nempè cono acutangulo axem ſemidiametro baſis eſſe maiorem, in cono verò recto rectãgulo æqualem, paucis ſic demonſtrabo.

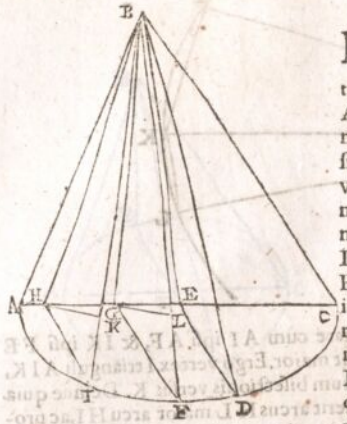
Sit conus rectus acutangulus ſectus triangulo per axem BAC. quoniam in triangulis BFA, CFA, latera BA, CA, BF, FC æqualia ſunt, & FA commune, anguli quoque FAB, FAC æqualia ſunt, ſed totus BAC eſt minor recto vtpote acutus, angulus igitur FAB ipſius dimidius minor eſt ſemirecto. Quare cùm angulus BFA rectus ſit, erit reliquus ABF minor ſemirecto, hoc eſt maior angulo FAB. ergo axis AF [a] minor eſt ſemidiametro FB. [a] 19. primi.

Quod ſi conus fuerit rectus rectangulus, tunc angulus BAC erit rectus, ac proinde BAF, dimidius totius BAC, ſemirectus eſt. Quare cùm angulus BFA rectus ſit, neceſſe eſt, vt reliquus FBA etiam ſit ſemirectus, adeoque æqualis angulo BAF. vnde axis AF & ſemidiameter baſis coni æquales erunt.

PROPOSITIO XII.

ALiter & expeditius præcedens theorema hunc in modum demonſtrabitur.

Demonſtratio.

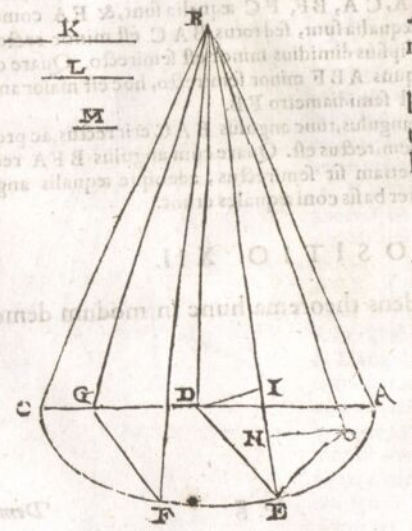


IN cono rectangulo vel acutangulo ſit triangulum per axem BFG & quoduis aliud extra axem IBH, diameter autem baſis coni ſit AEC. ex punctis G ac H ducantur GL, HK normales ad BF, FI. Quandoquidem conus ſit rectangulus vel acutangulus, erit axis BG, vt oſtendi ſuprà, æqualis ſemidiametro GF, aut maior. Ex quo liquet ſegmentum BL non eſſe minus ſegmento LF, ac proinde punctum L cadere vel inter F & punctum medium rectę FB, vel ad ſummum in ipſam medium punctum incidere. Deinde quia angulus BGF, BHI, recti ſunt, vt patet ex dictis prop. 11. & ab ijs normales dimiſſæ GL, HK, erunt [a] rectangula LFB, KIB æqualia quadratis FG, HI. Atqui quadratum GF maius eſt quadrato HI, rectangulum igitur LFB maius eſt rectangulo KIB. ergo cùm BI, BF æquales ſint, IK minor eſt quàm FL. quoniam igitur, vt antè oſtendi, punctum L cadit inter F & punctum medium rectæ BF, punctum K etiam cadet inter I & punctum medium rectæ BI, id eſt BF, & quidem propius verſus I, quàm L, verſus F. liquet igitur [b] rectangulum BKI minus eſſe rectangulo BLF. Atqui quadrata LG, KH, æquantur rectangulis BLF, BKI, ergo quadratum KH minus eſt quadrato LG, ergo normalis KH minor normali LG. Quare cùm baſes BI, BF æquales ſint, triangulum IBH minus eſt triangulo BFG. ſimiliter oſtendam quoduis aliud extra axem triangulum minus eſſe triangulo per axem FBG, illud igitur maximum eſt. Quod fuerat demonſtrandum.

a 8. ſexti.

b 5. ſecundi.

PROPOSITIO XIII.

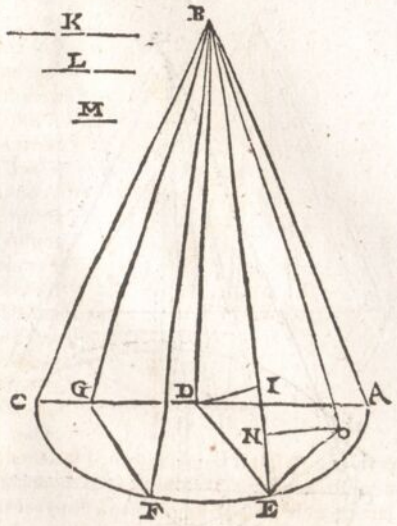


DAtus ſit conus rectus axem habens BD, & ratio maioris inæqualitatis K ad L. Oporteat triangulum exhibere extra axem ad quod BED triangulum per axem datam habeat rationem K ad L.

Conſtructio & demonſtratio.

EX puncto D ad BE normalem ducito DI, fiatque vt K ad L, ſic DI ad M. Tum quadrato M æquale fac rectangulum BNE, & quoniam quadratum M minus eſt quadrato DI, hoc eſt (quia ex angulo recto BDE ad baſim ducta eſt normalis DI) rectangulo BIE, erit quoque BNE rectangulum minus rectangulo BIE. erigatur deinde ex puncto N normalis NO par rectæ M, iunganturq; BO, EO.

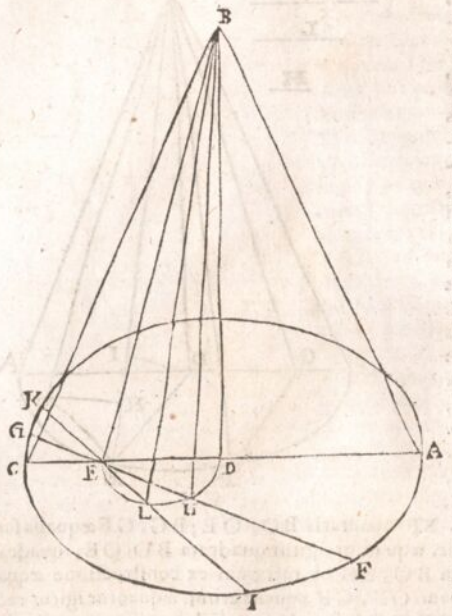
Quo-



Quoniam igitur quadratũ NO æquatur quadrato M, hoc eſt rectangulo BNE, erunt BN, NO, NE tres continuæ. Angulus igitur BOE rectus eſt. Quare cùm triangula BOE, BDE ſuper eadem baſi BE vtraque ſint rectangula, & vnius nempè BOE altitudo NO minor ſit altitudine alterius DI, patet alterutrum E lateribus BO, OE maius eſſe alterius trianguli latere BD, quod idem eſt cum axe coni. ſit latus BO maius axe BD: eritq; hoc nihilominus minus latere coni BE, ſiue BC. Quoniam igitur latus BO maius eſt axe BD, & minus latere BC; intra conum aptari poterit ex puncto B ad diametrum AC, recta AG æqualis lateri BO. factum ſit, & ex G ad BG normalem duc GF & iunge BF. Quandoquidem anguli BOE, BGF recti ſunt, quadrata BE, BF quadratis BO, OE; BG, GF æqualia ſunt; ſed quadrata BE, BF æquantur, æquantur igitur quadrata BO, OE, quadratis BG, GF. Cùm igitur quadrata BO, BG ob rectarum ex conſtructione æqualitatem, ſint æqualia, reliqua etiam OE, GF æqualia erunt. æquantur igitur rectæ OE, GF; in triangulis ergo BOE, BGF ſingula ſingulis latera ſunt æqualia. Ergo ipſa quoque triangula ſunt æqualia. Atqui triangulum per axem BED ad triangulum BOE eandem habet rationem quam normalis DI ad normalem NO, hoc eſt quam DI ad M, hoc eſt quam K ad L: ergo triangulum per axem BED ad triangulum quoque BGF rationem eandem habet quam K ad L. Exhibuimus ergo triangulo per axem, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIV.

IN cono recto triangula non per axem ducta, quorum baſes in eodem puncto ſe interſecant, habent perpendiculares ad baſes è vertice ductas, in peripheria circuli cuius diameter eſt recta inter centrum baſis conicæ & punctum interſectionis interiecta.



a 3. tertij.

Demonſtratio.

IN cono recto ABC interſecent ſeſe mutuo in E puncto quæuis baſes FEG, IEK triangulorum non per axem FBG, IBK, & circa DE, inter centrum D & E punctum interiectum deſcribe circulum DHLE: dico perpendiculares à vertice B ductas ad FEG, IEK, incidere in peripheriam DLE. iungantur enim BL, BH, DL, DH. erit angulus DLE in ſemicirculo rectus; vnde a rectæ IL & LK æquales erunt; eſt autem recta BI æqualis BK; igitur etiam BL normalis eſt ad rectam IK. ſimiliter oſtendemus L normalē eſſe BH ad FG. ergo omnia triangula per E punctum & verticem ducta normales ſuas inuenient in perimetro circelli DLE. quod oportuit demonſtrare.

Scholion.

CVm interſectionis punctum E *aut intra baſim dari poſſit, aut in perimetro baſis, aut extra baſim, ſit vt hic triplex caſus oriatur. primus, quo circellus* DEH *totus baſe comprehenditur. ſecundus quo idem occurrit puncto perimetri* AIC *eundem contingendo: in quo caſu quarta eſt pars circuli, qui fungitur baſis vice coni* ABC: *tertius verò quo extra baſim diffuſus circulum baſeos ſecat in duobus punctis, ſed quia triplex hic caſus diuerſitatem nec in ipſa conſtructione, nec in demonſtratione inducit, hinc ſilentio tam in propoſitione quàm demonſtratione ſuppreſſus eſt.*

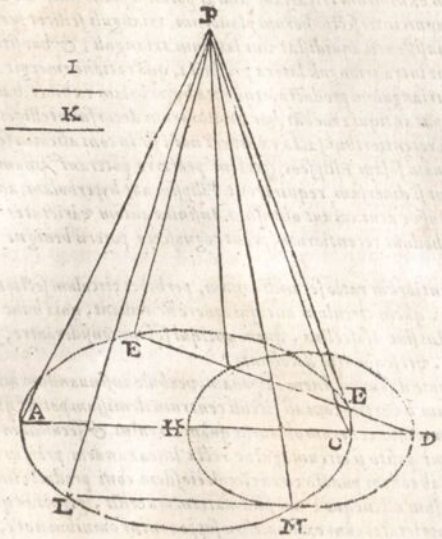
PROPOSITIO XV.

IN cono recto exhibere triangulum quod per apicem coni & punctum datum ſiue intra, ſiue extra coni baſim tranſeat, habeat verò ad triangulum per axem datam rationem.

Conſtructio & demonſtratio.

COnus eſto ABC rectus, & per eius axem facto triangulo ABC detur punctum quoddam D. oporteat verò per punctum D, & verticem coni conſtituere triangulum EBF quod ad triangulum per axem ABC rationem habeat I ad K datam. Inueniatur per duodecimam triangulum LBM, quod habeat ad triangulum ABC rationem I ad K. Deinde ex D puncto ducatur DFE, ſic vt FE ſit æqualis ipſi LM. per ea quæ de circulorum b proprietatibus conſcripſi: & ſecundùm EF & B, agatur planum, hoc ipſum exhibebit triangulum poſtulatum BEF. erit

b 44. de circulis.



erit enim EBF æquale triangulo BLM, cùm basis LM æqualis sit EF ex constructione, & lineæ EB, FB non solùm sint æquales inter se, sed etiam sint æquales rectis LB, BM. Igitur perfecimus quod imperatum fuit.

Scholion.

HActenus conati vtcunque sumus sectiones coni explicare quæ per apicem transeunt siue in recto, siue in scaleno cono: quia verò apud antiquiores, maximè Archimedem, aliâ nomenclaturâ insignitas reperies reliquas coni sectiones, quarum explanationem sequentibus libris prosequi intendimus; hinc operæ pretium iudicaui præmittere quæ ad rem hanc pertinere videbuntur.

In duplici differentia conos esse posuimus, alios scilicet rectos, alios scalenos: antiqui verò eos in triplici differentia posuerunt. Quosdam dixerunt conos rectangulos, nonnullos acutiangulos, alios denique obtusiangulos, denominatione sumptâ ab angulis quos sectio per axes facta contineret ad verticem coni; vnde illis distinctio conorum rectorum & scalenorum ignota fuisse videtur, cùm scalenus conus, omnis generis angulos admittat ad verticem, variata solummodo, secundùm diuersos situs, sectione per axem. Rectangulum itaque conum dixerunt conum Isoscelium qui nullam admitteret varietatem in triangulis per axem exsurgentibus, omnes alios angulos excludens præter rectum. Conum verò rectangulum priùs dispescebant diuisione per axem, ortique inde trianguli latus alio plano secabant ad angulos rectos quod insuper ipsi triangulo esset orthogonum; quam sectionem appellabant coni rectanguli, recentiores autem parabolam dicunt. Conum verò acutiangulum similiter Isoscelium partiebantur bifariam per axem, ac primò quidem sectionem per axem coni instituebant; deinde triangulum ex sectione per axem productum, alio secabant plano, quod tam plano quam lateri trianguli rectum esset; quo fiebat vt alteri quoque crurum occurrens, figuram alterius formæ proferrent, & à parabola longe diuersam, quæ scilicet tota clauderetur intercapedine linearum rectarum trianguli per axem: sectionē inde resultantem coni acutianguli dicebant Isoscelem, denique conum obtusiangulum, eadem praxi & per axem diuidebant, deinde plano ad vnum laterum, & ad ipsum triangulum recto per conum acto, figuram formabant quam coni obtusianguli vocabant, quæ in idem recidit cum hyperbola recentiorum. Hæc igitur antiquorum ratio diuidendi conum, à recentioribus maximè verò ab Apollonio, nonnihil est immutata: conus enim qualiscunque sit ex natura sua tale corpus est, ex quo singula harum sectionum erui possint; quoduis enim trian-

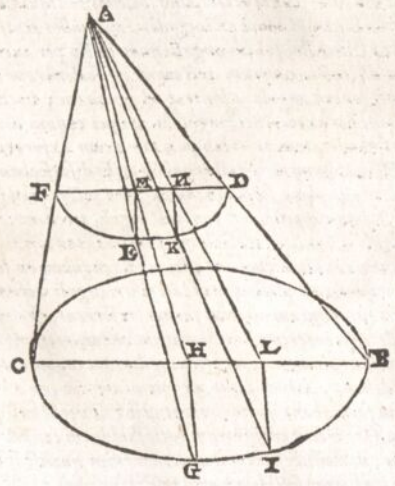
gulum per axem exhibitum trifariam diuidi potest à plano huic ad angulos rectos constituto; aut enim communis intersectio horum planorum, trianguli scilicet per axem, & plani orthogonaliter eidem insistentis æquidistat vni laterum trianguli, & hoc situ parabolam gignit; aut vtrique occurrit intra trianguli latera producta, quaratione emergit Ellipsis; aut vni laterum occurrit extra triangulum producto, atque ita hyperbolam exhibet. has omnes sectiones easdem esse cum illis quas antiqui eruebāt, horum librorum decursu intelliges: non ita tamen vt quæcunque sectio à recentioribus facta exhiberi nata sit in coni alicuius sectione ab antiquis facta; nam antiqui vnam solam Ellipseos speciem proferre poterant vnamq; speciem Hyperbolæ in dato cono, ita vt si diuersam requirerent Ellipsim aut hyperbolam, ad conum confugere deberent magis minúsve acutum aut obtusum. Infinitæ autem varietates oriuntur in quouis cono sectio iuxta methodum recentiorum, prout cognoscere poteris benigne Lector si sequentia prosequaris.

Insuper Recentiorum ratio secandi conum, perhibet circulum sectione non facta ad basim coni æquidistante; quem circulum antiqui eruere nequibant, quia hunc circulum exhibere non valet conus rectus siue Isoscelius, quem antiqui solùm considerauere, sed solummodò ex cono scaleno eruitur, vti sequentia docebunt.

Priusquam huic discursui finem imponam, verbulo insinuandum mihi est cur axem coni determinent lineam à vertice coni ad circuli centrum demissam potiùs quàm ad cētrum Ellipseos, cùm Ellipsis non minùs centrum obtineat quàm circulus, & secundum Ellipseos perimetrum à puncto in sublimi posito si circumagatur recta linea eandem prorsus conicam superficiem describat quam si ab eodem puncto circa circuli eiusdem coni producti lineam circumduxeris. In promptu responsum est, neque enim filia matrem præcedit, gignitur quippe è cono Ellipsis. Insuper circuli proprietates cùm ex elementis supponantur omnibus notæ, inseruiunt rectè & commode demonstrationibus propositionum quæ ex cono eruuntur: Ellipseos autem cùm accidentia ignota sint, frustra ea adhiberetur ad theorematum aut problematum veritates manifestandas. potissima verò ratio mihi videtur, quod Ellipses in cono assignari queant sine numero inter se diuersæ ac proinde pro singulis deberet mutari axis coni: non enim ydem esse possunt axes è vertice coni ad circuli centrum, cum axibus ab eodem vertice ad centra Ellipseon, varietas ergo hæc inimica doctrinæ ellipsin meritò excludit ne baseos munere fungeretur in cono, perfectior tamen videtur cono scaleno Rectus qui præter vnum axem alterum non admittit, vti conus scalenus, ex quo capite imperfectionem includit.

PROPOSITIO XVI.

IN cono quocunque omnis sectio basi parallela circulus est.



a 16. undecimi.

Demonstratio.

DEtur conus ABC cuius basis BGC, & sectio EF æquidistans plano baseos dico DEF esse circulum. ducantur enim AH per centrum & AL quæuis altera in plano trianguli per axem ABC. occurrentes rectæ DF in punctis M, N & HG, LI normaliter erigantur ad BC diametrum, & iunctis AG, AI occurrentibus sectioni DEF in E & K, iungantur ME, NK: quoniam plana æquidistantia sunt DEF, BGC, erunt a quoq; ME, HG, & NK, LI & MN, HL æquidistantes: est igitur

igitur ME, ad HG, vt AM ad AH, hoc est vt AN ad AL, hoc est vt MK ad LI. Itaque permutando ME est ad NK vt HG ad LI, adeoque & quadratum ME ad quadratum NK vt quadratum HG ad quadratum LI. sed quadrato HG æquale est BHC rectangulum, & LI similiter quadratum æquale rectangulo BLC. Igitur ME quadratum est ad NK quadratum vt BHC rectangulum, ad rectangulum BLC, est autem vt BHC rectangulum ad BLC rectangulum, ita rectangulum DMF ad DNF rectangulum, cùm ex ijsdem rationibus composita sint; igitur quadratum ME est ad NK quadratum, vt rectangulum DMF ad DNF, rectangulũ. Iam verò DM est ad BH, vt AM ad AH, hoc est vt ME ad HG. ergo permutando DM est ad ME, vt BH ad HG. sed BH, HG sunt æquales, ergo & DM, ME æquales sunt. Igitur quadratum DM, hoc est rectangulum DMF (nam cùm BC sit bisecta in H, erit & DF in M) æquatur quadrato ME. Quare cùm quadratum ME, vt suprà ostendimus, sit ad quadratum NK, vt rectangulum DMF, ad rectangulum DNF, etiam rectangulum DNF, æquabitur quadrato NK. Denique cùm DF, BC sint parallelæ itemque GH, EM, & vnà GH sit normalis ad vnam BC, erit altera EM normalis ad alteram DF; similiter ostendam KN normalem esse ad DF. Itaque cum normalium EM, KN quadrata æqualia sint rectangulis DMF, DNF, sectio DE, EF circulus est. Quod fuit demonstrandum.

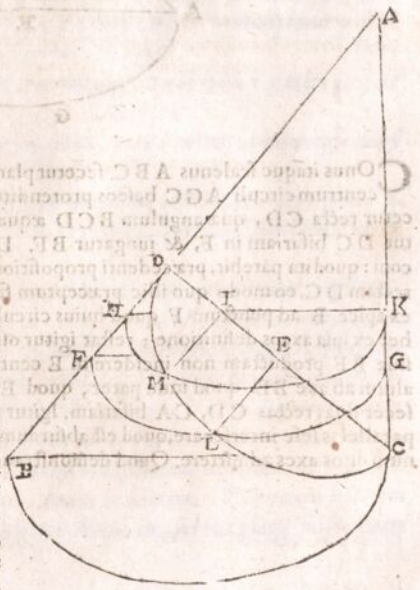
Corollarium.

EX discursu demonstrationis liquet centrum circuli DEF esse in axis puncto E, in quo nimirum axis occurrit rectæ DF, quæ est communis sectio trianguli per axem & circuli DEF.

PROPOSITIO XVII.

IN cono scaleno circulum exhibere qui basi æquidistans non sit.

Constructio & demonstratio.



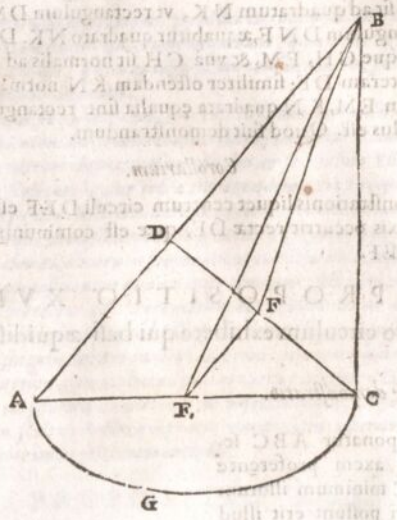
SCalenus conus ponatur ABC sectus plano per axem proferente triangulum ABC minimum illorum quæ per axem fieri possunt erit illud scalenũ, cùm omne scalenum sit quod per axem sit præter maximum per cor. 2. octauæ; angulus igitur ABC minor ponatur angulo ABC: quare fiat angulo ABC æqualis ACD & per rectã DC duc planum rectum ad triangulũ ABC: Dico sectionem inde natam DLC esse circulum. Ducantur enim duo alia plana basi parallela FLG, HMK, quorum communes sectiones cum plano DLC sint rectæ EL, IM. ex 7. huius patet basim coni ad minimũ triangulum ABC rectum esse. ergo & alia plana parallela FLH, HMK triangulo ABC recta erunt: sed & planum DLC triangulo rectum est. ergo communes sectiones LE, MI, rectæ sunt triangulo, adeoque & lineæ DC. Quoniam autem FLG, HMK, circuli sunt per præcedentem, & EL, IM normales DC, erit tam rectangulum FEG æquale quadrato EL, quàm rectangulum HIK, quadrato IM, quia verò similia sunt triangula DIH, & IKC, cum angulo ACD, sit ex constructione æqualis ABC hoc est DHI: erunt puncta HDKC in eodem circulo: similiter ostendam

ostendam puncta quoque FD,GC esse ad circulum : quare rectangula DIC, HIK æqualia sunt, vti & rectangula FEG, & DEC : ac proinde æqualia etiam quadratis IM & EL perpendicularium ad DC. Igitur puncta DMLC, circulus est cuius recta DC est diameter; igitur, &c.

PROPOSITIO XVIII.

OStendendum modò est in quouis cono scaleno duos axes esse.

Demonstratio.



COnus itaque scalenus ABC secetur plano per axem BE, quæ ex vertice B ad centrum circuli AGC baseos protenditur: triangulum productum ABC secetur recta CD, quæ angulum BCD æqualem exhibeat angulo BAC: & diuidatur DC bifariam in F, & iungatur BF. Dico illam esse axem secundum huius coni : quod ita patebit, præcedenti propositione ostensum est sectionem factam per rectam DC, eo modo quo illic præceptum fuit, circulum producere : igitur recta ex apice B ad punctum F quod huius circuli est demissa axis nomen obtinere debet ex ipsa axeos definitione ; restat igitur ostendere BFE rectam non esse lineam siue BF productam non incidere in E centrum basis, ac proinde BF axem esse alium ab axe BE. quod inde patet, quod EF recta sit æquidistans lineæ AB, cùm secet duas rectas CD, CA bifariam. Igitur si recta est linea EFB, sequetur duas parallelas sese intersecare, quod est absurdum. Constat igitur omnem conum scalenum duos axes admittere. Quod demonstrandum fuit.

QVA-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [297] - 240
PUBLIC DOMAIN

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER QVARTVS

DE

ELLIPSI.

ARGVMENTVM.

Ellipsis proprietates illasque naturam methodicè proposituri, rem totam in sex partes diuidere placuit. Ac prima quidem è cono sectionem educit, affectionesque illius essentiales, dein accidentales reliquis necessarias & fundamentales.

Secunda ellipsim diuidit illiusque sectores & segmenta comparat.

Tertia, axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quàm inæqualium ampliorem continet considerationem. Ac illarum primò quidem contemplatur potentiam: deinde lineas, quæ extrema diametrorum coniungunt.

Quarta sectionis polos eorumque passiones ac lineam breuissimam à puncto in axe dato ad peripheriam designat.

Quinta varias ellipsis geneses quæ tum ex lineis, tum è circulo, tum ex ipsa ellipsi oriuntur continet.

Sexta ellipsim cum circulo comparat, in qua hic etiam ordo tenetur, vt primò linearum proportiones ac potentiæ, secundò segmenta & ipsæ sectiones, dein figuræ vtriq; inscriptæ inter se conferantur.

Cæterùm propositiones nonnullæ huius libri ac sequentium duorum sunt Apollonij, sed viâ longè aliâ à me demonstratæ, paucis exceptis, quas nihilominus cæteris apponere visum fuit, ne quid hoc in opere quod ad conicam doctrinam pertineat, studiosus Geometriæ lector desideraret. Cætera omnia, quæ longè maximam atque præcipuam operis partem constituunt, à nobis & inuenta sunt & demonstrata. Quare si quis in recentium quorundam Geometrarum libris theoremata quædam reperiat quæ cum nostris conueniant, is velim intelligat, ea ab annis iam plurimis ac multò ante fuisse à me reperta, quàm authorum illorum libri in lucem prodierint. Quæ paucis lectorem meum docere volui, non vt cuiusquam inuentis detraham, sed vt plagij suspicionem à me remoueam.

DEFINITIONES.

I.

DIameter ellipſeos eſt, recta linea intra ellipſim ducta, quæ omnes lineas, rectæ cuidam æquidiſtantes bifariam diuidit. & ſi quidem ad rectos illas ſecet angulos, axis dicetur: in quauis autem ellipſi binos eſſe axes, & quidem coniugatos (qui extremæ dicuntur diametri) hoc eſt qui mutuas parallelas biſecent ad angulos rectos, ſuo loco patebit.

II.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidiſtantium, ac bifariam diuiſarum.

III.

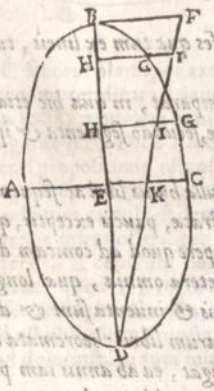
Centrum ellipſeos eſt punctum quod diametrum bifariam diuidit. Quod autem lineæ in ellipſi per centrum ductæ bifariam ſecentur, propoſ. ſeptimâ huius libri demonſtrabimus.

IV.

Diametri coniugatæ dicuntur quæ mutuas parallelas bifariam ſecant.

V.

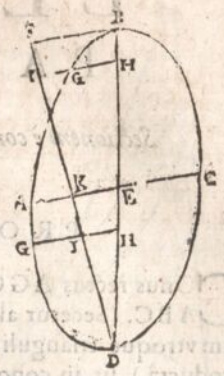
Latus rectum voco lineam, iuxta quam poſſunt ordinatim ad diametrum applicatæ. ſiue, latus rectum eſt menſura iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum poſitarum.



REs in exemplo erit clarior: ſit ABC ellipſeos diameter BD, illiuſque latus rectum repræſentet FB: iunctiſque FD, ſumantur in diametro puncta quæuis H, ponanturque HG normales diametro BD, occurrentes FD in I: ſingula igitur quadrata ordinatim poſitarum æqualia erunt ſingulis rectangulis BHI, (vt propoſitione vndecimâ huius demonſtrabimus) quæ deficiant à rectangulis FBH, rectangulo ſimili, ipſi FBD.

Atque

Atque ita quidem latus rectum tum Apollonius, tum cæteri illum hactenus secuti exposuere. Verùm mihi minimè videtur necessarium vt latus rectum diametro ad rectos applicetur angulos : & quadratorum ac rectangulorum loco possunt Rhombi ac Rhomboides inter se comparari. itaque ad veterem lateris recti acceptionem, nouam aliam adiicio eiusmodi. ad ellipseos diametrum sint ordinatim positæ quotuis rectæ GH : & quædam BF latus rectum, æquidistans ponatur ordinatim applicatis : singuli ordinatim positarum Rhombi HG in angulis IHB æquales erunt singulis IHB Rhomboidibus in ijsdem angulis, qui deficiunt à Rhomboidibus FBH per Rhomboides similes Rhomboidi FBD; Demonstrationem huius vide propos. 12. huius libri.



Porro latus rectũ eo ab antiquis consilio inuentum est, vt certi aliquid & noti haberent ; per quod reliquas sectionum proprietates intelligere at notas sibi reddere faciliùs possent : & vt in singulis coni sectionibus illæ planè diuersæ sunt, ita & lateta recta diuersas in singulis obtinent passiones ; & rectangula lateribus rectis ac diametrorum partibus inter verticem earundem & puncta quibus ab ordinatim positis secantur interceptis contenta longè diuersam in singulis, ad quadrata ordinatim positarum habent proportionem; in ellipsi quidem quadrata illa deficiunt figura simili illi quæ latere recto & transuerso continetur à rectangulis prædictis ; in parabola ijsdem æquantur; in hyperbola verò excedunt figura simili illi, &c. Vnde & nomenclaturam singulæ suam sortitæ sunt.

Cæterùm vti potentiæ ordinatim positarum ad diuersas diametros ; diuersæ quoque sunt, ita & diametris singulis, proprium & vnicum latus rectum assignatur : quæ omnia, vti & lateris recti inuentionem, suis locis demonstrata inuenies.

V I.

Figura est rectangulum quod latere recto & transuerso (id est diametro, nam illa quoque transuersa vocari solet) continetur.

V I I.

Poli seu foci ellipseos, puncta sunt (quæ ex comparatione facta vocat Apollonius) in quibus axis diuisus rectangulum exhibet sub segmentis contentum æquale quartæ parti figuræ : de quo suo loco agendum.

V I I I.

Sectio subcontraria est quando conus plano per axem sectus triangulum producente, alio rursum secatur plano, quod abscindat (triangulo producto) triangulum simile quidem, sed ita positum vt anguli qui in vtroque triangulo sunt æquales ad diuersa sint latera.

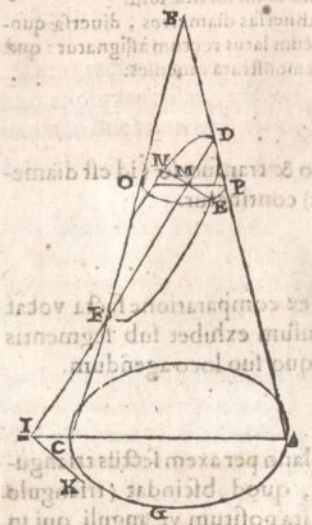
ELLIPSIS
PARS PRIMA

Sectionem è cono educit, primasq; ac essentiales eiusdem exhibet proprietates.

PROPOSITIO PRIMA.

COnus rectus AGCB sectus sit plano per axem faciente triangulum ABC. Secetur alio deinde plano basi coni AGC non parallelo, cum vtroque trianguli latere conueniente in D & F: ex qua (sectione productâ) sit in cono figura DEFN, communis autem sectio illius plani secantis cum triangulo ABC sit DFI; eiusdem verò sectio communis cum plano in quo est coni basis AGC, sit recta IK, quam perpendicularem esse oportet ad AC diametrum basis coni, vel ad rectam quæ diametro AC in directum constituitur.

Dico figuram DEFN circulum non esse.



Demonstratio.

PEr punctum aliquod M rectæ DF ducatur NE parallela ad IK, in plano figuræ DEFN: & per idem illud punctum M ducatur in plano trianguli ABC recta OP parallela ad ACI, per lineas autem NE, OP agatur planum. Erit hoc a parallelum basi AGC, ac proinde b producet circulum OEPN, cuius diameter erit OP.

Quoniam igitur OP est parallela ad AC, triangula BOP, BCA similia sunt. sed BCA isosceles est, ergo & BOP isosceles est. Ergo c rectangulum FMD maius est rectangulo OMP; sed rectangulum OMP d æquale est rectangulo NME ergo rectangulum FMD maius est rectangulo NME patet igitur ex 35. tertij figuram DEFN circulum non esse. Quod erat demonstrandum.

a 15. vndecimi.
b 16 prolegom.
c 34. de lineis.
d 35. tertij.

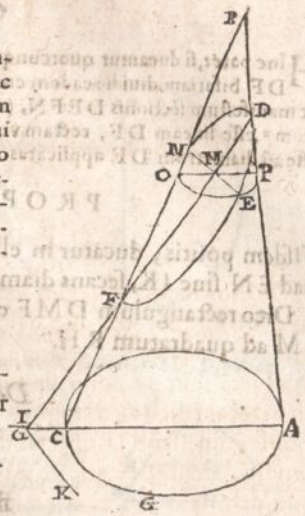
PROPOSITIO II.

DAtus iam sit conus scalenus ABC, & planum secans quod producit in cono figuram DEFN, neque sit parallelum basi coni AGC, neque subcontrariè positum. Cætera verò omnia ponantur & fiant eadem quę propositione prima.

Dico rursum figuram DEFN circulum non esse.

Demon-

Demonſtratio.



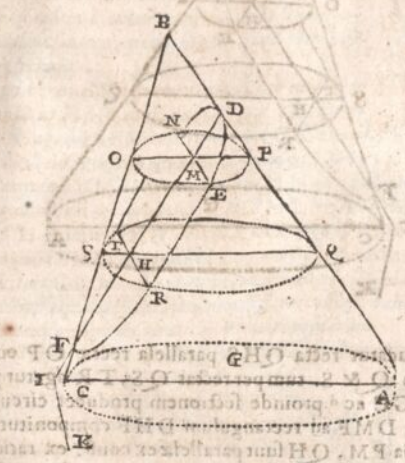
QVoniam OP eſt parallela ad AC eamque ſecat FD in M non ſubcontrariè, hoc eſt angulum BFD non conſtituens æqualem angulo BAC, patet ex 36. libri noſtri primi rectangulum FMD inæquale eſſe rectangulo OMP. ſed rectangulum OMP æquatur rectangulo NME. ergo rectangulum FMD rectangulo etiam NME inæquale eſt; liquet igitur ex 35. tertij figuram DEFN non eſſe circulum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

DAtus ſit conus quicunque ſiue rectus ſiue ſcalenus, & cætera ponantur & fiant eadem quę ſuprà:

Dico rectam NE à recta DF ſecari bifariam in M.

Demonſtratio.



REcta PM ex hypotheſi eſt parallela ad rectam AC, & ME parallela ad IK. Quare PM, EM angulos comprehendunt æquales; atqui angulus AIK ex hypotheſi rectus eſt, communis enim ſectio IK poſita fuit perpendicularis ad ACI, propoſitione primaiergo etiam PME rectus eſt. Itaque cùm [a] ſectio ONPE ſit circulus, cuiuſque diameter OP, manifeſtum eſt [b] EMN, à diametro circuli OP, ad quam normalis eſt, biſecari in M. ſed ex hypotheſi punctum M tribus rectis OP, NE, DF communis eſt. ergo NE à DF, biſecatur in M. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. prolog.
[b] 3. tertij.

Corollarium.

HInc patet, si ducantur quotcunque rectæ ad IK siue NE parallelæ, omnes à DF bifariam diuidi: eadem enim est in omnibus demonstratio. Ex quo vlteriùs fit manifestum sectionis DEFN, (quam ellipsim deinceps nominabimus) diametrum [a] esse lineam DF, rectam verò NE [b] cæteraſque huic parallelas ordinatim esse ad diametrum DF applicatas.

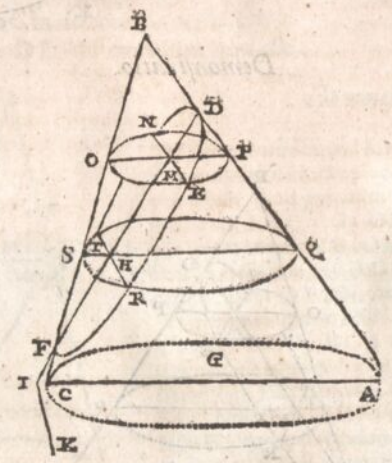
[a] Defin. 1.
[b] Defin. 2.

PROPOSITIO IV.

IIsdem positis, ducatur in ellipsi DEFN linea quæuis RT, parallela ad EN siue IK, secans diametrum DF in puncto H.

Dico rectangulum DMF esse ad rectangulum DHF vt quadratum EM ad quadratum RH.

Demonstratio.



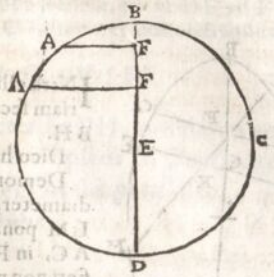
PEr punctum H ducatur recta QHS parallela rectæ OP occurrens lateribus trianguli ABC in Q & S. tum per rectas QS, TR agatur planum, erit hoc [c] parallelum basi AGC ac [d] proinde sectionem producet circulum QRS, iam verò ratio rectanguli DMF ad rectangulum DHF componitur ex ratione DM ad DH, (hoc est, quia PM, QH sunt parallelæ ex const. ex ratione PM ad QH) & ex ratione MF ad HF (hoc est, quia MO, HS ex construct. sunt parallelæ, ex ratione MO ad HS.) Atqui ratio rectanguli PMO ad rectangulum QHS componitur etiam ex rationibus PM ad QH, & MO ad HS. ergo rectangulum DMF est ad rectangulum DHF vt rectangulum PMO ad rectangulum QHS; hoc est quoniam sectiones PEO, QRS, circuli sunt, vt rectangulum EMN ad rectangulum RHT, hoc est, quia [e] EN, RT bisectæ sunt à diametro DF in M & H, vt quadratum EM ad quadratum RH. Quod erat demonstrandum.

[c] 15. vndecimi.
[d] 16. prælegom.
[e] 3. huius.

Scholion.

Scholion.

EXhibuimus propoſitione hac proportionem rectangulorum quæ à ſegmentis diametri ellipſeos conſtituuntur ad quadrata, ordinatim ad eandem diametrum applicatarum: quæ quidem proprietas ellipſeos eſt primaria, & eſſentialis: verùm quia hæc ita ellipſi ineſt, vt etiam in circulo ſuo modo reperiatur, operæ pretium facturum me exiſtimaui, ſi differentiam, illum inter & ellipſim, breuiter in ſcemate appoſito oſtendam.



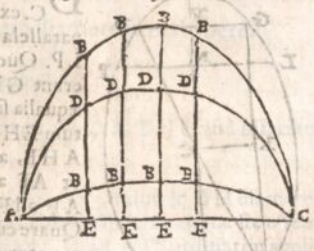
Eſto circuli ABC *diameter* BD: *centrum* E: *& normales ad diametrum* AF: *ſit autem & ellipſis* HIK *diameter quæcunque* IL, *quam ordinatim ſecent* HN: *centrum verò ſectionis* M. *Quoniam igitur in circulo*, AF, *rectæ ſunt normales ad diametrum* BD, *erunt rectangula* BFD *æqualia quadratis* AF, *proindeq;* AF *quadratum, eſt ad quadratum* AF *vt* BFD *rectangulum ad rectangulum* BFD: *eodem modo cum* HN *rectæ in ellipſi ordinatim poſitæ ſint ad diametrum* IL, *erit* HN *quadratum ad quadratum* HN, *vt* INL *rectangulum ad rectangulum* INL: *illud igitur vtrique ſectioni conuenit; eam eſſe proportionem inter quadrata ordinatim poſitarum, quæ rectangulorum eſt, ſub ſegmentis diametri ad quam ordinatim ſunt poſitæ: in hoc verò differunt, quod in circulo proportio rectangulorum ſub ſegmentis diametri, ad quadrata ordinatim poſitarum ſit æqualitatis; in ellipſi verò (ſi caſum diametrorum coniugatarũ æqualium excipias, de quo plura ſuo loco) inæqualitatis. quod primâ & ſecundâ huius planum fecimus.*



Ex quo ſequitur primò, in ellipſi axem vnum altero maiorem eſſe. quod ſic oſtendo: ſit in HIK *ellipſi axis aliquis* IL *quem ordinatim ſecent* HN. *agatur per* M *centrum recta* GK *æquidiſtans ipſi* HN: *dico illos axes eſſe inæquales: eſt enim vt* INL *rectangulum ad rectangulum* IML, *ſic quadratum* HN *ad quadratum* GM. *& permutando vt* INL *rectangulum ad quadratum* HN *ſic* IML *rectangulum ad quadratum* GM; *ſed rectangulum* INL *quadrato* HN [a] *eſt inæquale: ergo & rectangulum* IML, (*hoc eſt quadratum* IM) *quadrato* GM *inæquale eſt: ergo recta* IM *rectæ* GM *eſt inæqualis, ergo tota* IL, *nempe axis, toti* GK *hoc eſt axi alteri, inæqualis eſt. Quod erat propoſitum.* [a] 1. & 2. huius.

Deinde ſi axes in ellipſi æquales eſſent, iam non differret ellipſis à circulo: eo quod rectangula ſub ſegmentis axeos, æqualia eſſent quadratis ordinatim poſitarum.

Sequitur ſecundò, ſi ſuper axe AC *ellipſeos* ABC, *deſcribatur ſemicirculus* ADC, *ducanturq; ordinatim lineæ* BE *occurrentes ſemicirculo in* D: *quod* BE *ſit ad* BE, *vt* DE *eſt ad* DE. *eſt enim tam in ellipſi quàm in ſemicirculo, vt* AEC *rectangulum ad rectangulum* AEC *ſic* BC *quadratum ad quadratum* BE, *& DE quadratum ad quadratum* DE. *vnde quoque eſt vt quadratum* BE *ad quadratum* BE *ſic* DE *quadratum ad quadratum* DE.

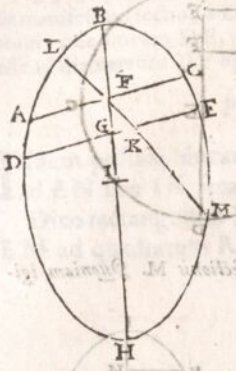


PRO-

PROPOSITIO V.

IN data ellipsi diametrum inuenire.

Constructio & demonstratio.



a *defin.1.*

INtra ellipsim ducantur parallelæ AC, DE, quas bifariam seca in punctis F, G; & per F ac G, ducatur recta BH.

Dico hanc esse diametrum.

Demonstratio est manifesta. si enim BH non est diameter, sit LFM, secans DE in K. Quoniam igitur LM ponitur esse diameter, & bisecat è parallelis vnam AC, in F, bisecat [a] alteram quoque DE in K. Quod fieri non potest cùm ex construct. DE bisecta sit G. Non igitur LM aut alia quæuis ducta per F est diameter præter eam, quæ etiam transit per G, hoc est præter ipsam BH. In data igitur ellipsi inuenimus diametrum, quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

DAtæ ellipseos centrum reperire.

Constructio & demonstratio.

PEr præcedentem quære diametrum ellipseos BH, quam seca bifariam in I. Ex definitione tertia patet ellipseos centrum esse I.

Corollarium.

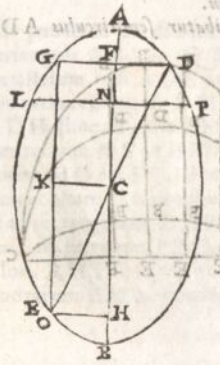
PAtet ex hac propositione omnem diametrum transire per centrum. Ex quo & conuersam facilè deduces, omnes nimirum lineas per centrum transeuntes esse diametros.

PROPOSITIO VII.

DAta sit ellipsis ADB, cuius diameter AB, recta verò LP, vna sit earum, quas propositione tertiâ huius demonstrauimus à diametro secari bifariam: centrum ellipseos sit C.

Dico omnes lineas per centrum ductas in centro diuidi bifariam.

Demonstratio.



b *4. huius.*

c *14. sexti.*

d *definit. 3.*

e *3. huius.*

DVcta sit enim quæcunque recta DO, per centrum C, ex D ducantur DFG parallela ad LP, GE parallela ad AB, & EH, CK parallelæ ad GD, siue LP. Quoniam igitur FGEH parallelogrammum est, erunt GF, EH æquales: vnde & quadrata GF, EH æqualia sunt. Atqui [b] vt quadratum GF est ad quadratum EH, ita rectangulum AFB est ad rectangulum AHB, æquantur igitur rectangula AFB, AHB. ergo vt AF ad AH, sic BH ad BF: ergo diuidendo vt AF ad FH, sic BH ad HF. æquantur igitur AF, BH. Quare cùm tota quoque diameter AB bisecta sit in C, vt patet [d] ex definitione centri, reliqua etiam FH, bisecta est in C. Quoniam igitur KC ipsis GD, EH est parallela, recta quoque GE bisecatur in K. est verò [e] & DG bisecta in F, vtpote ipsi LP parallela. Ergo est vt

DG

DG ad GF, hoc est vt DG ad CK, sic GE ad KE. ergo puncta DCE sunt in directum; sed etiam puncta DCO, sunt in directum, cùm ex hypothesi DCO sit linea recta. Vna igitur eademque recta sunt DCE, & DCO. Atqui DCE bisecta est in C, (cùm enim ex constr. GE, FC sint parallelæ, erit vt DF ad FG, sic DC ad CE.) Ergo etiam DCO bisecta est in C. Quod erat demonstrandum.

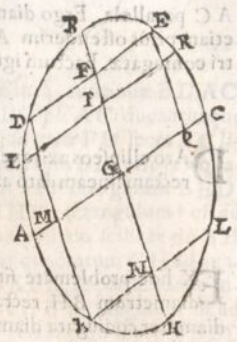
PROPOSITIO VIII.

DAta sit ellipsis ABCH, cuius diameter sit BH; ordinatim verò ad diametrum applicata LPR: centrum ellipseos G. Ducta autem sit per centrum G, recta AGC ordinatim applicatæ parallela.

Dico BH, AC diametros esse coniugatas.

Demonstratio.

SVmatur in AG quoduis punctum M, per quod ducatur KD diametro BH parallela, occurrens ellipsi in punctis D & K; ex quibus ducantur DFE, KNL, ipsi LR parallelę. Quoniam igitur DK, NF parallelogrammum est, rectæ DF, KN, adeoque & quadrata DF, KN æquantur. Quare cùm [a] rectangulum BFH sit ad rectangulum BNH vt quadratum DF ad quadratum KN, rectangula BFH, BNH etiam sunt æqualia, ac proinde, vt ostensum in præcedenti, BF & NH æquantur, sunt verò & BG, HG æquales. Ergo & reliquę FG, NG æquales sunt, siue FN bisecta est in G. Ergo & KD parallela diametro BH bisecatur in M ab AC. similiter ostendam quasuis alias diametro BH parallelas bisecari ab AC. Quare cùm etiam [b] AB bisecet DE, LR ceteraſque omnes quæ sunt ordinatim positæ ad BH, & parallelæ ex hypothesi ipsi AC; patet ex definitione [c] BH, AC diametros esse coniugatas.



a 4. huius.

b 3. huius.

c definit. 4.

Corollarium.

QVæ per centrum ad ellipseos axem datum perpendicularis ducitur, est axis dato axi coniugatus.

Ex discursu iam allato facile sibi lector demonstrationem huius rei eliciet.

PROPOSITIO IX.

DAta sit ellipsis eiusque diameter BH.

Oporteat diametro BH coniugatam diametrum exhibere.

Constructio & demonstratio.

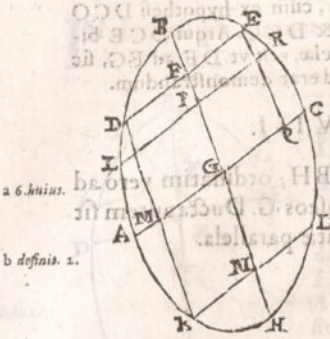
DVcatur recta aliqua KD parallela ad BH, & vtraque DK, BH diuisâ bifariam in M & G, per M & G, ducatur AC.

Dico AC, BH coniugatas esse diametros.

Ac primò quidem rectam AC esse diametrum patet ex 5. huius. & BH diameter est ex hypothesi; ambæ igitur sunt diametri. Quod autem sint coniugatæ sic ostendo. Quoniam AC diameter est & bisecat KD, erit [d] KD ad AC ordinatim applicata. ergo & reliquæ ipsi KD parallelæ, erunt ad AC, ordinatim applicatæ, hoc est [e] à diametro AC bifariam secabuntur. sed DK ex constructione cum sibi parallelis, parallela est ad diametrum BH. ergo diameter AC bisecat diametro BH parallelas. Ducantur deinde DE, parallela diametro AC & EQ, parallela rectæ DK.

d definit. 2.

e ibid.



parallelogrammum igitur est MDEQ, in quo quia FG ipsis DM, EQ ducta est parallela, erit DF ad FE, vt MG ad GQ. latera quoque parallelogrammi DM, EQ adeoque & quadrata BM, EQ, æqualia erunt. Iam verò quia DM, EQ, sunt ad diametrum AC, ordinatim positæ, ratio inter rectangula AMC, AQC erit eadem quæ inter quadrata DM, EQ, hoc est æqualitatis : ac proinde vt patet ex demõstratis in septima huius, æquales erunt AM, QC. Quare cùm a & totæ AG, CG, æquales sint, (est enim B centrum ellipseos ; quia bisecat diametrum BH) etiam reliquæ MG, QC, æquales sunt. quoniam igitur est vt MG ad GQ, sic DF ad FE; etiam DF, FE æquantur, hoc est DE bisecta est in F. Ergo ex definit. b DE est ad diametrum BH ordinatim posita, ergo & reliquę ipsi parallelæ sunt ad BH ordinatim positæ, hoc est bisecantur à BH. Atqui DE ex constructione, cum sibi parallelis, est alteri diametro AC parallela. Ergo diameter BH bisecat parallelas diametro AC. Quare cùm etiam priùs ostenderim AC bisecare parallelas ad BH, erunt c BH, AB diametri coniugatæ. Factum igitur est quod petebatur.

a 6. huius.

b definit. 2.

c defin. 4.

Corollarium primum.

DAto ellipseos axi, axem coniugatum inuenies, si per centrum ellipseos duxeris rectam lineam dato axi perpendicularem. res patet ex corollario octauæ.

Corollarium secundum.

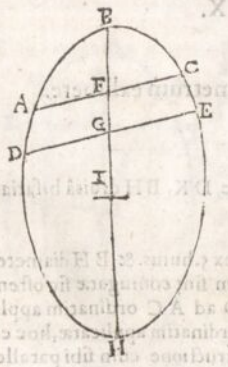
EX hoc problemate fit manifestum qua ratione ex dato in ellipsi puncto D, ad diametrum BH, recta linea ordinatim debeat applicari. Inueniatur enim AC diameter coniugata diametro BH; & ex dato puncto D ducatur DFE ipsi AC parallela.

Dico DFE ordinatim esse positam ad diametrum BH. Demonstratio patet ex propositione.

PROPOSITIO X.

ORdinatim positarum (AC, DE, &c.) illa maior est quæ centro (I) vicinior.

Demonstratio.



REctangulum BGH maius est rectangulo BFH, vt patet ex quinta secundi. Atqui quadratum EG est ad d quadratum CF vt rectangulum BGH ad rectangulum BFH. Ergo quadratum EG maius est quadrato CF. ergo & ordinatim posita EG maior ordinatim positâ CF. Quod erat demonstrandum.

d 4. huius.

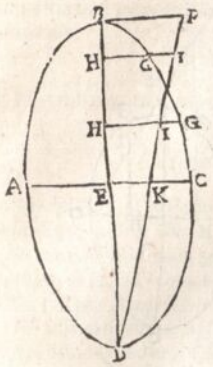
est

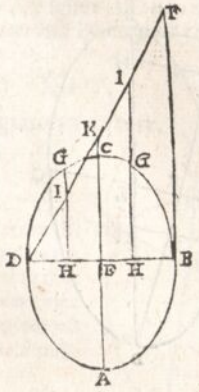
PROPOSITIO XI.

ESto ABC ellipsis axis BD. oportet illius latus rectum exhibere.

Con-

Constructio & demonstratio.





AXi BD per E centrum ducatur [a] coniugatus AC, fiantq; continuæ BD, AC, BF: dico FB esse latus rectum. æquidistet enim BF ipsi AC: ducanturque ordinatim lineæ GH quæ iunctæ FD occurrant in I: ipsa verò FD secet AC lineam in K. Quoniam EC, GH ordinatim positæ sunt ad axem BD, erit vt [b] quadratum GH ad quadratum EC, sic BHD rectangulum ad rectangulum BED: sed vt BHD rectangulum ad rectangulum BED, sic IHB rectangulum [c] est ad rectangulum KEB (quia ex ijsdem rationem habent compositam scilicet ex BH ad BE, & ex HD ad ED, hoc est HI ad EK.) igitur vt quadratum GH ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad rectangulum KEB, & permutando inuertendo vt KEB rectangulum ad quadratum CE, sic IHB rectangulum est ad quadratum GH: sed cùm [d] AC quadratum sit æquale rectangulo super FBBD (cùm ex construct. BD, AC, BF sint tres continuæ) erit EC quadratum, (nimirum quarta pars quadrati AC est enim F, [e] AC bisecta in E) æquale rectangulo KEB quartæ parti rectanguli super FBBD. igitur & quadratum HG æquale est rectangulo IHB: ergo HG potest spatium quod adiacet ipsi FB latitudinem habens HB, deficiens ab FBH rectangulo, similis figuræ rectangulo, BFD: quare FB [f] latus rectum est. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

a 2 coroll. 9. huius.
b 4. huius.
c 23. sexti.
d 17. sexti.
e 4. huius.
f definit. 6.

Corollarium.

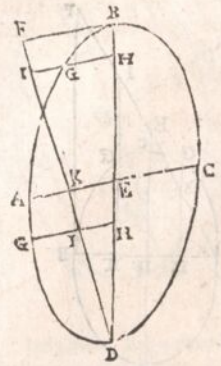
HInc sequitur primò quatuor lineas, nimirum latus rectum axis minoris, axem maiorem, axem minorem, & latus rectum axis maioris in continua esse analogia.

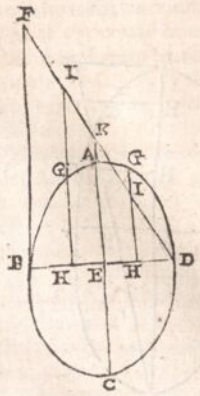
Sequitur secundò qui datis lateribus rectis axium, ellipsin exhibuerit, quod inter binas datas, duas medias inuenerit.

PROPOSITIO XII.

ESto ABC ellipsis diameter quæcunque BD, oportet illius latus rectum exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.





a *9. huius.* DVcatur per E centrum diameter A C [a] coniugata ipſi B D, fiantque continuæ B D, A C, B F, ac B F quidem æquidiſtet diametro A C : ducaturque linea F D, quæ A C rectam ſecet in K, ducanturque ordinatim lineæ G H, quæ F D lineæ occurrant in I: Quoniam B D, A C, F B lineæ ſunt continuæ, erit A C quadrato æquale rectangulum ſuper F B, B D; igitur & quadrato A E (nimirum quartæ parti quadrati A C, eſt enim A C biſecta in E) æquale rectangulum ſuper K E, E B, quarta pars rectanguli F B D: quare, vt in præcedenti oſtendimus, ita etiam hic

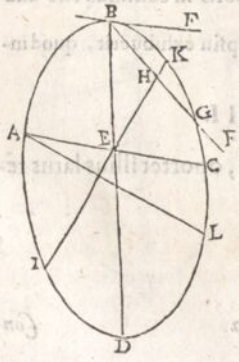
b *23 ſexti.* oſtendemus H G quadrato æquale eſſe rectangulum I H H B. atqui Rhombus [b] I H in angulo I H B eſt ad Rhomboidem I H B in eodem angulo, vt quadratum I H ad rectangulum I H B, (rationes enim Rhombi ad Rhomboidem & quadrati ad rectangulum ex ijſdem rationibus componuntur nempe ex I H, ad I H & I H ad H B,) ergo cùm quadratum I H æquale ſit rectangulo I H B, etiam Rhombus I H, Rhomboidi I H B æqualis erit; recta igitur I H poteſt Rhomboidem in angulo ordinatim applicatæ I H B, qui (quod demonſtratu eſt facile) à Rhomboide F B H in eodem angulo, deficit Rhomboide ſimili ei qui in eodem angulo ſit à diametro

c *definit. 7.* D B & recta B F. igitur F B eſt latus [c] rectum. Quod petebatur.

PROPOSITIO XIII.

OMnis recta (B F,) quæ per terminum diametri (B D) ducitur ordinatim applicatæ (A C) æquidiſtans, ellipſim contingit.

Et quæ tangenti ducitur parallela, eſt ordinatim ad diametrũ applicata.



Demonſtratio.

SI enim recta B F non contingat ellipſim, ſecet illam in G; diuisâque B G bifariam in H, agatur per H & E, K I occurrens vtrimque peripheriæ in I & K. Quoniam recta B G per conſtructionem æquidiſtat A C, vtramque autem bifariam ſecet recta I K

d *patet ex 5 huius.* [d] erit I K diameter & A C, B G lineæ ordinatim ad illam poſitæ; ſecat autem per conſtructionem recta A C ordinatim quoque diametrum B D, igitur vna eademque recta A C ordinatim ſecat duas diametros B D, I K. Quod fieri non poteſt; alias enim quę ipſi A C duceretur parallela, etiam ab vtraque diametro B D, K I ac proinde in duobus punctis biſecaretur; igitur patet F B lineam, ſectionem con-

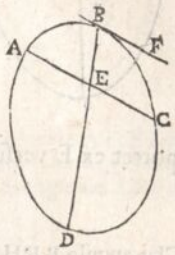
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [309] - 252
PUBLIC DOMAIN

contingere : quod erat primum. Quod si tangenti BF parallela ducatur quæuis AC, occurrens diametro in E, erit ordinatim ad diametrum posita. Si non ducatur ex A ordinatim AL: erit AL parallela contingenti BF. quare & ipsi AC æquidistat, quod fieri non potest, cùm eandem secet in A : igitur AL non est ordinatim posita nec quæuis alia præter AC, quod erat alterum. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO XIV.

PEr datum in peripheria punctum contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.



ESto ABC ellipsis & punctum in peripheria datum B, oportet per B rectam ducere quę sectionem contingat in B. inueni [a] centrum, & per hoc ex dato puncto B duc diametrum BD, ad [b] quam ponatur ordinatim quæuis linea AC, cui per B agatur parallela BF. manifestum igitur est [c] BF esse tangentem; igitur per datum in peripheria punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 6. *huius.*

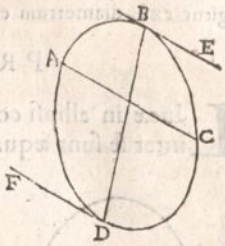
b 11. *huius.*

c 13. *huius.*

PROPOSITIO XV.

LIneæ quæ per extremitates diametri ductæ, ellipsim contingunt, inter se æquidistant.

Demonstratio.

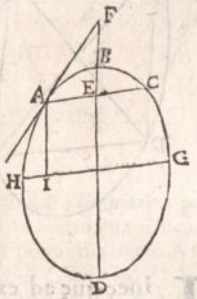


DVcatur enim quæuis AC ordinatim ad diametrũ: manifestum est ex 13. huius tam BC quàm DF lineas illi æquidistare, adeoque & inter se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

COntingentes ductæ per extremitates ordinatim positæ, conueniunt cum diametro extra sectionem.

Demonstratio.

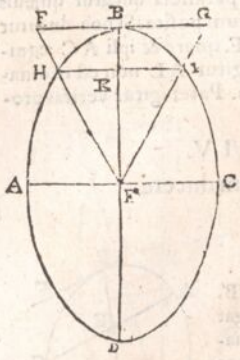


SIt ABC ellipsis diameter BD, & ordinatim posita AEC, agaturque per A tangens AF, dico illam cum diametro conuenire in F. Inuentâ enim HG [d] diametro coniugatâ ipsius BD, demittatur ex A linea AI æquidistans BD. quoniam igitur AI, BD æquidistant, & AF occurrat rectæ AI, patet productam quoque conuenire cum BD. Quod fuit demonstrandum.

d 13. *huius.*

PROPOSITIO XVII.

ELlipsim ABC cuius axis BD, contingat in B linea FG, sumptisq; in contingente æqualibus partibus FB, BG, dem ittantur ex F & G diametri duæ FE, GE occurrentes ellipsi in H & I. dico iunctam HI æquidistare ipsi FG.



Demonſtratio.

a 4. *huius.*

POnatur HK parallela FG, quæ producta occurrat EG in I; erit itaque HK æqualis KI. Ergo, cùm rectangulum BKD ad BED, [a] eam habeat rationem, quam HK quadratum ad quadratum AE, erit quoque BKD rectangulum ad rectangulum BED, vt IK quadratum ad quadratum EC: vnde punctum I eſt ad ellipſim, & HI linea perimetrum BIC, & EG rectam in eodem puncto interſecat. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

EAdem manente figura, ſint ABC ellipſeos axes AC, BD, & HE diameter quæcunque, oportet ex E verſus C diametrum educere, æqualem ipſi HE.

Conſtructio & demonſtratio.

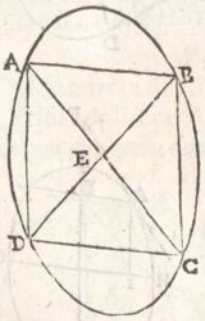
FIat angulo BEH æqualis angulus BEI, dico rectam EI ſatisfacere petitioni; productæ enim lineæ HE, EI, occurrant actæ per B contingenti in F & G. Iungantur puncta H, I. quoniam anguli BEH, BEI ponuntur æquales, ſunt autem & EBF, EBG anguli recti, & BE linea communis, patet FBE, GBE triangula, adeoque & latera FB, BG inter ſe eſſe æqualia; vnde & HI [b] æquidiſtat FG, eſtque vt FE ad GE, ſic HE ad IE, quare HE, IE lineæ æquales; igitur ex E diametrum eduximus, &c. Quod erat faciendum.

b *per* 17. *huius.*

PROPOSITIO XIX.

LIneæ in ellipſi coniungentes extrema quarumcunq; diametrorum inter ſe ſunt æquales & parallelæ.

Demonſtratio.



c 7. *huius.*

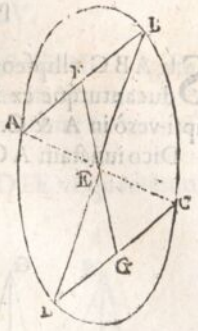
SEcent ABC ellipſim diametri duæ quæuis AC, BD. dico iunctas AB, CD, item AD, BC, eſſe inter ſe æquales & parallelas: cùm DB, AC biſectæ ſint in E, erit vt DE ad EB, ſic CE ad AE, & permutando vt DE ad CE, ſic BE ad AE. ſunt verò & anguli ad E æquales, ſimilia igitur ſunt triangula DEC, AEB; ergo vt DE ad EB, ſic DC ad AB; quare cùm DE, EB æquentur, etiam AB, DC æquales erunt. ſimiliter oſtendemus AD, BC æquales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

LIneę quę ad extremitates diametri, intra ſectionem æquidiſtantes ponuntur, æquales quoque erunt inter ſe.

Demon-

Demonſtratio.



SEcet ABC ellipſim diameter quæcunque BD, ducanturque ex B & D, intra ſectionem parallelæ AB, CD. dico illas inter ſe eſſe æquales. inuento [a] centro E, & AB biſecta in F, iunge FE, & produc in G, & quoniam EF diameter biſecat AB, biſecat etiam DC ipſi AB, parallelam. Deinde quia ſimilia ſunt triangula FEB, DEG; erit DE ad DG, vt EB ad BF: & permutando vt DE ad EB, ſic DG ad BF. ſed DE, EB æquantur. ergo & BF, DG, quę ſunt, vt iam oſtendi, ipſarum AB, DC dimidię. Ergo & totę AB, DC æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. huius.

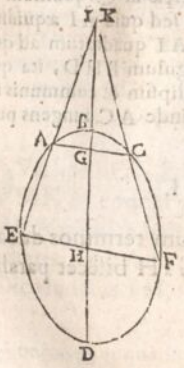
Corollarium.

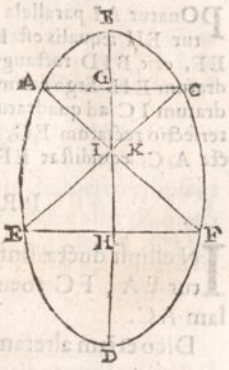
HInc ſequitur iunctas AE, EC eſſe in directum: cùm enim latera AF, FE æqualia ſint duobus lateribus CG, GE & anguli æqualibus lateribus contenti, æquales, patet AFE, CGE triangula eſſe inter ſe æqualia, & angulum AEF æqualem angulo CEG, adeoque AE, EC lineas in directum.

PROPOSITIO XXI.

LIneę per extremitates duarum parallelarum inęqualium in ellipſi ductę, conueniunt in eodem puncto cum diametro, ad quam ordinatim poſitæ ſunt parallelę.

Demonſtratio.





SEcent ECD ellipſim duę quęuis parallelæ inęquales AC, EF, ordinatim poſitam ad diametrum DB. dico iunctas EA, FC cum BD diametro quam ſecant ordinatim in eodem puncto conuenire. Quoniam ordinatim ponuntur lineæ AC, EF ad diametrum BD, ambæ biſecantur in G & H. vnde AG ad GC vt EH ad HF. & permutando vt AG ad EH, ſic GC ad HF, concurrat iam EA cum diametro in I; altera verò FC in K. erit ergo vt IG ad IH, ſic IA ad IE. ſed etiam vt IG ad IH, ſic KC ad KF, eſt enim KC ad KF, vt CG ad FH, hoc eſt, vt ante oſtendi, vt AG ad EH, hoc eſt vt IG ad IH. ergo puncta I & K eadem ſunt; ergo punctum I communis eſt interſectio rectarum EI, FI, HI. Quod erat demonſtrandum.

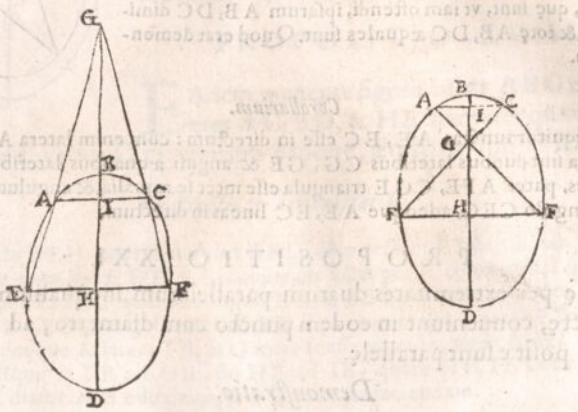
PRO-

PROPOSITIO XXII.

SIt ABC ellipſeos diameter BD ad quam ordinatim poſita ſit EF, ducanturque ex E & F lineæ occurrentes diametro in puncto G, ellipſi verò in A & C.

Dico iunctam AC, æquidiſtare EF.

Demonſtratio.



POnatur AI parallela EF & producta occurrat FG lineæ in C. quoniam igitur EH æqualis eſt HF, erit & AI ipſi IC æqualis; ſed quia AI æquidiſtat EF, erit BID rectangulum ad rectangulum BHD, vt AI quadratum ad quadratum EH. Ergo etiam, vt rectangulum BID ad rectangulum BHD, ita quadratum IC ad quadratum HF. vnde punctum C eſt ad ellipſim & communis interſectio rectarum FG, AI cum perimetro BCF; ac proinde AC iungens puncta A, C, æquidiſtat EF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

IN ellipſi ductæ ſint parallelæ AC, EF, per quarum terminos ducantur EA, FC coeuntes in G. & per G ducta GIH biſecet parallelam AC.

Dico etiam alteram biſecari.

Demonſtratio.

VT HG ad IG, ſic EH ad AI, & vt HG ad IG, ſic FH ad CI. ergo EH ad AI, vt HF ad IC. ergo permutando EH ad HF, vt AI ad IC. ſed AI, IC æquantur. ergo & EH, HF æquantur, adeoque tam EF quàm AC ſunt biſectæ. ergo GIH diameter eſt. quod erat demonſtrandum.

PRO-

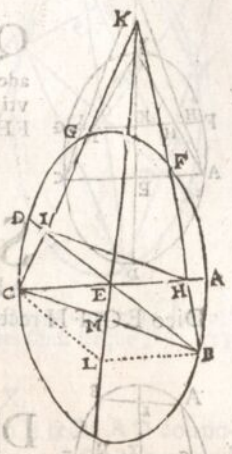
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [313] - 256
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXIV.

SEcent ABC ellipſim diametri duæ AC, BD, iunctaque BC, agatur per E centrum diameter KL, ſecans BC bifariam in M, & ex B & C rectæ ducantur BF, CG, ad idem diametri punctum G ſecantes AC, BD lineas in H & I.

Dico rectangulum AHC eſſe ad rectangulum DIB vt quadratum AC ad quadratum DB.

Demonſtratio.



POnatur ex C linea CL parallela BD, occurrens diametro KL in L, & iunge BL. quoniam CL æquidiſtat DE, erunt EMB, CML triangula inter ſe ſimilia: quia verò CM, MB æquales ſunt, æqualia quoq; erunt triangula CML, EMB & lateri EM, æquale latus LM; igitur in triangulis BML, CME, duo latera CM, ME, æqualia ſunt duobus lateribus BM, ML. ſed & anguli ijs contenti BML, EMC æquantur. Ergo ad baſes anguli LBM, ECB æquantur, ergo BL, CEA ſunt parallelæ. Ergo BH ad HK, vt LE ad EK, hoc eſt (quoniam ex conſtructione BI, CL ſunt parallelæ) vt CI ad IK. Ergo IH æquidiſtat CB, & eſt vt HE ad EC, ſic IE ad EB, & componendo ac permutando vt EC ad EB, ſic HC ad BI, ſed vt CE ad BE, ſic AC eſt ad BD, cùm vtraque in centro [a] diuiſa ſit bifariam; igitur vt AC ad BD, ſic HC ad BI. ergo etiam [b] vt AC ad DB, ſic AH ad DI. Quare cùm rectangulum AHC ad rectangulum DIB rationem habeat compoſitam ex laterum rationibus AH, ad DI, & HC ad BI, quæ ambæ oſtenſæ ſunt eædem eſſe cum ratione AC ad BD, erit rectangulorum ratio duplicata rationis AC ad BD, hoc eſt eadem quæ quadratorum AC, BD. Quod erat demonſtrandum.

a 7. huius.
b 19. quinti.

PROPOSITIO XXV.

DVæ lineæ CG, BF intra ellipſim ductæ occurrant diametro ellipſeos MK in eodem puncto K. Ductæ ſint deinde binæ aliæ diametri BD, CA quæ ita ſecentur à rectis CG, BF vt rectangula BID, CHA quadratis BD, AC proportionalia ſint.

Dico iunctas IH, CB eſſe parallelas.

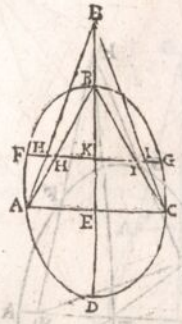
Demonſtratio.

QVoniam eſt vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc eſt vt quadratum ED ad quadratum EA, ſic rectangulum BID ad rectangulum CHA; erit permutando vt quadratum ED, (hoc eſt rectangulum BID cum quadrato EI) ad rectangulum BID, vt quadratum EA (hoc eſt rectangulum CHA cum quadrato EH) ad rectangulum CHA. ergo diuidendo, rectangulum BID eſt ad quadratũ EI, vt rectangulum CHA ad quadratũ EH. Permutando igitur rectangulum BID eſt ad rectangulum CHA vt quadratũ EI ad quadratũ EH. ſed etiam eſt rectangulum BID ad rectangulum CHA vt quadratum BD ad quadratum CA, hoc eſt vt quadratum ED ad quadratum EA. Itaque quadratum EI eſt ad quadratũ EH vt quadratum EH ad quadratum EA: adeoque recta EI ad rectam ED, hoc eſt EB, vt recta EH ad rectam EA hoc eſt EC, parallelæ ſunt igitur IH, CB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVI.

ESto A B C ellipseos diameter B D, ad quam ordinatim posita sit recta A C: ductisq; ex A & C lineis quę diametrum in eodem puncto B secent, ducatur F G parallela A C, occurrens A B, C B in H & I, diametro verò B D in K.

Dico F H, G I lineas esse æquales.



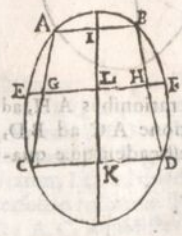
Demonstratio.

QVoniam F G æquidistat A C ordinatim positę ad B D, erit & F G, quoque ordinatim posita ad diametrum B D, adeoq; in K bifariam diuisa; sed & H I in K diuisa est bifariam, vti A C in E, demptis igitur æqualibus H K, I K, reliquę F H, I G æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SEcent A B C ellipsim duę quęuis parallelæ A B, C D, iunctisque A C, B D, ducatur E F parallela A B, secans A C, B D lineas in G & H.

Dico E G, F H rectas esse æquales.



a 5. huius.

Demonstratio.

DIuisis A B, C D bifariam in I & K, agatur per I & K, linea I K; erit a illa diameter, & E F lineam, rectæ A B parallelam secabit bifariam in L. sed & H G in L secta est bifariam vt C D in K, vel A B in I, ablatis igitur æqualibus G I, L H, manent E G, F H, reliquæ æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

SEcent A B C ellipsim duę quęuis parallelę A B, C D, iunctisque A D, B C ducatur E N M F parallela A B, & ex E & F, semidiametri ponantur E G, F G, quę A D, B C lineas secent in H & I.

Dico E G, F G in H & I proportionaliter esse diuisas.



b 17. huius.

Demonstratio.

DVcatur per G, K L æquidistans A B, occurrens A D, B C, in K & L. Quoniam E F, K L æquidistant, erit vt E N ad K G, sic E H ad H G; & F I ad I G, vt F M ad L G; sed vt E N ad K G, sic F M est ad L G, (cùm E N, F M item b K G, L G, æquales sint,) igitur vt E H ad H G, sic F I ad I G. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc patet iunctam H I æquidistare D C, adeoque lineas A D, B C, in H & I proportionaliter esse diuisas.

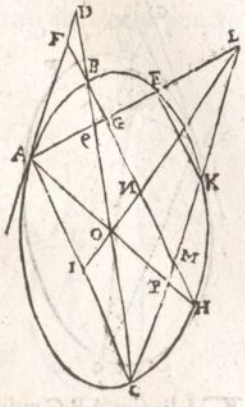
PRO-

PROPOSITIO XXIX.

ELlipſim, cuius diameter B C centrum O, contingat A D occurrens diametro in D, ductâque ex puncto A ordinatim A O E, & iunctâ A C, per B ponatur recta F B G parallela rectæ A C.

Dico F B, B G æquales eſſe.

Demonſtratio.



F G occurrat ellipſi in H, iunganturque H O, A O quæ [a] erunt in directum. Tum A C biſectâ in I, ducatur per I diameter I O L occurrens rectæ A E in L, & iungantur puncta L C, per rectam L C occurrentem ellipſi in K, & rectæ F H in M, rectæ verò H O in P.

Quoniam A C ex conſtructione ordinatim poſita eſt ad diametrum I L, rectæque per A & C duplæ occurrunt diametro in eodem puncto L, erit [b] E K parallela A C. Eſt verò & B H parallela ipſi A C ex hypotheſi: & ſemidiametri O B, O H ſecant A E, C K in Q & P, ergo Q P æquidiſtat [c] rectæ B H, tres igitur A C, Q P, E K ſunt parallelæ. Quare cùm ex hypotheſi A E biſecta ſit in Q, erit & C K biſecta in P, ac proinde ordinatim poſita ad diametrum A H. Itaque [d] C K æquidiſtat tangenti A D. eſt autem & F M ex hypotheſi parallela ad A C, ergo [e] F M æqualis eſt A C, ſed [f] etiam B H æqualis eſt A C. Igitur F M, B H æquales ſunt. quare communi demptâ B M æquantur F B, H M. Atqui etiam [g] G B, H M æquales ſunt. itaque F B, G B æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

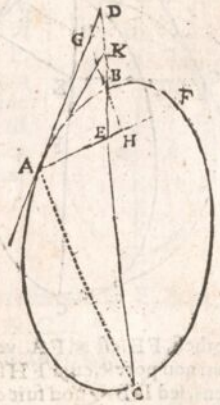
a 20. huius.
b 15. huius.
c 28. huius.
d 13. huius.
e 13. huius.
f 19. huius.
g 27. huius.

PROPOSITIO XXX.

ELlipſim A B C cuius diameter B C contingat in A recta A D conueniens cum diametro in D: ductaque ex A ſit linea A F ordinatim ad diametrum B D.

Dico rectam D C in B & E diuiſam eſſe extrema & media ratione proportionali, hoc eſt, vt C D eſt ad B D, ſic C H eſt ad H B: & ſi diuiſa fuerit in B & E extrema & media ratione proportionali agaturque per E ordinatim linea A F ad B C: dico iunctam A D, ſectionem contingere.

Demonſtratio.

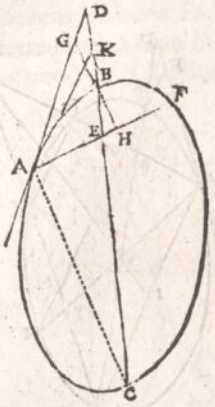


IVncta A C, agatur per B linea G H parallela rectæ A C occurrens A F lineæ in H & A D tangenti in G. Quoniam A C, B H lineæ æquidiſtant, erit vt A C ad B H, ſic C E ad E B: ſed vt A C ad B H, ſic A C eſt ad G B, (quia G B, B H ſunt [h] æquales) igitur vt A C ad G B, ſic C E eſt ad B E: eſt autem vt A C ad G B, ſic C D ad D B (quia G B, A C æquidiſtant) igitur vt C D ad D B, ſic C E ad E B. Quod erat primum ſit iam vt C D ad B D, ſic C H ad H B, ſi per E ordinatim agatur A F: dico iunctam A D ſectionem contingere in A. ſi enim A D non tangit, ponatur per A tangens quæ B D diametro occurrat in K, erit igitur vt C E ad E B, ſic C K ad K B, ſed eſt vt C E ad E B, ſic C D ad D B, igitur vt C K ad K B, ſic C D ad D B, & diuidendo vt C B ad B K, ſic C B ad B D, quod fieri non poteſt, cùm punctum K ſupra vel infra D cadat. igitur A K non eſt tangens nec quæuis alia præter A D. Quod fuit demonſtrandum.

h 29. huius.

Corollarium.

PRopositiones 29. & 30. etiam in circulo sunt veræ, quamuis autẽ sæpius contingat vt quæ hoc libro de ellipsi demonstramus locum etiam habeant in circulo, circuli tamen mentionem non facio nisi ad sequentes demonstrationes assumi debeat.



PROPOSITIO XXXI.

EAdem manente figurâ propositum sit à dato extra sectionem puncto D, tangentem ducere.

Constructio & demonstratio.

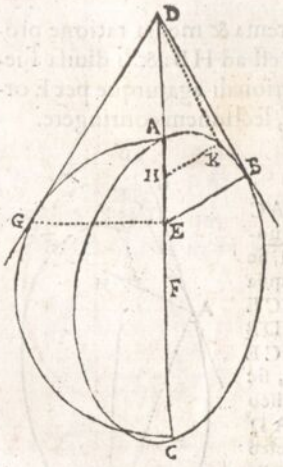
DVcatur ex D diameter DBC, fiatque vt CD ad DB, sic CE ad EB, & per E ad BC, ordinatim ponatur AF, iungaturque AD, patet per præcedentem AD lineam sectionem in A contingere; igitur à dato extra ellipsim puncto, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXII.

ELlipsim ABC cuius diameter AC contingat recta BD in B, conueniens cum diametro in D: & ex B ducatur BE ordinatim ad diametrum AC: centrum autem sectionis sit F.

Dico FE, FA, FD lineas esse in continua ratione: & si FE, FA, FD fuerint continuæ proportionales, & per E ordinatim recta agatur EB, dico iunctam BD sectionem contingere. Est Apollonij.

Demonstratio.



a 30. huius.

b 31. de circulo vel per coroll. 30. huius.

c 28. de circulo vel per coroll. 30. huius.

CEntro F interuallo FA circulus describatur AGC, tum ex E puncto normalis educatur ad diametrum AC occurrens circulo in G: ducaturque recta GD. quoniam EB recta ponitur ordinatim ad diametrum AC, & per B acta tangens conuenit cum eadem diametro in D, erit [a] vt CD ad DA sic CE ad EA: est autem in circulo, recta EG normalis ad diametrum EG, igitur & [b] recta GD circulum contingit in G. quare in circulo [c] erunt FE, FA, FD lineæ continuæ proportionales: sunt autem eædem lineæ communes ellipsi, igitur & in ellipsi erunt FE, FA, FD in cõtinua analogia. Quod si FE, FA, FD continuæ proportionales sint, & per E ducatur ordinatim EB, dico iunctam BD ellipsim contingere in B. sin verò: ducatur ex D recta DK contingens ellipsim in K, & ex K ordinatim ponatur KH; igitur per primam partem huius FH ad FA, vt FA ad FD. sed etiam ex hypothesi, FE est ad FA. vt FA ad FD. ergo FE est ad FA, vt FH est ad FA, quod fieri non potest, cùm FH sit maior aut minor quàm FE. vnde DK non est contingens, sed DB. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

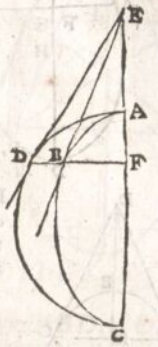
PROPOSITIO XXXIII.

ESto A B C ellipſeos axis A C, ſuper quo vt diametro ſemicirculus deſcribatur A D C, aſſumptoq; in axe puncto F quod non ſit centrum, erigatur ex F orthogona F D occurrens ellipſi in B.

Dico contingentes per B & D actas, axi A C in vno eodemque puncto occurrere.

Demonſtratio.

AGatur per B contingens B E, conueniens cum axe in E, iunganturque E D. quoniam F B ordinatim poſita eſt ad axem & B E ſectionem contingit, erit [a] C F ad F A, vt C E ad E A: vnde & iuncta E D circulum [b] contingit; igitur contingentes per B & D actæ, conueniunt cum axe in vno eodemque puncto. Quod fuit demonſtrandum.



a 30. *huius.*

b *de circulo vel per co. roll.* 30. *huius.*

Corollarium.

HInc facile etiam demonſtrabimus ſi duæ tangentes in eodem puncto diametro occurrant normalem F D, quæ ſi per vnum contactum D tranſeat, tranſire etiam per alterum.

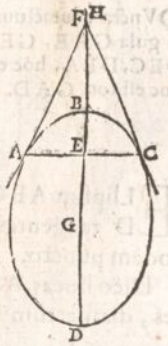
PROPOSITIO XXXIV.

ESto A B C ellipſis diameter B D, ad quam ordinatim ponatur A C aganturq; per A & C contingentes.

Dico illas diametro in vno eodemq; puncto occurrere.

Demõnſtratio.

PEr 16. huius patet ſingulas contingentes per A & C ductas cum diametro conuenire: ſi igitur non conueniant in eodem puncto, occurrat A F contingens diametro in F, & C H in H: Quoniam tangens A F concurrit cum diametro in F, erit [c] vt D E ad E B, ſic D F ad F B. rurſum quoniam tangens C H concurrit cum diametro in H, erit vt D E ad E B, hoc eſt vt D F ad F B, ſic D H ad H B: & diuidendo vt D B ad B F, ſic D B ad B H, quod fieri non poteſt. quare tangentes non occurrunt diametro in diuerſis punctis. ergo in eodem. Quod erat demonſtrandum.



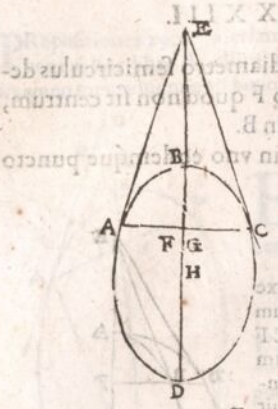
c 30. *huius.*

PROPOSITIO XXXV.

ESto A B C ellipſis, diameter B D producta vtcunque in E, & ex E demiſſæ E A, E C ſectionem contingant in A & C.

Dico iunctam A C, ordinatim eſſe poſitam ad diametrum B D.

Demonſtratio.

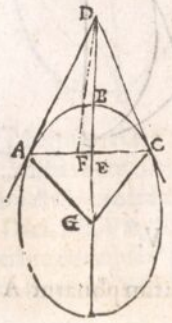


a 32. huius.
b per eandē.

POnatur A F ordinatim ad B D ſitque H centrum ellipſeos; erit igitur [a] linea E H diuiſa in B & F in tres continuè proportionales. demittatur quoque C G ordinatim ad B I [b] erit denuò E H diuiſa in B, & G, in tres lineas in analogia continua; igitur F & G, puncta ſunt eadem. quare recta A F C. eſt ordinatim poſita ad diametrum B I. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

HInc ſequitur ſi ellipſim A B C contingant in A & C, rectæ duæ A D, C D conuenientes in D; iunctâque A C, bifariam ſecetur in E, rectam D E tranſire per centrum ſiue iunctam D E eſſe diametrum ſectionis. ſi enim E D non ſit diameter, ducatur ex D diameter D F, occurrens A C lineæ in F. erit igitur per præcedentem A C linea in F, diuiſa bifariam, adeoque punctum F, idem cum E. vnde D F recta eadem cum linea D E. quod eſt contra ſuppoſitum. quare D E ſectionis eſt diameter. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO XXXVI.

SI ellipſim tangant binæ rectæ coeuntes in D, & ex centro ducantur G A, G C, G D.
Dico triangula G C D, G A D eſſe æqualia.

Demonſtratio.

c 35. huius. PVncta contactuum iungantur recta A C. quoniam [c] A C biſecta eſt in E. triangula G A E, G E C, item D E C, D E A æqualia erunt: duo itaque triangula D E C, D E A. hoc eſt totum D C G, æquabuntur duobus triangulis D E A, E A G, hoc eſt toti G A D. Quod erat demonſtrandum.

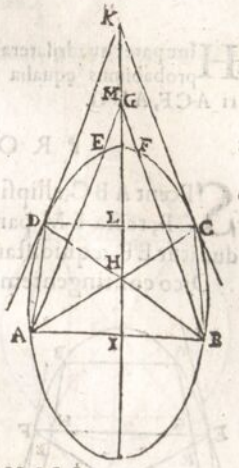
PROPOSITIO XXXVII.

ELlipſim A B C ſecent A C, D B: diametri quæuis agantur per C & D tangentes, quæ per 34. huius conueniunt cum diametro H K in eodem puncto.

Dico lineas A G, B G ex A & B ductas, ipſis D K, C K æquidiſtantes, diametrum H K, in vno eodemque puncto interſecare.

Demon-

Demonſtratio.



POnatur AE occurrere diametro in G & BF in M; iunganturque DC, AB, DA, CB. Quoniam DC iungit tangentes DK, CK, biſecatur a [a] diametro HK in L, eſt verò [b] AB parallela ad DC. ergo & hæc à diametro biſecatur in I. quare cũ totæ DC, AB ſint [c] æquales, erunt & earum dimidiæ DL, AI æquales. cùm igitur etiam DL, AI, ſint [d] parallelæ, quæ eas iungunt DA, IL parallelæ erunt. ergo figura AGKD parallelogrammum eſt, proindeque DA æqualis eſt GK. ſimili modo oſtendemus BC æqualem eſſe MK. Quare cùm DA, BC, ſint [e] æquales, etiam KG, KM æquales erunt, vnum igitur idemque punctum ſunt G & M, in quo parallelę tangentibus DC, CK, ductæ è punctis A, B, occurrunt diametro. Quod fuit demonſtrandum.

a 35. *huius.*
b 19. *huius.*
c *Ibid.*
d *Ibid.*
e *Ibid.*

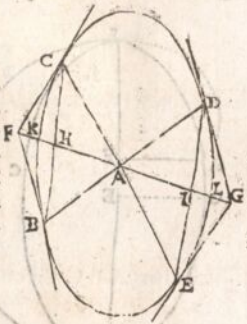
PROPOSITIO XXXVIII.

ELlipſim cuius centrum A ſecent quæuis duæ diametri BD, CE, iunctiſque BC, DE ponatur FG diameter, quæ BC bifariam diuidat in H, ipſi autem ED occurrat in I, tum per C & B, item D & E, contingentes agantur, quę FG diametro [f] occurrent in ijſdem punctis F & G.

Dico æqualia eſſe inter ſe; primò triangula ACF, ABF, ſecundò triangula ACF, ADG, tertiò triangula CBF, DEG.

f 34. *huius.*

Demonſtratio.



OCcurrat FG diameter ellipſi in K & L. Quoniam igitur BC ex hypotheſi in H diuiſa eſt bifariam, erit tam ACH triangulum æquale triangulo AHB, quàm HCF æquale triangulo HFB, vnde totum triangulum ACF, æquale eſt toti triangulo AFB, quod erat primum. Rurſum cùm [g] BC, DE æquidiſtent & BC in H diuiſa ſit bifariam à diametro FG, erit & ED in I bifariam diuiſa. quare cùm [h] totæ CB, DE ſint æquales, erunt & harum dimidiæ KC, DI æquales. quare cũ [i] etiam ſint parallelę, rectę CD, HI, quæ illas iungũt, ſunt parallelæ; triangula igitur ACH, ADI ſunt inter eaſdem parallelas. Sunt autem & baſes AH, AI æquales (eſt enim AK æqualis, AL, & [k] KH ipſi IL.) ergo triangulum ACH æquatur triangulo ADI. Iam verò AH, AK, AF, itemque AI, AL, AG ſunt [l] continuè proportionales, quare ratio AH ad AF, duplicata eſt rationis AH ad AK; & ratio AI ad AG duplicata rationis AI ad AL. Cùm igitur rationes AH, ad AK; AI ad AL, eædem ſint (AH enim ipſi AI, & AK, ipſi AL æqualis eſt) erunt & rationes AH ad AF, AI ad AG, earundem rationum duplicatæ, eædem inter ſe: ac proinde [m] triangulum quoq; AHC eſt ad triangulum AEC, vt triangulum AID ad triangulum AGD. Quare cùm triangula ACH, ADI oſtenſa ſint æqualia, etiam AFC, AGD æqualia erunt. quod erat alterum. Ex quo iam patet etiam FCH, GDI æqualia eſſe, quibus ſi addas FBH, GEI, quæ eodem planè diſcurſu oſtendemus æqualia, erunt tota triangula CBF, DEG, æqualia. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

g 19. *huius.*
h *Ibid.*
i *Ibid.*
k 17. *huius.*
l 32. *huius.*
m 1. *ſexti.*

Coroll.

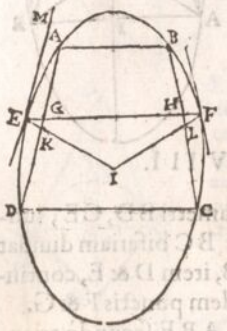
Corollarium.

HInc patet quadrilatera CFBA, DGEA, æqualia esse, eodem enim discursu probabimus æqualia esse triangula ABF, AEG, quo probauimus æquari ACF, ADG.

PROPOSITIO XXXIX.

SEcent ABC ellipsim duę quęuis parallelæ AB, CD, iunctisque AD, CB, recta EM parallela ipsi AD, contingat sectionem in E, & ex E ducatur EF, æquidistans AB, secans AD, CB lineas in G & H.

Dico contingentem per F ductam æquidistare ipsi BC.



a *Coroll. 13. huius.*

b *Coroll. 28. huius.*

c *13. huius.*

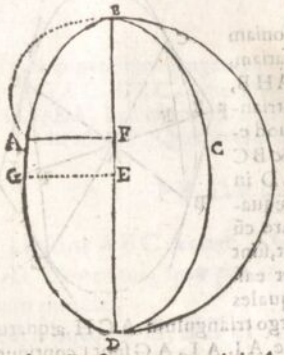
Demonstratio.

DVcantur ex I centro lineæ IE, IF occurrentes AD, CB in K & L: quoniam igitur EM contingens, æquidistat AD & IF diameter ad contingentem ducta, secet AD lineam in K, erit [a] AD in K diuisa bifariam; est autem recta BC in L diuisa sicut AD in K, recta enim KL iungens puncta K, L parallela est [b] ipsis AB, DC, igitur & BC in L secta est bifariam à diametro IF; vnde & tangenti per F ductæ [c] æquidistat. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

CIrculus super axe maiore vt diametro descriptus ellipsi exterius in duobus tantum punctis occurrit.

Demonstratio.



SIt ABC ellipseos axis maior BD, centroque illius E interuallo EB circulus describatur, dico illum ellipsi in duobus tantùm punctis B & D occurrere. occurrat enim si fieri possit insuper in puncto A, & per A ordinatim ad axem agatur AF, ducaturque axis minor GE, erit igitur vt BFD rectangulum ad quadratum FA sic BED rectangulum ad quadratum EG: sed BFD rectangulum in circulo est æquale quadrato FA, igitur & rectangulum BED, id est quadratum BE æquale est quadrato GE, quod fieri non potest cum BE linea maior sit quàm GE. igitur circulus ellipsi non occurrit in A: nec in alio quouis puncto, præter B & D. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

SImili discursu demonstrabimus circulum circa minorem ellipseos axem descriptum in duobus tantùm punctis extremis axeos ellipsi occurrere, & totum intra ellipsim existere.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

CIrculus centro ellipſeos deſcriptus, ſi ellipſim ſecat, in quatuor punctis ſecabit.

Demonſtratio.



SIt enim ellipſeos centro G deſcriptus circulus ſecãs ellipſim in B, ducãtur axis F D, & recta B G I; tum ordinatim applicetur B K A occurrens ellipſi in A, ducantur item recta A G C, I C; in triangulis B K G, A K G. B K, A K, æquantur, & K G eſt communis, anguliq́ue ad K recti; ergo G B, G A æquales. quare cùm punctum B ſit ad circulum, erit & punctum A. eſt autem idem punctum etiam ad ellipſim, ergo circulus ellipſim ſecat in A. Deinde A B, I C ſunt [a] parallelæ, adeoq́; cùm angulus A K H rectus ſit, erit etiam rectus I H K; ac proinde I C ordinatim eſt poſita ad axem D F, ac biſecta in H. ſunt autem totę A B, I C [b] æquales, ergo A K, I H earum dimidiæ etiam ſunt æquales. In triangulis igitur G K A, G H I, A K ipſi I H, & K G ipſi H G eſt æqualis, anguli verò A K G, I H G etiam æquales ſunt; ergo G A, G I æquantur. quare cùm punctum A ſit ad circulum, erit & punctum I. atqui etiam punctum I eſt ad ellipſim. ergo circulus ellipſim ſecat in I. ſimiliter oſtendemus circulum ellipſi occurrere in C. In quatuor igitur punctis ſecat. Quod erat demonſtrandum.

[a] 29. huius.

[b] Ibid.

Corollarium.

QVod autem non ſecet ellipſim circulus in pluribus punctis quàm quatuor, facilè colligetur ex demonſtratione iam poſita.

LI EL-

ELLIPSIS
PARS SECVNDA

De sectoribus & segmentis Ellipseos.

PROPOSITIO XLII.

SIt ABC ellipseos diameter BD, ad quam ordinatim ponatur AEC; iunganturque ABC.

Dico ABC triangulum maximum esse illorum quæ segmento ABC inscribi possunt.

Demonstratio.



a 13. huius.

ACta per B contingente BF, ex A recta ducatur quæuis AF, occurrens ellipsi in G & contingenti in F. iunganturque GC, FC: Quoniam FG contingens cadit supra G, igitur triangulum AFC maius est triangulo AGC; sed AFC triangulo æquale est triangulum ABC ob AC, BF æquidistantes; igitur & ABC triangulum maius est triangulo AGC: vnde cùm idem de alijs omnibus triangulis ostendatur; patet ABC triangulum, maximum eorum esse quæ segmento ABC inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

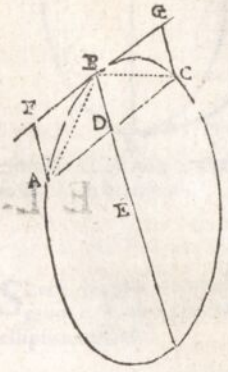
Corollarium.

HInc facilis praxis elicitur ad inscribendum cuiuis segmento triangulum maximum: erigendo nimirum diametrum BD, iungendoque AB, BC. puncta. demonstratio patet ex priori.

PROPOSITIO XLIII.

TRiangulum maximum segmento cuiuis non maiori semiellipsi inscriptum, maius est dimidio eiusdem segmenti.

Demonstratio.



b 41. primi.

ESto ABC segmento, non maiori semiellipsi inscriptum triangulum maximum ABC. Dico illud maius esse dimidio segmenti ABC: ductâ enim diametro BE, quæ AC subtensam diuidat bifariam in D, erigãtur ex A & C lineæ AF, CG parallelæ diametro BE, quæ FG contingenti per B actæ occurrant in F & G, iunganturque AB, CB: triangulum ABC b dimidium est parallelogrammi AG. Atqui AG parallelogrammum maius est segmento ABC, cùm AF, CG, FG lineæ cadant extra ellipsim; igitur & triangulum ABC, maius est dimidio eiusdem segmenti. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

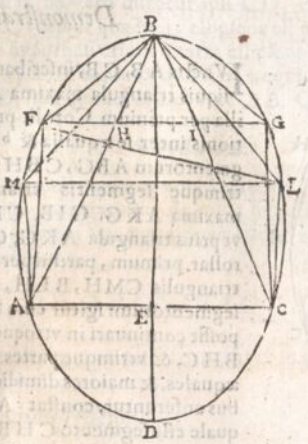
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [323] - 266
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLIV.

ELlipsim ABC secet diameter BD, ad quam ordinatim posita sit AEC: iunctis AB, CB inscribatur segmento AFB triangulum maximũ AFB, & ex F ponatur FG parallela AC, iunganturq; BG, GC.

Dico BGC triangulum esse maximum eorum quæ segmento BGC inscribi possunt, & si triangula fuerint maxima, dico FG esse parallelam ad AC.

Demonstratio.



QVoniam [a] FH, GI lineæ sunt æquales, triangula FBH, GBL eandem habentia altitudinem, æqualia erunt. similiter triangula FAH, GIC inter parallelas EG, AC constituta erunt æqualia ac proinde æquabuntur tota triangula BFA, BGC: si igitur BGC non sit maximum, ponatur aliud BLC, maius triangulo BGC, & ex L ducatur LM æquidistans AC; erit igitur vt prius triangulum BLC, æquale triangulo AMB, adeoque & AMB triangulum, maius triangulo BGC id est AFB, quod est contra suppositum, cũ BFA maximum ponatur. igitur BGC triangulum maximum est eorũ quæ segmento BGC inscribi possunt. quod erat primum. sint deinde triangula BFA, BGC maxima, demonstrabimus iunctam FG parallelam esse AC. si enim non est parallela, sit alia supra vel infra ipsam FG parallela ad AC, nimirum recta FL; iunganturque BL, CL. ergo per primam partem huius triangulum BLC erit maximum, quod fieri non potest cum FGC ex hypothesi sit maximum. Non igitur FL, aut alia vlla præter FG est parallela ad AC. Quod erat secundo loco demonstrandum.

[a] 216. huius.

Corollarium primum.

HInc sequitur si triangula BFA, BGC maxima sint eorum quæ segmentis inscribi possunt, esse æqualia. Nam per secundam partem huius FG est parallela ad AC. Vnde [b] FH, GI æquales sunt, ac proinde triangula FBH, BIG, & FAK, GCI; adeoque & tota BFA, BGC æqualia sunt.

[b] Ibid.

Corollarium secundum.

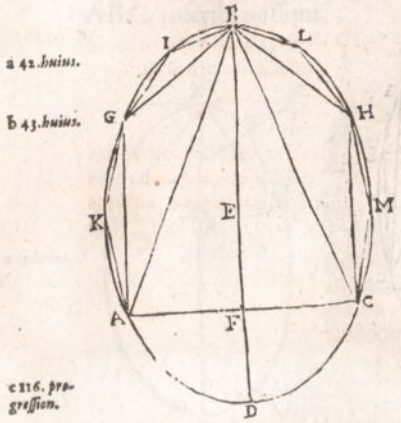
QVod si fuerint binæ A C, F G ad diametrum ordinatim positæ, iunganturque F A, C G, triangula quæ segmentis A F, C G inscribuntur maxima, inter se quoque æqualia esse, eodem planè discursu demonstrabimus, quo vsi sumus in propositione & corollario primo, nullo alio immutato, quàm quod loco 26. huius assumenda sit vigesima septima.

PROPOSITIO XLV.

SIt A B C ellipsis diameter quæcunque B D ad quam ordinatim ponatur A F C.

Dico A G B F segmentum æquari segmento C H B F.

Demonstratio.



a 42. huius.

b 43. huius.

c 216. progression.

IVnctis A B, C B, inscribantur [a] segmentis reliquis triangula maxima A G B, C H B erunt illa per primum Coroll. præcedentis propositionis inter se æqualia & [b] maiora dimidio segmentorum A B G, C B H: dein & residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima A K G, G I B, C M H, B L H erunt vt prius triangula A K G, G I B partim per corollar. primum, partim per secundum æqualia triangulis C M H, B L H, & maiora dimidijs segmentorum: igitur cùm ea inscriptio semper possit continuari in vtroque segmento A G B, B H C, & vtrimque partes ablatæ sint inter se æquales, & maiores dimidio, segmentorũ à quibus auferuntur, constat [c] A G B segmentum æquale esse segmento C H B. Quare additis æqualibus triangulis A B F, C B F erunt tota segmenta A G B F, C H B F æqualia. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

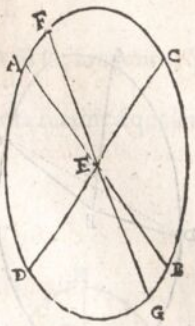
HInc sequitur à quâuis diametro ellipsim bifariam secari: sit enim diameter quæuis B D, & ducatur per quoduis illius punctum ordinatim A F C, per propositionem iam demonstratam segmentum A B F, segmento B C F, æquatur. rursum per eandem propositionẽ segmentum A D F, segmento C D F æquale est. ergo segmenta A B F, A D F, hoc est totum segmentum D A B, æquantur segmentis B C F, C D F, hoc est toti segmento D C B; bifariam igitur diuisa est ellipsis à diametro B D.

PROPOSITIO XLVI.

DIametri duæ coniugatæ ellipsim quadrifariam diuidunt, & diametri ellipsim quadrifariam diuidentes, sunt inter se coniugatæ.

Demon-

Demonſtratio.



SInt in ABC ellipſi diametri duæ coniugatæ AB, CD. dico illas ellipſim quadrifariam diuidere; & ſi AB, CD diametri ellipſim quadrifariam diuidant, dico illas eſſe coniugatas. Quoniam AB, CD diametri ſunt coniugatæ, erit AB ordinatim poſita ad diametrum DC, vnde[a] tam AEC, CEB quàm AED, BED ſectores ſunt æquales; ſunt autem & AEC, AED ſectores ob eandem rationem æquales; ſectores igitur quatuor AEC, CEB, BED, DEA, ſunt inter ſe æquales, & AB, CD lineæ quadrifariam diuidunt ellipſim: Quod erat primum.

[a] 45. huius.

Sit iam ellipſis quadrifariam diuiſa, dico AB, CD diametros eſſe coniugatas. ſin verò ducatur ipſi CD, coniugata FG, igitur FEC, ſector quadrans ellipſeos eſt per priorem partem huius. Atqui ſector AEC ex hypotheſi etiam quarta ellipſeos pars eſt, ergo ſectores FEC, AEC æquales ſunt, pars & totum. quod fieri nequit; igitur FG diameter non eſt coniugata ipſius CD, nec quæuis alia præter AB. Quod erat demonſtrandum.

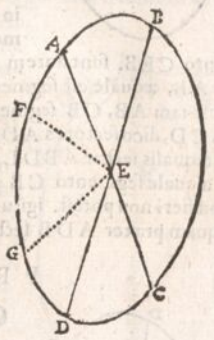
Corollarium.

HInc patet ſectores quarumcumque coniugatarum, æquales eſſe ſectoribus cuiuſcunque alterius coniugationis ſingulos ſingulis: ſinguli enim quadrantes ſunt ellipſeos, & ſi ſectores ſint æquales ac latera vnius ſint coniugatæ, alterius etiam latera eſſe coniugatas.

PROPOSITIO XLVII.

SEctores ad verticem oppoſiti ſunt inter ſe æquales.

Demonſtratio.



SEcent ABC ellipſim diametri quæcunque AC, BD. dico ſectores ad verticem oppoſitos eſſe inter ſe æquales. ducantur enim ex E centro diametri duæ EF, EG; & EF quidem coniugata ipſi EB: EG verò coniugata ipſi AE. Quoniam igitur ſectores BEF, AEG, [b] æquales ſunt, dempto communi AEF, erit ſector AEB, æqualis ſectori FEG: rurſum cùm ſectores FED, GEC [c] ſint æquales, dempto communi DEG, erit ſector DEC æqualis ſectori FEG, id eſt AEB ad verticem oppoſito. eodem modo oſtenduntur AED, BEC ſectores æquales. igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum.

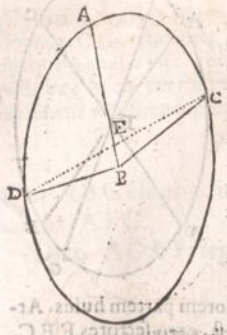
[b] 46. huius.

[c] Ibid.

PROPOSITIO XLVIII.

SIt in ADC ellipſi ſector quicunque ABC, oportet ex B rectam ad peripheriam ducere, quæ cum AB linea ſectorem conſtituat dato ABC æqualem.

Constructio & demonstratio.



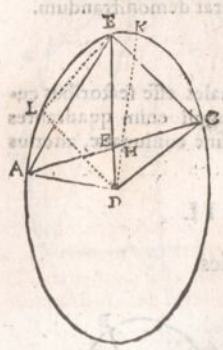
a 46. huius.

DVcatur ex C ordinatim ad diametrum AB, recta CED, iungaturque BD. dico factum esse quod petitur. est enim segmentum AED [a] æquale segmento AEC, & cùm æquales sint CE, ED, triangulum DEB æquale est triangulo CEB, igitur & sector ABD æqualis sectori ABC. eduximus igitur, &c. Quod fuit faciendum.

PROPOSITIO XLIX.

HAbeant ADB, CDB sectores æquales commune latus BD, iunganturque AB, CB. Dico segmenta lineis AB, CB ablata esse inter se æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico & sectores æquari.

Demonstratio.



b Ibid.

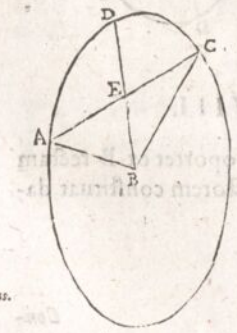
c Ibid.

IVngantur A, C occurratque AC, linea diametro BD in E, tum si AC non sit diuisa bifariam in E: diuidatur bifariam in H, agaturque per H diameter DK. Quoniam AC, linea ordinatim ducta est ad diametrum DK, erunt AHK, CHK [b] segmenta æqualia. sunt autem & AHD, CHD triangula æqualia, sectores igitur ADK, CDK inter se æquales sunt, sed ex hypothesi quoque sectores ADB, CDB æquales sunt, igitur sector CDK, æqualis est sectori CDB pars toti. Quod absurdum. quare AH linea non diuiditur in H bifariam; nec in alio puncto quã in E: adeoque igitur AC, linea posita est ordinatim ad diametrum BD. vnde AEB segmentum [c] est æquale segmento CEB. sunt autem AEB, CEB triangula æqualia, ergo reliquum segmentum AB, æquale est segmento CB quod erat primum.

Sint iam AB, CB segmenta æqualia & ex A, B, C punctis diametri ponãtur AD, BD, CD, dico sectores ADB, CDB, esse inter se æquales. sin verò: fiat CDB sectori æqualis sector [d] BDL, iunganturque puncta LB. erit igitur LB segmentum æquale segmento CB hoc est AB per hypothesin, adeoque pars æqualis toti. Quod fieri non potest. igitur sector BDL non est æqualis sectori CDB: nec alius quisquam præter ADB sectorem. Quod erat demonstrandum.

d 48. huius.

PROPOSITIO L.



c 45. huius.

SIt ABC sector quicunque. Dico lineam ex centro ductam, quę AC subtensam diuidit bifariam, sectorem quoque bifariam secare.

Demonstratio.

DVcatur ex B centro diameter BD, secans bifariam AC lineam in E: dico ABD, CBD sectores esse æquales: Cùm enim AC in E diuisa sit bifariam, erunt ABE, CBE triangula æqualia, sed, quia AC est ordinatim posita ad diametrum BD, etiam segmenta [e] AED, CED sunt æqualia, igitur totus sector ABD, sectori CBD æquale est. Quod erat demonstrandum.

PRO-

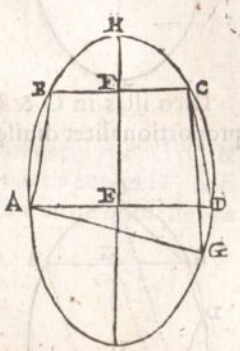
PROPOSITIO LI.

ELlipsim ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC, iungantúrq; AB, CD.

Dico AB, CG segmenta esse æqualia, & si segmenta fuerint æqualia, dico BC, AD lineas æquidistare.

Demonstratio.

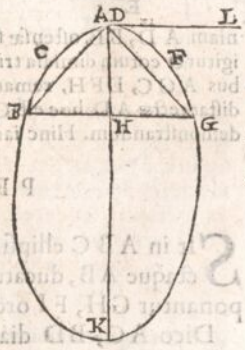
DIuisis AD, BC bifariam in F & E agatur per F & E linea FE, occurrens ellipsi in H, erit illa diameter. quare BFH, CFH segmenta [a] sunt æqualia. rursum quoniam AE, DE æquales sunt, & segmenta AHE, DHE æqualia erunt: ablatis igitur æqualibus segmentis BHF, CHF remanent segmenta AB, FE, DC, FE æqualia. Deinde quoniam AE, ED sunt æquales, & altitudo communis parallelarum BC, AD, erunt AE FB, DEFC trapezia æqualia, igitur ab æqualibus segmentis ABFE, DCFE, trapezijs, ablatis æqualibus, manent AB, CD reliqua segmenta inter se æqualia. Quod erat primum.



[a] 45. huius.

Sint iam AB, CD segmenta æqualia, iungantúrque BC, AD; dico AD, BC lineas æquidistare: sin verò, ducatur ipsi BC parallela AG, iungantúrque CG: erit igitur per primam partem huius segmentum AB æquale segmento CG: sed & CD segmentum ex hypothesi æquale est segmento AB; segmenta igitur CD, CG sunt æqualia, quod fieri non potest, cùm punctum G cadat supra vel infra D, adeoque CG segmentum maius vel minus sit segmento CD: igitur AG linea non æquidistat ipsi BC, sed sola AD. Quod erat demonstrandum.

Quod si punctum datum D idem sit cum puncto A, ducatur AL tangens ellipsim in puncto A siue D, (sunt enim A & D iam ex hypothesi vnum idemque punctum) ductâque BG parallela ad AL iunge DG.



Dico hanc abscindere segmentum DFG æquale segmento ACB.

Ex contactu ducatur diameter AK: igitur BG quia tangenti æquidistat, est ordinatim [b] posita ad diametrum AK, adeoque bisecta in H, triangula igitur BAH, GAH æquantur; æquantur verò [c] & segmenta BCAH, GFAH. ergo reliqua etiam segmenta BCA, GFA siue GFB æquantur. Factum igitur est quod petebatur.

[b] 13. huius.

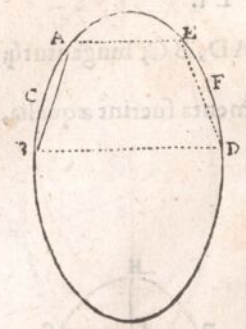
[c] 45. huius.

PROPOSITIO LII.

SEcet ellipsim recta quæuis AB: auferens ACB segmentum, & detur in peripheria punctum quoduis D, oportet ex D rectam ducere DE, quę auferat segmentum DEF, æquale segmento ABC.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.



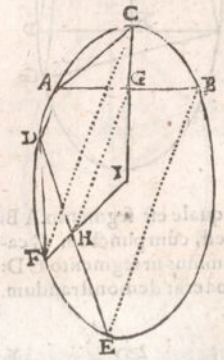
IVngantur B D, & ex A ponatur A E æquidiſtans B D, iunganturque E D. patet per præcedentem D E F ſegmentum æquale eſſe ſegmento A B C. Igitur ex puncto dato, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIII.

SEcent A B C ellipſim duæ quæuis lineę A B, D E ſegmenta auferentes æqualia: diuiſis autem A B, D E rectis bifariam in G & H, ducantur per G & H diametri I G C, I H F.

Dico illas in G & H proportionaliter eſſe diuiſas. Et ſi diametri ſint proportionaliter diuiſę: dico ſegmenta eſſe æqualia.

Demonſtratio.



a 51. huius.
b 45. huius.
c 42. huius.
d Coroll. 2. 44. huius.
e 52. huius.

IVngantur A D, B E, A C, D F, G H, C B, F E, C F. Quoniam A C B, D F E ſegmenta ponuntur æqualia, A D, E B lineæ [a] parallelæ ſunt: eſt autem vt A G ad G B, ſic D H ad H E, cùm A B, D E lineæ in G & H diuiſæ ſint bifariam, igitur & G H linea æquidiſtat A D, B E. Iam verò cùm A B ſit ad diametrum I C ordinatim poſita, erunt ſegmenta A G C, B G C [b] æqualia, adeoque ſegmentum A G C dimidium ſegmenti A C B. ſimili de cauſa ſegmentum D F H dimidium eſt ſegmenti D F E. Quare cùm tota ſegmenta A C B, D F E ponantur æqualia, erunt etiam ſegmenta A G C, D F H, eorum dimidia inter ſe æqualia. Deinde [c] triangula A C B, D F E maxima ſunt eorum quæ ſegmentis inſcribi poſſunt, & quoniam A D, B E oſtenſæ ſunt parallelæ, etiam [d] inter ſe æqualia erunt; æquabuntur igitur & eorum dimidia triangula A G C, D F H: quæ ſi auferas à ſegmentis æqualibus A G C, D F H, remanent ſegmenta æqualia A C, D C, ergo C F linea [e] æquidiſtat rectæ A D hoc eſt G H: quare vt C G ad G I, ſic F H ad H I. Quod erat demonſtrandum. Hinc iam veritas conuerſæ fit manifeſta.

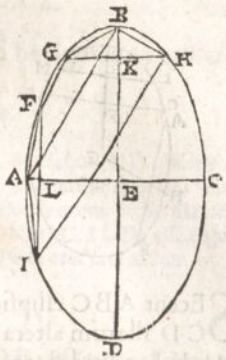
PROPOSITIO LIV.

SIt in A B C ellipſi quæuis diametrorum coniugatio A C, B D, iunctaque A B, ducatur quæuis F G parallela A B; & ex F & G, rectæ ponantur G H, F I ordinatim ad diametros B D, A C.

Dico A C, B D diametros in K & L proportionaliter eſſe diuiſas.

Demon-

Demonſtratio.



IVngantur GB, BH, FA, AI, HI. Quoniam AB, GF lineæ æquidiſtant, erunt GB, [a] FA ſegmenta æqualia: ſed GB ſegmento eſt æquale ſegmentum HB. (nam ſegmentũ lineæ GKB æquatur ſegmento HKB, & triangulum GBK triangulo HBK) & FA ſegmento ob eandem cauſam æquatur ſegmentum AI; igitur & HB ſegmentum eſt æquale ſegmento AI, & HI æquidiſtat [b] lineæ AB, hoc eſt FG. quare totum ſegmentum GBH, æquale eſt toti ſegmento FAI: adeoque per præcedentem AC, BD diametri in K & L ſimiliter ſunt diuiſæ. Quod erat demonſtrandum.

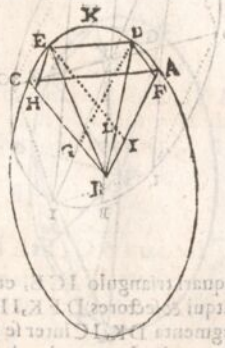
a 52. *huius.*
b 45. *huius.*
c 41. *huius.*
d 51. *huius.*

PROPOSITIO LV.

IN ellipſi data ſit quæcunque diametrorum coniugatio AB, CB, & iungatur AC, cui parallela ſit quæuis ED, ex punctis autem D, & E ducantur ordinatim ad diametros DF, EH, DG, EI, erunt igitur figuræ DFBG, EIBH parallelogramma.

Dico parallelogramma illa æqualia eſſe.

Demonſtratio.



QVia per præcedentem BA, BC proportionaliter ſunt diuiſæ, erit AB ad BF, vt CB ad BH: & permutando vt AB ad CB, ſic BF ad BH. ſimiliter AB per præcedentem eſt ad BI vt CB ad BG, & permutando vt AB ad CB, ſic BI ad BG. ergo BF eſt ad BH, vt BI ad BG. ergo [e] parallelogramma AG, HI æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

e 14. *ſexti.*

PROPOSITIO LVI.

SInt AB, BC diametri coniugatę; iunctis punctis AC, ducatur ED parallela rectæ AC, tum ex D & E rectę ponantur EI, DF, DG, EH ordinatim ad diametros AB, CB, iunganturque EB, DB.

Dico EBD ſectorem, æquari figuræ EIFDKE.

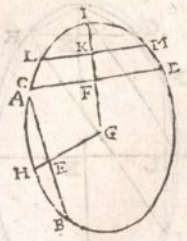
Demonſtratio.

PEr præcedentem parallelogramma FG, HI: & illorum dimidia, triangula DFB, EIB inter ſe ſunt æqualia; ablato igitur communi LIB, erit ELB triangulum æquale trapezio DFIL. quare addita figura communi ELDKE, ſector EBD æqualis eſt figuræ EIFDKE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVII.

SEcent ABC ellipſim duæ quęuis lineę AB, CD, oportet CD lineę parallelam ducere, quę ſegmentum auferat æquale ſegmento AHB.

Constructio & demonstratio.



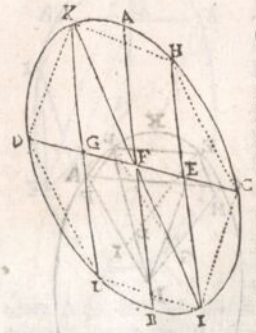
DIuisis AB, CD bifariam in E & F, agantur ex G centro per E & F diametri GH, GI; tum GI diuidatur in K, sicut HG diuisa est in E, ponaturque per K ordinatim LM, patet per 53. huius LIM, AHB segmenta esse æqualia; est autem LM parallela datæ CD, igitur dato in ellipsi segmento, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LVIII.

SEcent ABC ellipsim coniugatæ duæ diametri AB, CD. diuisaque CD illarum altera quadrifariam in EG, agantur per E & G rectæ HI, KL æquidistantes diametro AB, iunganturq; puncta D, K, H, C, I, L, D.

Dico LD, DK, KH, HC, CI, IL lineas segmenta auferre æqualia.

Demonstratio.



QVoniam KL, HI, sunt parallelæ rectæ AB, quæ est diameter coniugata ipsi DC, erunt KL, HI ordinatim positæ ad DC. ergo vt rectangulum DGC, ad rectangulum DEC, ita quadratum KG, ad quadratum HE, adeoque cùm rectangula sint æqualia, etiam quadrata erunt æqualia, vnde & rectæ KG, HE æquales sunt, sunt verò & GF, EF æquales & anguli KGF, FEI (quòd HI, KL sint parallelæ) æquales sunt; igitur KGF triangulum æquale est triangulo FEI, angulusque IFE æqualis angulo GFK, & quia GFE, linea recta est, anguli IFE, KFG ad verticem constituti sunt æquales: vnde KFI, puncta sunt in directum, adeoq; sectores KFD, CFI, sunt ad verticem constituti: quia autem ostendi triangulum KFG, æquari triangulo IFE, & simili discursu ostendi possit triangulum qdoq; DKG æquari triangulo ICE, erit triangulum totum DKE, æquale toti triangulo ICF, Atqui & sectores DFK, IFC ad verticem positi [a] sunt æquales. Igitur reliqua etiam segmenta DK, IC inter se æqualia erunt. eodē modo ostenduntur DL, HC segmenta æqualia. Iterum cùm duo latera KG, GF sint duobus lateribus DG, GL æqualia, & anguli lateribus æqualibus contenti ad verticē æquales: erunt triangula GKF, DGL inter se æqualia, & angulus GKF æqualis angulo altero GLD: adeoque KFI, DL lineæ parallelæ. quare [b] DK, LI segmenta sunt inter se æqualia: est verò iam ostensum segmenta quoque CI, DK æqualia esse, æquantur igitur tria segmenta DK, LI, CI. vlterius quia DC, LI iungunt æquales & parallelas GL, FEI, ipsæ etiam erunt parallelæ. vnde rursum [c] segmenta CI, DL æqualia sunt: æquantur igitur quatuor segmenta DL, CI, LI, DK. Rursum quia KH, LI, iungunt KL, HI æquales & parallelas, sunt ipsæ etiam parallelæ: erunt ergo [d] æqualia etiam segmenta KH, LI. æquantur igitur quinque segmenta KH, LI, KD, DL, CI. Atqui etiam ostensum est æqualia esse segmenta HC, DL; æquantur igitur omnia sex segmenta. Quod fuerat demonstrandum.

a 47. huius.

b 51. huius.

c Ibid.

d Ibid.

Vocetur autem figura DKHCIL, ellipsi inscripta, polygonum regulare.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

EAdem manente figura propoſitum ſit ellipſi hexagonum regulare inſcribere.

Conſtructio & demonſtratio.

SVmantur duæ quæuis diametri coniugatæ AB, CD, diuiſaque CD quadrifariam in E & G, agantur per E & G lineæ HI, KL æquidiſtantes AB: ducanturque DK, KH, HC, CI, IL, LD: patet per præcedentem: rectas illas ſegmenta auferre æqualia, adeoque figuram hexagonam DK, HC, ILD, eſſe regularem; igitur ellipſi hexagonum inſcripſimus regulare. Quod erat faciendum.

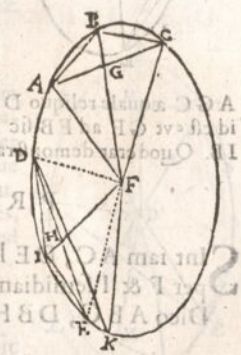
PROPOSITIO LX.

SEcent ABC ellipſim duæ quæuis lineę AC, DE auferentes ſegmenta æqualia, ducanturque ad illarum extremitates ſemidiametri FA, FC, FD, FE.

Dico ſectores AFC, DFE, eſſe æquales, & ſi ſectores fuerint æquales, dico ſegmenta eſſe æqualia.

Demonſtratio.

DIuiſis AC, DE bifariam in G & H agantur per G & H, diametri FB, FI, iunganturque AB, BC, DI, EI. quoniam ſegmenta AC, DE ex hypotheſi ſunt æqualia, ergo rectæ, quæ puncta C & E, A & D iungerent, forent [a] parallelæ. ergo [b] triangula ſegmentis AC, DE inſcriptorum maxima, ſunt æqualia, ſed ABC, DIE, [c] ſunt inſcriptorum maxima. erunt igitur triangula ABC, DIE, æqualia: quia autem FB, FI diametri in G & H, ſunt proportionaliter [d] diuiſæ: igitur vt ABC triangulum eſt ad triangulũ AFC, ſic DIE triangulum eſt ad triangulum DFE, & permutando vt ABC triangulum eſt ad triangulũ DIE, ſic AFC triangulum eſt ad triangulum DFE. Cùm igitur triangula ABC, DIE æqualia ſint, etiam triangula AFC, DFE æqualia erunt. Quare additis æqualibus ſegmentis AC, DE, erunt ſectores FAC, FDE æquales.



[a] 51. huius.
[b] Coroll. 2. 44. huius.
[c] 42. huius.
[d] 53. huius.

Sint iam ſectores AFC, DFE æquales, iunganturque AC, DE. Dico ABC, DIE ſegmenta quoque eſſe æqualia: ſin verò ſit alterutrum (puta) DIE minus altero, ducaturque [e] ex D linea DK, ſegmentum auferens æquale ſegmento ABC: & iungantur F, K. Quoniam igitur ſegmentum DIK æquale eſt ſegmento ABC, ſector DFK, æqualis eſt ſectori AFC, id eſt ſectori DFE quod fieri non poteſt: ſegmenta ergo AC, DE non inæqualia ſunt, ſed æqualia. Quod erat demonſtrandũ.

[e] 52. huius.

Corollarium.

EX hac & ex 53. huius ſequitur primò, ſi AFC, DFE ſectores quiuis fuerint æquales, eorumque ſubtenſę in G & H diuiſæ bifariam. quod diametri per G & H ductæ, iſdem punctis proportionaliter diuidantur.

Secundò ſi ſectores duo AFC, DFE fuerint æquales, ſubtendanturque ipſorum anguli rectis AC, DE: quod triangula AFC, DFE ſint æqualia.

Tertiò hinc tale problema ſoluitur. dato AFB ſectore quocunque, oportet ex F

duas educere semidiametros quæ sectorem constituant æqualem sectori AFB: pro
a Ibid. constructione iuncta AB, ducatur ex F semidiameter quęcunque FD: tum a ex D recta ducatur DI segmentum auferens æquale segmento AB iungaturque IF, patet IFD sectorem æquari sectori AFB.

PROPOSITIO LXI.

SInt ABC, DBE sectores æquales: iunctisque AC, DE ducatur ex B quæuis linea BG secans AC lineam in F: dein sectori ABG fiat æqualis sector DBH secetq; HB linea, rectam ED in I.

Dico tam AC, DE lineas quàm BG, HB in F & I proportionaliter esse diuisas.

Demonstratio.



IVngantur AG, GC, DH, HE. Quoniam ex hypothesi sectores tam ABG, DBH, quàm ABC, DBE sunt æquales, erunt & reliqui GBC, HBE æquales. quare AGB triangulum æquale triangulo DHB, & triangulum CGB æquale triangulo HEB. quare vt triangulum
b Corol. 60. huius. BAG ad triangulum GCB, sic BDH triangulum ad triangulum BHE, sed (quod facile ex 1.6. est demonstratu) rationes rectarum AF, FC, & DI, IE, eædem sunt cum rationibus triangulorum BAG, GCB, & BDH, BHE. Ergo etiam, AF est ad FC, vt DI ad IE. Deinde cùm trapezia GABC, BDHE æqualia sint (est enim c triangulum BAG, triangulo BDH, & triangulũ BGC, triangulo BHE, æquale) sit autem & ACB triangulum d æquale triangulo DEB, erit reliquum triangulũ
c Ibid.
d Ibid.
AGC æquale reliquo DHE: igitur vt AGC triangulum ad triangulum ACB, id est e vt GF ad FB sic DHE triangulum ad triangulum DEB id est HI ad IB. Quod erat demonstrandum.
e Facilè demonstrat. ex 1.6.

PROPOSITIO LXII.

SInt iam AC, DE lineæ in F & I proportionaliter diuisæ: aganturq; per F & I semidiametri BG, BH.

Dico ABG, DBH sectores esse æquales.

Demonstratio.

SIn verò sit alteruter vt ABG minor altero: fiat ABK sector æqualis sectori DBH, secetque BK linea rectam AC in L, quoniam ABK, DBH sectores sunt æquales: erit per primam partem huius AL ad LC, vt DI ad IE. Atqui etiam AF est ad FC, vt DI ad IE, igitur vt AF ad FC. sic AL ad LC, quod fieri non potest: quia punctum L cadit vltra aut citra F. quare sector ABK non est æqualis sectori DBH nec alius quisquam præter ABG. Quod erat demonstrandum.

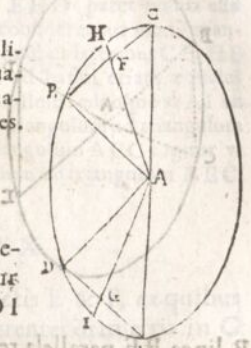
PRO-

PROPOSITIO LXIII.

SInt duę quæuis diametri AB, AC, iunctiſque illarum extremitatibus, ducantur duę quæuis aliæ diametri AD, AE ſic vt iunctâ DE, ſint ABC, ADE triangula æqualia: diuiſis autem BC, DE bifariam in F & G, agantur per F & G, diametri AH, AI: quę ſi in F & G, proportionaliter ſint diuiſę,

Dico BAC, DAE ſectores eſſe æquales.

Demonſtratio.



QVoniam AH, AI diametri in F & G proportionaliter ſunt diuiſę, erunt BHC, DIE ſegmenta [a] æqualia: ſunt autem ex hypotheſi triangula ABC, ADE æqualia; ſectores igitur BAC, DAE ſunt inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

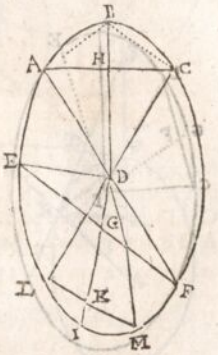
[a] 53. huius.

PROPOSITIO LXIV.

SInt duo ſectores DABC, DEIF, ductiſque rectis AC, LM, & biſectis in H & G, ducantur diametri DHB, DGI. Sit autem ratio DG ad DI minor ratione DH ad DB.

Dico ſectorem DEIF maiorem eſſe ſectore DABC.

Conſtructio & demonſtratio.



QVoniam DG eſt ad DI in minori proportione quàm DH ad DB. Fiat DK ad DI, vt DH ad DB. maior igitur erit DK quam DG, & punctum K cadet inter G ac I. per K ducatur ordinatim LKM; iunganturque DL, DM; ſegmenta igitur LIM, ABC [b] æqualia ſunt. Quare ſectores etiam [c] DLIM, DABC ſunt æquales, ac proinde ſector DEIF maior eſt ſectore DABC. Quod erat demonſtrandum.

[b] 57. huius.
[c] 60. huius.

PROPOSITIO LXV.

SInt ABC, DBE ſectores duo inæquales, ſic vt ABC, DBE triangula ſint æqualia:

Dico ABC, DBE ſectores ſimul ſumptos æquari ſemiellipſi.

Demonſtratio.



CVm ſectores ſint ex hypotheſi inæquales, ſit maior BDGE. quia ergo triangulum DBE ex hypotheſi æquatur triangulo BAC, erit ſegmentum DGE maius ſegmento AC, abſcindatur [d] itaque EG ſegmentum ipſi AC æquale, iunganturque BG, GD, & EB producta in F ducatur FD. quia igitur ſegmenta GE, AC, æqualia ſunt, [e] etiam ſectores æquales ſunt, adeoque & triangulum GEB, triangulo ACB, hoc eſt triangulo BDE æquale erit. quare BE, DG ſunt parallelæ adeoque [f] ſegmentum GE, hoc eſt ſegmentum AC æquale eſt ſegmento DF; ſectores itaque BAC, BFD [g] æquantur.

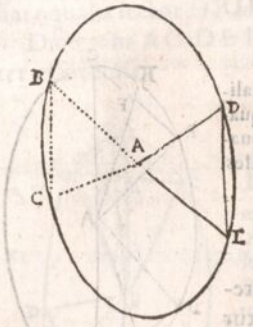
[d] 52. huius.
[e] 60. huius.
[f] 51. huius.
[g] 60. huius.

[a] Coroll. 45. huius. Atqui sectores BFD, BDGE, [a] constituunt semiellipsim, ergo & sectores BCA, BDGE, semiellipsim constituunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

SVmantur sectores duo BAC, DAE, sic vt triangula ABC, ADE sint æqualia: si sectores illi simul sumpti, maiores fuerint vel minores semiellipsi:

Dico illos inter se æquales esse.



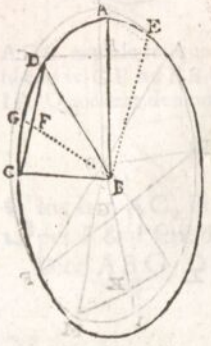
Demonstratio.

SI enim non sint æquales, sit BAC minor sectore DAE: cùm igitur triangula ABC, DAE sunt æqualia, erunt BAC, DAE sectores simul sumpti æquales semiellipsi: Quod est contra hypothesim. igitur sectores BAC, DAE non sunt inæquales sed æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVII.

SInt AB, BC diametri coniugatæ, ductaque ex C recta quauis CD, ducatur ex B linea BE parallela rectæ CD. iungaturque DB.

Dico DBC sectorem duplum esse sectoris ABE.



[b] Coroll. 46. huius.

[c] 50. huius.

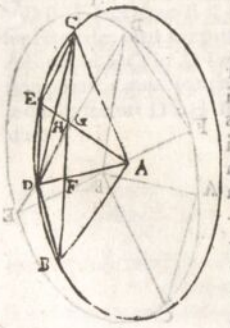
Demonstratio.

DIuisa CD bifariam in F, ducatur diameter BG, & quoniam BE æquidistat ordinatim positæ CD ad diametrum BG, ipsa etiam est posita ordinatim & quidem per centrum, sunt igitur coniugatæ diametri BG, BE. sunt autem ex hypothesi CB, BA etiam coniugatæ. Ergo [b] sector CBA par est sectori GBE, demptoque communi GBA, sectores CBG, ABE æquales erunt. Atqui sector CBD duplus est [c] sectoris CBG. ergo sector CBD duplus quoque est sectoris ABE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

SI sectores ABD, ADE, AEC sint æquales, ducanturque rectæ DE & BC, secans rectas AD, AE in F & G.

Dico BF, DE, EC esse æquales.



[d] Coroll. 60. huius.

[e] 60. huius.

[f] 51. huius.

Demonstratio.

DVcantur rectæ BD, EC, DC, DG. Quia sectores ADE, AEC sunt æquales, etiam triangula CHA. DHA [d] æqualia sunt. ergo æquales sunt rectæ DH HC. Deinde quia sectores ADB, ACE æquales sunt, etiam segmenta [e] BD, EC sunt æqualia. Ergo CB, ED sunt [f] parallelæ. Anguli igitur GCH, EDH, æquantur: sunt verò anguli quoque GHC, DHE æquales

les, & iam ostendi æquales etiam esse rectas DH, HC; igitur [a] CG, ED, æquales sunt. similiter ostendemus BF, DE æquales esse. Constat ergo veritas propositionis. [a] 26. primi.

PROPOSITIO LXIX.

Iisdem positis producatur DG, donec AC lineæ occurat in I.
Dico AGI, AGC, AEC triangula in continua esse analogia.

Demonstratio.

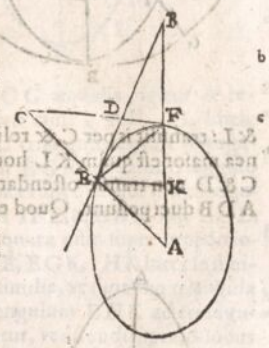
EX superiori demonstratione, in triangulis CHG, EHD, patet omnia esse æqualia, adeoque latera etiam EH, HG sunt æqualia. considerentur modò triangula DHG, BHC, in quibus cùm duo latera DH, HE, duobus lateribus CH, HE æqualia sint, angulusque DHG æqualis angulo CHE, ad basim etiam æquales erunt anguli HGD, CEH. ac proinde DI, CE sunt parallelę: adeoque vt AI ad AC, sic AG ad AE. sed est vt AI ad AC, sic AGI triangulum ad triangulum AGC: & vt AG ad AE sic AGC triangulum ad triangulum AEC: igitur vt AGI triangulum ad triangulum AGC: sic AGC triangulum ad triangulum AEC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.

ELlipsim secent binæ diametri AE, AF in punctis E & F, ex quibus ducantur FC, EB tangentes ellipsim, occurrentes diametris in C & B, iunganturq; EF.
Dico triangulum ACF triangulo ABE æquale esse.

Demonstratio.

EX puncto E ad AF duc ordinatim EK, erit hęc [b] tangenti F parallela, ideoque triangula AEK, ACF similia sunt, ac proinde duplicatam habent rationem rationis AK ad AF: hoc est quia [c] AK, AF, AB sunt tres continuæ proportionales, rationem habent quam AK ad AB. sed etiam est vt AK ad AB, sic triangulum idem AEK ad triangulum AEB. ergo triangulum AEK ad triangula ACF, AEB eandem habet rationem; æquantur igitur triangula ACF, AEB: Quod erat demonstrandum.



[b] 13. huius.
[c] 32. huius.

EL.

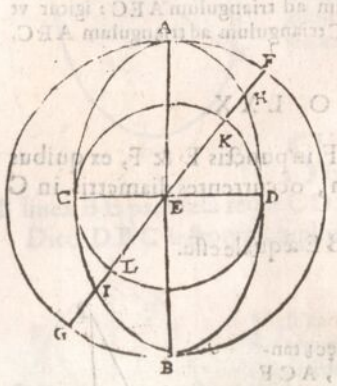
ELLIPSIS
PARS TERTIA

Considerat axium ac diametrorum coniugatarum tam æqualium quam inæqualium proprietates.

PROPOSITIO LXXI.

IN ellipsi diametrorum maxima & minima sunt axes.

Demonstratio.



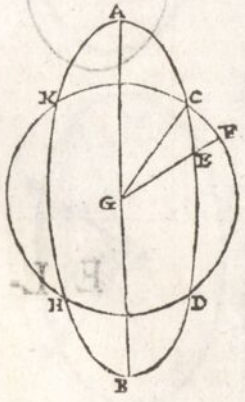
a 40. huius.

SInt A B C ellipseos axes A B, C D, & A B quidem maior, C D verò minor. dico A B, diametrorum esse maximam, C D verò minimam, centro ellipsis E: interuallo E A circulus describatur A F G: transilit is per B, & reliquo sui totus extra [a] ellipsim cadet: ducatur dein per E diameter quæcunque F G occurrens ellipsi in H & I. circulo autem in F & G. Quoniam circulus A F G totus cadit extra ellipsim, erit F G linea maior rectâ H I: igitur & A B maior est quàm H I. idem ostenditur de quauis aliâ diametro; igitur A B axis maximus est diametrorum ellipsis A B C. Quod erat primum.

b coroll. 40. huius.

Rursum centro E interuallo E D circulus describatur D K L occurrens F G lineæ in K & L: transilit is per C, & reliqua sui parte totus intra [b] sectionem cadet. igitur H I linea maior est quàm K L hoc est C D: Quare cùm idem de omni alia linea quæ per C & D non transit ostendatur, erit C D diameter omnium minima quæ in ellipsi A D B duci possunt. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.



c coroll. 41. huius.

DIameter quæ maiori axi est propior, illa maior est: & quæ remotior, minor. sit A B C ellipseos axis A B, centrum G: ponaturque G C diameter propior axi quàm G E. dico G C maiorem esse ipsa G E. centro enim G interuallo G C circulus describatur, occurret is [c] ellipsi in quatuor tantùm punctis C K H D. quare G E ad peripheriam non pertingit. vnde minor est quàm G C. Quod erat demonstrandum.

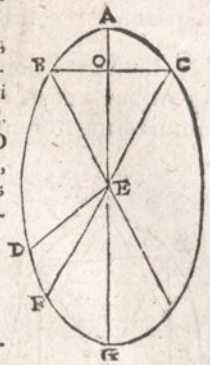
Corollarium secundum.

POrrò diameter axi vicinior est, quæ cum axe minorem vel angulum facit vel sectorem. primum patet: alterum è primo sic ostendo. Ellipseos axis maior sit A G faciatque diameter B E cum axe sectorem

B E A

BEA minorem sectore DEG, quem cum axe facit diameter DE.

Quoniam igitur sector DEG maior est sectore BEA; fiat sector FEG æqualis sectori BEA; & FE occurrat ellipsi in C, ducaturque BOC; sector BEA æquatur sectori FEG ex constructione hoc est [a] sectori ad verticem AEC. Ergo [b] BC bisecta est in O ab axe AG. anguli ergo ad O recti sunt. patet ergo angulum BEA æquari angulo AEC, hoc est angulo FEG, hoc est minorem esse angulo DEG; liquet igitur ex primo BE quæ sectorem facit cum axe minorem, axi propiorem esse quàm DE, quæ maiorem.



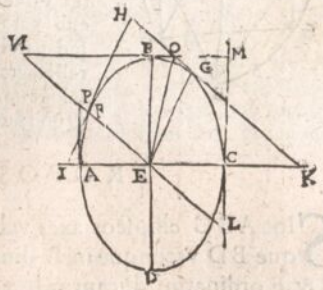
a 19. huius.
b 6. huius.

PROPOSITIO LXXII.

REctangulum sub dimidijs axibus æquale est parallelogrammo sub semidiametris coniugatis.

Demonstratio.

SInt ABC ellipsis axes AC, BD: centrum E, & quæuis semidiametri coniugatæ EF, EG. actisque per F & G tangentibus quæ conueniant in H, & axi AC occurrant in I & K: ducantur etiam per C & B lineæ quæ ellipsim contingant in C & B: conueniant autem in M: & HK, EF secent in O, L, N: tum iunctis punctis EO agatur per A tangens, secans EN lineam in P. Quoniam tam NO, KE [c] lineę quàm OK, NE sibi mutuo æquidistant; erit NOKE parallelogrammum, diametro OE diuisum bifariam: sunt autem triangula [d] EOB, EOG æqualia, igitur & reliqua triangula EBN, EGK inter se æquantur. Rursum cùm [e] AP, CL lineæ æquidistent, & AE, CE lineæ sint æquales, erit ECL triangulo æquale triangulum EAP hoc est [f] EIF. Quoniam igitur triangulum EGK æquatur triangulo EBN, & triangulũ IFE triangulo ECL, proportionalia erunt quatuor illa triangula; sunt verò etiam similia inter se, nimirum EGK ipsi IFE, & EBN ipsi ECL; ergo [g] rectæ KE, EI, NE, EL; proportionales sunt. quare cùm super proportionalibus indirectum positis constituta sunt triangula IFE, EGK, IHK inter se similia & triangula CLE, EBN, LMN inter se quoque similia, vt sunt duo triangula IFE, EGK ad duo triangula LEC, EBN, ita [h] triangulum EHK ad triangulum LHN. Atqui duo triangula IFE, EGK æquantur, vt ostendi supra, duobus LCE, EBN. ergo etiam triangulũ IHK triangulo LMN æquale est; ac proinde demptis æqualibus parallelogrammum GEPH sub semidiametris coniugatis, æquatur rectangulo BECH sub dimidijs axibus contento. Quod erat demonstrandum.



c 13. huius.
d 38. huius.
e 15. huius.
f 70. huius.
g 22. sexti.
h 60. decimi.

Corollarium primum.

HInc sequitur si in ellipsi duæ quæuis sint diametrorum coniugationes AE, EB, EF, EG. triangula super EA, EB, EF, EG in angulis AEB, FEG, esse inter se æqualia: sunt enim dimidia parallelogrammorum æqualium.

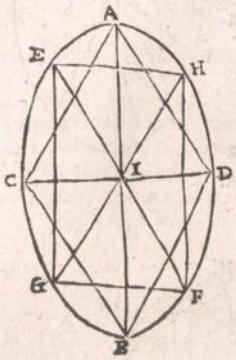
Corollarium secundum.

SEquitur secundò parallelogramma sub totis diametris coniugatis, inter se esse æqualia: cùm sint quadrupla eorum quę hac propositione ostensa sunt æqualia.

PROPOSITIO LXXIII.

IN ellipsi parallelogrammum quod fit à lineis extrema axium coniungentibus æquale est parallelogrammo contento lineis extrema quarumuis diametrorum coniugatarum coniungentibus.

Demonstratio.



a 72. huius.

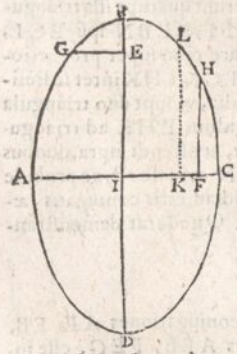
SInt ABC ellipseos axes ABCD , & alia quæuis diametrorum coniugatio EFGH iungantúrque tam axium, quàm diametrorum extrema: dico CADB parallelogrammum æquari parallelogrammo EHFG. rectangulum ex AB & DI duplum est trianguli ADB: & rectangulum ex AB & CI, duplum est trianguli ACB. ergo rectangulum ex AB, CD, duplum est parallelogrammi ACBD, siue ACBD parallelogrammum, dimidium est rectanguli super AB, CD. similiter ostendam parallelogrammum EGFH dimidium esse parallelogrammi super EF, GH in angulo EIH: sed parallelogrammum super EF, GH a æquale est parallelogrammo super ABCD; igitur & ACBD parallelogrammum æquale est parallelogrammo EGFH. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

SInt ABC ellipseos axes vel diametri coniugatæ, AC, BD. diuisâque BD vtcunque in E, diuidatur AC in F proportionaliter, & per E & F ordinatim ducantur lineæ EG, FH:

Dico rectangulum AFC æquari quadrato GE, & BED rectangulum quadrato HF, & si quadratum GE sit æquale rectangulo AFC. dico BD, AC proportionaliter esse diuisas in E & F.

Demonstratio.



CVm ex hypothesi DE sit ad EB vt AF ad FC, erit permutando DE ad AF, vt BE ad FC. quare & tota DB, ad totam AC, vt DE ad AF, & EB, ad FC. igitur rationes BE, ad FC, & DE ad AF, simul sumptę duplicatæ sunt rationis DB ad AC. Atqui ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC, componitur ex rationibus BE ad FC, & DE ad AF. ergo ratio rectanguli BED ad rectangulum AFC duplicata est rationis BD ad AC, hoc est rationis BI ad AI. ergo rectangulum BED est ad rectangulum AFC, vt quadratum BI ad quadratum AI. sed idem quoque rectangulum BED est ad quadratum GE, vt rectangulũ BID, hoc est, quadratum BI, ad quadratum AI; æquantur igitur quadratum GE & rectangulum AFC. similiter ostendemus rectangulum BED & quadratum HF æqualia esse.

Sint iam æqualia quadratum GE & rectangulum AFC: dico BD, AC proportionaliter esse sectas: Nam si non est vt BE ad ED, sic AF ad FC, sit vt BE, ad ED, sic AK ad KC. Erit ergo quadratum GE æquale rectangulo AKC per primam

mam partem huius: Quod fieri non potest, cùm quadratum GE ex hypothesi sit æquale rectangulo AFC. Non igitur AC in K aut alibi quàm in F erit secta proportionaliter ad BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

SI axes aut diametri coniugatę sint proportionaliter sectæ in E & F, & ordinatim ducantur EG, FH.

Dico quadratum FH esse ad quadratum EG, vt quadratum BD, ad quadratum AC.

Demonstratio.

QVadratum FH[a] æquatur rectangulo BED, sed rectangulum BED est ad quadratum EG vt rectangulum BID, hoc est quadratum BI, ad quadratum IA. ergo etiam quadratum FH est ad quadratum EG, vt quadratum BI ad quadratum IA, hoc est, vt quadratum BD ad quadratum AC. Quod erat demonstrandum. [a] 74. huius.

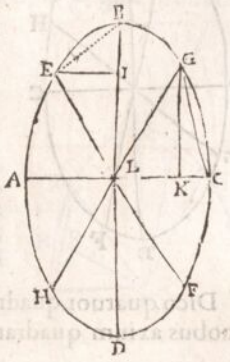
Quod si ad diametros coniugatas ordinatim positę sint EG, FH, & sit vt quadratum BD ad quadratum AC, ita quadratum FH ad quadratum EG: Dico BD, AC proportionaliter esse sectas in E & F. si enim negas esse AF ad FC, vt DE ad EB, fiat AK ad KC, vt DE ad EB, & sit ordinatim KL. ergo vt quadratum BD ad quadratum AC, sic quadratum KL ad quadratum EG: quod fieri non potest, cùm ex hypothesi quadratum FH sit ad quadratum EG, vt quadratum BD ad quadratum AC. non igitur est vt quadratum BD ad quadratum AC, ita quadratum KL, aut quoduis aliud præter quadratum FH, ad quadratum EG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.

SInt in ABC ellipsi duæ quæuis diametrorum coniugationes AC, BD; EF, GH; ducanturque ex E & G lineæ EI, GK ordinatim ad diametros BD, AC.

Dico EI quadratum, æquari rectangulo AKC, & BID, rectangulum æquale esse quadrato GK.

Demonstratio.

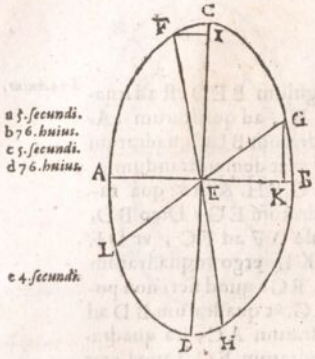


POnantur EB, GC. Quoniam igitur tàm AC, BD, quàm EF, GH diametri sunt coniugatæ, erit [b] sector BLC æqualis sectori ELG, & dempto communi BLG, sector ELB æqualis sectori CLG. adeoque & LEB triangulum [c] æquale triangulo LGC: & quia BD est coniugata ipsi AC, erit BD parallela ad KG quæ est ordinatim posita ad AC. ergo angulus GKL æqualis angulo BLA. similiter quia AC est coniugata ipsi BD, erit AC parallela ipsi EI ordinatim positæ ad BD; angulus ergo EIB æqualis est angulo BLA hoc est angulo GKL; igitur cum triangula sint æqualia, erit (vt infra ostendam) vt basis LB ad basim LC, ita KG ad EI, adeoque vt quadratum BL ad quadratum LC, hoc est vt quadratum BD, ad quadratum AC, sic quadratum KG ad quadratum EI. vnde BD, AC lineæ in I & K [d] proportionaliter sunt diuisæ. quare EI quadratum [e] æquale rectangulo AKC, item BID rectangulum æquale quadrato GK. Quod fuit demonstrandum. [b] Corol. 46. huius. [c] Coroll. 60. huius. [d] 75. huius. [e] 74. huius.

PROPOSITIO LXXVII.

AXium quadrata ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis cuiuſcunque coniugationis ſimul ſumptis.

Demonſtratio.



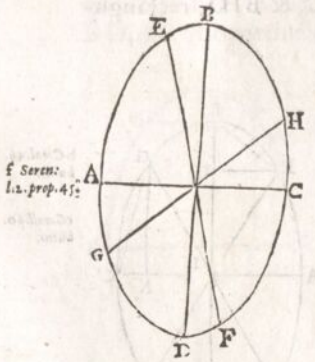
a 5. ſecundi.
b 76. huius.
c 5. ſecundi.
d 76. huius.
e 4. ſecundi.

SInt A B C ellipſeos axes A B, C D, & alia quæuis diametrorũ coniugatio F H, G L. dico A B, C D quadrata ſimul ſumpta æquari quadratis F H, G L ſimul ſumptis: ducantur ordinatim lineæ F I, G K quæ, quia ad axes ducuntur, perpendiculares erunt; centrum autem ſectionis ponatur E. Quadratum E C [a] æquale eſt quadrato E I vnà cum C I D rectangulo id eſt [b] quadrato G K: quadratum autem E B [c] æquale eſt quadrato E K vnà cum rectangulo A K B id eſt [d] quadrato F I: vnde quadrata duo E B, E C ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis F I, I E, E K, G K, ſimul ſumptis. ſed ijſdem quadratis æqualia ſunt quadrata F E, E G, quadratis igitur E F, E G æqualia ſunt quadrata E B, E C. quare cùm A B, C D quadrata ſimul ſumpta [e] quadrupla ſint quadratorum E B, E C & F H, G L quadrata quadrupla quadratorum E F, E G; patet A B, C D quadrata ſimul ſumpta æquari quadratis F H, G L ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

AXes ellipſeos ſimul ſumpti minimæ ſunt omnium diametrorum coniugatarum ſimul ſumptarum.

Demonſtratio.



f Serem: l. 2. prop. 45.

SInt axes A C, B D & quæuis diametrorum coniugatio, E F, G H: dico axes ſimul ſumptos minores eſſe diametris coniugatis ſimul ſumptis. Quoniam A C, B D quadrata ſimul ſumpta, æqualia ſunt quadratis E F, G H ſimul ſumptis: ſit autem & B D maxima diametrorum, A C verò minima, erunt [f] A C, B D ſimul ſumptæ minores rectis E F, G H: igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIX.

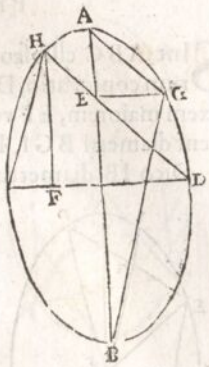
SInt A B C ellipſis axes A B, C D, diuiſi proportionaliter in E & F: ductiſque ordinatim (quę hîc ſunt perpendiculares) lineis E G, F H: iungantur A G, G B, C H, H D:

Dico quatuor quadrata A G, G B, C H, H D, ſimul ſumpta, æquari duobus axium quadratis.

Demon-

Demonſtratio.

QVadratum AB æquale eſt [a] quadratis AE, EB vnà cum rectangulo AEB id eſt [b] quadrato HF bis ſumpto; quadratum verò CD æquale eſt quadratis CF, FD, & CFD rectangulo id eſt quadrato EG bis ſumpto, ſed ijſdem [c] quadratis æqualia ſunt quadrata AG, GB, CH, HD, igitur axium quadrata ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis AG, GB, CH, HD. Quod erat demonſtrandum.



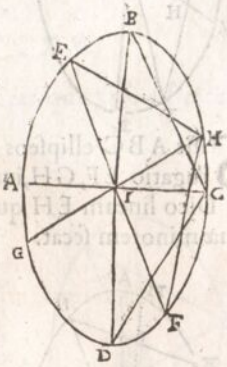
a 4. *ſecundi.*
b 76. *huius*
c 47. *primi.*

PROPOSITIO LXXX.

QVadrata linearum extrema axium coniungentium æqualia ſunt quadratis linearum quæ extrema cuiuſuis coniugationis coniungũt.

Demonſtratio.

SInt ABC ellipſeos axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH. iunganturque BC, CD, EH, FH. dico quadrata BC, CD ſimul ſumpta æquari quadratis EH, FH ſimul ſumptis. quadrata BC, CD ſimul ſumpta [d] æqualia ſunt quadratis BI, IC bis ſumptis; quadrata autem EH, HF æquantur quadratis EI, IH bis ſumptis: ſed quadrata EI, IH ſimul ſumpta [e] ſunt æqualia quadratis BI, IC ſimul ſumptis; igitur quadrata BC, CD ſimul ſumpta, æqualia ſunt quadratis EH, HF ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.



d 39. *deſcineis.*
e 77. *huius.*

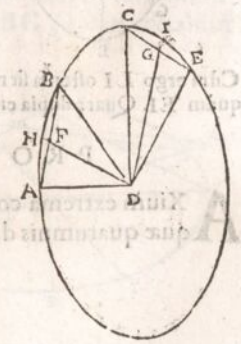
PROPOSITIO LXXXI.

SEcent ABC ellipſim, cuius centrum D duæ diametrorum coniugationes AD, DC, BD, DE, iunctiſque punctis AB, CE diuidantur AB, CE lineę bifariam in F & G, ducanturq; DF, DG quæ productæ occurrant ellipſi in H & I.

Dico HD, ID diametros eſſe coniugatas.

Demonſtratio.

QVoniam AD, DC, BD, DE, diametri ſunt coniugatæ, erunt [f] ADC, BDE ſectores æquales: ablato igitur communi BDC, erunt ADB, CDE reliqui æquales: rurſum cùm AB lineam ſecet in F, bifariam diameter DH, erunt tam ADH, BDH [g] ſectores, quã AFD, BFD triangula æqualia. eodem modo oſtenditur EDI ſector æqualis ſectori CDI, ſectores igitur ADH, EDI ſunt æquales inter ſe: Addito igitur communi HDI, erit ſector ADI æqualis ſectori HDE, coniugatæ ergo [h] ſunt DH, DI.

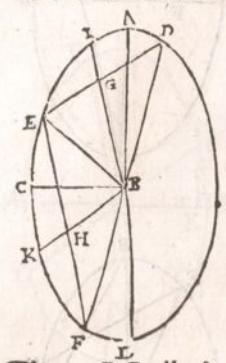


f *Corol. 46. huius.*
g 50. *huiũs.*
h *Corol. 60 huius.*

PROPOSITIO LXXXII.

SInt A B C ellipſeos axes A B, C D, ſit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, D F, E B; quas iungant D E, F E; D E quidem ſecans axem maiorem, E F verò minorem : ipſas deinde D E , F E bifariam ſecent diametri B G I, B H K.

Dico I B diametrum maiorem eſſe diametro K B.



a 50. huius.
b 46. huius.
c Coroll. 2. 69. huius.

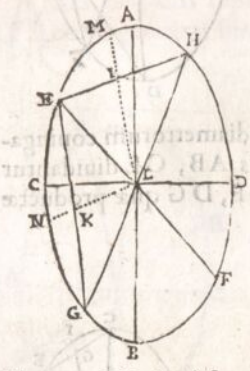
Demonſtratio.

QVoniam diametri B I, B K biſecant rectas E D, E F ſectores ambo [a] D B E , E B F biſecantur. Quare cùm [b] ipſi æquales ſint, etiam ipſorum ſectores dimidij I B D, K B F æquales erunt. ſector igitur I B D minor eſt ſectore K B L ; ergo ſector I B A multò minor ſectore K B L. ergo I B [c] propior axi eſt quàm B K, ac proinde maior quàm B K. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

SInt A B C ellipſeos axes A B, C D, & alia quæuis diametrorum coniugatio E F, G H, iunganturque E H, E G.

Dico lineam E H quæ axem maiorem ſecat, minorem eſſe lineâ E G, quæ minorem ſecat.



d 46. huius.
e 60. huius.
f 53. huius.
g 82. huius.
h 81. huius.

Demonſtratio.

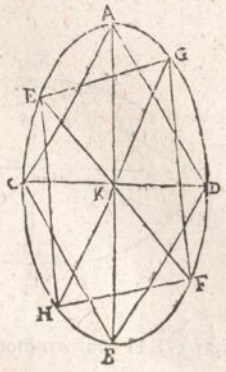
EH, E G diuidantur bifariam per diametros L M, L N, in I, & K. Quoniam G H, E F ſunt coniugatæ; [d] ſectores G L E, E L H æquales erunt, ac proinde [e] ſegmenta G N E, E M H æqualia ſunt. Quare L M, L N biſecantes ſubtenſas B H, E G, proportionaliter [f] ſunt diuiſæ. Ergo M I ad I L, vt N K ad K L: & cõponendo ac permutando vt L M ad L N, ſic L I ad L K. ſed L M [g] maior eſt quàm L N; ergo L I etiam maior quàm L K. Iam verò cùm L N, L M etiam [h] ſint coniugatę, & E G ſit ordinatim ex conſtr. poſita ad L N, erit L M parallela ad E K. ob ſimilem cauſam L N, E I parallelæ erunt ; parallelogrammum igitur eſt E I, L K, adeoque L I, K E, L K, E I, æquantur. Cùm ergo L I oſtenſa ſit maior eſſe quàm L K, erit & K E maior quàm L K, hoc eſt quàm E I. Quare dupla eius E G, maior duplâ E H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

AXium extrema coniungentes ſimul ſumptæ maximę ſunt omnium quæ quarumuis diametrorum coniugatarum conuertunt extrema.

Demon-

Demonſtratio.



SInt axes AB, CD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: iunganturque extrema tam axium, quàm aliarum diametrorum. dico lineas CA, AD, DB, BC simul ſumptas maiores eſſe lineis FG, GF, FH, HE simul ſumptis. Quoniam CK ipſi HK æqualis eſt, EK verò communis, & EH [a] recta maior quàm EG, erit angulus EKH, maior angulo EKG: igitur & angulus EKH maior eſt recto AKC. ſunt autem [b] AKC, EKH triangula æqualia, quare & EH [c] eſt maior quàm AC: eadem modo oſtenditur AC linea maior eſſe rectâ EG. ergo EG minima eſt, & EH, maxima linearum EH, AC, AD, EG. igitur cùm [d] EH, EG quadrata ſimul ſumpta ſint æqualia quadratis AC, AD ſimul ſumptis, erunt [e] EH, EG lineæ ſimul ſumptę minores lineis AC, CD ſimul ſumptis. eodem modo oſtenduntur lineæ GF, FH minores lineis CB, BD. ergo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 83. *huius.*

b *ſeq. ex* 73. *huius.*

c *Ex elem.*

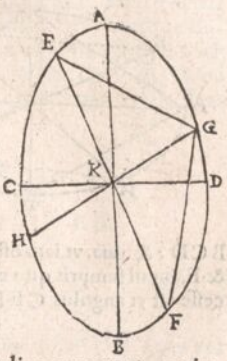
d 80. *huius.*

e *Serēn. l.2. prop.* 45.

PROPOSITIO LXXXV.

IN nulla ellipſi eſt inuenire diametros coniugatas quæ ſeſe ad rectos ſecent, præter axes.

Demonſtratio.



SInt axes, AB maior, CD minor & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: centrum autem ellipſis ſit K. dico neutrum angulorum EKG, GKF rectum eſſe: iungantur enim puncta EG, GF: Quoniam EK, KG duabus rectis FK, KG æquales ſunt, & EG [f] minor quàm FG, erit angulus EKG minor [g] angulo GKF: Quare cùm eorum ſumma ſit duobus rectis æqualis, neuter illorū rectus eſt: idem de alijs omnibus oſtenditur: igitur in nulla ellipſi eſt inuenire, &c. Quod erat demonſtrandum.

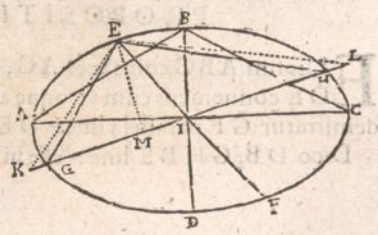
f 83. *huius.*

g *Ex elementis.*

PROPOSITIO LXXXVI.

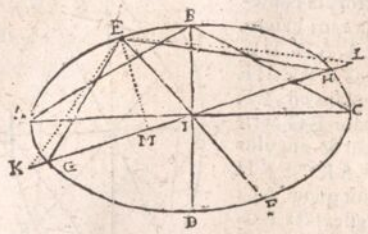
SInt ABC ellipſis axes AC, BD & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: iunctiſque punctis AB, BC, rectæ ducantur EH, EG.

Dico angulum ABC qui circa minorem axem exiſtit, maiorem eſſe angulo GEH, ac proinde maximum eſſe omnium angulorum qui continentur à lineis extrema diametrorum coniugatarum coniungentibus.



Demon-

Demonſtratio.



CVm GH linea minor ſit axe AC, producatur vtrimque æqualiter in K & L vt LK, ſit æqualis axi AC, iunganturque puncta EK, EL, & ex E demittatur EM normalis ad LK: erit igitur KEL triangulum maius triangulo GEH id eſt triangulo [a] ABC; quare cùm inæqualium triangulorũ baſes AC, LK ſint æquales, erit EM [b] altitudo trianguli KEL, maior IB altitudine trianguli ABC: adeoque [c] angulus KEL maior angulo ABC: angulus igitur GEH multò minor eſt angulo ABC. Quod erat demonſtrandum.

a 73. huius.

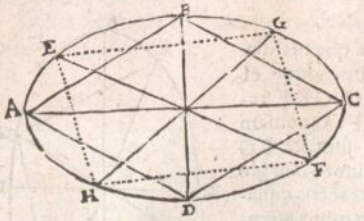
b Ex elementis.

c Ex elementis.

PROPOSITIO LXXXVII.

SInt ABC ellipſeos axes AC, BD: iunganturque illorum extrema AB, BC, CD, DA: ſit autem & alia quæcunque diametrorum coniugatio EF, GH, quarum extrema quoque coniungantur.

Dico angulos ABC, EGF, HFG, BCD arithmeticè eſſe proportionales.



Demonſtratio.

QVoniam tam AC quàm EF parallelogrammum eſt, erunt tam ABC, BCD anguli, quàm EGF, GFH duobus rectis æquales: quare & anguli ABC, BCD, ſimul ſumpti æquantur angulis EGF, GFH ſimul ſumptis: eſt autem angulus ABC, oſtenſus [d] maior angulo EGF, igitur & GFH maior eſt angulo BCD: & quia, vt iam oſtendi, anguli B, & C ſimul ſumpti æquantur angulis G, & F, ſimul ſumptis quo exceſſu ABC angulus ſuperat angulum EGF, eodem neceſſe eſt vt angulus GFH ſuperet angulum BCD. Quod erat demonſtrandum.

d 86. huius.

Corollarium.

HInc patet angulum BCD qui circa axem maiorẽ exiſtit, minimum eſſe omnium angulorum qui fiunt à lineis diametrorum coniugatarum extrema coniungentibus.

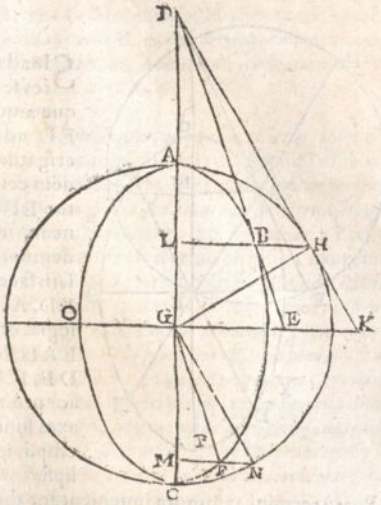
PROPOSITIO LXXXVIII.

ELlipſim ABC cuius axes AC, EG contingat in B recta quædam DE conueniens cum vtroque axe in D & E: ex centro verò G recta demittatur GF parallela lineæ DE.

Dico DB, GF, BE lineas eſſe in continua proportione.

Demon-

Demonſtratio.



CEntro G, interuallo A G circulus deſcribatur A H C: & ex D linea demittatur D K contingens circulum in A occurrens E G axi ellipſeos in K, ductâque ex H linea H L normali ad axem quæ per Coroll. 33. huius tranſit etiam per B, agatur per F normalis alia F M N, iunganturque puncta N G, H G. Quoniam L H, M N lineæ æquidiſtant, erunt anguli L D B, M G F æquales: ſunt autem & anguli B L D, F M G recti per conſtructionem: igitur & reliquus L B D, reliquo M F G æqualis eſt. quare anguli D B H, G F N inter ſe æquantur. Quia autem triangula D L B, G M F ſunt ſimilia, erit vt L B ad M F, ſic D B ad G F. ſed ex demonſtratis in ſcholio quartæ huius, vt L B ad M F, ſic B H ad F N. ergo D B ad G F, vt B H ad F N. quare cùm anguli D B H, G F N iam oſtenſi ſint æquales, [a] ſimilia erunt triangula D B H, G F N. ergo H D eſt ad B D, hoc eſt H K eſt ad B E, vt G N ad G F. & permutando vt H K ad G N, ſic B E ad G F. Deinde cùm in triangulo D G K angulus ad G rectus ſit & G H ex centro ad contactum ducta, normalis ad D K, [b] erit H K ad G H, vt G H ad H D. ſed G N, G H æquantur, ergo, vt K H ad G N, hoc eſt ſicut ante oſtendi, vt B E ad G F, ſic G N ad D H. ſed ob ſimilitudinem triangulorum vt G N ad D H, ſic G F ad D B. ergo, vt B E ad G F, ſic G F ad D B. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. ſexti.

[b] 8. ſexti.

PROPOSITIO LXXXIX.

IIſdem poſitis ſi G F ſit proportionalis media inter D B, B E. Dico punctum F eſſe ad ellipſim.

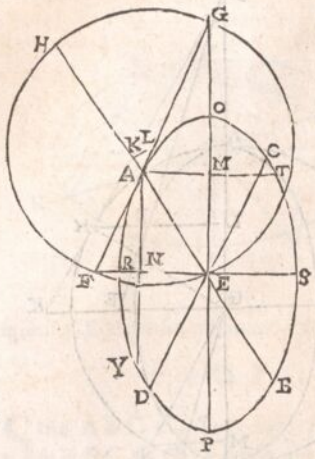
Demonſtratio.

SI punctum F non eſt ad ellipſim, occurrat ergo ellipſi rectæ G F in P, ſupra vel infra F. Ergo per præcedentem D B, G P, B E ſunt continuè proportionales; quod fieri non poteſt, cùm D B, G F, B E ponantur continuę. Non igitur aliud punctum rectæ G F ad ellipſim eſt, quàm F. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XC.

DAta quauis diametrorum coniugatione, ellipſeos axes reperire.

Constructio & demonstratio.



SInt datæ diametri coniugatæ A B, C D secantes se bifariam in E; actaque per A linea F G quę æquidistet C D, fiat vt A E ad E D, sic E D ad A H: tum E H diuisa bifariam in K, erigatur ex K normalis K L occurrens F G in L, dein centro L, interuallo L E circulus describatur E F G, transibit hic per H secabitque F G lineam in punctis quibusdam F & G: iungantur demum puncta F F, E G. dico lineas E F, E G satisfacere petitioni. Quoniam enim rectæ A E, E D, A H sunt ex constructione in continua analogia, erit quadrato E D æquale rectangulum E A H, hoc est F A G rectangulum. itaque G A, D E, F A rectæ in continua etiam sunt analogia, ac [a] proinde, erit punctum D ad ellipsim cuius axes sunt in lineis E F, E G. sed & A in eadem est ellipsi, igitur & B, C puncta, in eadem erunt ellipsi.

a 89. huius.

Porrò termini axium ita inuenientur: ductis A M, A N normalibus ad E G lineam, inueniatur inter E M, E G media E O, & inter E N, E F media E R: describaturque per D, A, C puncta ellipsis; quoniam C D ipsi A B est coniugata, adeoque ad ipsam ordinatim posita & F G linea æquidistat ipsi C D, erit F G tangens [b] ellipsim A B C; sunt autem A M, A N normales ad lineas in quibus axes sectionis existunt; & tam E M, E O, E G, quàm E N, E R, E F continuæ, igitur [c] ellipsis A B C transit per puncta R O: quare R & O termini sunt axium, quos oportuit exhibere.

b 19. huius.
c Patet ex 31. huius.

Scholion.

PRopositum est hoc problema à Pappo, lib. 8. Mathem. Collect. prop. 14. ac veram quidem eius constructionem eam nempe quam ex illo nos iam attulimus, sed non demonstrat. Fredericus Commandinus demonstrationem supplere conatus est, ita scribens:

Producatur A M vsque ad T ita vt T M ipsi M A, sit æqualis: producatur etiam A N vsque ad Y vt Y N sit æqualis N A: erunt puncta T Y in ellipsi, ex ijs quæ demonstrata sunt ab Apollonio in propos. 47. 2. lib. Conic. sed R S parallela est ipsi A T, est enim angulus in semicirculo rectus, quare & O P ipsi A Y parallela erit. Quoniam igitur C D ad A B ordinatim est applicata quę per A ipsi D C parallela ducitur, videlicet F G sectionem in puncto A continget, & cum F G sectionem contingens diametro occurrat in G & A M ordinatim applicetur, erit per 37. prim. Coni. Apollon. rectangulum G E M aquale quadrato ex E O vel E P. Eâdem quoque ratione cùm A N ordinatim applicetur rectangulum F E N quadrato ex E R vel E S æquale est; ergo O P, R S ellipsis coniugati axes erunt.

Hæc Commandinus, quibus rectè ostendit O P *&* R S *coniugatos axes esse ellipsis, quæ per puncta* A T Y *incedit, & à linea* F G *in puncto tangitur: verùm hoc propositum non fuit. Nam ad inueniendum eiusmodi coniugatos axes non opus erat ad describendum circulum* F E G, *facere rectangulum* E A H *quadrato* E D *æquale, & secare* E H *bifariam in* K *indeq; normalem excitare, quæ congrediens cum* F G *in* L, *centrum præberet* L *circuli* F E G, *sumpto si quidem in linea* F G *centro quocumque, si per* E *circulus circumducatur, qui secet lineam* F G: *non iam quidem in punctis* F *&* G *sed in aliis quæ ex* E *rectæ emittentur angulum rectum continebunt, non secus ac* E F *&* E G, *quare si ab* A *ad has ipsas postremo ductas lineas, normales ducantur, quales erant* A M *&* A N, *duplicenturq; vt* A T *&* A Y, *erunt puncta quæ vices punctorum* T *&* Y *subibunt in ellipsi, quæ per* A *incedit, tangiturq; ab* F G *in* A, *axesq; habet in normalibus illis, quæ ex* E *ad communes insectiones circuli & lineæ* F G *infinitæ destinantur. At perspicuum est hanc ellipsin (quod fuerat demonstrandũ) per*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [347] - 290
PUBLIC DOMAIN

per puncta C & D *minimè transire, propterea quod circuli centrum aliud ab* L *assumptum sit, nec sit quadratum* E D *rectangulo sub* E A, *& alia linea quàm* A H *contentum æquale. Itaque vt ostendatur* O P & R S *coniugatos axes esse ellipsis, quæ per terminos diametrorum coniugatarum* A B, & C D *incedit, alia ratio est ineunda, quàm in demonstratione nostra iam proposuimus.*

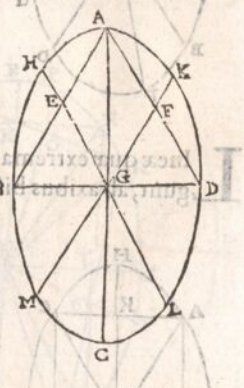
Hæc hactenus super Commandini demonstratione.

Cæterùm ipse Pappi textus temporum iniuriâ nescio quid infortunij passus videtur, ita enim habet: Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorũ ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem hac ratione fiet. *Quæ verba legitimum sensum non habent, cùm ea, quam adfert constructio non organica, sed omnino Geometrica sit, vti eam legenti satis patet: quare puto omissum verbum Geometricè, sicq; legendum:* Facile autem est inuentis quibuscumque coniugationibus diametrorum ellipsis, axes eius organicè inuenire. quod quidem Geometricè hac ratione fiet. *Deinde addita sunt in ipsa constructione illa verba:* cùm sit D E maior quàm E A: *cùm enim constructio vniuersalis sit, siue* D E *minor siue maior, siue ipsi* E A *æqualis ponatur, vt ex nostra demonstratione colligi potest, quodq; Pappum etiam latere nullo modo potuisse certum est, frustra assumitur* D E *maior ipsâ* E A. *Mirum proinde est hunc errorem Fredericum Commandinum non aduertisse, præsertim cùm illo assumpto in demonstratione sua, quam superiùs dedimus, vsus non fuerit: sed vniuersalem attulerit demonstrationem: vnde cùm & ipsa desit demonstratio, quam quin Pappus addiderit, dubium non est. Satis manifestum est eorum errore id contigisse, in quorum manus venit hæc propositio (quæ pene tota, vt existimo, interciderat:) qui eam planè iam mutilam & imperfectam, frustra restituere conati sunt.*

PROPOSITIO XCI.

DAtis axibus in ellipsi, æquales diametros coniugatas exhibere.

Constructio & demonstratio.

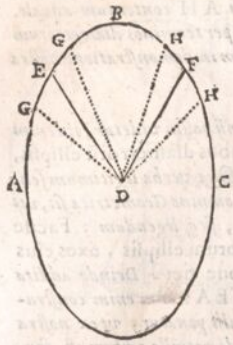


SInt A B C ellipsis axes A C, B D: oporteat autem exhibere diametros coniugatas æquales: iunctis A B, A D; diuidantur rectæ A B, A C bifariam in E & F; & per E & F ex G centro rectæ ducantur G H, G K, occurrentes ellipsi in H, K, L, M punctis. dico illas satisfacere propositioni. Quoniam enim rectæ duæ E B, B G, æquales sunt duabus lineis F D, D G (sunt autem & anguli, æqualibus lateribus contenti inter se æquales) erunt etiam anguli ad basim, E G B, F G D adeoque & reliqui A G E, A G F æquales. Rursum cùm angulus A G B sit rectus & basis A B in E diuisa bifariam, si centro E interuallo E A describatur circulus, transibit is etiam per B, adeoque E A, E G lineæ erunt æquales. Quare & angulus E A G, æqualis angulo E G A, hoc est A G F. ergo A B, K M lineæ parallelæ: eodem modo ostenduntur rectæ A D, H L parallelæ: vnde cùm diametri H L, K M mutuas parallelas bisecent, erunt coniugatæ. quia verò angulus H G A est angulo A G K ostensus æqualis, erit quoque H G linea æqualis G K, vt patet ex 18. huius. ergo H L, K M diametri sunt coniugatæ & æquales. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XCII.

IN vna ellipsi duas tantùm est reperire diametros coniugatas æquales.

Demonſtratio.



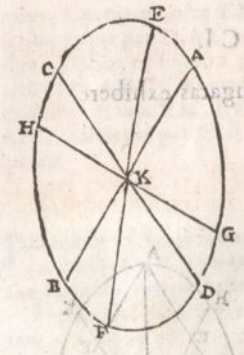
a *Coroll 46. huius.*

SIt ABC ellipſis centrum D & in ea æquales diametri coniugatæ ED, FD: dico alias diametros coniugatas & æquales in ea exhiberi non poſſe: ſint enim, ſi poteſt fieri, præter ED, FD diametros, aliæ æquales & coniugatæ GD, HD: erit igitur [a] EDF ſectori æqualis ſector GDH. Quod fieri non poteſt; nam GD, HD diametri cùm ſint æquales neceſſe eſt maiores vel minores illas eſſe diametris ED; FD, adeoq; ambas ſimul cadere ſupra vel infra diametros ED, FD. Igitur præter ED, FD diametros cõiugatas æquales, nullas alias æquales in ellipſi eſt exhibere. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCIII.

IN ellipſi æquales diametri coniugatæ ſimul ſumptæ, maximæ ſunt omnium diametrorum coniugatarum ſimul ſumptarum.

Demonſtratio.



b *Corol. 46. huius:*

c *71. huius.*

d *77. huius.*

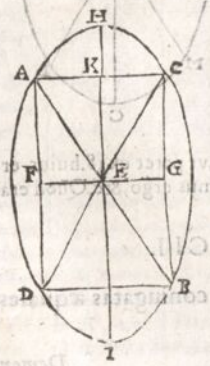
e *Seren. l. 2. prop. 45.*

SInt AB, CD diametri coniugatæ æquales, ſit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio EF, GH: dico diametros AB, CD ſimul ſumptas maiores eſſe diametris EF, GH ſimul ſumptis: cùm enim ſectores AKC, GKE [b] ſint inter ſe æquales, neceſſe eſt vnam coniugatarum inæqualium (ſit EF) axi viciniorem eſſe vtrauis æqualium AB, CD: alteram verò HG; remotiorem. vnde [c] ex quatuor diametris EF maxima; & GH minima eſt. ſunt autem EF, GH [d] quadrata ſimul ſumpta æqualia quadratis AB, CD ſimul ſumptis; igitur AB, CD lineæ ſimul ſumptæ maiores [e] quoq; ſunt lineis EF, GH ſimul ſumptis: Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCIV.

LIneæ quæ extrema diametrorum coniugatarum æqualium coniungunt, ab axibus bifariam ſecantur.

Demonſtratio.



SInt AB, CD diametri coniugatę æquales, iungunturque illarum extrema AD, AC, CB, DB. Dico illas ab axibus bifariam ſecari, diuiſa enim AD bifariam in F, agatur per E centrum FEG occurrens CB rectæ in G. Quandoquidem ergo AB, CD ponantur æquales, harum dimidiæ AE, DE, etiam ſunt æquales. æquantur autem ex conſt. ſimiliter AF, DF. Itaque in triangulis AEF, DEF cùm FE ſit commune, omnia latera ſibi inuicem æquantur. ergo anguli ad F æquales, adeoque recti; & anguli quoque FEA, FED, æquales. Quare anguli etiam GEC, GEB prioribus ad verticem oppoſiti æquantur. ſunt verò latera rurſum CE, EB æqualia & EG commune vtrique triangulo GEC, GEB. Igitur

tur CG, BG æquales, & anguli ad G æquales adeoque recti. Cùm ergo FG rectas AD, CB, (quæ per 19. huius sunt parallelæ) bifariam & ad angulos rectos secet, axis est. secantur igitur ab axe bifariam rectę AD, CB extrema coniugatarum æqualium connectentes. Eodem modo ostendemus reliquas duas AC, BD ab axe HI bisecari. constat ergo veritas propositionis.

PROPOSITIO XCV.

SI lineæ quæ extrema coniugatarum connectunt, ab axibus secentur bifariam:

Dico diametros illas esse inter se æquales.

Demonstratio.

PONatur eadem figura quæ priùs, sintque AD, CB, AC lineæ, extrema coniugatarum connectentes in FG & K bifariam & ad rectos diuisæ axibus HI, FG. dico AB, CD, diametros coniugatas esse inter se æquales: cùm enim AD, CB per 19. huius sint parallelæ & ex hypothesi ab axe in F & G bisecentur, anguli ad F, recti sunt, & latera duo AF, FE æqualia sunt lateribus DF, FE; reliqua igitur latera AE, ED quoque inter se æqualia. similiter ostendam CE, EB æquales. vnde & totę diametri AB, CD æquales. Quod fuit demonstrandum.

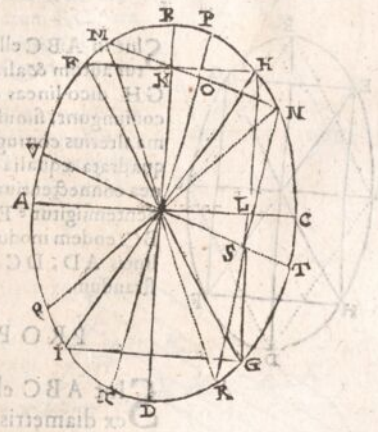
Corollarium.

HInc patet lineas, quæ inæqualium coniugatarum extrema coniungunt, nunquã ab axibus aut alia quauis diametro bifariam & ad rectos secari.

PROPOSITIO XCVI.

LInearum quę extrema coniugatarum quarumuis coniungunt, illa maxima est quæ coniugatas æquales connectens, axem minorem secat; minima, quæ maiorem.

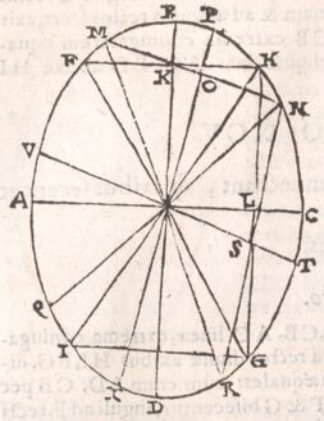
Demonstratio.



SInt AC, BD axes ellipseos ABC, coniugatæ verò æquales FG, HI iunctaque FH maiori axi occurrat in K: & HG minori in L. dico HG lineam maximam esse illarum quæ cuiuscunque coniugationis extrema coniungunt, & FH minimam. Fiat enim quæuis alia diametrorum coniugatio MR, NQ. quarum extrema iungant MN, NR, quibus in O & S bisectis ducantur per centrum XOP, VST. Quoniam ergo FG, HI sunt coniugatæ, sectores EFBH, [a] EHCG æquantur. Ergo [b] segmenta FBH, HCG æqualia sunt. Quare, cùm axes BD, AC etiam bisecent [c] rectas FH, HG, quæ æquales coniugatas iungunt, erunt axes ipsi [d] in K & L, proportionaliter secti. Ergo [e] rectangulum BKD æquale est quadrato LH. simili planè discursu ostendemus rectangulum POX æquari quadrato NS. Deinde quia [f] sectores MEN, FEH æquantur, adeoque [g] segmenta MPN,

a 46. huius.
b 60. huius.
c 94. huius.
d 53. huius.
e 74. huius.
f Coroll. 46. huius.
g 60. huius.

a 53. huius.



b 83. huius.

MPN, FBH, sintque ambæ FH, MN bisectæ in K & O, erunt [a] DB, XP proportionaliter sectæ in K & O; sed DB axis maior est quàm XP. Ergo rectangulũ BKD, hoc est, vt antè ostendi, quadratum HL, maius est rectangulo POX, hoc est quadrato NS. Ergo recta HL maior recta NS. sed HG dupla est ipsius HL, vt antè ostendi, & NR ex const. ipsius NS dupla est. ergo HG maior quàm NR: quia autem NR [b] maior est quam MN; erit HG etiam maior quàm MN. Eodem modo ostendemus HG maiorem esse quarumuis aliarum coniugatarum extrema connectentibus. ergo HG est omnium maxima. quod erat primum.

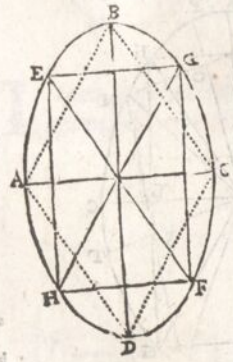
Quod autem FH sit omnium minima, discursu planè simili demonstrabimus. sumatur enim quæuis alia diametrorum coniugatio MR, NQ, & eadẽ, quæ suprà est adhibita, repetatur constructio. eodem modo ostendemus quadratum FK minus esse quadrato MO, & rectam FK minorem rectâ MO, ac proinde FH, minorem quàm MN. est autem [c] RN maior quàm MN. ergo FH etiam minor est quàm NR. Atque ita demonstrabimus FH minorem esse quarumuis coniugatarum extrema connectentibus. omnium igitur minima est. Quod erat secundo loco ostendendum.

c Ibid.

PROPOSITIO XCVII.

CONiugatarum æqualium extrema coniungentes simul sumptæ minimę sunt omnium quę quascunq; diametros coniugatas coniungunt.

Demonstratio.



d 80. huius.

c Ser. lib. 2. prop. 45.

SInt in ABC ellipsi coniugatæ æquales EF, GH. ponatur autem & alia quæuis diametrorum coniugatio, EF, GH. dico lineas quæ extrema coniugatarum æqualium coniungunt, simul sumptas minores esse lineis quæ extrema alterius coniugationis connectunt. sunt enim EG, GF quadrata æqualia quadratis AB, BC, insuper & EG linea connectentium minima, & FG maxima per præcedentem; igitur [c] EG, GF lineæ minores sunt lineis AB, BC; eodem modo ostenduntur EH, HF lineæ minores lineis AD, DC: igitur lineæ, &c. Quod fuit demonstrandum.

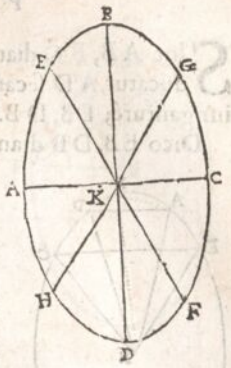
PROPOSITIO XCVIII.

SInt ABC ellipseos axes AC, BD & EF vna ex diametris coniugatis æqualibus.

Dico quadrata AK, BK simul sumpta esse dupla quadrati EK.

Demon-

Demonſtratio.



DVcatur GH altera diametrorum coniugatarum æqualium. Quoniam AC, BD quadrata a ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis EF, GH ſimul ſumptis, erunt & quadrata AK, BK ſub dimidijs axibus, æqualia quadratis EK, GK ſub dimidijs diametris æqualibus; ſunt autem EK, GK quadrata inter ſe æqualia, igitur quadrata AK, BK ſimul ſumpta dupla ſunt quadrati EK. Quod erat demonſtrandum. a 77. huius.

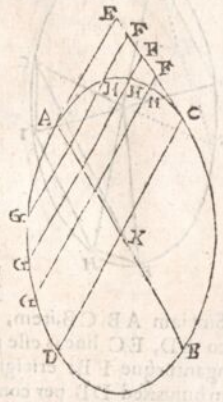
PROPOSITIO XCIX.

Apollonius l. 3. Conic. prop. 16. huiuſmodi habet theorema: ſi ellipſim tangant AE, CE, *conuenientes in* E, *& ſumpto in ſectione puncto* G *ducatur* GHF *tangentium vni parallela* GHF. *erit rectangulum* GFH *ad quadratum* BC, *vt quadratum* AE *ad quadratum* CE.

Verùm non ſimilitudo tantùm rationum ſed ſpatiorum etiam æqualitas reperietur ſi tangentes à diametrorum coniugatarum æqualium ductæ fuerint.

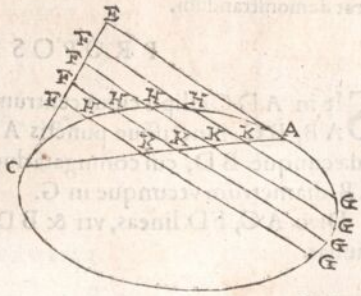
ELlipſeos diametri coniugatæ æquales ſint AB, CD, in quarum terminis A, C, ellipſim tangant duæ rectę conuenientes in E, ſi alterutri ducantur quotuis parallelę GH erunt rectangula GFH quadratis FC æqualia.

Demonſtratio.



QVoniam CD eſt diameter coniugata diametri AB, erit ad ipſam ordinatim poſita: ergo tangenti AE parallela eſt. Eodem modo AK tangenti EC parallela eſt. figura igitur KAEC eſt parallelogrammum. Quare cùm AK, KC ex hypotheſi ſint æquales, etiam AE, CE æquales ſunt; æquantur igitur quadrata AE, EC. Atqui eſt vt quadratum AE ad quadratum EC, ita rectangulum GFH ad quadratum FC, ergo rectangulum GFH quadrato FC æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

Et quoniam Theorema illud Apollonij iam habemus in manibus, etiam hoc addo quod ſimiliter Apollonius non videtur obſeruaſſe: nimirum ſi ductis tangentibus AE, CE, iungantur puncta contactuum A, C, rectangula GFH, quadratis KF æqualia eſſe.



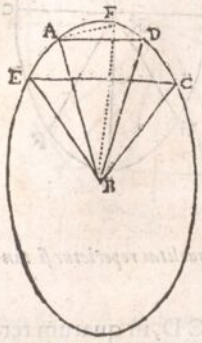
Quoniam FK, AE ſunt parallelæ, triangula AEC, KFC ſimilia ſunt. ergo vt AE ad EC, ſic KF ad FC. ergo vt quadratum AE ad quadratum EC, ſic quadratum KF ad quadratum FC. ſed etiam vt quadratum AC ad quadratum EC ſic rectangula GFH ad quadratum KF. Ergo quadratum KF & rectangulum GFH ad quadratum EC, eandem habent rationem; æquantur igitur. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO C.

SInt AB, BC diametri coniugatæ inæquales, & ex A recta quæuis ducatur AD secans ellipsim in D; cui ex C parallela ducatur CE iungantúrq; EB, DB.

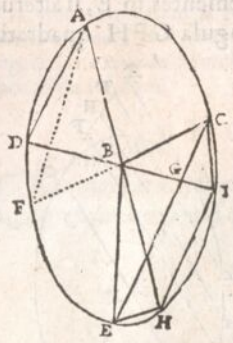
Dico EB, DB diametros esse coniugatas & contra.



a 51. huius.
b 50. huius.

Demonstratio.

PRimò cadant parallelæ ad eandem partem ellipseos. Ducantur rectæ lineæ EA, DC. Quoniam AD, EC lineæ sibi mutuo æquidistant, erunt [a] segmenta EA, DC inter se æqualia, adeoque [b] ABE, DBC sectores æquales. addito igitur communi ABD, erunt EBD, ABC sectores inter se æquales. quare cùm vnius sectoris latera BA, BC sint diametri coniugatæ, etiam alterius latera EB, BD sunt coniugatæ.



c 46. huius.
d Coroll. 45. huius.
e 51. huius.
f 60. huius.
g Coroll. 46. huius.

Secundò cadant AD, CE parallelæ ad partes ellipsis oppositas: producantur semidiametri AB, DB in H & I, iunganturque puncta HI. Quoniam AB, BC sunt coniugatæ erit [c] sector ABC quarta pars ellipseos, sed AH diametro [d] bisecat ellipsim, adeoque portio ACH, dimidium est ellipseos. Ergo ABC sector dimidius est semiellipseos ACH. ac proinde æqualis sectori CBH, quia autem IH per 19. huius est parallela ad DA. cui ex hypothesi etiam CE est parallela, erunt IH, CE inter se parallelę. ergo segmenta [e] CI, EH adeoque & sectores [f] CBI, HBE æquantur: addito igitur communi IBH, sector IBE æqualis est sectori CBH, hoc est, vt iam ante ostendi, sectori ABC. quare cùm sector ABC [g] sit quarta pars ellipseos, siue dimidium semiellipseos, etiam sector IBE erit dimidium semiellipseos, hoc est portionis IED, quam esse semiellipsim patet ex Coroll. 45. huius. Ergo sector IBE hoc est sector ABC æqualis est sectori EBD. Quare cùm AB, BC sint coniugatæ, etiam DB, EB erunt coniugatæ.

Sint iam AB, CB, item, EB, DB diametri coniugatæ iunganturque AD, EC. dico AD, EC lineas esse parallelas. Sin verò, ducatur ex A ipsi EC parallela AF iunganturque FB: erit igitur FB diameter coniugata ipsi EB per secundam partem huius: sed DB per constructionem coniugata est diametro EB, ergo eidem EB plures diametri sunt coniugatæ. quod fieri non potest. igitur AF non æquidistat ipsi EC. idem ostenditur de quauis alia. ergo AD sola parallela est rectæ EC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CI.

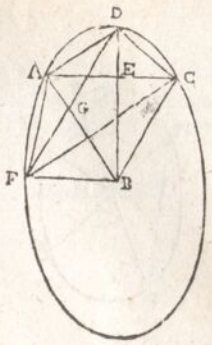
SIt in ADC ellipsi cuius centrum B quæuis diametrorum coniugatio AB, BC: iunctisque punctis AC, secet AC lineam in E diametet quæcunque BD, cui coniugata ducatur BF, ductâque linea FD secet AB diametrum vtcunque in G.

Dico AC, FD lineas, vti & BD, AB in E & G proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonſtratio.

QVoniam tam AB, BC diametri quàm DB, FB coniugatæ ſunt, ſectores ABC, [a] FBD æquales erunt: ablato igitur communi ABD, æquales manent DBC, ABF ſectores. vnde BD, [b] AB lineæ, item AC, FD in E & G proportionaliter ſunt diuiſæ.



a *Corol. 46. huius.*
b *61. huius.*

PROPOSITIO CII.

ILſdem poſitis:
Dico iunctas AD, FC æquidiſtare.

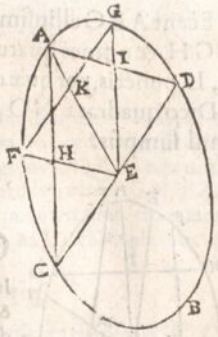
Demonſtratio.

PEr præcedentem ſectores DBC, ABF oſtenſi ſunt æquales; ſegmenta igitur DC, [c] AF quoque inter ſe æquantur: ergo AD, FC [d] lineæ æquidiſtant. Quod erat demonſtrandum.

c *60. huius.*
d *61. huius.*

PROPOSITIO CIII.

SEcet ABC ellipſim quæuis diametrorum coniugatio AE, CD: ſit autem & alia diametrorum coniugatio, FE, GE quę iunctas AD, AC ſecet in H & I:
Dico eſſe vt AH ad HC, ſic DI ad IA.



Demonſtratio.

DVcatur FG quę AE ſecet in K. vt AH ad HC, ſic FK ad KG: ſed vt FK ad KG, ſic DI [e] eſt ad AI, igitur vt AH ad HC ſic DI ad AI. Quod erat demonſtrandum.

e *101. huius.*

PROPOSITIO CIV.

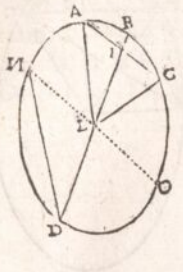
SEcet ABC ellipſim diameter quæcunque BD: ſit autem & EFG, ellipſis ſimilis & æqualis ellipſi ABC: quam ſecet quæuis alia diameter FH: dein BD, FH diametris proportionaliter diuiſis in I & K, agantur per I & K, ordinatim lineæ AC, EG: è quarum extremitatibus ducantur ſemidiametri AL, CL, EM, GM.





Dico ALC, EMG triangula eſſe æqualia.

Demonſtratio.



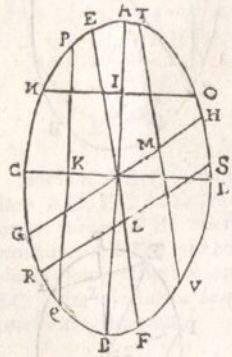
DIametro BD coniugata ducatur NO, & FH diametro PQ: iunganturque ND, PH. Quoniam diametri BD, FH tam in IK quàm LM proportionaliter ſunt diuiſæ, erit vt rectangulum BID ad rectangulum BLD ſic FKH, rectangulum ad rectangulum FMH: quare vt quadratum AI ad quadratum NL ſic quadratum EK ad quadratum PM: & vt AI linea ad lineam NL ſic EK ad PM: ſed etiam eſt per conſtructionem vt IL ad BL, id eſt LD, ſic KM ad FM id eſt MH; igitur vt triangulum NLD ad triangulum AIL, ſic PMH triangulum ad triangulum EKM (quia ex ijſdem illorum ratio componitur:) & permutando vt NLD triangulum ad triangulum PMH, ſic AIL triangulum ad triangulum EKM. ſed NLD, PMH triangula ſunt æqualia, igitur AIL, EKM triangula, adeoque tota ACL, EGM æquantur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

SEcent ABC ellipſim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH, & omnes quatuor diametri proportionaliter ſint diuiſæ in I, K, M, L punctis, per quæ ordinatim ducantur lineæ NO, PQ, RS, TV.

Dico quadrata NO, PQ ſimul ſumpta æquari quadratis RS, TV ſimul ſumptis.

Demonſtratio.



QVoniam tam AB, EF, quàm CD, HG proportionaliter ſunt diuiſæ, erit vt AB quadratum ad rectangulum AIB, ſic EF quadratum ad rectangulum ELF, & quadratum CD ad rectangulum CKD, & HG quadratum ad rectangulum HMG. Ex ijſdem enim rationibus ſingulæ quadratorum ad rectangula proportiones cõponuntur. Igitur vt AB, CD quadrata ſimul ſumpta ad rectangula AIB, CKD ſimul ſumpta, ſic quadrata EF, GH ſimul ſumpta, ſunt ad rectangula ELF, HMG ſimul ſumpta: & permutando vt AB, CD quadrata ad quadrata EF, GH, ſic AIB, CKD rectangula, ſunt ad rectangula ELF, HMG. hoc eſt a quadrata PK, NI ad quadrata SL, TM: ſed AB, CD quadratis ſimul ſumptis

a 74. *huius.*

b 77. *huius.* b æqualia ſunt quadrata EF, GH ſimul ſumpta; igitur & quadratis NI, PK æqualia ſunt quadrata SL, TM: ergo NO, PQ quadrata ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis SR, TV. Quod erat demonſtrandum.

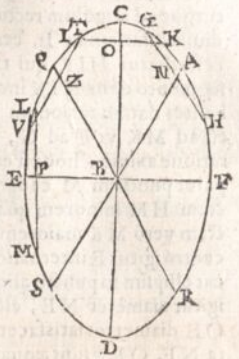
PRO-

PROPOSITIO CVI.

SEcet ABC ellipſim quęuis diametrorum coniugatio CD, EF, quibus proportionaliter diuiſis in O & P: ducatur vna ex diametris coniugatis æqualibus AS quę diuidatur in N, vt CD eſt diuiſa in O. per NOP rectæ ducantur ordinatim GH, IK, LM.

Dico IK, LM quadrata ſimul ſumpta eſſe dupla quadrati GH.

Demonſtratio.



DVcatur altera coniugatarum æqualium QR, quâ ſimiliter diuisâ in Z, vt SA eſt in N, & CD, EF, in O & P, per punctum Z ponatur ordinatim VT. quia igitur QR, AS ſunt æquales & ſimiliter ſectę, rectangulum QZR æquatur rectangulo ANS. ſed rectangula QZR, ANS [a] æquantur quadratis GN, TZ. ergo quadrata GN, TZ adeoque & quadrata GH, TV æqualia ſunt. ſed quadrata ML, IK [b] æquantur quadratis VT, GH. ergo quadrata ML, IK dupla ſunt quadrati GH. Quod erat demonſtrandum.

[a] 274. *huius.*
[b] 105. *huius.*

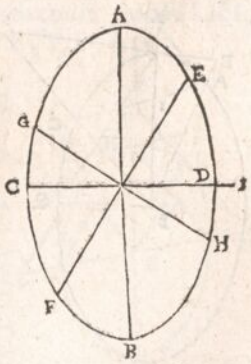
PROPOSITIO CVII.

SEcent ABC ellipſim duæ diametrorum coniugationes AB, CD, EF, GH: ſitque AB maxima & EF magnitudine ſecunda.

Dico rationem AB ad EF minorem eſſe ratione GH ad CD.

Demonſtratio.

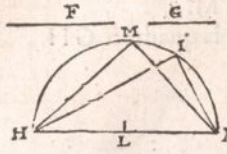
QVoniam AB, CD quadrata ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis EF, GH ſimul ſumptis: non eſt vt AB ad EF, ſic GH ad CD, nam tunc quadrata AB, CD maximę & minimæ maiora eſſent quadratis EF, GH. fiat igitur vt AB ad EF, ſic GH ad CI: eruntque AB, CI quadrata maiora quadratis EF, GH, hoc eſt quadratis AB, CD. quare CI linea eſt maior rectâ CD, & ratio GH ad CD, id eſt ex conſtr. ratio AB ad EF minor eſt ratione GH ad CD. Quod erat demonſtrandum.



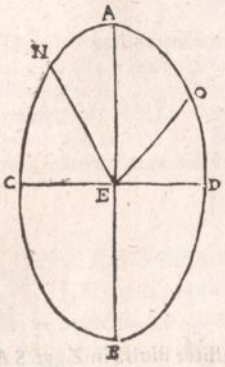
PROPOSITIO CVIII.

IN data ellipsi diametros exhibere coniugatas in data ratione.

Constructio & demonstratio.



SInt ABC ellipsis axes AB, CD: centrum E: ratio verò data maioris ad minus F ad G, quam non maiorem esse oportet ratione axium AE, EC. si ratio data æqualis est axium rationi; res patet: si minor, sumantur HI, IK lineæ, rectis AE, EC æquales, ponanturque ad angulum rectum HIK: ductaque HK, & diuisa bifariam in L, centro L interuallo LH circulus describatur HIK qui transibit per puncta I & K, in segmento dein HIK inclinentur [a] duæ lineæ HIK habentes datam rationem F ad G. Quoniam igitur HM est ad MK vt F ad G, estque ratio F ad G, minor ratione axium, hoc est ex constr. ratione HI ad IK, patet punctum M cadere inter I & H, adeoque rectam HM minorem quàm HI, hoc est quàm EA, rectam verò MK maiorem quàm IK hoc est quàm EC. centro igitur E interuallo HM, descriptus circulus secat ellipsim in puncto aliquo N inter A & C, ducatur igitur diameter NE, eiq; coniugata EO. dico NE, OE diametros satisfacere petitioni. Quoniam quadrata NE, OE [b] sunt æqualia quadratis AE, EC hoc est HI, IK hoc est quadratis HM, MK: sit autem & NE linea æqualis rectæ HM. erit & OE linea æqualis lineæ MK. igitur vt HM ad MK, id est vt F ad G, sic NE ad OE. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.



a 49. De Circulo.

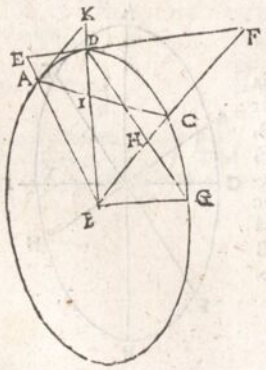
b 77. huius.

PROPOSITIO CIX.

SEcet ACD ellipsim quæuis diametrorum coniugatio AB, BC. assumptoque in peripheria puncto quouis D inter A & C, agatur per D contingens EF, quæ cum AB, BC lineis concurrat in E & F, cui per centrum parallela ducatur BG.

Dico DF, BG, DE lineas esse in continua analogia.

Demonstratio.



QVoniam ex hypothesi DF, BG sunt parallelæ, triangula DFH, BHG, vt ex elementis patet, erunt similia, ac proinde DF est ad BG, vt DH ad HG: hoc est vt triangulum DHB ad triangulũ BHG. Deinde, quoniam BG per centrum est tangenti DF parallela, liquet eam coniugatam esse diametrum ipsi DB: sunt verò ex hypothesi etiam AB, BF coniugatæ. Ergo [c] sectores BDCG, BADC, adeoque [d] & triangula BDG, BAC æquantur: Quorum bases DG, AC, cùm [e] proportionaliter sint diuisæ in H & I, vt DH sit ad HG, sicut CI est ad IA, constat ex elementis triangula BHD, BIC & BHG, BIA esse æqualia, ergo cùm priùs ostenderim DF esse ad BG vt

c Coroll. 46. huius.
d Corol. 60. huius.
e 101. huius.

vt triangulum BHD ad triangulum BHG, erit quoque DF ad BG, vt triangulum BIC ad triangulum BIA. Vltèrius cùm triangulum BHG sit ad triangulum BHD, vt GH ad HD, hoc est [a] vt AI ad IC, hoc est vt KI ad IB (cùm enim CB sit coniugata ipsi AB, & AK, ex constructione tangens, patet AK, CB esse parallelas) hoc est vt triangulum AIK ad triangulum AIB : erit componendo triangulum BDG ad triangulum BHD, vt triangulum AKB ad triangulum AIB; & permutando triangulum BDG ad triangulum AKB, vt triangulum BHD, hoc est sicut ante ostendi, vt triangulum BIC ad triangulum AIB. sed triangulum AKB est [b] triangulum EDB, ergo triangulum BDG est ad triangulum EDB, hoc est, quoniam ED, BG sunt parallelæ, BG est ad ED, vt triangulum BIC ad triangulum AIB, hoc est sicut ostendi supra, vt DF ad BG. sunt igitur in ratione continua DF, BG, ED. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ibid.*

[b] 71. *huius.*

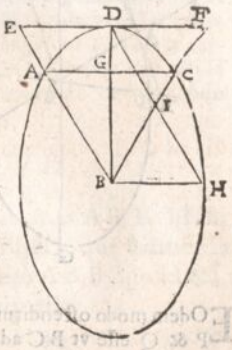
PROPOSITIO CX.

SInt AB, BC diametri quæcunque coniugatæ, assumptoq; in peripheria, inter A & G puncto quouis D, agatur per D contingens, occurrens AB, BC diametris in E & F, iunctaque AC occurrat diametro DB in G.

Dico rectam DF ad DE, rationem habere duplicatam, eius quàm habet CG ad GA.

Demonstratio.

DVcatur ex B linea BH parallela ipsi EF, & ex D recta DH occurrens FB lineæ in I. erunt igitur per præcedentem, continuæ FD, BH, ED. adeoque ratio FD ad ED, duplicata rationis FD ad BH, id est DI ad IH, quia DF, BH per constructionem æquidistant: rursum cùm HB recta æquidistet tangenti DF, erunt DB, BH diametri coniugatæ; sunt autem ex constructione etiam AB, BC coniugatæ; igitur [c] vt DI ad IH, sic CG ad GA: quare & ratio FD ad DE, duplicata est rationis CG ad GA. Quod erat demonstrandum.



[c] 101. *huius.*

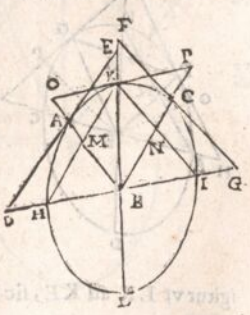
PROPOSITIO CXI.

SInt AB, BC diametri coniugatæ & per A & C tangentes ducantur DE, FG. sit autem & alia quæuis diametrorum coniugatio HI, KL, quæ producta occurrat tangentibus DE, FG in E, F, D, & G.

Dico lineas DE, FG in A & C proportionaliter esse diuisas, nimirum esse EA ad AD, vt GC ad CF.

Demonstratio.

DVcantur lineæ HK, KI quæ rectas AB, BC secent in M & N. Ratio EA ad AD [d] duplicata est rationis KM ad MH; & GC ad CF, duplicata est rationis IN ad NK. Atqui ratio KM ad MH æqualis est [e] rationi IN ad NK. ergo rationes EA ad AD, & GC ad CF æqualium rationum duplicatæ, sunt æquales, proportionaliter ergo sectæ sunt DE, GF in punctis C, A. Quod erat demonstrandum.



[d] 110. *huius.*

[e] 101. *huius.*

Corollarium.

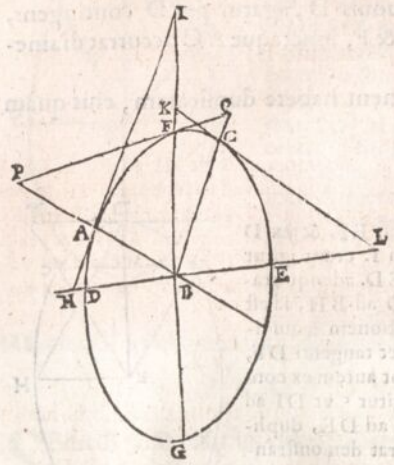
QVod si per K ducatur tertia tangens, conueniens cum B A, B C coniugatis in O & P, dico fore OK ad KP, vt EA ad AD. quod ducta rectâ A C eodem modo quo vsi sumus demonstrabitur.

Itaque tres tangentes DE, OP, FG similiter sunt diuisæ sic vt EA sit ad AD, sicut OK ad KP, & GC ad CF.

PROPOSITIO CXII.

SInt duæ diametrorum coniugationes AB, BC, FG, DE, aganturque per A & C tangentes HI, KL, quæ FG, DE diametris occurrant in H, I, K, L punctis.

Dico esse vt BC ad BA sic HI ad KL.



a 110. huius.

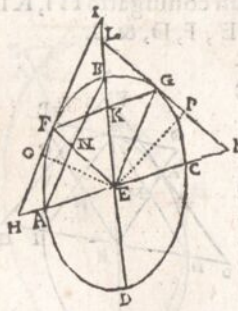
Demonstratio.

QVoniam recta B C æquidistat rectę HI, & KL linea ipsi AB, erunt tam HA, BC, AI quàm KC, AB, CL lineæ in continua analogia. cùm ergo sit vt HA ad AI, prima ad tertiam, sic[a] KC ad CL, prima ad tertiam: erit etiam HA ad BC, prima ad secundam vt KC est ad AB, primaad secundam: quare permutando est HA ad KC, vt BC ad AB, cùm igitur ante ostenderim HA esse ad AI, vt KC ad CL, adeoque inuertendo, componendo, ac permutando sit vt HA ad KC, sic HI, ad KL, erit vt BC ad BA, ita HI ad KL.

Corollarium.

EOdem modo ostenditur, si per F agatur tangens quæ cum AB, BC conueniat in P & Q esse vt BC ad BD, sic HI ad PQ.

PROPOSITIO CXIII.



SInt duæ diametrorum cõiugationes AC, BD; EF, EG: actisque per F & G tangentibus quæ diametris AC, BD occurrant in H, I, L, M. ducatur recta FG secans BE diametrum in K.

Dico LK, KE, KI lineas esse continuas.

Demonstratio.

QVoniam FE, vtpote coniugata ipsi EG, æquidistat tangenti LG, erit LK ad KE, vt GK ad KF. similiter quoniam EG, vtpote coniugata ipsi EF, parallela sit tangenti FI, est vt GK ad KF, sic KE ad KI: igitur vt LK ad KE, sic KE est ad KI. Quod erat demonstrandum.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [359] - 302
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CXIV.

Ilsdem positis:
Dico IHE, LME triangula esse æqualia.

Demonstratio.

DVcatur recta AB quæ FE lineam secet in N: & ex E rectæ ducantur EO, EP, normales ad lineas HI, LM. Quoniam LM linea æquidistat ipsi FE (est enim LM tangens, & FE coniugata ipsi EG,) erit angulo FEG æqualis angulus EGP. eodem modo erit angulus OFE æqualis angulo FEG. quare anguli OFE, EGP sunt inter se æquales: sunt autem EPG, EOF anguli recti; igitur triangula EGP, EFO similia. quare vt EG ad EF, sic EP ad EO. sed est [a] vt EG ad EF, sic HI ad LM. igitur vt EP ad OE, sic reciprocè HI ad LM. ergo IHE, LHM triangula sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 110. huius.

PROPOSITIO CXV.

Ilsdem positis triangulum EGM, triangulo EFI, & EGL triangulum, triangulo EFH æquale est.

Demonstratio.

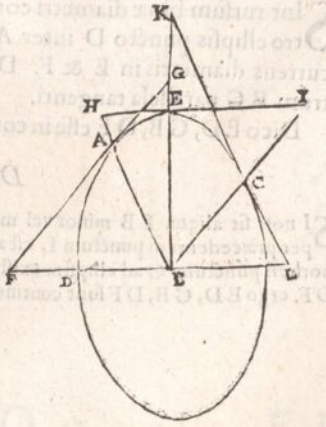
ESt enim [b] vt HF ad FI, sic LG ad GM, & componendo vt HI ad FI, sic LM ad GM: sed est vt HI ad FI, sic HIE triangulum ad triangulum FIE, & vt LM ad GM, sic ELM triangulum ad triangulum EGM; igitur vt HIE triangulum ad triangulum FIE, sic ELM triangulum est ad triangulum EGM, & permutando vt HIE triangulum ad triangulum ELM, sic FIE triangulum est ad triangulum EGM. quare FIE, EGM triangula sunt æqualia; eodem modo ostenduntur reliqua EGL, HFE æqualia.

[b] 111. huius.

PROPOSITIO CXVI.

SI ellipsim AD C duæ secent diametrorũ coniugationes AB, BC; EB, BD: agantúrque per A, E, C. contingentes FG, HI, KL quę diametris quidem EB, BD occurrãt in G, K, F, L. diametris verò AB, BC, in H & I.
Dico triangula FGB, HBI, KLB esse inter se æqualia.

Demonstratio.



NAm triangulum BIE [c] æquatur triangulo BKC, hoc est per 115. huius triangulo BFA: & triangulum BHE, [d] æquatur triangulo GAB. ergo triangulum totum BIH æquatur toti BFG. quare cùm etiam FGB, [e] KBL æqualia sint, liquet tria triangula esse æqualia.

[c] 70. huius.
[d] Ibid.
[e] 114. huius.

PROPOSITIO CXVII.

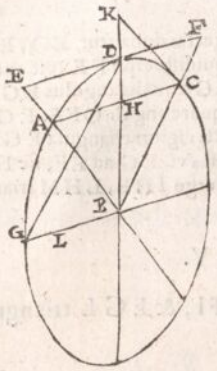
SInt ellipseos duę diametri coniugatæ AB, BC, & ex puncto aliquo inter A & C assumpto, scilicet D ducatur tangens DE coniugatis AB, BC

pro-

productis occurrens in E & F: deinde ex centro B ducatur B G, ipſi E F æquidiſtans, ſitque G B media inter E D, D F.

Dico punctum G eſſe in peripheria ellipſeos, cuius diametri coniugatæ A B, B C, & tangens E D.

Demonſtratio.



EX centro ad contactum ducatur B D, & quia G B ex hypotheſi eſt parallela tangenti E D, erit G B ordinatim poſita ad B D, & quidem ad centrum. vnde B D, G B ſunt diametri coniugatæ. iungantur deinde A H C & D G, ex C ducatur C K parallela ipſi A B, occurrens B D protractæ in K: quæ ſectionem in C contingit, eritque vt A H ad H C, ita B H ad H K: ſed vt A H ad H C, ita eſt A B H triangulum ad triangulum H B C, & vt B H ad H K, ita eſt triangulum H B C, ad triangulum H C K: ergo vt triangulum A B H ad ipſum H B C ita eſt triangulum H B C ad triangulum H C K: ergo componendo, ac permutando triangulum A B C, ad triangulum B C K eſt vt triangulum B H C ad triangulum H C K, id eſt vt iam oſtenſum, vt triangulum A B H ad triangulum H B C, id eſt vt linea A H ad lineam H C: ſed æqualia ſunt triangula [a] B C K, B D F, ergo etiam erit triangulum A B C ad triangulum B D F, vt A H ad H C. Vlterius quoniam D F, G B ſunt parallelæ, erit triangulum [b] G D B, ad D B F triangulum, vt G B, ad D F: ſed, quoniam ex hypotheſi E D, G B, D F ſunt continuæ, ratio G B ad D F, eſt dimidiata rationis E D ad D F. Ergo ratio trianguli G D B ad triangulum D B F, dimidiata eſt rationis E D ad D F. Atqui [c] ratio A H ad H C, hoc eſt vt oſtenſum ſupra, ratio trianguli A B C ad triangulum D B F, dimidiata quoque eſt rationis E D ad D F. ergo triangulum G D B eſt ad triangulũ D B F, vt triangulũ A B C ad idem triangulum D B F. æquantur igitur triangula G D B, A B C. ergo & parallelogrammum contentum ſemidiametris, vt ſupra oſtendi, coniugatis, G B, B D in angulo G B D æquatur parallelogrammo contento ſub ſemidiametris coniugatis A B, B C. Ergo [d] punctum G eſt ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

a 70. *huius.*

b *Patet ex elementis.*

c 109. *huius.*

d *Patet ex* 72. *huius.*

PROPOSITIO CXVIII.

SInt rurſum binæ diametri coniugatæ B A, B C. Et ſumpto in perimetro ellipſis puncto D inter A, ac C, tangat ellipſim E F in D, occurrens diametris in E & F. Deinde ex centro B ducatur ad perimetrum B G parallela tangenti.

Dico E D, G B, D F eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

SI non ſit aliqua L B minor vel maior quàm G B media inter E D, D F. Ergo per præcedentem punctum L eſt ad ellipſim. quod fieri non poteſt, cùm exhypotheſi punctum G ad ellipſim exiſtat. Nulla igitur præter G B media eſt inter E D, D F. ergo E D, G B, D F ſunt continuæ proportionales. Quod erat demonſtrandum.

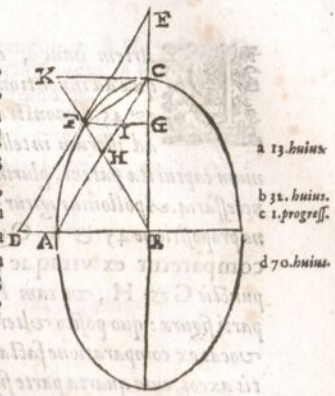
PRO-

PROPOSITIO CXIX.

SInt in ellipsi diametri coniugatę AB, BC iungaturq́; AC cui parallela fiat linea DE tangens ellipsin in F, & occurrens diametris coniugatis protractis in D & E.

Dico triangulum EDB trianguli CAB duplum esse.

Demonstratio.



a 13. huius.
b 32. huius.
c 1. progress.
d 70. huius.

EX centro B per tactum F ducatur diameter BHF, cui occurrat in K recta CK ellipsim tangens in C, deinde ex tactu F ponatur ordinatim FIG. Quoniam AC parallela est ex hypothesi tangenti DE, erit [a] ad diametrum BF ordinatim posita. ergo KB, FB, HB [b] sunt continuæ proportionales. ergo [c] est vt KB ad FB, sic KF ad FH sed KB est ad FB, & triangulum KCB ad triangulum FCB, hoc est, quia [d] triangula KCB, EFB æquantur, vt triangulum EFB ad idem triangulum CFB, hoc est vt EB ad CB. Igitur vt EB ad CB, sic KF ad FH. Deinde quia ex constr. KC tangit, & FG est posita ordinatim ad BC, rectæ EB, CB, GB sunt continuæ. Ergo vt EB ad CB, sic EC ad CG. sed etiam est vt iam ostendi, sicut EB ad CB ita KF ad FH. Ergo vt KF ad FH, sic EC ad CG. Ergo vt triangulum KCF ad triangulum FCH, sic triangulum EFC ad triangulum CFG. Atqui cum tota KCB, EFB, æqualia sint, ablato communi FBC reliqua KCF, EFC æqualia sunt. Ergo & FCH, CFG æqualia sunt; ablato igitur communi FIC, æqualia remanent FIH, CIG, quibus si commune addis BHIG, FGB æquabitur CHB. Iam verò quia AC ordinatim posita est, vt supra ostendi, ad BF, bisecta est AC in H, adeoque & triangulum CAB duplum est trianguli CHB, & DE parallela ad AC etiam bisecatur in F: est verò FG, vtpote ducta ordinatim ad CB, parallela ad CB, diametrum coniugata ipsi CB. ergo & BE bisecatur in G. proindeque EFB duplum est GFB. Atqui CHB, FGB ostensa sunt æqualia. Ergo & eorum dupla CAB, EFB æqualia sunt. sed triangulum DEB duplum est trianguli EFB, est enim DE bisecta in F. Ergo triangulum DEB duplum quoque est trianguli CAB. Quod erat demonstrandum.

ELLIPSEOS
PARS QVARTA

Sectionis polos, & lineam à puncto in axe dato ad peripheriam, breuissimam designat.

PArtem hanc, quæ de polis est, aggressuri, paucis præmittemus ea quæ ad inuentionem polorum ab Apollonio libro tertio propositione 42. & 45. demonstrata sunt; & quidem hoc necessarium esse duxi; tum quod ad illorum intelligentiam quæ Apollonius in rem hanc contulit, nec omnium captui ita patent, plurimum conducant; tum quod ad rem nostram planè iudicem necessaria. Apollonius igitur vt in axe ellipseos polos exhibeat, hac vtitur constructione propositione 45. & 6. Quartę, *inquit*, parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex vtraque parte: *id est, sectionis axis* A C *ita secetur in duobus punctis* G *&* H, *vt tam* A G C *quàm* C H A *rectangulum æquale sit quartæ parti figuræ: quo posito vlterius ostendit* G *&* H *polos esse sectionis: quos puncta vocat ex comparatione facta; videlicet ex comparatione rectangulorum sub segmentis axeos, cum quarta parte figuræ. Figuram porrò hic vocat Apollonius rectangulum quod fit sub latere recto axeos maioris & ipso axe: atque illud cùm quarta sui parte ad vsus seruiret eximios; videlicet inuentionem polorum &c. singulari præ reliquis rectangulis appellatione figuram appellauit antiquitas: huius autem quartæ parti æquale est quadratum semiaxeos minoris: quod Pergæus lib. tertio, propos. 42. præclarè demonstrauit, & nos verbo vno sic ostendimus.*

Lemma.

PEr vndecimam huius, figuræ siue rectangulo sub axe maiore & latere illius recto æquale est quadratum axeos minoris; sed quadrati minoris axis quarta pars est quadratum dimidij axis minoris; igitur quadratum dimidij axeos minoris æquale est quartæ parti figuræ. vnde cùm voce illa in hac parte vtar, quarta pars figuræ, intelligi volo quadratum semiaxeos minoris.

Occurrent in hac parte propositiones aliquot eadem cum illis quas Apollonius de focis, demonstrauit: quod eo consilio feci, ne quid in hac materia studiosus lector desideraret.

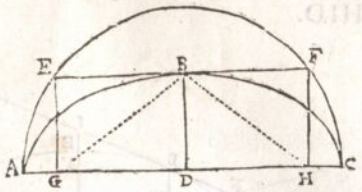
PROPOSITIO CXX.

SInt A B C ellipsis axes A C, B D, actaque per B tangente E F: centro B D interuallo D A circulus describatur A E F C, qui tangenti occurrat in E & F. dein ex E & F, normales demittantur E G, F H ad axem A C.

Dico tam A G C quàm A H C rectangulum æquale esse quartæ parti figuræ.

Demon-

Demonſtratio.



QVoniam tam EB linea æquidiſtat rectæ AD quàm EG[a] ipſi BD, erunt EG, BD lineæ æquales: eſt autem AGC rectangulum æquale quadrato EG, quod recta EG ducta ſit ad diametrum circuli normalis; igitur & quadrato BD æquale eſt rectangulum AGC. eodem modo eſt FH quadrato, hoc eſt quadrato BD æquale rectangulum AHC. ſed BD quadratum eſt æquale quartæ parti figuræ, igitur tam AGC quàm AHC rectangulum eſt æquale quartę parti figuræ. Quod erat demonſtrandum. [a] 13. huius.

Corollarium.

HInc patet AG, HC lineas eſſe æquales & GH bifariam eſſe diuiſam in D.

PROPOSITIO CXXI.

IIſdem poſitis ducantur rectæ BG, BH.
Dico BG, BH lineas ſimul ſumptas axi AC eſſe æquales.

Demonſtratio.

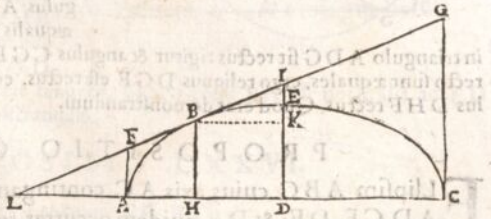
QVoniam æquales ſunt [b] AG, HC, quadratum AG æquatur rectangulo ex AG & HC. Iterum quia æquales ſunt GD, DH, æquabitur rectangulum AGD bis ſumptum rectangulo AGH. Quare cùm [c] quadratum AD æquale ſit quadratis DG, AG & rectangulo AGD bis, idem quadratum AD æquabitur quadrato DG & rectangulo ex AG, HC vnà cum rectangulo AGH. Atqui rectangula AG, HC, & AGH, [d] æquantur rectangulo AGC. Ergo quadratum AD æquale eſt quadrato DG vnà cum rectangulo AGC; hoc eſt quadratis DG, GE, hoc eſt quadratis DG, DB. ſed ijſdem æquatur quadratum GB, ęquantur igitur quadrata AD, GB, ac proinde rectæ AD, GB æquales ſunt. Eodem modo demonſtrabitur rectas CD, HB æquales eſſe. Ambę igitur GB, BH ſimul ſumptæ axi ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum. [b] Coroll. 120. huius. [c] 4. ſecundi. [d] 1. ſecundi.

Corollarium.

HInc ſequitur: ſi ABC ellipſis axes fuerint AC, BD, & ex B vertice minoris axis rectæ dimittantur BG, BH, æquales lineis AD, DC, ſecantes axem AC in G & H. Quod tam AGC quàm AHC rectangulum, æquale ſit quartæ parti figuræ. adeoque G & H ſectionis poli ſunt.

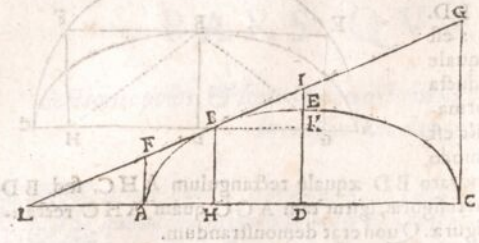
PROPOSITIO CXXII.

ELlipſim ABC, cuius diametri coniugatæ AC, DE contingant in A & C, & alio puncto quouis B tres lineæ AF, CG, FG: & FG quidem occurrat AF, CG rectis in F & G. productaque ED occurrat FG lineæ in I, & ex B, recta demittatur BH ordinatim ad AC diametrum:



Dico rectangulum ſuper AF, CG lineis æquari rectangulo ſuper BHID.

Demonſtratio.



a 32. *huius.*

PRoducatur FG linea donec cum axe conueniat in L. Quoniam DH, DA, DL lineæ[a] ſunt in continua ratione, erit vt LD ad AD, hoc eſt ad DC ſic LA ad AH, & inuertendo componendo vt CL ad DL, ſic HL ad AL, ſed eſt vt CL ad DL, ſic CG ad DI, & vt HL ad AL, ſic HB ad AF, igitur vt CG ad DI, ſic HB ad FA: adeoque rectangulum ſuper AF, CG lineis æquale rectangulo BH, ID. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

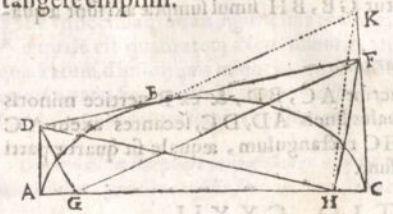
HInc ſequitur rectangulum AF, CG vel HB, ID, æquale eſſe quartę parti figuræ: ducatur enim BK parallela axi AC: erit rectangulum DK, DI æquale quadrato ED: igitur & AF, CG rectangulum eſt æquale quadrato ED hoc eſt quartę parti figuræ.

PROPOSITIO CXXIII.

ELlipſim ABC cuius axis AC, contingant in A & C, & alio quouis puncto B, lineæ AD, CF, DF: & DF quidem conueniat cum AD, CF lineis in D & F. diuidatur autem linea AC in G & H, vt AG C, AHC rectangula ſint æqualia quartæ parti figurę. ducanturq; lineę DG, GF, DH, HF.

Dico angulos DGF, DHF eſſe rectos, & ſi ſint recti: dico DF, lineam tangere ellipſim.

Demonſtratio.



b *Coroll.* 121. *huius.*

c 6. *ſexti.*

REctangulum DACF[b] eſt æquale quartę parti figurę, hoc eſt rectangulo AGC. Ergo vt AG ad AD, ſic FC ad CG, ſunt autem anguli DAG, FCG recti: igitur DAG, FCG triangula[c] ſimilia: & angulus ADG æqualis angulo CGF, eſt autem angulus ADG, vnà cum angulo AGD æqualis vni recto, cùm DAG angulus in triangulo ADG ſit rectus: igitur & angulus CGF, vnà cum angulo AGD vni recto ſunt æquales. ergo reliquus DGF eſt rectus. eodem modo oſtenditur angulus DHF rectus. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIV.

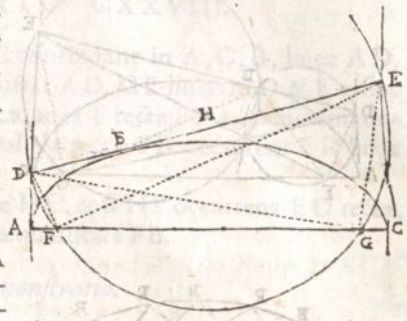
ELlipſim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, punctis lineæ AD, CE, DE: & DE quidem occurrat rectis AD: CE in D & E: fiant autem quartæ parti figurę, æqualia rectangula AFC, AGC, ſecturque ED bifariam in H:

Dico

Dico circulum centro H interuallo D & E, descriptum transire per F & G.

Demonstratio.

IVngantur puncta DF, FE, DG, GE. Quoniam tam angulus DFE, quàm DGE est rectus, & DE linea vtrumque subtendens diuisa bifariam in H, patet circulum centro H interuallo HD descriptum transire per F & G. Quod erat demonstrandum.



Corollarium.

HInc sequitur angulos EDG, FDA esse inter se æquales, est enim angulus ADF in demonstratione præcedentis æqualis ostensus angulo GFE: sed angulo GFE æquatur angulus EDG cum eidem arcui EG insistat, ergo anguli EDG, FDA sunt inter se æquales.

PROPOSITIO CXXV.

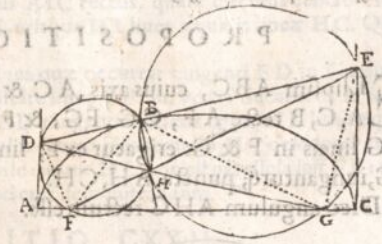
ELlipsim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE: & DE quidem conueniat cum AD, CE lineis in D & E. fiant autem AFC, AGC rectangula æqualia quartæ parti figuræ: ductisque lineis FE, GD quæ se intersecent in H, ex puncto H ad contactum B, ducatur recta HB.

Dico HB normalem esse ad tangentem DE.

Demonstratio.

DVcãtur rectę FD, CE. Anguli DFE, ECD recti erunt. Iam super HD, HE lineis vt diametris circuli describantur DBH, EBH. Quoniam DH, HE lineæ non sunt in directum, patet DBH, EBH circulos se inuicẽ secare in puncto aliquo B. iunctis igitur punctis HB. ducantur rectæ DB, EB: erunt anguli DBH, EBH recti, adeoque DB, EB lineæ in directum, & HB linea normalis rectæ DE. sunt autem vt ante ostendi DFE, EGD anguli recti: igitur DE [b] linea est tangens. Quare recta BH est normalis ad ED tangentem. Quod erat demonstrandum.

a 123. *huius.*



b *Patet ex* 123. *huius, quæ facile* cõuertetur.

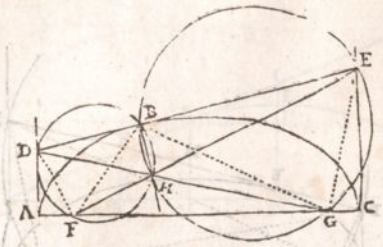
PROPOSITIO CXXVI.

EAdem manente figura: ducantur FB, BG.

Dico angulos DBF, EBG ad contingentem esse æquales.

Demonſtratio.

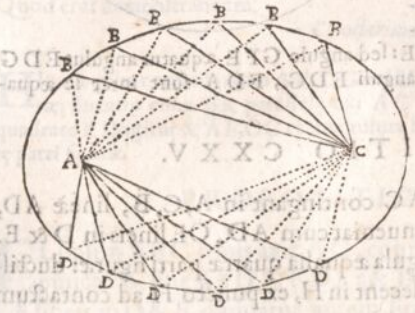
a 123. huius.
b Ibid.



QVoniam anguli DFH, EGH a recti ſunt, tranſibunt per F & G, circuli DFH, EGH: tranſit autem vterque etiam per B: quia b anguli EBH, DBH ſunt recti: igitur tam anguli DBF, DHF quàm EBG, EHG anguli ſunt inter ſe æquales: ſed angulus DHF æqualis eſt angulo EHG: ergo & DBF æquatur angulo EBG. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

CVm punctum B *in peripheria aſſumptum, ſit quodcunque ſequitur lineas omnes ex* F *in peripheriam ellipſis ductas, reflectendas in* G. *Quare & puncta* FG *poli ſeu foci à nonnullis vocantur: quæ ab Apollonio puncta ex comparatione facta dicuntur. porrò hæc in ellipticis mirabiles habent proprietates: inter reliquas placuit ſequentem hic adiungere.*



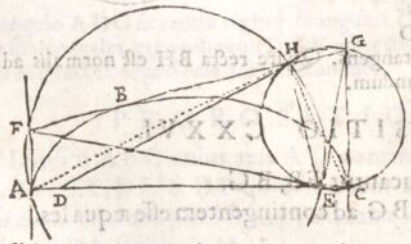
Sint A, C, *foci ellipſeos, quorum diſtantia par ſit interuallo oculorum, ponaturq; in* A *oculus ſiniſter, & dexter in* C. *Dico illum per totum ſpeculum apparere oculo dextro, in* C *poſito: & viciſſim oculum dextrum in* C. *per totum ſpeculum videri ab oculo ſiniſtro in* A. *demonſtratio patet: ſpecies enim obiecti* A, *per totum ſpeculum diffuſa, reflectuntur in* C, *& ſpecies obiecti* C *per totum diffuſa reflectuntur in* A. *quare obiectum* A *per totum apparebit ſpeculum, oculo* C, *vti & obiectum* C, *oculo* A. *hinc ſequitur quod minimum & viſibile poſitum in* C, *maximum apparebit oculo in* A *poſito: quia apparebit per totam ſpeculi ſuperficiem diffuſum.*

PROPOSITIO CXXVII.

ELlipſim ABC, cuius axis AC & poli DE contingant in punctis A, C, B rectę AF, CG, FG; & FG quidem conueniat cum AF, CG lineis in F & G. erigatur ex E, linea EH normalis ad tangentem FG, iunganturq; puncta AH, CH.

Dico angulum AHC rectum eſſe.

Demonſtratio.



DVctis lineis FE, EG deſcribantur ſuper FE, EG diametris circuli FHE, HGC: ac circulus quidem FHE, cùm anguli EHF, EAF ſint recti, tranſibit per H, F, A, puncta; circulus verò HGC; cùm DHE, ECG anguli quoque recti ſint tranſibit per H, C. erunt igitur tam anguli AHF, AEF quàm EHC, EGC, anguli

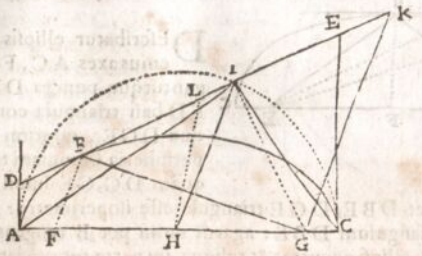
guli æquales: sed angulus CGE per demonstrata in 121. huius æqualis est angulo FEA, igitur & angulo CHE æquatur angulus AHF; addito ergo communi angulo AHD, erit angulo FHE recto æqualis angulus AHC, quare & ipse rectus est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVIII.

ELlipsim ABC cuius axis AC contingant in A, C, B, lineæ AD, CE, DE, ac DE quidem occurrat AD, CE lineis in D & E: sint autem poli F, G, centrum H ductaque ex F recta FB ad punctum contactus ducatur ex H linea HI parallela rectæ FB occurrens ED lineæ in I.

Dico HI lineam æqualem lineæ HC, & si HI occurrens ED rectæ, sit æqualis HC. dico HI lineam æquidistare FB.

Demonstratio.



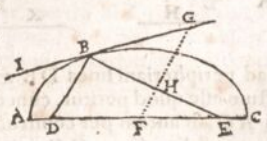
FIat BI æqualis IK: iunganturque BG, GK, & rectæ ducantur AI, IC: Quoniam IB, IK sunt æquales, erit BI ad IK, vt FH ad HG: adeoque BF, KG lineæ parallelæ, & angulus BKG æqualis angulo DBF, hoc est [a] IBG: quare BG, GK lineæ æquales: sunt autem & duo reliqua latera BI, IG æqualia duobus lateribus KI, IG. Angulus ergo BIG, æqualis angulo KIG: adeoque GI linea normalis tangenti DE, & angulus AIC rectus. quare circulus centro H interuallo HC descriptus transibit per I, eritque HI linea æqualis lineæ HC. Quod erat primum. [a] 115. huius.

Reliquis manentibus, sit iam HI linea quæ occurrat tangenti ED in I, æqualis lineæ HC. Dico HI rectam æquidistare lineæ BF: sin verò; ducatur ex H linea HL, parallela rectæ FB occurrens ED tangenti in L; erit igitur HL linea æqualis lineæ HC, hoc est HI. quare circulus centro H interuallo HC descriptus transilit per I & L puncta. Quod impossibile: igitur HL non est parallela ipsi FB: nec quæuis alia: præter HI lineam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXIX.

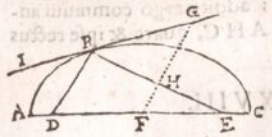
SIt ABC ellipseos axis AC, poli autem D, E ex D & E rectæ inflectantur DB, EB conuenientes in puncto quodam peripheriæ B.

Dico DB, EB lineas simul sumptas æquari axi AC.



Demon-

Demonſtratio.



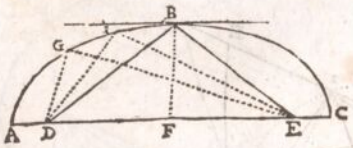
SIt F centrum ellipſeos; actâque per B tangente B G: ducatur recta F G parallela lineæ D B ſecans E B lineam in H. Quoniam B D, F G lineę ſunt parallelæ, erit angulus F G B æqualis angulo D B I hoc eſt [a] E B G, adeoque H B, H G lineæ æquales: rurſum cùm ſit vt D E ad F E, ſic B E ad H E, ſitque D E dupla F E, erit & E B, dupla rectæ B H id eſt H G: ſed etiam B D dupla eſt F H, cùm ſit vt D E ad F H, ſic D B ad F H. igitur E B, B D lineæ ſimul ſumptæ duplæ ſunt rectæ F G hoc eſt F C: quare & æquales axi A C. Quod erat demonſtrandum.

[a] III. huius.

PROPOSITIO CXXX.

TRiangulorum iſoperimetrorum maximum eſt iſoſcelium.

Demonſtratio.



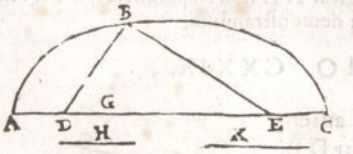
DEſcribatur ellipſis quæcunque A B C cuius axes A C, F B poli D, E, iunganturque puncta D B, B E: tum ſuper E D baſi triangula conſtituantur quęcunque D G E, quorum vertices G ſint in peripheria. Quoniam tam D B, B E lineæ quàm D G, G E ſimul ſumptæ ſunt æquales axi A C: patet D B E, D G E triangula eſſe iſoperimetra: dico autem illorum eſſe maximum triangulum D B E: agatur enim per B tangens: quæ cùm in vno tantùm puncto B ellipſi occurrat & reliqua ſui parte tota cadat extra, patet D G E triangula quæ terminantur in ellipſi minorem habere altitudinem triangulo D B E, adeoque illo eſſe minora: eſt autem D B E triangulum iſoſceles, quia D F, F B latera æqualia ſunt lateribus E F, F B & anguli illis contenti recti; igitur triangulorum iſoperimetrorum maximum eſt iſoſceles. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

OPorteat è focis ellipſeos D E duas inclinare ad idem punctum perimetri quæ datam contineant rationem H ad K.

Debet autem data ratio maior eſſe ratione A D ad D C, minor verò ratione A E ad E C.

Conſtructio & demonſtratio.



SEcetur axis A C in G, ſecundùm datam rationem H ad K, quę cùm ponatur maior ratione A D ad D C, & minor ratione A E ad E C, manifeſtum eſt A G lineam maiorem eſſe recta A D: minorem verò A E, ac proinde punctum G cadere inter polos D, E. erigatur igitur ex D ad peripheriam linea D B æqualis rectæ A G. Iunganturque puncta B E. dico factum eſſe quod petitur. cùm enim rectæ duæ D B, B E ſimul ſumptæ ſint æquales axi A C, ſit autem per conſtructionem D B linea æqualis lineæ A G, erit B E reliqua æqualis reliquę G C: igitur D B eſt ad B E, vt A G ad G C, id eſt vt H ad K. Inclinauimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

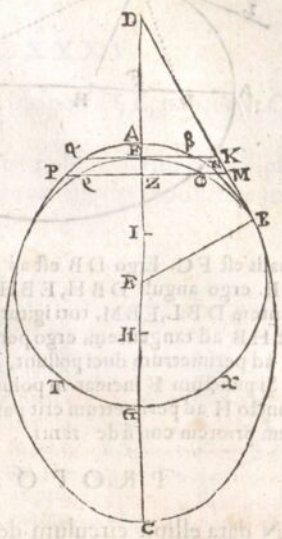
PRO.

PROPOSITIO CXXXII.

ELlipsim ABC contingat in B linea BD conueniens cum axe maiore CA, in D. ex B autem contactu, normalis ad contingentem ponatur BE, occurrens axi in E.

Dico EB lineam breuissimam esse illarum quæ ex E puncto ad peripheriam ellipseos duci possunt.

Demonstratio.



CEntro E interuallo EB circulus describatur FBG occurrens axi in F & G. centrum ellipseos sit H. Quoniam DB ellipsim contingens cũ axe maiori conuenit in D, & angulus DBE rectus est, BE linea non transit per H centrum ellipseos: si enim E centrum est, recta EB, normaliter ad contingentem posita axis erit coniugatus axi AC, (cùm æquidistantes omnes contingenti DB [a] bifariam & ad rectos diuideret.) adeoque DB æquidistaret axi AC: non igitur E centrum est ellipseos, nec EB diameter: quia verò DB cum axe conuenit ad partes A, EB linea [b] minor est semidiametro, sibi parallela: adeoque & minor est semiaxe HC, & multò minor rectâ EC, quare circulus radio EB descriptus, occurrit axi in G intra ellipsim, punctum igitur G, supra C est.

a 13. huius.

b 10. huius.

Rursum cùm HC id est AH, maior sit ostensa quàm EB id est EG, ablato communi EH, manet AE maior quàm HG, posita autem EI æquali EH, recta FI æquatur HG, igitur AE quoque maior est FI: ablato ergo ex FE & AE, communi IE, manet IA maior quàm IF: vnde & F punctum cadit intra ellipsim infra A. vlterius ponatur per F, contingens FK, cui æquidistet PQNM, erit igitur vt MB quadratum ad quadratum BK sic [c] QMO rectangulum ad quadratum FK; sed vt MB quadratum ad quadratum BK [d] sic PMN rectangulum ad rectangulum $\alpha K \beta$; igitur vt QMO rectangulum ad quadratum FK sic PMN rectangulum est ad rectangulum $\alpha K \beta$: & permutando, inuertendo vt FK quadratum ad rectangulum $\alpha K \beta$, sic QMO, rectangulum est ad rectangulum PMN: est autem FK quadratum maius rectangulo [e] $\alpha K \beta$, igitur & QMO rectangulum maius est rectangulo PMN: iterum QMO rectangulum vnà cum quadrato ZO æquale est quadrato ZM, & PMN rectangulum vnà cum quadrato ZN, eidem quadrato ZM æquale est; æquale igitur est rectangulum QMO & vnà cum quadrato ZO, rectangulo PMN, vnà cum quadrato ZN; à quibus si inæqualia auferantur rectangula QMO, PMN, inæqualia remanent quadrata ZO, ZN: & quia QMO rectangulum maius est rectangulo PMN, quadratum ZO minus est quadrato ZN: & ZQ minus quadrato PZ; puncta igitur O & Q intra ellipsim sunt: similiter ostendentur puncta XT, & quæuis alia perimetri circuli FBG esse intra ellipsim; circulus igitur FBG totus intra ellipsim cadit: vnde cùm rectę omnes ex E centro circuli ad ellipsis peripheriam ductę priùs circulo occurrant quàm ellipsi: adeoque semidiametris eiusdem maiores sint: igitur EB, quæ in B puncto communi ellipsi & circulo terminatur omnium illarum breuissima est quæ ex E puncto ad ellipsis peripheriam duci possunt. Quod erat demonstrandum.

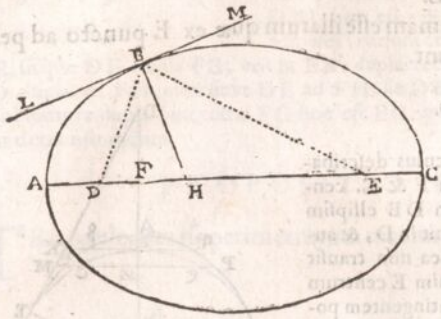
c 35. tertij. d 99. huius.

e 6. secundi.

PROPOSITIO CXXXIII.

A Puncto (H) in axe ellipseos assignato lineam ad perimetrum breuissimam ducere.

Constructio & demonstratio.



SInt D, & E foci ellipseos. Axem A C seca in F, ita vt A F sit ad F C, sicut D H est ad H E. Tum ex polo ad perimetrum aptetur D B æqualis ipsi A F, iungantúrq; H B. Dico H B esse breuissimam.

Ducatur enim ex polo E ad B recta E B, & L M tangens ellipsim in B, D B, B E [a] æquantur axi. sed D B æqualis est A F. ergo B E æ-

[a] 3. sexti.

qualis est F C. Ergo D B est ad B E, vt A F ad F C, hoc est ex constr. vt D H ad H E. ergo anguli D B H, E B H æquantur, æquantur [b] autem & anguli ad contingentem D B L, E B M, toti igitur anguli H B L, H B M æquales sunt; normalis igitur est H B ad tangentem, ergo per præcedentem breuissima omnium quæ ex puncto H ad perimetrum duci possunt. Factum igitur est quod petebatur.

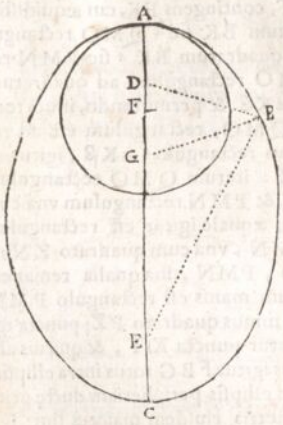
[b] 16. huius.

Si punctum F incidat in polum D, aut inter A, & D; tunc breuissima ex dato puncto H ad perimetrum erit pars axis, vt patet constructionem ac demonstrationem priorem consideranti.

PROPOSITIO CXXXIV.

IN data ellipsi circulum describere maximum eorum qui ellipsim in termino axis contingunt & ab ellipsi comprehenduntur.

Constructio & demonstratio.



POli ellipseos sint D &, E. Fiat vt C D ad D A, sic E F ad F D. Dico circulum centro F interuallo A descriptum eum esse qui petitur. Cùm enim ex const. sit C D, ad D A, vt E F ad F D, patet ex præced. F A esse breuissimam omnium, quæ à puncto F ad perimetrum duci possunt; circulus igitur centro F per A descriptus tangit ellipsim, quod erat primum: quod autem tangentium intra ellipsim maximus sit, sic ostendo. Sume vlterius punctum aliquod G pro centro maioris circuli, quoniam igitur E G est ad G D, in minori ratione quàm E F ad F D, hoc est quàm C D ad D A, fit exemp. grat. vt E G ad G D, sic C F ad F A: eritque F A necessariò maior quàm D A: adeoque punctum F cadet vltra polum D versus E: si igitur ex polo D ad perimetrum aptetur D B æqualis G A, iungaturque G B, patet ex præced. G B fore minimam omnium quæ ex G ad perimetrum ducuntur. Quare G A maior est quàm G B, circulus ergo centro G per A descriptus extra ellipsim cadit. similiter ostendemus quemlibet circulum alium maiorem circulo qui interuallo F A ante descriptus est, cadere

extra

extra ellipſim: ergo ille omnium intra ellipſim tangentium, maximus eſt. In datâ igitur ellipſi, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium.

EX huius propoſitionis diſcurſu clarè conſtat circulos omni interuallo deſcriptos quod minus eſt interuallo F A ellipſim intra contingere in puncto A. ſi centro inter F & A conſtituto pertingant vſque ad A. verticem axeos. Illi etenim circuli contingent eum qui radio F A deſcriptus eſt, eoque minores erunt; quare etiam ellipſim intra contingent cuius axis A C.

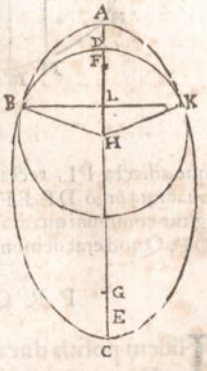
PROPOSITIO CXXXV.

SIt A B C ellipſeos axis maior A C & in illo poli D, E, fiatque vt C D ad D A ſic E F ad F D, & D G ad G E.

Dico ex quouis puncto rectæ F G circulos poſſe deſcribi qui ellipſim intus in duobus punctis contingant: centra verò illorum conſiſtere inter F & G excluſis terminis.

Demonſtratio.

SVmatur enim quoduis in F G recta punctum H, & ex H linea ducatur H B, breuiſsima illarũ [a] quæ ex H ad peripheriam duci poterunt; dein ex B ordinatim ad axem ponatur B L K, & iunge H K, H B, patet per elementa H K iunctam æquari H B, adeoque circulum centro H interuallo H B deſcriptum tranſire per K & B: & cùm H K, H B lineæ ſint breuiſsimæ per conſtructionem, patet circulum B D K, totum cadere intra ellipſim ac proinde eam in B & K, punctis contingere. Quod autem centra circulorum ellipſim in duobus punctis contingentium conſiſtant inter F & G excluſis terminis, ex eo patet quod F A, G C lineæ breuiſsimæ ſint illarum quæ ex F & G, ad peripheriam duci poterunt, adeoque circuli centro F vel G, & interuallo quouis maiore quàm ſit F A vel G C deſcripti ellipſim ſecent: radijs verò F A vel G C deſcripti [b] maximi ſint, illorum qui ellipſim intus in vno tantum puncto contingunt.



a 133. *huius.*

b 134. *huius.*

PROPOSITIO CXXXVI.

EAdem manente figura: propoſitum ſit in axe punctum deſignare quo centro circulus deſcribatur, qui ellipſim in dato puncto intus contingat.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt datum in peripheria punctum B, per quod ſi acta intelligatur contingens, demittatur ex B linea B H, normalis ad tangentem, occurrens axi in H. Manifeſtum eſt H punctum ſatisfacere petitioni. nam cùm [c] H B linea breuiſsima ſit earum quæ ex H ad peripheriam duci poſſunt, continget circulus centro H interuallo H B deſcriptus ellipſim in [d] puncto B; igitur, &c. Quod erat faciendum.

c 132. *huius.*

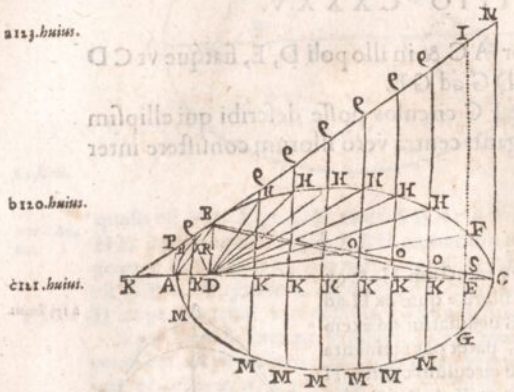
d 135. *huius.*

PROPOSITIO CXXXVII.

ELlipſeos axis ſit A, C, poli D, E, ex quibus ductæ ſint D B, E F G normales axi; ellipſim autem tangat K B I in B, occurrens axi in K, rectæ verò G F in I, iungaturque D F.

Dico rectangulum F I G quadrato D E æquale eſſe.

Demonſtratio.



a 123. huius.

b 120. huius.

c 121. huius.

QVoniam D B, E B ductæ ſunt è polis ad contactum, anguli K B D, I B E [a] æquales ſunt. ſed, quia D B, E I parallelæ, angulus K B D angulo E I B æqualis eſt, æquantur igitur anguli I B E, E I B, ergo B E, I E æquales ſunt. Deinde quia rectangula C E A, C D A [b] æqualia ſunt, etiã quadrata E F, D B ſunt æqualia, adeoque & rectæ E F, D B æquales. Quare cùm D B, B E [c] æquentur E F, F E, etiam B E, D F æquales erunt. Atqui B E oſtenſa eſt æqualis E I. ergo & D F eſt æqualis E I, & quadrata proinde D F, E I æqualia ſunt. ſed quadrata D E, E F, æquantur quadrato D F; &, quia G F biſecta eſt in E eique adiecta F I, rectangulum G I F cum quadrato E F æquatur quadrato E I. quadrata ergo D E, E F æquantur rectangulo G I F cum quadrato E F. Dempto igitur communi quadrato E F, remanent æqualia rectangulum G I F & quadratum D E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

IIſdem poſitis ducantur quotcunque aliæ Q, H, K, M, normales axi.

Dico rectangula H, Q, M, quadratis D K eſſe æqualia.

Demonſtratio.

ELlipſim tangat C N in C, occurrens tangenti B N in N, ducaturque B C ſecans Q M in O, & I G in S. quoniam N C, I G, Q M ſunt normales axi, æquidiſtant. ergo per ea quæ propoſ. 99. huius demonſtrauimus, rectangulum F I G, æquatur quadrato S I, & rectangulum H Q M quadrato Q O æquale eſt: quare vt quadratum I S ad quadratum Q O, hoc eſt vt quadratum S B ad quadratum O B, hoc eſt vt quadratum E D ad quadratum K D, ita rectangulum F I G ad rectangulum H Q M, & permutando vt rectangulum F I G ad quadratum E D, ita rectangulum H Q M ad quadratum K D, ſed rectangulum F I G per præced. æquatur quadrato E D. Ergo rectangulum quoque H Q M æquatur quadrato K D.

Similiter demonſtrabimus ad alteram partem poli D, rectangula H Q M quadratis K D eſſe æqualia, tangat enim ellipſim A P, in A occurrens tangenti in P, & tactus iungat A B ſecans Q M in R. in triangulo B C N, Ducatur aliqua Q O, parallela N C normali ad axem, ita ſe habens ad Q B, vt Q R eſt ad Q B. erit igitur permu-

permutando vt QB ad BQ hoc est vt KD ad DK, ita QO ad QR. ergo vt quadratum KD ad quadratum DK, ita quadratum QO ad quadratum QR, hoc est[a] rectangulum HQM ad rectangulum HQM. permutando igitur vt rectangulum HQM ad quadratum KD, ita rectangulum HQM ad quadratum DK. Atqui suprà demonstratum est rectangulũ HQM (illud nempè quod est versus C) æquari quadrato KD, ergo rectangulum quoque HKM quod est versus A, æquatur quadrato DK. Omnia igitur rectangula HKM, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *Inde prop. 99 huius.*

Corollarium.

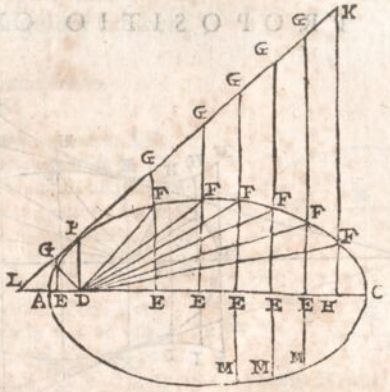
EX discursu demonstrationis iam allatæ licet colligere quadrata tangentium CN, AP, quadratis CD, DA esse æqualia.

PROPOSITIO CXXXIX.

DAta sit ellipsis cuius axis AC, poli D, H, ex polo D ducta sit ad perimetrum DP normalis axi, & in P ellipsim tangat linea GPG. Ducantur autem quotcunque normales axi GFE, iunganturq; DF, DF.

Dico lineas omnes DF, lineis omnibus GE æquales esse.

Demonstratio.



PRoducatur vna rectarum GE in M. per præced. rectangulum FGM æquatur quadrato DE. addito igitur communi quadrato EF, æquantur quadrata DE, EF, hoc est quadratum DE, rectangulo FGM cum quadrato EF, hoc est, [b] quadrato GE. Quia igitur quadratum DF æquatur quadrato GE, etiam recta DF rectæ GE æqualis est. Eodem discursu reliquæ omnes DF, reliquis omnibus GE æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

[b] *6. secundi.*

In libro de hyperbola, tria sequentia theoremata licet sint demonstranda quòd ab hyperbolę proprietatibus dependeant, ob miram tamen cum ellipticis affectionibus connexionem visum est non alienum hoc loco proponere.

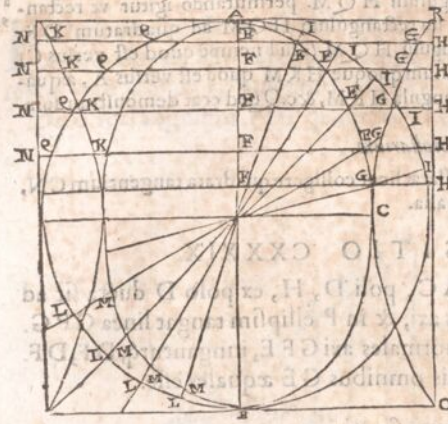
PROPOSITIO CXL.

EAdem manente figura, si rectis DF è polo ductis æquentur lineæ EFG normales ad axem AC.

Dico lineam per puncta G ductam esse rectam quæ ellipsim contingat in P.

Demonstratio manifesta est ex propositione præcedenti.

PROPOSITIO CXLI.

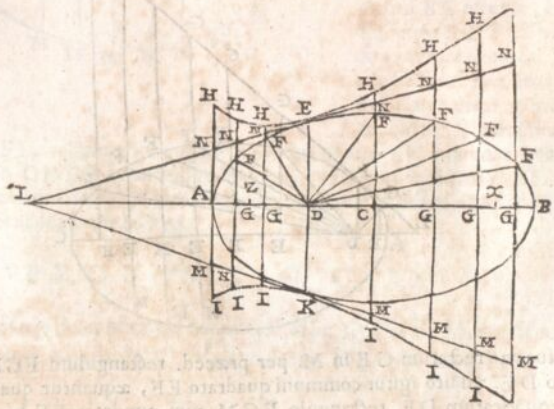


DAta ſit ellipſis axem habens AB, centrum D ſumatur in axe punctum quod primò ſit centrum ellipſeos, ex eo ducatur ad perimetrum normalis axi DC ac deinde quotcunque aliæ DE, DE: quibus æquales fiant lineæ FEG axi normales.

Dico lineam per puncta G deſcriptam eſſe hyperbolam quę idem habeat cum ellipſi centrum D, eamque contingit in C.

Demonſtrationem vide in lib. de hyperbola.

PROPOSITIO CXLII.



DAta ſit ellipſis axem habens AB, centrum C, polos X, Z. in axe ſume punctum aliquod D inter centrum C & polum D, ex quo ducatur ad perimetrum DE normalis axi, ac deinde quæuis aliæ DF, DF; quibus æquales fiant GFH axi normales.

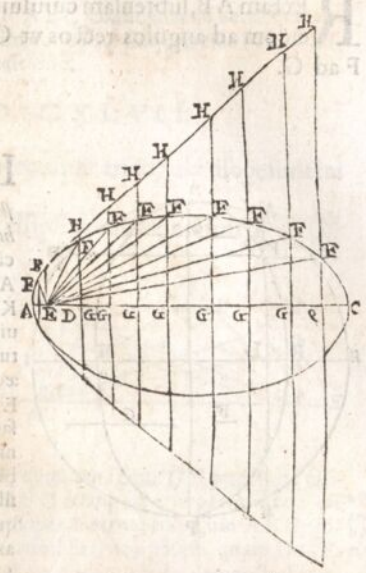
Dico lineam per puncta H, H deſcriptam eſſe hyperbolam, quæ ellipſim tangat in F.

Demonſtrabitur in libro de hyperbola.

PRO-

PROPOSITIO CXLIII.

DAta rursum sit ellipsis axem habens AC, polos D, Q, in axe sumatur punctum E inter polum D & verticem A, ex quo ducatur ad perimetrum normalis axi EB : & quotuis aliæ EF, quibus æquales fiant GFH axi normales.



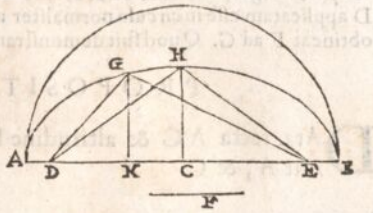
Dico lineam quę per puncta H describitur hyperbolam esse quæ ellipsim ambiat & tangat in puncto B.

Demonstrationem dabimus in libro de hyperbola.

PROPOSITIO CXLIV.

DAtâ basi aggregato laterum & altitudine triangulum exhibere.

Constructio & demonstratio.



DAto aggregato laterum ponatur AB, æqualis, qua bifariam diuisa in C fiat DE æqualis basi trianguli bifariam diuisæ in C sic vt vtrimque relinquantur æquales AD, BE, altitudini autem sit æqualis F, ex lateribus AC, CB, DE fiat triangulum DHE: (nam AC, CB, simul sumptæ maiores sunt DE,) erit DHE Isosceles. Deinde fiat vt quadratum HC ad F quadratum, ita rectangulum ACB ad AKB, & erigatur KG æqualis F parallela HC, & iungantur DG, GE. Dico DGE, esse triangulum quæsitum. quoniam ACB, rectangulum est ad AKB rectangulum, vt quadratum HC ad quadratum F; hoc est GK, quadratum, erunt puncta A, G, H, B ad eandem ellipsim cuius AB, est axis : & quia AD, ipsi EB, itemque DH, HE, æquales sunt ipsi AB, erunt DE, a puncta ex cõparatione facta siue foci ellipseos, quare DGE, latera æqualia sunt axi AB, hoc est aggregato laterum estque basis data DE, & altitudo F hoc est GK, Igitur exhibuimus triangulum quod quærebatur.

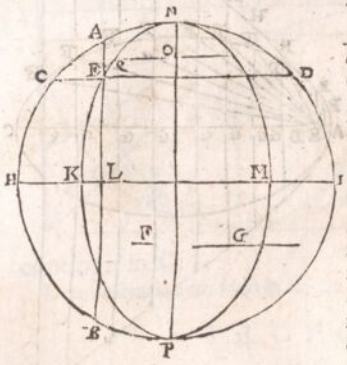
a *Corol. 121. huius.*

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

REctam AB, subtensam cuiusuis arcus circuli ABC, alterâ secare CD, eidem ad angulos rectos vt CE ad ED, datam obtineat rationem F ad G.

Constructio & demonstratio.



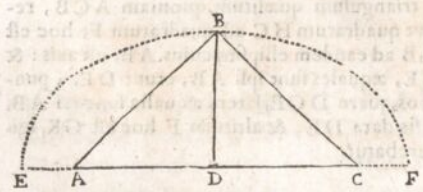
Libro de circulorum proprietatibus proposuimus hoc problema: sed quoniam eius demonstratio ab elliptica proprietate dependet, idcirco in hunc locum eam distulimus. constructio vero est. Ducatur diameter HI normalis ad AB secans AB, in L. Fiatque vt F ad G, sic HK ad KI: sumptâ deinde IM æquali ipsi HK, diuidatur diameter HP, in O puncto vt diuidatur KM in L: deinde rectangulo NOP, fiat æquale quadratum LE; tandem ducatur per E, recta normalis CED. Dico CED, diuisam in E, secundùm rationem F ad G. Quoniam sunt lineæ NP, KM ad angulos rectos bifariam diuisę; igitur descripta ponatur circa illas tamquam axes ellipsis NKP, erunt itaque OQ, LE, ordinatim positę ad singulos axes: & quia axes similiter diuisæ sunt in O & L, estque rectangulum NOP æquale quadrato LE, patet [a] punctum E esse ad ellipsim per puncta N, K, P, M descriptam. ergo est vt HK ad KI, hoc est vt F ad G, sic CE ad ED, patet rectam D applicatam esse in circulo normaliter ad CD, vt CE ad ED datam rationem obtineat F ad G. Quod fuit demonstrandum.

[a] 74. *huius.*

PROPOSITIO CXLVI.

DAta recta AC & altitudine BD, ellipsim describere cuius poli sint A, & C.

Constructio & demonstratio.



Fiat super AC linea in altitudine BD triangulum isosceles ABC, dein AC linea vtrimque æqualiter producatur in E & F: vt tota EF sit æqualis duabus AB, BC, tum per E, B, F, puncta ellipsis describatur: dico illam esse quæ petitur. Quoniam EF linea diuisa est bifariam in D & non bifariam in A: erit EAF [b] rectangulum vnà cum quadrato AD, æquale quadrato ED hoc est per constructionem quadrato AB; sed etiam quadrato AB æqualia sunt quadrata AD, BD; dempto igitur communi quadrato AD, manet EAF rectangulum æquale quadrato BD id est quartæ parti figuræ. eodem modo ostenditur quadrato BD æquari rectangulum FCE: quare [c] A & C, foci sunt descriptæ ellipseos EBF. data igitur linea & altitudine, &c. Quod erat faciendum.

[b] 5. *secundi.*

[c] Ex 120. *huius.*

Corol-

Corollarium.

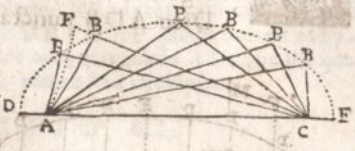
HInc sequitur dato quouis triangulo isosceli ABC continente ad verticem, angulum quemcunque, describi posse ellipsim cuius foci sint extrema basis trianguli dati ABC. demonstratio patet ex propositione.

PROPOSITIO CXLVII.

SVper AC linea descripta sint quotcunque triangula isoperimetra ABC, AGC.

Dico puncta G, B, B esse ad eandem ellipsim cuius poli sint A & C.

Demonstratio.



PRoducatur AC vtrimque æqualiter in D & E, vt tota DE sit æqualis duabus AB, BC, tum per puncta D, E, G ellipsis describatur. dico illam transire per reliqua puncta B, B, sin verò; transeat supra vel infra B. ac primum supra per punctum F, productâ CB donec peripherię occurrat in F, jungantur AF. quoniam igitur GF puncta ad ellipsim sunt, cuius [a] poli A & C, erunt AGC, AFC triangula [b] isoperimetra : est autem AGC triangulum per constructionem isoperimetrum triangulo ABC; igitur AFC, ABC triangula sunt isoperimetra. quod fieri non potest. quare DGE, ellipsis non transit supra B, sed nec infra B, cadere eodem modo demonstrabitur. ergo per B, B puncta; igitur GBB sunt ad ellipsim cuius poli sunt A, C. Quod erat demonstrandum.

[a] *Patet ex præcedenti.*
[b] *Patet ex 121.*

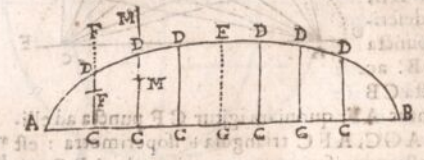
ELLIPSEOS
PARS QVINTA

Varias exhibet ellipsis geneses.

PROPOSITIO CXLVIII.

SIt AB linea vtcunque diuisa in C, & ex C quotcunque erigantur parallelę CD, fiatque vt ACB rectangulum ad rectangulum ACB sic DC quadratum ad quadratum DC. Dico ADB puncta esse ad eandem ellipsim vel circulum.

Demonstratio.



AB bisectâ in G, erigatur GE parallela ipsis CD, fiatque vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, sic quadratum CD ad quadratum GE, intelligatur deinde descripta esse ellipsis cuius diametri coniugatæ sint AG, GE: si ergo ellipsis non transit per punctum D, occurrat rectę CD supra vel infra D in F. quia AG, EG sunt diametri coniugatæ; erunt DC, ipsi EG parallelæ ordinatim positæ ad diametrum AB. Quare cùm ellipsis dicatur transire per F, erit [a] quadratum FC ad quadratum EG vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB, hoc est ex constr. vt quadratum DC ad quadratum EG: Quod est absurdum. non igitur punctum vllum F supra aut infra D, est ad ellipsim, sed ipsum D punctum ad ellipsim est. sumatur iam aliud quodlibet punctum D, exempligratia punctum propius sequens; si rursum ellipsis non transit per D, occurrat rectæ CD supra vel infra D in M. Quoniam est ex hypothesi vt quadratum DC ad quadratum DC, sic rectangulum ACB ad rectangulum ACB, & ex constr. vt quadratum DC ad quadratum EG, ita rectangulum ACB ad rectangulum AGB: erit ex æquali vt quadratum DC ad quadratum EG, ita ACB rectangulum ad rectangulum AGB: sed etiam est quadratum MC ad quadratum EG, vt rectangulum ACB ad rectangulum AGB cùm punctum M ponatur esse ad ellipsim. Ergo quadrata DC, MC ad quadratum EG, eandem habent rationem. Quod est absurdum. Non igitur punctum M aut aliud vllum præter D ad ellipsim est. simili discursu reliqua puncta D ad ellipsim esse demonstrabimus. ex quibus constat veritas Theorematis.

[a] 4. huius.

PROPOSITIO CXLIX.

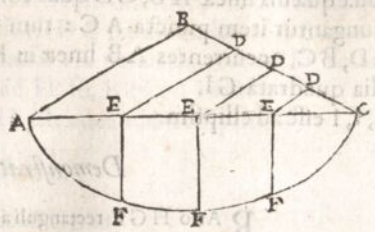
SIt ABC triangulum quodcunque, diuisoque latere BC vtcunque in punctis DD: ducantur ex D rectæ DE parallelæ AB, & ex A demittantur lineæ EF sic vt quadrata EF, sint BDE rectangulis æqualia.

Dico puncta A, F, C esse ad eandem ellipsim.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [379] - 322
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.



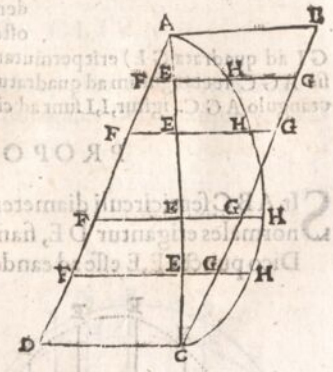
VT BDE rectangulum ad rectangulum BDE, sic BDC, rectangulum est ad rectangulum BDC, hoc est rectangulum AEC ad rectangulum AEC: sed vt BDE rectangulum est ad rectangulum BDE, sic EF quadratum est ad quadratum EF, igitur vt rectangulum AEC est ad rectangulum AEC, sic EF quadratum est ad quadratum EF. ergo [a] AFC, puncta sunt ad ellipsim. [a] Per 149. huius.

PROPOSITIO CL.

SIt AB, CD parallelogrammi diameter AC, ducanturq; AB lateri quotcumque parallelæ FG, secantes AC lineam in E: dein fiant inter FE, EG mediæ EH.

Dico puncta A, C, & omnia puncta H esse ad eandem ellipsim, nisi sint ad circulum.

Demonstratio.



RAtio FEG rectanguli ad rectangulum FEG est composita ex ratione FE ad FE, id est AE ad AE, & ex EG ad EG, id est EC ad EC: sed ex ijsdem componitur ratio rectanguli AEC ad AEC, rectangulum, igitur vt FEG rectangulum ad rectangulum FEG, hoc est quadratum EH ad quadratum EH, sic AEC rectangulum est ad rectangulum AEC. quare [b] AH, HC puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. [b] Ibid.

Corollarium.

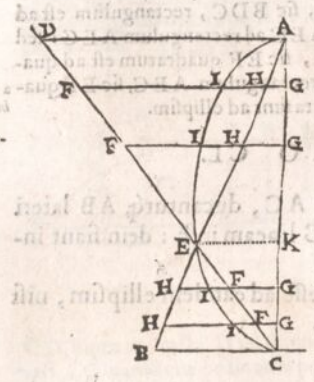
SI AB recta sit normalis ad AC, & illi fuerit æqualis, erunt AHH puncta ad eundē circulum: erit enim AEC rectangulum æquale rectangulo FEG hoc est quadrato EH. adeoque puncta HH ad circulum.

PROPOSITIO CLI.

SEcent ſe in E duæ quæuis lineæ AB, CD quas cóiungant duę parallelæ AD, BC; iungantur item puncta AC: tum rectę ducantur FG parallelæ lineis AD, BC, occurrentes AB lineæ in HH, fiantq; HGF, rectangulis æqualia quadrata GI.

Dico puncta I, I, I eſſe ad ellipſim.

Demonſtratio.



a 149. huius.

RAtio HGF rectanguli ad rectangulum HGF eſt compoſita ex ratione HG ad HG, id eſt AG ad AG, & ex ratione FG ad FG, id eſt GC ad GC: ſed ex ijſdem eſt compoſita ratio rectanguli AGC ad AGC. igitur vt HGF rectangulum eſt ad rectangulum HGF hoc eſt quadratum IG ad quadratum IG, ſic AGC rectangulum eſt ad rectangulum AGC: quare I,I puncta[a] ſunt ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

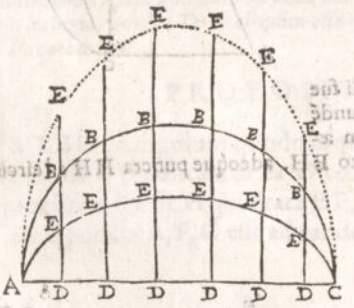
DVcatur ex E puncto interſectionis recta EK parallela lineæ AD: ſi AK, EK, KC fuerint continuæ, & EK linea normalis ad rectam AC. dico I,I, puncta eſſe ad circulum. cùm enim ſit vt AKC rectangulum ad AGC rectangulum, ſic EK quadratum ad quadratum IG: (id enim eodem diſcurſu probabimus, quo rectangula AGK oſtendimus eſſe ad rectangula AGK vt quadrata GI ad quadrata GI.) erit permutando vt AKC rectangulum ad quadratum EK ſic AGC rectangulum ad quadratum GI. adeoque quadratum IG æquale rectangulo AGC. igitur, I,I ſunt ad circulum.

PROPOSITIO CLII.

SIt ABC ſemicirculi diameter AC, diuiſa vtcunque in DD, & ex D normales erigantur DE, fiantque vt BD ad BD, ſic ED ad ED.

Dico puncta E,E eſſe ad eandem ellipſim.

Demonſtratio.



b Ibid.

VT quadratum DB ad quadratum DB, ſic ED quadratum eſt ad quadratum ED: ſed vt quadratum BD ad quadratum BD ſic ADC rectangulum eſt ad rectangulũ ADC: igitur vt quadratum ED ad quadratum ED ſic ADC rectangulum eſt ad rectangulum ADC. Quare[b] E,E puncta ſunt ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

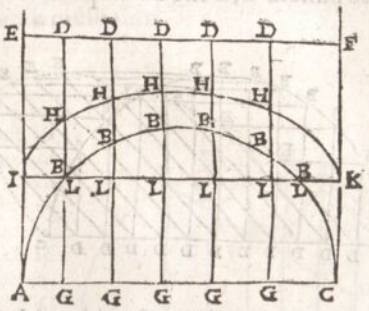
PRO-

PROPOSITIO CLIII.

SVper ABC semicirculi diametro AC rectangulum describatur AF: ductisque lineis DG parallelis lateri AE quæ circulo occurrant in BB, ducatur quæuis IK parallela rectæ ED occurrens DG lineis in LL. fiatque vt AI ad IE sic BH ad HD.

Dico puncta HH esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.



VT AE ad AI, hoc est GD ad LD, sic BD est ad DH, igitur permutãdo diuidendo, iterumque permutando vt GB ad LH, sic BD ad DH, atqui BD est ad HD, vt BD ad HD, sunt enim ambæ rationes BD ad HD, eædem rationi AE ad IE. quare vt GB ad LH, sic GB ad LH: & permutando vt GB ad GB, sic LH ad LH: & vt quadratum GB ad quadratum GB, sic LH quadratum ad quadratum LH: est autem vt quadratum GB ad quadratum GB sic AGC rectangulum ad rectangulum AGC, id est ILK, rectangulum ad rectangulum ILK, igitur vt LH, quadratum est ad quadratum LH, sic ILK rectangulum est ad rectangulum ILK: quare [a] H,H puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.
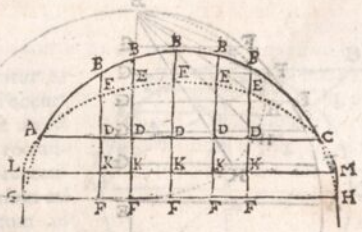
[a] *Ibid.*

PROPOSITIO CLIV.

SIt ABC segmentum circuli quodcunque, cuius AC subtensa, diuisa vtcunque in DD, erigantur ex D normales DB, fiatque vt BD ad BD sic ED ad ED.

Dico puncta E,E esse ad ellipsim.

Demonstratio.



PErfecto semicirculo ABC: ducatur GH diameter circuli GBH parallela lineæ AC, quæ BD, lineas productas secet in FF; fiatque vt BD ad DF, sic ED ad DK: tum ex G & H rectæ erigantur GL, HM parallelæ lineis BF secantes KK lineam in L & M. Quoniam est vt BD ad DF, sic DE ad DK, erit permutando, vt BD ad ED, sic DF ad DK. Atqui BD est ad DE, vt BD ad DE. igitur vt DF ad DK, sic DF ad DK: quare puncta K,K ad eandem lineam, & quidem parallelam lineæ GH. Rursum cùm sit vt BD ad DF, ita ED ad DK, erit componendo & permutando BF ad EK, vt DF ad DK. igitur vt BF ad EK, sic BF ad EK, & rursum permutando, vt BF ad BF, sic EK ad EK, & vt quadratum

quadratum BF ad quadratum BF, ſic EK, quadratum ad quadratum EK : ſed vt BF quadratum ad quadratum BF, ſic HFG rectangulum eſt ad rectangulum HFG, id eſt MKL rectangulum ad rectangulum MKL, igitur vt MKL rectangulum ad rectangulum MKL ſic quadratum EK ad quadratum EK. quare [a] E, E puncta ſunt ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

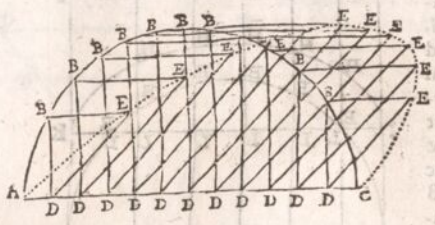
a 12 p. huius.

PROPOSITIO CLV.

ESto ABC ſemicirculi diameter AD, quam in D ſecent quotcunque normales BD: dein rectis BD fiant æquales BE parallelæ diametro AC.

Dico puncta E,E eſſe ad ellipſim cuius diameter eſt AC.

Demonſtratio.



DVcantur rectæ DE. quoniam anguli BDC recti ſunt, & BE parallelæ, anguli quoque DBE erunt recti. quadrata igitur DE, æquantur quadratis, BD, BE, hoc eſt quia BD, BE ſunt æquales, dupla ſunt quadratorum BD. ergo vt quadratum BD ad quadratum BD, hoc eſt vt rectangulum ADC ad rectangulum ADC, ita quadratum DE ad quadratum DE. Sunt verò & DE rectæ inter ſe parallelæ: cùm enim anguli DBE recti ſint, & latera BD, BE æqualia, erunt BDE ſemirecti. cùm ergo etiam BDC rectus ſit, reliqui EDC ſunt ſemirecti; adeoque æquales: vnde DE parallelæ. Puncta igitur E,E [b] ſunt ad ellipſim. Quod autem AC ſit diameter, facile apparebit ſi perfecto circulo ellipſis eadem conſtructione ad partem alteram producatur, tunc enim parallelæ omnes DE à recta AC bifariam diuidentur.

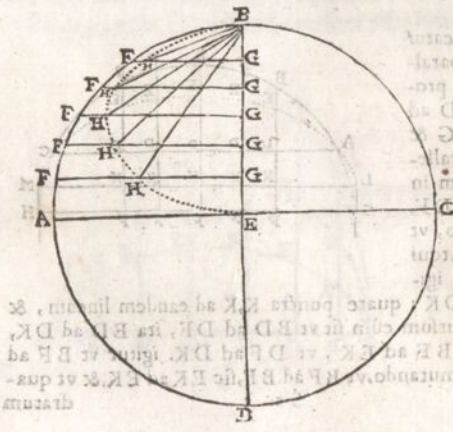
b Ibid.

PROPOSITIO CLVI.

CIrculum ABC ſecent ad angulos rectos diametri AC, BD ductiſque rectis FG quę AC, diametro æquidiſtent, demittantur ex B lineæ BH æquales rectis FG ſecantes FG lineas in HH.

Dico puncta B,H,E eſſe ad eandem ellipſim.

Demonſtratio.



QVoniam FG quadrato æquale eſt rectãgulũ BGD hoc eſt BGE, [a] rectangulum bis ſumptum vnà cum quadrato BG, erit & quadratum HB æquale rectangulo BGE bis ſumpto vnà cum quadrato BG: ſed HB quadratum eſt æquale quadratis HG, BG, ablato igitur communi quadrato BG manet HG, quadratum æquale rectangulo BGE bis ſumpto. ſimiliter reliqua quadrata HG dupla ſunt rectan-

rectangulorum BGE: igitur vt quadratum HG ad quadratum HG: sic BGE rectangulum est ad rectangulum BGE. quare puncta B, E, & omnia puncta H, ad eandem sunt ellipsim. Quod erat demonstrandum.

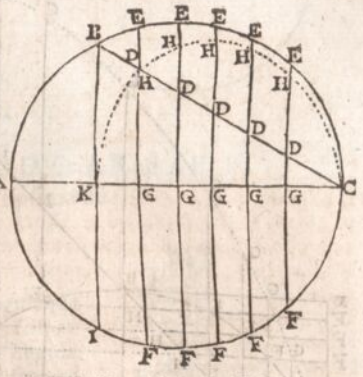
PROPOSITIO CLVII.

ESto ABC circuli diameter AC & ex C recta quæuis ducta CB occurrant circuli perimetro in B, dein ex B demissa recta BI quę AC, diametrum ad rectos angulos secet in K. ducantur quotcunque lineæ EF parallelæ rectæ BI occurrentes AC diametro in G, & lineę BC in D: fiantque EDF rectangula æqualia quadratis GH.

Dico KHC puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

VT EDF rectangulum ad rectangulum EDF, sic BDC rectangulum est ad rectangulum BDC, id est rectangulum KGC ad rectangulum KGC: sed (quemadmodum alternando patet ex hypothesi) vt EDF rectangulum ad rectangulum EDF, sic HG quadratum est ad quadratum HG: igitur vt KGC rectangulum est ad rectangulum KGC, sic HG quadratum est ad quadratum HG. quare KHC puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.



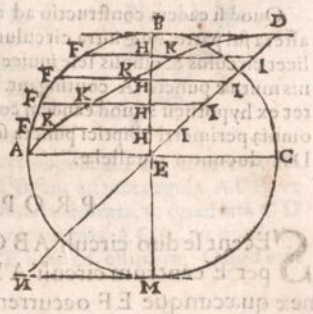
PROPOSITIO CLVIII.

SEcent ABC circulum ortogonaliter diametri AC, BE actaq; per B tangente BD: ducatur per E centrum recta quæuis ED, occurrens tangenti BD in puncto quouis D. dein rectæ ducantur FHI, parallelæ tangenti BD, occurrentes EB diametro in HH, & ED lineæ in I,I: fiatque vt FH ad FH, sic IK ad IK.

Dico AKD puncta esse ad eandem ellipsim.

Demonstratio.

PRoducta BE diametro in M. producatur & DE linea donec actæ per M tangenti occurrat in N. Quoniam BD, NM, HI lineæ æquidistant, erit vt rectangulum BHM ad rectangulum BHM, sic DIN rectangulum ad rectangulum DIN; sed est vt BHM rectangulum ad rectangulum BHM, sic FH quadratum ad quadratum FH, id est quadratum IK ad quadratum IK: igitur vt DIN rectangulum ad rectangulum DIN, sic est quadratum IK ad quadratum IK. quare AKD puncta sunt ad ellipsin. Quod erat demonstrandum.



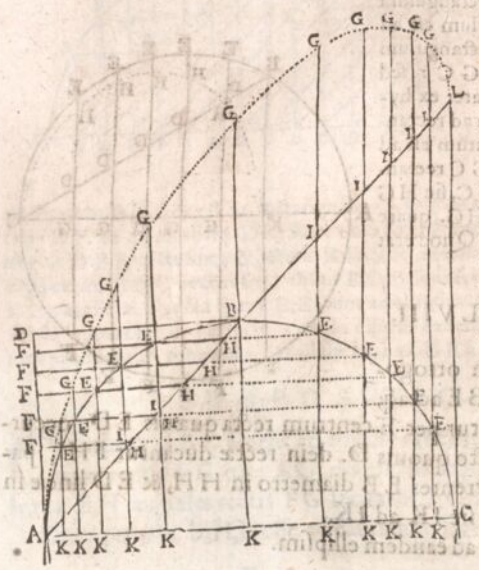
PRO-

PROPOSITIO CLIX.

Circulum ABC cuius diameter AC contingant duæ lineæ AD, BD secantes sese ortogonaliter in D: iunctisque punctis AB, agatur per C tangens CL, occurrens AB lineæ in L. dein rectæ ducantur quotcunque FE parallelæ lineę DB occurrentes AB lineæ in HH: & circulo in EE. tum per E rectæ ducantur GK parallelę lineæ AD occurrentes AC diametro in K & AL lineæ in II. fiantque FE lineis æquales EG.

Dico puncta AGL esse ad ellipsim.

Demonstratio.



VT AD est ad DB, sic AF est ad FH: sed AD, DB lineæ sunt æquales, igitur & AF, FH lineæ æquantur. quare & EK, FH lineæ sunt æquales. Rursum cùm sit vt AF ad FH, sic EI ad EH, erunt EI, EH lineæ inter se æquales: est autem ex constructione FE linea æqualis lineæ EG: igitur tota IG, est æqualis toti FH, hoc est FA id est EK. quare vt quadratum EK ad quadratum EK, sic IG quadratum est ad quadratum IG. sed vt EK quadratum est ad quadratum EK, sic AKC rectangulum est ad rectangulum AKC, id est AIL rectangulum ad rectangulum AIL, igitur vt quadratum IG est ad quadratum IG, sic AIL rectangulum est ad rectangulum AIL. Quare AGL puncta sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

Quod si eadem constructio ad alteram partem continuetur, perficietur ellipsis, altera sui parte, quæ intra circulum cadet. Vbi hoc notatu dignum occurrit, quod licet circulus & ellipsis sese inuicem secent, eandem tamen rectam DA in sectionis mutuæ puncto A contingant. Quod enim circulus contingat rectam AD patet ex hypothesi: quod eandem contingat etiam ellipsis, inde fit manifestum quod omnia perimetri elliptici puncta sint in lineis GK quæ inter puncta C & A, ipsi DA ducuntur parallelæ.

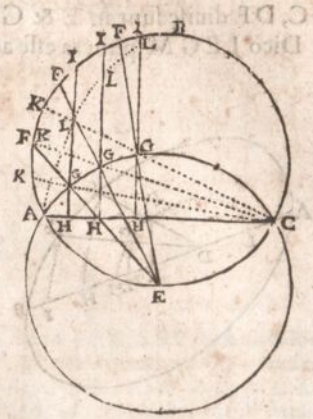
PROPOSITIO CLX.

SEcent se duo circuli ABC, ADC vt illorum alter ABC transeat per E centrum circuli AB, iunctisq; punctis AC ducantur ex E lineæ quæcunque EF occurrentes circulo ABC in punctis F & ADC circulo in punctis G: tũ per G rectæ agantur HI normales ad lineam AC, occur-

occurrentes AC lineæ in HH, & circulo ABC in II: fiantq; rectis GF æquales lineę GL.

Dico puncta ALL esse ad ellipsim.

Demonstratio.



DVcantur ex C per G lineæ CGK. vt KGC rectangulum est ad rectangulum KGC, sic [a] FGE rectangulum est ad rectangulum FGE: sed est [b] vt KGC rectangulum ad rectangulum KGC, sic GH linea ad lineam GH, & vt FGE rectangulum ad rectangulum FGE, sic FG linea ad lineam FG, igitur vt GH ad GH, sic FG ad FG, id est LG ad LG, & componendo permutando LH ad LH, vt GH ad GH. Quare puncta ALL sunt ad ellipsim.

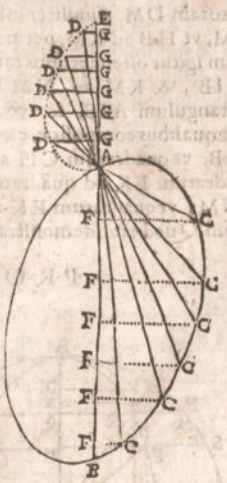
a *Per elementa.*
b *Coroll. 84. lib. de circulo.*

PROPOSITIO CLXI.

SIt ABC ellipsis diameter quæcunque AB, actisque per A lineis CD, quę ellipsi occurrant in CC, fiat vt AC ad AC, sic AD ad AD, & vt AC ad AD, sic AB ad AE.

Dico puncta A, D, E ad eandem ellipsim esse.

Demonstratio.

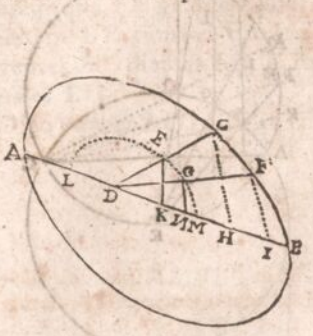


QVoniam DG, FG sunt parallelæ, triangulaque proinde FCA, DGA similia, erunt vt lineæ CA ad lineas AD singulæ ad singulas, ita singulæ FC ad singulas GD. Atqui singulæ CA sunt ad singulas AD vt BA ad AE. Ergo singulæ FC sunt ad singulas DG, vt BA ad AE. Quare quam rationem habet vna FC ad vnam DG, eandem habent singulæ reliquæ FG ad singulas reliquas DG. Igitur permutando vt sunt FC ad FC, ita GD sunt ad DG, adeoque vt sunt quadrata FC ad quadrata FC, ita quadrata GD sunt ad quadrata GD. similiter demonstrabimus, vt AF sunt ad AF, sic esse AG ad AG. Vnde vt reliquæ FB sunt ad reliquas FB, ita reliquæ GE sunt ad reliquas GE. Quare cùm rectangula AFB rationem habeant ad sese inuicem compositam ex rationibus AF ad AF, & FB, ad FB, quæ ostensæ sunt eædem esse rationibus AG ad AG, & GE ad GE, ex quibus componitur ratio rectangulorum AGE; erunt vt rectangula AFB ad rectangula AFB, sic rectangula AGE, ad rectangula AGE. Atqui rectangula AFB sunt ad rectangula AFB, vt quadrata FC ad quadrata FC, hoc est per superiùs demonstrata, vt quadrata GD ad quadrata GD. ergo rectangula AGE sunt ad rectangula AGE, vt quadrata GD ad quadrata GD. Puncta igitur DA, ADE sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

ESto ABC ellipsis diameter quæuis AB, diuisa vtcunque in D: & ex D ad peripheriam rectæ ducantur DC, DF quæ proportionaliter diuidantur in E & G: dein AD diuidatur in L, & DB in M, vt DC, DF diuisę sunt in E & G.

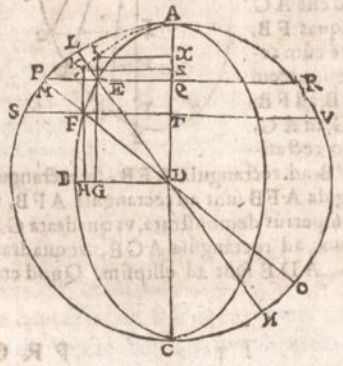
Dico LEGM puncta esse ad ellipsim.



Demonstratio.

DVcantur ex C & F ordinatim lineæ CH, FI ad AB, diametrum quibus ex E & G parallelæ ducantur EK, GN vt DC ad DE, sic DF ad GD, igitur vt CH ad EK, sic FI ad GN, & EK ad GN, vt CH ad FI: igitur & quadratum EK ad quadratum GN, vt CH quadratum ad quadratum FI. Deinde, quoniam DI est ad DN, vt DF ad DG, & DA est ad DL, vt DF ad DG, erit vt DI ad DN, sic DA ad DL, ergo vt vna antecedens DI ad vnum consequens DN, (hoc est vt DF ad DG, hoc est vt DC ad DE, hoc est vt DH ad DK) ita ambæ antecedentes, hoc est tota AI ad ambas consequentes, hoc est totam LN. similiter inferemus AH esse ad LK, vt DH ad DK. Vnde AI est ad LN, vt AH ad DK, & permutando AI est ad AH, vt LN ad LK. præterea, quoniam est vt DF ad DG (hoc est vt tota DB ad totam DM) sic ablata DH ad ablatam DN, erit & reliqua IB ad reliquam NM, vt tota DB ad totam DM. Similiter inferemus HB esse ad KM, vt DB ad DM. Ergo IB ad NM, vt HB ad KM, permutando igitur ac inuertendo HB ad IB, vt KM ad NM. Cùm igitur ostenderimus rationes AH ad AI, & AK ad AN, item rationes HB ad IB, & KM ad NM easdem esse, rationes quoque rectanguli AHB ad rectangulum AIB, & rectanguli AKB ad rectangulum ANB, ex rationibus illis æqualibus compositæ, eædem erunt. sed rectangulum AHB est ad rectangulum AIB, vt quadratum CH ad quadratum FI, hoc est per superius demonstrata vt quadratum EK ad quadratum GN. Ergo rectangulum LKM est ad rectangulum LNM, vt quadratum EK ad quadratum GN. ergo puncta L, E, G, M sunt ad ellipsim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

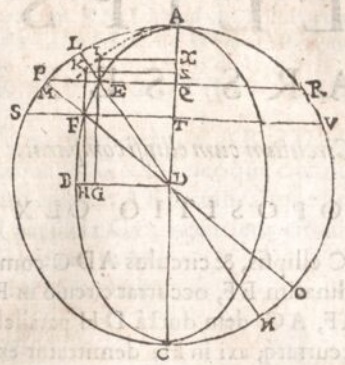


SInt ABC ellipsis axes AC, BD: ductisque ex D semidiametris quibusuis DE, DF, agantur per E & F lineæ IG, KH æquales ipsis ED, FD, parallelę verò axi AC, occurrentes axi BD in G & H.

Dico puncta AIK esse ad ellipsim cuius axis.

Demonstratio.

SVper AC vt diametro describatur circulus ALC, & DE, DF lineæ vtrimque producantur donec circuli perimetro occur-



occurrant in L, M, N, O: actisque per E & F, lineis PER, SFV quæ circulo occurrant in R, V & AC diametro in Q & T, & æquidistent axi BD, ducantur ordinatim ad axem AC lineæ IX, KZ. Quoniam PER, SFV lineæ in E & F, proportionaliter sunt diuisæ, ratio rectanguli PER ad rectangulum SFV duplicata est rationis PE ad SF, adeoque erit PER rectangulum ad rectangulum SFV vt quadratum PE ad quadratum SF id est vt quadratum EQ ad quadratum FT, id est vt quadratum IX ad quadratum KZ. Quare cùm rectangula LEN, PFO æqualia sint rectangulis PER, SFV, etiam LEN rectangulum est ad rectangulum MFO, vt quadratum IX ad quadratum KZ: deinde cùm IG hoc est XD fit æqualis ED, & DC æqualis DN, erit XC æqualis EN. est verò & tota AC æqualis toti LN. ergo reliqua AX reliquæ LE æqualis est: adeoque AXC rectangulum æquale rectangulo LEN; eodem modo ostenditur rectangulum AZC æquari rectangulo MFO, erit igitur vt AXC rectangulum ad rectangulum AZC, sic quadratum IX ad quadratum KZ. Quare [a] AIKC, puncta ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. [a] 148. huius.

Tt 2 EL-

ELLIPSIS

PARS SEXTA

Circulum cum ellipſi comparat.

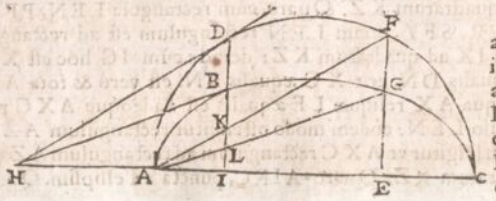
PROPOSITIO CLXVIII.

HAbeant ABC ellipſis, & circulus ADC communem axem AC, ductaque ordinatim EF, occurrat circulo in F & ellipſi in G: iunganturque AF, AG. dein ductâ DH parallelâ AF quæ circulum contingat in D, occurratq; axi in H; demittatur ex D ordinatim linea DI ad diametrum AC ſecans ellipſim in B & AF, AG, in K & L: iunganturque HB.

Dico AG lineam æquidiſtare rectæ HB.

Demonſtratio.

a. Schol. prop. 4. huius.



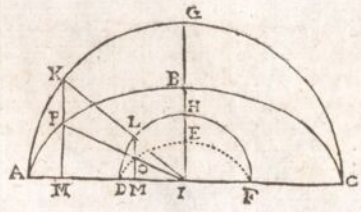
VT EG ad EF, ſic IL eſt ad IK. ſed [a] vt EG ad EF, ſic IB eſt ad ID, igitur vt IL ad IK, ſic IB ad ID, & permutando vt IK ad ID, ſic IL ad IB, eſt autem vt IK ad ID, ſic IA ad IH (quia AF, HD ex hypotheſi æquidiſtant) igitur vt IL ad IB, ſic IA ad IH. quare AG, HB lineæ ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXIX.

SInt ABC, DEF ellipſes ſimiles, ſimiliterque ad idem centrum I conſtitutæ: & ſuper AC, DF diametris, circuli deſcribantur AGC, DHF: ponatur autem ex centro quædam IK occurrens circulis in L & K, punctis, è quibus normales demiſſæ LM, KN, ſecent ellipſes in O & P: ducanturque lineę IO, OP.

Dico eſſe vt IL ad LK, ſic IO ad OP.

Demonſtratio.



ERigatur ex I centro normalis IG occurrens ellipſibus in E, B, circulis verò in H & G. Quoniam tam circuli AGC, DHF quàm ellipſes ABC, DEF ſimiles ſunt ſimiliterque ad idem centrũ conſtitutæ, vt IG ad IB, ſic IH eſt ad IE, ſed vt GI ad BI, ſic KN ad PN, &

& vt HI ad EI, ſic LM ad OM: igitur vt KN ad PN, ſic LM eſt ad OM, & permutando vt KN ad LM, hoc eſt IN ad IM, ſic PN ad OM. in directum igitur ſunt I, O, P. Quare cùm KN, LM ad AC, ſint perpendiculares, ac proinde inter ſe parallelæ, erit vt IL ad LK, ſic IO ad OP. Quod erat demonſtrandũ.

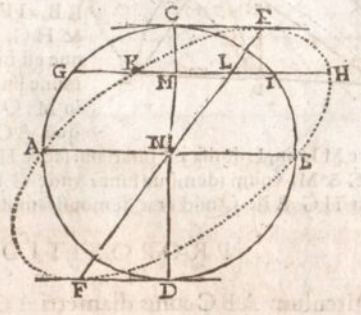
PROPOSITIO CLXX.

Circulum ABC ſecent diametri duæ AB, CD ad rectos ſeſe angulos decuſſantes, actæque per C & D lineę quę circulum contingant in C & D, contingant etiam ellipſim AEB cuius aliqua ſit diameter AB. dein quæuis ducatur GH parallela CE, occurrens circulo in G & I, ellipſi verò in K & H, & CD lineę in M.

Dico lineas GI, HK eſſe æquales.

Demonſtratio.

EX contactu ponatur ad centrum EN, quæ [a] producta incidet in punctum contactus F ad hanc diametrum, vt patet ex alibi hoc in libro demonſtratis, erunt ordinatim poſitæ KH, AB, vnde rectangulũ ELF eſt ad rectangulum ENF, vt quadratum LH ad quadratum NB, ſed rectangulum ELF eſt ad rectangulum ENF, vt rectangulum CMD ad rectangulum CND, (cùm enim CE, DF [b] & KH ex hypotheſi ſint parallelæ, rectangulorum illorum rationes ex ijſdem rationibus componuntur,) & rectangulum CMD, eſt ad rectangulum CND, vt quadratum MI ad quadratum NB, quadratum igitur MI eſt ad quadratum NB, vt quadratum LH ad quadratum NB; æquantur ergo quadrata MI, LH, adeoque & rectæ MI, LH earumque duplæ GI, KH æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.



[a] *Patet ex 13. huius*

[b] *13. huius*

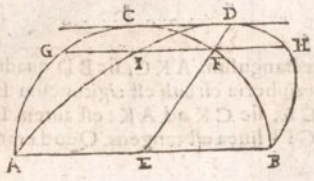
PROPOSITIO CLXXI.

SEmicirculum ABC cuius diameter AB & centrum E, contingat recta CD, æquidiſtans AB, & per A & B, puncta ellipſis deſcribatur quę diametrum habeat AB, & rectam CD contingat in puncto quouis D: ex D verò ponatur DE occurrens circuli peripheriæ in F, agaturq; per F parallela GH, ſecans ellipſim in H & I, circulum verò in G & F.

Dico lineam GH in I & F, trifariam eſſe diuiſam.

Demonſtratio.

QVoniam HI per præcedentem eſt æqualis GF, ablata communi IF, manet FH, æqualis GI; ſed ipſi FH æquatur IF (quia HI ordinatim poſita eſt ad diametrum DE) æquantur igitur GI, IF, FH lineæ. Quod erat demonſtrandum.

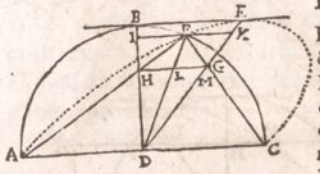


PROPOSITIO CLXXII.

CIrculum ABC cuius diametri AC, BD ſe ad rectos decuſſent in D, contingat in B linea BE, ducta deinde per A & C ellipſis AEC, contingens BE in E, occurrat circulo in F, & poſita ex contactu ad centrum recta ED ducantur AF, CF: & AF quidem ſecans BD diametrum circuli in H, CF verò ellipſeos diametrum ED in G.

Dico iunctam GH æquidiſtare BE.

Demonſtratio.



a 170. huius.

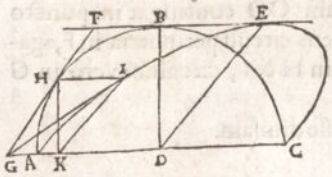
POnatur per F, linea IK æquidiſtans EB, iunctiſque punctis FD, ex H recta ducatur HG, parallela IK, occurrens FD lineæ in L & ED in G. Quoniam IK æquidiſtat tangenti EB, a IF, FK lineæ inter ſe æquales ſunt; quare & HG, linea æquidiſtans IK in L, diuiſa quoque eſt bifariam. ſi iam punctum G non ſit commune lineis FC, ED, HG, occurrat HG ipſi FC in M: Quoniam ergo HM æquidiſtat EB adeoque AC, vt AD ad DC, ſic HL ad LM, quare MH in L diuiſa eſt bifariam: ſed & HG, in L bifariam eſt diuiſa; puncta igitur G & M, vnum idemque ſunt: vnde G commune lineis FC, ED æquidiſtant; igitur HG, BE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXIII.

CIrculum ABC cuius diametri AC, BD ſeſe ad rectos decuſſant, contingat in B recta BE, ductaq; ex E recta linea ED, deſcribatur ellipſis AEC, contingens FE, in E: ponatur quoque FG contingens circulum in H, occurrens diametro AC, in G: dein ex H ponatur HI, parallela BE occurrens ellipſi in I, iunganturque IG.

Dico IG lineam contingere ellipſim in I.

Demonſtratio.



PONatur IK æquidiſtans ED, erit illa ordinatim poſita ad diametrum AC, cùm AC, DE diametri ſint coniugatę: ex K verò erigatur KH, parallela BD, occurrens HI lineæ in H. Quoniam tam HK, BD, quàm IK, ED æquidiſtant, erit vt quadratum ED ad quadratum IK, ſic BD quadratum ad quadratum HK: ſed vt quadratum ED ad quadratum IK, ſic ADC rectangulum ad rectangulum AKC, vt igitur rectãgulum ADC ad rectangulum AKC, ſic BD quadratum ad quadratum HK. Quare punctum H in peripheria circuli eſt: igitur cùm HK ſit normalis & HG contingens, vt GC ad CK, ſic CK ad AK: eſt autem IK ad diametrum AC, ordinatim poſita; ergo GI b linea eſt tangens. Quod erat demonſtrandum.

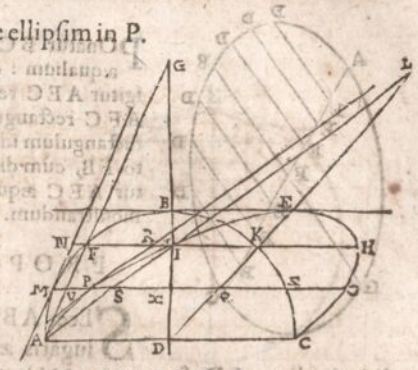
b *Patet ex* 30. *huius.*

PRO-

PROPOSITIO CLXXIV.

CIrculum A B C cuius diametri se decussant ad rectos in D, contingat in B linea B E: dein per A & C puncta ellipsis describatur contingens B E lineam in E, cuius vna è diametris sit A C. iunctisque E D, ducatur ex A secans A F, & per F agatur F H, parallela B E, occurrens ellipsi in I. Tum per A & I ducatur recta A I. contingat autem circulum recta M N in M, parallela secanti A F, & ex M ducatur M O, parallela tangenti B E, occurrens ellipsi in P; ponaturq; per P, rectæ B E æquidistans P R, secans F H lineam in R.

Dico P R lineam, contingere ellipsim in P.



Demonstratio.

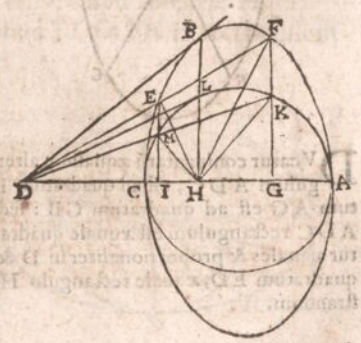
SEcantes A F, A I ipsis D B, D E occurrant in G & L. Deinde F H occurrat ipsi B G in T, & tangenti in N, & rectæ D E in K. similiter M O occurrat ipsi A F in V, & A I in S, & D E in Q, & G D in X. Quoniam A G D, A L D triangula, eandem habent basim A D, suntque F T, K I [a] æquales, erunt triangula [b] A G D, A L D inter eadem parallelas. Rursum cùm M O linea æquidistet F K, erunt V X, S Q lineæ æquales; est verò & M X iterum [c] ipsi P Q æqualis; ergo & reliqua M V, reliquę P S æqualis est: sed rectæ M V æquatur linea N F, & P S, est æqualis R I, igitur & N F, R I lineę sunt inter se æquales: est verò & F T ipsi K I æqualis, igitur N T, K R æquales sunt. Sed, quia M N tangens cadit tota extra circulum, N T maior est quàm F T, hoc est quàm K I. ergo & K R maior est quàm K I. ergo punctum R, cadit extra ellipsim. eodem modo si tam supra quàm infra M O, parallelę ducantur quotcũque, ostendentur omnia puncta rectæ P R, cadere extra ellipsim pręter punctum P; recta igitur P R, tanget ellipsim. Quod erat demonstrandum.

a 171. huius.
b Patet ex demonstratis.
c Clauius ad 40. 1.

PROPOSITIO CLXXV.

ESto A B C ellipsis axis A C vtcunque productus in D, ductaq; ex D linea D B, quæ ellipsim contingat in B ponatur secans altera D F, occurrens ellipsi in E & F: demissis deinde E F ex E, B, F normalibus F G, B H, E I ad axem A C, iungantur F H, E H.

Dico F G H, E I H triangula esse similia.



Demonstratio.

SVper A C diametro describatur circulus A K C, occurrens rectis F G, B H, E I in K L M, ducantur autem rectæ M H, K H, E H, F H: cùm igitur sit [d] vt F G ad E I, (hoc est vt G D ad I D,) sic K G ad M I, patet M K productam conuenire in D: est autem [e] D L contingens, igitur H K G, H M I triangula similia sunt. quare vt K G ad M I, sic H G ad H I: sed est vt K G ad M I, sic F G ad E I, igitur vt F G ad E I, sic H G est ad H I: sunt autem an-

d Schol. 4. huius.
e Patet ex 33. huius.

guli

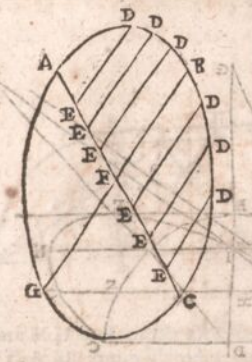
guli lateribus proportionalibus contenti recti; triangula igitur FGH, EIH sunt similia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

SIt in ABC ellipsi diameter AG vna coniugatarum æqualium : ad quam ordinatim ponantur quotcunque DE.

Dico AEC rectangula æquari quadratis DE.

Demonstratio.



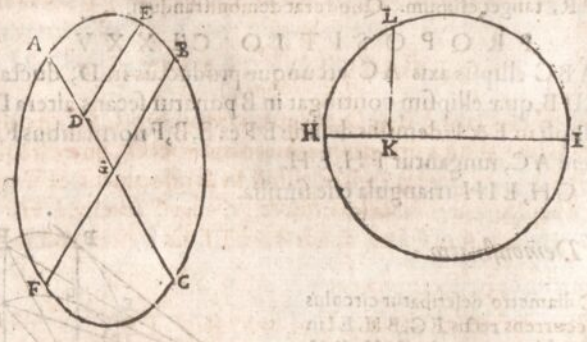
POnatur BC altera diametrorum coniugatarum æqualium : centrum autem sectionis sit F: erit igitur AEC rectangulum ad quadratum ED ; vt AFC rectangulum ad quadratum FB : sed AFC rectangulum id est quadratum AF æquatur quadrato FB, cùm diametri sint æquales, rectangulum igitur AEC æquale est quadrato DE: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVII.

SEcet ABC ellipsim vna ex diametris coniugatis æqualibus AC, quam in D secet ordinatim linea ED, sumptaque HI linea quę sit æqualis AC, descriptoque super AI circulo HLI, diuidatur HI in K, vt AC est diuisa in D, & ex K normalis erigatur KL.

Dico ED, KL quadrata esse inter se æqualia.

Demonstratio.



DVcatur coniugatarũ æqualium altera FB: sectionis autem centrum sit G, rectangulum ADC, est ad quadratum ED, vt AGC rectangulum hoc est quadratum AG est ad quadratum GB : sed AG, GB quadrata sunt æqualia. igitur & ADC rectangulum est æquale quadrato ED: rursum cùm HI, AC lineæ ponantur æquales & proportionaliter in D & K diuisę, erit ADC rectangulum hoc est quadratum ED, æquale rectangulo HKI, id est quadrato LK. Quod erat demonstrandum.

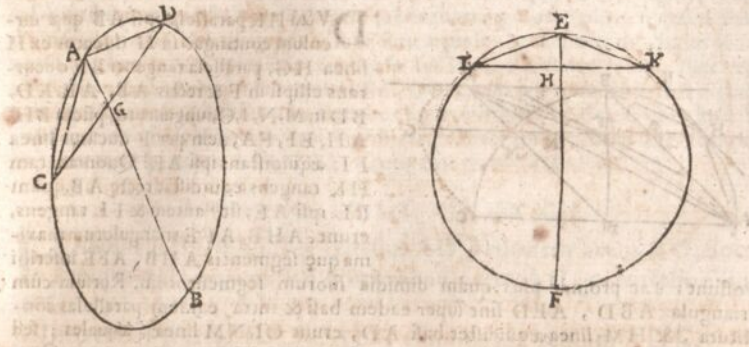
PRO-

PROPOSITIO CLXXVIII.

SEcet ellipsim vna ex diametris coniugatis æqualibus AB, ad quam ponatur recta CD ordinatim, iunganturq; AC, AD; tum super EF æquali rectę AB, & in H proportionaliter diuisæ ipsi AB describatur circulus EFK: actaque per H normali IK, iungantur EI, EK.

Dico quadrata AC, AD simul sumpta, æquari quadratis IE, EK simul sumptis.

Demonstratio.



QVadrata AC, AD simul sumpta æqualia sunt quadratis a CG, AG bis sumptis, & quadrata IE, EK b æqualia sunt quadratis IH, HE bis sumptis; sed per præcedentem CG, IH quadrata sunt æqualia, suntque item æqualia inter se quadrata AG, EH, quod AG, EH rectę æquales sint ex constructione, quadrata igitur CG, AG bis sumpta æquantur quadratis GH, EH bis sumptis; igitur & quadrata duo CA, AD simul sumpta æqualia sunt quadratis IE, EK simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

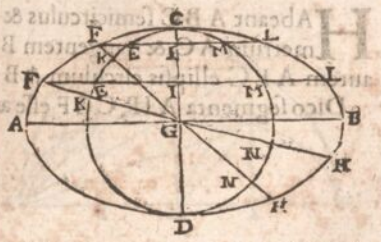
a 4. Belli-nei.
b Patet ex 47 primi.

PROPOSITIO CLXXIX.

SInt AB C ellipsis axes AB, CD: & super axe minore CD, circulus describatur CED; positis FL ordinatim ad axem CD, quæ circulo occurrant in E & M, axi autem in I, & ellipsi in L; ducantur ex F per G, centrum, FH occurrentes circulo in K & N, ellipsi autem in H.

Dico esse vt quadratum FI ad quadratum FI, sic FKH rectangulum ad rectangulum FKH.

Demonstratio.



EX scholio quartæ huius libri patet has duas proportiones FE ad FE, & EL ad EL easdem esse cum ratione EI, ad EI quare cùm ratio rectanguli FEL ad rectangulũ FEL, componatur ex rationibus FE ad FE; & EL ad EL, erit ratio rectãguli FEL ad rectangulũ FEL, duplicata rationis EI ad EI, ac proinde eadem quę quadrati EI ad quadratum EI: sed rectangula FEL sunt rectangula

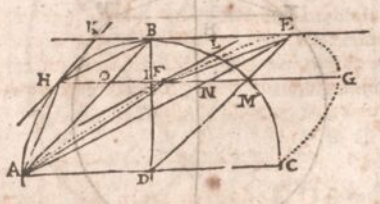
a 36. tertij. MFE, hoc est rectangula a NFK, id est FKH. ergo rectangula FKH sunt ad se inuicem vt quadrata EI id est quadrata FI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

CIrculum ABC cuius diametri AC, BD se decussant ad rectos, contingat in B linea BE: descriptâ dein ellipsi per A, C puncta quæ contingat BE lineam in E, iungantur puncta AE, AB.

Dico AFE, AHB segmenta esse æqualia.

Demonstratio.



DVctâ HK parallela ipsi AB quæ circulum contingat in H ducatur ex H linea HG, parallela tangenti BE occurrens ellipsi in F & rectis AB, AE, ED, BD in M, N, I, O, iungantur; pũcta BH, AH, EF, FA, dein per F ducatur linea FL æquidistans ipsi AE: Quoniam tam HK tangens æquidistat rectę AB, quàm EL ipsi AE, sit b autem & FL tangens, erunt c AHB, AFE triangulorum maxima quę segmentis AHB, AFE inscribi possunt; d ac proinde plus quàm dimidia suorum segmentorum. Rursum cùm triangula ABD, AED sint super eadem basi & intra easdem parallelas constituta, & HM linea æquidistet basi AD, erunt OI, NM lineæ e æquales; sed & totæ HI, FM sunt f æquales; igitur & reliquę HO, FN inter se æquantur: Quare tam triangula HOB, NEF, quàm triangula HAO, NFA, adeoque tota triangula BHA, EFA sunt æqualia. eodem modo si residuis segmentis triangula inscribantur, ostendemus triangula residuo circuli inscripta æquari triangulis residuo ellipseos inscripta, & vtraque maiora dimidijs esse suorum segmentorum. Quare cùm dicta triangulorum inscriptio, vtrimque semper æqualium & maiorum dimidiis segmentorum sine termino continuari possit, segmenta g AHB, AFE æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

b 174. huius.
c Patet ex 13. & 42. huius.
d 43. huius.
e 170. huius.
f 43. huius.
g 116. Progress. siue l. 2. huius.

Corollarium.

IIsdem positis sequitur semicirculum ABD æqualem esse semiellipsi AEC, est enim segmentum AHB ostensum æquale segmento AFE, sunt autem triangula ABD, AED super eadem basi & inter easdem parallelas cõstituta inter se ęqualia, igitur quadrans circuli ABD ęqualis est quadranti ellipsis AED. ergo semicirculus ABC ęqualis est semiellipsi AEC. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO CLXXXI.

HAbeant ABC semicirculus & AEC semiellipsis communem diametrum AC & tangentem BE, parallelam diametro AC: secet autem AEC ellipsis circulum ABC in F, ducanturq; lineæ AF, CF.

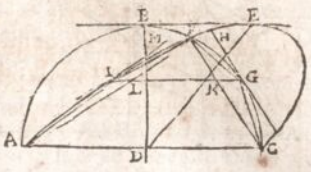
Dico segmenta AIF, CGF esse æqualia.



Demon-

Demonſtratio.

DVctâ GH linea parallela rectæ CF, quæ circulum in G contingat, ducatur ex G linea GI parallela rectæ AC, occurrens lineis CF, AF in K & L, ellipſi verò in I: actaque per I linea IM, quæ AF lineæ æquidiſtat, iungantur puncta AI, FI, CG, FG: Quoniam IM linea æquidiſtat ſecanti AF, erit [a] IM recta tangens, ideoque AIF triangulum [b] eorum maximum quæ AIF ſegmento poſſunt inſcribi: quod autem CGF triangulum eorum ſit maximum quæ CGF ſegmento circuli inſcribuntur manifeſtum eſt, vtrumque ergo triangulum [c] plus eſt quàm dimidium ſui ſegmenti. Deinde, quia IL, KG ſunt æquales, vt facile ex 174. huius deducetur, ſuntque IG, AC parallelæ, triangula IAL, GCK ſunt æqualia: ſunt verò ob eandem cauſam æqualia triangula IFL, GFK. tota igitur AIF, CGF æqualia ſunt. Similiter demonſtrabimus ſegmentis reliquis ellipticis ac circularibus inſcribi poſſe, ſiue termino triangula maiora dimidijs ſegmentorum & æqualia inter ſe; æqualia igitur ſunt ſegmenta AIF, CGF. Quod erat demonſtrandum.



[a] *Facile deducitur ex 174. huius.*
[b] *Patet ex 3. & 42. huius.*
[c] *43. huius.*

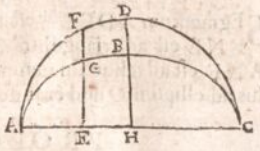
PROPOSITIO CLXXXII.

HAbeant ABC ellipſis & circulus ADC eundem axem AC, ducaturque recta quæuis EF normalis ad axem AC, occurrens ellipſi in G.

Dico eſſe vt EG ad EF, ſic ABC ellipſim ad circulum ADC.

Demonſtratio.

EX centro H normalis erigatur HBD: occurrens ellipſi in B & circulo in D. vt HB ad HD, ſic EG eſt ad EF: ſed vt HB ad HD, ſic [d] ABC ellipſis eſt ad circulum ADC: igitur vt EG ad EF, ſic ellipſis ABC eſt ad circulum ADC. Quod erat demonſtrandum.



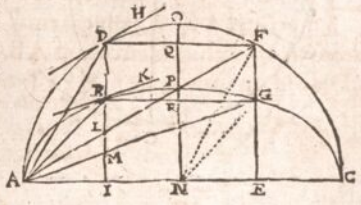
[d] *Coroll. 4. huius.*

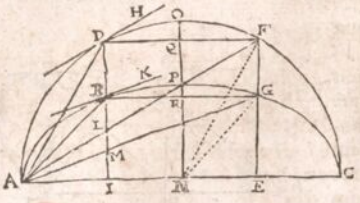
PROPOSITIO CLXXXIII.

HAbeant ABC ellipſis & circulus ADC eundem axem AC ad quem ordinatim poſita ſit recta EF occurrens ellipſi in G & circulo in F: Dico ſegmentum ADFE eſſe ad ſegmentum ABGE vt ADC circulus eſt ad ellipſim ABC.

Demonſtratio.

IVngantur AF, AG, ducaturque recta DH æquidiſtans ipſi AF, contingens circulum in puncto D: ex quo ordinatim demittatur ad axem recta DI, occurrens ellipſi in B & AF, AG lineis in L & M, agaturque per B recta BK parallela ad AG, quæ per 154. ellipſim tanget. dein lineæ ducantur AD, DF, AB, BG, vt EF ad EG, ſic IL eſt ad IM, ſed eſt vt EF ad EG, ſic ID ad IB. igitur vt ID ad IB, ſic IL ad IM. ergo & reliqua DL ad reliquam BM, vt tota ID ad totam IB. eſt autem





autem vt D L ad B M, ſic triangulum D A L, ad triangulum B A M, & (quia parallelæ ſunt D I, F E,) triangulum D F L ad triangulum B G M, igitur triangulum D A L eſt ad triangulum B A M, vt I D ad I B, & triangulum D F L eſt ad triangulum B G L vt I D ad I B. ergo totum triangulum A D F eſt ad totum triangulum A B G, vt I D ad I B. quia autem D H, B K ſunt tangentes, triangula A D F, A B G maxima [a] ſunt eorum quæ inſcribi ſegmentis poſſunt, ac proinde maiora [b] ſegmentorum dimidijs. ſimiliter demonſtrabimus ſegmentis reſiduis tam circuli quàm ellipſeos inſcribi poſſe triangula, quæ ſint maiora reſiduorum dimidijs, & rationem habeant, quam I D ad I B. Quare cùm hoc fieri poſſit ſine termino, ſegmentũ [c] A D F eſt ad ſegmentum A B G, vt I D ad I B: eſt verò & triangulum A F E ad triangulum A G E, vt E F ad E G, hoc eſt vt I D ad I B. ergo totum ſegmentum A D F E eſt ad totum ſegmentum A B G E, vt I D ad I B, hoc eſt vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

a *Patet ex 13. & 42. huius.*
b *43. huius.*
c *44. huius.*

PROPOSITIO CLXXXIV.

EAdem manente figura ducatur ex centro N quæuis diameter N F, demiſſaque ex F normali F E quę ellipſim ſecet in G, iungantur N G:

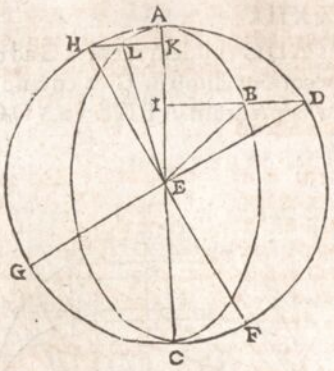
Dico A N F ſectorem eſſe ad ſectorem A N G, vt circulus A D C ad ellipſim A B C.

Demonſtratio.

SEgmentum A D F E [d] eſt ad ſegmentum A B G E, vt F E ad G E: & triangulum F N E eſt ad triangulum G N E, vt F E ad G E. Ergo & reliquum nempe ſector A N F eſt ad reliquum nempe ſectorem A N G, vt F E ad G E, hoc eſt [e] vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum,

d *183. & 182. huius.*
e *182. huius.*

PROPOSITIO CLXXXV.



SIt ellipſis A B C, & circulus A D C, habentes communẽ axem A C: & per centrum commune E ducantur duæ diametri circuli ſeſe ad angulos rectos interſecantes, occurrenteſque circulo in punctis D, F, G, H: deinde ex D & H, ordinatim ad A C applicentur lineæ D I, H K occurrentes ellipſi in B & L: iunganturq; E B, E L.

Dico L E B quadrantem ellipſeos eſſe, ſicut H E D eſt quadrans circuli.

Demon-

Demonstratio.

SEgmentum ABI ad segmentum [a]ADI est vt IB ad ID, vtque eadem IB ad ID, ita est triangulum IEB ad triangulum IED. ergo vt IB ad ID, ita est sector AEB ad sectorem AED. simili modo ostendemus sectorem LEA ad sectorem HEA, esse vt KL ad KH, id est, [b] vt IB ad ID: ergo vt IB ad ID, ita est totus sector BEL ad totum sectorem DEH, sed vt IB ad ID, hoc est minor axis ellipseos ad diametrum circuli, per 5. Archimedis de Spher. ita est ellipsis ABC ad circulum ADC; ergo sector BEL ad sectorem DEH, vt ellipsis ad circulum, & inuertendo ac permutando vt sector DEH ad circulum ADC, ita est sector BEL ad ellipsin ABC, sed sector DEH est quadrans circuli, [c] ergo & sector BEL quadrans ellipseos erit, adeoque [c] erunt BE, EL diametri coniugatæ, ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 184. huius.
[b] Cor. 1. pr. 8. huius.
[c] 46. huius.

Nota idem demonstrari si ADC sit ellipsis cuius axis AC, sintque HF, DG ipsius coniugatæ diametri; si verò DEH non sit quadrans ellipseos vt sector DEH ad circulum, ita erit sector BEL ad ellipsin, vt ex demonstratione constat.

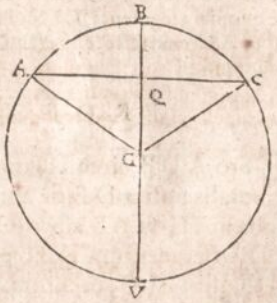
PROPOSITIO CLXXXVI.

ESto circuli ABC quicunque sector AGC, & ellipsis DEF sector DHF: sit autem sector ad sectorem vt circulus ad ellipsim: ducanturque rectæ AC, DF.

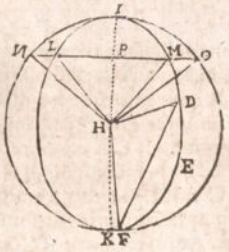
Dico segmentum ABC esse ad segmentum DEF, vt circulus ABC est ad ellipsim DEF, & contra.

Demonstratio.

INuento ellipseos maiore axe IK, describatur super IK diametro circulus, ductaq; [d] ad axem ordinatim LM quæ auferat segmentum LIM æquale segmento DEF, occurrat circulo in N & O, ducanturque rectæ LH, MH, NH, OH. Quoniam segmentum MIL æquale est segmento DEF, erit [e] sector LHM æqualis sectori DHF. Rursum cùm sit vt ellipsis ad circulum NOK, sic LHI sector ad sectorem NHI, adeoque & LHM sector ad sectorem NHO, sitque LHM triangulum ad triangulum NHO, vt LM ad NO, hoc est [g] vt ellipsis ad circulum NOK, erit vt ellipsis ad circulum NOK, sic LIM segmentum ad segmentum NIO, & permutando circulus NOK ad segmentum NIO, vt ellipsis ad segmentum LIM. iam verò circulus ACV est ad sectorem AGC, ex hypothesi vt ellipsis ad sectorem HDF, hoc est (vt ostendi supra) vt ellipsis ad sectorem LHM, hoc est vt circulus NOK ad sectorem NHO. ergo etiam [h] circulus ACV ad segmentum ABC, vt circulus NOK ad segmentum NIO, hoc est, vt ante ostendi, vt ellipsis ad segmentum LIM, hoc est (quoniam segmenta LIM, DEF sunt ex construct. æqualia) vt ellipsis ad segmentum DEF. igitur permutando vt circulus ACV ad ellipsim, sic segmentum ABC ad segmentum DEF. Quod erat demonstrandum.

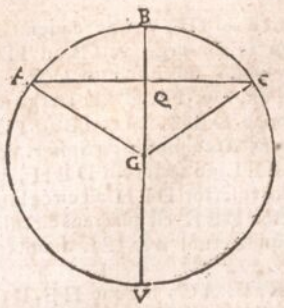


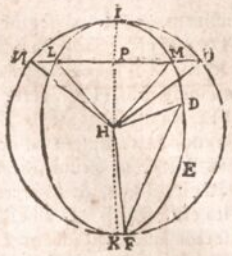
[d] 57. huius.
[e] 59. huius.
[f] 184. huius.
[g] 182. huius



[h] 183. huius

Iam verò si fuerit segmentum ABC ad segmentum DEF, vt circulus ABC





ad ellipſim IDF: dico & ſectorem AGC eſſe ad ſectorem DHF, vt eſt circulus ABC ad ellipſim IDF: inuento enim vt antè ellipſeos DEF maiore axe IK, ſuper IK vt diametro deſcribatur circulus NOK: ductaque ordinatim LM quæ ſegmentum LIM auferat æquale ſegmento DEF, fiant reliqua vt prius. ſegmentũ igitur NIP eſt ad ſegmentum LIP, vt [a] circulus NOK ad ellipſim IDF. Itaq; ſegmentum NIO ad ſegmentum LIM, vt circulus NOK ad ellipſim: & permutando, circulus NOK ad ſegmentum NIO, vt ellipſis ad ſegmentum LIM, hoc eſt ex hypotheſi vt circulus ACV ad ſegmentum ABC. Cùm ergo ſit vt circulus NOK ad ſegmentum NIO, ita circulus ACV ad ſegmentum ABC, erit etiam [b] vt circulus NOK ad ſectorem NHO, ita circulus ACV ad ſectorẽ AGC. Atqui vt circulus NOK ad ſectorem NHO, ſic ellipſis ad ſectorem LHM, hoc eſt quoniam ſegmenta LIM, DEF ſunt æqualia, ad ſectorem DHF. ergo vt circulus ACV ad ſectorem ABC, ita ellipſis ad ſectorem DHF. Quod erat demonſtrandum.

[a] 183. huius.

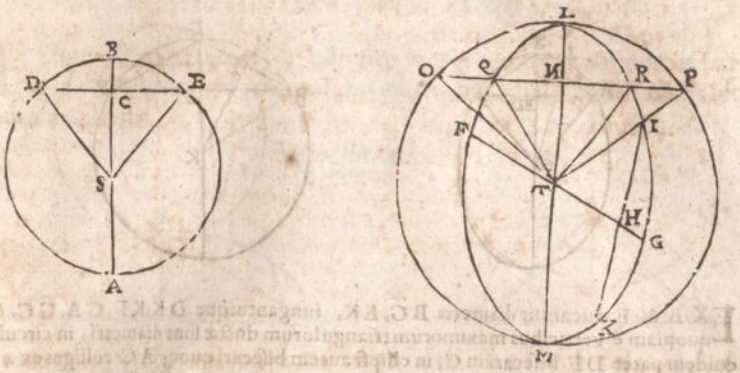
PROPOSITIO CLXXXVII.

ESto ADB circuli diameter AB diuiſa vtcunque in C, & per C normalis poſita DE, ſit autem & FG, diameter quæcunque ellipſeos diuiſa in H, vt AB eſt in C, & per H ordinatim ducta IK.

Dico ſegmentum DBE eſſe ad ſegmentum IGK vt eſt circulus ADB ad ellipſim FLG, & contra.

Demonſtratio.

INuento ellipſeos axe maiore LM, deſcribatur ſuper LM circulus LOM. diuiſaq; LM in N, vt AB eſt diuiſa in C, agatur per N normalis OP, ſecans ellipſim in Q & R: ducanturque ſemidiametri OT, QT, RT, PT. Rectangulum BCA eſt ad quadratum DC, vt rectangulum LNM ad quadratum ON, & permutando rectangulum BCA eſt ad rectangulum LNM, vt quadratum DC ad quadratum ON, ſed ratio rectanguli BCA ad rectangulum LNM, componitur ex rationibus BC ad LN, & CA ad NM. ergo rationes BC ad LN, & CA ad NM, ſimul ſumptæ æquantur rationi quadratorũ DC, ON, hoc eſt rationi ad DC, ON bis ſumptæ. Atqui rationes BC ad LN, & CA ad NM, ſunt eædem ſiue æquales, cùm ſint BA, LM ex hypotheſi proportionaliter diuiſæ; ergo earum vna BC ad LN, eadem eſt rationi DC ad ON: ſed, cùm ſit vt BC ad LN, ſic CA ad NM, erit quoque vt BC ad LN, ſic BA ad LM. Quare BA ad LM, id eſt SD ad OT, vt



vt DC est ad ON: sunt autem anguli DCS, ONT recti; igitur triangula DCS, ONT sunt similia, angulique DSC, OTN æquales: quare & anguli DSE, OTP illorum dupli sunt æquales & DSE, OTP sectores sunt similes, adeoque & segmenta DBE, OLP sunt similia. igitur vt segmentū OLP ad circulum LOM, sic segmentum DBE ad circulum DBA: sed etiam vt segmentum OLP ad circulum LOM, sic segmentum [a] QLR ad ellipsim. quare vt segmentum DBE ad circulum ADB, sic QLR segmentum est ad ellipsim FLG, hoc est ex constructione segmentum IGK ad ellipsim FLG, & permutando est segmentum DBE ad segmentum IGK, vt circulus ADB ad ellipsim FLG. Quod erat primum. [a] 182. huius.

Sit iam segmentum DBE ad segmentum IGK, vt circulus ADB ad ellipsim FLR: dico BS, GT lineas in C & H, proportionaliter esse diuisas. ponantur eadem omnia quæ priùs: Quoniam est segmentum DBE ad segmentum IGK, id est QLR vt circulus ADB ad ellipsim FLR, & permutando DBE segmentum ad circulum ADB, vt segmentum QLR ad ellipsim FLR; sit autem [b] & OLP [b] Ibid. segmentum ad circulum OLM, vt QLR segmentum ad ellipsim FLR, erit vt segmentum OLP ad circulum LOM, sic DBE segmentum ad circulum ADB. Quare & sectores DSE, OTP sunt similes & anguli DSE, OTP adeoque & illorum dimidij DSC, OTN æquales: sunt autem & anguli DCS, ONT recti; igitur triangula DCS, ONT similia: & vt DS ad OT, id est BS ad LT, sic SC ad NT. quare BS, LT in C & N proportionaliter sunt diuisæ, sed cùm per constructionem segmenta QLR, IGK sint æqualia, erit vt LT in N, sic [c] GT diuisa in H. igitur vt BC ad CS, sic GH ad HT. Quod erat demonstrandum. [c] 52. huius.

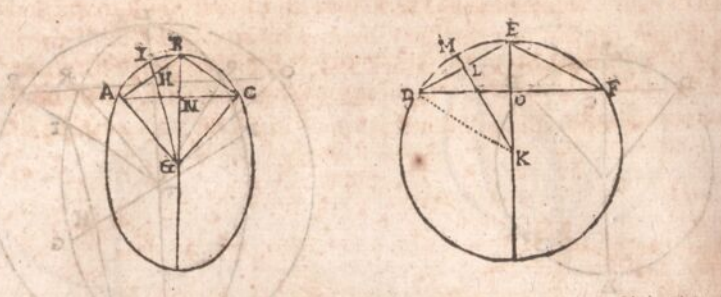
PROPOSITIO CLXXXVIII.

ESto ABC ellipseos segmentum quodcunque ABC, sumatur autem in circulo DEF segmentum DEF, quod ita se habeat ad suum circulum, vt ABC segmentum ad ellipsim suam: dein ABC, DEF segmentis triangula inscribantur maxima ABC, DEF, diuisisq; AB, DE lineis bifariam in H & L, agantur per H & L, diametri GI, KM.

Dico illas in H & L proportionaliter esse sectas.

Demon-

Demonſtratio.



EX B & E ducantur diametri BG, EK, iunganturque DK, KF, GA, GC, & quoniam è verticibus maximorum triangulorum ductæ ſunt diametri, in circulo quidem patet DF biſecari in C, in ellipſi autem biſecari quoq; AC colliges ex 42. huius. Quare tã in ellipſi quàm in circulo ſectores AGC, DKF biſecantur. ergo ſector AGB eſt ad ſectorem DKE, vt ſector AGC ad ſectorem DKF. Iam verò cùm permutando hypotheſim, ſegmentum ABC ſit ad ſegmentum DEF, vt ellipſis ad circulum, etiam [a] ſector AGC erit ad ſectorem DKF, hoc eſt (vt iam oſtendi) ſector AGB, ad ſectorem DKE, vt ellipſis ad circulum. Et quoniam eſt ſector AGB ad ſectorem DKE, vt ellipſis ad circulum, erit quoque ſegmentum AIB ad ſegmentum AME, vt ellipſis ad circulum. Ergo diametri IG, MK proportionaliter in H & L ſunt diuiſæ. Quod erat demonſtrandum.

a 187. huius.

PROPOSITIO CLXXXIX.

EAdem manente figurâ: ſi fuerit ſegmentum ABC ad ſegmentum DEF, vt ABC ellipſis ad circulum DEF.

Dico eſſe & triangulum maximum ABC ad triangulum maximum DEF vt ABC ellipſis eſt ad circulum DEF.

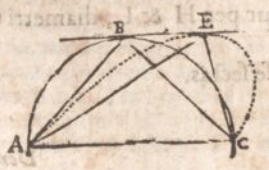
Demonſtratio.

VT ABC ellipſis eſt ad circulum DEF, ſic oſtendimus in priori ſegmenta AIB, BC eſſe ad ſegmenta DME, EF. Quare cùm etiam ex hypotheſi ſit, vt ellipſis ad circulum ſic totum ſegmentum ABC ad totum ſegmentum DEF, igitur & reliquum triangulum ABN eſt ad reliquum triangulum DEO vt ABC, ellipſis ad circulum DEO. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXC.

ESto ABC ſemicirculo inſcriptum triangulum maximum ABC, ſit autem & AEC ſemiellipſi quę communem AC habeat diametrum, triangulum inſcriptum maximum AEC: ſi fuerint ABC, AEC triangula æqualia:

Dico & ſemicirculum ABC æqualem ſemiellipſi AEC.



Demonſtratio.

IVngantur puncta B & E. Quoniam triangula ABC, AEC ſuper eadem baſi deſcripta per hypotheſim ſunt æqualia, erit iuncta BE parallela rectæ AC; adeoque cùm tam ABC, quàm AEC

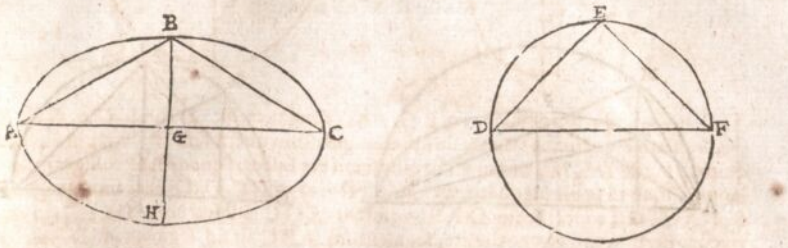
ſit

sit triangulum maximum, continget recta BE & circulum & ellipsim: igitur a semicirculus ABC æquatur semiellipsi AEC. Quod erat demonstrandum. a 159. huius.

PROPOSITIO CXCI.

Ellipsis est ad circulum vel ellipsim vt triangulum maximum inscriptum semiellipsi ad triangulum maximum inscriptum semicirculo aut semiellipsi.

Demonstratio.



CVm enim sit vt semiellipsis ad semicirculum aut semiellipsim, ita tota ellipsis ad totum circulum aut ellipsim; erit b vt triangulum maximum AEC semiellipsi inscriptum ad triangulum maximum DEF semicirculo aut semiellipsi inscriptum, ita ellipsis ad circulum ad ellipsim. Quod erat demonstrandum. b 190. huius.

PROPOSITIO CXCII.

DAto circulo vel ellipsi DEF ellipsim æqualem exhibere. Et datæ ellipsi circulum æqualem.

Constructio & demonstratio.

SEmicirculo vel semiellipsi DEF inscribatur triangulum maximum DEF, cui fiat æquale aliud quodcumque triangulum ABC, diuisaque AC bifariam in G, ducatur BG, & protrahatur BG in H, vt BG, GH sint æquales, & si AC, BH sese ad rectos intersecent, describatur ellipsis ABCH cuius axes sint ACBH, si autem non ad rectos sese intersecent, datis ACBH coniugatis diametris axes inueniantur c circa quos describatur ellipsis ABCH. Dico ellipsin ABCH circulo vel ellipsi DEF æquari: est enim triangulum ABC maximum eorum quæ semiellipsi inscribi possunt d quia ACBH ponuntur diametri coniugatæ. quare cùm triangulum maximum semiellipsi inscriptum æquale sit triangulo maximo circulo vel ellipsi inscripto, erit e ellipsis ABC circulo vel ellipsi DEF æqualis, ergo quod petebatur. c 60. huius. d 42. huius. e 190. huius.

Ex his secundæ partis constructio & demonstratio est manifesta.

Corollarium.

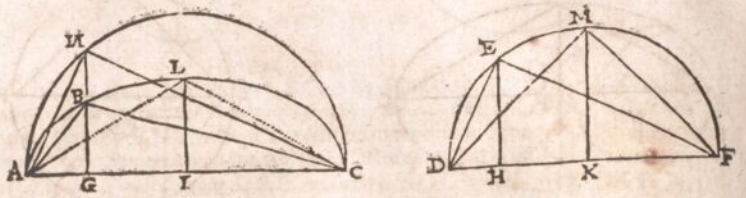
HInc patet infinitas dari ellipses circulo vel ellipsi ABC æquales, quia triangulo ABC dantur infinita triangula æqualia.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt semiellipsis ABC cuius axis sit AC, semicirculus autem DEF, semiellipsi ABC æqualis ponatur; inscribantur deinde semiellipsi & semicirculo triangula ABC, DEF inter se æqualia: & ex B & E, normales ad basim demittantur BG, EH.

Dico lineas AC, ADF in G & H, similiter diuisas esse.

Demonstratio.



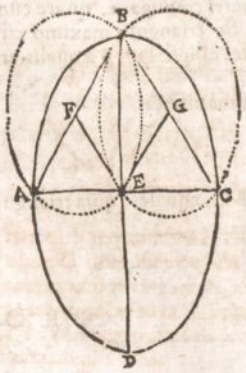
EX centris I & K, ad diametros AC, DF normales erigantur IL, KM iungantúrq; AL, LC, & DM, MF: quoniam semiellipsis ABC semicirculo DMF, aqualis est, erunt & maxima triangula illis inscripta nempe ALC, DMF inter se æqualia; [a] erit igitur vt triangulum ALC, ad triangulum ABC id est vt LI ad BG, ita triangulum DMF ad triangulum DEF, id est ita linea MK ad EH, adeoque vt quadratum LI ad BG quadratum, ita erit quadratum MK ad ipsum EH: sed vt quadratum LI ad quadratum BG, ita est rectangulum AIC ad rectangulum AGC: & vt quadratum MK ad EH, quadratum, ita est DKF rectangulum ad rectangulum DHF, ergo vt AI quadratum ad rectangulum AGC, ita est quadratum DK ad rectangulum DHF: & permutando vt quadratum AI ad ipsum DK quadratum, siue vt quadratum AC ad DF ita est rectangulum AGC ad rectangulum DHF, constat igitur ex Sereni l. 1. prop. 12. lineas AC, DF in G & H, proportionaliter esse diuisas. Quod erat demonstrandum.

[a] 190. huius.

PROPOSITIO CXCIV.

SEcent ABC ellipsim diametri quæuis coniugatę AC, BD iunctisq; punctis AB, CB, diuidantur AB, CB lineæ bifariam in F & G: ducanturq; ex E centro lineæ EF, EG: dein tam per puncta AEB, quàm CEB ellipses describantur quarũ coniugatæ sint diametri AB, EF, CB, EG:

Dico ABC ellipsim æqualem esse duabus ellipsibus AEB, CEB.



Demonstratio.

QVoniam tam ABEF, CBEG, ACBE diametri sunt coniugatæ, erunt [b] ABC, AEB, CEB triangula maxima quę suis semiellipsibus inscribi possunt: est autem ABC triangulum duplum trianguli CEB, igitur & ellipsis ABC [c] dupla est ellipsis CEB. similiter ostendam ellipsim ABC duplam esse ellipsis BEA. æquantur

[b] Patet ex 42. huius.

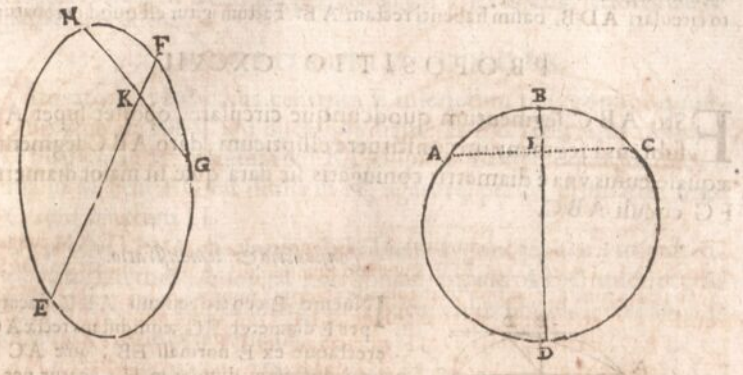
[c] Corol. 193. huius.

quantur; igitur ellipſes BEA, CEB ac proinde ellipſis ABC ſingularum dupla æquatur vtrique ſimul ſumptæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXCV.

Circulum ABC ſecet recta quęuis AC auferens ſegmentum ABC: oportet in data ellipſi EFG, ad datam diametrum EF ordinatim ducere HG, quæ ſegmentum auferat HFG, quod ad ellipſim eam habeat rationem quam ABC ſegmentum ad circulum ABC.

Conſtructio & demonſtratio.



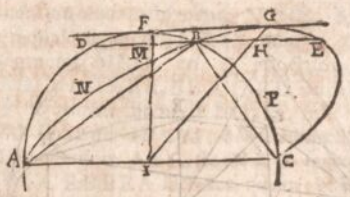
Diuiſâ in circulo ABC recta AC bifariam in E, agatur per I normaliter diameter BD: dein in ellipſi EFG, diuidatur EF diameter in K, vt diuiſa eſt BD in I, agaturque per K ordinatim linea HG ad FE, diametrum, patet a HFG ſegmentum eſſe ad ellipſim EFG, vt ABC ſegmentum eſt ad circulum ABC. dato igitur in circulo ſegmento, &c. Quod erat faciendum. a 189. huius.

PROPOSITIO CXCVI.

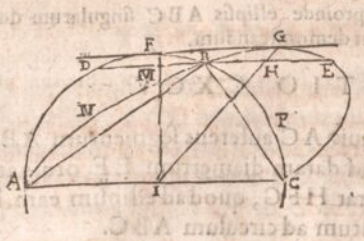
Esto ABC ſemicirculo inſcriptum triangulum quodcunque ABC, oporteat ſuper BC linea ſegmentum deſcribere ellipticum, æquale ſegmento circulari ADB.

Conſtructio & demonſtratio.

Ducatur recta FG parallela diametro AC contingens circulum in F, dein per B recta agatur DE parallela diametro AC, fiatque BE æqualis ipſi DB, qua diuiſâ in H bifariam ducatur per H ex I, centro circuli recta IG occurrens FG, lineæ in G: tum per A, G, C puncta b ellipſis deſcribatur: cuius diametri



conjugatæ ſint AC, IG, & quoniam FG eſt ipſi AC per extremitatem diametri IG parallela, continget ellipſim in G. quare ellipſis c circulo æqualis eſt. Deinde quoniam FG, MH ſunt parallelæ, facile oſtendemus ex elementis rectangulum ſub GH, & reliqua parte diametri, eſſe ad rectangulum ſub GI, & reliqua parte diametri vt rectangulum ſub FM, & reliqua parte diametri ad rectangulum ſub FI & reliqua parte diametri. Atqui rectangulum ſub FM, & reliqua parte diametri eſt b 45. huius. c Corol. 180. huius.



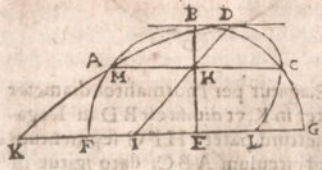
ad rectangulum sub FI & reliquâ parte diametri vt quadratum DM ad quadratum AI, hoc est, vt quadratũ BH ad quadratum AI. ergo etiam rectangulum sub GH & reliqua parte diametri est ad rectangulum sub GI, & reliqua parte diametri, vt quadratum BH ad quadratum AI. ellipsis ergo transit per punctum B. Iam quia ellipsis circulo æqualis est vt ostendi supra, ablato communi segmento curuilineo ANBPC, æqualia remanent segmenta BPCE, ANBD, quibus si addas segmenta BPC, ANB, quæ [a] æqualia sunt, segmentum ellepticum BCE basim habens rectam BC æquabitur segmento circulari ADB, basim habenti rectam AB. Factum igitur est quod petebatur.

a 181. huius.

PROPOSITIO CXCVII.

ESto ABC segmentum quodcunque circulare, oportet super AC subtensâ segmentum constituere ellipticum, dato ABC segmento æquale, cuius vna è diametris coniugatis sit data quæ sit maior diametro FG circuli ABC.

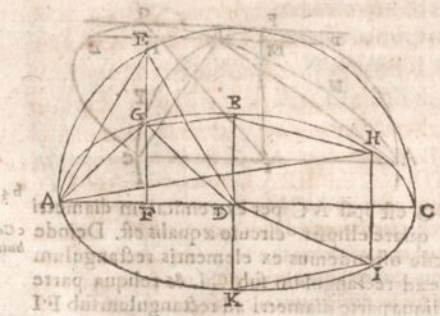
Constructio & demonstratio.



INuento E centro circuli ABC ducatur per E diameter FG æquidistans rectæ AC, erectaque ex E normali EB, quæ AC lineam bifariam diuidet in H, agatur per B tangens BD, deinde per H recta ducatur ID, æqualis datæ occurrens tangenti in D & FG diametro in I; fiatque IK æqualis rectæ FE, & IL æqualis EG, tum per KDL puncta ellipsis describatur, occurrens AC lineæ vtcunque in M. dico factum esse quod petitur. Quoniam enim LK, DI diametri sint coniugatæ & BD parallela ipsi LK, patet ED contingere ellipsim KDL, adeoque [b] rectam MH æqualem ipsi AH: ellipsis igitur transibit per punctum A. eodem modo ostenditur transire per C: igitur [c] segmentum ellipticum ADC æquale est segmento circulari ABC; super data igitur linea AC, &c. Quod erat faciendum.

b *Colligitur ex* 170. *huius.*
c *Colligitur ex* 180. *huius.*

PROPOSITIO CXCVIII.



ELlipsim à dato in peripheria puncto, in datos numero sectores æquales diuidere.

Constructio & demonstratio.

DAta sit ellipsis ABC axis maior AC, datum in peripheria punctũ B, oporteat ab hoc ellipsim secare in sectores tot æquales quot volueris, v.g. in sex.

Diametro AC describe semicirculũ, cui inscribe AE, latus poligoni tot ha-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [405] - 348
PUBLIC DOMAIN

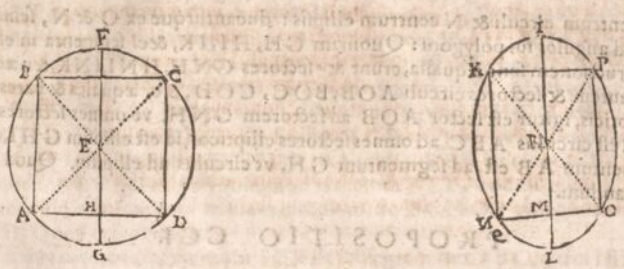
habentis latera quot æquales petebantur sectores. quoniam autē petebantur sectores æquales sex, erit AE latus hexagoni. ponatur ergo EFG normalis ad AC iungantúrque ED, GD, BD, GB: & GB æquidistet AH: dico factū esse quod petitur. vt circulus ad ellipsin ita est segmentū EFA ad segmentū GFA id est vt FG ad FE: estq; itē vt FE ad FG, ita triangulū EDF ad triangulū GDF: ergo vt circulus ad ellipsin, ita est sector EDA, ad sectorem GDA: sed sector EDA est pars tertia semicirculi, cùm linea AE sit latus hexagoni; ergo & sector GDA tertia pars semiellipseos erit. Cùm autem GB ipsi AH æquidistet, erunt segmenta AG, BH: adeoq; & sectores GDA, BDH æquales inter se: hoc est sexta pars ellipseos totius. fiant a 57. hui. modò segmento BH æqualia segmenta HI, IK iunganturque DH, DI, DK int. sectores igitur DBH, DHI, DIK æquantur adeoque singuli sunt sexta pars ellipseos, & simul sumpti semiellipsim constituunt BCK, reliquam igitur semiellipsim BAK seca vt diuisa est BCK, eritque tota ellipsis in sex æquales sectores diuisa. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO CXCIX.

ESto circulo ABC cuius centrum E inscriptum polygonum quodluis regulare ABCD: ductaque diameter FG secet latus quoduis AD bifariam in H: sit autem & IKL ellipseos diameter quæcunque IL diuisa in M sicut FG est diuisa in H, agaturq; per M ordinatim linea NO ad diametrum IL.

Dico rectam NO, esse vnum è lateribus polygoni regularis inscribendi ellipsi tot laterum, quot est polygonum circulo ABC inscriptum. Polygonum autem ellipticum regulare voco, cuius singula latera abscindunt elliptica segmenta æqualia.

Demonstratio.



DVcatur ex O linea OP auferens segmentum æquale segmento NLO, & ex P recta PK quę segmentum auferat æquale segmento NLO, dein ex K linea KQ auferens segmentum æquale segmento NLO, erit Q punctum idem cum puncto N. Iunctis enim in circulo ABC punctis EA, EB, EC, ED ducantur in ellipsi semidiametri, RK, RN, RO, RP. Quoniam diametri FG, IL sunt in H & M, proportionaliter diuisæ, & AD, NO lineæ per H & M, actę ordinatim ad diametros FG; IL. erit b vt sector AED ad circulum ABC, sic NRO sector ad ellipsim IKL: sunt autem tam AED, DEC, CEB, BEA sectores, quàm c NRO, ORP, PRK, KRQ sectores inter se æquales, (quia NO, OP, PK, KQ segmenta sunt æqualia) igitur vt sectores quatuor circulares ad suum circulum sic elliptici sectores quatuor ad suam ellipsim: sed toti circulo æquantur sectores circulares, igitur & ellipsi sunt æquales sectores elliptici. quare punctum Q idem est cum puncto N; & KNOP polygonum est regulare tot laterum quot est polygonum circulo inscriptum. Quod erat demonstrandum.

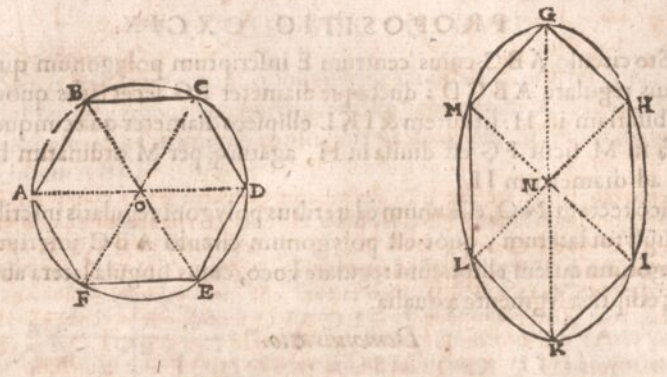
b 180. hui. c 46. hui. int.

PROPOSITIO CC.

ESto circulo A B C inſcriptum polygonum quodcunque regulare A, B, C, D, E, F: ſit autem & ellipſi G H I inſcriptum polygonum regulare G, H, I, K, L, M, totidem laterum, quot eſt polygonum circulo inſcriptum.

Dico ſegmentum circulare ab aliquo laterum polygoni ablatum, eſſe ad ſegmentum ellipticum, ab aliquo laterum polygoni elliptici ablatum, vt eſt circulus A B C ad ellipſim G H I.

Demonſtratio.



SIt O centrum circuli & N centrum ellipſis: ducanturque ex O & N, ſemidiametri ad angulos ſui polygoni: Quoniam G H, H I, I K, &c. ſegmenta in ellipſi per conſtructionem ſunt æqualia, erunt & [a] ſectores G N H, H N I, I N K, &c. æquales: ſunt autem & ſectores circuli A O B, B O C, C O D, &c. æquales & pares numero ellipticis, igitur eſt ſector A O B ad ſectorem G N H, vt omnes ſectores circulares, id eſt circulus A B C ad omnes ſectores ellipticos, id eſt ellipſim G H I, quare & ſegmentum A B eſt ad ſegmentum G H, vt circulus ad ellipſim. Quod erat demonſtrandum.

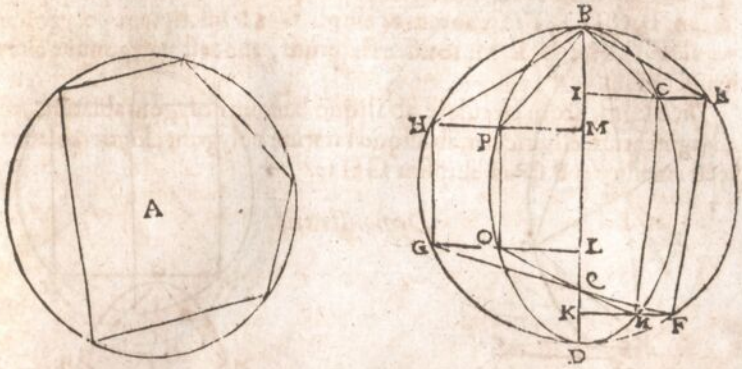
[a] 60. huius.

PROPOSITIO CCI.

CIrculo A inſcriptum ſit quodcunque polygonum, oportet datæ ellipſi B C D polygonum pari numero laterum proportionale inſcribere, hoc eſt quod & eandem ad ellipſim proportionem habeat quam circulare ad circulum; & cuius ſingula latera, ſegmenta auferant quæ ad ellipſim ſuam talem habeant rationem quam habent ſegmenta circularia, ſingulis lateribus polygoni circularis ablata ad ſuum circulum.

Demon-

Demonſtratio & conſtructio.



INuento ellipſis maiore axe BD, deſcribatur diametro BD circulus BEF, cui polygonum inſcribatur BEFGH, ſimile illi, quod A circulo inſcriptum eſt polygono; ſeceтque FG latus, axem BD in Q; dein ductis ex E. F, G, H ad axem BD normalibus EI, FK, GL, HM, quæ ellipſim ſecent in C, N, O, P. ducãtur rectæ BC, CN, NQ, OQ, OP, PB. dico factum eſſe quod petitur. Quoniam GL, FK ſunt parallelæ, erunt triangula GLQ, KFQ ſimilia, adeoque vt GL ad KF, hoc eſt vt OL ad KN, ſic LQ ad QK. ſunt verò & anguli OLQ, FKQ, recti; ergo triangula OLQ, KFQ ſunt ſimilia. ergo OQ, QF ſunt in directum; figura igitur BC, NO, PB eſt polygonum ellipſi inſcriptum. vt IE linea eſt ad lineam IC, ſic IBE triangulũ eſt ad triangulum IBC ſed [a] eſt vt IE ad IC, ſic IEFQ trapezium ad trapezium ICNQ; igitur tota figura BEFQ eſt ad figurã BCNQ, vt IE linea ad lineam IC, id eſt [b] ſegmentum IBE ad ſegmentũ IBC, id eſt vt circulus BEF ad ellipſim BCD. eodem modo oſtenditur figura BHGQ eſſe ad figuram BPOQ, vt circulus BEC ad ellipſim BCD. Quare erit totum polygonum BEFGH ad polygonum BCNOP, vt circulus BEF ad ellipſim BCD, & permutando, vt BEFGH polygonum ad circulum BEF, hoc eſt ex conſt. vt polygonum circulo A inſcriptum ad ſuum circulum, ſic BCNOP polygonum ad ellipſim BCD: Quod erat primum.

[a] Ex elem. mentis.

[b] 182. & 183. huius.

Rurſum cùm tam ſegmentum IBE ſit ad ſegmentum IBC, quàm IBE triangulum ad triangulum IBC, vt eſt circulus BED ad ellipſim BCD, erit & ſegmentum BE ad ſegmentum BC vt BED circulus ad ellipſim BCD: & permutando vt ſegmentum BE ad circulum BED, ſic BC ſegmentum eſt ad ellipſim BCD: idem ſimiliter de reliquis ſegmentis oſtenditur: igitur datæ ellipſi BCD polygonum inſcripſimus, &c. Quod erat faciendum.

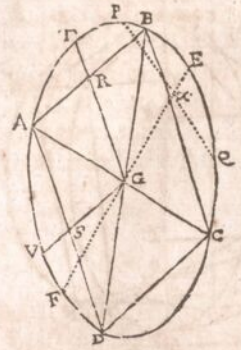
PROPOSITIO CCII.

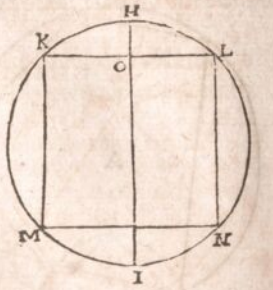
ESto ABC ellipſi inſcriptum quadrilaterum regulare ABCD, ductæq; per G centrum vni è diametris coniugatis æqualibus EF; æqualis ſumatur recta HI: qua diametro circulus deſcribatur HIK, cui inſcribatur quadratum KLMN.

Dico quadrata KL, LN, NM, MK ſimul ſumpta æquari quadratis AB, BC, CD, DA ſimul ſumptis.

De-

Demonſtratio.





DIuiſa KL bifariam in O ducatur per O diameter HI: dein applicetur ad FE diametrum ordinatim linea PQ, ſegmentum auferens æquale ſegmento AB: diuiſiſque AB, AD bifariam in R & S, ducantur ſemidiametri GRT, GSV iunganturque puncta AG, BG, CG, DG. Quoniam ſegmenta AB, BC, CD, DA per conſtructionem ſunt æqualia, erunt & ſectores AGB, BGC, CGD, AGD æquales, adeoque AG, BG [a] diametri coniugatæ, præterea cùm ex conſt. GT, GV biſecent è centro rectas AB, AD [b] ſectores AGT, AGV, dimidia pars ſunt ſectorum AGB, AGD, hoc eſt ſemiellipſis; ſector igitur TGV quarta pars eſt ellipſeos ergo [c] GT, GV ſunt coniugatæ & AB, AD lineę ordinatim ad illas poſitæ: igitur cùm per conſtructionē ſegmentum PEQ æquale ſit ſegmento ATB, ſiue AFD: erit PQ quadratum bis ſumptum, æquale quadratis AB, AD ſimul ſumptis, adeoque PQ quadratum quartò ſumptum æquale quadratis AB, BC, CD, DA. Rurſum cùm ſegmentum PQ ſit ad ſegmentum KL, vt [d] ABC ellipſis ad circulum KLM, EF, HI diametri ſunt [e] in X & O, proportionaliter diuiſæ, adeoque [f] PQ linea æqualis lineæ KL. igitur & quadratum KL quater ſumptum æquale eſt quadratis AB, BC, CD, AD. Quod erat demonſtrandum.

a 46. huius.
b 50. huius.
c 46. huius.
d 187. huius.
e 188. huius.
f 178. huius.

PROPOSITIO CCIII.

ESto ABC ellipſi inſcriptum quodcunque polygonum regulare ABCD, EFGH: ductaque IK vna ex diametris coniugatis æqualibus; deſcribatur circulus LMN habens diametrum æqualem diametro IK: dein circulo inſcribatur polygonum regulare tot laterum quot eſt polygonum ellipſi inſcriptum.

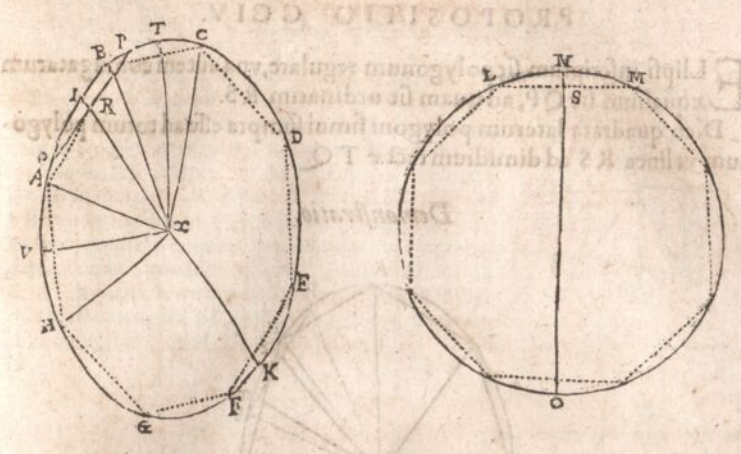
Dico omnia quadrata laterum polygoni ellipſi inſcripti, ſimul ſumpta æquari quadratis laterum polygoni circularis ſimul ſumptis.

Demonſtratio.

STatuamus E, G, ellipſi & circulo inſcripta eſſe octogona regularia, eadem quippe demõſtratio polygonis omnibus conueniet. in circulo LMN ducatur diameter NO ſecans LM, lineam bifariam in S; diametrum verò IK ſecet ordinatim linea PQ ſegmentum auferens æquale ſegmento AB, tum ducantur ſemidiametri HX, AX, BX, CX, item TX, VX quę lineas AH, CB diuidant bifariam. Quoniam ſegmenta AB, BC, CD, &c. ſunt ex conſtructione æqualia, erunt [g] & ſecto-

g 60. huius.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [409] - 352
PUBLIC DOMAIN



sectores AXB, BXC, &c. æquales : sunt autem illi simul sumpti æquales toti ellipsi, igitur sectores duo AXB, BXC hoc est quarta pars sectorum, erunt quadrans ellipsis ABC. Iam quia XT, XV ex centro ductæ bisecant BC, AH, a erunt sectores CXT, XAV dimidij sectorum æqualium BXC, AXH, ac proinde inter se æquales. addito igitur communi sectore AXT, totus sector VXT, sectori toti AXC æquatur, quare cùm AXC sit quadrans ellipseos, erit & VXT. Ergo b VX, TX diametri sunt coniugatæ, ad quas AHCB sunt ordinatim positę auferentes segmenta æqualia; igitur c quadratum PQ bis sumptum, est æquale quadratis AH, CB simul sumptis : eodem modo ostenditur idem quadratum PQ bis sumptum æquari quadratis AB, GH simul sumptis: adeoque PQ quadratum quarto sumptum æquari quadratis CB, BA, AH, HG, id est quadratis GF, FE, ED, DC. quare & quadratum PQ sumptum octies quot laterum est polygonum; æquale est quadratis laterum totius polygoni ellipsi inscripti. Iterum cùm d sit vt ellipsis ABC ad circulum LMN, ita segmentum AB id est PQ ad segmentum LM, erunt IK, NO diametri e in R & S, proportionaliter diuisæ, & quadratum PQ f æquale quadrato LM. ergo quadratum PQ octies sumptum æquatur quadratis laterum polygoni circulatis. sed quadratum PQ octies sumptum æquatur etiam, vt supra ostendi, quadratis laterum polygoni ellipticj; ergo quadrata laterum polygoni elliptici simul sumpta æquantur quadratis laterum polygoni circularis simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

a 30. huius.
b 46. huius.
c 106. huius.
d 187. huius.
e 188. huius.
f 177. huius.

Corollarium.

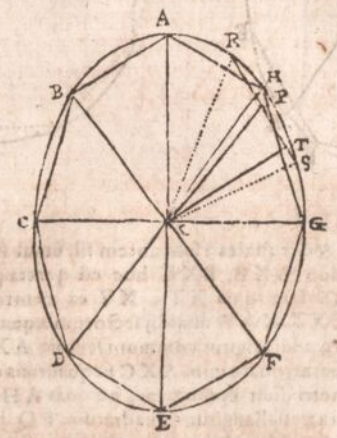
HInc patet: si eidem ellipsi duo inscribantur polygona parium numero laterum, quadrata laterum vnius polygoni simul sumpta, æqualia esse quadratis laterum alterius polygoni simul sumptis.

PROPOSITIO CCIV.

ELlipsi inscriptum sit polygonum regulare, vna autem coniugatarum æqualium sit QP, ad quam sit ordinatim RS.

Dico quadrata laterum polygoni simul sumpta esse ad totum polygonum vt linea RS ad dimidium rectæ TQ.

Demonstratio.



DVcantur ex A, B, C, D, E, F, G, H, R, S punctis semidiametri. Quoniam RS segmentum per constructionem est æquale segmento AB, erit[a] & triangulum RQS æquale triangulo AQB: similiter ostendam triangula singula BQC, CQD, &c. æquari triangulo RQS: adeoque RQS triangulum octies sumptum æquale toti polygono: est autem[b] RS quadratum octies sumptum æquale quadratis omnium laterum polygoni, igitur vt RS quadratum octies sumptum est ad triangulum RQS octies sumptum hoc est vt RS quadratum semel sumptum ad R, Q, S, triangulum semel sumptum, ita omnia quadrata laterum polygoni ad totum polygonum. sed cum RS quadratum sit ad rectangulum super RS, TQ, vt RS linea ad lineam TQ, erit RS quadratum ad triangulum RQS, dimidium rectanguli RS, TQ, vt RS linea ad dimidium rectæ TQ, igitur, & omnia quadrata laterum polygoni sunt ad totum polygonum vt RS linea ad dimidium lineæ TQ. Quod erat demonstrandum.

a 60. huius. & Coroll. eius dem.

b 106. huius.

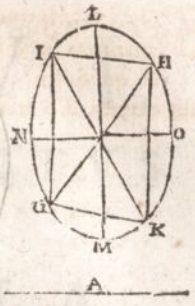
PROPOSITIO CCV.

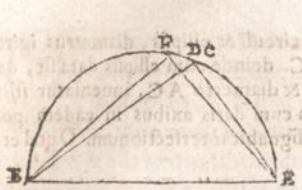
DAtis axibus & diametro ellipseos inuenire illius coniugatam & positione cum datis axibus in eadem constituere ellipsi.

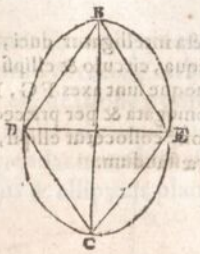
Constru-

Constructio & demonstratio.

SIt A diameter data, & axes dati BC, DE, oportet inuenire diametrum coniugatam ipsi A, quam cum datis axibus oportet in eadem collocare ellipsi. axes ED, BC ad angulum ponantur rectum ECB, iunctáque BE, super ea semicirculus describatur ECB, in quo datæ, A æqualis aptetur EF, ducaturq; FB: quoniam igitur EC, CB axium quadrata æqualia sunt quadratis cuiusuis coniugationis in ellipsi, eademque axium quadrata æquentur quadratis EF, FB, & EF æqualis A vna sit ex diametris, recta FB diameter est coniugata FE: exhibuimus igitur diametro A, coniugatam, quod primò faciendum fuit.







Iungantur deinde axium extrema DBEC quæ parallelogrammum exhibeant DBEC: cui æquale fiat parallelogrammum [a] IH KG, quod IK, GH diametros habeat rectis EF, FB æquales. data igitur diametrorum IK HG coniugatione, exhibeantur positione axes [b] LM, NO adeoque & ellipsis LMN. erit illa æqualis ellipsi BEC cuius axes dati sunt BC, ED: cùm enim per extrema coniugationis positione datæ, vnica tantum [c] ellipsis transeat, & IK, GH coniugatio positione sit in ellipsi LMN, eademq; pertineat ad ellipsin BEC, ellipses LMN, BEC adeoque & axes æquales sunt: ellipsis igitur LMN, illa est in qua coniugatas EF, FB, id est IK, GH positione cum datis axibus BC, DE, id est LM, NO collocare oportebat.

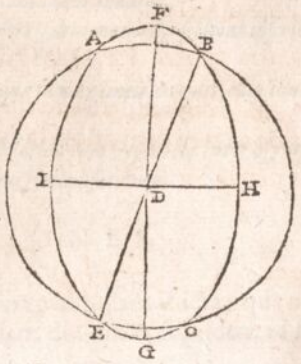
[a] *Per elementa.*
[b] *Huius.*
[c] *Ibid.*

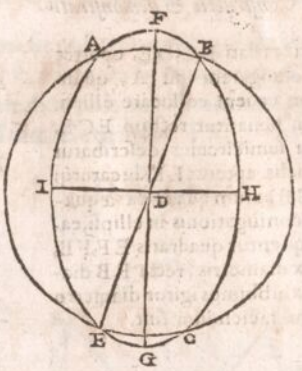
PROPOSITIO CCVI.

DAta ellipsi & circulo illam intersecante puncta intersectionis geometricè exhibere. oportet autem circulum & ellipsim idem habere centrum.

Constructio & demonstratio.

ELlipsim ABC cuius centrum D, intersecet circulus AB, CE, oportet intersectionis puncta exhibere. quoniam igitur circulus & ellipsis commune habent centrum D, si ex illo ad intersectionis aliquod punctum





recta intelligatur duci, erit illa semidiameter circuli & ellipsis, diametrus igitur aliqua, circulo & ellipsi communis, sit illa AC. deinde cùm ellipsis data sit, dati quoque sunt axes FG, HI. datis igitur axibus & diametro AC, inueniatur illius coniugata & per præcedentem coniugatio illa cum datis axibus in eadem positione collocetur ellipsi, illarum vna, puncta assignabit intersectionum. Quod erat præstandum.

Finis libri quarti.



QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER QVINTVS

DE

PARABOLA.

SEctionem hoc libro explanãdam aggredimur ab antiquis coni rectanguli sectionem dictam, ab Apollonio & recentioribus parabolam nominatam, atque in eiusdem explicatione nonnihil morosiores erimus; quoniam planè sectio illa ad circuli quaduraturam & alias æquationes cum circularibus perficiendas necessaria est, ob admirandas eius proprietates quæ cum circularibus & ellipticis planè connexæ sunt.

ARGVMENTVM.

Diuiditur liber hic in partes omnino octo.

Prima sectionem è cono educit, passionesque illius essentiales & reliquis fundamentales exhibet.

Secunda linearum in parabola proportionem tam continuam quàm discretam considerat.

Tertia sectionis focum, & mutuas parabolarum intersectiones Geometricè designat.

Quarta parabolarum, sese mutuo, vel circulum intersecantium contemplatur affectiones.

Quinta parabolam tam conuexam quàm concauam quadrat.

Sexta, parabolas & segmenta inter se confert, dein maximas sectioni inscribit figuras.

Septima varias exhibet parabolæ geneses quæ tum ex lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

Octaua miram exhibet parabolarum parallelarum cum hyperbola inter asymptotos posita, tam in ortu, quàm reliquis proprietatibus symbolisationem.

DEFINITIONES.

I.

DIameter parabolæ est recta linea intra parabolam ducta, quę omnes lineas cuidam æquidistantes bifariam diuidit, & siquidem ad rectos illas secet angulos, axis dicetur.

In omni verò parabola diametros axi æquidistare, & sectioni in vno tantum puncto occurrere, suo loco demonstrabitur.

II.

Verticem diametri voco punctum in quo diameter sectionis perimetro occurrit: punctum autem quod axi & sectionis perimetro commune est, vertex dicitur parabolæ.

III.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur vnaquæque linearum æquidistantium, ac bifariam diuisarum.

IV.

Latus rectum voco lineam iuxta quam possunt ordinatim ad diametrum applicatæ: siue latus rectum mensura est iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum positarum.



Porro illud præ reliquis sectionibus peculiare in parabola sibi vindicat latus rectum, quod rectangulum latere recto & parte diametri ab eiusdem vertice, & puncto quo ab ordinatim posita diuiditur, intercepta contentum, æquale semper constituat quadrato lineæ quę ordinatim poni dicitur.

Sit exempli causa in A B C parabola diameter A D, illiusque latus rectum A F, ordinatim verò positæ sint B D, C E: erit igitur ex mente Apollonij, quod & nos quoque demonstrabimus, quadratum B D æquale rectangulo D A F; & E A F rectangulo æquale quadratum C E: & sic de ceteris ordinatim positis idem ostendetur.

Illud quoque hîc obseruandum est, quod & in ellipsi ostendi, diuersa diametris singulis assignari latera recta, cùm linearum quæ ad illas ordinatim poni dicuntur, diuersæ quoque existant potentiæ.

Deinde necessarium non esse latera recta ad extremitates diametrorum suarum, normaliter poni, sed ijsdem eo posse applicari angulo quo diametri ab ordinatim positis intersecantur.

V.

Focum parabolæ appello, punctum in axe positum, à vertice interuallo dissitum, quod æquale est quartæ parti lateris recti.

VI.

Parabolas parallelas voco quę ad eundem axem constitutæ diuersos quidem habent apices, sed latera recta æqualia, & concauas perimetros versus eandem partem.

VII.

Parabolæ æquales sunt, quarum latera recta axibus inseruientia sunt æqualia.

PARA-

PARABOLÆ
PARS PRIMA

Parabolam è cono educit, paſſioneſq́ illius eſſentiales ac fundamentales exponit: & primò quidem diametros & ordinatim ad illas poſitas, præcipuaſq́ illarum proprietates exhibet: ſecundò latus rectum illiuſq́ naturam, dein ſecantium ac contingentium primarias deſignat affectiones.

PROPOSITIO PRIMA.

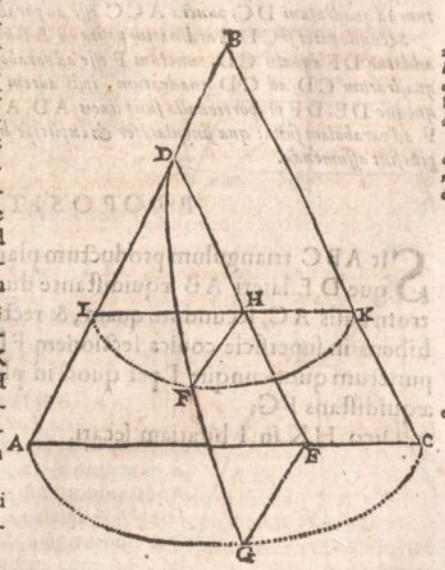
ESto conus ABC ſectus triangulo per axem ABC, ductaq́ue ED parallela lateri BC, fiat per ED ſectio DFG, ſecundùm rectam EG normalem ad lineam AC; ponatur autem per H punctum quoduis in ED linea aſſumptum, recta IK æquidiſtans AC diametro baſis coni: & per IK planum ducatur IFK æquidiſtans plano baſeos AGC occurrens plano DFG ſecundùm communem interſectionem FH.

Dico HF quadratum eſſe ad quadratum EG, vt HD linea eſt ad lineam ED.

Demonſtratio.

QVoniam planum IFK æquidiſtat plano baſeos AGC; circulus [a] erit IFK, & FH, EG communes interſectiones [b] parallelæ. quia verò AC, IK æquidiſtant, & EG normalis eſt ad AC, recta quoque HF normalis [c] eſt ad IK: ac proinde FH quadratum rectangulo IHK [d] æquale: ſed & EG quadratum, rectangulo AEC æquale eſt; quadratum igitur EG eſt ad quadratum FH, vt AEC rectangulum ad rectangulum IHK: quia verò EH æquidiſtat KC adeoq́ue HK, CE lineæ in parallelogrammo æquales ſunt, rectangulum IHK eſt ad rectangulum AEC, vt IH ad AE [e] id eſt BH ad BE, quadratum igitur FH ad EG, quadratum eſt vt recta BH ad rectam BE. Quod erat demonſtrandum.

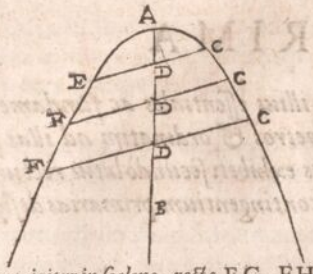
Vocetur autem ſectio huiuſmodi parabola cuius diameter DE, & ordinatim ad illam poſitæ FH, GE.



a 16. Prop. ad ſect. coni.
b 16. vndecimi.
c Ex elementis.
d 35 tertij.
e 1. ſexti.

Scho-

Scholion.



DEmonſtratio hæc vniverſalis eſt & omni cono convenit; eâtamen differentia, quod in ſcaleno dum ABC *triangulum non eſt maximum eorum quæ per axem fiunt rectæ* EG, FH *ordinatim ad diametrum* ED *poſitæ, ſecent illam ad angulos obliquos, in recto autem ad rectos: cùm enim planum* ABC *in ſcaleno per axem ductũ, ad baſim ſit obliquum; ſit autem &* ED *linea in plano* ABC, *illa quoque ad baſim* AGC *adeoq; & ad lineam* EG *quæ in plano baſis, ipſi* AC *normalis eſt, obliqua. igitur in ſcaleno, rectæ* EG, FH *ordinatim ad diametrum* DE *poſitæ, ad obliquos eandem ſecant angulos. ſimiliter oſtendemus, in cono recto, ordinatim poſitas diametrum ſuam ad rectos diuidere.*

Hinc porro non leuis exſurgit difficultas, cum DFG *parabola in vtroque cono ſit eadem, id eſt vtrum diametrus* ED *in ſcaleno, cenſeri debeat diameter aliqua ſecundaria parabolæ quæ in cono recto exhibetur: ſiue quod idem eſt, an in ſectione coni recti, diameter aliqua ſit quam ordinatim ad illam poſitæ ad angulos ſecent obliquos: licet enim per priorem propoſitionem in vtroque cono demonſtretur* DE *lineam diametrum eſſe, quam in cono recto ad angulos rectos in ſcaleno ad obliquos ſecent ordinatim ad illam poſitæ, illud tamen ex diſcurſu Apollonij non conſtat, in quanis parabola plures poſſe aſſignari diametros quarum vnam rectè, alteram obliquè ſecent ordinatim ad illas poſitæ: & quia de parabolis inclinatis necdum conſtat, poſſet* ED *linea quoq; inclinatæ ſectionis axis cenſeri, quem ordinatim poſitæ ad obliquos ſecent angulos: ſed difficultatibus illis omnino ſatisfacere conabimur: oſtendemuſq; in vna eademq; parabola diametros dari æquidiſtantes, quarum vnam ad rectos, ad obliquos alteram, ſecent ordinatim ad illas poſitæ, ac nullas deinde inclinatas dari parabolas.*

Ex dictis & prima parabolæ proprietate conſtat primò, ſi AB *lineam ad angulum quemcunque æquidiſtantes ſecent* DC, *fueritq; vt* AD *linea ad lineam* AD, *ſic* DC *quadratum ad quadratum* DC; *punctæ* ACC *eſſe ad parabolam.*

Secundò patet ſi CDE *ordinatim poſitæ ad* AB *æquidiſtans ponatur* CD, *cui indirectum addatur* DF *æqualis* CD, *punctum* F *eſſe ad parabolam: cùm enim ſit vt* AD *ad* AD, *ſic quadratum* CD *ad* CD *quadratum, ipſis autem* CD *æquentur* DE, DF: *quadrata quoque* DE, DF *proportionalia ſunt lineis* AD, AD; *quare ea quæ diximus punctæ* E & F *ad parabolam ſunt: quæ ſingulariter & explicitè hic notare volui, eò quod poſtmodum ſæpius ſint aſſumenda.*

PROPOSITIO II.

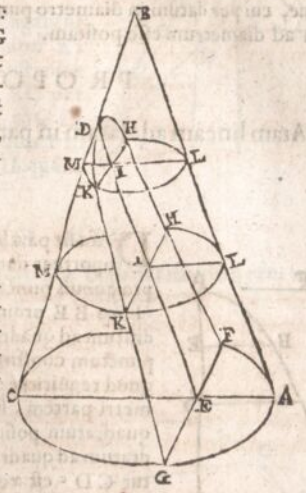
SIt ABC triangulum productum plano per axem ABCG, poſitâque DE lateri AB æquidiſtante ducatur EG normalis ad diametrum baſis AC, ſecundùm quam, & rectam ED, planum ponatur exhibens in ſuperficie conica ſectionem FDG: aſſumatur autem in ED, punctum quodcunque I per quod in plano FDG recta ponatur HK æquidiſtans FG;

Dico HK in I bifariam ſecari.

Demon-

Demonſtratio.

POſita per I punctum, LM parallela AC ducatur ſecundum LM, planum LKM æquidiſtans plano baſeos AGC: circulus igitur [a] eſt LKM, & HK, FG communes interſectiones [b] parallelæ. & quia FEG ex hypotheſi normalis ad diametrum AC, ab eadem in E bifariam eſt diuiſa, HK quoque [c] normalis eſt ad LM, & [d] in I bifariam diuiſa. Quod erat demonſtrandum.



a 16. *Prolog.*
b 16. *Vndecimi.*
c *Ex elemēt.*
d 3. *Tertij.*

Corollarium.

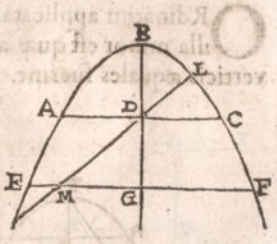
EX hac propoſitione patet, ſi in parabola, ſi diameter rectam quandam bifariam ſecet, omnes quoque eidem biſſectæ æquidiſtantes bifariam ſecari. patet, cùm ED diameter ſit quæcunque, & HIK quęuis æquidiſtantum rectę FG in E bifariam diuiſæ.

PROPOSITIO III.

DAta linea, parabolam in duobus punctis ſecante illius exhibere diametrum.

Conſtructio & demonſtratio.

DIuiſæ AC bifariam in D ponatur EF æquidiſtans, qua ſimiliter biſſecta in G, ducatur per G & D, linea BGD: dico illam diametrum eſſe quæſitam: ſi non, ſit LD diameter, quæ producta ſecet EF in M: quoniam igitur LD diameter bifariam ſecat AC, biſſecabit [e] quoque in M, FE ipſi AC æquidiſtantem, ſed FE biſſecta ponitur in D: erit igitur in D & M, biſſecta linea FE. Quod fieri non poteſt. non igitur LD diameter eſt ſed BD. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.



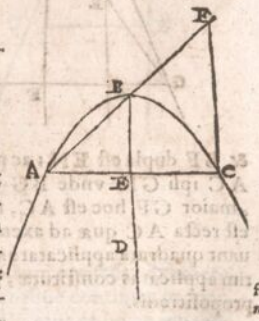
e 2. *huius.*

PROPOSITIO IV.

ADato in perimetro parabolæ puncto, ad datam diametrum ordinatim ponere.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt in perimetro parabolæ ABC. datum punctum A, & diameter data ſit BED ad quam ex A ordinatim oportet ponere lineam AEC, iuncta AB producatur in F, vt AB, BF æquales ſint, & ex F demiſſa FC parallela BE, occurrat parabolæ in C. iungaturque AC: patet AC [f] in E bifariam eſſe diuiſam, cùm AF, biſſecta ſit in B, & FC, BE æquidiſtent; à dato igitur in perimetro parabolę puncto, &c. Quod erat faciendum.



f *Ex elementis.*

Z z Corol-

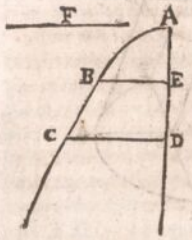
Corollarium.

HInc facilis praxis oritur, per datum in diametro punctum ordinatim ducendi lineam: ex assumpto enim in perimetro quouis puncto ponatur ordinatim quęcunque, cui per datum in diametro punctum æquidistans ducatur. patet illam ordinatim ad diametrum esse positam.

PROPOSITIO V.

DAtam lineam ad datam in parabola diametrum ordinatim ponere.

Constructio & demonstratio.



a 7. *huius.*

b 1. *huius.*

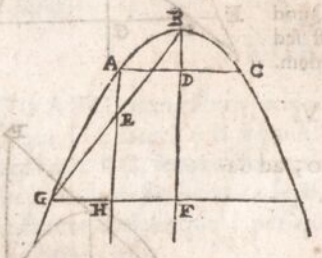
c 9. *quintl.*

DAta sit parabola ABC, & in ea diameter AD, ad quam oporteat datam rectam F ordinatim applicare; assumpto quouis puncto B in sectionis perimetro, ponatur ex B [a] linea BE ordinatim ad diametrum AD, fiatq; vt BE quadratum ad quadratum F; ita AE ad AD lineam, & per D punctum constituatur DC parallela EB. Dico factum esse quod requiritur: est enim ita pars diametri AE ad AD diametri partem, sicut [b] quadratum ordinatim positę BE, ad quadratum positę CD, sed ex constructione est BE quadratum ad quadratum F, vt AE linea ad lineam AD. Igitur CD [c] est æqualis ipsi F & est parallela ad EB; datam igitur lineam ordinatim posuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

ORdinatim applicatarum ad duas diametros quarum altera est axis, illa minor est quæ ad axem applicatur, modò distantiæ à puncto verticis æquales fuerint.

Demonstratio.



SIt parabolæ ABC axis BD & ordinatim ad illum posita AC: ducta deinde AE parallela BD, fiat BF quadrupla BD, ponaturque FG parallela DA dein FG, bissecta in H ponatur HA æquidistans BF, iungaturque BG: quoniam BD ad BF, eam rationem habet quam vnum ad quatuor ex constructione, igitur quadratum AD ad GF, est vt vnum ad quatuor; igitur GF linea dupla est AD, hoc est HF, & BF dupla est EN; ac proinde BG dupla GE; item AE æqualis ipsi BD, & AC ipsi GF. vnde BG ordinatim [d] posita est ad diametrum AE; est autem GB [e] maior GF hoc est AC, igitur GB ordinatim posita ad AE æqualem BD, maior est recta AC quæ ad axem ordinatim collocata est; & quia eandem rationem seruant quadrata applicatarum, quam [f] partes diametrorum inter verticem & ordinatim applicatas constitutæ, hinc vniuersaliter de omnibus applicatis constat veritas propositionis.

d *Defin. 3. huius.*

e *Ex elementis.*

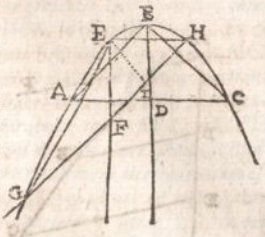
f 1. *huius.*

Aliter.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [419] - 362
PUBLIC DOMAIN

Aliter.

PRopositio hæc aliter per Archimedem demonstratur. Sint BD, EF diametri eiusdem altitudinis, & BD quidem axis: ponanturque per D & F, ordinatim lineæ AC, GH.



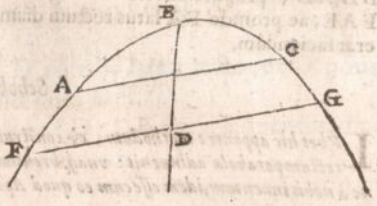
Dico AC minorem esse recta GH, iungantur enim ABC, GEH: & ex E recta demittatur EI normalis ad GH. cùm igitur æquales sint distantiæ EF, BD, æqualia sunt triangula, GEH, ABC per Archimedem. quare vt EI ad BD, sic AC ad GH: est autem BD id est EF maior EI (cùm angulus I in triangulo EIF rectus sit) maior igitur erit GH quàm AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

AD datum punctum in diametro parabolæ ordinatim ponere.

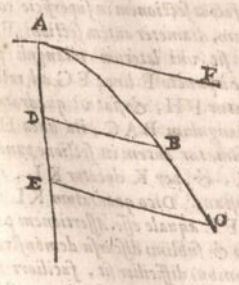
Constructio & demonstratio.

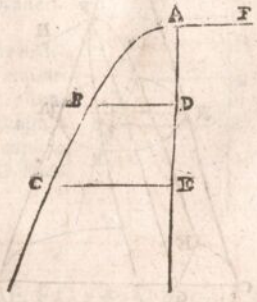
SIt data parabola ABC, cuius diameter aliqua BD, & in ea punctum assignatum D per quod oporteat rectam collocare ordinatim ad BD diametrum; assumpto in perimetro quouis puncto A ducta sit quæuis AC, ordinatim ad diametrum BD cui parallela ponatur per punctum D: patet FDG ordinatim esse [a] positam & in D bifariam diuisam. Fecimus igitur quod petebatur.



[a] *Defin. 3. huius.*

PROPOSITIO VIII.

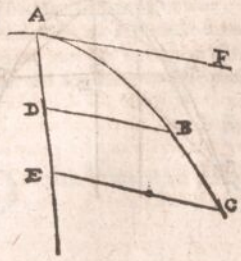


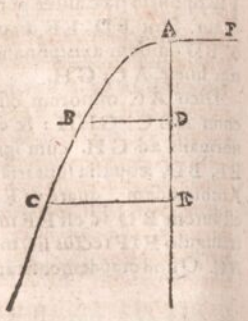


DAtæ diametri in parabola latus rectum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola, & in illa diameter BD cuius latus rectum oporteat exhibere, posita sit quæuis BD ordinatim ad diametrum AD, fiantque continuæ proportionales AD, DB, AF. Dico AF satisfacere petitioni: applicetur enim quæuis alia EC parallela DB [b] erit igitur vt AD ad AE, sic DB quadratum ad quadratũ EC: [b] 1. *huius.*

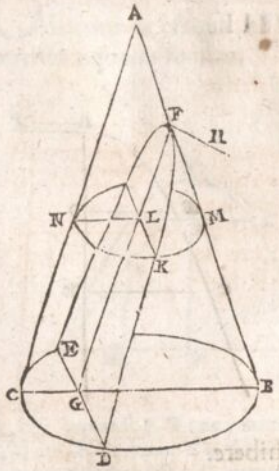




a 1. *sexti.* sed vt AD ad AF, sic FAD a rectangulum ad rectangulum FAE; igitur vt quadratum DB est ad quadratũ EC, sic FAD rectangulum ad rectangulum FAE: & permutando vt DB quadratum, ad rectangulum FAD, sic EC quadratum ad rectangulum FAE, sed BD quadrato æquale est rectangulum FAD, quia AF, BD, AD, proportionales sunt; igitur & EC quadratum æquale est rectangulo FAE, ac proinde FA latus rectum diametri AD: exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

Scholion.

LVbet hic apponere methodum, & constructionem qua Apollonius lib. 1. Conicorum latus rectum parabolæ adinuenit: vnaq; breuiter ostendere latus rectum præcedenti propositione à nobis inuentum, idem esse cum eo quod Apollonius aliâ constructione adinuenit.



Sit, inquit, coni vertex A, *basis, circulus* B, C: *secetuŕq; plano per axem quod sectionem faciat triangulum* ABC; *secetur & altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam* DE *quæ ad* BC *sit perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni* DFE *lineam, diameter autem sectionis* FG *æquidistans sit vni laterum trianguli per axem: atque à puncto* F *lineæ* FG *ad rectos angulos ducatur* FH, *& fiat vt quadratum* BC *ad rectangulum* BAC, *ita linea* HF *ad* FA; *sumatur autem in sectione punctũ quodlibet* K, *& per* K *ducatur* KL, *ipsi* DE *æquidistans. Dico quadratum* KL *rectangulo* HFL *æquale esse. Assertionem porro doctissimo & sublimi discursu demonstrat; qui cùm tyronibus difficilior sit, faciliori nos latus rectum methodo præcedenti propositione conati sumus expedire, ostendimus enim posita eadem figura, si fiant* FL, KL, FH, *continuæ proportionales,* FH *latus rectum esse. Nunc restat vt ostendam, illud idem esse cum eo quod Apollonius constructione antedicta adinuenit. Acta per* L *linea* MN, *æquidistante ipsi* BC, *erit planum quod transit per* LKMN, *æquidistans plano coni baseos, adeoq; circulus: &* LK *quadratum, id est ex hypothesi rectangulum* HFL, *æquale rectangulo* MLN; *quare rectangulum* MLN *ad ipsum* LFA, *est vt* HFL *ad* LFA: *sed* HFL *est ad* LFA, *vt* HF *ad* FA, *igitur vt* HF *ad* FA, *sic* MLN *ad* LFA: *sed ratio* MLN *ad*

ad LFA *componitur ex ratione* ML *ad* LF, *& ex* LN *ad* FA; *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex* ML *ad* FL, *&* LN *ad* FA: *est autem* ML *ad* LF, *vt* MN *ad* NA, *adeoq; &* LN *ad* FA, *vt* MN *ad* MA; *igitur proportio* HF *ad* FA, *componitur ex proportionibus* MN *ad* NA, *& ex* MN *ad* MA, *id est ex* BC *ad* CA, *&* CB *ad* BA: *sed ex iisdem quoque componitur ratio quadrati* BC *ad rectangulum* BAC, *igitur* HF *est ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC: *sed posita proportione quadrati* HF *lineæ, ad lineam* FA *eâdem, cum ea quam habet* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *erit* HF *linea per Apollonium latus rectum parabolæ; igitur si* FL, KL, FH *fiant continuæ proportionales, erit* HF *latus rectum idem cum eo quod aliter adinuenit Apollonius. vnde patet vtramque constructionem in idem incidere & alteram alterius tantùm esse conuersam; positâ enim proportione* HF *ad* FA, *quæ est* BC *quadrati ad rectangulum* BAC; *infert Apollonius* HF, KL, FL *continuè esse proportionales, adeoq;* LK *lineam posse rectangulum* HFL, *nos verò positis tribus continuis* HF, KL, FL *inferimus* HF *latus esse rectum, & omnes lateris recti proprietates habere: quia verò tribus illis positis continuis sequitur quoque* HF *esse ad* FA, *vt* BC *quadratum ad rectangulum* BAC, *patet* HF *idem latus rectum esse cum eo quod Apollonius proposuit.*

Ex antedictis verò patet ordinatim ad diametrum aliquam applicatas eo maiores esse quo remotiores sunt à vertice suæ diametri, nam semper excrescit rectangulum sub latere recto & parte diametri intercepta à vertice eiusdem & puncto quo ab ordinatim posita secatur: vnde & ordinatim posita, & portio illa diametri ante determinata necesse est quandoque inter se & lateri recto sint quales, cuius casus sequentibus propositionibus assignabimus.

PROPOSITIO IX.

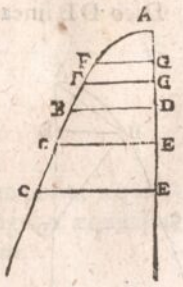
SIt ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto, ex D ponatur ad diametrum AE ordinatim linea DB.

Dico DB lineam æquari AD, & si AD, DB lineæ æquentur, dico AD æquari lateri recto, quod inseruit diametro AD.

Demonstratio.

QVoniam BD linea, ordinatim applicatur ad diametrum AD, erit BD quadratum æquale [a] rectangulo super AD & latere recto, sed AD linea æqualis ponitur lateri recto, igitur quadratum BD æquale est quadrato AD, adeoque BD, AD lineæ æquales sunt.

Sint iam AD, BD lineæ æquales, & BD quidem ordinatim posita ad diametrum AD, dico AD lineam æquari lateri recto. cùm enim quadratum BD æquale ponatur quadrato AD, sit autem & BD quadratum æquale rectangulo [b] super AD & latere recto, erit & quadratum AD æquale rectangulo super AD & latere recto, ideoq; & AD linea lateri recto æqualis. Quod erat demonstrandum.



a 8. *hujus.*

b *Ibid.*

PROPOSITIO X.

IIsdem positis ducantur ordinatim lineæ CE, FG: & CE quidem cadat infra BD, recta verò FG supra.

Dico AG ad GF rationem minoris inæqualitatis esse, & AE ad EC maioris.

Demonstratio.

QVoniam AD linea æqualis ponitur lateri recto, erit FG quadratum æquale [c] rectangulo GAD, adeoque AG, GF, AD continuæ proportionales; est autem

c *Ibid.*

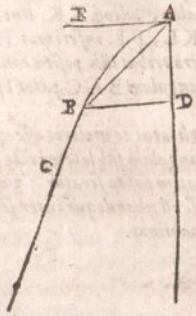
autem AD id est BD, maior quàm [a] FG, igitur & FG maior est quàm AG. Quod erat primum.

a *Schol propos. 8. huius.*

Rursum cùm DAE rectangulum æquale sit quadrato CE, proportionales erunt AD, CE, AE lineę: sed AD id est BD, minor est quàm CE ex ante demonstratis; igitur & CE minor est rectâ AE: adeoque ratio AC ad CE est maioris inæqualitatis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

ESto parabolæ ABC quæuis diameter AD, & ex A ponatur AE, æquidistans ordinatim positis ad diametrum AD; ponatur quoque ex A linea AB, diuidens bifariam angulum EAD, occurrensque parabolæ iterum in B puncto, ex quo ordinatim ad diametrum ponatur BD.



Dico AD lineam æquari lateri recto.

Demonstratio.

QVoniam AE, BD æquidistant, angulus EAB [b] æquatur angulo ABD; sed angulo EAB ex hypothesi æquatur angulus BAD, æquales igitur sunt anguli ABD, BAD: adeoque [c] & lineæ BD, AD: vnde AD, [d] lateri recto est æqualis. Quod erat demonstrandum.

b *Ex elementis.*

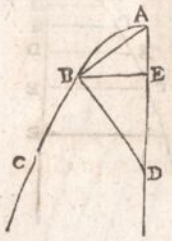
c *6. Primi. & 9. huius.*

PROPOSITIO XII.

SIt ABC parabolę axis AD, & ex A demissa linea AB, parabolæ iterum occurrat in B puncto ex quo ad axem ordinatim ponatur BE. ducatur autem & BD normalis ad AB, occurrens axi in D.

Dico DE lineam æquari lateri recto.

Demonstratio.



QVoniam angulus ABC rectus est, & BE normalis ad axem AD, proportionales [e] sunt AE, EB, ED: & EB quadrato æquale rectangulum AED: sed & EB quadrato æquale est rectangulum super AE [f] & latere recto, rectangulum igitur AED æquale est rectangulo sub AE & latere recto. æqualis ergo ED est lateri recto. Quod erat demonstrandum.

e *Ex elementis.*

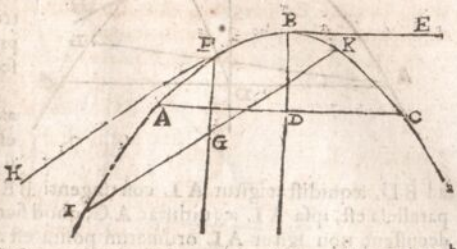
f *8. huius.*

PROPOSITIO XIII.

LAtus rectum axeos, minimum est laterum rectorum, reliquarum diametrorum.

Demon-

Demonſtratio.



PArabolæ ABC axis ſit BD, illiuſque latus rectum BE, ſit autem & alia quæuis diameter FG, cuius latus rectum ponatur FH: dico BE minus eſſe latere recto FH: ponatur enim ADC ordinatim ad axem, ſumptaque FG æquali BD, ducatur per G ordinatim ad diametrum FG, linea IK. maior igitur eſt, [a] IG quàm AD, & IG quadratum maius quadrato AD: ſed IG quadrato æquatur [b] rectangulum ſuper HF, FG, & EBD rectangulum æquale eſt quadrato AD, maius igitur eſt rectangulum HFG, rectangulo EBD: æquales autem ſunt ex conſtructione BD, FG, igitur FH latus rectum maius eſt latere recto BE: igitur latus rectum a xeos minimum eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. huius.

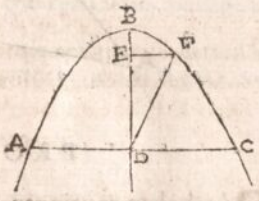
[b] 8. huius.

PROPOSITIO XIV.

SIt ABC parabolæ axis BD maior latere recto: & per D ordinatim ad axem poſita ADC: factaq; DE æquali lateri recto, ponatur EF æquidiſtans AC, iunganturque DF.

Dico FD lineam æquari lineæ DC.

Demonſtratio.



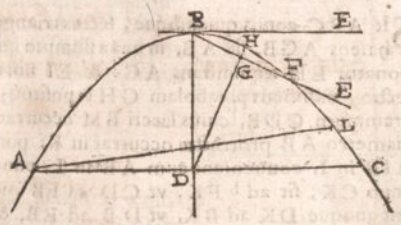
QVoniam ED lateri recto æqualis eſt, quadratum FE æquatur rectangulo BED: addito igitur quadrato DE, quadrata FE, DE ſimul ſumpta, id eſt quadratum FD, ob angulum FED rectum æquale eſt [c] rectangulo BDE: ſed & BDE rectangulo æquale eſt quadratum DC: æqualia igitur ſunt quadrata FD, DC. Quod erat demonſtrandum.

[c] 3. ſecundi.

PROPOSITIO XV.

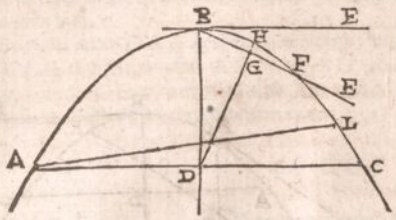
OMnis linea per apicem diametri acta, & ordinatim poſitæ æquidiſtans, ſectionem contingit: & contra quæ contingenti æquidiſtat ordinatim poſita eſt ad diametrum ex contactu demiſſam.

Demonſtratio.



SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim poſita ADC: cui per B vertice diametri ponatur æquidiſtans BE, dico illam, contingere ſectionem in B. ſi enim non contingit parabolam, ſecet illam in F: diuiſaque BF bifariam in G, ponatur per G & D, linea GD; cùm igitur FB, AC æquidiſtantes bifariam diuidat GD, erit illa [d] diameter ad quam ordinatim poſita eſt AC; ſed & AC quoque ordinatim applicata eſt ad diametrum BD, cùm

[d] 1. Defin. huius.



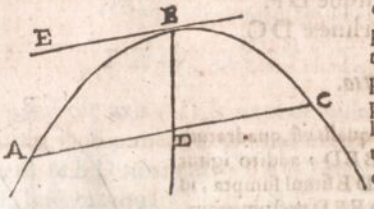
cũ abilla bifariam secetur; linea igitur AC ordinatim posita est ad duas diametros, quod fieri non potest: alias enim ipsi AC æquidistantes à diametris BD, GD bifariam in diuersis punctis diuiderentur. non igitur BE secat, sed contingit sectionem in B.

Sit iam EB contingens, illiq; æquidistet AC: dico illam ordinatim esse applicatam ad diametrum BD. si enim non, ponatur AL ordinatim ad BD, æquidistat igitur AL contingenti BE; & quia AC quoque contingenti parallela est, ipsa AL æquidistat AC, quod fieri non potest, cùm in A puncto sese decussent. non igitur AL ordinatim posita est ad BD, sed AC linea æquidistans contingenti BE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

PEr datum in parabolæ perimetro punctum, contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.



SIt in ABC parabolę perimetro datum punctum B, oporteat per illud contingentẽ ponęre: demissa sit ex B diameter BD, ad quam ordinatim ponatur AC, cui æquidistans per B ducatur BE: [a] patet illam esse contingentem; per datum igitur punctum, &c. Quod erat faciendum.

a 25. huius.

PROPOSITIO XVII.

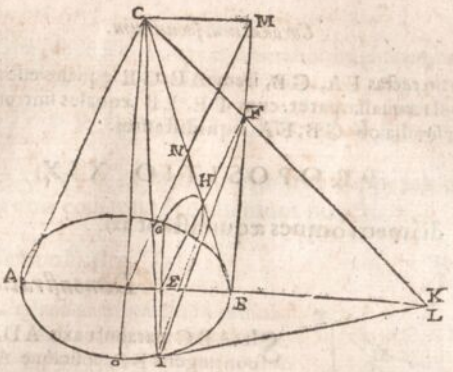
PArabolam contingens conueniat cum diametro: ad quam ex puncto contactus ordinatim quædam posita sit.

Dico diametrum interceptam, inter ordinatim applicatam & punctum in quo contingens cum diametro concurrit, à parabola bifariam diuidi.

Demonstratio.

SIt ABC conus quicumque, sectus triangulo per axem ABC, diameter autem baseos AGB, sit AB, in qua assumpto quouis puncto E quod centrum non sit ponatur EH æquidistans AC: & EI normalis ad AB: tum per HE, EI fiat sectio, exhibens parabolam GHI; positoq; CD, axe coni, perficiatur parallelogrammum CDB, cuius lateri BM occurrat EH producta in F: iunctaque CF, diametro AB protractæ occurrat in K: ponatur dein per I contingens circulum AIB in I, conueniens cum AB in L, puncto quod idem est cum puncto K: cùm enim CK, sit ad [b] FK, vt CD ad FB, id est MB ad FB, id est DB ad EB, erit quoque DK ad BK, vt DB ad EB, & diuidendo BK ad DB, vt BE ad ED, & componendo DK ad DB, vt DB ad DE; proportionales igitur sunt DE,

b *Per elementa.*



DE, DB, DK: igitur [a] contingens per I posita cum diametro conuenit in K: idem ergo punctum est K & L; vlterius, iungantur puncta CE, CI: quoniam igitur CI linea in superficie est coni, triangula sunt, CEI, CIK, & planum CIK continget conum in linea CI. ponatur tandem in plano CIK linea IF; continget illa parabolam in I: cùm enim planum CIK conum contingat, linea autem FI in eodem plano sit, & simul in plano parabolæ, cùm puncta K & I, in eodem sint, patet FI contingentem esse parabolæ in I.

[a] 27. lib. de circulo.

Vlterius cùm CM linea æquidistans & parallela sit semidiametro DB, æquidistat quoque & æqualis est AD: vnde AC, DM parallelæ: & quia FE æquidistat AC, æquidistabit EF ipsi DM: est autem MD diameter parallelogrammi DM, in N à diametro [b] CB bifariam diuisa, recta igitur FE in H, quoque ab eadem diametro bisecta est: æquales ergo sunt lineæ EH, HF. igitur parabolam contingens, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] Per elementa.

Quod si punctum assumptum ipsum centrum sit, patet demonstratio. eodem enim modo ostendetur OM esse contingentem parabolæ quæ per lineas ND, DO, &c. ducetur.

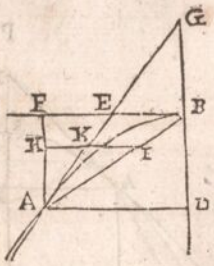
PROPOSITIO XVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, contingant in A & B, rectæ AE, BE conuenientes in E: & EB quidem AF, æquidistanti BD occurrat in F.

Dico FB in E bifariam esse diuisam.

Demonstratio.

PRoducta AE conueniat cum diametro in G, ponaturque ex A ordinatim linea AD. quoniam AD, EB æquidistant, vt GB ad GD, sic EB est ad AD, id est FB, sed GB dimidia [c] est GD, igitur & EB dimidia quoque est FB. Quod erat demonstrandum.



[c] 17. huius.

Corollarium primum.

HInc patet, si iunctâ AB quotuis HI ponantur æquidistantes ipsi FB, illas bifariam à contingente AG diuidendas.

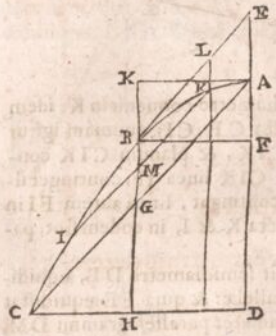
Corollarium ſecundum.

SEquitur ſecundò rectas FA, GB, item AE, GE æquales eſſe adeoque & AFE, GEB triangula æqualia. patet, cùm FE, EB æquales ſint oſtenſæ, & AFE, GEB triangula ſimilia ob GB, FA æquidiſtantes.

PROPOSITIO XIX.

IN parabola diametri omnes æquidiſtant axi.

Demonſtratio.

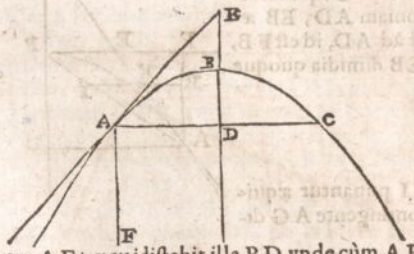


SIt ABC parabolæ axis AD, cui in E occurrat contingens BE, poſitaque AC parallela contingenti BE, demittatur ex B, linea BG æquidiſtans axi, ponãtur BF, CHD ordinatim ad axem AD, & BG producta occurrat contingenti per A ductæ in K: Quoniam BE cõtingens eſt & BF ordinatim ad axem AD applicata, æquales ſunt lineæ [a] EA, FA. & quia BF communis altitudo eſt, triangulum EBF, [b] parallelogrammo BA æquale eſt: rurſum vt AF ad AD, ſic [c] FB quadratum ad quadratum CD, & FK parallelogrãmum ad parallelogrammum DK: vt quadratum igitur FB ad quadratum CD eſt, ſic FK parallelogrammum [d] ad parallelogrammum DK, ſed vt FB quadratum ad quadratum CD, ſic EBA triangulum [e] ad triangulum CAD: igitur vt FK parallelogrammum ad parallelogrammum DK, ſic EBF triangulum eſt ad triangulum ACD: & permutando vt FK parallelogrammum ad triangulum BFE, ſic DK parallelogrammum eſt ad triangulum ACD: æqualia autem oſtenſa ſunt, triangulum BFE & parallelogrammum FK; æqualia igitur ſunt DK parallelogrammum & triangulum ACD: & ablato communi AGHD, æqualia remanent triangula AGK, CHG. vnde cum ſimilia quoque ſint ob AK, CH æquidiſtantes, æqualia ſunt latera [f] KG, GH, & CG, GA: diuiſa igitur bifariam eſt AC. eodem modo ſi IK ponatur æquidiſtans CA, & ex K diameter poſita ſit LK occurrens BE contingenti in L, oſtendetur IK in M, biſſecari à linea BG: diameter [g] igitur ſectionis eſt BG: quare cùm EB contingens ſit quæcunque, adeoque & BH quæuis æquidiſtans axi, patet diametros omnes axi æquidiſtare. Quod erat demonſtrandum.

Ex quo ſequitur diametros omnes in parabola eſſe parallelas.

a *Ibid.*
b *Per elementa.*
c 1. *huius.*
d 1. *Sexti.*
e 19. *Sexti.*
f *Per elementa.*
g 3. *huius.*

PROPOSITIO XX.



OMnis contingens per extremitatem ordinatim poſitæ ducta, cum illius diametro conuenit.

Demonſtratio.

POſita ſit diameter BD, & ad illam ordinatim applicata AC: agaturq; per A contingens, dico illam BD diametro occurrere: ducta enim diametro AF [h] æquidiſtabit illa BD, vnde cùm AE ſecet AF æquidiſtantium vnam, alteram quoque DB, [i] producta interſecabit. Quod erat demonſtrandum.

h 19. *huius.*
i *Per elementa.*

Corol-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [427] - 370
PUBLIC DOMAIN

Corollarium.

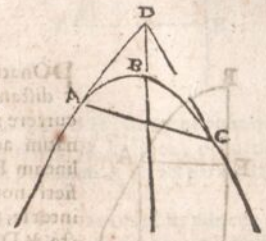
HInc patet, quascumque duas contingentes parabolam, conuenire in aliquo puncto extra sectionem: patet ex iam demonstratis.

PROPOSITIO XXI.

COntingentes actæ per extrema ordinatim applicatæ cum eiusdem diametro, in vno eodemque conueniunt puncto.

Demonstratio.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, dico contingentes per A & C ductas, diametro BD occurrere in vno eodemque puncto D. demonstratio patet, cùm pars diametri à sectione & contingente intercepta æqualis sit portioni à sectione & ordinatim applicata interceptæ. igitur contingentes, &c. Quod erat demonstrandum.

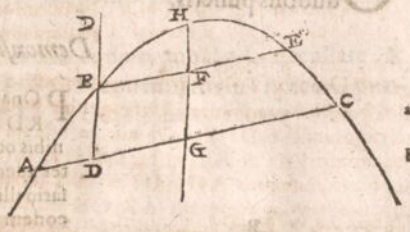


PROPOSITIO XXII.

PEr datum punctum in perimetro parabolæ diametrum ducere.

Constructio & demonstratio.

SIt in ABC perimetro assignatum punctum B, ex quo oporteat diametrum ponere; ductâ quauis secante BE, exhibeatur illius diameter [a] HF, cui per B æquidistans ponatur BD: patet illam [b] sectionis esse diametrum; à dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.



a 3. huius.

b 19. huius.

Corollarium.

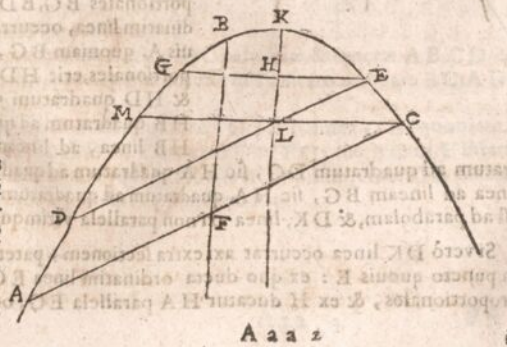
EAdem omnino praxi vtemur, si ex dato, extra vel intra sectionem puncto D, diametrum oporteat ponere. constructio & demonstratio patet ex prima propositione.

PROPOSITIO XXIII.

DAtæ parabolæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola cuius axem oporteat exhibere, ponantur duæ quæuis parallelę DE, AC quarũ c exhibeatur diameter BF: ad quam ex E & C normaliter ducantur EG, CM; alterâque illarum, puta EG bifariam diuisa



c 3. huius.

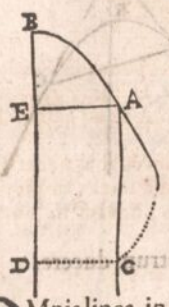
in H ponatur per H æquidistans diametro BF. dico illam axem esse. quoniam enim
a 19. huius. b 2. huius. c 1. Definit. huius. diametro BF æquidistat, erit[a] illa quoq; diameter sectionis, & quia æquidistantium EG, CM vnam ad rectos bisecat angulos, bisecabit &[b] alteram, ad rectos: axis[c] igitur sectionis est KL: exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV.

OMnis linea in parabola axi æquidistans, sectioni in vno tantum puncto occurrit.

Demonstratio.

d 1. huius.

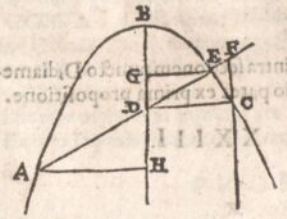


PONatur ABC parabolę axis BD; & alia quęuis ei æquidistans AC dico[d] AC in vno tantum puncto sectioni occurrere: sin verò, occurrat iterum in C: & ponantur ordinatim ad axem rectę AE, CD: erit igitur vt BE linea ad lineam BD, sic EA quadratum ad quadratum DC, quod fieri non potest, cùm AE, CD quadrata æqualia sint inter se, (ob AD parallelogrammum) & BE linea minor rectâ BD. igitur AC diameter, parabolæ tantum semel occurrit: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

OMnis linea in parabola, quæ non est diameter sectioni occurrit in duobus punctis.

Demonstratio.



e 1. De progressionibus.

PONatur ABC parabolæ axis BD, & linea KD quæ non sit diameter. dico illam sectionibus occurrere: Quoniam KD non est diameter adeoque axi non æquidistat, producta necessario illi occurret in puncto quouis D (cùm in eodem plano existat) quod si D punctum fuerit intra parabolam, ponatur ex D ordinatim DC, & per C diameter EF; occurret illa sectioni in vno tantum puncto; & quia eadem axi æquidistat producta quoque occurrét KD productæ in F puncto, quod extra sectionem est. vnde KDF prius necessario occurrit in puncto quouis E. ducta igitur ex E ordinatim EG fiant proportionales BG, BD, BH positaque ad H ordinatim linea, occurrat ipsi KD in puncto quouis A. quoniam BG, BD, BH ponuntur proportionales, erit HD ad DG, vt HB ad BD, & HD quadratum[e] ad quadratum DG, vt HB quadratum ad quadratum DB, id est vt HB linea, ad lineam BG: sed vt HD quadratum ad quadratum DG, sic HA quadratum ad quadratum GE: igitur vt HB linea ad lineam BG, sic HA quadratum ad quadratum GE, vnde punctum[f] A est ad parabolam, & DK, linea axi non parallela vtrimque sectioni occurrit.

f Coroll. prima huius.

Si verò DK linea occurrat axi extra sectionem, patet antè parabolę occurrere in puncto quouis E: ex quo ducta ordinatim linea EG, fiant BG, BD, BH proportionales, & ex H ducatur HA parallela EG, occurrens KD lineæ in A.

quo-

quoniam igitur est HB ad BD, vt BD ad BG, erit componendo permutando HD ad DG, vt DB ad BG, est autem vt HD ad DG, sic AH ad EG, ergo vt DB ad BG, id est per constructionem BH ad BD, sic AH ad EG. vnde & HA quadratum ad quadratum GE est vt HB, quadratum ad quadratum BD, id est (cùm HB, BD, BG, sint continuæ,) vt HB linea est ad lineam BG, ac proinde punctum A est ad parabolam, & AD linea sectioni bis occurrit. Quod fuit demonstrandum.



Corollarium.

HInc pulchra educitur propositio: nimirum si BG, BD, BH ponantur continuæ & ex G ordinatim linea GE: agaturque per puncta E & D linea, occurrens rectæ ex H ductæ & ipsi GE parallelæ in A: quod punctum A sit ad parabolam. demonstratio habetur in priori propositione.

Sequitur secundò nullam lineam parabolæ *in pluribus quam duobus punctis* occurrere. Cùm enim parabola, sectio sit coni, & ipsi *cono nulla linea, in pluribus* quam duobus punctis occurrat, patet nec vlli sectioni conicæ, *lineam in pluribus* quam duobus punctis occurrere.

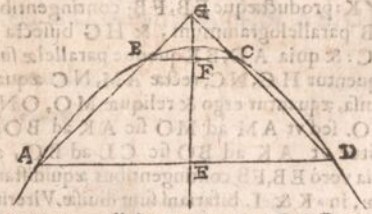
PROPOSITIO XXVI.

PArabolam ABC secent duæ quæuis parallelæ AD, BC quarum diameter ponatur EF.

Dico iunctas AB, DC diametrum in eodem puncto G decussare: & si AC, AD æquidistent iunctæque AB, CB conueniant in G, dico G punctum esse in diametro linearum BC, AD.

Demonstratio.

QVoniam EF diameter est rectarum BC, AD, igitur diuisæ sunt bifariam BC, AD in punctis F & E. vnde vt AE ad BF, sic est AG ad BG: hoc est EG ad FG. sed vt AE ad BF, ita ED ad FC; igitur vt ED ad FC, ita est EG ad FG; hoc est DG ad CG. igitur punctũ G commune est tribus lineis AB, DG, EF. Quod fuit primum.



Idem quoque ostenditur si G punctum cadat intra parabolam. si iam ponantur AD, BC parallelæ, & iunctæ AB, CD conueniant in puncto quouis G, dico G punctum esse in diametro ad quam BC, AD ordinatim ponuntur.

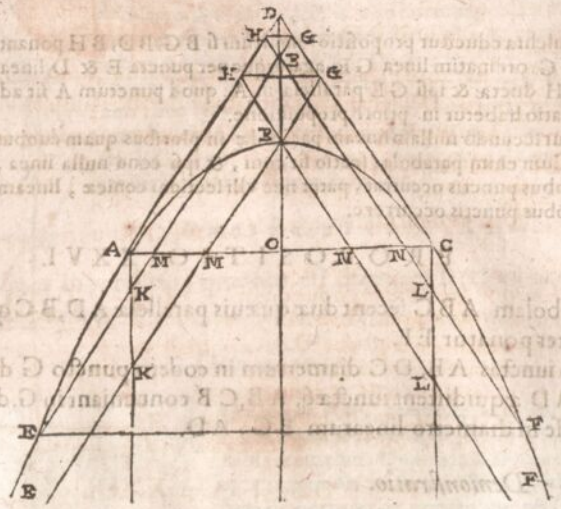
Diuisa enim BC bifariam in F demittatur ex G per F linea GE: quoniam igitur AD, BC æquidistant, erit AE ad ED, vt BF ad FC; sed BC in F bifariam ponitur diuisa, igitur & AD in E, [a] quoque diuisa est bifariam: vnde GE diameter est linearum BC, AD; &c. Quod erat demonstrandum. a 2. huius.

PROPOSITIO XXVII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim applicata AC, aganturq; per A & C, contingentes AD, CD, conuenient illę cum diametro in D: tum punctum ſumatur B, quodcunque in diametro BD: & ex B rectæ ponantur BE, BF, æquidiſtantes contingentibus, parabolę verò occurrentes in E & F.

Dico iunctam EF æquidiſtare AC, adeoq; ordinatim eſſe poſitam ad diametrum BD.

Demonſtratio.



DEmittantur ex A & C, diametri AK, CL occurrentes rectis BE, BF in L & K: productæque EB, FB; contingentibus occurrant in H & G: erit igitur HD, GB parallelogrammum, & HG biſſecta à diametro DB, æquidiſtant ergo HG, AC: & quia AD, BE quoque parallelæ ſunt, æquantur HG, AM: ſimiliter cùm æquentur HG, NC, rectæ AM, NC æquales ſunt: eſt autem AC in O, bifariam diuiſa, æquantur ergo & reliquæ MO, ON: quare vt AM ad MO, ſic CN ad NO. ſed vt AM ad MO ſic AK ad BO; & vt CN ad NO, ſic LC ad BO, igitur vt AK ad BO ſic CL ad BO, æquales ergo ſunt diametri AK, CL: quia verò EB, FB contingentibus æquidiſtant, portiones illarum parabolâ intercep-
à 4. huius. ptæ, in a K & L bifariam ſunt diuiſæ. Vlterius ponatur per E æquidiſtans AC, linea EP occurrens parabolæ in E & F, rectæ BF in P. quia igitur AC biſſecta eſt à diametro BD, erit & EF ab eadem in R bifariam diuiſa: & ER, RF æquales inter ſe: quia verò AC æquidiſtat HG, æquidiſtabunt quoque EP, HG: & EP quoq; vt HG, à diametro BD biſſecta eſt: æquantur igitur RP, RF: & puncta FP vnum idemq; ſunt: eſtque F communis interſectio linearum EF, BF cum parabola: æquidiſtant igitur EF, AC, HG. Quod erat demonſtrandum.

Corolla-

Corollarium.

EX his sequitur primò: posita EF ordinatim ad diametrum BD quam in D secent contingentes duæ AD, CD: lineas ex E & F ductas ipsis AD, CD æquidistantes diametrum quoque BD, in vno eodemque puncto decussare. patet demonstratio ex præcedenti, cuius conuersa est.

Sequitur secundò: posita AC ordinatim ad diametrum BD demissisque ex A & C æqualibus diametris AK, CL, quod rectæ per K & L, ordinatim positæ, DB diametro occurrant in vno eodemque puncto. patet ex ante dictis demonstratio, cùm tangentes per A & C actæ, ordinatim per K & L positis æquidistent, & BD diametro in vno eodemque occurrant puncto.

Sequitur tertiò: lineam (QT) coniungentem puncta, in quibus rectæ (BE, BF) contingentibus æquidistantes, parabolę occurrunt, æquidistare rectæ (EF) extrema linearum BE, BF coniungenti, adeoque lineas QT, AC, EF esse parallelas. ex ante dictis demonstratio manifesta est.

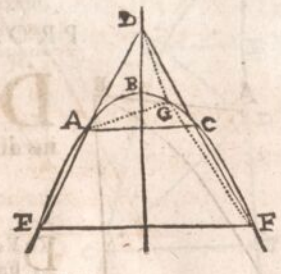
PROPOSITIO XXVIII.

ESto ABC parabolæ diameter BD, in qua assumpto puncto quouis D, demittatur DE secans parabolam in duobus punctis A & E & ex E ordinatim ponatur EF, iunctaque FD occurrat parabolę in C.

Dico EF, AC lineas æquidistare.

Demonstratio.

SI enim non sint parallelę, ponatur AG æquidistans EF, & ex F per G, ducatur FG, conueniet illa cum diametro BD a in D, est autem ex constructione DF linea recta occurrens sectioni in C; igitur recta FGD, eadem est cum FCD. vnde & punctum G idem cum C puncto, igitur æquidistant EF & AC. Quod fuit demonstrandum.



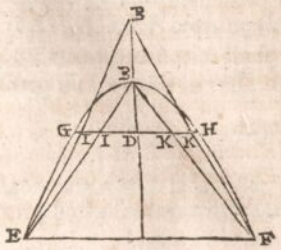
a 26. huius.

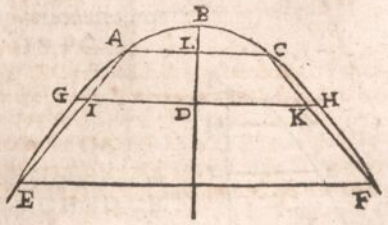
PROPOSITIO XXIX.

AEquidistent in parabola quęuis lineæ AC, EF, iunctisq; AE, CF ponatur alia quæuis GH parallela AC, occurrens iunctis AE, CF in I & K.

Dico GI, KH lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.



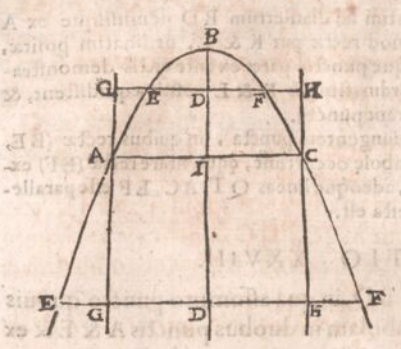


POnatur LD diameter rectarum AC, GH. Quoniam HG æquidistat AC ordinatim positæ, erit HG in D b bifariam diuisa: est autem ID æqualis DK cùm

b 2. huius: sit

a 26. huius. sit ID ad DK, vt AL ad LC (quia EA, [a] FC lineæ in idem punctum diametri conueniunt) igitur & reliquæ IG, HK quoque sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXX.



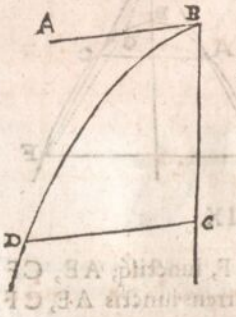
AEquidistēt rursum in ABC parabola, rectæ AC, EF, ponanturque per A & C diametri AG, HC occurrentes EF lineæ in G & H.

Dico EG, FH lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.

PONatur ID diameter linearum AC, EF. Quoniam EF, AC lineæ ordinatim positæ sunt ad diametrum ID, erunt AC, EF in D & I bifariam diuisæ, sed & GH in D bifariam est diuisa, cùm GH æqualis sit rectæ AC, igitur reliquæ EG, HF, sunt inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.



DAto angulo ABC & puncto in illo D, oportet per B & D parabolam describere cuius diameter sit BC & AB eandem contingens.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex D linea DC parallela AB occurrens BC lineę in C: fiatque vt BC ad DC, sic DC ad AB, erit AB latus rectum parabolę quæsitę, ac proinde determinata est parabola quę petebatur.





PA-

PARABOLÆ
PARS SECVNDA

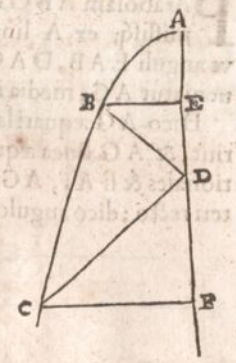
Linearum in parabola tam continuam, quàm discretam contemplatur proportionem.

PROPOSITIO XXXII.

SIt ABC parabolæ axis AD, in quo assumpto quouis puncto D, educantur ex D ad peripheriam lineæ DB, DC constituentes angulos ADB, CDF æquales; tum rectæ ponantur BE, CF ordinatim ad axem AF.

Dico AE, AD, AF, in continua esse analogia & contra.

Demonstratio.



QVoniam EB, CF ordinatim positæ sunt ad axem, anguli BED, CFD recti sunt: æquales autem ponuntur anguli BDE, CDF; similia igitur sunt triangula BED, CFD: & vt EB ad FC, sic ED ad FD: rationis autem EB ad CF, duplicata est[a] ratio AE ad AF, ergo & duplicata est rationis ED ad DF: vnde AE, AD, AF, continuę sunt proportionales. vt facile deducitur ex prima de progress. Geometricis.

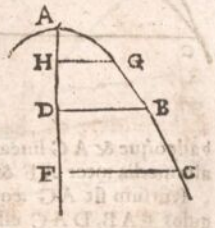
[a] 1. huius.

Sint iam proportionales AE, AD, AF, positisque ordinatim BE, CF: iungantur BD, CD: dico angulos BDE, CDF æquari, cùm proportionales sint AE, AD, AF, ratio AE ad AF duplicata est rationis AD ad AF id est ED ad DF, sed etiam ratio AE ad AF, duplicata est rationis BE ad CF, igitur vt ED ad DF, sic BE ad CF, & vt DE ad BE, sic DF ad FC: vnde cùm anguli proportionalibus lateribus contenti recti sint, similia sunt triangula BED, CFD, & anguli BDE, CDF æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SIt ABC parabolę diameter AD diuisa in H, DF, vt AH, AD, AF cõtinuę sint proportionales: ponantur autem ordinatim lineę HG, DB, FC.

Dico illas in continua esse analogia.



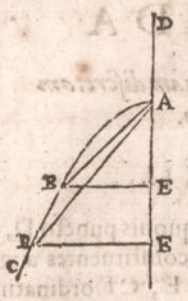
Demonstratio.

PAtet: cùm AH, AD, AF sint continuę proportionales & duplicatam rationem habeant linearum GH, BD, CF.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto ABC parabolę axis AD æqualis lateri recto, ductaque ordinatim linea quacunque EB, iungantur AB.

Dico AE, AB, ED lineas esse proportionales.



Demonstratio.

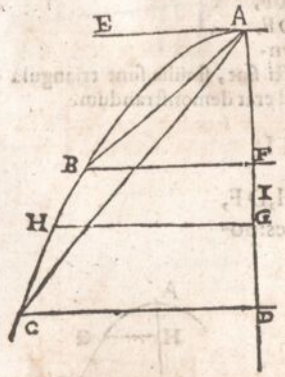
QVadratum AB æquale est quadratis AE, EB: sed EB quadratum æquatur rectangulo EAD; igitur quadratum AB æquale est rectangulo EAD vnà cum quadrato AE, id est rectangulo AED. quare AE, AB ED lineæ sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE, demissisq; ex A lineis AB, AC quæ parabolæ occurrant in B & C vt anguli EAB, DAC æquales sint ductisque ordinatim BF, CD, inueniatur AG, media inter AF & AD.

Dico AG æquari lateri recto; & si anguli EAB, DAC æquales fuerint, & AG linea æqualis lateri recto, dico AF, AG, AD esse proportionales & si AF, AG, AD fuerint continuæ, & AG media æqualis lateri recto: dico angulos EAB, DAC esse inter se æquales.

Demonstratio.



DVcatur ex G ordinatim linea GH. Quoniam angulus DAC ex hypothesi æqualis est angulo EAB, addito vel dempto communi angulo BAC, angulus BAD æqualis est angulo EAC, id est angulo ACD; (ob AE, CD parallelas) æquales autem sunt & anguli BFA, CDA, triangula igitur ABF, ACD inter se similia sunt & vt BF ad FA, sic AD ad DC, vnde FAD rectangulo, æquale rectangulum BF, CD: est autem FAD rectangulo ex hypothesi æquale quadratum AG, & quadratum HG æquale rectangulo BF, CD, cùm BF, AG, CD lineæ proportionales sint per pennultimam; igitur quadratum AG, æquale est quadrato HG, & AG linea æqualis lineæ HG; adeoque[a] & lateri recto. Quod erit primum.

[a] 29. huius.

Sit iam AG linea æqualis lateri recto, & anguli EAB, DAC æquales, dico AF, AG, AD in continua esse analogia. Si enim non sint proportionales, inueniatur inter AF & AD media AI: erit igitur per primam partem huius linea AI, æqualis lateri recto,

[b] Ibid.

badeoque & AG lineæ. quare AF, AG, AD in continua sunt analogia, nec quæuis alia media inter AF & AD, præter AG. Quod erat secundum.

Rursum sit AG æqualis lateri recto, & AF, AG, AD proportionales, dico angulos EAB, DAC esse inter se æquales. quoniam enim AF, AG, AD continuæ sunt proportionales, FAD rectangulũ æquale est quadrato AG id est quadrato HG:

sed &

sed & HG quadrato æquale [a] est rectangulum BF; CD: igitur & rectangulo FAD æquatur rectangulum BFCD: vnde vt AF ad BF, sic CD ad AD; æquales autem sunt anguli AFB, ADC lateribus proportionalibus contenti, igitur triangula AFB, ADC inter se similia sunt, & angulus BAF æqualis angulo ACD, id est angulo EAC: dempto ergo communi angulo BAC, manet angulus EAB æqualis angulo CAD. Quod erat demonstrandum.

[a] Ex 33. huius.

Corollarium.

Iisdem positis sequitur triangula BAF, GAD esse inter se similia. patet per primam partem præcedentis propositionis.

PROPOSITIO XXXVI.

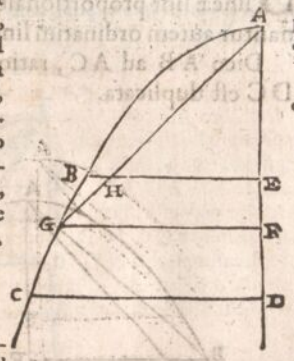
Sit ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F vt AE, AF, AD sint proportionales, & AF media æqualis lateri recto: positis autem ordinatim lineis EB, FG, DC, ex A ad G, ducatur recta AG occurrens EB lineæ in H.

Dico AD, DC, FG, EB, EH lineas continuè esse proportionales.

Demonstratio.

QVoniam AF æqualis est lateri recto, GF, FA [b] lineæ æquales sunt: ratio igitur AF [c] ad AD, id est GF ad AD, duplicata est rationis GF ad CD: proportionales igitur sunt AD, CD, GF. quia verò AD, AF, AE sunt continuæ, etiam [d] CD, GF, BF proportionales sunt; continuant igitur eandem rationem AD, CD, GF, BE. deinde cùm ratio AF ad AE, id est GF ad HE, duplicata sit rationis GF ad BE, proportionales quoque sunt GF, BE, HE; continuæ igitur sunt in eadem ratione AD, CD, GF, BE, HE: quod erat demonstrandum.

[b] 9. huius. [c] 1. huius. [d] 33. huius.



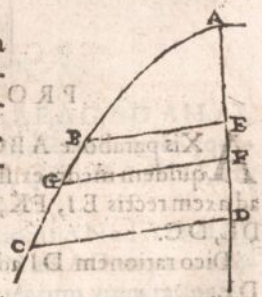
Corollarium.

Hinc sequitur AE, FB, FG, CD quoque in continua esse analogia: ratio enim AF ad AE, id est GF ad BE, duplicata est rationis GF ad BE, proportionales igitur sunt AE, BE, GF: sed vt BE ad GF, sic GF est ad CD, cum AE, AF, AD sint continuæ; proportionales igitur sunt AE, EB, GF, CD.

PROPOSITIO XXXVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD diuisa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ sint proportionales, & AD extrema æqualis lateri recto; ducantur autem ordinatim lineæ EB, FG, DC.

Dico AE ad EB, duplicatam habere rationem eius, quam habet AF ad FG.



Demonſtratio.



a 9. huius. b 27. Progreſſionum.

QVoniam AE, AF, AD lineæ ponuntur continuæ, proportionales quoque erunt EB, FG, DC: ponitur autem AD prima ſerici AE, AF, AD æqualis lateri recto, adeoque a ipſi DC primæ ſeriei EB, FG, DC, igitur b AE linea ad lineam EB tertia ad tertiam duplicatam habet rationem eius quam habet AF ad FG, ſecunda ad ſecundam. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

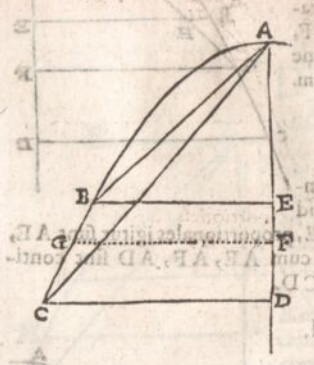
HInc ſequitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG rationem habere triplicatam eius quam habet AF linea ad lineam FG. eſt enim ratio rectanguli EAF ad rectangulum EBFG compoſita ex AE ad EB, & AF ad FG, ſed ratio AE ad EB, duplicata eſt rationis AF ad FG, igitur rectangulum EAF ad rectangulum EBFG. triplicatam habet rationem eius quam habet AF linea ad lineam FG.

PROPOSITIO XXXVIII.

SIt ABC parabolæ diameter AD diuiſa in E & F, vt AE, AF, AD lineæ ſint proportionales, & AF media æqualis lateri recto, ponantur autem ordinatim lineæ EB, DC: iungantúrque AB, AC.

Dico AB ad AC, rationem habere triplicatam eius, cuius EB ad DC eſt duplicata.

Demonſtratio.



c Coroll. 35. huius. d Coroll. 36. huius. e 33. huius.

DVcatur ordinatim linea FG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales ſunt, & AF media æqualis lateri recto, triangula AEB, ADC c ſimilia ſunt, adeoque vt AB ad AE, ſic AC ad CD: & inuertendo permutando vt AE ad CD, ſic AB ad AC; iam verò cùm AF æqualis facta ſit lateri recto, adeoque & FG eidem æqualis AE, d EB, FG, DC erunt continuæ; ratio igitur AE ad CD, primæ ad quartam triplicata eſt rationis BE ad FG, ſecundæ ad tertiam, igitur & AB ad AC, triplicatam habet rationis EB ad FG, cuius EB ad DC, e habet duplicatam. Quod erat demonſtrandum.

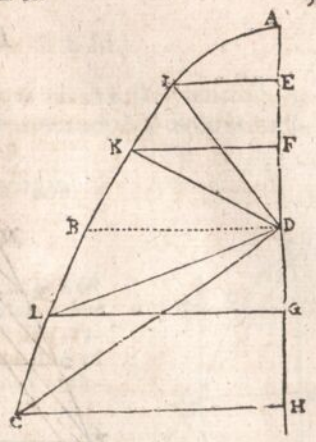
PROPOSITIO XXXIX.

AXis parabolæ ABC diuiſus ſit in continuè proportionales; & AD quidem media exiſtat inter AE, AF, AG, AH. ductiſq; ordinatim ad axem rectis EI, FK, DB, GI, HC, ponantur quoque DI, DK, DL, DC.

Dico rationem DI ad DC duplicatam eius eſſe quam habet KD ad DL.

Demon-

Demonſtratio.



QVoniam eandem continuant rationem AE, AF, AD, AG, AH, proportionales quoque ſunt [a] EI, FK, DB, GL, HC. quia verò ratio AE ad AH, duplicata eſt tam rationis EI ad CH, quàm rationis AD ad AH, id eſt [b] ED ad DH, cùm AE, AD, AH, proportionales ſint, ratio ED ad DH, eadem eſt cum ratione EI ad CH: ſimilia igitur ſunt triangula IED, CHD: quare ID ad DC, vt ED ad DH, id eſt AE ad AD, hoc eſt in duplicata rationis IE ad BD. ſimiliter oſtendentur triangula FKD, GLD ſimilia, & KD eſſe ad LD, vt FD ad GD, id eſt vt AF ad AD, id eſt in duplicata rationis KF ad BD: ſed ratio IE ad BD, duplicata eſt rationis KF ad BD, cùm IE, KF, BD proportionales ſint, ratio igitur ID ad CD, duplicata eſt eius quam habet KD ad LD. Quod erat demonſtrandum.

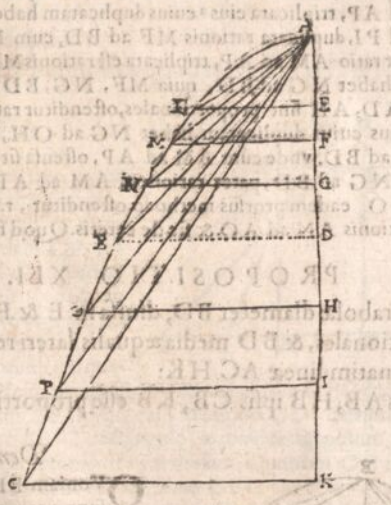
[a] 33. huius.

[b] 1. De progreſſionibus.

Corollarium.

SI iam AD fuerit media inter ſeptem continuè proportionales quarum extremæ AE, AH, ſimiliter oſtendetur ID ad DC, nimirum duas extremas triplicatam habere rationem eius quam habent KD ad DL, duæ quoque extremæ: & ſic de reliquis accreſcit ſemper proportio.

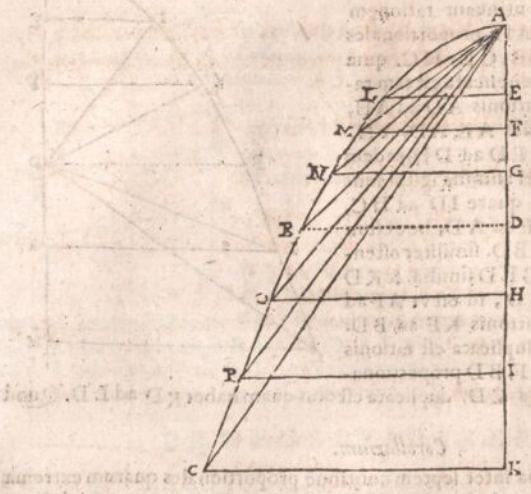
PROPOSITIO XL.



ESto ABC parabolæ axis AK diuiſus vt AE, AF, AG, AD, AH, AI, AK ſint continuæ proportionales, & AD media totius ſeriei æqualis lateri recto. ductiſq; ordinatim lineis EL, FM, GN, DB, HO, IP, KC, iungantur AL, AM, AN, AB, AO, AP, AC.

Dico rationem AM ad AP duplicatam eſſe rationis AN ad AO & AL ad AC rationem triplicatam eius quam habet AN ad AO, atque ita deinceps in infinitum procedendo inuenietur augmentum vnius rationis.

Demonſtratio.



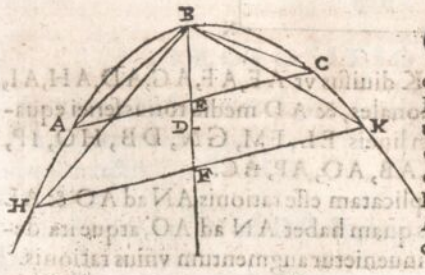
QVoniam AE, AF, AG, AD, &c. ſunt continuæ proportionales & totius ſerici media ponitur AD; erunt quoque AF, AD, AI continuæ proportionales, ſcilicet ſecunda, quarta, & ſexta. vnde cùm AD media æqualis ponatur lateri recto, erit ratio AM ad AP, triplicata eius [a] cuius duplicatam habet MF ad PI: eſt autem ratio MF ad PI, duplicata rationis MF ad BD, cum MF, BD, PI ſint proportionales; igitur ratio AM ad AP, triplicata eſt rationis MF ad BD, id eſt ſextuplicata eius quam habet NG ad BD, quia MF, NG, BD ſunt continuæ. eodem modo cum AG, AD, AH ſint proportionales, oſtenditur rationem AN ad AO, triplicatam eſſe eius cuius duplicatam habet NG ad OH, id eſt triplicatam eius quam habet NG ad BD. vnde cùm AM ad AP, oſtenſa ſit rationem habere ſextuplicatam ipſius NG ad BD, patet rationem AM ad AP, duplicatam eſſe rationis AN ad AO. eadem prorſus methodo oſtenditur, rationem AL ad AC, triplicatam eſſe rationis AN ad AO, & ſic de cæteris. Quod fuit demonſtrandum.

a 38. huius.

PROPOSITIO XLI.

SIt ABC parabolæ diameter BD, diuiſa in E & F, vt BE, BD, BF ſint proportionales, & BD media æqualis lateri recto, ponanturque per E & F ordinatim lineæ AC. HK:

Dico iunctas AB, HB ipſis CB, KB eſſe proportionales.



b *Ibid.*

Demonſtratio.

QVoniam BE, BD, BF continuæ ſunt proportionales, & BD media æqualis lateri recto, ratio [b] AB ad HB triplicata eſt eius, cuius duplicatam habet AE ad HF: ſed eadem de cauſa quoque ratio BC ad BK, triplicata eſt eius cuius duplicatam habet EC ad FK, id eſt AE, ad HF; igitur vt AB ad HB, ſic CB ad KB: quod erat demonſtrandum.

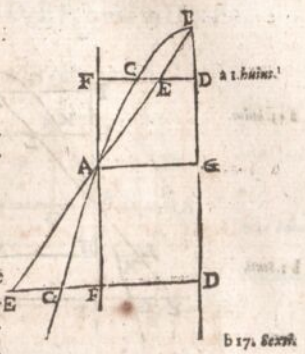
PRO.

PROPOSITIO XLII.

SEcent A B C parabolam diametri duæ quæuis A F, B D, iunctiſq; A, B diametrorum terminis, ponatur ad diametrum B D ordinatim linea C D, occurrens A B, A F lineis in E & F.

Dico F D, C D, E D in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



a 1. huius.

POnatur ex A ordinatim A G; vt B D ad B G, ſic D E eſt ad A G, id eſt ad D F: ſed B D ad B G, duplicatam habet a rationem eius quam habet D C ad A G, id eſt D F, ratio igitur D E ad D F, quoque duplicata eſt rationis D C ad D F: quare D E, D C, D F lineæ ſunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

IIſdem poſitis: ſequitur rectangulum F C D æquale eſſe rectangulo F D, C E, cùm enim F D, C D, E D proportionales ſint, vt F D ad C D, ſic F C eſt ad C E: rectangulum igitur F D C E b æquale eſt rectangulo F C D. Quod erat propoſitum.

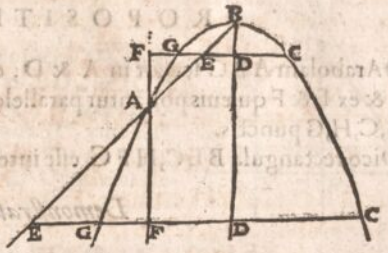
b 17. Sexti.

PROPOSITIO XLIII.

IIſdem poſitis quæ ſuprà:

Dico C F G rectangulum æquari rectangulo D F E.

Demonſtratio.



c 6. Secũdi.

d 4. Secũdi.

PRimo cadat F punctum extra parabolam. Quoniam igitur recta G C in D biſſecta eſt & ei in directum adiecta quædam G F; rectangulum G F C vnà cum quadrato G D, æquale eſt c quadrato F D: ſed F D quadrato æquale eſt rectangulum E F D, vnà cum d rectãgulo d E D F, id eſt vnà cum quadrato G D per præcedentẽ propoſ. igitur & rectangulo G F C vnà cũ quadrato G D, æquale eſt rectangulum E F D vnà cum quadrato G D: dempto igitur communi quadrato G D, manet G F C rectangulo, æquale rectangulum E F D.

Secundò cadat F punctum intra parabolam. Quoniam G C linea in D ſecta eſt bifariam & non bifariam in F, rectangulum G F C vnà cum c quadrato F D, æquale eſt quadrato G D: ſed G D quadrato æquale quoque eſt rectangulum F D E, id eſt rectangulum E F D vnà cum quadrato F D; rectangulum igitur G F C vnà cum quadrato F D æquale eſt rectangulo E F D, vnà cum quadrato F D: quare dempto communi quadrato F D, manet G F C rectangulum æquale rectangulo E F D. Quod erat demonſtrandum.

c 5. Secundi.

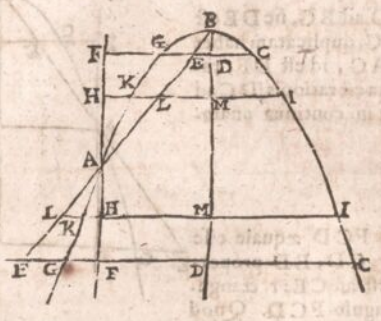
PRO-

PROPOSITIO XLIV.

SInt iterum in parabola A B C diametri duæ quæuis A F, B D : & ad B D quidem ordinatim ponantur lineæ G C, K I occurrentes diametro F A in F & H.

Dico esse vt A H ad A F, sic I H K rectangulum ad rectangulũ C F G.

Demonstratio.



a 43. huius.

b 1. Sexti.

DVcta AB linea secet F C, HI rectas in E & L, erit igitur L H M rectangulum æquale [a] rectangulo K H I, & E F D rectangulum æquale rectangulo G F C. vnde K H I rectangulum est ad rectangulum G F C, vt L H M rectangulum ad rectangulum E F D : sed L H M rectangulum est ad rectangulum E F D, vt L H [b] linea ad lineam E F, id est vt A H ad A F, igitur & K H I rectangulum ad rectangulum G F C est vt A H linea ad lineam A F. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc sequitur, quoque esse vt A H ad A H; sic I H K rectangulum ad rectangulum I H K, est enim vt A H ad A H, sic H L ad H L, id est L H M rectangulum ad rectangulũ L H M. sed rectangulis L H M æqualia ostensa sunt rectangula I H K : igitur vt A H ad A H, sic I H K rectangulum est ad rectangulum I H K.

PROPOSITIO XLV.

PArabolam A B C secent in A & D, diametri duæ æquales A E, D F: & ex E & F quæuis ponantur parallelę E C, F G occurrentes parabolæ in B, C, H, G punctis.

Dico rectangula B E C, H F G esse inter se æqualia.

Demonstratio.



POnantur ex D & A lineæ D L, A K parallelæ F G; & A K quidem occurrat D F diametro in I, & D L demissæ ex K diametro in N: recta verò A E producta secet D L in M, vt D F ad D I, sic H F G [c] rectangulum est ad rectangulum A I K, & vt A E ad A M, sic B E C est ad rectangulum D M L: igitur cùm E A, D F, &

c Corol. 44.

DF, & DI, MA lineæ æquales sint, rectangulum HFG ad IAK, rectangulum est vt BEC rectangulum ad rectangulum DML; & permutando HFG rectangulum ad rectangulum BEC, vt DML rectangulum est ad rectangulum IAK. sed DML rectangulum, id est MDN, ob DM, NL a æquales lineas, æquatur a 30. huius. rectangulo IAK; rectangulum igitur HFG, rectangulo BEC æquale est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVI.

PArabolam ABC secent duæ quæuis diametri BD, EF, quas in D & F secent quæcunque parallelæ AC, GH.

Dico esse vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulũ GFH.

Demonstratio.

SEcetur EF linea vel producatur in K, vt EK sit æqualis BD, & per K ponatur LM parallela GH, erit igitur b vt EK ad EF, sic LKM rectangulum ad rectangulum GFH. quia verò EK æquatur ipsi BD, erit LKM c rectangulum æquale rectangulo ADC, igitur vt BD ad EF, sic ADC rectangulum ad rectangulum GFH. Quod erat demonstrandum.



b 44. huius

c 45. huius.

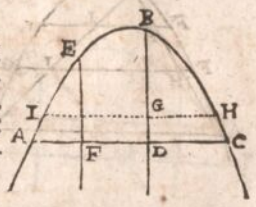
PROPOSITIO XLVII.

SInt iterum in ABC parabola duæ quæuis diametri BD, EF, quas in F & D secet recta quæuis AC.

Dico ADC rectangulum esse ad rectangulum AFC, vt BD ad EF.

Demonstratio.

FIat EF æqualis BG; & per G ponatur IH æquidistans AC, erit igitur vt d BG ad BD, sic IGH rectangulum ad rectangulum ADC: sed IGH rectangulum æquale est e rectangulo AFC, cum BG, EF lineæ sint æquales, igitur vt EF ad BD, sic AFC rectangulum ad rectangulum ADC. Quod erat demonstrandum.



d 44. huius.

e 45. huius.

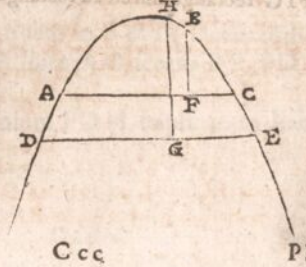
PROPOSITIO XLVIII.

PArabolam ABC subtendant duæ quęuis parallelę AC, DE, quibus proportionaliter in F & G, diuisis ponantur diametri BF, HG.

Dico BF ad HG duplicatam habere rationem eius quam habet AC ad DE.

Demonstratio.

QVoniam AC, DE lineæ in F, & G proportionaliter sunt diuisę, erit AFC, f rectangulum ad DGE rectangulum in duplicata ratione AF ad DG, id est AC ad DE, sed BF est ad HG g vt AFC rectangulum ad rectangulum DGE; igitur BF ad HG, duplicatam habet rationē eius quam habet AC ad DE. Quod erat demonstrandum.



f Per elementa.

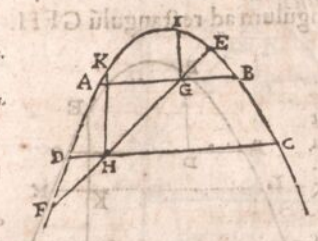
g 46 huius.

PROPOSITIO XLIX.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis parallelæ AB, CD, quas vtcunque in G & H, diuidat linea EF.

Dico esse vt AGB rectangulum ad rectangulum DHC sic FGE rectangulum ad rectangulum FHE.

Demonstratio.



a 46. huius.

b 47. huius.

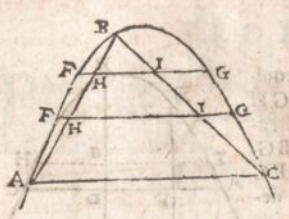
ERigantur ex H & G diametri HK, GI. erit igitur vt GI ad HK, [a] sic AGB rectangulum ad rectangulum DHC: sed vt GI ad HK, [b] sic FGE rectangulum quoque ad rectangulum FHE; igitur vt AGB rectangulum, ad rectangulum DHC, sic FGE rectangulum est ad rectangulum FHE. Quod erat demonstrandum.

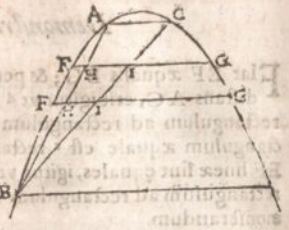
PROPOSITIO L.

ESto ABC parabolæ inscriptum triangulum ABC cuius duo latera AB, CB, duæ quęuis secent FG æquidistantes AC in H & I.

Dico esse vt FHG rectangulum ad rectangulum FHG sic FIG rectangulum ad rectangulum FIG.

Demonstratio.





c 49. huius.

REctangulum FHG est ad [c] rectangulum FHG, vt AHB rectangulum est ad rectangulum AHB: & FIG rectangulum est ad rectangulum FIG, vt CIB rectangulum est ad rectangulum CIB: est autem vt AHB rectangulum ad rectangulum AHB, sic CIB rectangulum ad rectangulum CIB quia ex ijsdem rationem habeant compositam, igitur vt FHG rectangulum ad rectangulum FHG, sic FIG rectangulum est ad rectangulum FIG. Quod erat demonstrandum.

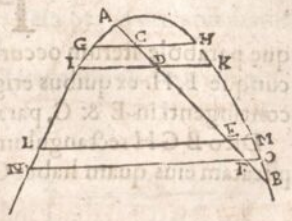
PRO-

PROPOSITIO LI.

SEcet AB parabolam recta quæuis AB in A & B, quâ diuisâ vtcunque in C & D, diuidatur in E & F, vt AC, AD lineis sint æquales BF, BE singulæ singulis; dein per CD, EF puncta parallelę ducantur GH, IK, LM, NO.

Dico esse vt GCH ad IDK, rectangulum sic OFN ad MEL rectangulum.

Demonstratio.



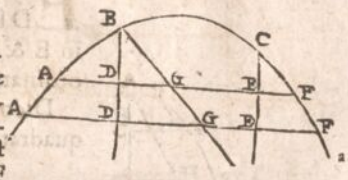
ESt enim per quadragesimam nonam huius rectangulum GCH ad IDK, vt ACB ad ADB. hoc est BFA ad BEA, quia AC, AD æquantur FB, EB, sed vt BFA ad BEA, sic est NFO ad LEM: igitur GCN ad IDK, rectangulum, eandem obtinet rationem quã NFO rectangulum ad LEM: quod fuit demonstrandum. nec mirum, cùm GCH rectangulum ipsi NFO, & rectangulo IDK æquetur LEM rectangulum.

PROPOSITIO LII.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis diametri BD, CE, quas in D & E, diuidant vtcunque parallelæ duæ AF: dein ex B, linea ducatur quæuis BG secans AF lineas in G G.

Dico esse GDE rectangulum ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF.

Demonstratio.



246. huius.

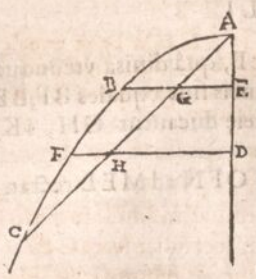
QVoniam DE lineæ per hypothesim æquidistant, & BD, CE sunt diametri, rectæ DE inter se æquales sunt ob ED parallelogrammum. quare GDE rectangulum ad rectangulum GDE est vt GD ad GD, id est BD ad BD. sed vt BD ad BD, sic ADF [a] rectangulum est ad rectangulum ADF: igitur & GDE rectangulum, est ad rectangulum GDE, vt ADF rectangulum est ad rectangulum ADF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, quam in E & D, secent ordinatim lineę BE, FD, ducaturque ex A linea AC, secans BE, FD ordinatim positas vtcunque in G & H.

Dico BEG rectangulum ad rectangulum FDH triplicatam habere rationem eius, quam habet BE ad FD.

Demonſtratio.



a *Per elementa.*

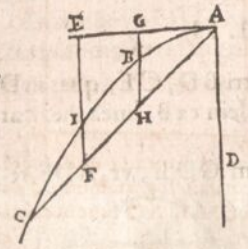
REctangulum BEG ad rectangulum FDH [a] rationem habet compoſitam ex BE ad FD, & GE ad HD, id eſt AE ad AD: ſed ratio AE ad AD duplicata eſt rationis BE ad FD: rectangulum igitur BEG ad rectangulum FDH triplicatam habet rationem eius quam habet BE ad FD. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE; ductaque quauis AC quę parabolę iterum occurrat in C, ſumantur in AC linea puncta quæcunque F, H. ex quibus erigantur diametri FE, HG, occurrentes AE, contingenti in E & G, parabolę verò in B, & I.

Dico BGH rectangulum ad rectangulum IEF rationem habere triplicatam eius quam habet GH ad EF.

Demonſtratio.



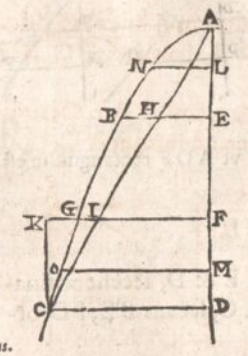
b *Educitur ex prima huius.*

REctangulum BGH ad rectangulum IEF, rationem habet compoſitam ex BG ad IE, & ex GH ad EF, id eſt AG ad AE: ſed ratio BG [b] ad IE duplicata eſt rationis AG ad AE, igitur rectangulum BGH ad rectangulum IEF rationem habet triplicatam eius quam habet GH ad EF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LV.

ESto ABC parabolæ diameter AD, quam in D ſecet ordinatim linea CD: diuiſaq; AD in E & F, vt AE, DF ſint æquales, ponantur ordinatim EB, FG.

Dico EB, FG quadrata ſimul ſumpta, æquari quadrato CD.



c *Per elementa.*

d 42. *huius.*

Demonſtratio.

DVcta AC occurrat EB lineæ in H, & FG in I, erigaturque ex C diameter CK, ſecans FG in K. Quoniam AE per hypotheſim æqualis eſt FD, id eſt CK, angulus AHE æqualis angulo AIF id eſt angulo KIC (ob HE, GF æquidiſtantes) & angulus AEH angulo æqualis CKI, erit AHE [c] triangulum æquale triangulo CKI; & HE lineæ æqualis KI. Rurſumcùm tam CD, GF, [d] IF; quàm CD, BE, HE lineę proportionales ſint, quadrata FG, BE mediarum, æqualia ſunt rectangulis CDIF, CDHE; hoc eſt rectangulis IFK, IKF, quia HE, KI lineæ æquales ſunt, ſed FK quadratum æquale eſt [e] rectangulis IFK, IKF, igitur & quadrata FG, BE ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato FK, id eſt quadrato CD. Quod erat demonſtrandum.

e 2. *ſecundi.*

Corolla-

Corollarium.

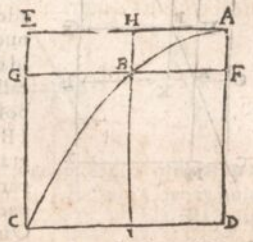
HInc sequitur: si rursum AD diuidatur in L & M, vt AL, DM lineæ æquales sint & ordinatim ponantur LN, MO, quadrata LN, MO simul sumpta æquari quadratis EB, FG simul sumptis: patet ex demonstratis, quia tam EB, FG quadrata, quàm LN, MO simul sumpta æqualia sunt quadrato CD.

PROPOSITIO LVI.

PArabolam ABC cuius diameter AD & ordinatim ad illam posita CD, contingat in A linea AE, quam in E secet diameter CE: assumptoq; in sectione puncto quouis B, ponatur per B ordinatim linea FG, occurrens AD lineæ in F, & EC in G: dein per B ducatur diameter HI secans ACD ordinatim positam in I.

Dico parallelogramma AB, AG, AI, AC in continua esse analogia.

Demonstratio.



QVoniam AE, FG lineæ æquidistant, parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG, est vt FB linea [a] ad lineam FG, id est CD: est autem parallelogrammum AB ad parallelogrammum AI, vt AF linea ad lineam AD, hoc est in duplicata [b] ratione FB ad DC: igitur parallelogrammum AB, ad parallelogrammum AI, duplicatam habet rationem eius, quam habet AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG: parallelogramma igitur AB, AG, AI in continua sunt analogia: Rursum parallelogrammum AI est ad parallelogrammum AC, vt DI linea ad lineam DC, hoc est vt AB parallelogrammum ad parallelogrammum AG. Parallelogramma igitur AB, AG, AI, AC sunt in continua proportione. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. Sexti.

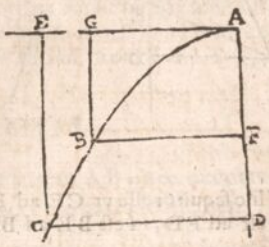
[b] 1. huius.

PROPOSITIO LVII.

PArabolam ABC, cuius diameter AD, contingat in A linea AE, ductisque ordinatim FB, DC, erigantur ex C & B, diametri EC, BG occurrentes contingenti in G & E.

Dico AGB parallelogrammum ad parallelogrammum AEC triplicatam habere rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE.

Demonstratio.



RAtio parallelogrammi AGB ad AEC parallelogrammum [c] composita est, ex ratione AG ad AE, & GB ad EC; sed ratio GB ad EC, id est AF ad AD, duplicata est rationis AG ad AE; id est FB ad DC, parallelogrammum igitur AGB ad parallelogrammũ AEC triplicatam habet rationem eius quam habet AG linea ad lineam AE. Quod erat demonstrandum.

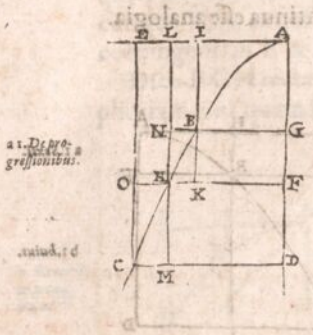
[c] Per elementa.

PROPOSITIO LVIII.

PArabolam A B C cuius diameter A D, & ordinatim ad illam posita C D, contingat in A linea A E, quam in E secet diameter C E, factisq; A D, A F, A G continuè proportionalibus, ducatur ordinatim lineæ F H, G B: & per B & H, diametri agantur I K, L H occurrentes F H, D C lineis in K & M: secet autem G B linea diametrum L H in N, & F H linea diametrum E C in O.

Dico H D parallelogrammum esse ad parallelogrammum F B, vt H E parallelogrammum est ad parallelogrammum B L.

Demonstratio.



a 1. Def. 4. huius. a

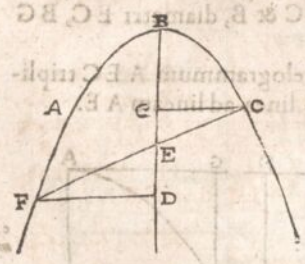
RAtio parallelogrammi H D ad parallelogrammum F B, composita est ex ratione F H ad G B, & F D ad F G: est autem vt F H ad G B, sic D C ad F H id est E A ad L A, id est E L ad L I (cùm A G, A F, A D, adeoque G B, F H, D C, id est E A, L A, I A sint continuę proportionales) & vt F D ad F G, sic [a] D A ad F A; id est F A ad G A; id est H L ad B I: ratio igitur parallelogrammi H D ad parallelogrammum F B, composita est ex ratione E L ad L I, & ex ratione L H ad I B; sed ex ijsdem quoque composita est ratio parallelogrammi H E, ad parallelogrammum B L; igitur vt H D parallelogrammum, ad parallelogrammum F B, sic H E parallelogrammum est ad parallelogrammum L B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

ESto A B C parabolæ diameter B D, quam in E secet vtcunque recta F C occurrens vtrimque parabolæ in C & F, ducantur autem ex C & F, ordinatim lineæ E G, F D.

Dico B G, B E, B D lineas esse proportionales.

Demonstratio.



QVoniam C G, F D ordinatim positæ sunt ad diametrum B D, ratio B G ad B D, duplicata est eius quam habet G C ad F D, id est G E ad E D; igitur B G, B E, B D lineæ sunt proportionales, posità enim media B E inter B G, B D erit vt B G ad B E, ita G E ad E D, & ratio B G ad B D, duplicata rationis G E ad E D. igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc sequitur esse vt C E ad E F, sic B E ad B D. nam vt C E ad E F, sic G E est ad E D, id est B E ad B D.

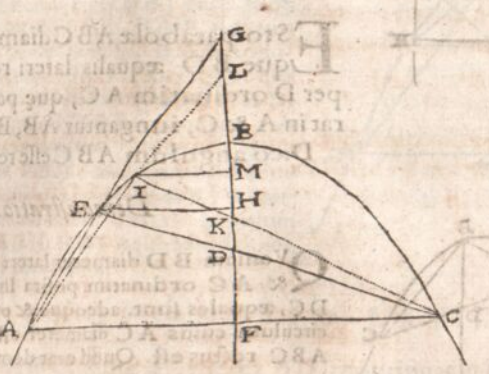
PRO-

PROPOSITIO LX.

ESto ABC parabolæ diameter BF, in qua ſumpto quouis puncto H, ponantur continuæ proportionales BH, BG, BF: ductaque ordinatim HE, agatur per F linea ipſi HE æquidiſtans, occurrens GE lineæ in A & parabolæ in C: ducaturque EC occurrens diametro in D.

Dico DB, BG lineas eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.



QVoniam BH, BG, BF ponuntur continuæ proportionales, & CF ordinatim ad diametrum GB applicata erit A punctũ ad parabolam ABC per Corr. 25. huius ſunt autem per præcedentem proportionales quoque BH, BD, BF; media igitur DH æqualis eſt [a] mediæ DF.

a *Per elementa.*

PROPOSITIO LXI.

IIſdem poſitis ducatur ex C alia quæuis CI occurrens diametro BD in K; parabolæ verò in I; tum ex A per I ducta linea conueniat cum diametro in L, ponaturque ex I ordinatim linea IM.

Dico eſſe GB ad LB, vt EH ad IM.

Demonſtratio.

SI inter BM & BF, media fiat BL oſtendetur vt priùs LB æqualẽ eſſe ipſi BK, & iunctam LI occurrere parabolę & AC rectę in A puncto, vnde cùm tam BF, BD, BH lineæ, quàm BF, BK, BM habentes communem primam BF continuæ ſint proportionales, ratio BH ad BM, tertię ad [b] tertiam duplicata eſt rationis BD ad BK, id eſt BG [c] ad BL ſecundæ ad ſecundam: ſed & ratio BH ad BM, quoque duplicata eſt rationis EH ad IM: igitur vt EH ad IM, ſic GB ad LB. Quod erat demonſtrandum.

b 27. *Dis progreſſ.* c 60. *huius.*

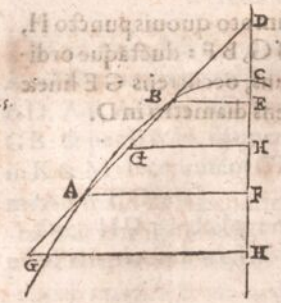
PROPOSITIO LXII.

SIt ABC parabolæ diameter CD, ponatur autem AB linea occurrens parabolæ in duobus punctis AB, diametro verò extra ſectionem, in D, ponanturque ordinatim BE, AF.

Dico CE, CD, CF lineas continuè eſſe proportionales.

Demon-

Demonſtratio.



a *Coroll.* 25. *huius.*
b *Ibid.*

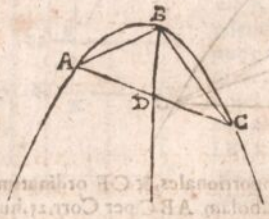
SIn verò: ponantur continuę proportionales CE, CD, CH & ex H ordinatim ducatur HG, occurrens AB lineæ in G: erit igitur punctum G ad parabolam ABC: adeoque linea AB [a] parabolæ in tribus punctis occurrit. Quod fieri [b] non poteſt, vnde CE, CD, CF continuæ ſunt proportionales.

PROPOSITIO LXIII.

ESto parabolæ ABC diameter quæcumque BD æqualis lateri recto, actaque per D ordinatim AC, quę parabolæ occurrat in A & C, iungantur AB, BC.

Dico angulum ABC eſſe rectum.

Demonſtratio.



c 9. *huius:*

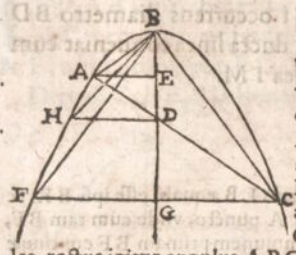
QVoniam BD diameter lateri recto æqualis eſt, & AC ordinatim poſita lineæ DB, [c] DA, DC, æquales ſunt. adeoque & puncta ABC, ad circulum cuius AC diameter eſt: angulus igitur ABC rectus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIV.

ESto ABC parabolæ axis BD æqualis lateri recto, actâque per D quâuis AC, quæ parabolæ occurrat in A & C, iungantur AB, BC:

Dico angulum ABC eſſe rectum.

Demonſtratio.



d 59 *huius.*
e *Coroll.* 35. *huius.*

POnantur ex A & C ordinatim lineæ AE, CGF. erunt igitur BE, [d] BD, BG lineæ proportionales; quia verò BD media æqualis lateri recto eſt, erunt ABE, [e] FBG triangula ſimilia; & angulus BAE æqualis angulo FBG, id eſt CBG: ſed angulus BAE vnà cum angulo ABE, recto eſt æqualis, quia angulus AEB ad axem rectus eſt: igitur & angulus CBD vnà cum angulo ABE, vni recto ſunt æquales. rectus igitur angulus ABC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXV.

IIſdem poſitis:

Dico AB ad BC, triplicatam habere rationem eius, cuius AD ad DC duplicata eſt.

Demonſtratio.

QVoniam in triangulis GBF, CBG anguli ad G recti ſunt, lineæque FG, GC æquales ex hypotheſi, triangula FBG, CBG inter ſe æqualia ſunt, & FB, CB lineæ quoque æquales: vnde cùm ratio [f] AB ad FB, triplicata ſit eius, cuius duplicatam

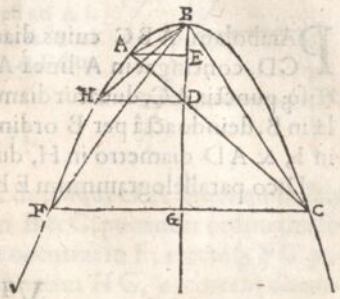
f 38. *huius.*

catam habet AE ad FG, erit & AB ad BC, ratio triplicata rationis AE ad FG, id est AE ad CG, id est AD ad DC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

IIsdem positis ducatur ex D ordinatim linea D H, iungaturq; HB: Dico angulum ABF, lineâ HB diuisum esse bifariam.

Demonstratio.



QVoniam anguli AEB, HDB, recti sunt, reliqui duo anguli ABE, BAE reliquis HBD, DHB æquales sunt. Sed BAE angulo æquatur [a] angulus FBG, duo igitur anguli FBG, ABE æquales sunt duobus HBD, BHD: id est angulo HBD bis sumpto, ob HD, DB [b] lineas æquales: dempto igitur communi angulo FBG, manent anguli duo HBD, HBF æquales angulo ABE: à quibus rursum si communem demas angulum HBD; reliqui ABH, HBF æquales manent. Quod erat demonstrandum.

[a] Coroll. 35. huius.

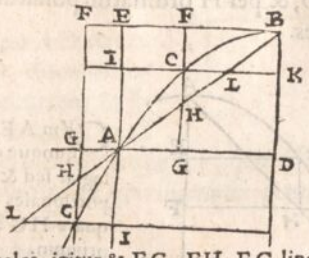
[b] 9. huius.

PROPOSITIO LXVII.

PArabolam ABC, cuius diameter BD, contingat in B linea BE; ex quouis autem puncto A in perimetro assumpto ductâ ordinatim AD iunctisq; AB punctis sumatur in contingente punctum quodcumque F, ex quo linea demittatur FG, parallela diametro BD, occurrens parabolæ in C, AB iunctæ in H, & ordinatim positæ in G.

Dico FC, FH, FG lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.



ERecta ex A diameter AE occurrat contingenti in E, & per C ordinatim ponatur IK secans AB, AE lineas in L & I, & BD diametrum in K. vt KL ad KC, sic BL est ad BH, id est FC ad FH: & vt CK ad IK, id est FB, ad EB, sic FH est ad EA, id est ad FG: sed LK, CK, IK, lineæ sunt continuæ [c] proportionales; igitur & FC, FH, FG lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

[c] 42. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

IIsdem datis sumatur in contingente quoduis punctum F ex quo ducatur FH parallela BD, occurrens lineæ AB in H.

Dico HC esse ad CF vt AH ad HB.

Demonſtratio.

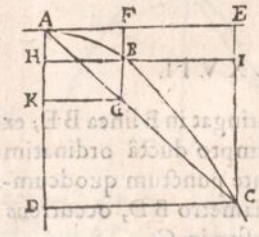
QVoniam GF, HF, CF proportionales ſunt, HF eſt ad CF, vt GF ad HF, hoc eſt vt AE ad HF, hoc eſt vt AB ad HB: igitur diuidendo HC eſt ad CF, vt AH ad HB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIX.

PArabolam ABC cuius diameter AD, & ordinatim ad illam poſita CD, contingat in A linea AE, quam in E ſecet diameter CE. iunctiſq; punctis AC, ducatur diameter quæcumque FG, occurrens parabolæ in B. deinde actâ per B ordinatim lineâ HI, quæ EC rectæ occurrat in I, & AD diametro in H, ducatur ex G linea GK parallela DC.

Dico parallelogrammum EB æquari parallelogrammo KB.

Demonſtratio.



a 68. huius.

b Per elementa.

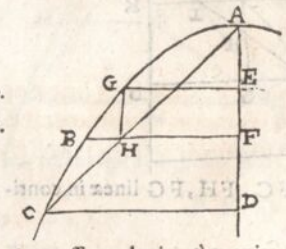
VT AG ad GC, ſic AF ad FE, id eſt HB ad BI: ſed vt [a] AG ad GC, ſic FB ad BG: igitur vt HB ad BI, ſic FB ad BG; ſunt autem anguli ad B oppoſiti æquales. igitur parallelogrammum EB æquale [b] eſt parallelogrammo KB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXX.

SIt ABC, parabolæ diameter AD diuiſa in E & F, vt AE, AF, AD ſint proportionales, poſitiſq́ue ordinatim EG, FB, DC, iuncta AC occurrat FB in H:

Dico HG æquidiſtare diametro AD, & contra ſi HG æquidiſtet diametro AD, & per H ordinatim ponatur FB, dico AE, AF, AD eſſe proportionales.

Demonſtratio.



c 33. huius.

d 42. huius.

e Per elementa.

f 42. huius.

g Per conuerſam 33. huius.

CVm AE, AF, AD proportionales ſint, rectæ quoque [c] CD, BF, GE in continua ſunt analogia. ſed & DC, FB, FH [d] quoque ſunt proportionales; æquales igitur ſunt HF, GE lineæ. quare HG æquidiſtat [e] diametro AD, quod fuit primum.

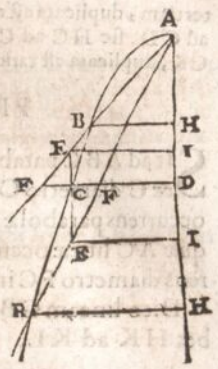
Sit iam HG parallela AD, & per H ordinatim applicetur BF; dico AE, AF, AD quoq; in continua eſſe analogia, cùm enim CD, BF, HF, lineæ [f] proportionales ſint, & GE æquetur HF, erunt & CD, BF, GE continuæ proportionales. vnde AD, AF, AE [g] in continua quoque ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXI.

ESto ABC parabolę diameter AD, quam in D ſecet ordinatim linea DC, actâq́ue per C diametro CE, ducatur ex A linea AF ſecans parabo-

parabolam in B, & EC diametrum in E, occurrens verò DC lineæ in F.

Dico AB, AE, AF lineas esse in continua analogia.



Demonstratio.

POnantur ex B & E ordinatim lineæ BH, EI. Ratio AH ad AD, duplicata est rationis HB ad DC; id est HB ad IE: sed vt HB ad IE, sic AH est ad AI. igitur ratio AH ad AD, duplicata est rationis AH ad AI: quare AH, AI, AD lineæ, id est AB, AE, AF sunt proportionales. Quod erat demonstrandum.

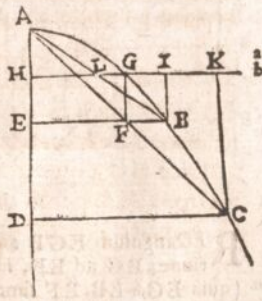
PROPOSITIO LXXII.

ESto ABC parabolæ diameter AD: ductisque ex A lineis quibusuis AB, AC, quæ parabolæ occurrant in B & C, ponantur ordinatim lineæ CD, BE; & BE quidem AC lineæ occurrat in F; erectâq; FG parallelâ diametro AD, ponatur per G ordinatim HG, occurrens diametris IB, KC in I & K. rectæ autem AB in L:

Dico HL, HG, HI, HK lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVoniam HG, EB, DC, ordinatim positę sunt, & FG parallela diametro AD, rectæ HG, HI, HK [a] in continua sunt analogia. sed & HL, HG, HI [b] proportionales sunt. igitur HL, HG, HI, HK in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.



a 70. huius.
b 45. huius.

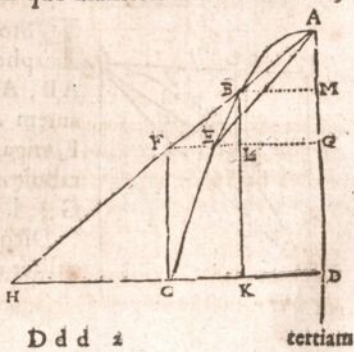
PROPOSITIO LXXIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim ad illam posita CD. ducatur autem ex A linea AE, sectioni occurrens in E: actâque per E ordinatim FG, erigatur ex C diameter CF, occurrens FG in F; iunganturque AF, quæ CD lineæ occurrat in H, sectioni verò in B puncto ex quo diameter demittatur BK, secans FG lineam in L, & CD in K.

Dico HC ad CK duplicatam habere rationem eius quã habet FE ad EL.

Demonstratio.

POnatur ex B ordinatim linea BM. Quoniam FC diameter est & HCD ordinatim posita ad diametrum AD, rectæ AB, AF [c] AH proportionales sunt; igitur & AM, AG, AD, item BM, EG, [d] CD lineæ, id est KD, CD, HD, in continua sunt analogia. Quare cùm vtriusque seriei primæ BM, KD æquales sint, ratio HD ad CD, tertiæ ad



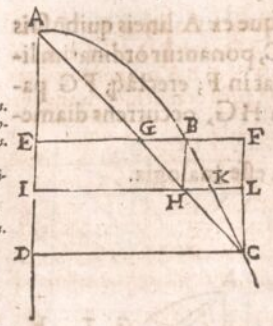
c 71. huius.
d 33. huius.

a 27. De progressionibus. b 1. De progressionibus. tertiam, a duplicata est rationis CD ad EG, id est FG, ad EG: est autem vt b HD ad CD, sic HC ad CK, & vt FG ad EH, sic FE ad EL, ratio igitur HC ad CK, duplicata est rationis FE ad EL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

SIt ad ABC parabolæ diametrum AD, ordinatim posita DC: erectaq; ex C diametro CF, iungatur CA, ponaturque ordinatim quæuis FE occurrens parabolæ in B, & AC iunctæ in G. tum ex B demissâ diametro, quæ AC lineæ occurrat in H, ponatur per H ordinatim linea IL occurrens diametro FC in L, & sectioni in K:

Dico lineam GB ad BF, duplicatam habere rationem eius quam habet HK ad KL.



c 42. huius. d 1. De progressionibus. e 27. De progressionibus. f 1. De progressionibus.

Demonstratio.

QVoniam tam FE, BE, c GE lineæ, quàm LI, KI, HI sunt proportionales habentes æquales primos terminos FE, LI, ratio GE, ad HI, tertiæ ad tertiam, id est ratio GE ad BE, id est d GB ad BF, duplicata est e rationis EB ad IK, secundæ ad secundam, id est rationis IH ad IK, id est HK f ad KL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

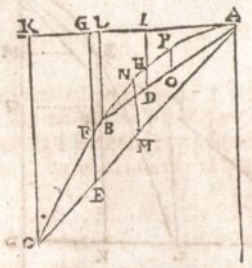
EAdem figurâ manente:

Dico rectangulum EGB ad rectangulum EFB, triplicatam habere rationem eius quam habet linea GB ad lineam BF.

Demonstratio.

g Per elementa. h 42. huius. REctangulum EGB ad rectangulum EFB, rationem habet compositam ex ratione g EG ad EF, id est ex duplicata ratione EG ad EB, id est GB ad BF, (quia EG, h EB, EF sunt proportionales) & ex GB ad BF; igitur rectangulum EGB ad rectangulum EFB triplicatam habet rationem eius quam habet linea GB ad BF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.



ESto ABC parabola, assumptoque in peripheria puncto quouis A, ducantur rectæ AB, AC occurrentes iterum parabolæ: diuisis autem AB, AC lineis proportionaliter in D & E, erigantur diametri EG, DI, occurrentes parabolæ in F & H, & actæ per A contingenti in G & I.

Dico GE, DI lineas in F & H, proportionaliter esse diuisas.

Demon-

Demonſtratio.

ERigantur ex C & B, diametri CK, BL. Quoniam AC, AB proportionaliter in E & D ponuntur diuiſæ, vt BA ad DA, id eſt BL ad DI; ſic CA eſt ad EA, id eſt KC ad GE; ſed vt BL ad DI, ſic DI eſt ad [a] HI, & vt KC ad GE, ſic GE eſt ad GF; igitur vt DI ad HI, ſic GE ad GF. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Per pauſ. 80 ante demonſtrata.*

PROPOSITIO LXXVII.

ISdem poſitis, diuidantur rurſum proportionaliter lineę AB, AC in M & O, eriganturq; diametri MN, OP.

Dico FE eſſe ad MN, vt DH eſt ad OP.

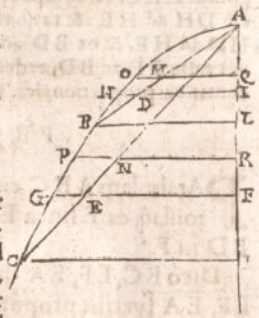
Demonſtratio.

ESt enim vt CEA rectangulũ, ad rectangulum CMA ſic FE ad NM. & vt BDA rectangulum ad rectangulum BOA, ſic DH ad PO. ſed BDA ad BOA, rectangulum eſt vt CEA ad CMA, rectangulum, quia CA, BA proportionaliter ponuntur diuiſæ; igitur vt FE ad NM, ſic DH ad PO. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

ISdem poſitis agantur per D & E ordinatim ad diametrum ex A demiſſam lineæ HDI, FEG.

Dico HI, FG lineas in D & E proportionaliter eſſe diuiſas.



[b] *Ex 42. huius.*

Demonſtratio.

POnantur ordinatim lineæ BL, CK. Quoniam igitur AB, AC lineæ in D & E proportionaliter ſunt diuiſæ, vt CK ad EG, ſic BL eſt ad DI. ſed CK ad EG, duplicatam [b] habet rationem FG ad EG, & BL ad DI, duplicatam habet rationem HI ad DI, igitur vt FG ad EG, ſic HI ad DI, & diuidendo vt FE ad EG, ſic HD ad DI. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIX.

ISdem poſitis, diuidantur rurſum AB, CA lineę proportionaliter in M & N, & rectæ ducantur MOQ, NPR æquidiſtãtes ipſis HI, FG.

Dico vt HD ad OM, ſic FE eſſe ad PN.

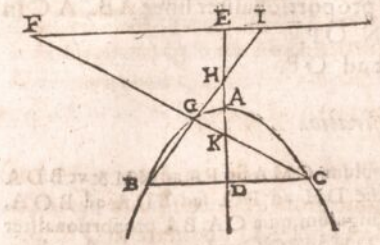
Demonſtratio.

CVm enim lineæ AB, AC proportionaliter in M, D, N, E punctis ſint diuiſæ, erit MQ ad DI, vt NR ad EG, & permutando MQ ad NR, vt DI ad EG; ſed per præcedentem eſt vt MQ ad NR, ſic OM ad PN; & vt DI ad EG, ſic HD ad FE; igitur vt OM ad PN, ſic HD ad FE, & permutando vt OM ad HD, ſic PN ad FE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

Sit ad A B C parabolæ diametrum A D ordinatim posita linea C B: sectaq; A E æqualis ipsi A D ponatur per E linea E F parallela rectę B C; dein ex C ducatur linea C F, occurrens parabolę in G puncto, per quod ex B agatur linea occurrens axi A D in H, & E F lineæ in I;

Dico F E, B D, E I lineas in continua esse analogia.



260. huius.

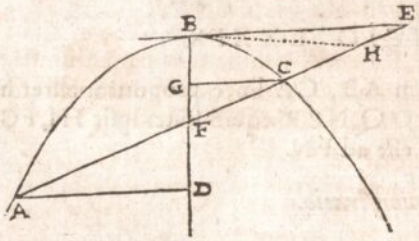
Demonstratio.

Linea C F occurrat diametro in K. Quoniam A E linea æqualis ponitur lineę A D, & H A, A K lineæ quoque inter se æquantur, erit E H reliqua æqualis reliquę K D. Rursum triangulum F K E ad triangulum D K C duplicatam habet rationem E K lineæ ad lineam K D, id est H D ad E H. est autem & triangulum B H D, ad triangulum E H I in duplicata ratione H D ad H E: igitur vt triangulum F K E ad triangulum D K C, sic B H D triangulum, ad triangulum E H I adeoq; rationes ex iisdem habent cõpositas, sed ratio trianguli F K E ad triangulum D K C, est composita ex ratione F E ad D C, id est B D; & ex E K ad K D, id est D H ad H E: & ratio trianguli B H D, ad triangulum E H I est composita ex H D ad H E, & ex B D ad E I, ablata igitur communi ratione H D ad H E, manet ratio F E ad B D, eadem cum ratione B D ad E I. quare F E, B D, E I lineæ sunt continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

PArabolam A B C cuius diameter B D contingat in B linea B E; demissaq; ex E linea E A occurrat parabolæ in C & A, diametro vero B D in F.

Dico E C, E F, E A lineas in continua esse analogia, & contra si E C, E F, E A fuerint proportionales, dico E B, sectionem contingere.



Demonstratio.

POnantur ex A & C ordinatim lineæ A D, C G ad B D, diametrum: quoniam igitur B E, G C lineæ equidistant, erit vt G B ad F B, sic C E ad F E; & vt F B ad D B, sic F E ad A E. sed B G, B F, B D lineę sunt proportionales; igitur & E C, E F, E A lineę in continua sunt analogia. Quod erat primum.

Sint iam E C, E F, E A proportionales, iunganturque E B, dico E B lineam, sectionem in B contingere. Sin verò, agatur per B tangens, quæ A E lineæ occurrat in H. erunt igitur H C, H F, H A continuæ proportionales, & C F ad F A, vt H C ad H F: sed & C F est ad F A, vt E C ad E F (cùm E C, E F, E A sint proportionales) igitur vt H C ad H F, sic E C ad E F: & diuidendo vt H C ad C F, sic E C ad C F, quod absurdum, cùm H C ex hypothesi, maior sit vel minor rectâ E C. quare H B non est tangens, nec quæuis alia præter E B. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII.

EAdem manente figura propositum sit à dato puncto extra sectionem contingentem ducere.

Constructio & demonstratio.

SIt datum punctum F, ex quo ducatur quæuis secans parabolam in C & A: erit EC prima trium continuarum & AC excessus reliquarum: inueniantur igitur inter CE, EA media EF per F, diameter agatur BD iungaturque EB. patet per præcedentem, lineam EB sectionem contingere in B. à dato igitur extra parabolam puncto tangentem duximus, &c. Quod erat quæsitum.

PROPOSITIO LXXXIII.

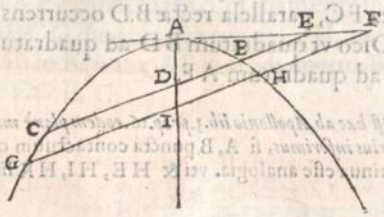
PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE, in qua sumptis duobus punctis E, F, ducantur ex E & F, duæ parallelæ EC, FG occurrentes parabolę in B, C, H, G, & AD diametro in D & I.

Dico BEC rectangulum ad rectangulum HFG duplicatam habere rationem lineę eius quam habet EA linea ad lineam FA.

Demonstratio.

QVoniam tam EB, a ED, EC lineæ, quam FH, FI, FG sunt proportionales, erit BEC rectangulum æquale quadrato ED, & HFG rectangulum æquale quadrato FI. igitur vt quadratum ED ad quadratum FI, sic BEC rectangulum est ad rectãgulum HFG. sed ED quadratum est ad quadratum FI, vt AE quadratum est ad quadratum AF; igitur & BEC rectangulum est ad rectangulum HFG vt AE quadratum ad quadratum AF. hoc est duplicatam habent rationem, EA ad FA. Quod erat demonstrandum.

a 81. *huius.*



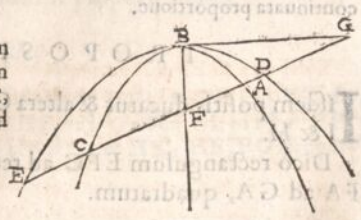
PROPOSITIO LXXXIV.

PArabolas duas ABC, DBE habentes communem diametrum BF contingat in eodem puncto, linea BG, & ex G quęuis ducatur linea, occurrens parabolis in D, A, C, E; diametro verò BF in F.

Dico DGE rectangulum æquari rectangulo AGC.

Demonstratio.

ESt enim per octuages. primam huius tam DGE rectangulum, quàm rectangulum AGC æquale quadrato FG: igitur & AGC, DGE rectangula inter se æqualia sunt. Quod fuit demonstrandum.



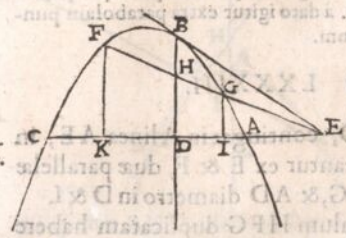
PRO-

PROPOSITIO LXXXV.

PArabolam ABC cuius diameter BD contingat in B linea EB: ex puncto E duæ quæuis ducantur lineæ EF, EC, secantes parabolam in F, G, A, C punctis & BD diametrum in D & H, demissæque ex F & G diametri FK, GI, occurrant AC lineæ in K & I.

Dico GI ad FK, duplicatam habere rationem eius quam habet GH ad HF.

Demonstratio.



a Ex 81. huius.
b 1. De progressionibus.

VT GI ad FK, sic EG est ad EF; sed EG ad EF, duplicatam habet rationē a EG ad EH, id est b GH ad HF; igitur & GI ad FK, duplicatam habet rationem eius quam habet GH linea ad lineam HF. Quod erat demonstrandum.

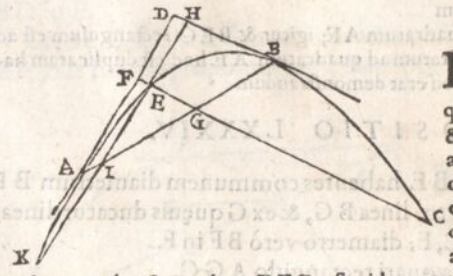
PROPOSITIO LXXXVI.

PArabolam ABC contingant in A & B lineæ AD, BD conuenientes in D, assumptoque puncto E in sectionis peripheria, agatur per E linea FC, parallela rectæ BD occurrens AD lineæ in F.

Dico vt quadratum BD ad quadratum AD, sic EFC rectangulum esse ad quadratum AF.

Est hæc ab Apollonio lib. 3. prop. 16. eodem planè modo proposita: nos autem hanc supponendo vlterius inferimus, si A, B puncta contactuum coniungantur, rectas FE, FG, FC in continua esse analogia. vti & HE, HI, HK lineas.

Demonstratio.



EST enim ex suppositio vt AD quadratū ad quadratū DB, sic AF quadratum ad rectangulum EFC: & permutando vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratum ad rectangulum EFC. sed est quoque vt AD quadratum ad quadratum AF, sic DB quadratū ad quadratum FG; igitur vt DB quadratum ad rectangulum EFC, sic idem quadratum DB ad quadratum FG. vnde FG quadratum æquale est rectangulo EFC; & FE, FG, FC lineæ sunt in continuata proportione.

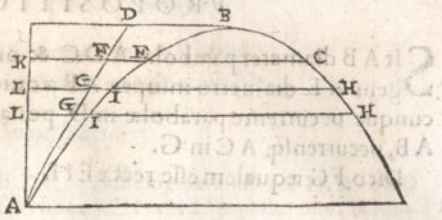
PROPOSITIO LXXXVII.

IIsdem positis ducatur & altera GH parallela FC, secans parabolam in I & H.

Dico rectangulum EFC ad rectangulum IGH, esse vt quadratum FA ad GA, quadratum.

Demon-

Demonſtratio.



CVm enim tam rectangulum EFC ad quadratum FA, quã rectangulum IGH ad quadratum GA habeant rationem quadrati DB ad quadratum DA, conſtat ita eſſe EFC rectangulum ad IGH vt quadratum FA ad GA. Quod demonſtrandum fuit.

Corollarium.

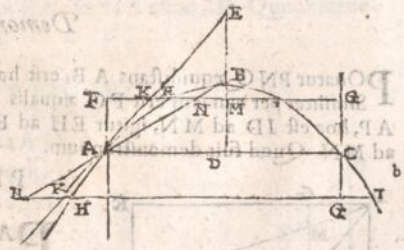
SI ex A ducatur diameter AK, occurrens ordinatim applicatis in K & L, rectangulum CFE ad HGI, duplicatam habebit rationem eius quam CKE habet ad rectangulum HLI. ratio enim rectanguli CKE ad HLI, eſt ratio lineæ KA [a] ad LA, hoc eſt FA ad GA. ſed ratio rectanguli CFE ad HGI, eſt ratio quadrati FA ad GA: igitur ratio rectanguli CFE ad HGI, duplicata eſt eius quam habet CKE ad HLI, rectangulum.

[a] 44. *huius.*

PROPOSITIO LXXXVIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, & ordinatim ad illam poſita ADC, contingat in A linea AE, conueniens cum diametro in E, erectiſque ex A & C diametris AF, CG ducatur quæcunque HI, parallela AC, occurrens AE contingenti in K, lineæ AF in F, diametro BD in M, iunctæ AB in N, & rectæ CG in G.

Dico KFG rectangulum æquari rectangulo HFI.



Demonſtratio.

QVoniam tam FN [b] in K, quàm FG in M bifariam diuiſa eſt, erit FK ad FN, vt FM ad FG. vnde rectangulo FKFG, æquatur FNFM rectangulum: ſed rectangulo NFM oſtenſum [c] eſt æquari rectangulum HFI. igitur etiam rectangulo HFI æquale eſt KFG rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

[b] 18. *huius.*

[c] 43. *huius.*

PROPOSITIO LXXXIX.

IIſdem poſitis:

Dico HK, HF, FG lineas eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.

QVoniam rectangulum KFG [d] æquale eſt rectangulo HFI, vt FH, ad FK, ſic FG eſt ad FI: & conuertendo vt FH ad [e] HK, ſic FG eſt ad GI, id eſt ad FH; quadratum igitur FH æquale eſt rectangulo HKFG; & HK, HF, FG proportionales ſunt. Quod fuit demonſtrandum.

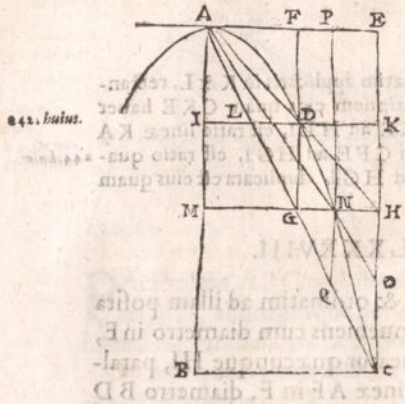
[d] 88. *huius.*

[e] *Per elementa.*

PROPOSITIO XC.

Sit AB diameter parabolæ ADC & ordinatim posita BC & contingens AE. diametro insuper AB æquidistet EC ductaque AH quacunque occurrente parabolæ in D ponatur AC, & FDG æquidistans AB, occurrensq; AC in G.

Dico FG æqualem esse rectæ EH.



842. huius.

Demonstratio.

POnantur per D & G puncta rectæ IK, MR parallelæ BE; erunt itaque tres in continua analogia a IL, ID, IK & MG, MN, NR. Igitur quadratum ID ad MN, quadratum eam habet rationem quam IL ad MG. hoc est IA ad MA, hoc est DA ad HA; hoc est DF ad HE, est autem FG æqualis MA. igitur HE eidem FG, æqualis est. Quod fuit demonstrandum.

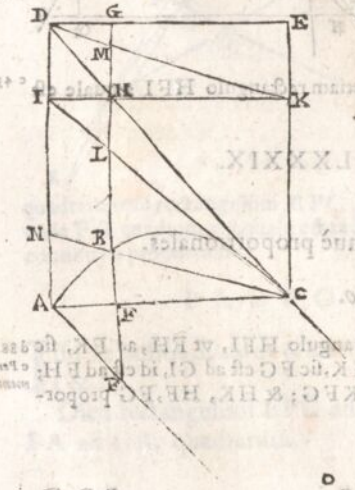
PROPOSITIO XCI.

IIsdem positis, per N ducatur ANO. Dico ID ad MN eandem habere rationem quam habet EH ad EO.

Demonstratio.

POnatur PNQ æquidistans AB, erit hæc PQ, æqualis EO per precedentem. Similiter per eandem erit FG æqualis EH: est autem FG ad PQ, vt AF ad AP, hoc est ID ad MN, igitur EH ad EO, eandem obtinet rationem quam ID ad MN. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCII.



PArabolam ABC sustendat linea AC, actaque per C contingente, quę diametro per A positæ occurrat in D, perficiatur parallelogrammum ADEC: deinsumpto in sectione puncto quouis B, agatur per B diameter FG secans AC lineam in F, tangentem CD in H puncto, per quod ducta IK parallela AC, ponatur IC quæ FG lineæ occurrat in L.

Dico GF, HF, LF lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

VT GF ad HF, sic DA est ad IA: sed vt DA ad IA, sic HF est ad LF; igitur vt GF ad HF sic HF ad LF, proportionales igitur sunt GF, HF, LF. Quod erat demonstrandum.

PRO.

PROPOSITIO XCIII.

IIsdem positis ducatur linea DK occurrens GF in M.
Dico GM, GH, GF lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVoniam EC æquidistat AD (ob DC, parallelogrammum) & IKD, ICD triangula eandem habent basim ID, lineæ MH, [a]HL æquales sunt, sunt autem continuę proportionales GF, HF, LF; igitur & GM, [b]GH, GF lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

a *Educitur ex elementis.*
b 11. *De progressionibus.*

PROPOSITIO XCIV.

IIsdem positis:
Dico esse vt CF ad FA, sic HB ad BF.

Demonstratio.

DVcatur ex C per B linea CN occurrens AD lineæ in N: & ex A recta AO parallela DC, secans EC productam in O, & FB lineam in P. Quoniam DC est contingens & AO eidem parallela, rectæ HB, HF, HP [c] proportionales sunt. Sunt autem etiam [d] continuę LF, HF, GF, & GF linea æqualis lineæ HP (ob AE, AC parallelogramma super eadem basi AD, & inter easdem parallelas constituta.) igitur & HB, æqualis est rectæ LF: vnde dempta communi LB, manet HL rectæ BF, & NA ipsi ID æqualis; adeoque & NC parallela DK. Quare vt DN est ad NA, id est CK ad DI, sic HB est ad BF. sed vt CK ad DI, sic CH est ad HD, id est CF ad FA; igitur vt CF ad FA, sic HB est ad BF. Quod erat demonstrandum.

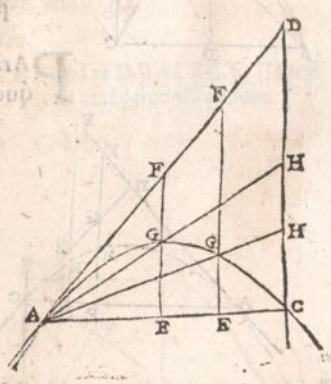
c 67. *huius.*
d 92. *huius.*

Est hęc Archimedis aliter demonstrata.

PROPOSITIO XCIV.

PArabolam ABC subtendat linea AC actaq; per A contingente AD quę diametro CD ductę per C, occurrat in D, ponantur quotuis diametri FE secantes parabolam in G, & per G ex A, ductæ lineæ AH, occurrant diametro CD in H.

Dico AC, CD lineas proportionaliter in E & H esse diuisas.



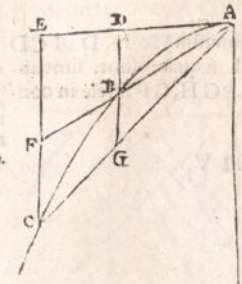
Demonstratio.

DEmonstratio manifesta est per precedentem. nam semper est vt AE ad EC, sic FG ad GE id est DH ad HC.

PROPOSITIO XCVI.

PArabolam ABC contingat in A linea AD, in qua ſumptis quibuſuis punctis D & E, demittantur diametri DB, EC: & ex A per B recta ducatur AF occurrens EC diametro in F.

Dico eſſe EC ad CF, vt AF ad FB.



a 94. huius.

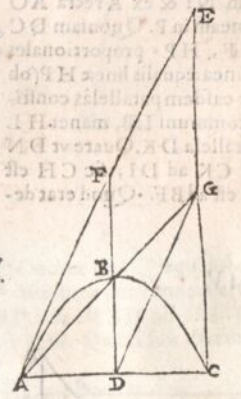
Demonſtratio.

DVcatur recta AC occurrens DB lineæ in G. erit igitur AG ad GC, [a] vt DB ad BG, id eſt EF ad FC. ſed eſt vt AG ad GC, ſic AB ad BF; igitur vt AB ad BF, ſic EF ad FC: & componendo vt AF ad FB, ſic EC ad CF. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVII.

PArabolam ABC ſubtendat recta AC, erectaque ex C diametro CE, ponatur quæcunque AG occurrens CE lineæ in G, parabolæ in B puncto, per quod diameter ponatur BD.

Dico iunctam DG æquidiſtare contingenti per A ductæ.



b Ibid.
c Educitur ex elemtis.

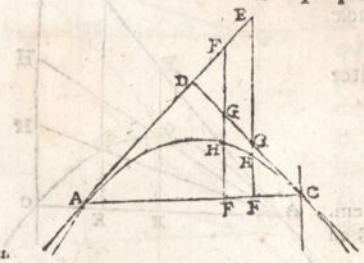
Demonſtratio.

DVcta enim per A contingens occurrat BD, CE diametris in F & E. erit igitur [b] FB ad BD, vt AD ad DC, id eſt AB ad BG: quare [c] AE, DG lineæ ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

PArabolam ABC ſubtendat linea AC, actiſque per A & C, contingentibus quæ conueniant in D, ducatur diameter quæcunque FE, ſecans AD lineam in E, DC in G, & parabolam in H.

Dico GH, HF, HE, lineas in continua eſſe analogia.



d 94. huius.
e Ex eadem.

Demonſtratio.

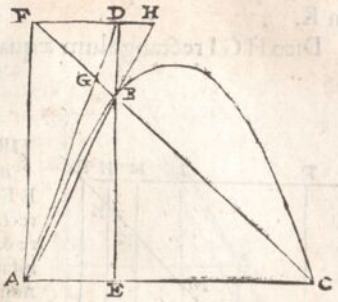
ESt enim vt AF ad FC, ſic [d] EH ad HF, ſed etiam vt AF ad FC, [e] ſic FH ad HG, igitur vt EH ad HF, ſic HF eſt ad HG: proportionales igitur ſunt GH, HF, HE. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIX.

PArabolam A B C cuius ſubtenſa A C, contingat in A linea A D, in qua ſumpto quouis puncto D demittatur diameter D E occurrens parabolæ in B. per B autem ex C recta ponatur C F, occurrens erectæ ex A diametro in F.

Dico F A, D E lineas eſſe inter ſe æquales.



Demonſtratio.

VT A E ad E C,[a] ſic D B eſt ad B E, & componendo vt A C ad C E, ſic D E ad B E. ſed vt A C ad E C, ſic F A eſt ad B E, igitur vt D E ad B E, ſic F A ad B E: igitur F A, D E lineæ ſunt [b] inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

a 34. huius.

b Per elementa.

PROPOSITIO C.

IIſdem poſitis:
Dico eſſe B G ad G F, vt F B ad F C.

Demonſtratio.

QVoniam F A, D E lineæ per præcedentem æquales ſunt, D E eſt ad B E, vt F A ad B E; id eſt vt A C ad E C; & inuertendo A E ad A C, id eſt F B ad F C, vt D B ad D E, id eſt ad F A. ſed vt B D ad F A, ſic B G ad G F, igitur B G ad G F, vt F B eſt ad F C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CI.

IIſdem poſitis ducatur A B occurrens F D iunctæ in H.
Dico D H, D F, E C lineas in continua eſſe analogia.

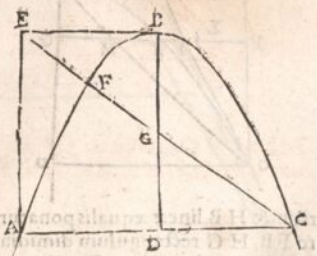
Demonſtratio.

ESt enim D H ad A E, id eſt ad F D, vt D B ad B E, ſed vt D B ad B E, ſic F D eſt ad E C; igitur D H eſt ad F D vt F D ad E C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CII.

PArabolam A B C cuius diameter B D, contingat in B linea B E, demiſſaque diametro E A ducatur ad B D, ordinatim A D C, ponaturque E C occurrens parabolæ in F & B D diametro in G.

Dico E F lineam æquari lineæ F G.



Demonſtratio.

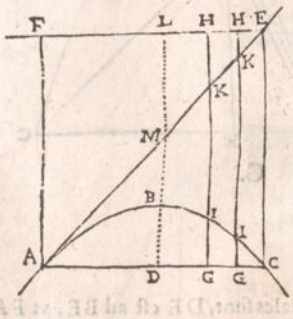
QVoniam E B linea ſectionem contingit, erit E F ad E G, vt E G ad E C: & diuidendo E F ad F G, vt E G ad G C, ſed E G eſt æqualis G C, quia A D, D C lineæ æquales ſunt, igitur & E F, F G rectæ inter ſe æquantur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CIII.

PArabolam ABC cuius diameter BD, & ordinatim ad illam posita AC, contingat in A linea AE, erectaque ex C diametro CE quæ contingenti AE occurrat in E, perficiatur parallelogrammum ACE, ducaturq; diameter quæuis HG occurrens parabolæ in I, & AE rectæ in K.

Dico HGI rectangulum æquari rectangulo HKG.

Demonstratio.



a Ex 17. huius.
b 47. huius.
c Ex elementis.

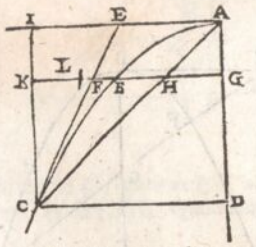
PRoducta diameter BD, secet EF, AE lineas in L & M. Quoniam AC linea æquidistat EF, eidemque est æqualis, erit AD, dimidia rectæ AC, æqualis LE, dimidiæ ipsius EF; quare & LM æqualis est MD, adeoque LD in M bifariam diuisa: vnde cum & LD in B, diuisa sit non bifariam, rectangulum LMD, id est quadratum MD æquale est rectangulo LBD, vna cum quadrato MB, id est [a] quadrato BD, id est æquale erit rectangulo LDB. Rursum cùm vt BD ad IG, sic LDB rectangulum sit ad rectangulum HGI, item ADC [b] rectangulum ad rectangulum AGC, id est rectangulum [c] AME ad rectangulum AKE, igitur vt LDB rectangulũ, ad rectangulũ HGI, sic AME rectangulum est ad rectangulum AKE; est autẽ vt AME rectangulum ad rectangulũ AKE, sic LMD rectangulum ad rectangulum HKG (quia ex ijsdem rationem habent compositam) igitur vt LDB rectangulum ad rectangulum HGI, sic LMD rectangulum est ad rectangulum HKG. & permutando vt LDB rectangulum est ad rectangulum LMD, sic HGI rectangulum ad rectangulum HKG. sed LDB, LMD rectangula ostensa sunt æqualia, igitur & rectangulum HGI æquale est rectangulo HKG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD & ordinatim ad illam posita CD contingant in A & C lineæ AE, CE conuenientes in E. ductáque AC, ponatur ordinatim BG quę EG, AC lineis occurrat in F, & H.

Dico HB quadrati dimidio æquale esse rectangulum FB, HG.

Demonstratio.



d 42. huius.
e 9. Deprogressionibus.
f 18. huius.

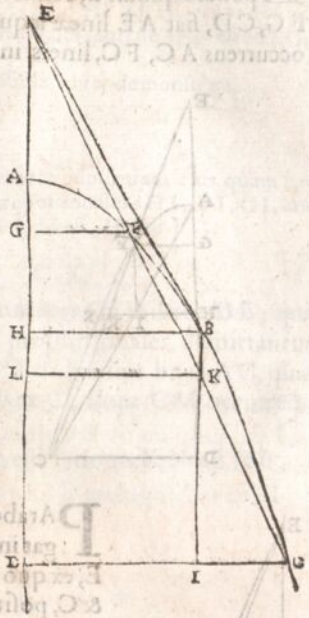
ERigatur ex C diameter CI, occurrens BG lineę in K, fiatque HB æqualis KL. Quoniam igitur KG, BG, [d] HG proportionales sunt, & BH differẽtię ponitur æqualis LK, rectæ GH, HB [e] BL quoq; proportionales sunt, adeoque BH quadrato æquale rectangulum LB, HG. Rursum [f] cùm AI in E ac propterea HK in F diuisa sit bifariam, & HB lineæ æqualis ponatur KL, erit & LB reliqua in F diuisa bifariam: quare FB, HG rectangulum dimidium est rectanguli LB, HG, adeoque & æquale dimidio quadrati HB. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in B linea BE, conueniens cum diametro in E; demissáque ex E linea EC, quę parabolam secet in F & C, ducantur ordinatim lineæ FG, BH, CD.

Dico FG, BH, CD lineas in continua esse analogia.



a 21. huius.
b Per elementa.
c Ex 17. huius.

Demonstratio.

DEmittatur ex B diameter BI secans EC lineam in K; ponaturque KL parallela HB. Quoniam BE linea sectionem contingit, erunt EF, EK, a EC lineæ, adeoque & FG, b KL, CD continuæ proportionales: sed HB linea æqualis est KL, igitur FG, BH, CD lineæ in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

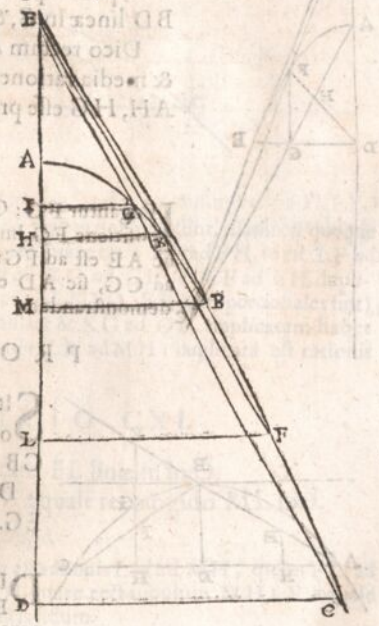
Corollarium.

EAdem manente figura sumatur in AD diametro quodcunque punctum E, extra parabolam, ex quo in parabolam secans demittatur EFC, ductáque ordinatim FG, CD, fiat AE lineæ æqualis AH, & ex H, ordinatim ponatur HB: dico FG, BH, CD lineas esse proportionales, iuncta enim BE c erit contingens. vnde per præcedentem constat veritas assertionis.

PROPOSITIO CVI.

ESto ABC diameter AD, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittantur ex E duæ quęuis EC, EF secantes parabolam in G, K, C, F: ponanturque ordinatim GI, KH, FL, CD.

Dico esse vt GI ad KH, sic FL ad CD.



d 105. huius.
e Ex elementis.
f Ibid.

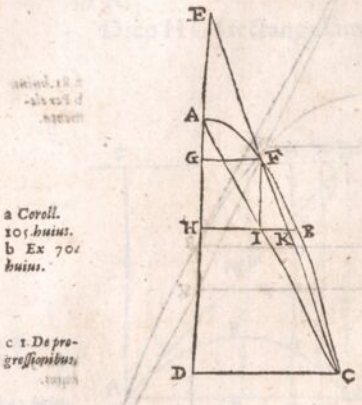
Demonstratio.

DEmittatur ex E cõtingens EB, & ex B ordinatim ducatur linea BM. erunt igitur tam GI, BM, CD lineæ, quàm HK, BM, FL proportionales. quare cùm BM linea sit vtrique seriei communis & media proportionalis inter easdem lineas, GICD e rectangulum æquale est rectangulo HKFL. igitur vt f GI ad KH, sic FL ad CD. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CVII.

ESto ABC parabolę diameter AD, in qua assumpto extra sectionem puncto quouis E, demittatur ex E secans EFC, positisque ordinatim FG, CD, fiat AE lineæ æqualis AH, & ex H ordinatim ponatur HB occurrens AC, FC, lineis in I & K.



Dico EC lineam extrema & media ratione proportionali in F & K esse diuisam id est CE esse ad EF vt CK ad KF.

Demonstratio.

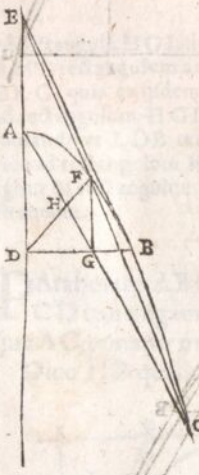
IVngantur FI: Quoniam AH linea æqualis ponitur AE, rectæ FG, BH, [a] CD proportionales sunt, & FG, IH [b] lineæ æquales, adeoque & FI parallela AE. quare vt EC ad EF, sic AC ad AI, id est AD ad AH, id est AH ad AG, (cùm AD, AH, AG proportionales sint.) id est DH ad [c] HG. id est CK ad KF. Quod erat demonstrandum.

a *Coroll. 10 huius.*
b *Ex 7 huius.*
c 1. *De progressionibus.*

PROPOSITIO CVIII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in B linea BE, conueniens cum diametro in E, ex quo recta ducatur EC, occurrens parabolę in F & C, positaq; ordinatim BD, ducatur AC occurrens BD lineæ in G, & recta FD secans AC in H.

Dico rectam AC diuisam esse in H, & G, extrema & media ratione proportionali: id est AC, CG: & AH, HG esse proportionales.



Demonstratio.

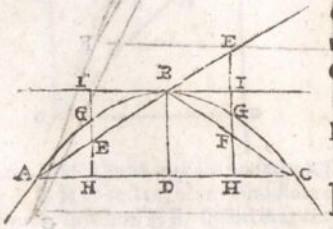
IVngantur FG: Quoniam ostensum est in præcedenti propositione FG lineam æquidistare AE, vt AC ad CG, sic AE est ad FG: sed AE est æqualis [d] AD, igitur vt AC ad CG, sic AD est ad FG, id est AH ad HG. Quod erat demonstrandum.

d 17. *huius.*

PROPOSITIO CIX.

SIt ad ABC parabolæ diametrũ BD, ordinatim posita AC: iunctisque AB, CB ducatur quæuis diameter EF.

Dico esse vt AD ad DH, sic HE ad EG.



Demonstratio.

DIameter EF, primò AB lineæ occurrat in E extra sectionem. ponatur per B contingens IB: vt AD ad AH, sic DB id est IH ad

ad HE; quia verò, IG, IF (id est IE) & IH proportionales sunt, vt HI ad IE sive IF, prima ad secundam, sic HI cum IF vel IE, id est HE, prima cum secunda, ad IE vna cum IG id est EG, secundam cum tertia, igitur vt AD ad DH, sic HE ad EG. Quod erat demonstrandum. [a] 42. huius

Occurrat iam diameter HG rectæ AB in E intra parabolã, erit igitur vt AH ad AD, sic HE ad BD, id est ad HI, & vt AD ad HD, sic HI ad IE, sed vt HI ad IE prima ad secundam (quia HI, IE, IG [b] proportionales sunt) sic HE [c] est ad EG, igitur vt AD ad DH, sic HE est ad EG. [b] Ibid. [c] 1. De progressionibus.

Est hæc Archimedis prop. 4. de quadratura Parabolæ aliter demonstrata.

Corollarium.

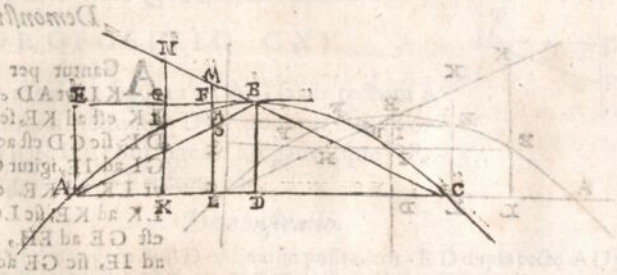
HInc sequitur lineam HI ad IG, rationem habere duplicatam eius quam habet HF ad FG: cùm enim sint continuæ proportionales [d] HI, FI, GI, erit ratio HI ad IG, duplicata rationis HI ad FI, id est [e] HF ad FG. [d] Ex 9. huius. [e] 1. De progressionibus.

PROPOSITIO CX.

PArabolam ABC cuius diameter BD, contingat in B linea BE, quæ diuisa in F & G, vt BF, BG, BE sint proportionales, demittantur diametri FH, GI, EA ductaq; ex A ad BD ordinatim linea AC, quæ FH, GI rectas secet in K & L, agatur per B ex C, linea CM occurrens FH, GI diametris in M & N.

Dico rationem LM ad MH duplicatam esse rationis KN ad NI.

Demonstratio.



QVoniam BF, BG, BE lineæ continuæ proportionales sunt, diametri quoque FH, GI, EA in continua sunt [f] analogia. Quare ratio AE ad FH, id est LF ad FH, duplicata est rationis AE ad GI, id est KG ad GI; sed LF ad FH, duplicatam habet rationem; LO ad OH, (cùm LF, FO, FH [g] proportionales sint) id est per præcedentem LM ad MH, similiter & KG ad GI, duplicatam habet eius quam habet KN ad NI, igitur & ratio LM ad MH, duplicata est rationis KN ad NI. Quod erat demonstrandum. [f] Ex 33. huius. [g] 42. huius.

PROPOSITIO CXI.

IIsdem positis ducatur linea AB secans FL lineam in O.

Dico MH LF rectangulum esse æquale rectangulo MLFO.

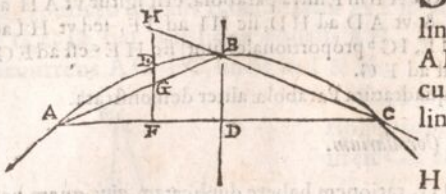
Demonstratio.

QVoniam ratio LF ad FH tam duplicata est rationis LM ad MH, quam FL ad FO, erit vt LM ad MH, sic FL ad FO: quare rectangulum MHLF æquale est rectangulo MLFO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita linea AC, iunctisque punctis AB, CB, ducatur diameter quæcunque EF occurrens AB, CB lineis in G & H.

Dico esse vt HF ad FG, sic HE ad EG.



Demonstratio.

a 109. huius. b *Ibid.*

VT AD ad DF, id est DC ad DF, sic FH a est ad HE. sed etiam vt AD ad DF, sic b FG est ad GE, igitur vt FH ad HE, sic FG est ad GE, & permutando vt HF ad FG, sic HE ad EG. Quod erat demonstrandum.

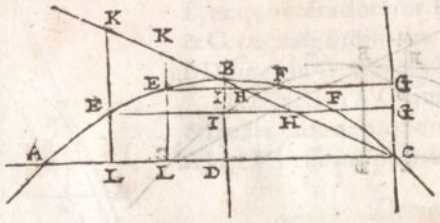
PROPOSITIO CXIII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita AC, iunctisque punctis BC ducantur ordinatim lineæ EF occurrentes CG, BD diametris in G & I, & CB rectæ in H.

Dico rectangulum GIEH æquari rectangulo GEIF.

Demonstratio.

c 109. huius.



AGantur per E diametri KL, vt AD c ad DL, sic LK est ad KE, sed vt AD ad DL, sic CD est ad DL, id est GI ad IE, igitur GI est ad IE, vt LK ad KE. est autem vt LK ad KE, sic LC ad EH, id est GE ad EH, igitur vt GI ad IE, sic GE ad EH. vnde GI, EH rectangulum æquale est rectangulo GE, IE id est GE, IF. Quod erat demonstrandum.

PA-

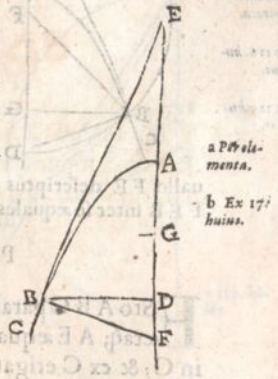
PARABOLÆ
PARS TERTIA

Sectionis focum & mutuas parabolarum intersectiones Geometricè designat.

PROPOSITIO CXIV.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat in B quæuis B E, occurrens axi in E: positaque ordinatim B D, ponatur B F normalis ad B E, occurrens axi in F.

Dico D F lineam æquari dimidio lateris recti quod axi inseruit.



Demonstratio.

SVmatur A G æqualis lateri recto. quoniam B D ordinatim ponitur ad axem, quadratum B D æquale est rectangulo D A G: quia verò angulus E B F rectus est, erit & quadrato B D æquale a rectangulum E D F. igitur E D F, D A G rectangula sunt inter se æqualia, & vt E D ad A D, sic A G est ad D F: est autem E D dupla b ipsius A D, cùm E B, sit contingens; igitur & A G dupla est rectæ D F: adeoque D F æqualis dimidio lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a *Pro elementa.*

b *Ex 17. huius.*

PROPOSITIO CXV.

EAdem manente figura: sit A G latus rectum & illius dimidio æquetur D F: ponatur autem ordinatim D B, & B E contingens, iunganturque B F.

Dico angulum E B F rectum esse.

Demonstratio.

CVm E B sit contingens, & B D ordinatim posita, erit c E D dupla rectę A D: & quia A G dupla ponitur D F, erit D A G rectangulũ d æquale rectangulo E D F: sed D A G rectangulo æquale est quadratum B D, igitur & quadratum D B æquale est rectangulo E D F, vnde cùm D B normalis ponatur ipsi E F, patet e angulũ E B F esse rectum. Quod erat demonstrandum.

c *Ibid.*

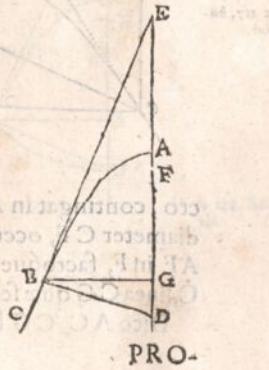
d *16. Sexti.*

e *Ex elementis.*

PROPOSITIO CXVI.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat linea B E, conueniens cum axe in E: positaq; B D ad E B rectam normaliter, diuidatur E D bifariam in F.

Dico F A quartam partem esse lateris recti.



Demonstratio.

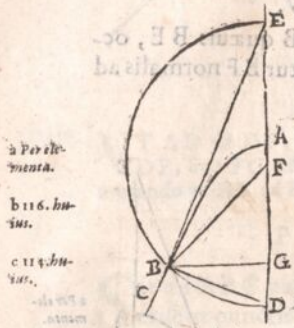
POnatur B G ordinatim ad axem; cùm igitur E D in F bifariam sit diuisa, & E G in A (ob E B contingentem) vt E D ad E F, sic E G est ad E A, vnde & residuum A F ad residuum G D, vt totum E D est ad dimidium sui E F: A F igitur dimidium est G D: hoc est quarta pars lateris recti: cùm G D lateris recti dimidium sit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXVII.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat recta quæuis B E, & angulo B E A æqualis fiat angulus E B F.

Dico F A lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti; & si F A sit quarta pars lateris recti, dico lineas F B, F E, & consequenter angulos B E F, E B F esse inter se æquales.

Demonstratio.



a *Per elementa.*

b 116. *huius.*

c 114. *huius.*

POnatur ordinatim linea B G: & B D normalis ad contingentem E B. Quoniam anguli E B F, B E F ex hypothesi æquales sunt, erunt & F B, F E lineæ quoque æquales, vnde cùm & angulus E B D rectus sit, si centro F, interuallo F E circulus describatur, transibit [a] is per B & D. Quare & E F, F D lineę æquales, adeoque F A æqualis [b] quartæ parti lateris recti: Quod erat primum.

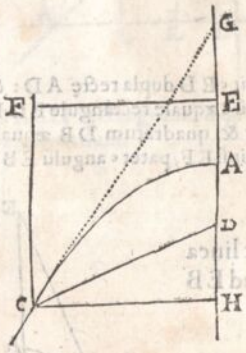
Rursum cùm angulus E B D ponatur rectus, & B G ordinatim applicata ad axem A D, erit D G æqualis dimidio [c] lateris recti, adeoque dupla A F: quare E A ad E G, vt A F ad G D, & componendo vt E F ad E D, sic A F ad G D: quare E D dupla est ipsius E F, & circulus centro F interuallo F E descriptus, transibit per B & D: eruntq; lineæ F B, F E & anguli F B E, F E B inter se æquales: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXVIII.

ESto A B C parabolæ axis A D æqualis quartæ parti lateris recti: factaq; A E æquali A D, ducatur ex D linea D C occurrens parabolæ in C; & ex C erigatur diameter C F, occurrens E F (quæ normalis sit ad axem A D) in F.

Dico D C, F C lineas esse inter se æquales.

Demonstratio.



d 17. *huius.*

e 117. *huius.*

AGatur per C contingens C G, conueniens cum axe in G; ad quem ordinatim ponatur C H. Quoniam C G est contingens, rectæ A G, A H [d] æquales sunt; additis igitur æqualibus A D, A E totæ G D, E H æquales sunt; sed D C recta est [e] æqualis G D, igitur & D C æquatur lineæ H E, id est C F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIX.

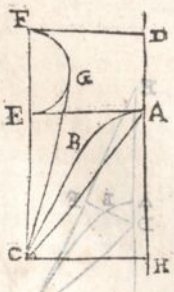
PArabolam A B C cuius axis A D productus extra sectionem, sit æqualis lateri recto, contingat in A linea A E, demissaq; ex A secante A C, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E contingenti in E, & D F quæ parallela sit A E in F, factoque super E F vt diametro, semicirculo F G E, ducatur ex C, linea C G quæ semicirculum contingat in G.

Dico A C, C G lineas esse inter se æquales.

Demon-

Demonſtratio.

POnatur ex C ordinatim C H. quadratum A C æquale eſt quadratis A H, H C: ſed H C quadratum æquale eſt rectangulo H A D (quia A D per hypotheſim eſt æqualis lateri recto) quadratum igitur A C æquale eſt quadrato A H vnà cum rectangulo H A D, id eſt rectangulo A H D, id eſt rectangulo E C F; eſt autem & E C F rectangulo æquale quadratum C G, quadrata igitur A C, C G adeoque & lineæ inter ſe æquantur. Quod erat demonſtrandum.



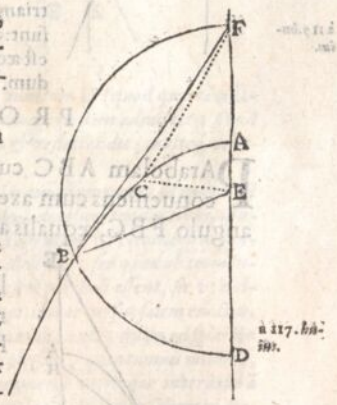
PROPOSITIO CXX.

ESto A B C parabolæ axis A D: & A E linea æqualis quartę parti lateris recti: centro E, interuallo quouis E F circulus deſcribatur occurrens axi in F & D, parabolæ verò in B: iungantúrque F B.

Dico F B rectam contingere parabolam in puncto B.

Demonſtratio.

SI enim non contingat, ponatur ex F contingens F C: cadet illa inter B & A; vel vltra B. Cadat primò inter B & A, iunganturque B E, C E. Quoniam F C linea eſt contingens, & A E quarta pars lateris recti, linea C E æqualis eſt rectæ [a] F E, hoc eſt E B. Quod abſurdum. igitur F C contingens non cadet inter B & A. ſimiliter oſtenditur F C non cadere vltra B. Quare F B ſola parabolam contingit. Quod erat demonſtrandum.



[a] 117. huius.

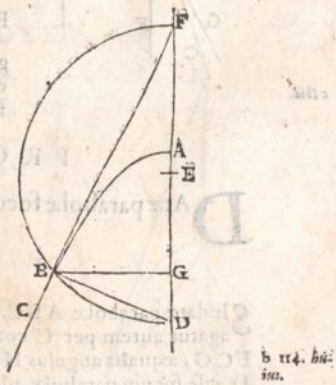
PROPOSITIO CXXI.

ESto A B C parabolæ axis A D, & A E linea quarta pars lateris recti: centro E interuallo quouis E F circulus deſcribatur, occurrens axi in F & D, parabolæ autem in B: & ex B recta ducatur B G ordinatim ad axem.

Dico D G lineam, dimidium eſſe lateris recti.

Demonſtratio.

IVngantur puncta F B, B D. erit igitur angulus F B D in ſemicirculo rectus; eſt autem per præcedentem F B contingens, D G igitur dimidium [b] eſt lateris recti. Quod erat demonſtrandum.

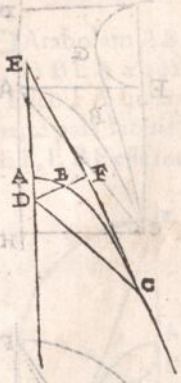


[b] 114. huius.

PROPOSITIO CXXII.

PArabolam ABC cuius axis AD contingat in C linea quæuis CE, conueniens cum axe in E. diuisáque bifariam CE in F, ducatur FD normalis ad EC contingentem occurrens axi in D.

Dico AD lineam, quartá esse partem lateris recti.



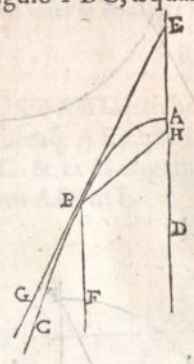
Demonstratio.

IVngantur puncta CD. Quoniam FD normalis est ad tangentem EC, anguli EFD, CFD æquales sunt; sunt autem & rectę EF, FC ex hypothesi æquales, & FD communis, triangula igitur EDF, CDF, & ED, CD latera æqualia sunt: quare & anguli CED, ECD æquantur; & AD [a] linea est æqualis quartę parti lateris recti. Quod erat demonstrandum.

a 11 7 Ibnius.

PROPOSITIO CXXIII.

PArabolam ABC cuius axis AD, contingat in B recta quæuis BE conueniens cum axe in E, demissáq; ex B linea BF parallela axi, fiat angulo FBG, æqualis angulus EBH.



Dico AH lineam æqualem esse quartæ parti lateris recti: & si AH fuerit quarta pars lateris recti, & BF, parallela axi, dico angulos EBH, FBG esse æquales.

Demonstratio.

QVoniam FB æquidistat ED, angulus AEB æqualis, est angulo FBG hoc est angulo HBE: vnde AH linea [b] æqualis est quartæ parti lateris recti. Quod erat primum.

Rursum cùm AH linea sit quarta pars lateris recti, angulus HBE æqualis est angulo [c] AEB, hoc est FBG, cum FB, ED æquidistent. vocetur autem punctum H focus parabolæ.

b Ibid.

c Ibid.

PROPOSITIO CXXIV.

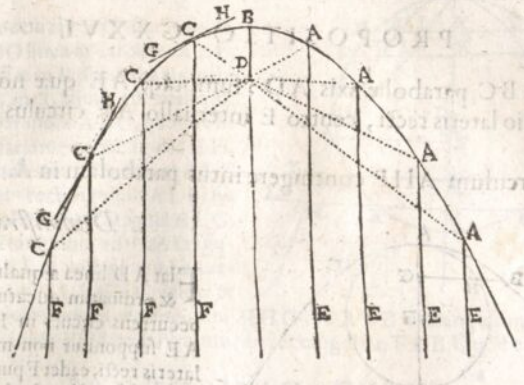
DAtæ parabolæ focum exhibere.

Constructio & demonstratio.

SIt datæ parabolæ ABC, axis BD, cui quotuis ponantur æquidistantes, AE, CF: agatur autem per C contingens GH; ductáque ex C rectâ CD, fiat angulo FCG, æqualis angulus HCD: constat per præcedentem propositionem punctum D, esse focum parabolæ, adeoque BD quartam esse partem lateris recti. & quoniam CF linea est quæcunque parallela axi, si in reliquis quoque angulo incidentiæ æqualis fiat angulus reflexionis, radij reflexi omnes conuenient in D puncto quod quartam lateris recti partem designat. datæ igitur parabolæ focum exhibuimus.

Porro focum indigitamus punctum D, *quod in illo fiat combustio, & radij reflexi præcisè*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [471] - 414
PUBLIC DOMAIN



in illo coeuntes, intensissimum producant calorem. quia verò punctum D *(quod quartam lateris recti partem determinat à vertice initio sumpto) latitudinem nullam admittit; fit vt forma parabolica, omnium sit aptissima radijs solis recipiendis & reflectendis; multoq; vehementiores, quàm reliquæ figuræ, causet effectus.*

Quod autem in propositione radios C F, A E *omnes parallelos axi assumamus, id eadem de causa fecimus qua idem Optici, Gnomonici, & Statici in põderibus deorsum tendentibus, assumere coguntur, & hactenus vt fundamentum ac principium ab omnibus (si Neotericos paucos excipias) habitum est, non quod à parte rei solares radij paralleli sint, sed quod ob immensum nos inter & solem spatium, radij in speculum incidant ac si verè paralleli essent, sic vt nulla ad inuicem inflexio perceptibilis sit: & si è plano speculi duas lineas versus solem eductas, quantumuis minimo angulo ad inuicem inclines, conuenient illæ multo ante, quàm ad solarem discum peruenire possint: & si vicissim ex solis centro angulo physico, quantumuis minimo, duos educas radios, non cadent illi in superficiem speculi, sed immenso vtrimque interuallo à speculo decident. ratio vtriusque est, immensa solis à terra distantia: radij igitur solares in speculum incidentes vt verè paralleli assumuntur. quo posito demonstrari facile posset, focum in circulo & omni sectione coni (præterquam in parabola) latitudinem admittere, adeoq; figuram parabolicam ad comburendum omnium esse præstantissimam: sed de his alio tempore & loco, si Deus vitam dederit.*

PROPOSITIO CXXV.

PArabolam A B C cuius axis A D contingat in B recta quæuis B E conueniens cum axe in E: ductâque ex B linea B D normali ad contingentem, quę axi occurrat in D: si A D linea fuerit maior dimidio lateris recti.

Dico rectam B D minorem esse A D.



Demonstratio.

DVcatur ex A per B, linea A B F: & ex D recta D G normalis ad A F. quoniam angulus E B D rectus ponitur, angulus A B D recto minor est, adeoque F B D angulus obtusus; quare D G cadet inter A & B. fiat ergo B G æqualis G H, iungaturque H D: tum A H lineâ diuisâ bifariam in I, ponatur D I. cùm igitur H G, G D lineæ æquales sint rectis B G, G D; & anguli illis contenti recti; linea D H æqualis est B D, & angulus G H D recto minor. Rursum cùm A I, I D lineæ æquen-

tur

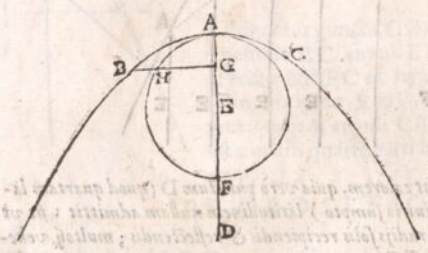
tur lineis HB,ID, triangula AID, HID æqualia sunt. quare AD, subtendens angulum obtusum AID, maior est recta HD hoc est BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVI.

ESto ABC parabolæ axis AD: sumptâq; AE quæ non sit maior dimidio lateris recti, centro E interuallo AE circulus describatur AHF.

Dico circulum AHF contingere intus parabolam in A.

Demonstratio.



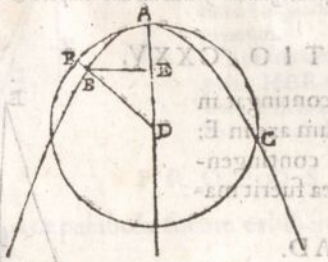
FIat AD linea æqualis lateri recto; & ordinatim ducatur quæuis GB occurrens circulo in H. Quoniam AE supponitur non maior dimidio lateris recti, cadet F punctum supra, vel in ipsum D, adeoque AGF rectangulum minus est rectangulo GAD; igitur & HG quadratum, minus est quadrato BG. punctum igitur H cadet intra parabolam, eodem modo demonstrantur reliqua omnia circuli puncta, præter A cadere intra parabolam: circulus igitur AHF, parabolam ABC interius in A contingit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXVII.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroque D, interuallo AD circulus describatur AFG:

Dico circulum illum intersecare parabolam.

Demonstratio.



FIat AE linea æqualis dimidio lateris recti & per E recta ponatur ordinatim EB: ducaturque ex D per B, linea DBF occurrēs circulo in F & parabolę in B. Quoniam AD maior est dimidio lateris recti, a recta DB minor est AD hoc est DF, punctum igitur F cadet extra parabolam. quare circulus AFG parabolam secat. Quod erat demonstrandum.

a 12. huius.

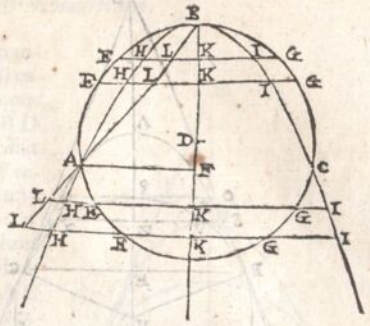
PROPOSITIO CXXVIII.

ESto ABC parabolæ axis BD maior dimidio lateris recti, centroq; D interuallo DB circulus describatur AEB occurrens parabolæ in A; ductaque ex A ordinatim linea AF, ducantur quotuis EG parallelæ AF, occurrentes circulo in E & G, parabolæ in H & I, axi in K.

Dico EHG rectangulum esse ad rectangulum EHG, vt FKB rectangulum, est ad rectangulum FKB.

Demon-

Demonſtratio.



IVncta AB occurrat EG lineis in L. Quoniam EG linea in circulo AEB, ad angulos rectos in K ſecat diametrum BD, recta EG in K, diuiſa eſt bifariam. ſed & HI in parabola ABC, quoque in K diuiſa eſt bifariam; rectæ igitur EH, IG inter ſe æquales ſunt. Rurſum vt ALB rectangulum ad [a] rectangulum ALB, ſic ELG rectangulum ad rectangulũ ELG, item HLI rectangulum ad [b] rectangulum HLI: ſed ELG rectangulum æquale eſt rectangulis HLI, EHG, igitur & EHG rectangulum eſt ad rectangulum EHG, vt ALB rectangulum ad rectangulum ALB; id eſt FKB rectangulum, ad rectangulum FKB. Quod erat demonſtrandum.

[a] 249. huius.

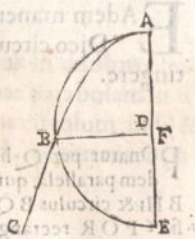
[b] Per elementa.

PROPOSITIO CXXIX.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroque D interuallo AD, circulus deſcribatur ABE: occurrat is parabolæ in B & axi in E. ducaturque ex B, linea BF ordinatim ad axem.

Dico lineam FE æqualem eſſe lateri recto.

Demonſtratio.

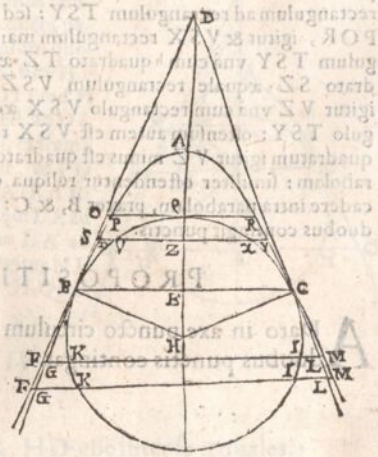


QVoniam BF ordinatim ducta eſt ad axem, quadratum FB æquale eſt rectangulo ſuper FA & latere recto: ſed & FB quadratum quoque æquale eſt rectangulo AFE: rectangulum igitur AFE æquale eſt ei quod fit ſuper AF & latere recto. quare FE linea lateri recto eſt æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXX.

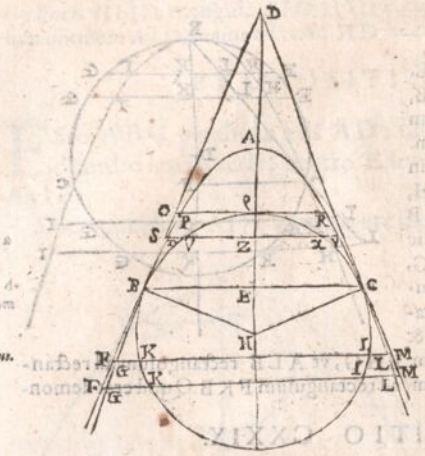
PArabolam ABC cuius axis AE contingat in B linea BD, occurrens axi in D, ponatur autem ex B linea BH normalis ad contingentem, occurrens axi in H: centroque & interuallo HB circulus deſcribatur BQC: ponãturq; ad axem normales quotcunque IK, occurrentes parabolæ in GL, contingenti BD in FF: & circulo intra parabolam intercepto in I & K.

Dico GKI rectangulum eſſe ad rectangulum GKI, vt quadratum FB ad quadratum FB.



Demonſtratio.

POnatur BC æquidiſtans FI, occurrens parabolę in C; iunctaque



a Ex 17. huius.

b Ex elementis.

c Ibid.

d 84. huius.

DC occurrat FL rectis in M. Quoniam BC ordinatim ponitur ad axem DE; recta BC in E bisecta est, & BE, EC lineæ æquales sunt, vnde DC[a] parabolam in C contingit. quia verò B punctum in perimetro circuli est, punctum quoque C[b] in circuli est perimetro, & quia DBH angulus rectus est, angulus quoque DCH rectus est[c] & DC linea circulum contingit. igitur vt FB quadratum ad quadratum FB, sic FKM rectangulum ad rectangulum FKM: sed cũ FB, CM lineæ parabolam quoque contingant, vt FB quadratum ad quadratum[d] FB sic GFL rectãgulum est ad rectangulum GFL, residuum igitur rectangulum GKI ad GKI rectangulum, est vt quadratum FB ad quadratum FB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

EAdem manente figura si AH linea maior sit dimidio lateris recti. Dico circulum BQC parabolam intus in duobus punctis contingere.

Demonstratio.

c 115. huius.

f 87. huius.

g 6. secundi.

h Ibid.

POnatur per Q linea OPR æquidistans BC, & altera quæuis STVXY eidem parallela, quia AH maior est dimidio lateris recti, [c] AH linea maior est BH; & circulus BQC cadit infra A. deinde vt OB quadratum ad quadratum SB, sic [f] POR rectangulum ad rectangulum TSX: sed est quoq; vt quadratum OB ad quadratum SB, sic quadratum OQ ad rectangulum VSX, igitur POR rectangulum ad rectangulum TSY, vt quadratum OQ ad rectangulum VSX, & permutando conuertendo vt quadratum OQ ad rectangulum POR, sic VSX rectangulum ad rectangulum TSY: sed OQ [g] quadratum maius est rectangulo POR, igitur & VSX rectangulum maius est rectangulo TSY. vlterius, rectangulum TSY vnà cum [h] quadrato TZ æquale est quadrato SZ, est autem & quadrato SZ æquale rectangulum VSZ vnà cum quadrato VZ, quadratum igitur VZ vnà cum rectangulo VSX æquale est quadrato TZ, vnà cum rectangulo TSY: ostensum autem est VSX rectangulum maius esse rectangulo TSY, quadratum igitur VZ minus est quadrato TZ: quia punctum V cadit intra parabolam: similiter ostendentur reliqua omnia puncta perimetri circularis BQC cadere intra parabolam, præter B, & C: circulus igitur BQC parabolam intus in duobus contingit punctis.

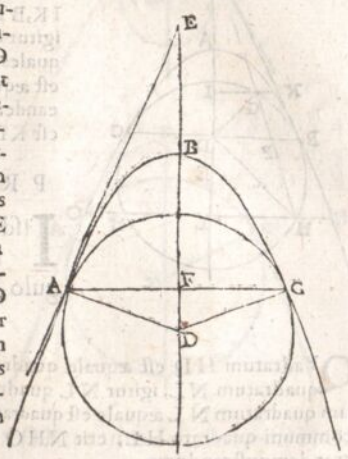
PROPOSITIO CXXXII.

ADato in axe puncto circulum describere qui parabolam intus in duobus punctis contingat.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D, oportet centro D circulum describere, qui parabolam interius contingat in duobus punctis: oportet autem BD lineam maiorem esse dimidio lateris recti. fiat DF æqualis dimidio lateris recti: & per F recta agatur FAC, ordinatim ad axem: iungaturque puncta D, A: tum centro D interuallo DA circulus describatur. dico illum contingere interius parabolam in duobus punctis. agatur enim per A contingens AE conueniens cum axe in E. Quoniam linea AE parabolam contingit in A, & FD æqualis est dimidio lateris recti, angulus [a] EAD rectus est; est autem ex hypothesi BD maior dimidio lateris recti; ergo per præcedentem circulus centro D, interuallo DA descriptus parabolam continget interius in duobus punctis: à dato igitur in axe puncto D circulum descripsimus, &c. Quod erat faciendum.



a 115. huius.

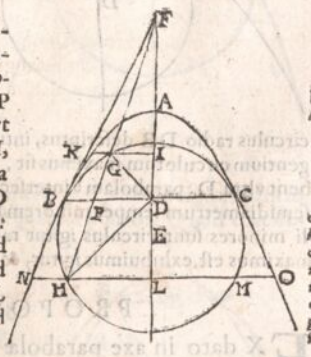
PROPOSITIO CXXXIII.

PArabolam ABC cuius axis AD contingat interius in duobus punctis B & C circulus HBG. actaq; per B contingente parabolam in B, quæ axi occurrat in F, ducatur ex F, linea FH, secans circulum in G & H, dein per G & H, normales ducantur KGI, NHL occurrentes parabolæ in K & N, axi verò in I & L.

Dico esse vt HL ad GI, sic NL ad KI.

Demonstratio.

QVoniam circulus BGC parabolam intus contingit in B & C, & FB linea per B ducta parabolam in B contingit, eadem BF circulum quoque contingit in B: igitur vt HF ad FG, sic [b] HP est ad PG: & vt LF ad FI, sic LD ad DI; sed vt LF ad FI, sic LH ad IG; igitur LD est ad DI, vt LH ad IG. quia verò LF in D & I, extrema & media ratione proportionali diuisa est, & FD [c] bisfecta in A, proportionales sunt [d] AI, AD, AL. vnde LA ad AI, duplicatã habet rationem LA ad DA, id est [e] LD ad DI: sed ratio quoque LA ad AI, duplicata est rationis [f] LN ad KI, igitur NL est ad KI, vt LD ad DI, id est LH ad GI. Quod erat demonstrandum.



b 30. De circulo.

c Ex 17. huius.

d 4. De linearum potentiis.

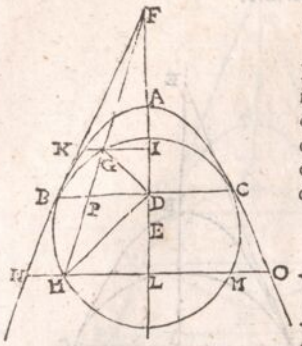
e 1. De progressionibus, & 1. Huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem positis:

Dico rectas KI, GD; item NL, HD esse inter se æquales.

Demonſtratio.



OStenſum eſt rectas AL, AD, AI in continua eſſe analogia, vnde quoque proportionales erũt IK, BD, LN: ſed etiam ſunt cõtinuę GD, BD, HD; igitur GD, KI lineæ, & NL, DH ſunt inter ſe æquales. nam rectangulũ GDH, rectangulo KINL eſt æquale, & oſtenſum inſuper eſt GD ad DH, eandem habere rationem quam ID ad DL, hoc eſt KI ad NL.

PROPOSITIO CXXXV.

ISdem poſitis:
Dico quadratum DL æquari rectangulo NHO.

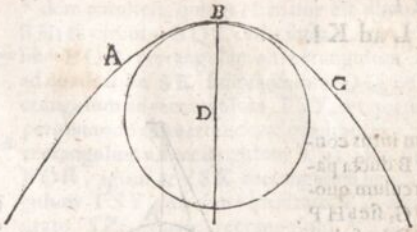
Demonſtratio.

QVadratum HD eſt æquale quadratis HL, LD: eſt autem quadrato æquale quadratum NL, igitur NL quadratum eſt æquale quadratis HL, LD. ſed etiam quadratum NL æquale eſt quadrato HL & rectangulo NHO, dempto ergo communi quadrato HL, erit NHO rectangulum æquale quadrato DL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVI.

IN datæ parabolæ axe punctum aſſignare quo centro circulus deſcribatur maximus illorum, qui parabolam intus in vno tantùm contingunt puncto.

Conſtructio & demonſtratio.



ESto ABC parabolæ axis BD, oportet in illo punctum aſſignare D, quo centro circulus deſcribatur maximus eorum qui parabolam in vno tantum puncto contingunt. fiat DB linea æqualis dimidio lateris recti: centroque D, interuallo BD circulus deſcribatur: dico illum ſatisfacere proportioni. quoniam DB æqualis ponitur dimidio lateris recti, circulus radio DB deſcriptus, intus [a] parabolam in B contingit. quod verò contingentium circulorum maximus ſit, ex illo patet quod circuli omnes qui centrum habent vltra D, parabolam [b] interſecent; quorum verò centrum inter D & B, cadit, ſemidiametrum ſemper minorem habeant ſemidiametro DB, ac proinde illi circuli minores ſunt: circulus igitur radio DB deſcriptus, contingentium circulorum maximus eſt. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 116. huius.
b 117. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

EX dato in axe parabolæ puncto, lineam ad peripheriam ducere, breuiſſimam illarum quæ ex eodem puncto duci poſſunt.

Conſtructio & demonſtratio.

ESto ABC parabolæ axis BD, & in eo punctum datum D: oportet ex D puncto lineam ducere breuiſſimam illarum, quę ex eodem puncto ad parabolæ perimetrum educi poſſunt.

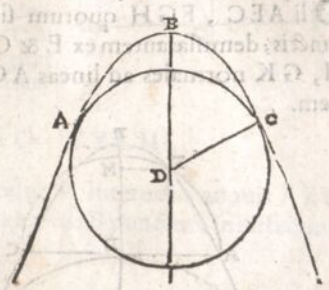
Primò

Primò recta BD non sit maior dimidio lateris recti. dico BD lineam esse quæsitam: describatur enim centro D interuallo DB circulus; continget is per præcedentem parabolam interius in puncto solo B: igitur reliquæ omnes lineæ ex D ad peripheriam ductæ maiores sunt lineâ BD.



Secundò BD maior sit dimidio lateris recti: centro D circulus describatur [a] cõtingens ABC parabolam in duobus punctis A, C, ducaturque recta DC: erit illa minima (vt patet) illarum quę ex D duci poterunt ad peripheriam parabolæ: ex dato igitur puncto D, lineam duximus, &c. Quod erat faciendum.

[a] 32 huius.



PROPOSITIO CXXXVIII.

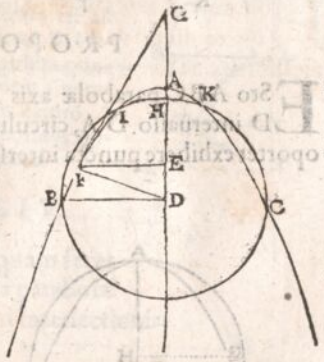
SIt ABC parabolæ axis AD maior latere recto; ductaque ex D ordinatim lineâ DB, centro D, interuallo DB circulus describatur BHC.

Dico illum intersecare parabolam in quatuor punctis.

Demonstratio.

SVmatur ED æqualis dimidio lateris recti, positâque ordinatim EF, agatur per F contingens FG, conueniens cum axe in G. Quoniam FG est contingens, & ED æqualis dimidio lateris recti, angulus [b] DFG rectus est. quia verò AD linea maior est dimidio lateris recti, FD minima est earum [c] quæ ex D ad peripheriam duci possunt: adeoque & minor BD ordinatim positâ; circulus igitur centro D interuallo DB, descriptus cadet vltra F, & secundùm aliquam sui partem extra parabolam. Rursum cùm DB, minor [d] sit rectâ AD, (cũ DA maior sit latere recto,) cadet circulus BHC infra punctum A: & secundùm aliquam sui partem intra parabolam: Quare & in alio puncto quàm A parabolam intersecabit. Similiter ostenditur circulũ BHC, versus partem AC occurrere parabolæ in alio puncto quàm in C; circulus igitur centro D, interuallo DB descriptus, parabolam secat in quatuor punctis. Quod erat demonstrandum.

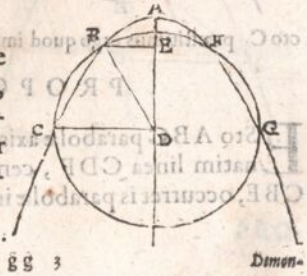
[b] 11 huius.
[c] 37. huius.
[d] 10. huius.



PROPOSITIO CXXXIX.

SIt ABC parabolæ axis AD maior latere recto; positâq; ad illum ordinatim DC, centro D interuallo DC circulus describatur CBF; occurret ille parabolæ in quatuor punctis C, B, F, G, & ex B puncto intersectionis ducatur BE ordinatim ad axem.

Dico ED lineam æqualẽ esse lateri recto.



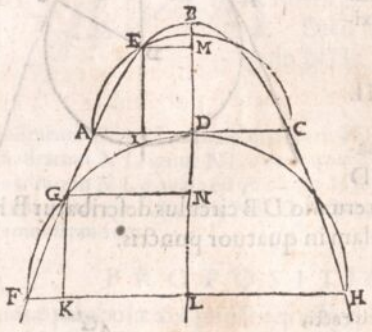
Demonstratio.

IVngantur BD. Quoniam BD est æqualis DC, & EB, CD, ordinatim ponuntur ad axem, ED linea [a] æqualis lateri recto est. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ex conuersa 14. huius.*

PROPOSITIO CXL.

SI parabolam ABC cuius axis BD, secuerint quotcunque semicirculi AEC, FGH quorum singuli occurrunt parabolæ in quatuor punctis; demissæ autem ex E & G, intersectionum punctis rectæ fuerint EI, GK normales ad lineas AC, FH quæ ordinatim positæ sunt ad axem.



Dico EI, GK lineas esse æquales.

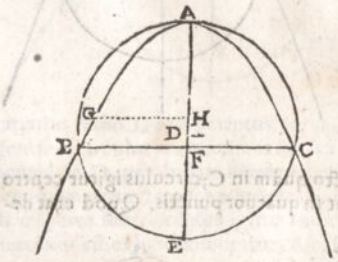
Demonstratio.

DVcãtur enim ordinatim EM, GN: erit per præcedentem tam MD quàm NL æqualis lateri recto axeos; igitur & æquales inter se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLI.

ESto ABC parabolæ axis AD maior dimidio lateris recti: centroq; D interuallo DA, circulus describatur ABC, occurrens axi in E: oportet exhibere puncta intersectionum B & C.

Constructio & demonstratio.



SVmatur EF linea æqualis lateri recto, & per F recta agatur FBC ordinatim ad axem: dico circulum ABC occurrere parabolæ in B & C. cùm FC ordinatim posita sit ad axem; quadratum illius æquatur AFE rectangulo, quia FE lateri recto assumitur æqualis: sed rectangulo AFE in circulo ABE, æquale quoque est quadratum FB: igitur B punctum pertinet & ad parabolam ABC, & ad circulum ABE, idem discursus aptetur puncto C. præstitimus ergo quod imperatum fuit.

PROPOSITIO CXLII.

ESto ABC parabolæ axis AD maior latere recto: actaq; per D ordinatim linea CDF, centro D interuallo CD, circulus describatur CBE, occurret is parabolæ in quatuor punctis: oportet illa exhibere.

Constru-

Constructio & demonstratio.

SVmatur D G æqualis lateri recto, ponaturque ordinatim G B: dico B punctum vnum esse intersectionis. iungatur B D. Quoniam B G, C D ordinatim ponuntur ad axem, & G D æqualis lateri recto est, linea C D a æqualis est B D: circulus igitur centro D, interuallo D C descriptus, transibit per B. eodem modo ostenditur, eundem circulum transire per E: quod verò per C & F, transeat, manifestum est: exhibuimus igitur puncta quatuor intersectionis. Quod erat faciendum.



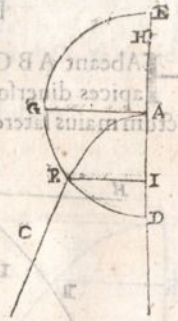
a 10. huius.

PROPOSITIO CXLIII.

ESto A B C parabolæ apex A, centroque A, interuallo quouis A E circulus describatur E G B: oportet exhibere B punctum intersectionis cum parabola.

Constructio & demonstratio.

POsito axe A D sumatur A H æqualis lateri recto, positaque per A contingente A G quæ circulo occurrat in G, quadrato A G fiat æquale rectangulum H I A; & per I ordinatim ducatur I B: dico punctum B, esse id quod quæritur. iungatur A B. Quoniam I B ordinatim applicata est ad axem, & A H linea æqualis lateri recto, quadrato A B, b æquale est rectangulum H I A, sed H I A rectangulum quoque æquale est quadrato A G per constructionem; igitur A G, A B quadrata æqualia sunt. igitur circulus centro A interuallo A G descriptus, transit per B. exhibuimus igitur punctum intersectionis B. Quod erat postulatum.



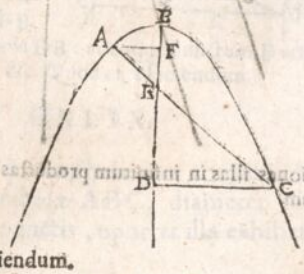
b 34. huius.

PROPOSITIO CXLIV.

ESto A B C parabolæ diameter B D quam secet vtcunque recta quæuis A E, occurrens parabolæ in A: oportet exhibere C, punctum aliud intersectionis.

Constructio & demonstratio.

DVcatur ex A linea A F ordinatim ad diametrum; fiantque proportionales B E, B E, B D: & per D, ordinatim ducatur D C, occurrens A E lineæ in C puncto. quoniam igitur B E, B E, B D proportionales sunt, & A E, D C ordinatim positæ, punctum c C est ad parabolam: est autem & C punctum in recta A E: igitur C communis intersectio est A E lineę cum parabola, exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

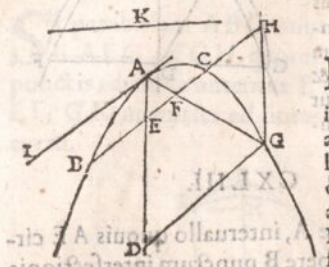


c Coroll. 1. 3. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

ESto ABC parabolæ diameter AD: & ordinatim ad illam posita BC, ducatur autem ex A quæuis AF, secans BC lineam in F: quæ producta occurret parabolæ in puncto quouis G, oportet illud exhibere.



Constructio & demonstratio.

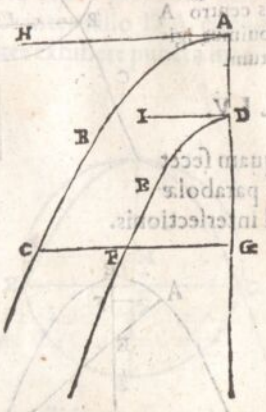
FActum sit: positaque ordinatim GD, erigatur GH parallela diametro AD, occurrens BC in H, sit autem AI latus rectum. Quoniam GH æquidistat AD diametro, FEH rectangulum, hoc est rectangulum FEGD, æquale est quadrato [a] CE, hoc est BE. sed & quadrato BE æquale [b] est rectangulum IAE: rectangula igitur EAI, FEGD æqualia sunt. quare vt FE ad AE, sic AI est ad GD: & GD quidem fiat æqualis recta K. erit igitur K linea data. Rursum cùm GD ordinatim posita sit ad diametrum AD, vt AI ad GD, hoc est [c] ad K, sic K est ad AD: igitur & AD linea positione data est. quare componendo fiat vt FE ad AE, sic AI ad K, & vt AI ad K, sic K ad AD, ducaturque ex D ordinatim linea DG, constat factum esse quod petebatur.

a 42. huius.
b Ex 8. huius.
c Ibid.

PROPOSITIO CXLVI.

HAbeant ABC, DEF parabolæ ad eundem axem AG constitutæ apices diuersos A, D; & ABC quidem superior, habeat AH latus rectum maius latere recto ID parabolæ DEF.

Dico sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire.



Demonstratio.

POnatur ordinatim ad axem AG, quæcunque linea CG, occurrens ABC parabolæ in C, & DEF in F. erit igitur FG quadratum æquale rectangulo IDG, & CG quadratum æquale rectangulo HAG: sed IDG rectangulum minus est rectangulo HAG, (quia ID latus rectum minus ponitur ipso HA & DG minor ipsa AG) igitur & quadratum FG minus est quadrato CG: & F punctum cadit inter C & G. & quia idem de quouis puncto parabolæ DEF ostenditur, patet sectiones illas in infinitum productas nusquam conuenire. Quod erat demonstrandum.

PRO.

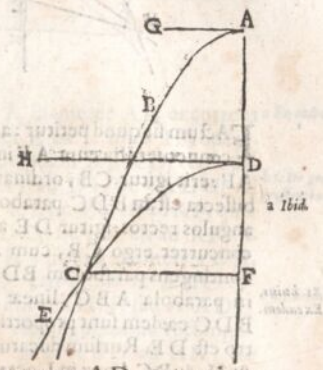
PROPOSITIO CXLVII.

SInt duæ parabolæ ABC, DCE ad eundem axem constitutæ, & ABC parabolæ latus rectum, minus sit latere recto parabolæ DCE, nec vertex A communis sit.

Dico parabolas illas concurrere. oportet autem punctum concursus assignare.

Constructio & demonstratio.

SIt AG latus rectum parabolæ ABC, & DH latus rectum parabolę DCE, lineæ AD adijciatur quędam DF, vt AF sit ad FD, sicut HD est ad AG. & ex F ordinatim ponatur FC occurrens parabolæ DCE in C: dico illud esse punctum intersectionis. Quoniam est vt HD ad AG, sic AF ad FD, erit HDF rectangulo, æquale rectangulum GAF. sed HDF rectangulo æquale est[a] quadratum FC; gitur & GAF rectangulo æquale quoque est quadratum FC. vnde punctum C est ad parabolas ABC, DCE. exhibuimus ergo punctum concursus.



a Ibid.

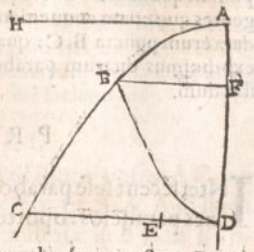
PROPOSITIO CXLVIII.

HAbeant parabolæ ABC, DBF communem axem AD, & vertices oppositos A, D.

Oporteat autem earum intersectionum puncta exhibere.

Constructio & demonstratio.

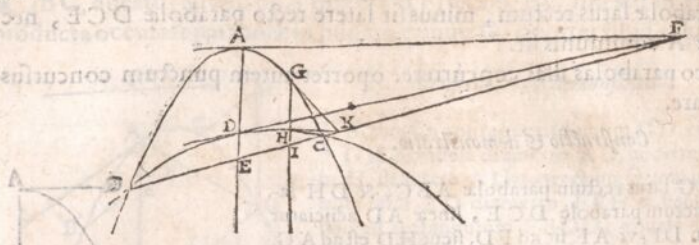
SIt ABC parabolę latus rectum AH, & DB parabolæ latus rectum ED; secetúrque AD in F, vt HAF rectangulo æquale sit rectangulum FDE: & per F ordinatim ponatur FB, occurrens parabolæ ABC in B. dico B punctum esse intersectionis. cùm enim FB in ABC parabola ordinatim ducta sit ad axem AD, FAH rectangulum æquale est quadrato FB. sed FAH rectangulum æquale ponitur rectangulo FDE; quadratum igitur FB æquale quoque est rectangulo FDE, quare FB ordinatim applicata est ad FD axem, in parabola DB: adeoque punctum B vtriusque parabolę est commune. exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO CXLIX.

SInt duæ parabolæ ABC, BDC inæquales, habentes communem rectam AE, quæ quidem axis sit parabolæ ABC, diameter verò parabolæ BDC: secentque se in B & C punctis, oportet illa exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



FActum ſit quod petitur: actâ per A contingente AF, ducatur linea per B & C, conueniet illa cum AF in puncto quouis F: ſi enim non conueniat, æquidiſtet AF: erit igitur CB, ordinatim poſita ad axem AE in parabola ABC, & quia in E biſſecta eſt, in BDC parabola quoq; ordinatim erit ducta, ipſiq; DE diametro ad angulos rectos, igitur DE axis eſt parabolę BDC: quod eſt contra hypotheſim: concurret ergo CB, cum AF in puncto quouis F. ponatur ergo ex F linea FD, contingens parabolam BDC in puncto quouis D. Quoniam AF eſt contingens, in parabola ABC, lineæ FB, FE, FC [a] proportionales ſunt, ſed & *in* parabola BDC eædem ſunt proportionales; punctum igitur D contingentis DF, [b] in diametro eſt DE. Rurſum ducatur diameter quęuis alia GH occurrens parabolis in G & H, & BC lineę in I, actaque per G contingente GK, quæ cum BF conueniat in K, ducatur ex K linea KH, contingens parabolam BDC in puncto quouis H. Quoniam igitur GK linea contingit parabolã ABC, rectæ KB, KI, KC [c] continuæ proportionales ſunt: ſed & eædem quoque ſunt proportionales in parabola BDC, igitur H punctum contingentis HK, in [d] diametro eſt HI. igitur componendo cum A, D puncta data ſint, agantur per A & D, contingentes; quæ conuenient in puncto quodam F. ductaque diametro quauis GH; agantur per G & H, contingentes quę etiam conuenient in K: igitur data ſunt puncta F, K, E, I: quare & data erunt puncta B, C: quæ in FK linea eſſe per reſolutionem oſtendimus, igitur exhibuimus duarum parabolarum CBC, BDC interſectiones. Quod erat præſtandum.

a 31. *huius.*
b *Ex eadem.*
c *Ibid.*
d *Ibid.*

PROPOSITIO CL.

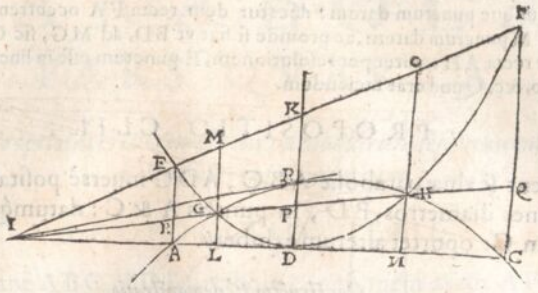
INterſecent ſeſe parabolæ duæ ABC, EDF inuerſè poſitæ, habentes axes parallelos: oportet G & H, puncta interſectionum exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt EDF parabolę axis DB, & factum ſit quod petitur: actaque per D linea AC quę EDF parabolam contingat in D, ponatur per G & H, puncta interſectionum recta GH, quæ conueniet cum AC in puncto quouis I. ſi enim non conueniat, æquidiſtet AC. recta igitur GH in parabola EDF, ordinatim poſita eſt ad axem DB, adeoque & diametrum BD in parabola [e] ABC ad angulos ſecat rectos; & quia GH à BD, linea biſſecta eſt, recta BD axis eſt parabolæ ABC. quod eſt contra hypotheſim. igitur HG non æquidiſtat AC, ſed producta cum illa conuenit in puncto quouis I. ducatur ergo ex I recta IB, contingens parabolam ABC in puncto quodam B. quoniam ID recta eſt contingens, lineæ IG, [f] IP, IH continuæ ſunt proportionales in parabola EDF: ſed & eædem quoque ſunt proportionales in parabola ABC, punctum igitur contactus B li-

e *Defin. 1. huius.*
f 31. *huius.*

neæ



neæ IB est in diametro a BD. Rursum erigatur ex A diameter AE occurrens EDF parabolæ in E: & IG rectæ in R. ducaturque per E ex I, linea IF, occurrens parabolæ EDF in F, & iungantur puncta CF. Quoniam AE, KD, rectæ parallelæ sunt, vt AI ad DI, sic EI est ad KI: sed vt AI ad DI, sic b AD est ad DC (quia IA, ID, IC proportionales sunt) & vt EI ad KI, sic EK est ad KF, quia EI, KI, FI proportionales sunt; igitur vt AD est ad DC, sic EK est ad KF, adeoque FC linea æquidistat KD: vlterius per G & H, positis diametris LM, NO, producatur GH linea donec FC occurrat in Q. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum ANC, c sic BD linea ad lineam HN: sed vt ADC rectangulum ad rectangulum ANC, (hoc est vt EKF rectangulum ad rectangulum EOF,) sic KD linea quoque est ad lineam HO; igitur vt BD ad HN, sic KD est ad OH; & permutando inuertendo vt KD ad BD, sic OH est ad HN, hoc est FQ ad QC, hoc est MG ad GL, hoc est ER ad RA.

a *Ex eadem*

b *1. De progressionibus.*

c *47. huius.*

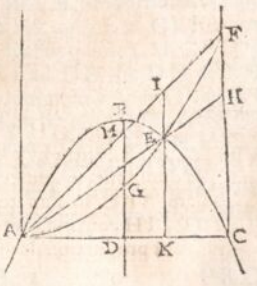
Componendo igitur, inuento axe DB parabolæ EDF, cùm data sint puncta D & B, acta per B contingente BI, agatur per D quoque contingens parabolam EDF in puncto D, secans ABC, in A & C: conueniet illa cum BI (vt ostendi) in puncto quouis I: data igitur sunt puncta I, A, C. erigantur ergo ex A & C, diametri AE, CF occurrentes parabolæ EDF, in punctis E & F: ductaque ex I per E lineâ occurret illa rectę CF in F, (vt ostensum est) & BD lineæ in K. vnde & K punctum quoque datum est. fiat igitur vt KD ad BD, sic ER ad RA, vel FQ ad QC, ducaturque recta IR vel IQ. patet per resolutionem, in illâ esse puncta intersectionum B & C. igitur exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLI.

ESto ABC parabolæ axis BD, & ordinatim ad illum posita AC, per A verò describatur parabola AEF cuius vertex sit A, & AC linea contingens; occurrat quoque AEF parabola, parabolæ ABC in E, oportet E punctum intersectionis exhibere.

Constructio & demonstratio.

FActum sit quod petitur: erectaque ex C diameter CH occurrat parabolæ AEF in F; ducaturque FA, occurrens BD lineæ in M: dein per E rectæ ponantur AEH, IEK; & AE quidem occurrat FC in H, IK verò æquidistet axi BD. erit igitur vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, sic BD linea ad lineam EK: sed vt ADC rectangulum ad rectangulum AKC, hoc est vt AMF rectangulum ad rectangulum AIF, sic MG linea ad lineam IE: igitur vt BD ad EK, sic MG est ad IE; & permutando vt BD ad MG, sic EK est ad IE, hoc est CH est ad FH.



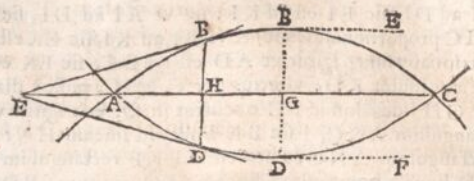
Igitur per compositionem cùm AC, BD lineæ &

puncta B D, C G data sint, erigatur ex C diameter C F, occurrens A E F parabolæ in F, erit F quoque punctum datum: ducatur dein recta F A occurrens B G lineæ in M, erit & M punctum datum. ac proinde si fiat vt B D, ad M G, sic C H ad H F, ducaturque recta A H, patet per resolutionem, E punctum esse in linea A H. exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLII.

INterſecent ſe duæ parabolæ A B C, A D C inuersè poſitæ, habentes communes diametros B D, in punctis A & C: datumq; ſit vnum punctorum C: oportet alterum exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



AGantur per B & D puncta contingentes B E, D F. quæ primò æquidistent. ducaturque ipsi B E parallela C A, occurrens A B C parabolæ in A, & B D rectæ in G: erit igitur A C linea in parabola A B C, ordinatim posita ad diametrum B D, adeoque in G diuisa bifariam. sed etiam A C æquidistat D F contingenti: igitur & A C in parabola A D C ad B D, ordinatim ducta est, & in G diuisa bifariam: igitur A punctum vtrique parabolæ est commune.

Secundò concurrant in E contingentes per B & D actæ: ducaturque recta E C, occurrens B D diametro in H, & A B C parabolæ in A. erunt [a] igitur proportionales E A, E H, E C. sed eædem quoque lineæ sunt proportionales in parabola A D C, & H, G, C puncta data sunt; igitur & A punctum datum est, estque illud A D C parabolæ commune. exhibuimus ergo alterum punctum occursus A. quod fieri postulabatur.

a 81. *huius.*

P A-

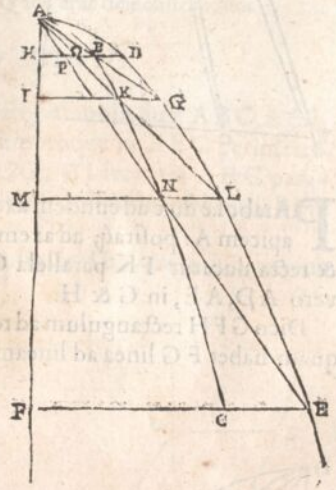
PARABOLÆ
PARS QVARTA

Proprietates contemplatur parabolarum seſe inuicem vel circulos interſecantium.

PROPOSITIO CLIII.

HAbeant ABC, ADE parabolæ communem axem AF, & verticem A: ex quo demiſsâ linea AG quæ parabolis occurrat in B & G, ponantur per B & G ordinatim ad axem lineæ DH, GI: & GI quidem parabolæ ABC occurrat in K puncto, per quod ex A ſecans ponatur AL & ex L ordinatim recta LM, occurrens ABC parabolæ in N: dein per N ponatur AE, & ex E ordinatim linea EGF.

Dico DH, KI lineas, item LM, CF inter ſe æquales eſſe.



Demonſtratio.

RAtio AH ad AI, hoc eſt HB ad IG, duplicata eſt rationis HB ad IK, hoc eſt HD ad IG. igitur HB, IK, IG proportionales ſunt. & vt IK ad IG, ſic HB ad IK, ſed HB eſt ad HD, vt eſt IK ad IG; igitur HB eſt ad HD, vt HB ad IK. æquales igitur ſunt HD & IK. eadem ratione oſtendetur lineas LM, CF æquales eſſe.

PROPOSITIO CLIV.

IIſdem poſitis, rectæ AL, AE ſecent DH lineam in O & P.

Dico rectas EF, LM, GI, DH, BH, OH, PH in continua eſſe proportione.

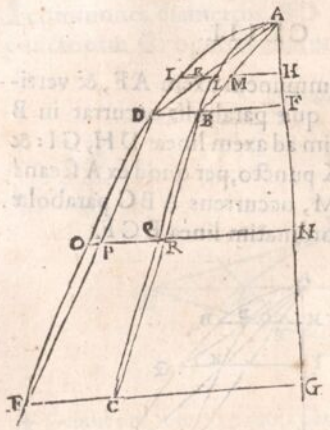
Demonſtratio.

QVoniam NM æqualis eſt oſtenſa GI, & EF, [a] LM, NM proportionales ſunt, erunt & EF, LM, GI lineæ in continua analogia: & quia LM, GI, KI proportionales ſunt, & KI lineæ æqualis linea DH, continuabũt quoq; LM, GI, DH, rationem cum EF, LM, GI: eſt autem præterea vt GI ad DH, ſic DH ad BH, proportionales igitur ſunt EF, LM, GI, DH, BH. vlterius cùm ſit vt GI ad KI, ſic BH ad OH, ſit autem vt GI ad KI, ſic GI ad DH, & DH ad BH, rectę GI, DH, BH, OH continuæ proportionales ſunt. iterum cùm OH ſit ad PH, vt LM ad NM, id eſt ex demonſtratis LM ad GI, id eſt GI ad DH, hoc eſt DH ad BH, hoc eſt BH ad OH; erunt GI, DH, BH, OH, PH lineæ, adeoque omnes EF, LM, GI, DH, BH, OH, PH in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

[a] 42. *huius.*

PROPOSITIO CLV.

HAbeant ABC, ADE parabolæ communem axem AF, positisque ad illum ordinatim lineis FBD, GCE, iungantur AB, AD, BC, DE ducanturq; HI, NO parallelę FD, & HI quidem secet parabolas in I & L, lineas AD, AB in K & M, recta verò NO, occurrat DE, BC, lineis in P & R, parabolis in Q & O.



Dico esse vt LM ad RQ, sic IK ad OP.

Demonstratio.

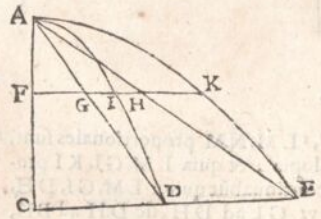
VT IH ad LH, sic DF ad BF; sed vt DF ad BF, sic KH ad MH, igitur vt IH ad LH, sic KH ad MH, & IK ad LM, vt IH ad LH; id est vt DF ad BF. sed vt DF ad BF, sic ON quoque est ad QN, & PN ad RN. igitur vt ON ad QN, sic PN ad RN; & OP ad QR, vt ON ad QN, id est DF ad BF, id est ex demõstratis IK ad LM, & permutando vt IK ad OP, sic LM ad RQ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLVI.

PArabolæ duæ ad eundem axem AC constitutę communem habeant apicem A: positaq; ad axem ordinatim CDE, iungantur AD, AE, & recta ducatur FK parallela CE, secans parabolas in I & K, rectas verò AD, AE, in G & H.

Dico GFH rectangulum ad rectangulum IFK eam habere rationem, quam habet FG linea ad lineam CD.

Demonstratio.



RAtio rectanguli GFH ad IFK, rectangulum composita est ex ratione FG ad FI, & ex HF ad FK: est autem vt FG ad FI, sic [a] FI ad CD; & vt FH ad FK, sic FK ad CE; ratio igitur rectanguli GFH ad rectangulum IFK, composita est ex ratione FI ad CD, & ex FK ad CE: sed FK est ad CE, vt FI est ad CD; rectangulum igitur GFH ad IFK rectangulum duplicatam habet rationem eius quam habet linea FI ad CD: id est rectangulum GFH ad IFK rectangulum, est vt FG ad CD, quia FG, [b] FI, CD proportionales sunt. Quod fuit demonstrandum.

[a] 42. *huius.*

[b] *Ibid.*

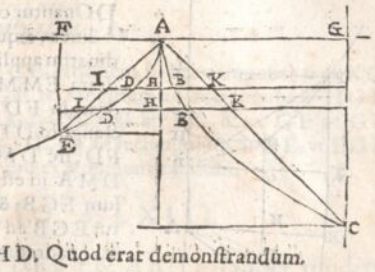
PRO-

PROPOSITIO CLVII.

COntingant se exterius in vertice, parabolæ duæ ABC, ADE, positisque ex A secantibus AE, AC, & contingente AH, ducantur quotcunque IK parallelæ axi communi FAG.

Dico IHD rectangulum, esse ad rectangulum IHD, vt KHB rectangulum ad rectangulum KHB.

Demonstratio.



a 54. huius.

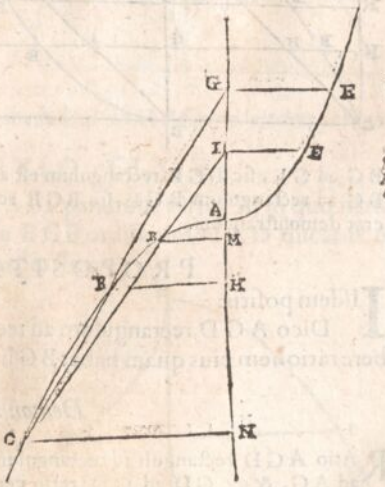
REctangulum IHD ad rectangulum IHD, triplicatam habet rationem eius[a] quam habet IH ad IH, id est AH ad AH. sed & BHK rectangulum ad rectangulum BHK, triplicatam habet rationem eius quam habet HK ad HK, id est AH ad AH: igitur vt BHK rectangulum est ad rectangulum BHK, sic IHD rectangulum est ad rectangulum IHD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLVIII.

COntingant se rursum exterius in vertice parabolæ duæ ABC, AEF, ad eundem axem GH constitutæ, sumptoque in ABC perimetro puncto quouis C ducantur ex C lineæ CG, CI secantes ABC parabolam in B & K, & axem GH in G & I: dein ordinatim ponantur BH, KM, IE, GF.

Dico HB lineam ad lineam MK, duplicatam habere rationem eius quam habet GF linea ad lineam IE.

Demonstratio.



b 61. huius.

c 27. De progressionibus.

DVcatur ex C ordinatim linea CN. Quoniam tam NA, AI, AM lineæ quam NA, AG, AH [b] continuæ proportionales sunt & NA prima vtrique seriei communis; ratio AH ad AM, tertiæ ad tertiam, duplicata est eius quam habet AG ad AI, secunda ad secundam: sed AH ad AM, duplicatã quoque rationem habet BH ad KM; igitur BH est ad KM, vt AG est ad AI: & HB ad MK duplicatam habet rationem eius quam habet GF ad IE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLIX.

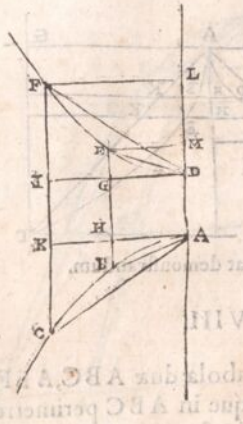
ESto ABC parabolæ axis AD æqualis lateri recto; & per D parabola descripta DEF æqualis

parabolæ

parabolæ ABC apicem habeat D, obuersum apici parabolę ABC & axem communem; dein quæuis ducantur diametri EB, FC occurrentes parabolis in B,C,E,F punctis; actæ verò per A & D, contingentes, diametros EB, FC secent in G, H, I, K.

Dico EGB rectangulum esse ad rectangulum FIC, vt est quadratum ED ad quadratum FD.

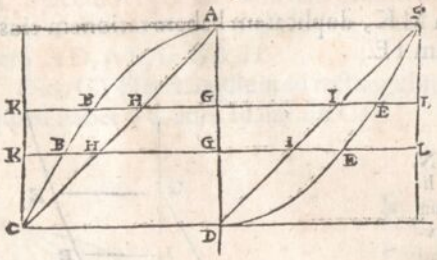
Demonstratio.



POnantur ordinatim lineæ FL, EM. Quoniam AD linea, æqualis ponitur latericto, & EM, FL ordinatim applicatæ sunt, quadratum ED (hoc est quadrata EM, MD) æquale est rectangulo DMA: & quadratum FD (hoc est quadrata FL, LD) æquale rectangulo DLA; igitur vt ED quadratum ad quadratũ FD, sic DMA rectangulum ad rectangulũ DLA: sed DMA id est GEH, rectangulo æquale est rectangulum EGB; & DLA æquatur FIC; rectangulum igitur EGB ad FIC, rectangulum est vt quadratum ED ad quadratum FD.

PROPOSITIO CLX.

SInt ABC, DEF parabolæ, ad eundem axem AD inuersè positæ; ductisque ex A & D, ordinatim lineis AF, DC, iungantur puncta AC, FD; ducantur præterea quotuis BE parallelæ AF occurrentes parabolis in B & E, rectis AC, FD in H & I, & axi AD in G.



Dico quadratum BG, rectangulum BGE & quadratum GE in continua esse analogia.

Demonstratio.

VT BG linea ad lineam GE, sic quadratum BG est ad rectangulum BGE: sed etiam vt BG ad GE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE; igitur vt quadratum BG ad rectangulum BGE, sic BGE rectangulum est ad quadratum GE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXI.

IIsdem positis:

Dico AGD rectangulum ad rectangulum AGD, duplicatam habere rationem eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulũ BGE.

Demonstratio.

RAtio AGD rectanguli ad rectangulum AGD composita est ex ratione AG ad AG, & ex GD ad GD: ratio verò rectanguli BGE, ad BGE rectangulum, composita est ex ratione BG ad BG, & ex GE ad GE: sed ratio AG ad AG, dupli-

duplicata est rationis BG ad BG, & ratio GD ad GD, duplicata est rationis GE ad GE, ratio igitur rectanguli AGD ad rectangulum AGD, duplicata est eius quam habet BGE rectangulum ad rectangulum BGE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXII.

Iisdem positis: erigantur ex C & F diametri CK, FL occurrentes lineis BE in K & L.

Dico rectangula KGL, BGE, HGI in continua esse analogia.

Demonstratio.

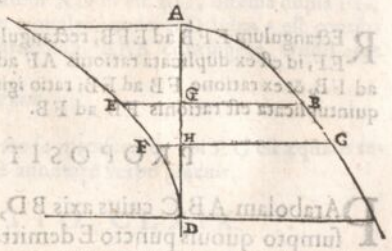
REctangulum KGL ad rectangulum BGE, rationem habet compositam ex KG ad BG, & ex GL ad GE: & BGE rectangulum ad rectangulum HGI, rationem habet compositam ex BG ad HG, id est KG ad BG, & ex GE ad GI: id est GL ad GE: rectangulum igitur KGL est ad rectangulum BGE, vt BGE rectangulum ad rectangulum HGI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIII.

SInt rursum parabolæ duæ ABC, DEF: & ABC parabolæ quidem apex sit A, parabolæ verò DEF sit apex D, in quo contingat axem AD in D: factisque AG, DH lineis æqualibus, agantur per G & H, normales ad AD, lineæ EB, FC occurrentes parabolis in E, B, F, C.

Dico EGB rectangulum ad rectangulum FHC quintuplicatam habere rationem eius quam habet GB linea ad lineam HC.

Demonstratio.



RAtio EGB rectanguli ad rectangulum FHC, composita est ex ratione EG ad FH, hoc est duplicata GD [a] ad HD; id est AH ad AG, (cùm AG, HD lineæ æquales sint) hoc est ex quadruplicata ratione GB ad HC, & ex ratione GB, ad HC: rectangulum igitur EGB ad FHC rectangulum quintuplicatam habet rationem GB ad HC. Quod fuit demonstrandum.

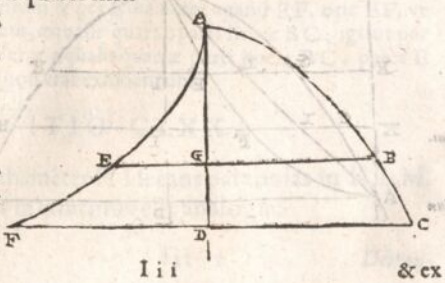
[a] Ex 33. huius.

PROPOSITIO CLXIV.

SIt ABC parabolæ axis AD, & AEF parabolæ vertex A, in quo illam contingat linea AD, positaque EGB ordinatim ad AD ducatur & altera FDC, vt GB, FD rectæ æquales sint.

Dico rationem EG ad DC quintuplicatam esse eius quam habet GB ad DC.

Demonstratio.



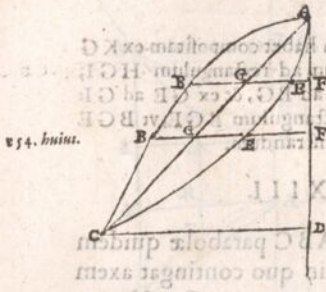
RAtio EG ad DC componitur ex ratione EG ad FD, hoc est duplicata AG ad AD. hoc est quadruplicata rationis GB, ad DC,

& ex ratione GB. hoc eſt FD, ad DC. igitur ex quintuplicata ratione GB ad DC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXV.

SIt ad ABC parabolæ diametrum AD ordinatim poſita CD, deſcribatur autem per A & C, parabola AEC habens verticem in A & AD, contingentem, iunctiſq; AC ponantur ad AD, ordinatim lineæ BG, EF:

Dico GFE rectangulum eſſe ad rectangulum GFE in ſextuplicata ratione FB ad FB.



v 54. huius.

Demonſtratio.

REctangulum GFE ad GFE [a] rectangulum triplicatam habet rationem GF ad GF, id eſt AF ad AF; ſed AF ad AF, rationem habet duplicatam eius quam habet BF ad BF; rectangulum igitur GFE ad GFE, rectangulum ſextuplicatam habet rationem FB ad FB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

IIſdem poſitis:

Dico EFB rectangulum ad rectangulum EFB quintuplicatam habere rationem eius quam habet FB ad FB.

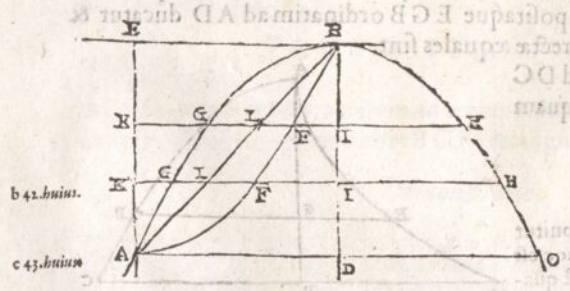
Demonſtratio.

REctangulum EFB ad EFB, rectangulum rationem habet compoſitam ex EF ad EF, id eſt ex duplicata rationis AF ad AF, id eſt ex quadruplicata rationis FB ad FB, & ex ratione FB ad FB; ratio igitur EFB rectanguli ad rectangulum EFB quintuplicata eſt rationis FB ad FB.

PROPOSITIO CLXVII.

PArabolam ABC cuius axis BD, contingat in B linea BE, in qua aſſumpto quouis puncto E demittatur EA, occurrens ABC parabolæ in A. tum per A & B parabola deſcribatur AFB habens verticem in A, occurrens ABC parabolę in B. ſitq́ue eius axis AE: ducatur autem KH ſecans AFB parabolam in F, axem BD in I.

Dico GK, FK, HK lineas eſſe proportionales.



b 42. huius.

c 43. huius

Demonſtratio.

IVncta AB ſecet HG lineam in L. Quoniam BD æquidiſtat diametro AE, & IK ordinatim ad illam applicatur, rectangulo LKI [b] æquale eſt quadratum FK. ſed & LKI rectangulo æquale eſt [c] rectangulum GKH, quadratum igitur FK æquale quoque

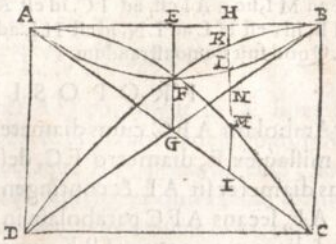
quoque est rectangulo GKH. & GK, FK, HK lineæ incontinua analogia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

ESto ABCD parallelogrammum, descriptâq; per A & C, parabolâ cuius diameter sit AD, & contingens AB, describatur & altera per B & D, cuius diameter sit BC & contingens AB. occurrat autem parabolæ AEC in E. deinde per A, E, C puncta tertia describatur parabola communes habens cum alijs diametros.

Dico iunctas AC, BD, parabolam AEC contingere in A & C.

Demonstratio.



AGatur per E diameter EF secans DB lineam in G. vt FE ad AD, sic FB quadratum ad [a] quadratum AB, & vt FE linea, ad lineam BC, sic AF, quadratum ad quadratum AB: sunt autem AD, BC lineæ per hypothesim æquales, igitur & FB quadratum est ad quadratum AB, vt AF quadratū ad quadratū AB: quadrata igitur AF, FB æqualia sunt, & linea AB dupla AE, vti AD dupla FG: quare FE etiam AC lineæ occurrit in G puncto, quo bifariam à DB, alterâ parallelogrammi diametro secatur. Rursum quia AB quadratum quadruplum est quadrati FB, erit & BC linea, quadrupla lineæ FE; est autem AD id est BC, ostensa dupla FG, igitur FG dupla est FE, & FE, EG lineæ æquales. vnde BD linea [a] est contingens; similiter ostenditur AC lineam, parabolam AEB contingere. Quod erat demonstrandum.

[a] Ex 17. huius.

Corollarium.

HInc patet AG, BD lineas, in illo puncto se intersecare, vbi EG est æqualis rectæ FE: quod singulatim & explicitè annotare verbo placuit.

PROPOSITIO CLXIX.

IIsdem positis: oportet E punctum intersectionis exhibere.

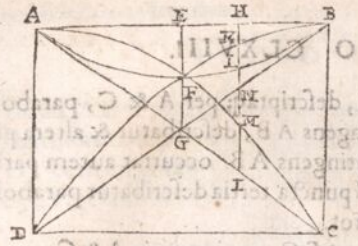
Constructio & demonstratio.

DIuisâ AB bifariam in F, demittatur ex F diameter FE, æqualis quartę parti lineæ BC: dico E, terminum lineæ FE, designare punctum intersectionis. sit enim E punctum intersectionis inuentum & per E diameter agatur EF, erit EF, vt in præcedenti propositione ostendimus, æqualis quartæ parti lineæ BC; igitur per compositionem cùm FE diameter detur æqualis quartæ parti lineæ BC, patet E punctum esse intersectionis, &c. Quod erat exhibendum.

PROPOSITIO CLXX.

IIsdem positis ducatur quæuis diameter HI secans parabolas in K, L, M. Dico HK, HL, HM lineas in continua esse analogia.

Demonſtratio.



a 47. huius.
b Ex 17. huius.
c 47. huius.
d 94. huius.
e Ibid.

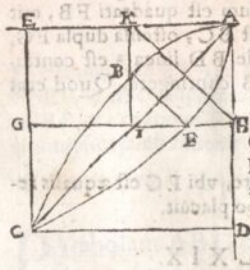
REcta HI ſecet BD lineam in N, & AC in I, vt BHA rectangulum ad rectangulum BFA [a] ſic HL linea eſt ad lineam FE, id eſt EG; & vt BND rectangulum ad rectangulum [c] BGD, ſic KN ad EG: eſt autẽ BHA rectangulum ad rectangulum BFA, vt BND rectangulum ad rectangulum BGD; igitur vt HL ad EG, ſic KN ad EG: adeoque HL, KN æquales ſunt lineæ; & dempta communi KL, manet HK æqualis LN. ſimiliter oſtẽditur IM linea æqualis lineæ HL: quare vt HM ad MI, ſic HM eſt ad HL: ſed vt HM ad MI, ſic [d] AI eſt ad IC, id eſt AH ad HB; igitur vt HM ad HL, ſic AH ad HB, id [e] eſt HL ad LN, id eſt HL ad HK. proportionales igitur ſunt HK, HL, HM. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXI.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE, demiſſaq; ex E, diametro EC, deſcribatur per A & C parabola AFC cuius diameter ſit AE & contingens AD: dein linea ducatur GH parallela AE, ſecans AFC parabolam in F, & AC lineam in I puncto; per quod diameter ponatur IBK, iunganturque BF, HK.

Dico BF, HK lineas æquidiſtare.

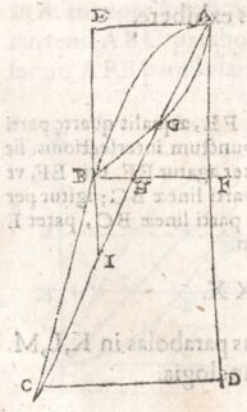
Demonſtratio.



f Ex 67. huius.
g Ex elementis.

POnatur ex C ordinatim ad diametrum AD linea CD: ratio KB ad EC, duplicata [f] eſt rationis KI ad EC: ſimiliter ratio HF ad CD, duplicata eſt rationis HI ad CD, id eſt AK ad AE, id eſt KI ad EC; igitur vt KB ad EC, ſic HF ad CD, & vt KB ad KI, ſic HF ad HI. æquidiſtant igitur [g] FB, HK lineæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXII.



h 71. huius.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE, demiſſaq; diametro EB, quæ ABC parabolæ occurrat in B, ponatur ex B ordinatim linea BF: deſcriptaque per A & B parabolâ AGB cuius diameter AE, & contingens AD, ducatur ex A linea AC occurrens AGB parabolæ, & lineis BF, EB in G, H, & I.

Dico AG, AH, AI, AC lineas eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.

QVoniam EB æquidiſtat contingenti AD, & EB, diametro AE, rectæ AG, [h] AH, AI continuæ ſunt propor-

proportionales. sunt autem & AH, AI, [a] AC lineæ etiam in continuata ratione; igitur AG, AH, AI, AC eandem continuant analogiam. Quod erat demonstrandum. [a] Ex 67. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

Iisdem positis ponatur ordinatim CD.

Dico AG ad AC triplicatam habere rationem eius quam habet BF ad CD.

Demonstratio.

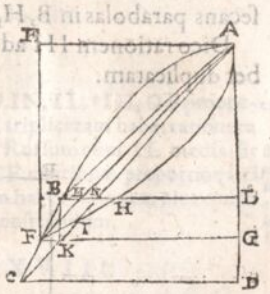
QVoniam AG, AH, AI, AC lineæ per præcedentem continuæ proportionales sunt, ratio AG ad AC [b] triplicata est eius cuius AH ad AC est duplicata: sed AH ad AC, id est AF ad AD, rationem habet duplicatam BF ad CD; igitur AG ad AC rationem habet triplicatam eius quam habet BF linea ad lineam CD. Quod erat demonstrandum. [b] Ex 27. de progressionibus.

PROPOSITIO CLXXIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in A linea AE; positisq; ordinatim CD, FG, per F & A parabola describatur AHF cuius tangens AD, diameter AE: ductaque AF, ponatur AC, secans AHF parabolam in I, rectam FG in K puncto, ex quo erectâ diametro KB, ducatur ordinatim linea BL, occurrens AF lineæ in M, rectæ AC in N, & parabolæ AHF in H.

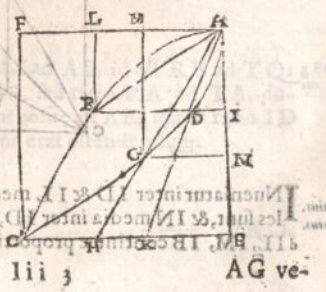
Dico GD, FG, BL, ML, NL, HL lineas in continua esse analogia.

Demonstratio.

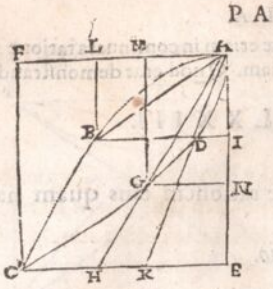


ERigatur ex F diameter FE. Quoniam BK æquidistat diametro AD, rectæ CD, FG, BL proportionales sunt: sed & FG, BL, ML quoque sunt proportionales; eandem igitur continuant rationem CD, FG, BL, ML. Rursum cùm ratio NL ad KG, id est ad BL, id est ratio AL ad AG, duplicata sit rationis BL ad FG, id est LM ad LB, rectæ quoque BL, ML NL proportionales sunt. postremò quia FG linea ad lineam HL duplicatam habet rationem AL ad AG, id est quadruplicatam LB ad GF, id est LB ad LM, lineæ LH, LN, LM, LB, LF proportionales sunt; igitur continuant eandem rationem lineæ CD, FG, BL, ML, NL, HL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXV.



PArabolas æquales ABC, ADC, & communem habentes verticem, contingant in A lineæ AE, AF æquales lateribus rectis; secent autem sese parabolæ in C, & ex C ordinatim ducantur CE, CF, demissisque ex A lineis æqualibus AB, AG, quarum altera AB, quidem secet ABC parabolam in B;



AG verò parabolam ADC in C & productа, CE lineam in H. ducatur ex B ordinatim linea BI secans ADC parabolam in D, & per D ex A linea ducatur AK occurrens EC in K.

Dico AD ad AK, duplicatam habere rationem eius quam habet AG ad AH.

Demonstratio.

DVcantur ex B & G punctis, diametri BL, GM, GN: ac BL, & GM quidem occurrant AF lineæ in L & M; GN verò, rectæ AE in N. Quoniam tam ABC, ADC parabolæ, quàm AB, AG lineæ æquales sunt, erit LB linea quoque æqualis GN, & IB æqualis MG. Rursum ratio LB ad FC, id est AI ad AE; id est AD ad AK duplicata est rationis IB ad EC, id est MG ad EC; sed vt MG ad EC, sic AN ad AE (nam AL id est IB æqualis est rectę AN, & EC ipsi AE, [a] est æqualis) hoc est AG ad AH; igitur ratio AD ad AK, duplicata est eius quam habet AG ad AH. Quod erat demonstrandum.

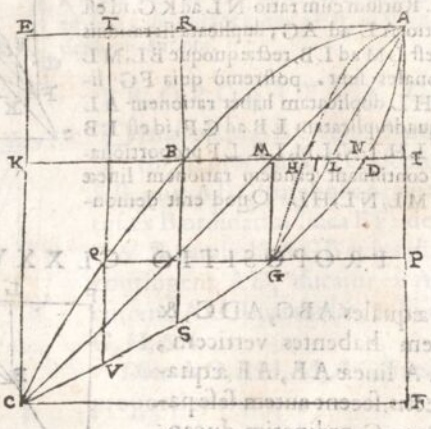
a 9 huius.

PROPOSITIO CLXXVI.

PArabolas æquales ABC, ADC communem habentes verticem contingant in A lineæ AE, AF, secentque sese inuicem parabolæ in C; ex quo ductis ordinatim lineis CE, CF, describatur per A parabola AHG habens verticem in A, & contingentem AE, occurrens autem ADC parabolæ in G. iunctisque punctis AC, AG, erigatur ex G diameter GM secans AC lineam in M, puncto per quod ordinatim ducatur linea IK secans parabolas in B, H, D, lineam AG in L.

Dico rationem IH ad IB triplicatam esse eius, cuius IL ad IM, habet duplicatam.

Demonstratio.



INueniatur inter ID & IL media IN; quoniam igitur ID, IL, [b] IM, proportionales sunt, & IN media inter ID, IL, erunt tam ID, IN, [c] IL, IH lineæ, quàm ID, [d] IL, IM, IB continuæ proportionales: quare ratio IH ad IB, quartę ad quartam, tripli-

b 42. huius.
c 74. huius.
d Ibid.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [495] - 438
PUBLIC DOMAIN

triplicata [a] est rationis IN ad IL, secundæ ad secundam, cuius IL ad IM, tertia ad tertiam, rationem [b] habet duplicatam. Quod erat demonstrandum.

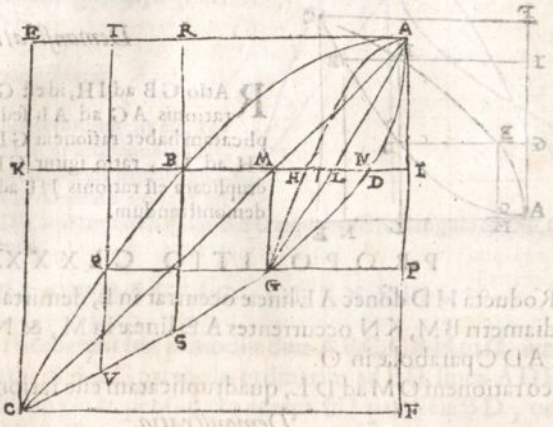
[a] 27. De progressionibus.
[b] Ibid.

PROPOSITIO CLXXVII.

Iisdem positis: agatur per G ordinatim QP.

Dico ID ad IH, rationem habere triplicatam eius quam habet IH ad GP. & rationem ID ad IB, triplicatam esse rationis IB ad CF.

Demonstratio.



CVm enim IN media sit inter ID & IL, rectæ ID, IN, IL, [c] IH, GP proportionales sunt, quare ID ad IH, prima ad quartam, triplicatam habet rationem IH ad [d] GP, quartæ ad quintam. Quod erat primum. Rursum cùm IL media sit [e] inter ID, IM, rectæ [f] ID, IL, IM, IB, IK id est CF continuæ proportionales sunt, quare ID ad IB, prima ad quartam, triplicatam habet rationem eius quam habet IB ad CF, quarta ad quintam. Quod erat demonstrandum.

[c] 174. huius
[d] 27. De progressionibus.
[e] Ex 42. huius.
[f] 174. huius

PROPOSITIO CLXXVIII.

Iisdem positis agantur per Q & B diametri TV, RS occurrentes ADC parabolæ in V & S, & AE lineæ in T & R.

Dico rationem ID ad GP, octuplicatam esse rationis RS ad TV.

Demonstratio.

ESt enim ratio ID ad GP, duplicata rationis [g] AI ad AP, id est RB ad TQ; id est quadruplicata eius quam habet RA ad TA. sed ratio RA ad TA, duplicata est rationis RS ad TV, cùm ordinatim sint positę ad AE; igitur ratio ID ad GP, octuplicata est rationis RS ad TV. Quod erat ostendendum.

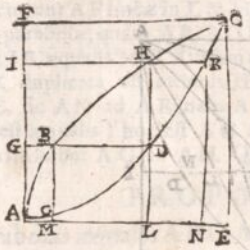
[g] Ex 1. huius.

PRO-

PROPOSITIO CLXXIX.

PArabolas ABC, ADC communem habentes verticem, contingant in A lineæ AE, AF, secent autem sese parabolæ in C puncto, ex quo ordinatim ponantur lineæ CE, CF: assumptoque in AF puncto quouis G, ducatur ex G ordinatim linea GD, secans ABC, ADC parabolas in B & D, actâq; per D diametro DH, quæ ABC parabolæ occurrat in H, ducatur per H ordinatim linea IK, secans AF lineam in I.

Dico GB ad GD quadruplicatam habere rationem eius quam habet IH ad IK.



Demonstratio.

RAtio GB ad IH, id est GD duplicata est rationis AG ad AI; sed AG ad AI, duplicatam habet rationem GD ad IK, id est IH ad IK, ratio igitur GB ad GD, quadruplicata est rationis IH ad IK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXX.

PRoductâ HD donec AE lineæ occurrat in L, demittantur ex B & K diametri BM, KN occurrentes AE lineæ in M, & N, & BM quidem ADC parabolæ in O.

Dico rationem OM ad DL, quadruplicatam esse rationis DL ad KN.

Demonstratio.

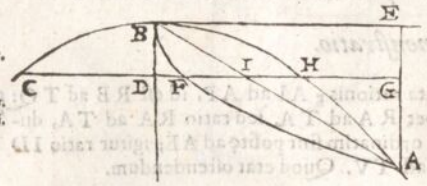
ESt enim ratio OM ad DL duplicata rationis AM ad AL, id est GB ad IH: id est quadruplicata rationis AG ad AI, id est LD ad NK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXI.

PArabolâ ABC cuius axis BD contingat in B linea BE, in qua assumpto quouis puncto E, demittatur ex E diameter EA: descripta deinde per A & B parabola BFA cuius axis BE, & contingens BD, ducatur ad BD quæuis ordinatim linea HC, occurrens parabolis in C, F, H; & BD, BA, EA lineis in D, I, G.

Dico HIC rectangulum, æquari rectangulo GDIF.

Demonstratio.



a 42. huius.
b 67. huius.
c 5. secundi.

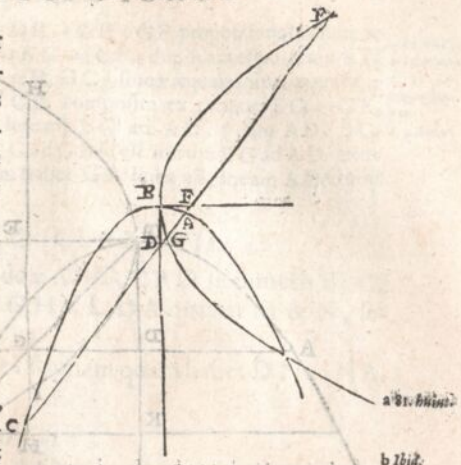
REctangulum GDI, æquale est [a] quadrato HD: sed HD quadratum æquale est quadrato ID, id est [b] rectangulo FDB, vnà cum [c] rectangulo HIC, rectangulum igitur GDI, æquale est rectangulis FDG, HIC. est autem idem GDI rectangulum, æquale quoque rectangulis FDG, GDIF: rectangula igitur FDG, HIC, æqualia sunt rectangulis FDG, GDIF. dempto igitur communi rectangulo FDG, manet HIC rectangulum æquale rectangulo GDIF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXII.

PArabolam A B C cuius diameter B D contingat in B, linea B E; describatq; per B parabolâ F B G, cuius diameter B E, & contingens B D, ducatur linea quæcunq; F C, occurrens parabolis in A, & G, F, C, diametris verò in E & D.

Dico A E C rectangulum, æquari rectangulo G D F.



a 31. huius.

b Ibid.

Demonstratio.

QVoniam E B linea contingens est, rectæ A E, D E, C E proportionales sũt, adeoque A E C rectangulum æquale quadrato E D: sed E D quadrato æquale est [b] rectangulum G D F, rectangulum igitur A E C æquale est rectangulo G D F. Quod erat demonstrandum.

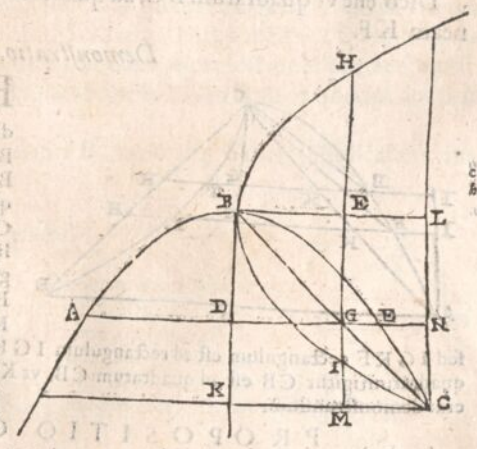
PROPOSITIO CLXXXIII.

IIsdem positis: occurrant sibi parabolæ duæ A B C, C B H in C. iunctâque B C, ponatur in A B C parabola ordinatim ad B D, linea A D F, occurrens rectæ B C in G: & per G recta agatur H I parallela B D, occurrens diametro B L in E.

Dico I G H rectangulum esse ad rectangulum F G A, vt quadratum I E ad quadratum F D.

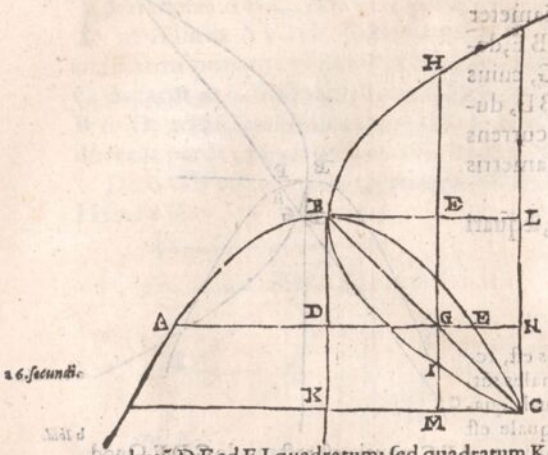
Demonstratio.

POnantur ex C ordinatim ad diametros B D, B E, lineæ C K, C L. quoniam B C, B G parallelogramma communem habent diametralem B G C, vt C L ad G E, sic K C est ad G D; sed vt C L ad G E, sic I E quadratum est ad [c] quadratum G E, & vt C K linea ad lineam G D, sic F D quadratum est ad quadratum G D; igitur vt I E quadratum ad quadratum G E, sic F D quadratum est ad quadratum G D, & permutando vt I E quadratum ad quadratum F D, sic quadratum G E ad quadratum G D. est autem quadratum I E æquale quadrato G E, vnà cum rectangulo I G H; & F D quadratum æquale quadrato G D, vnà cum rectangulo F G A; igitur & I G H rectangulum est ad rectangulum F G A vt I E quadratum ad quadratum F D. Quod erat demonstrandum.



c Ex 41. huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.



a 6. secundæ

Ilsdem positis, producta linea GH, occurrat CK lineæ in M, & AF producta lineæ LC in N.

Dico IMH rectangulũ esse ad rectangulum FNA, vt IGH rectangulum est ad rectangulum FGA.

Demonstratio.

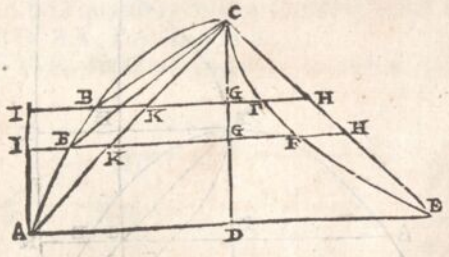
OStensũ est præcedenti propositione, quadratum KC ad CL, eandem habere rationem quam DG quadratum ad quadratum GE, ac proinde, quã quadratũ DF ad EI, quadratum: sed quadratum KC hoc est DN æquatur DF quadrato, vnà cum[a] rectangulo FNA; similiter quadratum CL hoc est EM, æquale est quadrato EI, vnà cum rectangulo IMH; cùm igitur sit quadratum EM ad DN, sicut quadratum EI ad DF, rectangulum quoque IMH est ad rectangulum FNA, vt quadratum EI ad DF quadratum, hoc est per præcedentem vt rectangulum IGH ad FGA rectangulum. quod oportuit demonstrare.

PROPOSITIO CLXXXV.

ESto ABC parabolæ axis CD, æqualis lateri recto, actaque per D ordinatim linea DA, producatur in E, vt AD, DE lineæ æquales sint iunganturque AC, EC: dein per C & E parabola describatur CFE, habens verticem in C & contingentem CD; ducanturq; BG parallelę AD, occurrentes parabolis in B & F, & iungantur BC.

Dico ęsse vt quadratum BC, ad quadratum BC, sic KF lineam ad lineam KF.

Demonstratio.



b 42. huius.

c 67. huius.

ERigatur ex A diameter AI occurrens BG lineis in I. quadratum CB æquale est quadratis BG, CG: est autem[b] quadratum BG æquale rectangulo KGI, & quadrato CG[c] siue GH, (cùm CD, DE adeoque & CG, GH lineæ æquentur) æquale est rectangulum FGI; quadratum igitur BC æquale est rectangulis FGI, KGI; hoc est rectangulo IGKF: sed IGKF rectangulum est ad rectangulum IGKF, vt FK linea ad lineam KF; quadratum igitur CB est ad quadratum CB, vt KF linea est ad lineam KF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXXVI.

Ilsdem positis:

Dico FG ad GB, triplicatam habere rationem eius quam habet GB ad AD.

Demon-

Demonſtratio.

QVoniam tam AD, [a] BG, KG, quàm DE, [b] GH, GF proportionales ſunt, & AD prima, æqualis primæ DE, ratio KG ad GF, [c] duplicata eſt rationis BG ad GH, id eſt BG ad KG, cùm enim AD, DC [d] lineæ æquales ſint, æquantur etiam KG, GC. eſt autem ratio FG ad GB, compoſita ex ratione FG ad GK, id eſt ex duplicata ratione KG ad GB, hoc eſt BG ad AD, (cùm AD, BG, KG, proportionales ſint) & ex ratione KG ad GB id eſt iterum BG ad AD, igitur FG ad GB, triplicatam habet eius quam habet GB linea ad lineam AD. Quod fuit demonſtrandum.

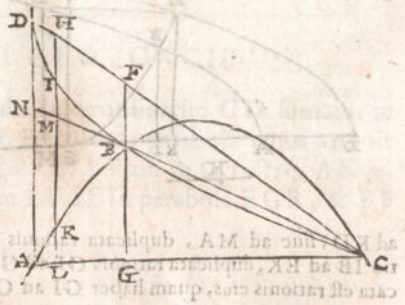
[a] 42. huius.
[b] 67. huius.
[c] 26. De progreſſionibus.
[d] 9. huius.

PROPOSITIO CLXXXVII.

INterſecent iterum ſeſe parabolæ duæ ABC, CBD in punctis B, C, habentes communes diametros FG, HKL, DA quas in M & N, ſecet recta CB.

Dico IM ad MK eandem habere rationem quam habet DN ad NA.

Demonſtratio.



VT DHC rectangulum eſt ad rectangulum DFC, ſic ALC ad AGC, rectangulum, ſed vt DHC ad DFC, ſic HI [e] ad FB, & vt ALC ad AGC, ſic LK linea eſt ad GB lineam; igitur vt HI ad FB, ſic KL ad BG: & permutando conuertendo vt FB ad BG, ſic HI ad KL. eſt autem vt FB ad BG, ſic HM ad ML; igitur vt HI ad KL, ſic HM ad ML: vnde & IM [f] eſt ad MK, vt HM ad ML, id eſt DN ad NA. Quod fuit demonſtrandum.

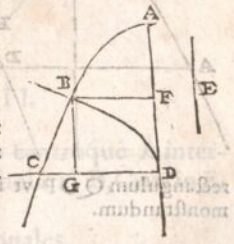
[e] 47 huius.
[f] 19. quinti.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD quam in D ſecet ordinatim linea DC: dein per D parabola deſcribatur DB, habens AD contingentem & diametrum DC & commune cum altera ſectione latus rectum E. occurrat autem DB parabola, parabolæ ABC in B, & ordinatim ducatur linea BF.

Dico AF lineam ad lineam FB, rationem habere duplicatam eius quam habet FB ad FD.

Demonſtratio.



POnatur BG æquidiſtans AD. Quoniam igitur E latus rectum vtrique ſectioni commune eſt, & FB, BG ordinatim poſitæ, erunt tam E, FB, AF lineæ, quàm E, BG, id eſt FD, & DG proportionales. vnde cùm E prima ſit communis, ratio [g] AF ad DG, id eſt ad FB, duplicata eſt rationis FB ad BG id eſt ad FD. Quod fuit demonſtrandum.

[g] 27. De progreſſionibus.

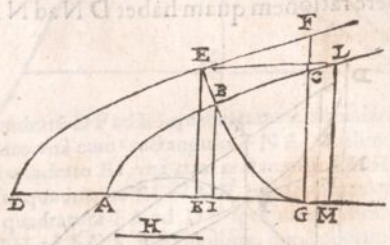
Corollarium.

HInc sequitur AF ad FD, rationem triplicatam eius esse rationis, quæ est inter AF & FD. est enim ratio AF ad FD, composita ex ratione AF ad FB. hoc est duplicata BF ad FD, & ex ratione BF ad FD; hoc est triplicata AF ad FD.

PROPOSITIO CLXXXIX.

HAbeant ABC, DEF parabolæ ad eundem axem constitutæ, communelatus rectum H. assumptoq; in axe puncto quouis G, ex eo ordinatim ducatur linea GCF, describaturq; per G parabola, habens axem GC, occurrens parabolis ABC, DEF in B & E punctis; ex quibus ordinatim demittantur lineæ BI, EK.

Dico rationem IA ad KD, quadruplicatam esse rationis GI ad GK.



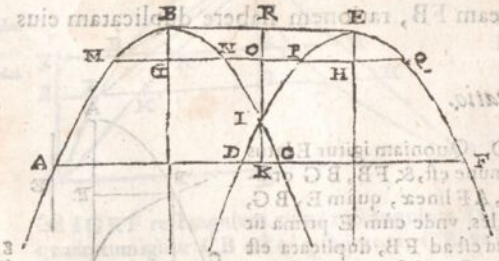
Demonstratio.

DVctâ enim ex E linea EL parallelâ GD, occurrente ABC parabolæ in L, demittatur ex L ad diametrum GD, ordinatim linea LM: erit igitur quadratum LM æquale quadrato EK, vnde & rectangulum sub H & MA, æquale est rectangulo sub H & KD, adeoque & MA linea æqualis KD. est igitur ratio IA ad KD, siue ad MA, duplicata rationis IB ad LM, siue ad EK. est autem ratio IB ad EK, duplicata rationis GI ad GK; ratio igitur IA ad KD, quadruplicata est rationis eius, quam habet GI ad GK. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CXC.

INtersecent sese inuicem in I parabolæ duæ ABC, DEF parallelos habentes axes BG, EH. actaque per I diametro, ducantur ordinatim rectæ MQ, AF.

Dico NOM rectangulum esse ad rectangulum POQ, vt CKA rectangulum ad rectangulum DKF.



Demonstratio.

VT IO est ad IK, sic NOM rectãgulum [a] est ad rectangulum CKA; sed vt IO ad IK, sic QOP rectangulum est ad rectangulum DKF. igitur vt NOM rectangulum ad rectangulum CKA, sic QOP rectangulum est ad rectangulũ DKF. & permutando, NOM est ad rectangulum QOP vt rectangulum CKA ad rectangulum DKF. Quod fuit demonstrandum.

[a] Ex 14. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXCI.

Iisdem positis: si A B C, D E F parabolæ eandem habuerint altitudinem & communem contingentem B E.

Dico N O M rectangulum esse ad rectangulum P O Q, vt B R quadratum ad quadratum R E.

Demonstratio.

VT linea R I ad lineam O I, sic B R [a] quadratum ad rectangulum N O M; & [a] *ibid.* vt R I ad O I, sic R E quadratum ad rectangulum Q O P; igitur vt B R quadratum ad N O M rectangulum sic quadratum R E ad rectangulum P O Q, & permutando vt quadratum B R ad quadratum R E, sic N O M rectangulum ad rectangulum Q O P. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc patet etiam rectangulum A K C esse ad rectangulum D K F, vt B R quadratum ad quadratum R E.

PROPOSITIO CXCII.

ESto A B C parabolæ axis A D ductaque ordinatim C D, sumatur in axe quæuis recta D E & per E describatur parabola cuius axis sit E A, secans parabolam A B C in B, & C D lineam in G. factaq; A K æquali D E, ducantur K I ordinatim ad A E in parabola E G B, & B F ordinatim ad A B C.

Dico C D quadratum esse ad quadratum I K, vt E F linea ad F A.



Demonstratio.

SIt A B C parabolæ latus rectum L, & parabolæ E G B latus rectum M. quadratum C D æquale est rectangulo D A L; & quadratum I K æquale rectangulo K E M, est autem A D linea æqualis K E, quia A K, E D æquales ponuntur; quadratum igitur C D est ad I K quadratum, vt L ad M. Rursum quia quadrato B F tam est æquale rectangulum F A L quàm F E M; rectangula quoque F A L, F E M æqualia sunt. igitur vt A F ad F E, sic M ad L. sed vt M ad L, sic I K quadratum est ad C D quadratum, igitur vt A F ad F E, sic I K quadratum est ad quadratum C D.

PROPOSITIO CXCIII.

SIt A B C parabolæ axis A D æqualis lateri recto centroque A intervallo quouis, circulus describatur occurrens parabolæ in B, C; axi in E, ponaturque ad axem ordinatim B F.

Dico D F, A E, A F lineas continuè esse proportionales.

Demonſtratio.



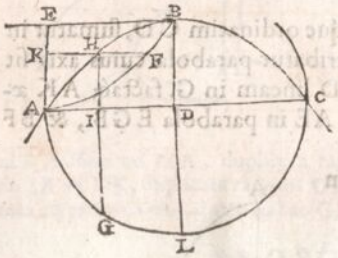
a 34. *huius.*

REcta AE æqualis eſt AB: ſed AF, [a] AB, DF proportionales ſunt, igitur & AF, AE, DF eandem continuant rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXCIV.

SIt ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim applicata AC; actâque per B contingente BE, quæ erectæ ex A diametro, occurrat in E, deſcribatur per AB parabola AFB, cuius axis AE; centroq; D interuallo AD, circulus deſcribatur AGC, quem in G, ſecet recta quædam HG, æquidiſtans axi BD, occurrenſq; ABC parabolæ in H, & AC lineæ in I: denique per H ponatur KF parallela EB, occurrens AFB parabolæ in F & AE in K.

Dico GI, FK lineas eſſe inter ſe æquales.



b 47. *huius.*

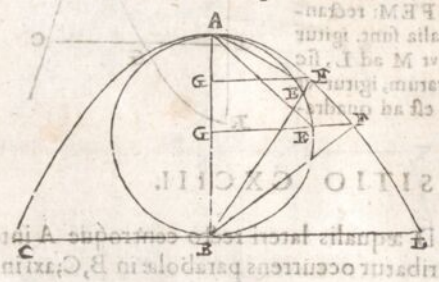
Demonſtratio.

PRoducta BD, occurrat circulo in L: vt AK ad AE, id eſt HI ad BD; ſic FK quadratum eſt ad quadratum BE: ſed etiam vt HI ad BD, ſic [b] AIC rectangulum eſt ad rectangulum ADC, id eſt IG quadratum ad quadratum DL; igitur vt quadratum FK ad quadratum BE, ſic IG quadratum ad quadratum DL, id eſt AD, id eſt EB. quare IG, FK, quadrata adeoque & lineæ inter ſe æquantur.

PROPOSITIO CXCV.

SVper ABC parabolæ axe AB æquali lateri recto, circulus deſcribatur AEB, quem in E ſecent vtcunque ordinatim poſitę GF, ad axem parabolæ. iunganturque AE.

Dico AE, GF lineas æquari.



Demonſtratio.

QVoniam AB, lateri recto æqualis eſt, quadratum FG æquatur rectangulo GAB; ſed & GAB rectangulo æquale quoque eſt quadratum AE, quia AGE angulus rectus eſt, quadrata igitur AE, FG adeoque & lineæ inter ſe æquantur. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXCVI.

Iisdem positis, iungantur FB.
Dico FB quadratum æquari quadratis AG, GE, GB simul sumptis.

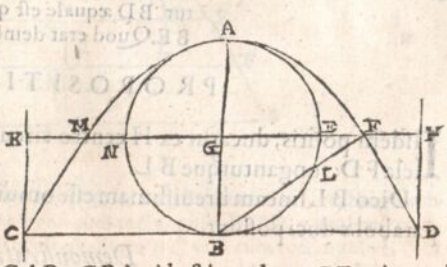
Demonstratio.

QVadratum FB, æquale est quadratis BG, GF. sed FG quadratum æquale est quadrato AE, id est quadratis AG, GE, quadratum igitur FB æquale est quadratis AG, GE, GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXCVII.

Iisdem positis: occurrat FG linea diametris DH, CK. in H & K.
Dico HFK rectangulum æquari rectangulo ABG.

Demonstratio.



QVadratum HG æquale est quadrato FG, vnà cum rectangulo HFK; est autem quadrato HG siue BD, æquale [a] quadratum AB, (cùm AB æqualis ponatur lateri recto) igitur & quadratum AB, æquale est quadrato FG vna cũ rectangulo HFK. sed AB quadratum quoque est æquale rectangulis GAB, GBA, id est [b] quadrato GF vnà cum rectangulo GBA, quadratum igitur FG vnà cum rectangulo GBA, æquale est quadrato FG cum rectangulo HFK: dempto igitur communi quadrato FG, residua rectangula ABG, HFK sunt inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. huius.

[b] En 195. huius.

Corollarium.

EX dictis patet FEM rectangulum æquari quadrato AG. nam FEM rectangulum vnà cum quadrato EG, æquatur quadrato FG, id est AE, id est quadratis AG, GE: dempto igitur communi quadrato GE, manet FEM rectangulum æquale quadrato AG.

PROPOSITIO CXCVIII.

Iisdem positis: occurrat FB, circulo in L.
Dico BFL rectangulo, æquari quadratum AG.

Demonstratio.

BFL rectangulum æquale est rectangulo NFE, id est MEF. sed [c] MEF rectangulo æquale est quadratum AG; igitur & rectangulo BFL æquale est quadratum AG. Quod erat demonstrandum.

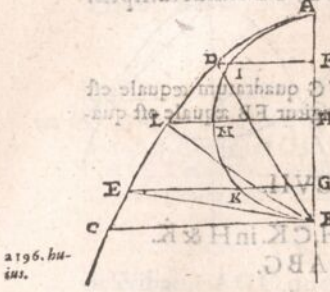
[c] Coroll. præcedens.

PRO-

PROPOSITIO CXCIX.

SIt A B axis parabolæ A B C lateri recto, sumptisq; A F, B G æqualibus, ponantur ordinatim ad axem rectæ F D, G E.

Dico iunctas B D, B E esse inter se æquales.



Demonstratio.

SVper A B describatur circulus occurrens F D, G E lineis in I & K. quoniam A F, B G lineę æquales sunt, & F I, G K normales ad axem A B, rectæ F I, G K, item A G, B F inter se æquales sunt: est autem quadratum B D æquale [a] quadratis A F, F I, F B; & B E quadratum æquale quadratis B G, G K, G A: quadratum igitur B D æquale est quadrato B E, & B D linea æqualis B E. Quod erat demonstrandum.

[a] 196. huius.

PROPOSITIO CC.

IIsdem positis, ducatur ex H centro circuli A I B, recta H M L, parallela F D; iunganturque B L.

Dico B L lineam breuissimam esse omnium quæ ex B ad peripheriam parabolæ duci possunt.

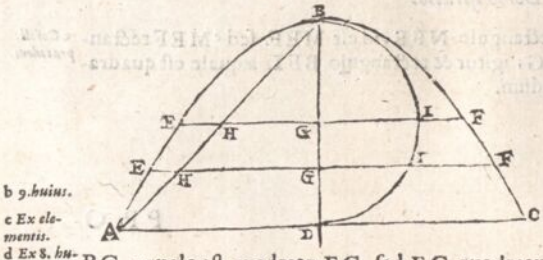
Demonstratio.

POnatur quęuis alia B D, & ordinatim D F; erit igitur quadratum B L, æquale quadratis A H, H M, H B: & B D quadratum æquale quadratis A F, F I, F B: quia verò A H, H M, H B semidiametri sunt, quadrata illarum minora sunt quadratis A F, F I, F B (vt facile ex elementis ostenditur) igitur & quadratum B L minus est quadrato B D. & B D linea omnium breuissima, quę ex B ad peripheriam duci possunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCI.

ESto super A B C parabolę axi B D æquali lateri recto descriptus semicirculus B I D, quem in I secent quæcunque ordinatim ad axem positę F G E, actaq; per D ordinatim A C, ducatur A B, occurrens E F lineis in H.

Dico rectangulo F H E æquari G I quadratum.



Demonstratio.

QVoniam axis B D æqualis ponitur lateri recto, & A D ordinatim applicata, rectæ A D, [b] B D adeoque & H G, G B inter se æquales sunt. quia verò E F linea in G diuisa est bifariam & non bifariam in H, rectangulum E H F vnà cum [c] quadrato H G, id est B G, æquale est quadrato E G. sed E G quadratum est æquale rectangulo [d] G B D, id

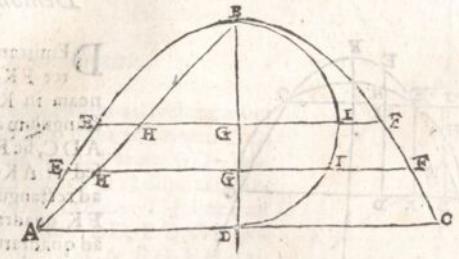
b 9. huius.
c Ex elementis.
d Ex 8. huius.

id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D; igitur quadratum B G vnà cum rectangulo B G D æquatur E H F rectangulo vnà quadrato H G, cum id est B G; dempto igitur communi quadrato B G, manet E H F rectangulum æquale rectangulo B G D, id est quadrato G I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCII.

ISdem positis:
Dico F I, G H, I E lineas proportionales esse.

Demonstratio.



QVoniam E F linea diuisa est bifariam in G & non bifariam in I, rectangulum F I E vnà cum quadrato I G, id est vnà cum rectangulo B G D, æquale est quadrato G F, id est [a] rectangulo G B D id est quadrato B G vnà cum rectangulo B G D id est cum quadrato G I; dempto igitur communi quadrato I G, manet F I E rectangulum æquale quadrato B G id est quadrato H G. proportionales itaque sunt F I, G H, I E. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ibid.*

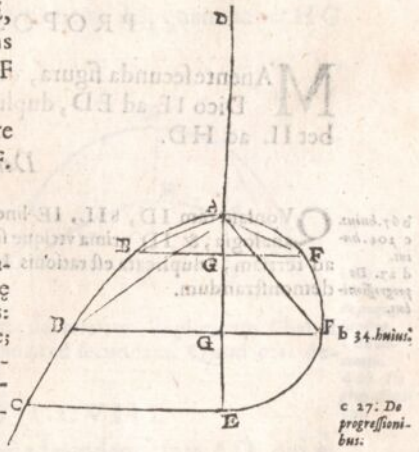
PROPOSITIO CCIII.

ESto super A B C parabolæ axe A C æquali lateri recto descriptus semicirculus A F E, sumptaque A D æquali A E, ducatur ordinatim quæuis B F secans axem A E in G, occurrens circulo in F iunganturq; A B, A F.

Dico D G ad D A, rationem habere duplicatam eius quam habet A B ad A F.

Demonstratio.

QVoniam A F quadratum æquale est quadratis F G, A G id est rectangulo D A G rectę A G, A F, D A continuæ sunt proportionales: sed & A G, A B, G D sunt in [b] continua ratione; igitur cùm A G prima vtrique seriei communis sit, D G ad D A, tertia ad tertiam, in duplicata est ratione [c] A B ad A F, secundæ ad secundam. Quod erat demonstrandum.



[b] 34. huius.

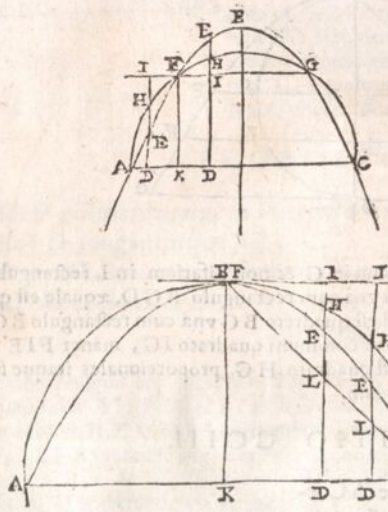
[c] 27. De progressionibus.

PROPOSITIO CCIV.

PArabolam ABC ſubtendat recta AC normalis ad diametrum ED: ſuper AC verò vt axe deſcribatur ſemiellipſis vel ſemicirculus AF, GC occurrens parabolæ in F & G, vel eandem contingens in B, ducaturque FI parallela ipſi AC, & ID lineæ ponantur æquidiſtantes ED, occurrentes parabolæ in E, ellipſi vel ſemicirculo in H, FI lineæ in I, & ipſi AC in D.

Dico DE, DH, DI lineas eſſe continuè proportionales.

Demonſtratio.



a 47. huius.

DEmittatur ex F diameter FK, ſecans AC lineam in K. vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, ſic FK eſt ad [a] ED; ſed vt AKC rectangulum ad rectangulum ADC, ſic FK quadratum quoque eſt ad quadratum HD, igitur vt FK linea eſt ad lineam ED, ſic quadratum FK eſt ad quadratum HD; recta igitur FK, id eſt ID, ad ED, duplicatam habet rationem eius, quam habet ID ad HD: quare DE, DH, DI lineæ in continua ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCV.

MAnente ſecunda figura, ducatur BC, occurrens ID lineis in LL, Dico IE ad ED, duplicatam habere rationem eius quam habet IL ad HD.

Demonſtratio.

b 67. huius. c 204. huius. d 27. De progreſſionibus.

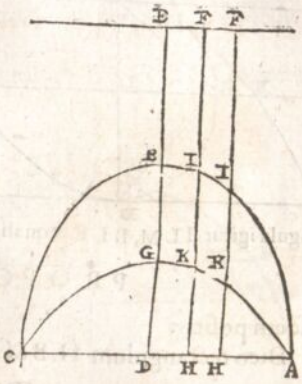
QVoniam tam ID, [b] IL, IE lineæ, quàm ID, [c] HD, ED in continua ſunt analogia, & ID prima vtrique ſeriei eſt communis, ratio IE ad ED, tertiæ ad tertiam, [d] duplicata eſt rationis IL ad HD, ſecundæ ad ſecundam. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCVI.

SInt A B C ellipſeos vel circuli diametri coniugatæ A C, B D; ductaque quauis E F parallela A C, ſecante B D productam in E, fiant E D, B D, G D continuę, proportionales; deſcriptâque per A G C puncta, parabolâ, cuius diameter G D, ponantur lineæ quotcunque F H parallelæ E D, ſecantes ellipſim in I, parabolam in K, & A C lineam in H.

Dico F H, I H, K H lineas eſſe proportionales.



Demonſtratio.

VT A H C rectangulum ad rectangulum A D C, ſic H K linea ad lineam D G, & I H quadratum ad quadratum B D; igitur H K linea ad lineam D G duplicatâ habet rationem eius, quam habet I H linea ad lineam B D. vnde cùm E D, B D, G D poſitione ſint proportionales, & E D, F H primę inter ſe æquales, ſit autem & ratio D G ad K H, tertię ad tertiam; duplicata rationis D B ad H I, ſecundæ ad ſecundam, erunt [a] F H, I H, K H in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

a Ex conuerſa 27. De progreſſionibus.

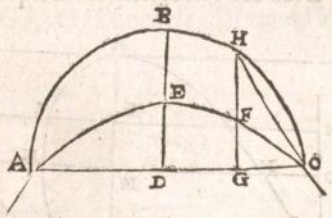
PROPOSITIO CCVII.

IN ſemicirculo A B C decuſſent ſeſe orthogonaliter in D diametri duæ A C, B D, quarum alterâ B D bifariam in E diuisâ, deſcribatur per A, E, C parabola, cuius axis E D, ductaq; diametro F G, quæ ſemicirculo occurrat in H; ponatur H C.

Dico F G ad G C duplicatam habere rationem eius, quam habet H G ad H C.

Demonſtratio.

QVoniam A C dupla eſt B D, & illa dupla E D, rectæ A C, B D, E D proportionales ſunt. eſt autem E D ad F G, in duplicata ratione D B ad G H, cùm ſit vt A D C rectangulum ad rectangulum A G C, id eſt B D quadratum ad quadratum H G; rectæ igitur G F, [b] H G, A C in continua ſunt analogia, ſed & A C, H C, G C [c] lineæ proportionales ſunt; igitur F G ad G C, tertia ad tertiam, duplicatam [d] habet rationem eius, quam habet H G ad H C, ſecunda ad ſecundam. Quod erat demonſtrandum.



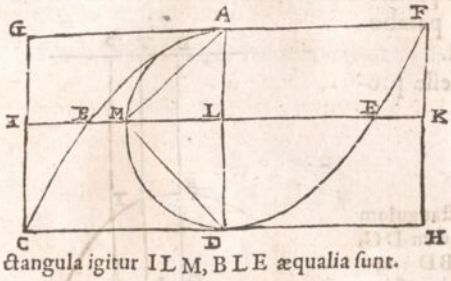
b Ex conuerſa 27. de progreſſionibus.
c Ex elementis.
d 27. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CCVIII.

PArabolas æquales A B C, D E F inuersè ad eundem axem A D, qui æqualis ſit lateri recto conſtitutas, contingant in A & D, lineæ G F, H C: &

HC: & GF quidem parabolæ DEF, occurrat in F, HC verò parabolæ ABC in C; erectiſque ex C & F, diametris quæ FG, CH lineis occurrant in G, & H, ducatur quæuis IK, parallela FG, ſecans parabolas in B & E, rectas CG, HF in I & K, axem AD in L. dein ſuper AD vt diametro, deſcribatur ſemicirculus AMD, occurrens IK lineæ in M.

Dico ILM rectangulum æquari rectangulo ELB.



Demonſtratio.

QVoniam AD æqualis eſt lateri recto, lineæ AD, CD, item AM, LB, item MD, LE æquales ſunt. rectangulum igitur AMD æquale eſt rectangulo ELB: ſed & AMD rectangulo quoque eſt æquale rectangulum ADML, id eſt ILM: rectangula igitur ILM, BLE æqualia ſunt.

PROPOSITIO CCIX.

IIſdem poſitis:

Dico rectangulum ILBM æquari rectangulo BLEK.

Demonſtratio.

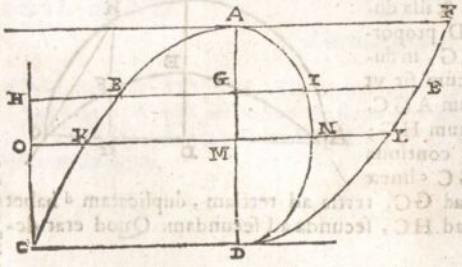
a *Per elementa.* b *Ex elementis.*

QVoniam ILM rectangulum æquale eſt rectangulo ELB, vt IL ad [a] LE, id eſt LK ad LE, ſic LB eſt ad LM: & permutando vt LK ad LB, ſic EL eſt ad LM: & EK reliquum ad MB, vt LK ad LB, id eſt IL ad LB: [b] rectangulum igitur ILBM æquale eſt rectangulo BLEK. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCX.

IIſdem poſitis quæ priùs: fiat BGE rectangulo æquale rectangulum HGI: & per A, I, D puncta ellipſis deſcribatur, cuius axis ſit AD. ducaturque recta quæuis LK parallela BE, occurrens parabolis in K & L, axi AD in M, ellipſi in N, diametro CH in O.

Dico KML rectangulum æquari rectangulo OMN.



c 4. *De ellipſi.*

Demonſtratio.

QVoniam AD axis eſt ellipſeos, & ad illam ordinatim ponuntur IG, MN, vt IG [c] quadratum ad quadratum NM, ſic AGD rectangulum eſt ad rectangulum AMD: rectangulũ igitur AGD ad AMD rectangulum, rationem habet duplicatam, IG ad NM, id eſt rectanguli HGI ad [d] rectangulum OMN: & quia ratio rectanguli AGD, ad AMD rectangulum, compoſita eſt ex ratione AG ad [e] AM, id eſt ex duplicata ratione BG ad KM, & ex GD ad MD, id eſt ex duplicata ratione GE ad ML, ratio AGD rectanguli ad AMD rectangulum quoque duplicata eſt eius, quam habet BGE rectangulum ad rectan-

d *Ex 1. ſexti.* e *Ex elementis.* f *1. huius.*

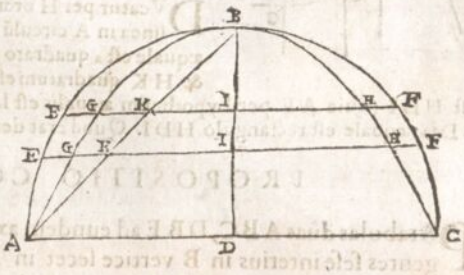
rectangulum KML. igitur vt HGI rectangulum, ad rectangulum OMN, sic BGE rectangulum ad rectangulum KML: & permutando vt HGI rectangulum ad rectangulum BGE, sic OMN rectangulum est ad rectangulum KML; sed HGI, BGE rectangula per hypothesim æqualia sunt; igitur & OMN, KML rectangula inter se æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXI.

SEcent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptâq; per A, B, C, parabolâ, cuius axis BD, ducantur rectæ quotcunque EF, parallelæ AC, occurrentes circulo in E & F, parabolę in G & H, axi verò in I.

Dico EGF rectangulum esse ad rectangulum EGF, vt BID rectangulum ad rectangulum BID.

Demonstratio.



POnatur AB, secãs EF lineas in K. vt BKA rectangulũ ad rectangulum BKA, sic EKF [a] rectangulum est ad rectangulum EKF. sed vt BKA rectangulum ad rectangulum BKA, sic GKH [b] rectangulũ est ad rectangulum GKH; igitur vt EKF rectangulum est ad rectangulum EKF, sic GKH rectangulum est ad rectangulum GKH. residuum igitur EGF rectangulum, est ad rectangulum EGF, vt EKF rectangulum ad rectangulum EKF, id est rectangulum BKA ad rectangulum BKA, id est rectangulum BID ad rectangulum BID. Quod erat demonstrandum.

a Ex 35. tertij.

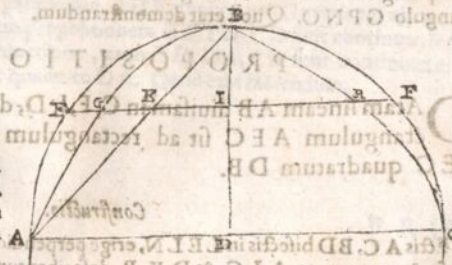
b 49. huius.

PROPOSITIO CCXII.

SEcent ABC semicirculum orthogonaliter diametri duæ AC, BD: descriptaq; per A & B parabolâ cuius axis BD, describatur & altera per B & C, habens axem DC & verticẽ C ducaturq; linea EF parallela AC occurrens circulo in E & F, parabolis in G, & H, axi BD in I, & AB iunctæ in K.

Dico EI quadratũ esse ad quadratũ GI, vt IH linea est ad lineam IK.

Demonstratio.



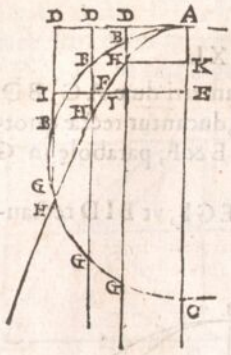
QVoniam tam AD, [c] GI, KI lineæ, quàm DC, EI, HI proportionales sunt, & AD, CD vtriusque seriei primæ æquales, ratio HI ad IK, tertiæ ad tertiam, duplicata est rationis FI ad IG, id est EI ad IG secundæ ad secundam. igitur vt HI linea ad lineam IK, sic EI quadratum ad quadratum GI. Quod erat demonstrandum.

c 42. huius.

PROPOSITIO CCXIII.

SEmicirculum ABC, cuius diameter AC, contingat in A linea AD; descriptâque per A parabolâ, cuius axis AC, & contingens AD, sumatur AE æqualis lateri recto; actaque per E ordinatim EF, ducatur in parabola diameter quæcunq; DG occurrens circulo in B & G, parabolæ in H, & FE ordinatim positæ in I.

Dico BDG rectangulum, æquari rectangulo HDI.



Demonstratio.

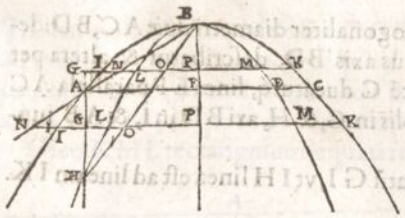
DVcatur per H ordinatim linea HK: Quoniam AD linea in A circulũ contingit, rectangulum BDG æquale est [a] quadrato AD, id est quadrato HK; sed & HK quadratum est æquale [b] rectangulo KAE, id est HDI (quia AE per hypothesim æqualis est lateri recto) rectangulum igitur BDG æquale est rectangulo HDI. Quod erat demonstrandum.

a *Ex elementis.*
b *Ex 8. huius.*

PROPOSITIO CCXIV.

PArabolas duas ABC, DBE ad eundem axem BF positas, & contingentes sese interius in B vertice secet in H & A diameter quæcunque GH, iunctisque AB, HB ducatur ordinatim linea IK, secans parabolas in, I K, L, & M, rectas AB, HB, AH in G, N, O, & axem BF in P.

Dico ILK rectangulum æquari rectangulo GPNO.



Demonstratio.

REctangulum GPN æquale est [c] quadrato IP. sed IP quadratum est æquale quadrato LP, id est [d] rectangulo GPO, [e] vnà cum rectangulo ILK rectangulum igitur GPN æquale est rectangulis GPO, ILK: est autem GPM rectangulum, æquale rectangulis GPO, [f] GPNO, dempto igitur communi rectangulo GPO, manet ILK rectangulum æquale rectangulo GPNO. Quod erat demonstrandum.

c 42. *huius.*
d *Ibid.*
e *Ex elementis.*
f *Ex elementis.*

PROPOSITIO CCXV.

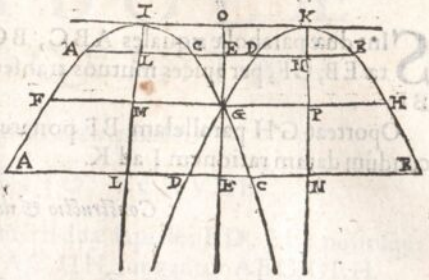
DAtam lineam AB diuisam in C, E, I, D, denuo ita partiri in E vt rectangulum AEC sit ad rectangulum BED sicut quadratum AEC quadratum DB.

Constructio.

REctis AC, BD bisectis in L E L N, erige perpendiculares LI, NK æquales inter se, & per puncta A, I, C, & D, K, B, describantur parabolæ NK, sibi mutuo occurrentes in G. Tum ex G duæ GE normales ad AB. Dico factum.

De-

Demonſtratio.



IVnge puncta I, K, & E G productâ in O, per G duc F M P H parallelam ad K B & I K. Quoniam tam I L, O E, K N, quàm I K, F H ſunt parallelę, erit quadratũ I O ad quadratum O K vt quadratum M G ad P G quadratum hoc eſt vt F G quadratum ad G H quadratum; deinde [a] A C quadratum eſt ad quadratum F G vt L I ad M I, hoc eſt vt N K ad P K; hoc eſt vt quadratum D B ad quadratum G H. ergo permutatim A C quadratum eſt ad quadratum D B, vt quadratum F G ad quadratum G H, hoc eſt (ſicut antè oſtendi) vt quadratum I O ad quadratum O K. Atqui [b] rectangulum A E C eſt ad rectangulũ B E D vt quadratum I O ad quadratum O K, Ergo etiam rectangulum A E C eſt ad rectangulum B E D vt quadratum A C ad quadratum D B. Factum igitur eſt quod petebatur.

[a] 1. huius.

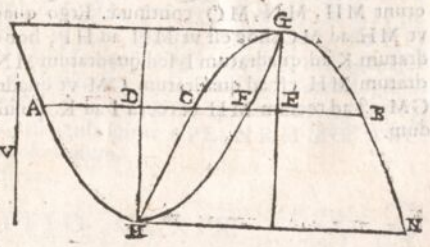
[b] 19. huius & illius Corollarium.

PROPOSITIO CCXVI.

DAtam rectam A B diuiſam in C, iterum ſecare in D, vt rectangulum B D C æquale ſit quadrato D A.

Conſtructio & demonſtratio.

BIſeca C B in E, & fiat vt A E ad C E, ita C E ad F E. deinde A F etiam biſeca in D. Dico factum quod petitur.



Ex punctis E ac D erige normales, quarum vna E G ſit magnitudinis placitę, altera D H infinita. Deinde per puncta C, G, B, deſcribatur parabola axem habens E G & v occurrens ipſi D H in H. Rurſum per puncta A H F deſcripta intelligatur parabola axem habens D H: poterunt autem E G, D H axes eſſe parabolarum; cùm ambæ ex conſtructione rectas C B; F A ad angulos rectos bifariam ſecent. Quoniam igitur ex conſtructione A E, C E, F E ſunt continuæ; colligitur ex 167. huius parabolam A H F tranſire per G verticem alterius parabolę. Ergo per eandem illam propoſitionem B D, F D, C D ſunt continuæ. ſed F D, A D æquales ſunt ex conſtructione, ergo B D, D A, C D ſunt continuæ, ergo rectangulum B D C æquatur quadrato D A. Quod erat faciendum.

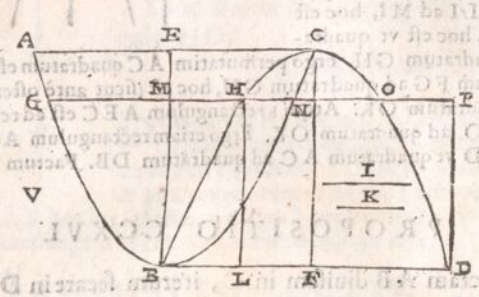
PRO-

PROPOSITIO CCXVII.

Sint duæ parabolæ æquales ABC, BCD ad axes parallelos constitutæ EB, CF, per apices mutuos transeuntes; ex B sit ordinatim ducta BF.

Oporteat GH parallelam BF ponere, quę diuidatur à recta BE, secundùm datam rationem I ad K.

Constructio & demonstratio.



Diuidatur BD linea secundùm rationem quadrati I, ad K quadratum, *in puncto* L: erigatur deinde LH, quæ æquidistet axi CF, occurratq; sectioni in H. & per H ponatur GH parallela BD, secans BE in puncto M. Dico rectam GH esse sectam in M, secundùm rationem I ad K; erigatur ex D parallela ad FE occurrens ipsi GO in P. Quoniam rectangulum HMO æquatur a quadrato MN, erunt MH, MN, MO continuæ. Ergo quadratum MH ad quadratum MN, vt MH ad MO, hoc est vt MH ad HP, hoc est vt BL ad LD, hoc est vt quadratum K ad quadratum I; sed quadratum MN æquatur quadrato GM; ergo quadratum MH est ad quadratum GM vt quadratum K ad I. & inuertendo ergo GM est ad rectam MH vt recta I ad K. posuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 167. huius.

PA-

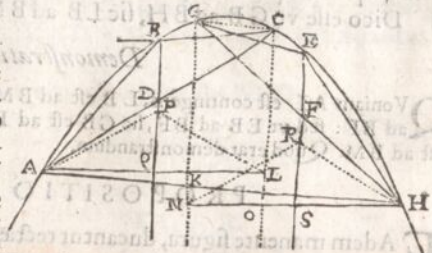
PARABOLÆ
PARS QVINTA

Sæpius parabolam quadrat.

PROPOSITIO CCXVIII.

SEcent ABC parabolam diametri duæ æquales BD, EF: positisque per D & F, ordinatim lineis AC, GH, iungantur ABC, GEH.
Dico ABC, GEH triangula esse inter se æqualia.

Demonstratio.



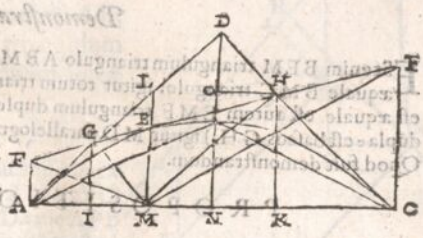
IVnctis, G, C; ponatur AH linea, quam in K & I secent demissæ ex G & C diametri: illas autem secent orthogonaliter in L, M, N, O rectæ AML, HON: & AL quidem occurrat BD lineę in Q, HN verò ipsi EF in S; factisque PQ, SR æqualibus, ipsis BD, EF, iungantur APL, HRN. quoniam igitur æquales sunt diametri BD, EF; & ADC, GFH ad illas ordinatim positæ, iunctę[a] CG, AH siue IK æquidistant: sed & GK, CI diametri parallelę sunt, parallelogrammum igitur est GCIK, & GK, CI lineæ æquales. est autem vt GK ad IC sic AKH rectangulum ad[b] rectangulum AIH, rectangula igitur AKH, AIH æqualia sunt; ideoque & [c] æquales lineę AK, HI. quia verò est vt AK ad KI, sic AM ad ML, & vt HI ad IK, sic HO ad ON, igitur vt AM ad ML, sic HO ad ON: æquales autem sunt lineæ NO, ML (quia AML, HON orthogonales sunt ex constructione, ad GM, GL, æquidistantes, adeoque MO parallelogrammum est) rectæ igitur AM, HO, adeoque totæ AL, HN æquales sunt: sed & PQ, RS per constructionem æquales sunt, triangula igitur APL, NRH id est ABC, GEH æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ex Coroll. 27. huius.*
[b] *47. huius.*
[c] *Ex elementis.*

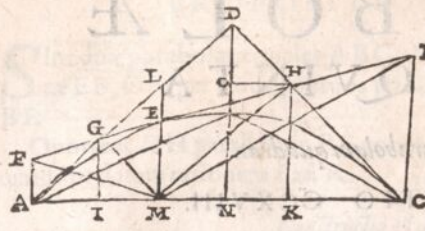
Est hęc Archimedis, aliter demonstrata.

PROPOSITIO CCXIX.

PArabolam ABC, contingant duæ quæuis AD, CD conuenientes in D. secetq; illas in G & H recta quædam EF, contingens quoque parabolam in B occurrens AE, CF diametris in E & F; demittantur autem ex G & H diametri GI, HK, occurrentes AC in I & K.
Dico rectam IK, dimidium esse AC.



Demonſtratio.



a 18. huius: QVoniam AG, BG ſectionem cõtingunt, recta EG [a] æqualis eſt GB : ſimiliter & BH æqualis HF. GH igitur dimidium eſt totius EF. ſed cùm AE, CF, GI, HK æquidiſtent, erit AC in I & K, diuiſa, vt EF diuiſa eſt in G & H ; igitur & IK dimidium eſt AC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXX.

ISdem poſitis, ponatur per B diameter LM.
Dico eſſe vt GB ad BH, ſic LB ad BM.

Demonſtratio.

b 34. huius. QVoniam AL eſt contingens, LB eſt ad BM, vt [b] AM ad MC, hoc eſt EB ad BF: ſed vt EB ad BF, ſic GB eſt ad BH, igitur vt GB ad BH, ſic LB eſt ad BM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXI.

EAdem manente figura, ducantur rectæ MG, MH.
Dico MD eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

c Ex elementis. d Ex elementis. ESt enim vt HB ad BG, ſic MB ad BL; per præcedentem & permutando vt HB ad MB, ſic GB ad BL: ſunt autem anguli ad B lateribus proportionalibus contenti æquales, triangula igitur MBH, GBL [c] ſimilia ſunt: & MH [d] parallela GL: eodem modo & KH producatur donec cum AD conueniat, oſtenditur GM, æquidiſtare ipſi DH: parallelogrammum igitur eſt DM. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXII.

EAdem manente figura, ducantur AB, BC.
Dico triangulum ABC æquale eſſe parallelogrammo MD.

Demonſtratio.

e Ex 219. huius. ESt enim BEM triangulum triangulo ABM æquale, ſimiliter triangulum BFM æquale BMC triangulo; igitur totum triangulum EMF toti triangulo ABC eſt æquale. eſt autem EMF triangulum duplum trianguli GMH, (quia baſis EF dupla [e] eſt baſeos GH.) igitur MD parallelogrammo æquale eſt triangulum ABC. Quod fuit demonſtrandum.

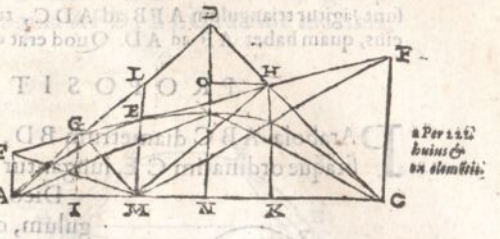
PROPOSITIO CCXXIII.

EAdem manente figura, demittatur ex D diameter DN.
Dico lineas GI, HK ſimul ſumptas, æquari rectæ DN:

Demon-

Demonſtratio.

DVcatur HO parallela AC, occurrens ND lineæ in O. Quoniam IM, GI, æquidiſtant lineis DO, HO: eſt autem & GM[a] æqualis & parallela DH; triangula IGM, DOH, adeoque & latera DO, GI æqualia ſunt: eſt autem HK æqualis ON. Igitur GI, HK ſimul ſumptæ, ſunt æquales lineæ DN.



[a] *Per 11 huius & ex elemtis.*

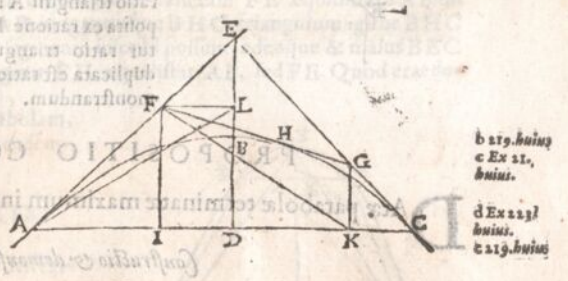
PROPOSITIO CCXXIV.

SIt ad ABC parabolæ axem BD ordinatim ducta AC, actæque per A & C, contingentes conueniant in E. ponatur autem & FG contingens in B, quæ AC, CE lineas ſecet in F & G, tum rectæ demittantur FI, GK, axi æquidiſtantes.

Dico trapezium FIKG, æquale eſſe triangulo AED.

Demonſtratio.

POnatur FL parallela AC, iunganturque LA, FK. Quoniam FL æquidiſtat AC, & IK eſt[b] æqualis AD, dimidio[c] ſcilicet AC, triangula ALD, IFK æqualia ſunt. Rurſum cùm in triangulis FKG, AEL, tam baſes[d] KG, EL, quàm altitudines[e] IK, AD æquales ſint, triangula quoque FKG, AEL ſunt inter ſe æqualia: trapezium igitur FIKG æquale eſt triangulo AED. Quod erat demonſtrandum.



[b] *Ex 29. huius*
[c] *Ex 21. huius.*
[d] *Ex 33. huius.*
[e] *29. huius*

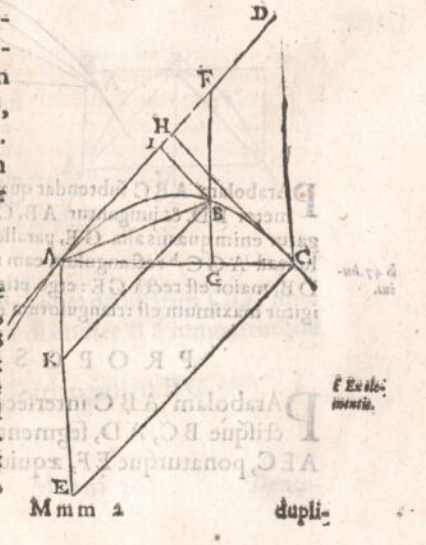
PROPOSITIO CCXXV.

PArabolam ABC ſubtendat AC quęcunque, ponatur autem per A contingens AD, cõueniens cum CD diametro in D: ponatur quoque diameter quęuis BG, occurrẽs AD lineæ in F. iunganturq; AB.

Dico triangulum AFB ad triangulum ADC triplicatam habere rationem lineæ AF ad AD.

Demonſtratio.

DEmiſſa ex A diametro AE, ducantur lineæ BK, CE parallelæ contingenti AD; & ex C, & B rectę CH, BI normales ipſi AD. ratio AFB trianguli ad triangulum ADC compoſita eſt ex ratione AF ad AD, & ex[f] ratione IB ad HC: ſed vt IB ad HC, ſic FB ad CD, id eſt AK ad AE; igitur ratio trianguli AFB ad ADC triangulum compoſita eſt ex ratione AF ad AD, & ex ratione AK ad AE: eſt autẽ ratio AK ad AE,



[f] *Ex elementis.*

duplicata rationis KB ad EC, id est AF ad AD, (quia FK, DE parallelogramma sunt) igitur triangulum AFB ad ADC, triangulum; triplicatam habet rationem eius, quam habet AF ad AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXVI.

PArabolæ ABC diametrum BD, secet in D recta quæuis AC, positaque ordinatim CE, iungantur AB, BC.

Dico triangulum ABD ad BCE, triangulum, duplicatam habere rationem lineæ AD ad DC.



a *Coroll. 59. huius.*

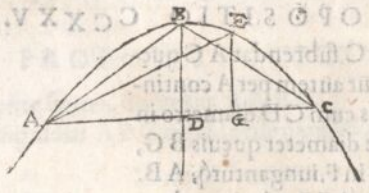
Demonstratio.

POnantur ex A & C lineæ AG, CH normales ad diametrum BE. iunganturque AE. vt AD ad DC, sic[a] BD est ad BE: sed vt AD est ad DC, sic GD est ad DH, hoc est AG ad CH; igitur vt BD ad BE, sic AG est ad CH. est autem ratio trianguli ABD ad BCE triangulum, composita ex ratione BD ad BE, & AG ad CH; igitur ratio trianguli ABD ad BCE triangulum duplicata est rationis AD ad DC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXVII.

DAtæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

Constructio & demonstratio.



PArabolam ABC subtendat quæuis AC, quâ diuisâ bifariam in D, ponatur diameter BD. & iungantur AB, CB. Dico triangulum ABC esse quæsitum. erigatur enim quæuis alia GE, parallela BD diametro: Quoniam ADC rectangulum ad AGC[b] rectangulum eam rationem obtinet, quam DB à GE, igitur recta DB, maior est rectâ GE: ergo etiam triangulum ABC, maius triangulo AEC: igitur maximum est triangulorum ABC. Quod demonstrare oportuit.

b *47. huius.*

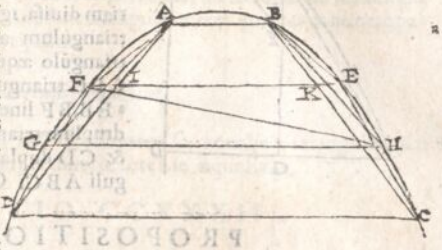
PROPOSITIO CCXXVIII.

PArabolam ABC intersecent duæ quæuis parallelæ AB, DC: iunctisque BC, AD, segmento CB triangulum inscribatur maximum AEC, ponaturque EF, æquidistans AB, & iungantur AFD;

Dico

Dico AFD triangulum, illorum esse maximum quæ AFD segmento inscribi possunt. & contra si triangula AFD, BEC fuerint maxima, dico FE æquidistare AB.

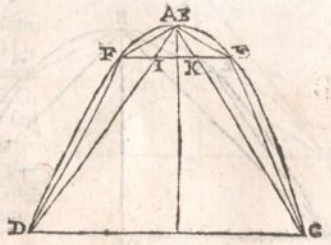
Demonstratio.



Quoniam AB, CD, FE æquidistant, recta FI æquatur KE, adeoque triangula FAI, FID æqualia sunt triangulis, KBE, KEC: si igitur AFD triangulum non sit maximum, sit aliud AGD, maius triangulo AFD: positaque GH parallela AB, iungantur BHC: ostendetur vt priùs, triangulum BHC, æquari triangulo AGD: sed AGD maius est triangulo AFD, id est vt ostendi, BEC, triangulum igitur BHC maius quoque est triangulo BEC: quod est contra hypothesim. non igitur AGD triangulum maximum est, sed AFD. Quod erat primum. 29. huius.

Sint iam AFD, BEC triangula maxima, dico iunctam FE æquidistare AB: sin verò; ponatur FH æquidistans AB, iunganturque BHC: triangulum igitur BHC maximum est eorum quæ BEC segmento inscribi possunt, adeoque & maius BEC triangulo, quod absurdum: non igitur FH æquidistat AB, sed FE. Quod erat demonstrandum.

Quod si AB contingat parabolam, eadem inferri possunt quæ priùs, eademque prorsus est demonstratio.

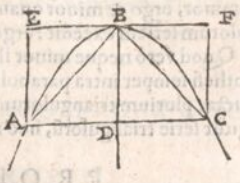


PROPOSITIO CCXXIX.

Esto ABC parabolæ inscriptum triangulum maximum ABC.

Dico illud maius esse dimidio parabolæ ABC.

Demonstratio.



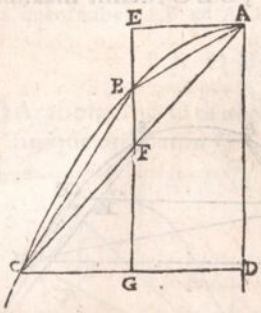
Perficiatur rectangulum ACF; manifestum igitur est EC parallelogrammum maius esse parabolâ ABC: igitur & ABC triangulum, dimidium scilicet parallelogrammi EC maius est dimidio parabolæ ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXX.

Sit ad ABC parabolæ diametrum AD, posita ordinatim CD; iunctâq; AC diuisâ in F bifariam, ponatur diameter BF iunganturque AB, CB.

Dico CAD triangulum quadruplum esse trianguli ABC.

Demonſtratio.



AGatur per A contingens AE, occurrens BF lineæ in E, quæ producta ſecet DC in G. quoniam igitur æquidiſtant AE, CD, vt CF ad FA, ſic GF eſt ad FE. ponitur autem AC in Fbifariam diuiſa, igitur & EF æqualis eſt FG & EAF triangulum æquale triangulo CFG: ſed EAF triangulo æquale eſt triangulum CBA: igitur & CFG triangulum æquale eſt triangulo ABC, quia [a] EB, BF lineæ æquales ſunt: eſt autem CAD quadruplum trianguli CFG quia AD dupla eſt FG & CD dupla CG, igitur & quadruplum erit trianguli ABC. Quod erat demonſtrandum.

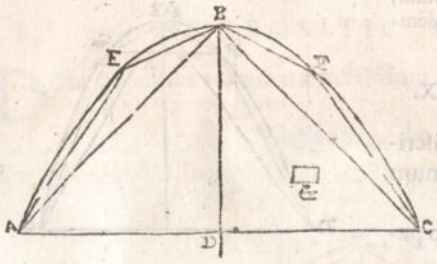
a Ex 17. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

ESto ABC parabolæ inſcriptum triangulum maximum ABC: inſcribantur autem & reſiduis ſegmentis triangula maxima: & hoc ſemper fiat.

Dico toti triangulorum ſerici æqualem eſſe parabolam ABC.

Demonſtratio.



SI enim non ſit æqualis, maior igitur eſt vel minor. ſit primùm parabola maior totâ triangulorum ſerie, & exceſſus ponatur quantitas G. quoniam igitur triangulum ABC maximum eſt illorum, quæ parabolæ inſcribi poſſunt, maius [b] quoque illud erit dimidio parabolę cui inſcriptum eſt. ſimiliter triangula duo AEB, BFC maiora ſunt dimidijs ſegmentorum quibus inſcribuntur. quod cùm ſine termino continuari poſſit, relinquetur ex [c] parabola quantitas, datâ minor, ergo & minor quantitate G, ergo illa exceſſus non eſt, quo parabola triangulorum ſeriem excedit: ergo parabola maior non eſt totâ triangulorum ſerie.

b 229. huius.

c 1. decimi.

Quod verò neque minor illâ ſit, manifeſtum eſt; cùm triangulorum ſeries, ex hypotheſi ſemper intra parabolam continuetur, ac proinde ſeries illa quantumcunque aucta, plurium triangulorum additione, ſemper tamen pars maneat parabolæ: cùm igitur ſerie triangulorũ, nec maior, nec minor ſit parabola, æqualis vt ſit neceſſe eſt.

PROPOSITIO CCXXXII.

EAdem poſitâ figurâ:

Dico ABC parabolam ad triangulum maximum ABC eam habere proportionem quam quatuor ad tria.

Demonſtratio.

TRiangulum [d] maximum ABC, quadruplum eſt triangulorum maximorũ AEB, BFC quæ reſiduis inſcribuntur ſegmentis; & illa rurſum ſimul ſumpta, quadrupla triangulorum reſiduis ſegmentis inſcriptorum. atque ita ſine termino procedendo, cùm ablata ſemper quadrupla ſint triangulorum, quæ reſiduis inſcribuntur ſegmentis,

d Ex 230. huius.

gmentis, tota triangulorum series, id est [a] parabola ABC, [b] est ad triangulũ ABC, primum seriei terminum, vt quatuor ad tria. Quod fuit demonstrandum.

[a] 231. huius.
[b] 87. De progressionibus.

Corollarium primum.

HInc manifestum est triangulum maximum ABC, triplum esse residuorum segmentorum AEB, BFC. cùm enim tota parabola, ad triangulum maximum inscriptum, sit vt quatuor ad tria; patet ipsum triangulum, tres quartas continere parabolæ; adeoque & residuorum esse triplum.

Corollarium secundum.

SEquitur secundò segmenta AEB, BFC esse inter se æqualia: triangula enim ABD, BDC singula singulorum tripla sunt, & inter se æqualia.

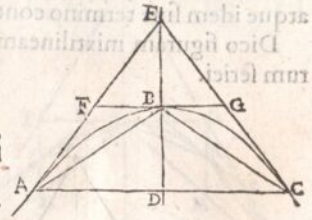
PROPOSITIO CCXXXIII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, actisque per A & C contingentibus, quæ cum diametro BD conueniant in E, ponatur per B contingens, quæ AE, CE lineis occurrat in F & G.

Dico FEG triangulum, maius esse dimidio figuræ concauę AECBA.

Demonstratio.

IVngantur ABC. quoniam AE parabolam contingit, & AC ordinatim ponitur ad BD, [c] ED, AE, CE, in B, F, G punctis bisectæ sunt: quare EBF, ABF triangula, item EBF, EBG, ac proinde tota EFG, ABE æqualia sunt. sed AEB triangulum maius est dimidio figurę mixtilineæ ABCEA, cùm AB latus cadat intra parabolam conuexam, triangulum igitur FEG illo maius quoque est. Quod erat demonstrandum.



[c] Ex 17. huius.

Corollarium primum.

EX antè demonstratis facile deducitur triangulum FEG, maximum esse illorum, quæ intra triangulum AEC ab alia quauis contingente auferri possunt.

Corollarium secundum.

SEquitur quoque, ABC triangulum, duplum esse trianguli FEG; est enim ED [d] dupla EB. & AC dupla FG.

[d] Ibid.

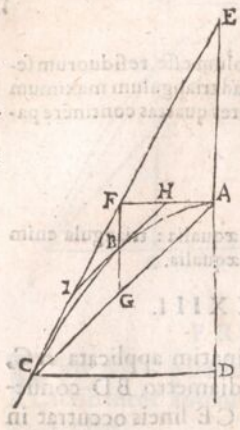
PROPOSITIO CCXXXIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD contingat in C recta CE conueniens cum diametro in E, actaque per A contingente, quæ CE lineæ occurrat in F, demittatur ex F diameter FB, & per B ponatur contingens, quæ AF, EC lineis occurrat in H & I.

Dico triangulum AEF, quadruplum esse trianguli HFI.

Demon-

Demonſtratio.



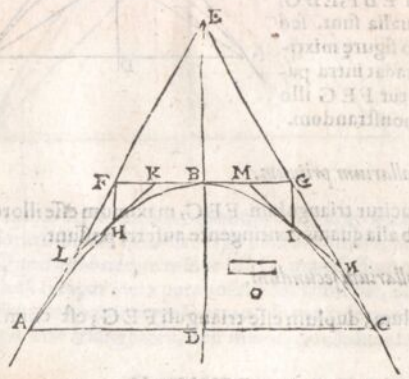
a 17. huius.
b 19. huius.
c 15. huius.
d Ex elementis.

POnatur recta AC, occurrens FB productæ in G. quoniam EC contingens eſt, & CD ordinatim applicata ad diametrum AD, [a] rectæ EA, AD, adeoque & EF, FC æquales ſunt: eſt autem vt EF ad FC, ſic AG ad GC, (cùm FG, ED diametri [b] æquidiſtent;) linea igitur AC in G biſlecta eſt, adeoque IH [c] contingenti parallela. vnde FG, FA lineæ in B & H, bifariam quoque ſunt diuiſæ, & AFC triangulum [d] quadruplum trianguli FHI: eſt autem FAE, æquale triangulo FAC, quia FE, CE lineæ æquales ſunt, igitur & FAE, quadruplum eſt trianguli FHI. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXXV.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD, ordinatim applicata AC, poſitiſq; per A & C, contingentibus quæ diametro BD occurrant in E, ducatur per B, contingens, quæ AE, CE lineas ſecet in F & G, diametri deinde ponantur FH, GI; & per H & I, contingentes LK, MN: atque idem ſine termino continuetur.

Dico figuram mixtilineam AEC, BA, æqualem eſſe toti triangulorum ſeriei.



e 233. huius.
Ex. decimi.

Demonſtratio.

SI enim non ſit æqualis: maior igitur vel minor vt ſit neceſſe eſt. ſit primum figura mixtilinea maior triangulorum ſerie, exceſſu quantitatis O. triangulum FEG maius [e] eſt dimidio figuræ concauæ AECBA; ſimiliter triangula LFK, MGN maiora ſunt dimidijs mixtilineorum quibus inſcribuntur, & id ſemper fiet igitur per ablationem illam continuatam, relinquetur ex mixtilineo [f] AECBA quantitas datâ minor, ergo & minor quantitate O, ergo O exceſſus non eſt, quo mixtilineum AECBA excedit triangulorum ſeriem: igitur nec illud ſerie totâ maius eſt. ſimiliter oſtendetur AECBA figuram minorem quoque non eſſe totâ triangulorum ſerie. æqualis igitur vt ſit neceſſe eſt.

PROPOSITIO CCXXXVI.

EAdem manente figura:

Dico parabolam concauam AECB ad triangulum FEG, eam proportionem habere quam quatuor ad tria.

Demon-

Demonſtratio.

QVoniam EFG triangulum quadruplum [a] eſt triangulorum LFK, MGN, & illa rurſum ſimul ſumpta, quadrupla illorum quæ reſiduis figuris mixtilineis inſcribuntur, & ita ſine termino procedendo, ablata ſemper quadrupla ſunt triangulorum reſiduis figuris inſcriptorũ, erit per 87 libri noſtri de progreſſionibus tota triangulorum ſeries id eſt concauum AECBA, ad FEG triangulum, vt quatuor ad tria. Quod erat demonſtrandum. [a] 234. huius.

Corollarium.

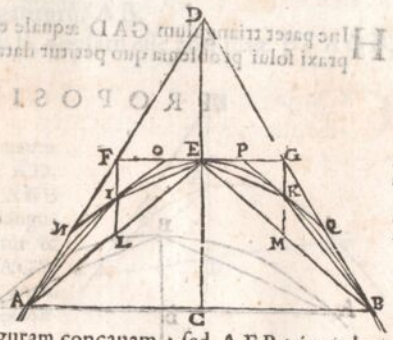
HInc patet FEG triangulum triplum eſſe reſiduorum AHBFA, CIBGC. eſt enim EEG triangulum ad figuram concauam ABCEA, vt tria ad quatuor: quare triangulum EFG tres quartas continet figuræ ABCEA, adeoque reſiduorum triplum eſt.

PROPOSITIO CCXXXVII.

IIſdem poſitis:

Dico AEB parabolam conuexam duplam eſſe figuræ concauæ AEBDA.

Demonſtratio.



INſcribantur tam concauę quàm conuexæ parabolæ, triangula maxima AEB, FDG. quoniam igitur AEB parabola eſt ad triangulum AEB vt [b] quatuor ad tria: eandem autem habeat proportionem figura concaua [c] AEBD, ad triangulum FDG, erit vt triangulum AEB ad parabolam conuexam, ſic FDG triangulum ad figuram mixtilineam AEBD: & permutando vt AEB triangulum ad triangulum FDG, ſic parabola AEB ad figuram concauam: ſed AEB triangulum [d] duplum eſt trianguli FDG; igitur & parabola AEB dupla eſt figuræ AEBD. Quod erat demonſtrandum. [b] 232. huius. [c] 236. huius. [d] Coroll. 233. huius.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

IDem aliter demonſtrare.

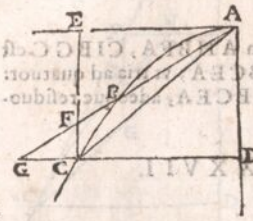
Demonſtratio.

INſcribantur ſegmentis reſiduis tam parabolæ conuexæ, quàm concauæ, triangula maxima AIE, EKB, NFO, PGQ. Quoniam triangulum AEB, [e] ablatum ex parabola duplum eſt trianguli FDG, ablati ex figura ADBEA; & iterum triangula AIE, EKB ablata ex reſiduo parabolę dupla triangulorum NFO, PGQ, ablatorum ex reſiduo figuræ ADBEA, inſuper oſtenſum ſit ablationem illam in proportione dupla, ſiue termino in vtraque figura poſſe [f] continuari, ſiue totam triangulorum maximorum ſeriem parabolę AEB inſcriptorum, illi æquari; & figuram mixtilineam AEBDA æquari toti [g] triangulorum maximorum ſeriei figuræ illi inſcriptorum, parabola AEB, [h] dupla eſt figuræ mixtilineæ ADBEA. Quod erat demonſtrandum. [e] Ibid. [f] 231. huius. [g] 235. huius. [h] 85. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CCXXXIX.

DAto segmento parabolico triangulum æquale exhibere.

Constructio & demonstratio.



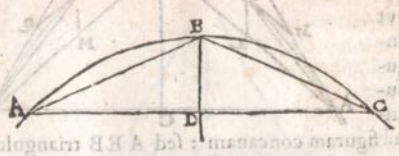
SIt ABC segmentum datum: ductâque diametro AD ponatur ordinatim CD, agaturque per A ipsi CD, æquidistans AE, occurrens erectæ ex C diametro in E: tum EC diuisa in F vt FC quarta pars sit EC, ducatur ex A per F, linea AG, occurrens CD in G. dico GAC triangulum æquale esse dato segmento ABC. Quoniam AE, CG lineæ æquidistant, vt CF ad FE, sic GC est ad EA: sed CF tertia pars est FE; igitur & GC, tertia pars est EA hoc est CD. Quare & GAC triangulum tertia pars est trianguli CAD: est autem ABC segmentum æquale tertiæ parti trianguli CAD. igitur & GAC triangulo est æquale: dato igitur segmento parabolico æquale triangulum exhibuimus; quod erat imperatum.

a *Ex Coroll. 232. huius.*

Corollarium.

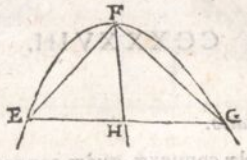
HInc patet triangulum GAD æquale esse parabolæ ABCD. adeoque eadem praxi solui problema quo petitur datæ parabolæ, triangulum æquale exhiberi.

PROPOSITIO CCXL.



PArabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem quam triangula maxima illis inscripta.

Demonstratio.



SInt ABC, EFG parabolis terminatis triangula maxima inscripta ABC, EFG. dico parabolas illam inter se habere rationem quã triangula maxima. Triangulum bABC est ad ABC, parabolam vt tria ad quatuor. : triangulũ quoque EFG est ad parabolam EFG, vt tria ad quatuor; igitur vt ABC triangulum ad parabolam ABC, sic EFG triangulum ad parabolam EFG, & permutando vt ABC triangulum ad triangulum EFG, sic ABC parabola ad parabolam EFG. Quod erat demonstrandum.

b 232. *huius.*

Corollarium.

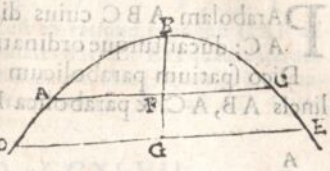
HInc si duæ parabolæ habeant eandem vel æqualem subtensam, erunt illæ inter se vt altitudines; & si altitudines fuerint æquales, erunt inter se vt bases.

PRO-

PROPOSITIO CCXLI.

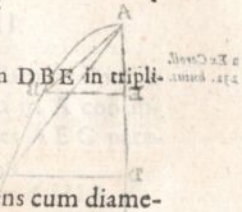
PArabolam ABC secent duæ quæuis parallelæ AC, DE.
Dico ABC parabolam ad DBE parabolam esse in triplicata ratione AC ad DE.

Demonstratio.



POnatur diameter BF ad quam ordinatim positæ sint AC, DE. Parabola ABC ad DBE parabolam eam habet rationem, quam [a] triangulum sub AC & BF ad triangulum sub DE, & BG: sed ratio trianguli sub AC & BF, ad triangulũ sub DE & BG, est triplicata rationis AC ad DE, quia composita ex ratione AC ad DF, & BF ad BG, hoc est ex duplicata ratione AC ad DE; igitur ABC parabola est ad parabolam DBE in triplicata ratione AC ad DE. Quod fuit demonstrandum.

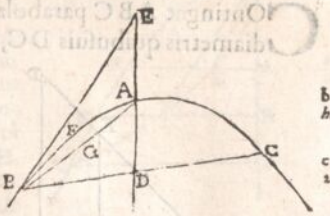
[a] 240. huius.



PROPOSITIO CCXLII.

PArabolam ABC contingat in B linea EB, conueniens cum diametro quacunque AE in E, iunganturq; AB.
Dico figuram concauam BFAEB, duplam esse conuexæ BFAGB.

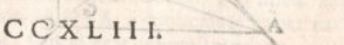
Demonstratio.



POnatur ex B, ordinatim AC ad diametrum AD. Quoniam BE est cõtingens, erũt AD, AE lineæ [b] æquales, adeoque ABD, ABE triangula æqualia: est autem ABD triangulum triplum [c] segmenti BFAGB, igitur & triangulũ ABE triplum est segmenti BFAGB. residua igitur figura concaua BFAEB dupla est conuexæ BFAGB. Quod erat demonstrandum.

[b] Ex 17. huius.

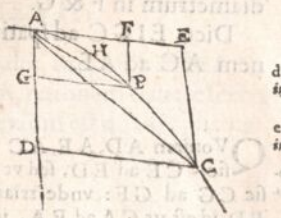
[c] Coroll. 232. huius.



PROPOSITIO CCXLIII.

SInt ad ABC parabolæ diametrum AD, ordinatim positæ DC, GB: iunctisq; AB, AC ponatur per A æquidistans ipsi DC, occurrens erectis ex B & C, diametris in F & E.
Dico esse vt ABF triangulum ad triangulum ACE siue ABG ad ACD triangulum, sic AHBFA figurã concauã ad figuram AHCEA.

Demonstratio.



VT ABG triangulum ad triangulum ACD, sic AHB segmentum [d] ad segmentum ABC, sed vt AHB ad ABC segmentum, sic AHBF figura ad figuram ABCE, cùm [e] AHBF duplum sit segmenti AHB, & ABCE duplum ABC; igitur vt triangulum ABG ad ACD triangulum, sic AHBF figura ad figuram ABCE. Quod erat demonstrandum.

[d] 240. huius.

[e] 242. huius.

Corollarium.

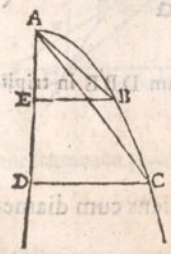
EAdem posità figurâ sequitur esse vt GF parallelogrammum ad parallelogrammum DE, sic AGB parabolam ad parabolam ADC: item conuexum AHBF ad conuexum ABCE.

PROPOSITIO CCXLIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD secent vtcunque lineæ AB, AC: ducanturque ordinatim BE, CD.

Dico spatium parabolicum EBCD, quadruplum esse spatij CABC lineis AB, AC & parabolica BC contenti.

Demonstratio.

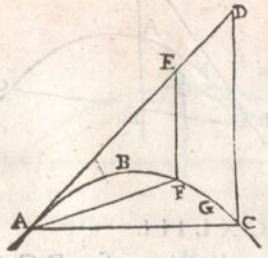


a Ex Coroll. 232. huius.

QVoniam parabola DABC quadrupla est a segmenti ABC & EAB parabola quadrupla segmẽti AB, parabola DABC est ad segmentum ABC vt EAB parabola ad segmentum AB; igitur cum parabola DABC ad ABC, totum ad totum sit vt EAB ablatum ad ablatum AB, erit reliquum EBCD, ad reliquum ACBA, vt DABC totum ad totum ABC: quare EBCD figura, quadrupla est figuræ lineis AC, AB & parabolica BC contentæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLV.

COntingat ABC parabolam linea quæcunque AD conueniens cum diametris quibusuis DC, FE in D & E. iunganturque AF, AC.



Dico concauum EDCGF duplum esse partis AFGC, lineis AF, AC contentæ.

Demonstratio.

b 242. huius.

COncauum ABCDA b duplum est parabolæ ABC: & concauum ABFEA duplum est segmenti ABF; igitur residuum EDCGF duplum est residui AFGCA. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLVI.

PArabolam ABC subtendat linea AC, qua diuisa in D & E, vt AD, AE, AC continuè proportionales sint, erigantur diametri DB, EI, CF. & per B & I, puncta ex A rectæ ponantur AG, AF secantes CF diametrum in F & G.

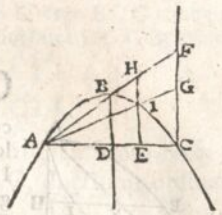
Dico EIGC ad spatium quadrilaterum BI triplicatam habere rationem AC ad AE.

Demonstratio.

c 1. De progressionibus.

QVoniam AD, AE, AC ponuntur continuè proportionales, vt CA ad EA, sic c CE ad ED, sed vt CE ad ED, sic CG est ad GF; igitur vt CA ad EA, sic CG ad GF: vnde triangulum CAG ad GAF triangulum, est vt CE ad ED, id est vt CA ad EA, id est FA ad HA, id est FG ad HI; est autem GAF triangulum

triangulum ad triangulũ HAI in duplicata ratione FG ad HI, igitur cùm ratio trianguli CAG ad HAI componatur ex ratione triangulũ CAG ad GAF, & ex GAF ad HAI, patet CAG triangulum esse ad triangulum HAI in triplicata ratione FG ad HI: quia verò ratio quadrilateri EG ad BI quadrilaterum, componitur ex ratione EG ad GH quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli CAG ad triangulum GAF,) & ex ratione GH ad IB, quadrilaterum, (id est ex ratione trianguli GAF ad HAI triangulum, cùm FA, HA, BA proportionales sint) erit EG quadrilaterum ad quadrilaterum BI vt CAG triangulum ad triangulum HAI; igitur & EG quadrilaterum ad BI quadrilaterum rationem habet triplicatam AC ad AE. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO CCXLVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD. positaque ad illam ordinatim CD, describatur per A & C, parabola AEC, quam in A contingat AD, ponanturque ordinatim quæuis FB, HG secantes AEC parabolam in E & I.

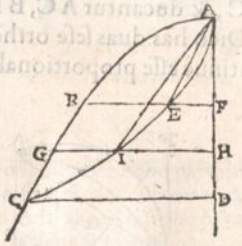
Dico figuram concauam AFEA, ad figuram concauam AHIA, duplicatam habere rationem parabolæ BAF ad parabolam GAH.

Demonstratio.

IVngantur AE, AI. Figura mixtilinea AFEA ad figuram AHIA eam habet rationem quam AEF triangulum [a] ad triangulum AIH. ratio autem trianguli AEF ad triangulum AIH composita est ex ratione AF ad AH, hoc est duplicata rationis FB ad HG, & ex ratione FE ad IH, hoc est duplicata rationis AF ad AH, id est quadruplicata rationis FB ad HG; igitur AFEA figura ad figuram AHIA sextuplicatam habet rationem lineæ FB ad HG. sed BAF [b] parabola ad GAH parabolam triplicatam habet rationem FB lineæ ad lineam HG: igitur figura AFEA ad figuram AHIA, duplicatam habet rationem parabolæ BAF ad parabolam GAH. Quod erat demonstrandum.

[a] 243. huius.

[b] 240. huius.



Corollarium.

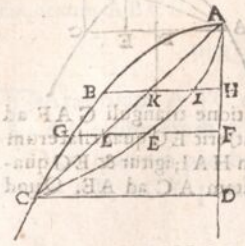
HInc patet concauum AFE ad concauum AHI, triplicatam habere rationem AF ad AH; nam AEF triangulum ad triangulum AIH rationem habet compositam ex AF ad AH, & EF ad IH, id est ex duplicata rationis AF ad AH.

PROPOSITIO CCXLVIII.

IIsdem positis sint AH, AF, AD proportionales, iunganturque AC.

Dico mistilineum IF ad ED mistilineum, rationem habere sextuplicatam, cuius ratio trapezij KF ad LD, trapezium est quadruplicata.

Demonſtratio.



a Ex 143. huius.

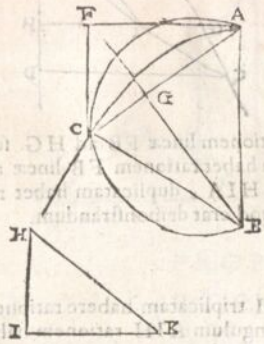
QVoniam AH, AF, AD lineæ proportionales ſunt, rectæ quoque IH, EF, CD, adeoque figuræ [a] concauæ AHIA, AFEA, ADCA in continua ſunt analogia. igitur vt AHIA figura ad figuram AFEA, ſic IF miſtilineum eſt ad miſtilineum ED; ſed AHIA figura ad figuram AFEA, ſextuplicatam habet rationem BH ad GF, igitur & IF miſtilineum ad miſtilineum ED ſextuplicatam habet rationem BH ad GF. Rurſum, quia AH, AF, AD proportionales ſunt, triangula quoque AKH, ALF, ACD in continua ſunt analogia. adeoque vt AKH triangulum eſt ad triangulum ALF, ſic KF trapezium eſt ad trapezium LD: ſed AKH triangulum ad triangulum ALF, duplicatam habet rationem lineæ AH ad AF, hoc eſt quadruplicatam rationis HB ad FG: igitur & KF trapezium ad trapezium LD quadruplicatam habet rationem lineæ HB ad FG, cuius IF miſtilineum ad miſtilineum ED habet ſextuplicatam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLIX.

IN parabola ACB ſit AB pars axeos æqualis lateri recto, ductaq; AF ad axem normali, ponatur quæuis FC parallela AB, ſecans parabolam in C, & ducantur AC, BF.

Dico has duas ſeſe orthogonaliter interſecare & CG, FG, GA, GB continuè eſſe proportionales.

Demonſtratio.



b Ex 8. huius.

c 6. ſexti.

d Ex 13. ſexti.

CVm BA æqualis ſit lateri recto, erit [b] rectangulum BAFC æquale quadrato FA. Igitur ſunt tres in continua analogia FC, FA, AB: ergo cùm anguli CFA, BAF æquales ſint, ſimilia ſunt triangula [c] CFA, FAB. vnde angulus FAC æqualis angulo ABF. eſt autẽ angulus FAC vnà cum CAB, recto æqualis; igitur etiam angulus FBA vnà cum angulo CAB recto eſt æqualis, & conſequenter angulus AGB rectus eſt. vlterius cùm tam angulus AFC quàm AGF rectus eſt, tres CG, GF, GA [d] proportionales ſunt: quia verò anguli AGB, FAB recti ſunt, lineæ quoque FG, GA, GB proportionales ſunt; eandem igitur continuant rationem CG, FG, GA, GB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCL.

INter duas datas, duas medias exhibere organicè.

Conſtructio & demonſtratio.

SInt duæ datæ HI, IK inter quas duas medias oporteat exhibere, conſtituantur hæ ad angulos rectos & conficiant triangulum orthogonum HIK. deinde deſcribatur parabola ACB cuius latus rectum ſit AB pars axeos, ſuper quo ſegmentum circuli conſtituatur capiens angulum ACB æqualem IHK, occurrens parabolę in C & ducantur CF, FA ad angulos rectos, ita vt CF ſit æquidiſtans axi & iungantur AC, BF. Dico factum quod requiritur. nam oſtenſum eſt angulos ad G rectos

eſſe

esse, estque angulus BCA seu BCH æqualis angulo K. ergo BCG triangulum simile triangulo HIK; igitur cùm FG, GA mediæ [a] sint inter CG, GB, etiam inter HI, IK inuentæ erunt mediæ. [a] Ex 9. huius.

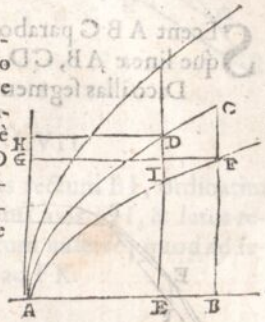
PROPOSITIO CCLI.

HAbeant duæ parabolæ ABC, AFB communem axem; sitq; AB linea lateri recto æqualis parabolæ ABC, ductisque ordinatim BFC, ED, sit ADE parabola æqualis AFB.

Dico AE, ED, medias esse inter FB, BA.

Demonstratio.

QVoniam AB ex hypothesi est latus rectum parabolæ ACB, rectangulum BAE æquatur [a] quadrato ED. igitur vt BA ad ED, sic ED ad AE. Deinde quia parabolæ æquales sunt, æquantur etiam [b] rectangula AED, ABF. Ergo vt BA ad ED, sic reciprocè AE ad BF. sed cùm ostendi vt BA est ED, sic ED esse ad AE, ergo vt ED ad AE, sic AE ad BF. liquet igitur quatuor rectas BA, ED, AE, BF esse in continua analogia: & proinde inter BA, BF, medias esse ED, AE. Quod erat demonstrandum.



b Ex Coroll. 22. huius.

PROPOSITIO CCLII.

INter duas datas, duas medias exhibere.

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint AB, BF, quibus ad angulum rectum dispositis describe parabolam AC circa axem AB, cuius rectum latus æquale sit ipsi AB. occurrat deinde BF, parabola AC in C, & circa communem axem AB aliam describe parabolam per A & F. Demum [c] ducatur ordinatim DE, faciens segmenta parabolica ADE, AFB æqualia. Dico DE, EA esse medias inter AB, BF: demonstratio ex præcedenti manifesta est. [c] Ex 142. huius.

PA-

PARABOLÆ
PARS SEXTA

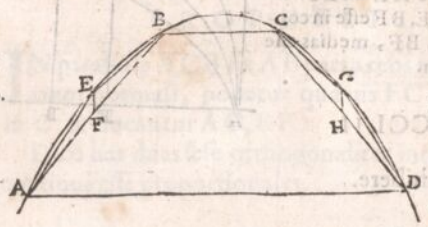
Segmenta primùm & parabolas inter se confert; dein figuras maximas sectioni inscribit.

PROPOSITIO CCLIII.

SEcent A B C parabolam parallelæ quæuis duæ A D, B C, ducanturque lineæ A B, C D.

Dico illas segmenta auferre æqualia.

Demonstratio.



a 218. huius.
b Ex 240. huius.

SEgmentis A B, C D triangula inscribantur maxima A E B, C G D; quæ cùm B C, A D, [a] æquidistent, inter se æqualia sunt: vnde & [b] segmenta æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLIV.

EAdem manẽte figurâ, oportet ex dato in peripheria puncto C, rectam ducere, quæ segmentum auferat æquale dato A B.

Constructio & demonstratio.

IVnctâ B C, ducatur A D parallela B C, iunganturque C D: manifestum est per præcedentem D C ex dato puncto eductam, segmentum auferre æquale dato A B. Quod erat requisitum.

PROPOSITIO CCLV.

DAto segmento A B C & diametro G H oportet ad illam ordinatim applicare lineam, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

DIuisa A B bifariam in F, erigatur diameter F E, cui fiat æqualis G H: & per H ordinatim ponatur C D, dico factum esse quod petitur: iungantur enim A E B, C G D. quoniam E F, G H diametri æquales sunt, [c] triangula quoque A E B, C G D æqualia sunt: quæ cùm [d] maxima sint illorum quę segmentis A B, C D inscribi possunt, [e] segmenta quoque A B, C D æqualia sunt: applicuimus igitur ad datam diametrum, &c. Quod erat faciendum.

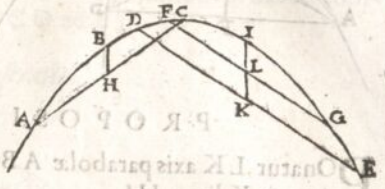
c 218. huius.
d 218. huius.
e 240. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCLVI.

DAta parabola ABC, & in illa segmento AC, oportet cuicunq; ED æquidistantem ducere, quæ segmentum auferat dato æquale.

Constructio & demonstratio.

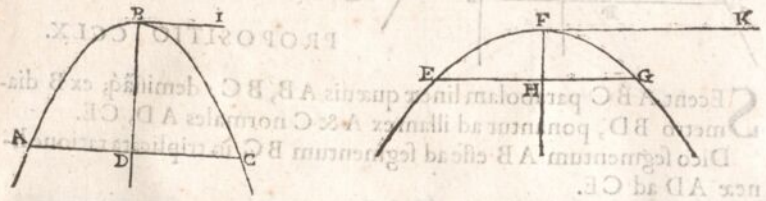


DIuisis AC, DE bifariam in H & K, erigantur diametri HB, IK: factâq; IL æquali HB, ponatur per L, FG æquidistans DE, patet per præcedentem FIG segmentum dato AC, æquale esse; igitur lineam duximus æquidistantẽ DE quæ segmentum FIG auferat æquale dato. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO CCLVII.

SIt ad ABC parabolæ axem BD cuius latus rectum BI, ordinatim posita AC: sit autem & EFG parabola, cuius axis FH, & latus rectum FK; oportet ex EFG parabola segmentum auferre, quod ad segmentum ABC, rationem habeat quam BI ad FK.

Constructio & demonstratio.



FIat vt IB ad FK, sic FH ad BD, & per H ordinatim ponatur EG. dico factum esse quod petitur: cùm enim sit vt IB ad FK, sic FH ad BD, rectangulum super IBBD id est[a] quadratum AD, æquale est rectangulo super FK, FH id est quadrato EH. vnde AC, EG inter se æquales: sunt triangulum igitur maximum segmenti EFG, ad triangulum maximum segmenti ABC est vt FH ad BD, id est per constructionem BI ad FK; ergo & segmentum[b] EFG ad segmentum ABC, vt IB ad FK; abstulimus igitur ex EFG parabola segmentum EFG, quod ad segmentum ABC eam rationem continet quam latus rectum BI, ad latus rectum FK. Quod exhibendum erat.

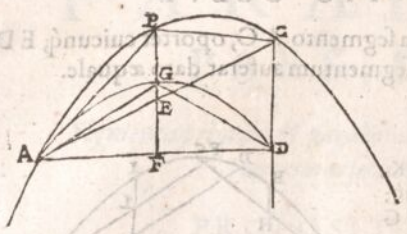
[a] Ex 8. huius.

[b] Ex 40. huius.

PROPOSITIO CCLVIII.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BE ordinatim posita AC: ductaque AD normali, ad diametrum ex C demissam, fiant BE, FG lineæ æquales; & per AGD, parabola describatur, cuius axis GF.

Dico AGD segmentum æquari segmento ABC.



a 227. huius.

b 240. huius.

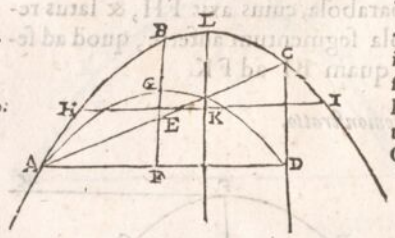
Demonstratio.

QVoniam BE, GF lineæ æquales sunt, triangula BCE, GDF, item BAE, GAF, ac propterea ABC, AGD triangula inter se æqualia sunt, sed quoque [a] maxima sunt illorũ quæ segmentis ABC, AGD, inscribi possunt; segmenta igitur ABC, [b] AGD æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLIX.

POnatur LK axis parabolæ ABC, æqualis diametro BE, & ordinatim per K linea HI.

Dico illam rectæ AD æqualem existere.



c Ex 218. & 240. huius.

d Ex conuersa 240. huius.

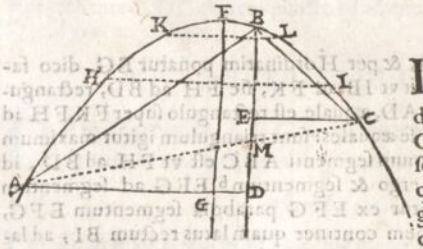
Demonstratio.

ESt enim per præcedentẽ AGD parabola æqualis parabolę ABC id est [c] HLI: igitur & triangula maxima AGD, [d] HLI sunt æqualia: sunt autem ex hypothesi illorum altitudines LK, FG æquales, igitur & bases AD, HI inter se æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCLX.

SEcent ABC parabolam lineæ quæuis AB, BC: demissâq; ex B diametro BD, ponantur ad illam ex A & C normales AD, CE.

Dico segmentum AB esse ad segmentum BC in triplicata ratione lineæ AD ad CE.



c Ex conuersa 258. huius.

f 241. huius.

Demonstratio.

INuento axe FG applicentur ad illum ordinatim lineæ HI, KL: & HI quidem sit æqualis AD; KL verò rectæ CE: erit igitur segmento AB [c] æquale segmentum HFI, & segmento BC æquale segmentum KFL. sed HFI segmentum ad segmentum KFL, [f] triplicatam habet rationem lineæ HI ad lineam KL; igitur & segmentum AB ad segmentum BC, triplicatam habet rationem lineę HI ad KL, lineam, id est ex hypothesi AD ad EC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc sequitur iunctâ AC, quę occurrat BD in M, AB segmentum ad segmentum BC triplicatam habere rationem AM ad MC. patet, cùm sit vt AD ad CE, sic AM ad MC. ergo, &c.

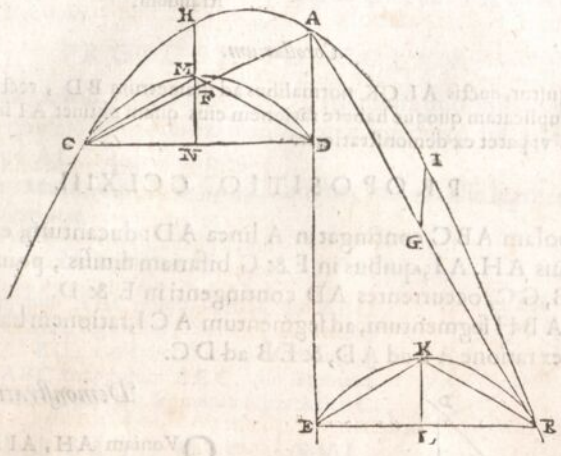
PRO-

PROPOSITIO CCLXI.

PArabolam ABC, ſecent duæ quæuis lineæ AB, AC: demiſſaque ex A diametro AD, ponantur ad illam ex B & C normales BE, CD: dein AB, AC lineis bifariam diuiſis in F & G, erigantur diametri FH, GI.

Dico ſegmentum AHC ad ſegmentum AIB, rationem habere compoſitam, ex ratione FH ad IG, & CD ad BE.

Demonſtratio.



Diuiſis EB, CD lineis bifariam in L & N, erigantur normales LK, NM: & LK quidem æqualis IG: NM verò æqualis HF: & per E, K, B, item C, M, D puncta, parabolæ deſcribantur, quarum axes ſint LK, MN: iunganturque EKB, CMD. Quoniam LK æqualis eſt IG, ſegmenta EKB, [a] AIB æqualia ſunt: eadem de cauſa æqualia ſunt ſegmenta AHC, DMC; ſegmentum igitur AHC eſt ad ſegmentum AIB vt DMC ſegmentum, eſt ad ſegmentum EKB. ſed DMC ſegmentum eſt ad ſegmentum EKB, [b] vt DMC triangulum ad triangulum EKB; igitur & AHC ſegmentum, ad ſegmentum AIB, eſt vt DMC triangulum ad triangulum EKB, & inuertendo vt triangulum DMC ad triangulum EKB, ſic AHC ſegmentum eſt ad ſegmentum AIB: ſed ratio trianguli DMC ad triangulum EKB eſt compoſita ex ratione NM, ad LK, id eſt FH ad IG, & ex DC ad EB; ratio igitur ſegmenti AHC ad ſegmentum AIB, compoſita eſt ex ratione HF ad IG, & DC ad EB. Quod erat demonſtrandum.

[a] 218. & 240. *huius.*

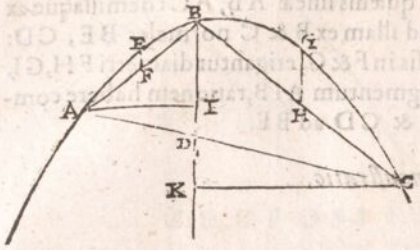
[b] 240. *huius.*

PROPOSITIO CCLXII.

AVferant AB, BC lineæ ſegmenta quæcunque, demiſſaq; ex B diametro BD, ponatur AC occurrens BD lineæ in D: dein AB, BC diuiſis bifariam in F & H, ponantur per F & H, diametri EF, GH.

Dico EF ad GH duplicatam habere rationem eius quam habet AD ad DC.

Demonſtratio.



a 260. huius.

b 261. huius.

SEgmentum AB ad a ſegmentum BC in triplicata eſt ratione AD ad DC; ſed ratio ſegmenti AB ad ſegmentum b BC compoſita eſt ex ratione EF ad GH, & ex AD ad DC, ratio igitur EF ad GH, duplicata eſt rationis eius, quam habet AD ad DC. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

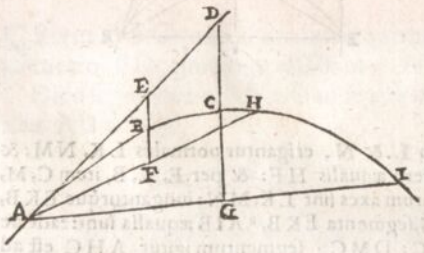
HInc ſequitur, ductis AI, CK normalibus ad diametrum BD; rectam EF ad GH duplicatam quoque habere rationem eius quam obtinet AI linea, ad lineam CK. vt patet ex demonſtratione.

PROPOSITIO CCLXIII.

PArabolam ABC contingat in A linea AD: ducanturq; ex A lineæ quæuis AH, AI, quibus in F & G bifariam diuiſis, ponantur diametri FB, GC, occurrentes AD contingenti in E & D.

Dico ABH ſegmentum, ad ſegmentum ACI, rationem habere compoſitam ex ratione AE ad AD, & EB ad DC.

Demonſtratio.



c Ex 17. huius.

d 241. huius.

QVoniam AH, AI lineæ ordinatim ponuntur ad diametros BF, CG, & AD linea contingens, lineæ EB, BF, item DC, CG inter ſe c æquales ſunt. vnde ABH triangulum æquale triangulo AEF, & ACI triangulum æquale triangulo ADG: eſt autem vt ABH triangulum ad triangulum ACI, ſic d ABH ſegmentum ad ſegmentum ACI; igitur & ſegmentum ABH eſt ad ſegmentum ACI, vt AEF triangulum ad triangulum ADG. ſed ratio trianguli AEF ad triangulum ADG, compoſita eſt ex ratione AE ad AD, & ex ratione EF ad DG, id eſt EB ad DC: igitur & ſegmentum ABH ad ſegmentum ACI rationem habet compoſitam ex ratione AE ad AD, & EB ad DC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCLXIV.

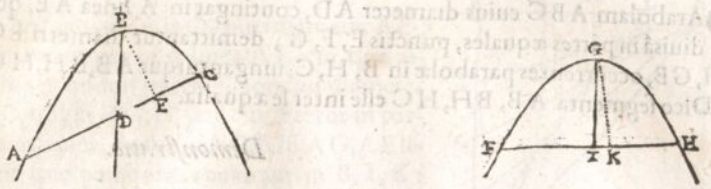
PArabolas duas ABC, FGH ſubtendant rectæ AC, FH ſegmenta auferentes æqualia; rectis autem AC, FH diuiſis in D & I bifariam, ponantur diametri BD, GI, & ex B & G, demittantur BE, GK normales ad AC, FH.

Dico eſſe vt BE ad GK, ſic FH ad AC.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [533] - 476
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



CVm enim ſegmenta ABC, FGH ponantur æqualia, triangula quoque illorum a maxima inter ſe æqualia ſunt, vnde vt BE ad GK, ſic b FH ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a Ex conuerſa 240. huius.
b Ex elementis.

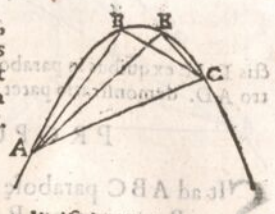
PROPOSITIO CCLXV.

PArabolæ ABC ſegmento ABC, triangula duo inſcripta ſint, & ABC quidem illorum maximum, quæ ſegmento inſcribi poſſunt, alterum verò AEC quodcunque.

Dico ſegmenta AE, EC ſimul ſumpta, maiora eſſe ſegmentis AB, BC ſimul ſumptis.

Demonſtratio.

CVm triangulum AEC minus ſit triangulo ABC, reſidua AE, EC ſegmenta, maiora ſunt reſiduis ſegmentis AB, BC; eodem enim exceſſu ſuperat triangulum ABC triangulum AEC, quo ſegmenta ſuper lineis AE, EC excedũt ſegmenta ſuper AB, BC.



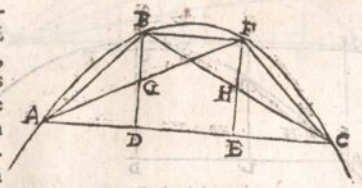
PROPOSITIO CCLXVI.

PArabolam ABC ſubtendat recta AC, qua diuiſa in quotuis partes æquales, in punctis D, E: erigantur diametri DB, EF, iunganturque AB, BF, FC.

Dico ſegmenta AB, BF, FC æqualia eſſe.

Demonſtratio.

POnantur AF, BC & AF quidem occurrat BD in G; BC verò rectæ FE in H: vt AD ad DE, ſic AG ad GF, ſed AD, DE per hypotheſim æquales ſunt; igitur & AG, GF quoque inter ſe æquantur, quare ABC triangulum c maximum eſt eorum quę ABF ſegmento inſcribi poſſunt, & AB, BF ſegmenta d ſunt æqualia. ſimiliter æqualia oſtenduntur ſegmenta BF, FC: ſegmenta igitur AB, BF, FC, æqualia ſunt.

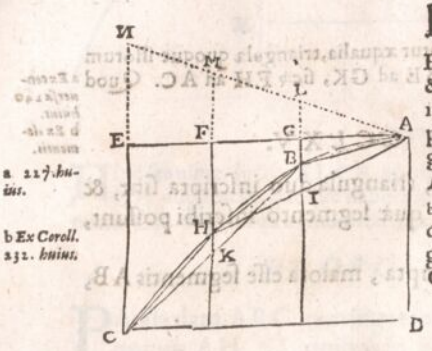


c 227. huius.
d Coroll 2. propoſ. 232. huius.

PROPOSITIO CCLXVII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE; quâ diuisâ in partes æquales, punctis E, F, G, demittantur diametri EC, FH, GB, occurrentes parabolæ in B, H, C; iunganturque AB, BH, HC: Dico segmenta AB, BH, HC esse inter se æqualia.

Demonstratio.



a 227. huius.

b Ex Coroll. 232. huius.

DVcantur AH, BC; & AH quidem occurrat GB lineæ productæ in I; BC verò ipsi FH in K. Quoniam IG, FH æquidistant & AG, GF ponuntur æquales, rectæ AI, IH inter se æquales sunt: quare AH ordinatim posita est ad diametrum IB, & ABH triangulum maximum [a] est eorum quæ segmento ABH inscribi possunt: adeoque & segmenta [b] AB, BH æqualia sunt. eodem modo ostenduntur segmenta BH, HC inter se æquari; segmenta igitur AB, BH, HC æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

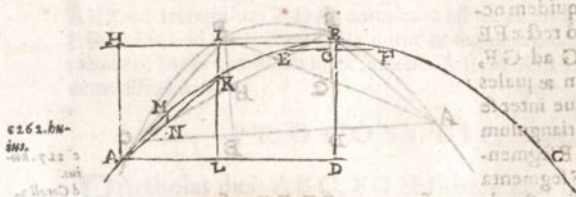
PRopositio quoque vera est si ex A ducta secans AN diuidatur in partes æquales punctis L, M: ex quibus in parabolam rectæ emittantur LB, MH, NC parallelæ diametro AD. demonstratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO CCLXVIII.

SIt ad ABC parabolæ axem BD ordinatim posita recta EF; actaq; per B contingente BH, sumatur in illa, portio HI æqualis EF: & ex H & I, diametri demittantur HA, IK, occurrentes parabolæ in A & K, iunganturque AK.

Dico segmentum AK, æquari segmento EBF.

Demonstratio.



c 262. huius.

d 261. huius.

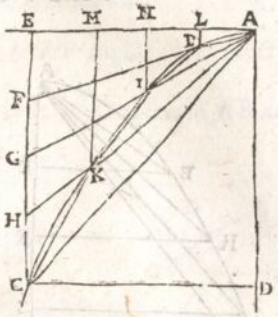
DIuisâ AK bifariam in N ducatur diameter NM. Quoniam AL, EF lineæ ponuntur æquales & MN ad BG in duplicata est ratione [c] AL ad EF, rectæ MN, BG inter se æquales sunt; sed ratio segmenti AK ad segmentum EBF composita est [d] ex ratione MN ad BG, & AL ad EF; segmentum igitur AK æquale est segmento EBF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCLXIX.

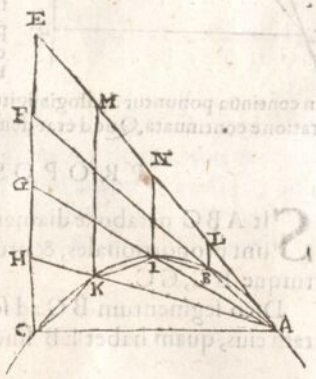
PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AE: in qua assumpto quouis pũcto E, ponatur diameter EC, quę in F, G, H punctis secetur in partes æquales; ductisq; AC, AH, AG, AF lineis quę parabolæ occurrant in B, I, K: iungantur AB, BI, IK, KC.

Dico segmenta AB, BI, IK, KC esse inter se æqualia.



Demonstratio.

ERigantur ex B, I, K diametri BL, IN, KM: Quoniam BL, IN, KM, CE æquidistant axi, recta AE [a] in L, N, M diuisa est sicut EC diuisa in F, G, H: igitur lineæ AL, LN, NM, ME, æquales sunt: ac proinde segmenta AB, BI, [b] IK, KC inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.



[a] Ex 94. huius.

[b] 167. huius.

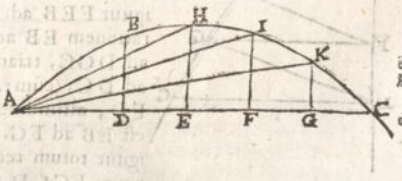
PROPOSITIO CCLXX.

PArabolam ABC subtendat quæuis AC normalis ad axem parabolæ, quâ diuisâ in D, E, F, G: vt AD, AE, AF, AG, AC proportionales sint, ponantur diametri DB, EH, FI, GK: iungantur-que AB, AH, AI, AK.

Dico segmenta AB, ABH, AHI, AIK, AKC in continua esse analogia.

Demonstratio.

SEgmentum AB ad ABH segmentum, rationem habet triplicatam [c] lineæ AD ad AE lineam: & AH segmentum ad segmentum AI triplicatam [d] habet rationem AE ad AF, & sic de cęteris; igitur cùm AD, AE, AF, AG, AC continuè sint proportionales, segmenta quoque in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

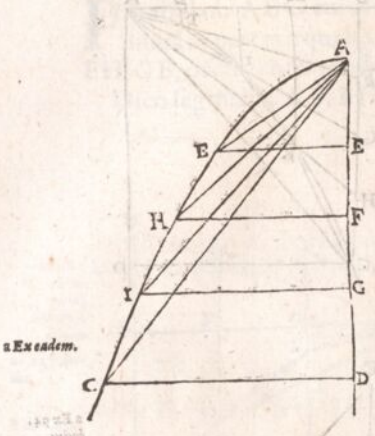


[c] Ex 241. huius.

[d] Ex eadem.

PRO-

PROPOSITIO CCLXXI.



SIt ABC parabolæ diameter AD diuiſa in E, F, G punctis vt AE, AF, AG, AD lineæ ſint continuè proportionales: poſitiſque ordinatim EB, FH, GI, CD, iungantur AB, AH, AI, AC.

Dico ſegmenta AB, ABH, ABI, ABC in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.

RAtio ſegmenti AB ad ſegmentum AH triplicata eſt eius quam habet [a] BE ad HF. rurſum ABH ſegmentum ad ſegmentum ABI triplicatam habet rationem HF ad IG, & ſic de cæteris; ſed EB, FH, GI, CD lineæ continuè [b] ſunt proportionales, quoniam AE, AF, AG, AD in continua ponuntur analogia: igitur & ſegmenta AB, ABH, AHI, AIC ſunt in ratione continuata. Quod erat demonſtrandum.

a Ex eadem.

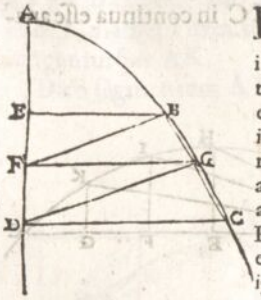
b 33. huius.

PROPOSITIO CCLXXII.

SIt ABC parabolæ diameter AD, diuiſa in E & F, vt AE, AF, AD ſint proportionales, & ordinatim ponantur EB, FG, DC: iungantur BG, GC.

Dico ſegmentum BG ad ſegmentum GC rationem habere triplicatam eius, quam habet EB linea ad lineam FG.

Demonſtratio.



DVcantur FB, DG. Quoniam AE, AF, AD lineæ proportionales ſunt, EF eſt ad FD, [c] vt AE ad AF, id eſt vt quadratum EB ad quadratum FG. ſed ratio trianguli FEB ad triangulum DFG [d] compoſita eſt ex ratione EF ad FD, & ex EB ad FG; triangulum igitur FEB ad DFG triangulum, triplicatam habet rationem EB ad FG. eodem modo triangulum FBG ad DGC, triangulum triplicatam habet rationem FG ad DC, (cùm rationem habeant compoſitam ex EF ad FD, altitudine ad altitudinem, & ex FG ad DC, id eſt EB ad FG; (cùm EB, FG, DC proportionales ſint) igitur totum rectilineum EBGF eſt ad totum rectilineum FGCD in triplicata ratione EB ad FG; ſed & mixtilineum EBGF eſt ad mixtilineum DFGC in triplicata ratione EB ad FG, nam cùm EB, FG, DC proportionales ſint, parabolæ quoque EAB, FAG, [e] DAC in continua ſunt analogia: adeoque vt ABE parabola eſt ad parabolam FAG, ſic EBGF mixtilineum eſt ad mixtilineum FGCD. igitur & reliquum [f] ſegmentum BG eſt ad reliquum GC, in triplicata ratione EB ad FG. Quod erat demonſtrandum.

c 1. De progreſſionibus.

d Ex elementis.

e Ex 24. huius.

f Ex 19. quinti.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [537] - 480
PUBLIC DOMAIN

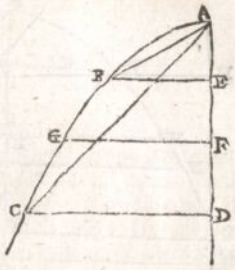
PROPOSITIO CCLXXIII.

SInt denuo proportionales AE, AF, AD, & AF æqualis lateri recto diametri AD, & iungantur AB, AC.

Dico segmentum AB esse ad segmentum AC vt quadratum AB ad quadratum AC.

Demonstratio.

SEgmentum AB est ad segmentum AC [a] in triplicata ratione EB ad DC, id est sextuplicata EB ad FG, cùm EB, FG, DC proportionales sint: sed AB, quadratum ad quadratum AC rationem habet [b] sextuplicatam lineæ EB ad FG, igitur vt quadratum AB ad quadratum AC, sic AB segmentum ad segmentum AC. Quod erat demonstrandum.



a 260. huius.

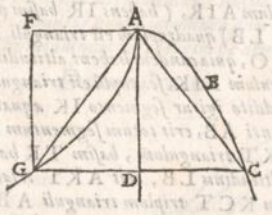
b Ex 38. huius.

PROPOSITIO CCLXXIV.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in A linea AF; dein per A describatur parabola FAG cuius AF sit diameter & contingens AD, ducaturque in ABC parabola ordinatim linea GC, occurrens FAG parabolæ in G, iunganturq; AC, AG.

Dico segmentum AG esse ad segmentum ABC, vt GD linea ad lineam DC.

Demonstratio.



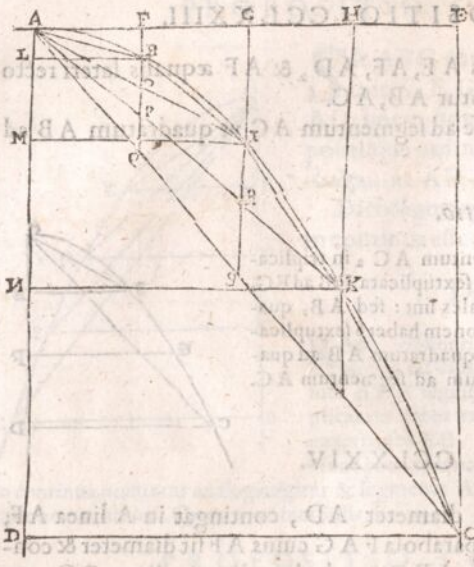
ERigatur ex G linea GF parallela contingenti AD. erit igitur segmentum GA, ad [c] segmentum ABC, vt FAG triangulum id est triangulum GDA, ad triangulum DAC; sed GD est ad DC, vt GDA triangulum ad triangulum DAC; segmentum igitur AG est ad segmentum AC, vt GD linea ad lineam DC. Quod erat demonstrandum.

c Ex 240. & ex Coroll. 236. huius.

Scholion.

LIcet hoc loco propositionem ducentesimam sexagesimam septimam huius, secundùm proportiones quasdam Arithmeticas contemplari, nimirum quæ linearum, & segmentorum, tam connexorum quàm concauorum Arithmetica sit progressio, siue incrementum.

Sit ABC *parabolæ diameter* AD, *& contingens* AE: *quâ diuisâ in quotcunque partes æquales punctis* F, G, H *demittantur diametri* FB, GI, HK, EC *occurrentes parabolæ in* B, I, K, C: *ex quibus ordinatim ponantur* BL, IM, KN, CD: *ductisq;* AB, AI, AK, AC *iun-*



AC *iungantur* BI, IK, KC, & FB, GI, HK *lineæ producantur, donec* AI, AK, AC *lineis occurrant in* O, P, Q, R, S, T *punctis.*

Erunt igitur [a] *segmenta* AB, BI, IK, KC *inter se æqualia: item lineæ æquales* FB, BO, OP, PQ: *cùm* FQ *linea* [b] *sit diuisa vt* AE.

a 267. huius.

b Ex 94. huius.

Primò vt quadratũ AF *ad quadratum* AG, *sic* FB *est ad lineam* GI: *sed* AG *quadratum quadruplũ est quadrati* AF *quia* AG *dupla est* AF; *igitur &* GI *quadrupla est lineæ* FB, *id est* AM *quadrupla ipsius* AL: *rursum quadratum* AH *est ad quadratum* AF, *vt* 9. *ad* 1. *cùm* AH *tripla sit* AF, *igitur &* HK *linea est ad lineam* AF, *id est* AN *ad* AL, *vt nouem ad vnum: iterum quadratum* AE *est ad quadratum* AF *est vt* 16. *ad* 1. *ergo &* EC *est ad* FB, *id est* AD *ad* AL, *vt* 16. *ad* 1. *& sic de cæteris: igitur* AL *dat vnum; quorum* AM *quatuor;* AN *nouem;* AD *sedecim.*

Rursum cùm IR *sit ad* OP, *vt* AI *ad* AO, *id est* AG *ad* AF, *ponatur autem* AG *dupla* AF, *erit &* IR *dupla* OP: *eadem methodo ostenditur* KT *triplam esse* PQ *siue* OP, *& sesquialteram ipsius* IR. *vnde incrementum innotescit linearum* BO, IR, KT.

Secundo segmentorum conuexorum AB, AI, AK, AC *arithmetica proportio sic instituitur. Triangulum* ABO *æquale est triangulo* AFB (*cùm* FB, BO *æquales ostensæ sint*) *adeoq; triplum segmenti* [c] AB: *quare totum triangulum* ABI, *sextuplum est segmenti* AB; *additis igitur segmentis æqualibus* AB, BI, *erit totum segmentum* ABI *ad segmentum* AB *vt* 8. *ad* 1. *Rursum triangulum* AIR, (*habens* IR *basim duplam baseos* OP, *&* IM *altitudinem duplam altitudinis* LB) *quadruplum est trianguli* ABO: *est autem triangulum* IKR *duplum trianguli* ABO, *quia eandem habent altitudinem, & basis* IR *dupla est baseos* OB, *igitur totum triangulum* AIK, *sextuplũ est trianguli* ABO, *vnde est ad segmentum* AB, *vt* 18. *ad* 1. *addito igitur segmento* IK *æquali segmento* AB, *& segmento* AI, *quod octuplum est segmenti* AB, *erit totum segmentum* AK *ad segmentum* AB, *vt* 27. *ad* 1: *iterum, cùm* AKT *triangulum, basim* TK *habeat triplam baseos* OB, *&* NK *altitudinem triplam altitudinis* LB, *erit* AKT *triangulum nonuplum trianguli* ABO: *est autem triangulum* KCT *triplum trianguli* ABO, *igitur totum triangulum* AKC, *duodecuplum erit trianguli* ABO: *quare & ad segmentum* AB *est vt* 36. *ad* 1. *addito ergo segmento* KC, *æquali ipsi* AB, *&* AIK *segmento quod ad* AB *segmentum est vt* 27. *ad* 1, *erit* AKC *segmentum ad segmentum* AB, *vt* 64. *ad vnum: & sic de cæteris.*

c 242. huius.

Tertiò parabola AIM *est ad* ABL *parabolam,* [d] *vt* AIM *triangulum ad triangulum* ABL, *est autem* AIM *triangulum octuplum trianguli* ABL, (*cùm* AM *basis ostensa sit quadrupla baseos* AL, *&* MI *altitudo dupla ipsius* LB;) *igitur* AIM *parabola octupla est parabolæ* ABL: *eodem modo cùm* AN *nonupla sit* AL, *&* NK *tripla* LB, *erit triangulum* AKN *ad triangulũ* ABL *est vt* 27. *ad* 1. *vnde &* AKN *parabola toties continebit parabolam* ABL. *eadem praxi procedendo, reliquorum proportio habebitur.*

d 240. huius.

Sed & concauorum quoque segmentorum AFB, AGI, AHK, *&c. excessus eadem ratione innotescunt, cùm segmenta illa eandem seruent rationem* [e] *quam triangula* AFB, AGI, AHK, *quorum nota est proportio.*

e 243. huius.

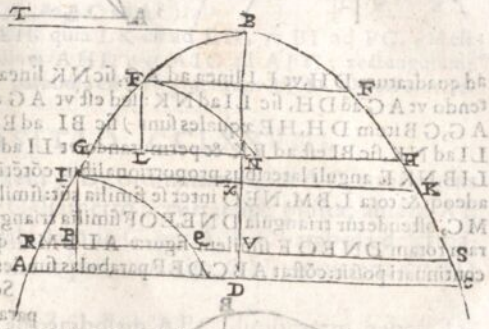
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [539] - 482
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CCLXXV.

SIt parabolæ A B C axis B D, ad quem ponantur ordinatim E F, G H, & I K, R S: ductis deinde diametris E L, I M. mediisque constitutis L N, M O inter G L, L H, & A M, M C, describantur circa axes E L, I M & puncta N & Q, parabolæ E L N, I P Q.

Dico parabolas has æquales esse.



Demonstratio.

SIt B T latus rectum axeos B V. erit ergo rectangulum V B T æquale quadrato V R. & rectangulum X B T æquale quadrato X I hoc est quadrato V P. itaque à rectangulo V B T dempto rectangulo X B T, remanet rectangulum V X B T, æquale rectangulo R P S, quod ex quadrato V R remanet per 5. 2. dempto quadrato V P. sed cùm ex constructione R P, P Q, P S sint continuæ, rectangulũ R P S æquatur quadrato P Q. rectangulum igitur V X B T, hoc est I P B T æquatur quadrato P Q. ergo B T latus rectum est parabolæ I Q P. Atqui eodem plano discursu B T latus rectum est parabolæ E N L.[a] æquantur igitur parabolæ. Quod erat demonstrandum.

[a] *defin. huius.*

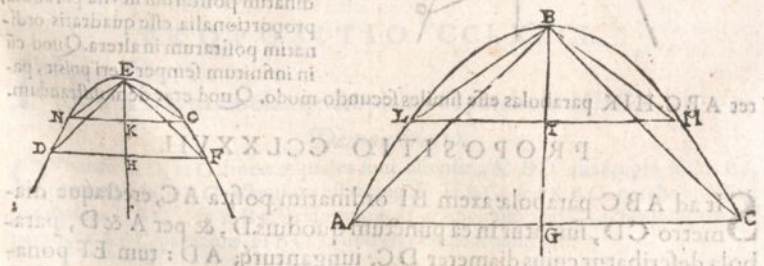
PROPOSITIO CCLXXVI.

OMnis parabola, parabolæ similis est.

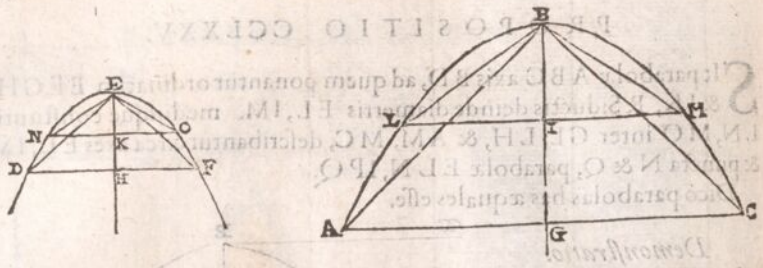
NOTA:

Duplici modo superficies duas curuilineas dici similes: Primo, quando similes figuræ in infinitum illis inscribi possunt: & hoc sensu Archimedes & Euclides, similia esse curuilinea quædam ostendunt. Secundo similes dicuntur figuræ curuilineæ quarum essentiales proprietates eædem sunt. Nos duplicem hanc similitudinem parabolis inesse demonstrabimus.

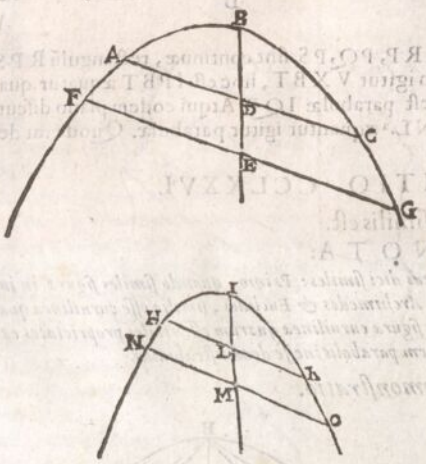
Demonstratio.



POnantur A B C, D E F parabolarum axes B G, E H æquales lateribus suis rectis; & per G & H, ordinatim A C, D F: iungantúrque A B C, D E F. Quoniam E H, B G lineæ lateribus rectis æquales sunt & A C, D F ordinatim positę, rectæ E H, D H, item A G, B G æquales sunt: & quia A G, D H ad axes ordinatim applicantur, anguli D H E, A G B recti sunt: vnde triangula D H E, A G B, ac proinde tota D E F, A B C similia sunt: Rursum diuisis A G, E H lineis proportionaliter in I & K, ponantur per I & K ordinatim L M, N O: iunganturque L B M, N E O. Quoniam igitur vt B I ad B G, sic E K est ad E H, vt L I quadratum ad quadratum A G, sic N K quadratum est



ad quadratum D H, vt L I linea ad A G, ſic N K linea ad D H; & permutando inuertendo vt A G ad D H, ſic L I ad N K: ſed eſt vt A G ad D H, id eſt B G ad E H, (quia A G, G B item D H, H E æquales ſunt) ſic B I ad E K;) per conſtructionẽ igitur vt L I ad N K, ſic B I eſt ad E K. & permutando vt L I ad B I, ſic N K ad E K: quare cùm L I B, N K E anguli lateribus proportionalibus cõtẽti recti ſint, triangula L I B, N K E, adeoq; & tota L B M, N E O inter ſe ſimilia ſũt: ſimiliter ſi iungantur N D, O F, L A, M C, oſtendetur triangula D N E, E O F ſimilia triangulis B L A, B M C: adeoque figuram totam D N E O F ſimilem figuræ A L B M C. quæ operatio cùm ſine termino continuari poſsit: cõſtat A B C, D E F parabolas ſimiles eſſe primo modo.



Secundo autem modo parabolas parabolis eſſe ſimiles, ſic oſtendo. ſit A B C parabolæ diameter quæcunque A D diuiſa vtcunque in D & E punctis, per quæ ordinatim ponantur A C, F G. ſit autem & H I K parabolæ diameter I L diuiſa proportionaliter in L & M, & per L & M ordinatim poſitæ H K, N O. Quoniam eſt vt B D ad B E, ſic I L ad I M, erit vt quadratum A C ad quadratum F G, ſic H K quadratum ad quadratum N O. eodem modo ſi rurſum diametri B D, I L proportionaliter diuidantur, & per diuiſionum puncta ordinatim ponantur lineę, oſtendentur quadrata ordinatim poſitarum in vna parabola, proportionalia eſſe quadratis ordinatim poſitarum in altera. Quod cũ in infinitum ſemper fieri poſsit, patet A B C, H I K parabolas eſſe ſimiles ſecundo modo. Quod erat demonſtrandum.

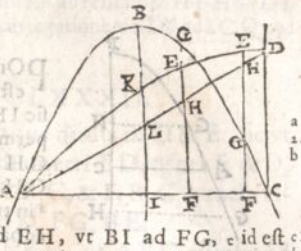
PROPOSITIO CCLXXVII.

SIt ad A B C parabolæ axem B I ordinatim poſita A C, erectaq́ue diametro C D, ſumatur in ea punctum quoduis D, & per A & D, parabola deſcribatur cuius diameter D C, iunganturq́; A D: tum E F ponatur diameter, occurrens A B C parabolæ in G, & A E D in E, rectæ verò A D in H.

Dico A B C parabolam eſſe ad ſegmentum A E D, vt F G linea ad lineam E H.

Demon-

Demonſtratio.



OCcurrat axis BI, parabolæ AEC in K, & AD in L, cùm igitur AC bifariam in I, ſit diuiſa, & CD æquidiſtet BI, erit & AD quoque in L bifariam diuiſa & ordinatim ad LK diametrum poſita: quia verò AC normalis ad CD, vtrique parabolę eſt communis, erit ABC parabola ad ſegmentum AED, [a] vt BI ad LK, (cùm rationem habeant [b] compoſitam ex ratione BI ad LK, & AC ad AC) ſed vt BI ad LK, ſic GF ad EH, quia LK eſt ad EH, vt BI ad FG, [c] id eſt ALD rectangulum ad rectangulum AHD, vt AIC ad AFC, rectangulum; igitur vt FG ad EH, ſic ABC parabola eſt ad ſegmentum AED. Quod erat demonſtrandum.

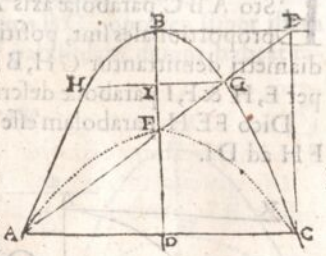
a Corall. 24o. huius.
b 261. huius.
c Ex 47. huius.

PROPOSITIO CCLXXVIII.

SIt ad ABC parabolæ axem BD, ordinatim poſita AC, contingens verò BE, quæ erectæ ex C diametro occurrat in E poſita, autem AE quæ axem ſecet in F: & parabolam in G, per A, F, C parabola deſcribatur, habens apicem in F, ponaturque ordinatim GH, occurrens axi BD in I.

Dico HBG parabolam ad parabolam AFC duplicatam habere rationem HG ad AC.

Demonſtratio.



QVoniam EB, AC æquidiſtant, vt AF ad FE, ſic FD eſt ad FB, & EB ad AD: ſed AF, FE æquales ſunt, æquantur igitur EB, AD, & BF, FD: quia verò [d] EF dupla eſt GF, id eſt BI dupla IF, erit & EB dupla GI; vnde tota HG æqualis eſt EB, id eſt AD dimidio rectæ AC; quare vt BI ad BF, id eſt FD, ſic HG eſt ad AC, eſt autem ratio parabolæ HBG ad AFC parabolam compoſita ex ratione [e] BI ad FD, & HG ad AC: igitur ratio parabolæ HBG ad parabolam AFC duplicata eſt HG ad AC. Quod erat demonſtrandum.

d 101. huius.
e 261. huius.

PROPOSITIO CCLXXIX.

IIſdem poſitis:

Dico ABC parabolam, octuplam eſſe parabolæ HBG.

Demonſtratio.

QVoniam AD, HG lineæ æquales ſunt oſtenſæ, & BD quadrupla ipſius BI, [f] triangulum ABC octuplum eſt trianguli HBG; ſed ABC parabola eſt ad parabolam HBG, vt ABC triangulum ad triangulum HBG; octupla igitur eſt parabola ABC, parabolæ HBG. Quod erat demonſtrandum.

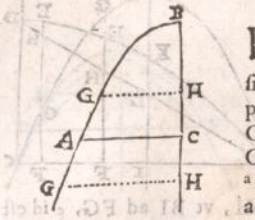
f Ex elementis.

PROPOSITIO CCLXXX.

SInt ABC, DEF parabolarum axes BC, EF, diuiſoque BC vtcunque in H diuidatur & EF proportionaliter in K, ponanturq; ordinatim HG, IK.

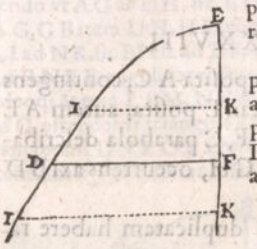
Dico GBH parabolam eſſe ad parabolam IEK, vt ABC parabola eſt ad parabolam DEF.

Demonſtratio.



a 141. huius.

POnantur ordinatim CA, FD: vt BH ad BC, ſic EK eſt ad EF, igitur vt quadratum GH ad quadratum AC, ſic IK quadratum ad quadratum DF, & inuertendo permutando vt AC quadratum ad quadratum DF, ſic GH quadratum ad quadratum IK, & vt AC ad DF, ſic GH ad IK. ſed ABC parabola eſt ad parabolam GBH [a] in triplicata ratione AC ad GH; & DEF parabola ad parabolam IEK, in triplicata ratione DF ad IK, erit igitur vt parabola ABC ad parabolam GBH, ſic DEF parabola ad parabolam IEK: & permutando vt ABC parabola ad parabolam DEF, ſic GBH parabola ad parabolam IEK; quod erat demonſtrandum.



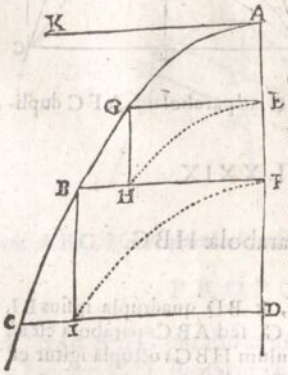
b 161. huius.

Si verò BC, EF lateribus rectis æquentur, erit GBH parabola ad parabolam IEK in duplicata ratione GH ad IK: quia ABC parabola ad parabolam DEF in duplicata eſt ratione AC ad DF, cùm AC, CB lineæ, item DF, FE ex quibus [b] rationem habent compoſitam, æquales ponantur.

PROPOSITIO CCLXXXI.

ESto ABC parabolæ axis AD diuiſus in E & F, vt AE, AF, AD proportionales ſint, poſitiſque ordinatim EG, FB, DC ex G & B, diametri demittantur GH, BI occurrentes FB, DC lineis in H & I: & per E, H & F, I parabolæ deſcribantur habentes apices in E & F.

Dico FEH parabolam eſſe ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI.



c 1. De progreſſionibus.

d 161. huius.

Demonſtratio.

QVoniam AE, AF, AD continuè proportionales ſunt, vt AE ad [c] AF, ſic EF eſt ad FD: ſed vt AE ad AF, ſic EG quadratum eſt ad quadratum FB, id eſt quadratum FH ad quadratum DI; igitur vt EF ad FD, ſic FH quadratum eſt ad quadratum DI: quia verò ratio parabolæ FEH ad parabolam DFI compoſita eſt ex [d] ratione EF ad FD, id eſt ex duplicata ratione FH ad DI, & iterum ex ratione FH ad DI, parabola FEH eſt ad parabolam DFI, in triplicata ratione FH ad DI. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc ſequitur, figuram mixtilineam HGB, eſſe ad figuram IBC in triplicata ratione HB ad IC. cùm enim EG, FB, DC proportionales ſint, parabolæ EAG, FAB, DAC in [e] continua quoque ſunt analogia: quare & FEGB mixtilineum ad mixtilineum DFBC eſt [f] vt EAG parabola ad parabolam FAB, id eſt in triplicata ratione EG ad FB, id eſt FH ad DI: ſed & rectangulum FG, ad rectangulum DB eſt in triplicata ratione lineæ FH ad lineam DI, quia rationem habent compoſitam ex ratione EF ad FD, & FH ad DI. igitur & reſiduum HGB ad reſiduum IBC in triplicata eſt ratione FH ad DI. quia verò eſt GE ad FB, id eſt FH ad

e Ex 141. huius.

f 1. De progreſſionibus.

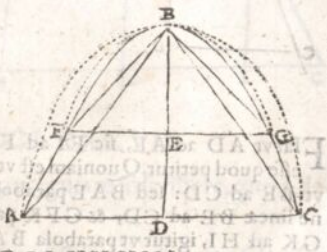
FH ad DI, vt FB ad DC, recta HB est ad IC, reliquum ad reliquum vt FH ad DI: figura igitur HGB ad IBC figuram, triplicatam habet rationem HB ad IC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCLXXXII.

ESto ABC parabolæ diameter BD, vtcunque diuisa in D & E, sic vt nec BE nec BD sit æqualis lateri recto diametri BD, & per E & D, ordinatim positis AC, FG, describantur per A, B, C, & F, B, G, puncta ellipses quarum coniugatæ sint diametri AC, BD, FG, BE.

Dico ABC parabolam esse ad parabolam FBG, vt ABC ellipsis ad ellipsim FBG.

Demonstratio.



IVngantur ABC, FBG; vt ABC triangulum ad triangulum FBG, sic ABC [a] parabola est ad parabolam FBG: sed & ABC ellipsis est ad ellipsim FBG, vt ABC [b] triangulum ad triangulum FBG; igitur vt parabola ABC est ad parabolam FBG, sic ABC. Quod erat demonstrandum.

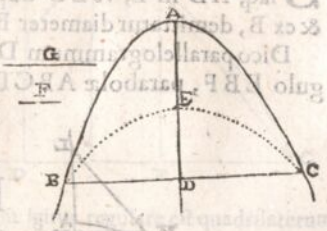
a 240. huius.

b De ellips.

PROPOSITIO CCLXXXIII.

PArabolam ABC subtendat recta quæuis BC, oportet super illam describere parabolam quæ ad ABC parabolam datam habeat rationem F ad G.

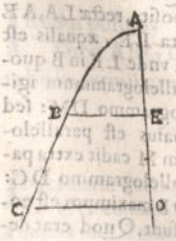
Constructio & demonstratio.

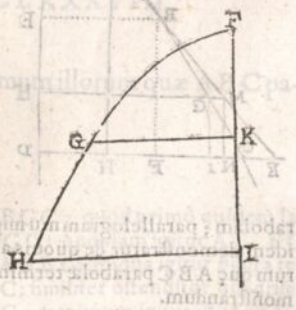


DIuisa BC bifariam in D, erigatur diameter DA, quæ diuidatur in E, vt AD sit ad DE sicut G est ad F; tum per B, E, C puncta parabola describatur cuius diameter sit DE, & ordinatim ad illam applicata BC. dico factum esse quod petitur. Quoniam ABC, BEC parabolę communem subtensam habent BC, parabola BEC ad ABC, parabolam est, vt ED [c] linea ad lineam AD, id est vt F ad G.

c Coroll. 240. huius.

PROPOSITIO CCLXXXIV.

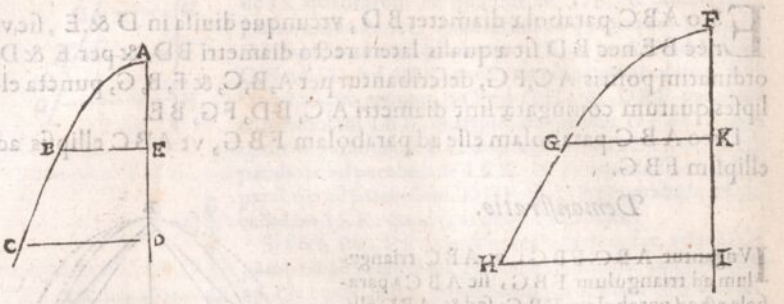




ESto ABC parabolæ diameter AD, diuisa vtcunque in E & D, & ordinatim positæ BE, CD. sit autem & FGH parabolæ diameter FI vtcun-

vtcunque diuisa in I & ordinatim posita HI. oportet FHG parabolam iterum diuidere sicut ABC parabola diuisa est.

Constructio & demonstratio.



Flat vt AD ad AE, sic FI ad FK, & ex K ordinatim ponatur KG: dico factũ esse quod petitur. Quoniam est vt AE ad AD, sic FK ad FI, erit & GK ad HI, vt BE ad CD: sed BAE parabola ad parabolam CAD [a] in triplicata est ratione lineæ BE ad CD, & GFK parabola ad parabolam HFI in triplicata ratione GK ad HI, igitur vt parabola BAE ad CAD, parabolam, sic GFK est ad parabolam HFI. perfecimus igitur quod fuit postulatum.

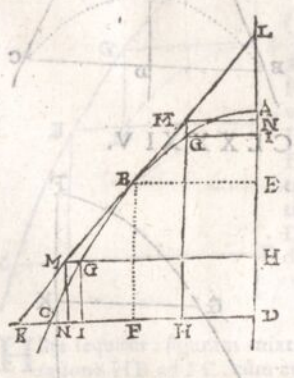
a 141. huius.

PROPOSITIO CCLXXXV.

Sit ad ABC parabolæ diametrum AD, ordinatim posita DC: diuisaq; AD in E, vt ED dupla sit AE, ponatur ex E ordinatim EB, & ex B, demittatur diameter BF, occurrens rectæ DC in F.

Dico parallelogrammum DEBF maximum esse illorum, quæ in angulo EBF, parabolæ ABCD terminatæ inscribi possunt.

Demonstratio.



b Ex 17. huius.

c Ex elementis.

Inscribatur enim quodcunque parallelogrammum IGH habens angulum IGH æqualem angulo EBF: agaturque per B contingens LK, occurrens AD diametro in L, & DC lineæ in K, rectæ verò HG in M; ex quo recta ponatur MN æquidistans GI. Quoniam BL est contingens, & EB ordinatim posita, rectæ LA, AE [b] æquales sunt; adeoque tota LE, æqualis est ED quæ dupla ponitur AE: vnde LK in B quoque bifariam est diuisa: parallelogrammum igitur DB maius est [c] parallelogrammo DM: sed parallelogrammum DM maius est parallelogrammo DG: quia punctum M cadit extra parabolam; parallelogrammu migitur DB, multo maius est parallelogrammo DG: idem demonstratur de quouis alio; parallelogrammum igitur DB maximum est eorum quę ABC parabolæ terminatę in angulo EBF, inscribi possunt. Quod erat demonstrandum.

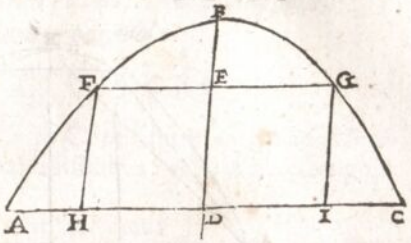
PRO-

PROPOSITIO CCLXXXVI.

DAtæ parabolæ terminatæ maximum inscribere parallelogrammum.

Constructio & demonstratio.

SIt ad ABC parabolæ diametrum BD ordinatim posita AC; oportet parabolæ ABC maximum inscribere parallelogrammum. diuisâ DB in E, vt ED dupla sit EB, ponatur per E ordinatim linea FG, & ex F & G diametri demittantur FH, GI occurrentes AC lineę in H & I. Manifestũ est ex præcedenti propositione, parallelogrammum HGIF esse id quod quæritur.



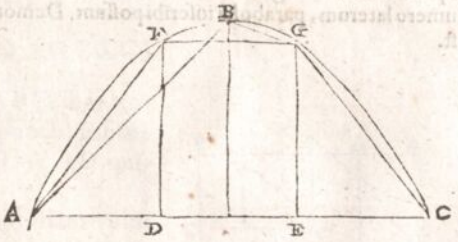
PROPOSITIO CCLXXXVII.

DAtæ parabolæ terminatæ, polygonum regulare inscribere, quod dato laterum constet numero.

Polygonum regulare voco, cuius singula latera segmenta auferunt æqualia, præter subtensam.

Constructio & demonstratio.

PArabolam datam ABC subtendat AC, oporteat ABC parabolæ, polygonum regulare inscribere, quatuor constans lateribus. secetur AC in D & E, trifariam, & ex D & E diametri ponantur DF, EG, iungantúrque AF, FG, GC; dico AFGC polygonum satisfacere petitioni. cùm enim AD, DE, EC lineæ æquales sint, segmenta quoque AF, FG, GC æqualia sunt: polygonum igitur regulare est quadrilaterum AFGC inscripsimus igitur, &c. quod erat faciendum.



PROPOSITIO CCLXXXVIII.

IIsdem positis:

Dico AFGC quadrilaterum esse maximum illorum quæ ABC parabolæ terminatæ inscribi possunt.

Demonstratio.

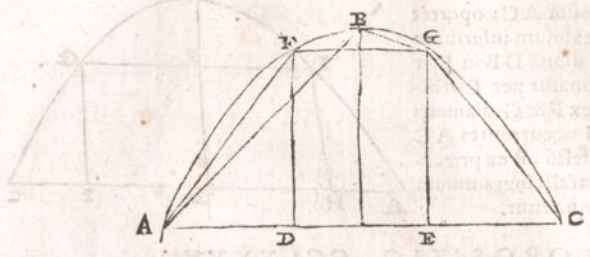
INscribatur enim aliud quoduis quadrilaterum ABGC: quod primò quidem latus CG commune habeat cum quadrilatero AFGC: quoniam igitur AF, FG æqualia sunt segmenta, [a] minora illa sunt segmentis AB, BG; reliqua igitur figura rectilinea AFGC maior est figura rectilinea ABGC; similiter ostenditur quadrilaterum quoduis aliud minus esse quadrilatero AFGC: maximum igitur illud est eorum quæ ABC parabolæ terminatæ inscribi possunt.

[a] 165. huius.

Corollarium.

QVæ de quadrilatero regulari dixi, eadem de quotuis laterum polygono regulari intelligenda sunt: eademque omnibus constructio & demonstratio conuenit.

PROPOSITIO CCLXXXIX.



DAtæ parabolæ terminatæ, polygonum inscribere maximum illorum quæ dato numero laterum inscribi possunt.

Constructio & demonstratio.

INscribendum sit parabolę, maximum quadrilaterum: inscribatur A B C parabolæ quadrilaterum regulare A F G C: dico illud esse maximum eorum quæ pari numero laterum, parabolæ inscribi possunt. Demonstratio ex præcedenti manifesta est.

P A-

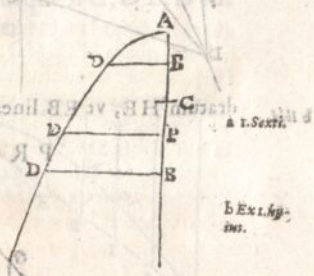
PARABOLÆ
PARS SEPTIMA

Varias exhibet geneses, quæ tum è lineis, circulis, ellipsibus, tum ex ipsa oriuntur parabola.

PROPOSITIO CCXC.

ESto AB linea vtcunque diuisa in C; ponantur autem ad AB rectæ quotcunque BD inter se æquidistantes: vt CAB rectangulis æqualia sint quadrata BD.

Dico puncta A, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est AC.



a 1. Sexti.

b Ex 1. hujus.

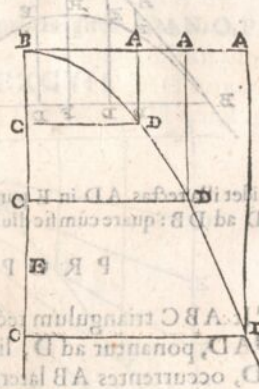
Demonstratio.

VT AB linea ad AB, sic [a] CAB rectangulum ad rectangulum CAB: sed CAB rectangulis æqualia ponuntur quadrata BD, quadratum igitur BD est ad quadratum BD, vt AB linea ad lineam AB: puncta igitur A, D, D, sunt ad [b] parabolam, cuius latus rectum AC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXCI.

ESto angulus quicunque ABC: sumptoque in BC latere, quouis puncto E. fiant proportionales EB, BA, AD; & AD quidem æquidistent lateri BC:

Dico B, D, D esse ad parabolam cuius latus rectum est BE.



Demonstratio.

DVcantur DC parallelæ AB: quoniam igitur CD æquatur AB; rectæ EB, CD, BC in continua sunt analogia; & EBC rectangulis æqualia quadrata CD: quare per præcedentem, puncta B, D, D, ad parabolam sunt, cuius latus rectum est BE.

PROPOSITIO CCXCII.

EAdem manente figura: sit iterum angulus ABC, & BC lateri quotcunque eductæ parallelæ AD: fiat autem vt AB quadratum ad quadratum AB, sic AD linea ad lineam AD.

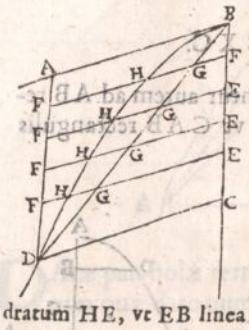
Dico B, D, D, puncta esse ad parabolam.

Demonſtratio.

POnantur iterum DC parallelæ AB. erit igitur DC quadratum ad quadratum DC, vt AD linea ad lineam AD, id eſt BC ad BC: puncta igitur B, D, D, [a] ad parabolam ſunt.

[a] 21. huius.

PROPOSITIO CCXCIII.



ESto ABCD parallelogrammi diameter BD, quam in G, ſecent lineæ quotcunque EF, parallelæ lateri AB. fiant autem proportionales FE, HE, GE.

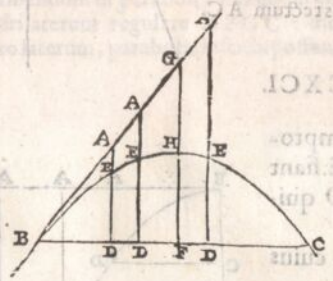
Dico B, H, H puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

QVoniam FE lineæ æquales ſunt, rectangulũ FEG ad FEG rectangulum eſt vt GE linea ad lineam GE; id eſt vt BE ad BE. ſed FEG rectangulis æqualia ponuntur quadrata HE, quadratum igitur HE eſt ad quadratum HE, vt EB linea ad lineam EB: quare B, H, H, ad [b] parabolam ſunt.

[b] Ibid.

PROPOSITIO CCXCIV.



LAtera anguli ABC, ſecent quotcunque parallelæ AD: quæ diuidantur in E, vt DE ſit ad EA, ſicut CD eſt ad DB.

Dico B, E, C, puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

DIuisâ BC bifariam in F, erigatur FG parallela AD; ſeceturque FG bifariam in H. dein per B, H, C deſcribatur parabola quæ in B contingat AB lineam, diuidet illa rectas AD in E punctis, vt DE ad EA, eam habeant [c] rationem quam CD ad DB: quare cùm ſic diuiſæ ponantur, erunt puncta BEC ad parabolam.

[c] 63. huius.

PROPOSITIO CCXCV.

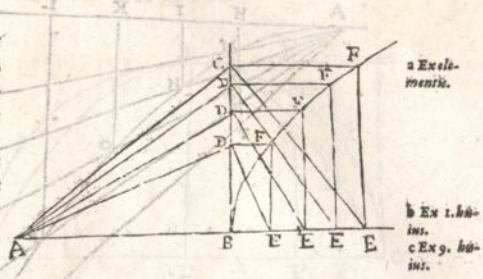
SIt ABC triangulum rectangulum; ductiſq; ex A lineis quotcunque AD, ponantur ad D, lineæ DE, DF: & DE quidem normales ad AD, occurrentes AB lateri producto in E: DF verò normales ad CB: occurrant autem DF lineis in F, rectæ EF parallelę lateri CB.

Dico B, F, F, eſſe ad parabolam cuius latus rectum eſt AB.

Demon-

Demonſtratio.

CVm enim anguli ADE ponantur recti, & DB linea normalis ad AB, rectangulis ABE [a] æqualia ſunt quadrata DB, id eſt FE: ſed ABE rectangula illã inter ſe ſeruant proportionem, quam lineæ BE; igitur vt BE ad BE, ſic EF quadratum ad quadratum EF. vnde BFF ſunt [b] ad parabolam cuius [c] latus rectum AB. Quod erat demonſtrãdum.



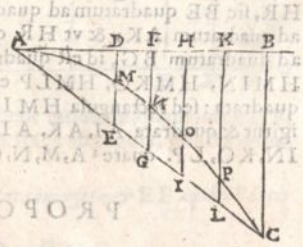
a Ex elementis.
b Ex 1. huius.
c Ex 9. huius.

PROPOSITIO CCXCVI.

SEcent ABC triangulum, rectæ quotcunque DE, FG, HI, KL: lateri BC parallelæ; fiant autem continuæ proportionales BC, KL, KP: item BC, HI, HO: item BC, FG, FN: denique BC, DE, DM. Dico puncta A, M, N, O, P, C, eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

QVoniam BC linea communis prima eſt, ſeriebus continuarum BC, KL, KP: BC, HI, HO: BC, FG, FN, &c. rectangula BCKP, BCHO, BCFN, BCDM illam ſortiuntur rationem quam habent lineæ KP, HO, FN, DM. igitur & quadrata KL, HI, FG, DE eandem quoque ſeruant proportionem: ſed vt KL quadratum, ad quadratum HI, ſic KA quadratum eſt ad quadratum HA, & vt HI quadratum ad quadratum FG, ſic HA quadratum eſt ad quadratum FA, &c. igitur & quadrata AK, AH, AF, AD illam habent rationem quam lineæ HP, HO, FN, DM. puncta igitur A, M, N, O, P ad [d] parabolam ſunt.

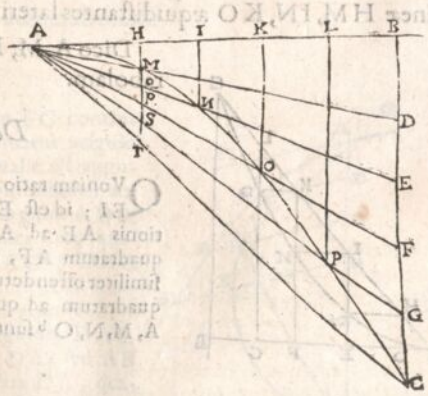


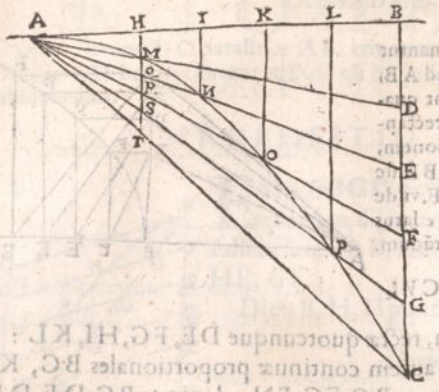
d 191. huius.

PROPOSITIO CCXCVII.

ESto ABC trianguli latus BC vtcunque diuiſum in punctis D, E, F, G, iunctiſq; AD, AE, AF, AG, diuidatur latus AB in punctis H, I, K, L ſicut BC eſt diuiſum in D, E, &c. demittantur autem ex H, I, K, L rectæ HM, IN, KO, LP parallelæ lateri BC: & HM quidem occurrat AD in M; IN verò ipſi AE in N: dein KO, rectæ FA in O, & LP, ipſi AG in P.

Dico A, M, N, O, P, C eſſe ad parabolam.





Demonſtratio.

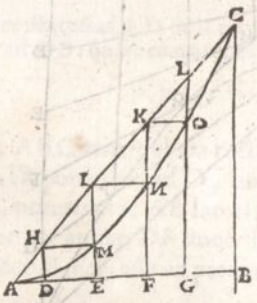
PRoducta HM, occurrat lineis AD, AE, AF, AG in Q, R, S, T, quoniam eſt AH ad AI, vt BD ad BE, ex hypotheſi; ſit autem vt BD ad BE, ſic HM ad HQ, HM eſt ad HQ, vt AH ad AI, id eſt vt HQ ad IN: proportionales igitur ſunt HM, HQ, IN. ſimiliter oſtenduntur proportionales HM, HR, KO: item HM, HS, LP: denique HM, HT, BC: quare rectangula HMIN, HMKO, HMLP, &c. illam inter ſe proportionem habent, quam HQ, HR, HS quadrata: ſed eſt vt HQ quadratum ad quadratum HR, ſic BE quadratum ad quadratum BF, id eſt per hypotheſim AI quadratum ad quadratum AK, & vt HR quadratum ad quadratum HS, ſic quadratum BF ad quadratum BG, id eſt quadratum AK ad quadratum AL: igitur & rectangula HMIN, HMKO, HMLP eam inter ſe ſeruant rationem quam AI, AK, AL quadrata: ſed rectangula HMIN, HMKO, HMLP ſunt vt lineę IN, KO, LP; igitur & quadrata AI, AK, AL eam inter ſe habent proportionem, quam lineæ IN, KO, LP. quare [a] A, M, N, O, P ſunt ad parabolam. Quod erat demonſtrandũ.

a *Ibid.*

PROPOSITIO CCXCVIII.

ESto ABC trianguli latus AB diuiſum in D, E, F, G punctis vt ratio AD ad AE, duplicata ſit rationis AE ad AF; & illa rurſum duplicata ſit rationis AF ad AG, &c. dein ex D, E, F, G punctis rectæ erigantur DH, EI, FK, GL parallelæ lateri CB: quas in M, N, O ſecent lineæ HM, IN, KO æquidiſtantes lateri AB.

Dico A, M, N, O, C puncta eſſe ad parabolam.



Demonſtratio.

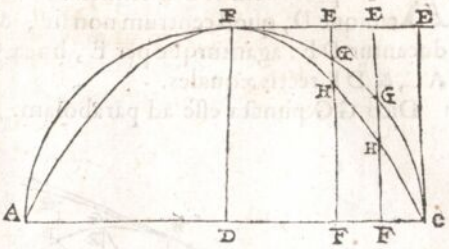
QVoniam ratio AD ad AE, id eſt DH ad EI; id eſt EM ad FN, duplicata eſt rationis AE ad AF, quadratum AE eſt ad quadratum AF, vt EM linea ad lineam FN. ſimiliter oſtendetur eſſe vt FN ad GO, ſic AF quadratum ad quadratum AG. puncta igitur A, M, N, O [b] ſunt ad parabolam.

b *Ibid.*

PRO-

PROPOSITIO CCXCIX.

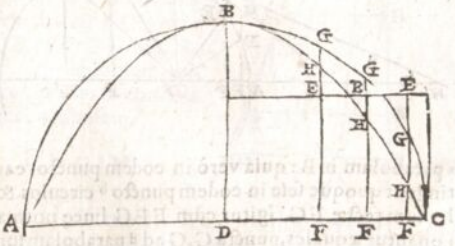
SEmicirculum ABC secēt orthogonaliter in D diametri duæ AC, BD. ponatur autem EE linea parallela AC: dein sumptis in AC punctis FF, erigantur normales FE, occurrentes EE lineæ in E, semicirculo in GG. fiant autem proportionales EF, GF, HF.



Dico H, H, C puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

CVm enim proportionales sint EF, GF, HF, erit vt quadratum FG ad quadratum FG, sic EFH rectangulum ad rectangulum EFH: sed EFH rectangula illam inter se habent rationem, quam lineæ HF, igitur & HF lineæ sunt vt quadrata GF: id est vt AFC rectangula, puncta igitur H, H, C ad parabolam sunt.



Idem continget in ellipsi, si AC, BD *diametri ponantur coniugatæ, &* EF *æquidistantes ipsi* BD.

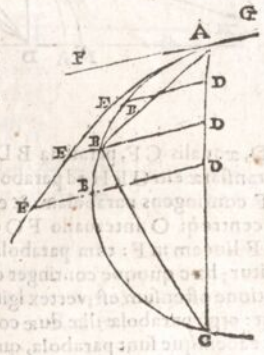
PROPOSITIO CCC.

SEgmentum circuli ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque DE, parallelæ contingenti FG per A ductæ: fiat autem vt AB ad AB, sic DE ad DE.

Dico A, E, E puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

IVngantur AB, BC: quoniam FG contingens est, angulus CAG æquatur angulo ABC; sed angulo CAG æqualis est angulus ADB; quia FG, DE æquidistant; angulo igitur ABC æqualis est angulus ADB; & triangula ABC, ABD, similia sunt. quare vt AD ad AB, sic AB ad AC; & DAC rectangulo æquale est quadratum AB. quadratum igitur AB est ad quadratum AB, vt DAC rectangulum ad rectangulum DAC, id est vt DA linea ad lineam DA: sed AB quadratis æqualia sunt quadrata DE, quadrata igitur DE eam habent rationem, quam obtinent lineæ DA.[a] quare A, E, E puncta ad parabolam sunt.



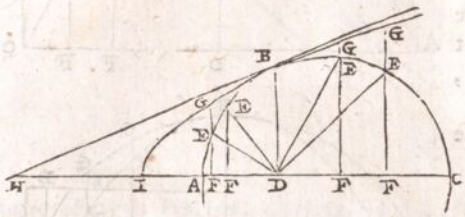
[a] Ex. hoc.

PRO-

PROPOSITIO CCCI.

ASsumptum sit in A B C semicirculi diametro A C, punctum quodcunque D, quod centrum non sit, & ex D ad peripheriam, rectæ ducantur D E: aganturq́ue per E, lineæ G F, normales ad diametrum A C, & D E rectis æquales.

Dico G G puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

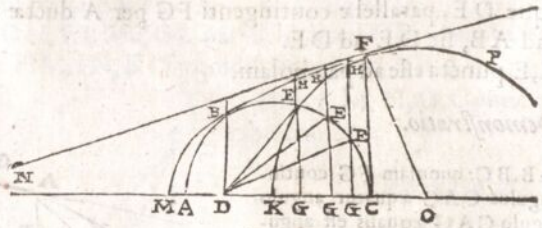
ERigatur ex D linea D B normalis ad diametrum A C: actaq́ue per B contingente, quę A C, diametro occurrat in H, secetur H D bifariam in I: & per I & B, describatur parabola habens I C axem, occurrensq́ue rectis F E in G. Quoniam D B, ordinatim posita est ad axem I C, & D I, I H lineæ æquales, continget H B linea [a] parabolam in B: quia verò in eodem puncto, eadem recta circulum contingit, contingent quoque sese in eodem puncto [b] circulus & parabola. quare D E lineis [c] æquales sunt rectæ F G. Igitur cùm F E G lineę normales ad diametrum A C, rectis D E, ponantur æquales, puncta G, G ad [d] parabolam sunt: cuius apicem assignat punctum in quo H D diuiditur bifariam.

a Ex 17. huius.
b Ex 131. huius.
c 134. huius.
d Ex conuersa 134. huius.

PROPOSITIO CCCII.

PArabolam priori propositione productam in infinitum eadem praxi extendere.

Constructio & demonstratio.



FIat C D, æqualis C F, parallela B D: erit F ad parabolam M B H, cùm omnes D E, translatæ [e] in G E H ad parabolam sint, factâ deinde C M, æquali M N, [f] ponatur N F contingens parabolam, & erigatur F O perpendicularis ad N F contingentem; centroq́; O interuallo F O circulus describatur; continget ille [g] parabolam, & N F lineam in F: tum parabola describatur, [h] quæ ex descripto iam circulo K F P, oritur; hæc quoque continget circulum K F P & N F, lineam in F, vt in priori propositione ostensum est; vertex igitur eiusdem est in M, cùm M C, C N lineæ æquales sint: ergo parabolæ illæ duæ communem habent verticem M, & punctum F; vna igitur eademq́ue sunt parabola, quæ per vtrumque circulum est descripta: ergo circulus K F P parabolam priori praxi descriptam producit: atque ita eadem parabola eâdem praxi in infinitum continuabitur. Quod erat propositum.

e 301. huius.
f Ex 17. huius.
g 131. huius.
h Ex 301. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCCIII.

ESto circuli ABC diameter AC, vtcunque producta in D, ex quo in circulum immittantur lineæ DB; aganturq; ad AC per B normales FE proportionales ipsis DB. quarum termini sint F F.

Dico FF puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

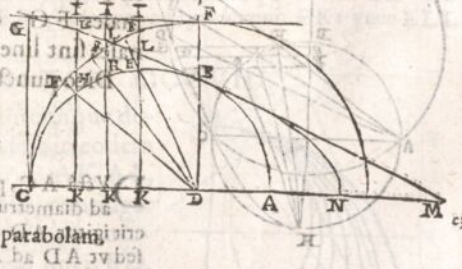
DVcatur ex D linea DG, contingens circulum in G, & ex G, ponatur GH normalis ad AC, iunganturque HB, igitur DB [a] ad DB est vt BH ad BH. sed BH translatæ in FE, producant [b] parabolam, igitur & ipsis DB id est BH, proportionales in eundem locum translatæ, producunt quoque parabolam.

[a] Ex 35. & 36. *lib. nostri de circulo.*
[b] 301. *huius.*

PROPOSITIO CCCIV.

ASsumptum sit in ABC circuli diametro AC, punctum quodcunque D, extra centrum. radio autem DC, quadrans describatur circuli CEF, perficiaturque quadratum FDC. tum ex D rectæ ducantur quotcunque DE, occurrentes circulo ABC in H, & CEF quadranti in E: & per H agantur normales IK ad AC, fiantq; HE lineis, æquales LI.

Dico L,L puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

QVoniam FDC quadratum est, & D, centrum circuli CEF, rectæ DE, lineis IK æquales sunt: ponuntur autem ipsis HE, æquales LI, reliquæ igitur LK, reliquis HD æquales sunt. sed HD translatæ [c] in KL ad parabolam sunt: igitur L,L puncta iam quoque sunt ad parabolam.

[c] 301. *huius.*

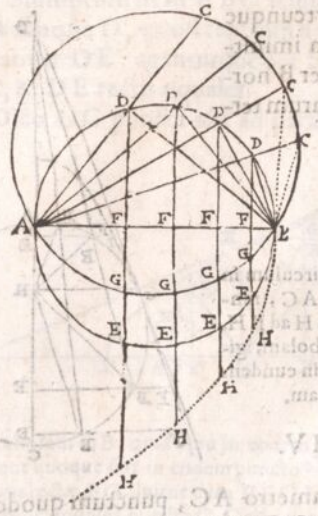
Corollarium.

POrro vertex huius parabolæ sic inuenitur. erecta ex D normali DB, per B agatur contingens BM: dein MD diuidatur bifariam in N: patet N [d] esse verti-

[d] Ex 17. *huius.*

cem parabolæ.

PROPOSITIO CCCV.



INterſecent ſeſe in A & B, circuli duo quiuis ABC, ADB: ductiſque ex A lineis, ADC, demittantur ex D rectæ DEF orthogonaliter ſecantes AB diametrum in FF. fiat autem vt DC ad DC, ſic FH ad FH.

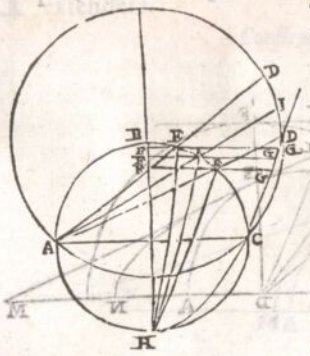
Dico B,H,H puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

IVngantur DB,CB: erunt igitur triangula DCB ſimilia: quare vt DC ad DC, ſic DB ad DB; ſed DB tranſlatæ in [a] FH producunt parabolam, igitur & DC translatæ in FH, ſectionem producunt parabolicam.

a 300. huius.

PROPOSITIO CCCVI.



OCcurrant ſibi inuicem circuli duo ABC, ACD in A & C, & ABC quidem circulus tranſeat per centrum circuli ACD, ducanturq; ex A rectæ AED, occurrentes circulo ABC in E, & ACD in D: ponantur autem per EE ad HB, normales FG, quæ æquales vel proportionales ſint lineis AD.

Dico puncta G,G eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

DVctâ AC, ponatur BH diameter, normalis ad diametrum AC, iunganturq; puncta HE. erit igitur AD ad AD lineam, [b] vt HE ad HE, ſed vt AD ad AD, ſic FG eſt ad FG per hypotheſim; igitur & FG eſt ad FG, vt HE ad HE; ſed HE tranſlatæ in FEG producunt [c] parabolam, igitur & AD tranſlatæ in FEG parabolam producunt.

b 33. De circulo.

c 300. huius.

Corollarium.

APex verò inuentæ parabolæ GG, eſt punctum H: nam FG quadratum eſt ad quadratum FG vt HE quadratum, ad quadratum HE, id eſt vt FH linea ad lineam FH. vnde H, vertex eſt parabolæ.

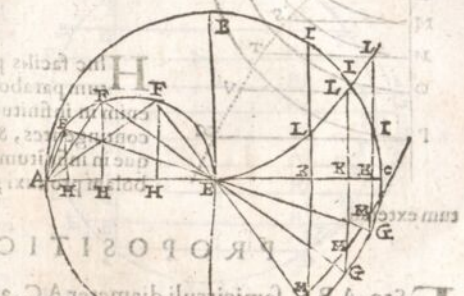
PRO-

PROPOSITIO CCCVII.

Circulum ABC, orthogonaliter in E diuidant diametri duæ AC, BD: descriptoq; super AE vt diametro, semicirculo AFE, agantur per E rectæ quotcunque FG, & ex F & G, lineæ demittantur FH, GI normales ad diametrum AC, quam GI secent in K. fiat autem vt AH ad AH, sic KM ad KM, incipiendo ex parte versus C, item vt EH ad FH, sic KL ad KL incipiendo ex parte E.

Dico puncta D,M,M, item E,L,L esse ad parabolas.

Demonstratio.

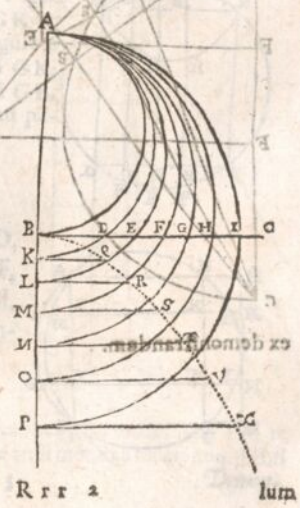


IVngantur AF: Quoniam FH, GK æquidistant, triangula FHE, EKG sunt similia; est autem & FHE triangulum simile triangulo AFE; igitur & AFE, EKG triangula similia sunt. quia verò AE æqualis est EG, triangula AFE æqualia sunt triangulis EGK, & AF, FE latera, æqualia lateribus GK, KE; vnde vt AF quadratum ad quadratum AF, id est GK quadratum ad quadratum GK, sic AH linea ad lineam AH, id est per hypothesim KM ad KM. sed est vt GK quadratum ad quadratum GK, sic AKC rectangulum ad rectangulum AKC; igitur vt AKC rectangulum ad rectangulum AKC, sic MK linea est ad lineam MK: quare D,M,M puncta ad parabolam sunt. Quod erat primum. [a] *Ex conuersa 47. huius.*

Rursum cùm sit vt EH ad EH, sic LK ad LK, sit autem vt EH ad EH, sic EF quadratum ad quadratum EF, id est EK quadratum ad quadratum EK; erit & LK linea ad lineam LK, vt EK quadratum ad quadratum EK: vnde ELL puncta sunt ad parabolam. [b] *291. huius*

PROPOSITIO CCCVIII.

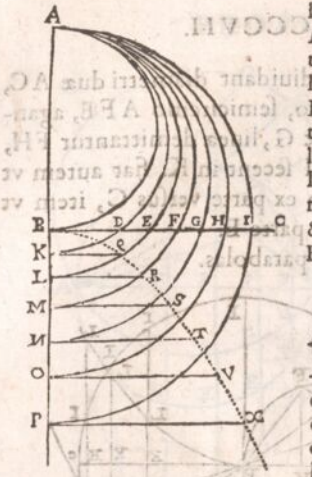
SInt ad AB diametralem quotcunque descripti circuli contingentes sese in eodem puncto A, quorum diametri AB, AK, AL, AM, &c. ductaq; ex B linea BC, contingat circulum minimum in B, reliquos autem secet in D, E, F, G, H. fiant autem lineis BD, BE, BF, BG, &c. æquales rectæ KQ, LR, MS, NT, &c. quæ circulos contingant in LMNO, &c.



Dico B, Q, R, S, T, V puncta esse ad parabolam cuius AB, latus rectum.

Demonstratio.

QVoniam BD normalis est ad communem diametralem AB, quadratum BD, & ad quadratum BE vt ABK rectangulum ad rectangu-



lum ABL, id est (quia circuli contingunt sese in A) vt BK linea est ad lineam BL. igitur & quadratum KQ est ad quadratum LR, vt BK linea ad lineam LB; (cùm LR, KQ lineæ æquales sint BD, BE) eodem modo ostenditur MS quadratum esse ad quadratum NT, vt BM linea est ad lineam BN, & sic de cæteris: puncta igitur B, Q, R, S, T, &c. sunt ad parabolam. AB ergo latus rectum esse patet, cum semper quadrata DK, RK, &c. æqualia sint rectangulis super KB, BA, LB, BA, &c.

Corollarium.

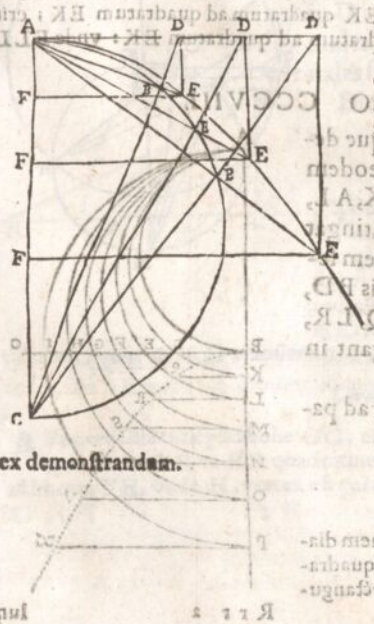
HInc facilis patet praxis, producendi in infinitum parabolam, priori methodo ortam: cùm enim in infinitum multiplicari possint circuli illi contingentes, & BC lineæ protendi, poterit quoque in infinitum continuari praxis qua priùs parabolam produxi; adeoq; eadem poterit in infinitum extendi.

PROPOSITIO CCCIX.

ESto ABC semicirculi diameter AC, actaq; per A contingente AD, ducantur ex C lineæ CBD, occurrentes contingenti in D, semicirculo in B: dein ex D normales demittantur DE quas in E secent lineæ B, AE.

Dico puncta A, E, E esse ad parabolam cuius latus rectum AC.

Demonstratio.



POnantur enim EF æquidistantes AD. quoniam AD contingens transit per A extremum diametri AC, angulus CAD rectus est: sed & angulus quoque ABC in semicirculo rectus est, triangula igitur ABD, ADC similia sunt: quia verò ED, normalis est ad AD, & DB normalis ad AE, triangula ADB ad ADE, similia quoque sunt. sed ADB simile est triangulo CAD, triangula igitur ADE, ADC similia quoque sunt. quare ED ad DA, vt DA ad AC: adeóque quadrato AD id est FE æquale rectangulum EDAC id est FAC. vnde FE quadratum est ad quadratum FE vt FAC rectangulum ad rectangulum FAC, id est vt FA linea ad lineam FA. puncta igitur A, E, E sunt ad parabolam. AC verò latus rectum esse patet ex demonstrandum.

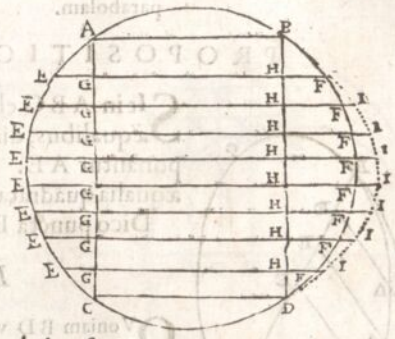
PRO-

PROPOSITIO CCCX.

ESto circulo ABC inscriptum rectangulum ABCD, & vni laterum AB, ductæ parallelæ EGHF: fiant autem GH, HF, FI proportionales.

Dico puncta B,I,D esse ad parabolam.

Demonstratio.



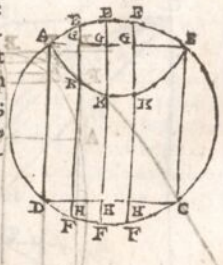
QVoniam est vt GH ad HF, sic HF ad FI, erit componendo inuertendo vt GF, id est EH, ad GH, sic HI ad HF; rectangulo igitur EGF, id est EHF, æquale est rectangulum GHI: & GHI rectangulum ad rectangulum GHI, vt EHF rectangulum ad rectangulum EHF, id est BHD ad BHD, rectangulum; sed GHI rectangulum est ad rectangulum GHI vt HI linea ad lineam HI; igitur vt BHD rectangulum ad rectangulum BHD, sic HI linea ad lineam HI. puncta igitur BID ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXI.

INscriptum sit circulo ABC rectangulum ABCD, ductisque vnilaterum DA parallelis EGHF. fiant EGF rectangulis æqualia rectangula HGK.

Dico puncta AKB esse ad parabolam.

Demonstratio.



VT EGF rectangulum est ad rectangulum EGF, sic AGB rectangulum est ad rectangulum AGB: igitur & HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt AGB ad AGB, rectangulum. sed HGK rectangulum est ad rectangulum HGK vt GK linea ad lineam GK; igitur & AGB rectangulum est ad rectangulum AGB, vt GK linea ad lineam GK; puncta igitur A,K,B ad parabolam sunt. Quod erat ostendendum.

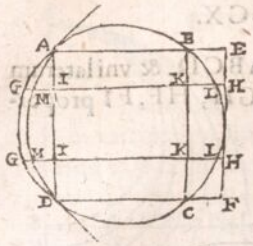
PROPOSITIO CCCXII.

INscriptum sit iterum rectangulum ABCD, circulo ABC, ductaq; lateri BC parallela EF, quæ circulum contingat, ponantur rectæ GH, æquidistantes lateri AB: hantque GIL, rectangulis, æqualia rectangula HIM.

Dico A,M,D puncta esse ad parabolam.



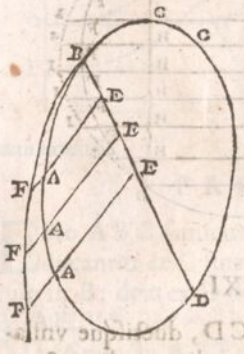
Demonſtratio.



CVm æqualia ſint rectangula HIM, rectangulis GIL, HIM rectangulum ad HIM rectangulum eſt vt GIL ad GIL, id eſt AID rectangulum ad rectangulum AID: ſed HIM rectangulum eſt ad rectangulum HIM, vt IM linea ad lineam IM, igitur vt AID rectangulum ad rectangulum AID, ſic IM linea ad lineam IM. puncta igitur M, M a ſunt ad parabolam.

a Ex 47. huius.

PROPOSITIO CCCXIII.



SIt in ABC ellipſi vna ex diametris coniugatis æqualibus, diameter BD, ad quam ordinatim ponantur AE. fiant autem quadratis AE, EB æqualia quadrata EF.

Dico puncta B,F,F eſſe ad parabolam.

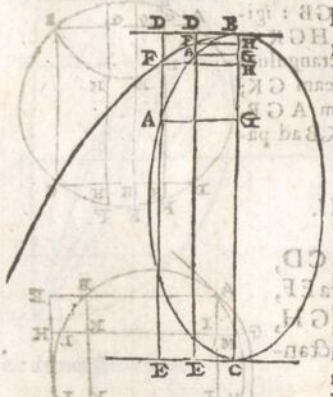
Demonſtratio.

QVoniam BD vna eſt è diametris coniugatis æqualibus, quadrata AE æqualia ſunt b rectangulis BED: addito igitur quadrato BE, quadrata duo AE, EB æqualia ſunt rectangulis EBD. igitur FE quadratum eſt ad quadratum FE, vt EBD rectangulum ad rectangulum EBD, id eſt vt EB linea ad lineam EB. igitur B,F,F puncta ſunt ad parabolam.

b 176. De ellipſi.

Circulo quoque conuenit hæc propoſitio, eademq. eſt demonſtratio.

PROPOSITIO CCCXIV.



ESto ABC ellipſeos diameter BC, quam in B & C, contingant rectæ DB, EC: poſitiſque DE parallelis diametro BC. fiant DAE rectangulis æqualia rectangula EDF.

Dico B,F,F puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

DVcantur AG, FH parallelæ DB, patet AG ordinatim eſſe poſitas ad BC. igitur DAE rectangulum eſt ad rectangulum DAE, id eſt BGC ad BGC, vt AG, quadratum ad quadratum AG, id eſt FH quadratum ad quadratum FH: igitur & FDE rectangulum eſt ad rectangulum FDE, id eſt HBC ad HBC rectangulum, vt FH quadratum ad quadratum FH. ſed HBC rectangulum eſt ad rectangulum HBC, vt HB linea ad lineam HB, igitur vt FH quadratum ad quadratum FH, ſic HB linea ad lineam HB. puncta igitur B,F,F puncta ad eandem ſunt parabolam.

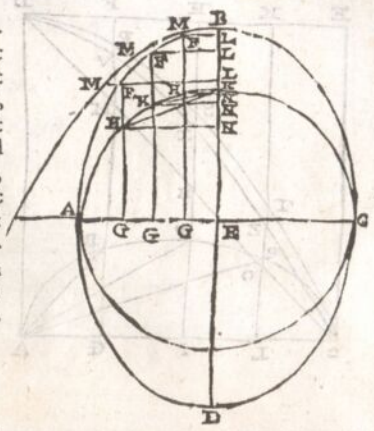
PRO-

PROPOSITIO CCCXV.

SInt ABC ellipſeos axes AC, BD; & ſuper AC minore axe, vt diametro, deſcriptus ſit circulus AKC, quem in H ſecent lineæ FG, parallelæ axi BD: iunctiſque punctis HK, ponantur FL normales ad axem BD, fiantque F, L, M æquales HK.

Dico B, M, M puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.



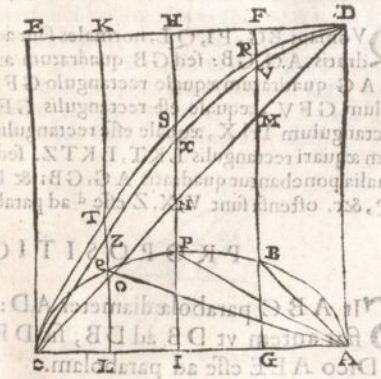
POnantur HN, parallelæ FL: & E centrum, ſit commune circulo & ellipſi; erit igitur vt BE ad KE, ſic FG ad HG, id eſt LE ad NE, & permutando vt BE ad LE, ſic KE ad NE; quare & KE ad NK, eſt vt BE ad LB, & permutando vt BE ad KE, ſic BL ad KN, & BL eſt ad BL, vt KN ad KN: ſed eſt vt KN ad KN, ſic HK quadratum ad quadratum HK, id eſt per hypotheſim vt ML quadratum ad quadratum ML; igitur vt BL linea ad lineam BL, ſic ML quadratum ad quadratum ML. quare B, M, M puncta ſunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXVI.

SVper ABC ellipſeos axe AC quadratum conſtituatur AE, cuius diameter CD occurrat rectis FG, HI, LK lateri AB parallelis, in M, N, O. fiat autem AG quadrato, æquale rectangulum GFR, & AI quadrato æquale rectangulum SHI, dein & quadrato AL æquale rectangulum TKL.

Dico D, R, S, T puncta eſſe ad parabolam.

Aſſumitur in propoſitione ellipſis, ob ſequentes propoſitiones.



Demonſtratio.

REctangulum RFG eſt ad rectangulum SHI vt RF ad SH; & SHI rectangulum eſt ad rectangulum TKL vt SH linea ad lineam TK: igitur & quadrata AG, AI, AL, id eſt DF, DH, DK, eam inter ſe continent rationem, quam ſectæ RF, SH, TK. quare D, R, S, T puncta * ad parabolam ſunt.

* 291. huius

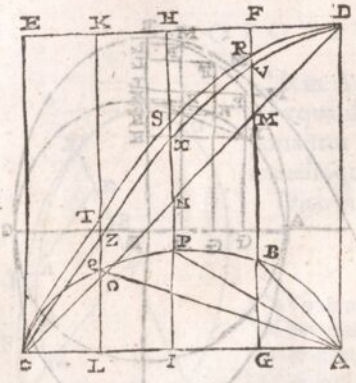
PRO-

PROPOSITIO CCCXVII.

Iisdem positis: fiant BG, PI, QL quadratis, æqualia rectangula GFRV, IHSX, KLTZ.

Dico puncta D, X, V, Z. esse ad parabolam.

Demonstratio.



a 4. De ellipsi.

b 47. huius.

c Ex 45. huius.

REctangulum GFRV ad rectangulum HISX est vt RV linea ad lineam SX: igitur & quadratum GB est ad quadratum PI, vt RV linea ad lineam SX: sed vt BG quadratum ad quadratum PI, sic AGC rectangulum est ad [a] rectangulum AIC, igitur vt RV ad SX lineam, sic AGC rectangulum ad rectangulum AIC, id est DMC rectangulum ad rectangulum DNC, id est MR [b] lineæ ad lineam SN, quia RST ostensa est parabola: igitur & MV est ad XN, vt DMC rectangulum ad rectangulum DNC. similiter ostendam esse XN ad ZO, vt DNC rectangulum ad rectangulum DOC; puncta [c] igitur V, X, Z ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXVIII.

Iisdem positis: iungantur AB, AP, AQ: fiantq; rectangula GFV, IHX, LKZ æqualia quadratis AB, AP, AQ.

Dico V, X, Z puncta rursum esse ad parabolam.

Demonstratio.

QVoniam BG, PI, QL, normales sunt ad AC, quadratum AB æquale est quadratis AG, GB: sed GB quadratum æquale positum est rectangulo GFRV, & AG quadratum æquale rectangulo GFR: igitur quadratum AB id est rectangulum GFV, æquale est rectangulis GFR, GFRV: similiter ostenditur rectangulum IHX, æquale esse rectangulis IHS, IHSX; & LKZ rectangulum æquari rectangulis LKT, LKTZ. sed cùm GFR, GFRV rectangula æqualia ponebantur quadratis AG, GB; & IHS, IHSX, æqualia quadratis AI, IP, &c. ostensa sunt V, X, Z esse [d] ad parabolam; igitur & iam ad parabolam sunt.

d 316. & 317. huius.

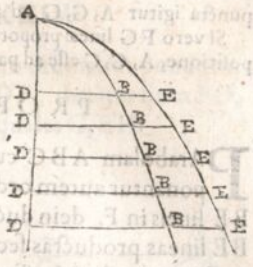
PROPOSITIO CCCXIX.

SIt ABC parabolæ diameter AD: & ordinatim ad illam positæ DB: fiat autem vt DB ad DB, sic DE ad DE.

Dico AEE esse ad parabolam.

Demon-

Demonſtratio.



ESt enim ED quadratum ad quadratum ED vt DB quadratum ad quadratum DB ex hypotheſi, id eſt vt AD linea ad lineam AD; puncta igitur E, E ad [a] parabolam ſunt.

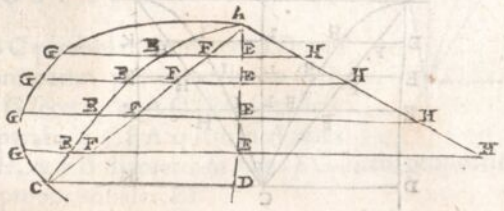
a *Schol. 1. huius.*

PROPOSITIO CCCXX.

SIt ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim poſitæ CD, BE: ductaq; linea AC quæ BE rectis occurrat in FF, fiat vt FB ad FB, ſic BG ad BG.

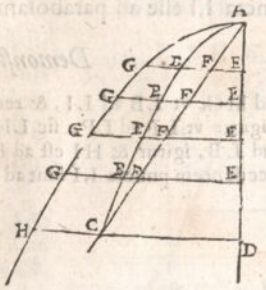
Dico G, G puncta eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.



Fiat vt BF ad BG, ſic FE ad EH: quoniam eſt vt FB ad FB, ita BG ad BG, erit permutando vt FB ad BG, ſic FB ad BG: ſed per conſtruct. FE eſt ad EH, vt FB ad BG, ergo FE eſt ad EH, vt FE ad EH; igitur cùm puncta EE in directum ſint, puncta quoque HH in directum ſunt, vt patet ex elementis: deinde quia eſt vt FB ad BG, ſic FE ad EH, erit componendo, conuertendo GF ad BF, vt FH ad FE, & permutando GF ad FH, vt BF ad EF, & componendo GH ad FH, vt BE ad FE, iteruméque permutando GH ad BE, vt FH ad FE, ſed cùm antè oſtenderim eſſe FE ad EH, vt FE eſt ad EH; erit quoque vt FH ad FE, ſic FH ad FE, ergo vt GH ad BE, ſic GH ad BE, & permutando GH ad GH, vt BE ad BE: igitur & quadratum GH ad GH quadratum eſt, vt quadratum BE ad quadratum BE, hoc eſt vt EA ad EA, hoc eſt, vt AH ad AH, puncta igitur GG ad parabolam ſunt, cuius diameter AH.

PROPOSITIO CCCXXI.



POnantur eadem quæ priùs, & fiant FE lineis æquales rectæ BG.

Dico iterum A, G, G eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

CVm enim FE lineis æquales ponantur GB, additis communibus BF, rectæ FG æquales ſunt FE, & FG quadrata æqualia quadratis BE: igitur quadratum FG ad quadratum FG eſt vt BE quadratum ad quadratum BE, id eſt vt AE linea ad lineam AE, id eſt AF ad AF.

puncta igitur A, G, G ad parabolam sunt, cuius diameter AFC.

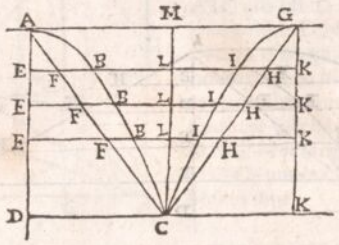
Si verò FG lineæ proportionales sint ipsis FE, ostenditur vt in præcedenti propositione, A, G, G esse ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXII.

PArabolam ABC cuius diameter AD, contingat in D linea AG: ponantur autem ordinatim lineæ BE, CD, iunctaque AC occurrat BE lineis in F. dein ductâ quacunq; CG ad AG, contingentem, quæ BE lineas productas secet in HH: fiat vt FB ad FB: sic HI ad HI.

Dico puncta I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.



Flant HI ad HK, vt BF ad FE: patet ex elementis GKK esse in directum: erit igitur HK ad HK, vt FE ad FE: & cùm sit IH ad HK, vt BF ad FE, erit componendo vt BE ad FE, sic IK ad HK, & vt BE ad BE, sic IK ad IK: vnde quadratum IK est ad quadratum IK, vt BE quadratum est ad quadratum BE, id est vt AE linea ad lineam AE, id est vt GK ad GK. puncta igitur G,I,I sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXIII.

EAdem manente figura: perficiatur parallelogrammum ADC, & MC, latus occurrat lineis EB in L: fiat autem vt LB ad LB, sic LI ad LI.

Dico puncta I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.

Flat AM ad MG, vt LB ad LI, & recta ducatur GC occurrens BI, lineis in HH. erit igitur vt LF ad LF, sic LH ad LH. sed ex hypothesi est LI ad LI, vt LB ad LB, igitur & HI est ad HI, residuum vt FB ad FB, residuum. vnde per præcedentem puncta I,I sunt ad parabolam.

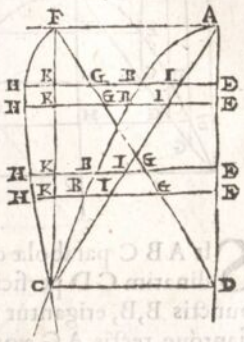
PRO-

PROPOSITIO CCCXXIV.

ESto A B C parabolæ diameter A D, ad quam ordinatim ponantur C D, B E: perfectoque parallelogrammo D F, ducatur linea F D, secans E B rectas in G G: fiant autem G E lineis æquales G, B H.

Dico H H puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



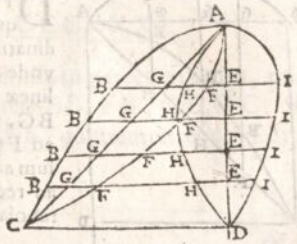
IVngantur A C. quoniam D F parallelogrammum est cuius diametri A C, F D, & K E lineæ æquidistant lateri A F, lineis E G æquales sunt rectæ K I; igitur & H B lineis æquales sunt K I. demptis igitur communibus K B, manent I B, H K lineæ æquales: puncta igitur H H [a] ad parabolam sunt. a 320. huius.

PROPOSITIO CCCXXV.

ESto A B C parabolæ diameter A D, ad quam ordinatim ponantur lineæ C D, B E, quas in G secet recta A C. descriptâ dein per A & C, parabolâ C F A quam in A recta contingat A D, & F B diameter sit, fiant F G lineis, proportionales E H, & rectis B G proportionales E I.

Dico tam H,H puncta quàm I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.

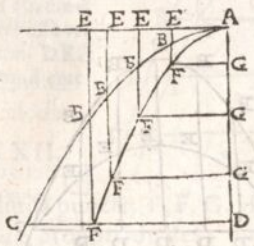


ESt enim vt A G C rectangulum ad rectangulum A G C, sic A E D rectangulum ad rectangulum A E D; sed vt A G C rectangulum est ad rectangulum A G C, sic F G linea est ad [b] lineam F G, id est E H linea ad lineam E H: igitur & H E est ad H E, vt A E D rectangulum ad rectangulum A E D: similiter ostenditur, esse E I ad E I, vt A E D rectangulum ad rectangulum A E D; puncta igitur H,H vti & I,I, [c] puncta ad parabolas sunt. b 47. huius. c 320. huius.

PROPOSITIO CCCXXVI.

PArabolam A B C contingat in A linea A E: ponatur autem sectionis diameter A D, & illi parallelæ E B: dein rectis E B proportionales fiant lineæ B F.

Dico A,F,F puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

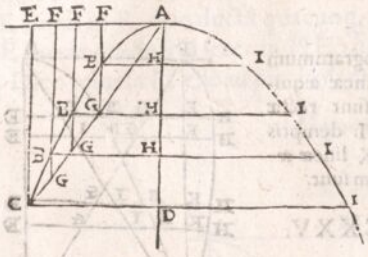
DVcantur F G parallelæ contingenti A E: cùm igitur sit vt E B ad E B, sic B F ad B F, erit quoque E F ad E F, vt E B ad E B. sed ratio E B ad E B, duplicata est rationis E A ad E A, id est F G ad F G; igitur & ratio E F ad E F, id est A G ad A G, duplicata est rationis G F ad G F: igitur A,F,F puncta sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD: actaq; per A contingente AE, demittantur diametri FB occurrentes parabolæ in B, & AC in G: ponantur autem ordinatim lineæ HB: fiatq; vt FG ad FG, sic B, HI ad B, HI.

Dico puncta A,I,I esse ad parabolam.

Demonstratio.



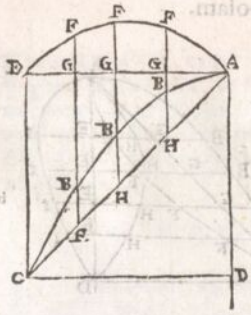
VT FG ad FG, sic AF est ad AF, id est HB ad HB: igitur & HI est ad HI, vt BH ad BH: & HI quadratum ad quadratum HI, vt HB quadratum ad quadratum HB id est vt AH linea ad lineam AH: puncta igitur A,I,I ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXXVIII.

SIt ABC parabolæ diameter AD æqualis lateri recto: ductaque ordinatim CD perficiatur quadratum CA: sumptisque in peripheria punctis B,B, erigantur ex B diametri BF occurrentes AE lineæ in G: fiantque rectis AG æquales lineæ BF.

Dico A,F,E puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



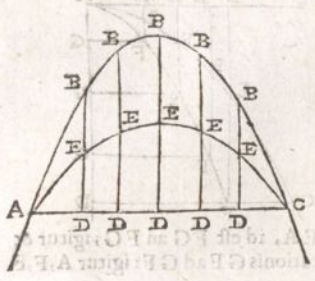
a 47. huius.

DVcatur recta AC occurrens FB lineis in HH: quoniam AD lateri recto æqualis est, & CD ordinatim posita ad AD, rectæ AD, CD, æquales sunt: vnde & rectæ AG, GH quoque æquales sunt: & HG lineæ æquales ipsis FB: demptis igitur communibus BG, manent HB, FG lineæ æquales. quare FG est ad FG, vt BH ad BH; id est vt AHC [a] rectangulum ad rectangulum AHC, id est AGE rectangulum ad rectangulum AGE. puncta igitur A,F,E ad parabolam sunt.

PROPOSITIO CCCXXIX.

PArabolam ABC subtendat recta AC, quam in D secent quotcunque diametri BD: fiant autem BD lineis proportionales DE.

Dico puncta A,E,C esse ad parabolam.



b Ibid.

c Ex conuersa 47. huius.

Demonstratio.

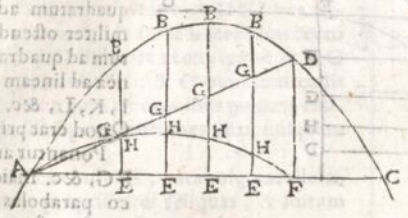
VT BD ad BD, sic ED est ad ED, sed est vt BD ad BD, sic ADC [b] rectangulum ad rectangulum ADC: igitur & ED est ad ED, vt ADC rectangulum ad rectangulum ADC: quare AEC puncta [c] ad parabolam sunt.

PRO-

PROPOSITIO CCCXXX.

PArabolam ABC subtendant rectæ AC, AD, demissaque ex D diametro FD, quæ AC lineæ occurrat in F, ducantur quotuis rectæ BE æquidistantes DF secantes AD lineam in GG: fiantque rectis BG proportionales lineæ EH.

Dico puncta A,H,F esse ad parabolam.



Demonstratio.

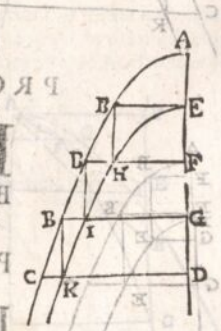
VT AGD rectangulũ est ad AGD rectangulum, sic BG linea ad lineam BG: sed vt BG ad BG, sic EH ponitur ad lineam EH, igitur & EH est ad EH, vt AGD rectangulum ad rectangulum AGD, id est AEF rectangulum ad rectangulum AEF. quare A,H,F puncta sunt ad parabolam. a 47. huius

b Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXXXI.

ESto ABC parabolæ diameter AD, diuisa in partes æquales, punctis E, F, G, D; ductisq; ordinatim lineis EB, FB, GB, DC, demittantur ex B punctis diametri BH, BI, BK, conuenientes cum ordinatim positis in H, I, K.

Dico E,H,I,K puncta esse ad parabolam.



Demonstratio.

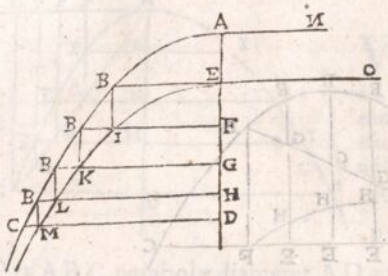
QVoniam diametri partes AE, EF, FG, &c. ponuntur æquales, EF est ad EG, vt AE ad AF; id est, vt EB quadratum ad quadratum FB, id est FH quadratum ad quadratum GI. eodem modo ostendetur esse vt EG ad ED, sic GI quadratum ad quadratum DK. puncta igitur E, H, I, K sunt ad parabolam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCCXXXII.

ESto ABC parabolæ diameter AD diuisa punctis E, F, G, H, D, vt AE, EF, FG, GH, &c. sint continuæ proportionales: ducantur autem ordinatim lineæ EB, FB, GB, &c. & ex B, diametri demittantur conuenientes cum ordinatim positis.

Dico puncta E, I, K, &c. ad eandem esse parabolam: & si series continuarum AE, EF, FG, &c. maioris fuerit inæqualitatis; dico parabolas in aliquo puncto conuenire; si verò minoris fuerit inæqualitatis dico nusquam sectiones conuenire.

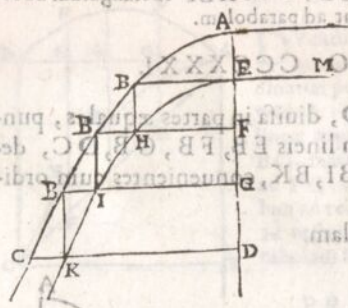
Demonstratio.



QVoniam AE, EF, FG, &c. proportionales sunt, EF est ad EG, vt AE ad AF; id est vt EB quadratum ad quadratum FB; id est FI quadratum ad quadratum GK. similiter ostenditur esse FI quadratum ad quadratum HL vt EF, linea ad lineam EH: puncta igitur E, I, K, L, &c. ad parabolam sunt. Quod erat primum.

Ponantur autem series AE, EF, FG, &c. maioris inæqualitatis: dico parabolas conuenire in aliquo puncto. sit enim ABC parabolæ latus rectum AN, & EIK parabolæ latus rectum EO: erit igitur quadrato EB æquale rectangulum EAN, & FI quadrato æquale rectangulum FEO: vnde cum EB, FI quadrata æqualia sint, rectangula quoque EAN, FEO sunt æqualia: quare cùm AE maior ponatur EF, erit AN latus rectum minus latere recto EO: adeoque parabolæ in aliquo puncto a conuenient.

a 167. huius.



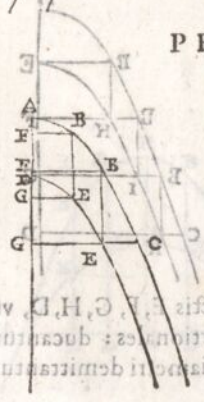
b 166. huius.

Sit iam AE, EF, FG: &c. terminorum continuatio minoris inæqualitatis: dico parabolas nusquam sibi occurrere: ponatur enim LA latus rectum parabolę ABC, & ME, latus rectum parabolæ EHI, quia igitur EB, FH quadrata æqualia sunt, rectangula quoque LAE, MEF æqualia sunt: & cùm AE minor ponatur EF, erit LA maior quàm ME: vnde nusquam b conuenient sectiones.

PROPOSITIO CCCXXXIII.

ESto ABC parabolæ axis AD, in quo sumptæ cuiuis parti AD, demittantur æquales diametri BE.

Dico D, E, E puncta esse ad parabolam æqualem parabolæ ABC.



Demonstratio.

DVctis ordinatim BF, ponantur EG, parallelæ. Quoniam igitur AD lineæ, æqualis est BE id est FG, dempta vel addita communi FD, rectè AF æqualis est DG. vnde DG est ad DG, vt AF ad AF, id est vt EB quadratum ad quadratum FB, id est EG quadratum ad quadratum EG. puncta igitur D, E, E, ad parabolam sunt, quia verò tam AF, DG, quàm

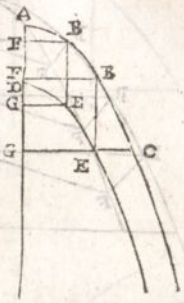
quàm FB, GE lineæ inter se æquales sunt, adeoque FB quadratum æquale quadrato GE, latera quoque recta axium AD, DG æqualia sunt, vnde & [a] parabolæ æquales. [a] Per defin. 6.

PROPOSITIO CCCXXXIV.

Ilsdem positis:

Dico parabolas illas nusquam conuenire.

Demonstratio.



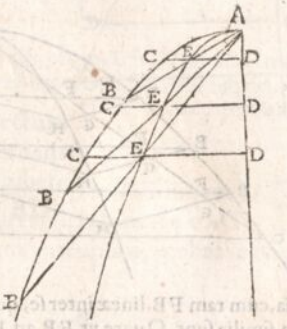
POnatur in parabola DEE ordinatim ad axem DG, linea GE occurrens ABC parabolę in C. quoniam igitur latera recta vtriusque parabolæ æqualia sunt, & DG linea minor AG, rectangulum quoque sub DG & latere illius recto minus est rectangulo sub AG & latere recto. igitur & EG quadratum minus est quadrato CG: & C punctum cadit intra parabolam ABC: idem cùm de omnibus punctis eiusdem parabolæ ostendi possit, patet sectiones illas nusquam conuenire.

Vocentur autem sectiones eiusmodi, parabolę parallelæ, siue asymptoticæ: quarum proprietates reliquas, & miram cum hyperbola inter asymptotos posita, symbolisationem, octauâ parte huius libri, exhibebimus.

PROPOSITIO CCCXXXV.

PArabolam ABC cuius diameter AD, secent ex A demissæ lineæ quotcunque AB: quæ proportionaliter diuidantur in E.

Dico puncta A,E,E esse ad parabolam.



Demonstratio.

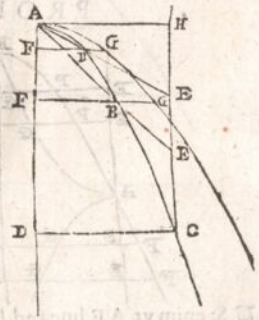
DVcantur per E lineæ DC, ordinatim ad diametrum AD; erunt igitur DC lineę [b] proportionaliter quoque in E diuisæ; & vt DC ad DC, sic DE ad DE. puncta igitur A,E,E [c] ad parabolam sunt.

[b] 78. huius.

[c] 319. huius.

PROPOSITIO CCCXXXVI.

ESto ABC parabolę diameter AD ad quam ordinatim ponatur DC; demittatur autem ex A lineæ AB, occurrentes CE diametro in E; quam & acta per A contingens, secet in H. dein per B, ordinatim ductis FB, fiat vt HE ad HE, sic FG ad FG.



Dico AG, esse ad parabolam.

Demonstratio.

QVoniam tam FB, AH quàm FA, HE parallelæ sunt, similia sunt triangula AFB, AHE; quare vt HE ad HE, sic FB ad FB: sed vt HE ad HE, sic FG ponitur ad FG, igitur est FG ad FG, vt FB ad FB, vnde [d] puncta A,G,G ad parabolam sunt.

[d] 319. huius.

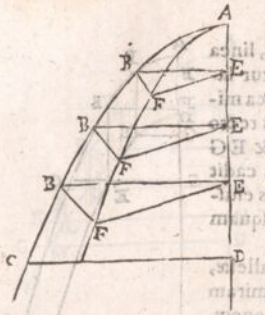
PRO-

PROPOSITIO CCCXXXVII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, ad quam ordinatim ponantur lineæ BE; ducantur autem ex B lineæ BF, inter se parallelæ, & proportionales lineis EB.

Dico puncta A,F,F esse ad parabolam.

Demonstratio.



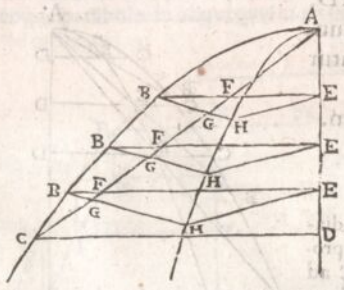
IVngantur EF: Quoniam tam FB lineæ inter se, quàm EB æquidistant, anguli EBF æquales sunt: vnde cùm proportionalia sint latera EB,BF, æquales angulos continentia, triangula quoque EBF inter se similia sunt: adeoque & EF lineæ æquidistantes sunt ad inuicem; & EB lineis proportionales: quadratum igitur EF est ad quadratum EF, vt EB quadratum ad quadratum EB, id est vt AE linea ad lineam AE: vnde puncta A,F,F sunt ad parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXVIII.

ESto ABC parabolæ diameter AD, & ordinatim ad illam positæ CD, BE: & EB quidem iuncta AC, diuidat in F: ductis autem parallelis BG, quæ AC lineæ occurrant in G: fiat vt FB ad BG, sic EB ad BH.

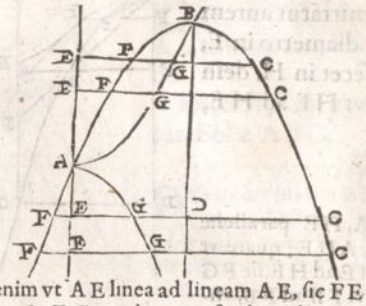
Dico AH puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.



IVngantur enim EH: Quoniam EB,BH lineæ proportionales sunt, lineis FB, BG; & angulus FBG communis, triangulis FBG similia sunt triangula EBH: sunt autem & FBG triangula quoque similia, cùm tam FB lineæ inter se, quàm BG rectæ æquidistent: igitur & EBH triangula similia sunt. Quare vt EB ad EB, sic EH ad EH, adeoque per præcedentem puncta AH ad eandem sunt parabolam.

PROPOSITIO CCCXXXIX.



ESto ABC parabolæ axis BD, cui parallela ponatur AE, secans parabolam in A: ducantur autem ad axem ordinatim lineæ EC, & inter FE, EC mediæ ponantur EG.

Dico A,G,B puncta esse ad parabolam.

Demonstratio.

244. *huius.* ESt enim vt AE linea ad lineam AE, sic FEC a rectangulũ ad rectangulum FEC. igitur & EG quadratum est ad quadratum EG, vt AE linea ad lineam AE: quare A,G, G puncta ad parabolam sunt.

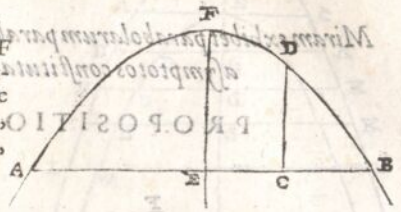
PRO-

PROPOSITIO CCCXL.

DAtis rectis AB, CD se mutuo decussantibus, inuenire parabolam cuius DC data sit diameter.

Constructio & demonstratio.

DIuisa AB bifariam in E, ducatur EF parallela CD. fiatque vt AEB rectangulum ad rectangulum ACB, sic EF linea ad lineam DC. patet A, F, D, B puncta esse ad [a] parabolam quæsitam, cuius diameter est DC.



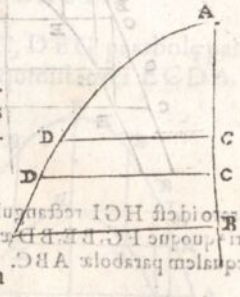
[a] Ex conuersa 47. huius.

PROPOSITIO CCCXLI.

DAto AB latere recto [b] exhibere illius parabolam.

Constructio & demonstratio.

SEcetur AB vtcunque in CC, & ex C lineæ erigantur CD, vt CD quadrata æqualia sint rectangulis CAB; singula singulis: patet A, D, D puncta [b] esse ad parabolam quæsitam.



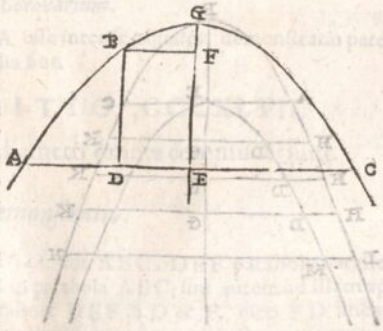
[b] 209. huius.

PROPOSITIO CCCXLII.

DAtis tribus punctis A, B, C non in directum positis, & linea BD, quæ per aliquod ex datis punctis transeat, oportet parabolam describere per A, B, C puncta cuius aliqua sit diameter BD.

Constructio & demonstratio.

IVncta AC secetur bifariam in E, ponaturque EF parallela BD, & BF rectæ AC: fiat autem vt AE quadratum ad quadratum BF, sic EG linea ad lineam FG. describaturque per B, G, C parabola cuius diameter sit BD, patet illam quoque per A transire. Igitur, &c. Quod erat faciendum.

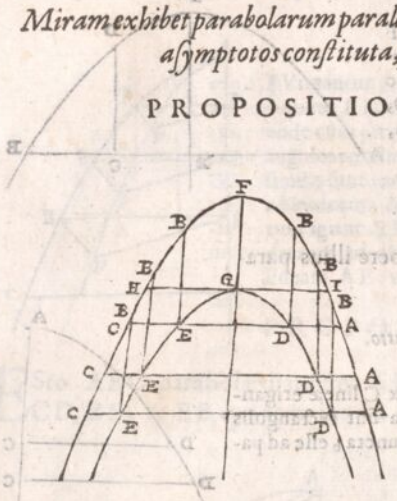


[c] Ex 1. huius.

PARABOLÆ
PARS OCTAVA

Miram exhibet parabolarum parallelarum, cum hyperbola inter asymptotos constituta, symboliſationem.

PROPOSITIO CCCXLIII.



SIt ABC parabolæ axis FG & ordinatim ad illũ applicata HGI: ductiſque HI, parallelis CA, quadrato HG æqualia fiant rectangula CEA, CDA.

Dico E, G, D puncta eſſe ad parabolam æqualem parabolæ ABC.

Demonſtratio.

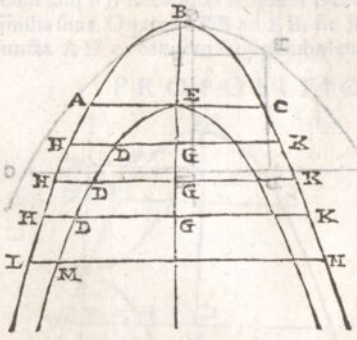
ERigantur ex D & E, diametri EB, DB. quoniam æquidiſtãt HI, CA, & HG quadrato id eſt HGI rectangulo æqualia ſunt rectangula CEA, ſiue CDA, diametri[a] quoque FG, BE, BD æquales ſunt: quare & [b] puncta E, G, D ad parabolam, æqualem parabolæ ABC.

a Ex 47. huius.
b 333. huius.

PROPOSITIO CCCXLIV.

EAdem poſita ſint quæ priùs:

Dico parabolas illas in infinitum productas magis ſemper ad inuicem accedere, nuſquam tamen occurrere.



Demonſtratio.

CVm enim per præcedentem æquales ſint parabolæ ABC, DEF, latera recta [c] quoque illarum æqualia ſunt, quare nuſquam, [d] in infinitum productæ concurrent: quod verò magis ſemper ad inuicem accedant ſic oſtendo. ponantur ad BG diametrum in parabola ABC, ordinatim HK, LN: & LN quidem remotior ſit à vertice B, quàm HK. æqualia igitur ſunt rectangula HDK, LMN ex hypotheſi. quare HD eſt ad LM, vt MN ad DK; ſed MN maior eſt DK, quia LN, maior eſt HK (vtpote remotior à vertice B,) recta igitur HD quoque maior eſt LM.

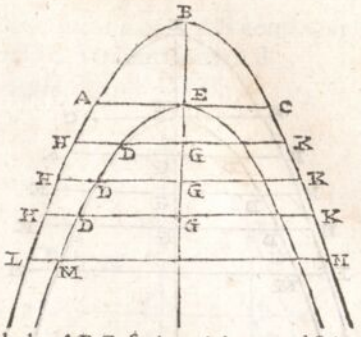
c Per defin. d 334. huius.

Similiter ſi remotior quęuis à vertice B, parallela aſſumatur, oſtendetur LM maiorem eſſe quauis ſibi æquidiſtante intra ſe poſita; magis igitur ſemper ad inuicem accedunt parabolæ ABC; DEF: aſymptoticæ igitur ſunt parabolæ ABC, DEF.

PRO-

PROPOSITIO CCCXLV.

EAdem positâ figurâ: propositum sit datæ parabolæ parallelam siue asymptoticam describere.



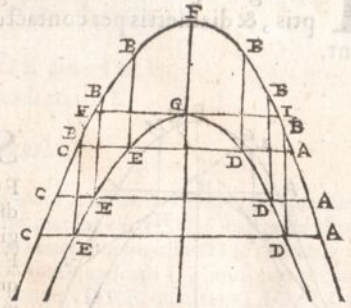
Constructio & demonstratio.

SIt ABC parabola data: ponatur in illa diameter BE ad quam ordinatim applicetur AEC. positisque AC parallelis, HK: secentur HK in D & F, vt tam HDK quàm HFK, rectangula æqualia sint quadrato AE: constat ex antè demonstratis, DEF puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC. fecimus igitur quod fuit postulatum.

PROPOSITIO CCCXLVI.

ASsumptâ figurâ propositionis 343. sint ABC, DEG parabolę parallelæ seu asymptoticę, & quæuis ponantur æquidistantes ECDA.

Dico rectangula CEA, inter se, vti & CDA rectangulis æquari.



Demonstratio.

ERigantur ex D & E diametri DB, EB; quoniam igitur parallelæ sunt diametri ABC, DGE, æquales sunt diametri BE, DB vti ex ipso ortu constat; sed quam rationem diametri DB, BE seruant, eandem quoque continent rectangula CEA, CDA; æqualia igitur sunt rectangula CEA inter se, vti & rectangulis CDA.

Corollarium.

EX dictis sequitur rectas CE, DA esse inter se æquales. demonstratio patet, cum CEA, CDA rectangula æqualia sint.

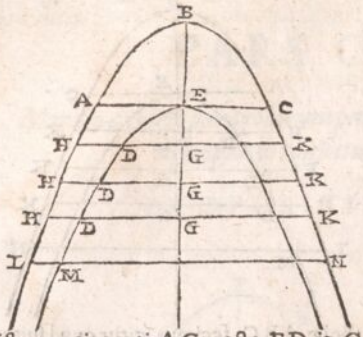
PROPOSITIO CCCXLVII.

PArallelarum parabolarum diametri omnes communes sunt.

Demonstratio.

ASsumatur figura propositionis 344. sint ABC, DEF parabolę parallelæ, & quæuis ponatur diameter BG in parabola ABC; sint autem ad illam applicatæ ordinatim HK, occurrentes parabolæ DEF in D & F, dico FD lineas in G bifariam diuidi: cùm enim HK per constructionem ordinatim ponantur ad BG, diametrum, rectæ HK in G bisectæ sunt: sunt autem æquales ostensæ, HD, a FK; residuæ igitur DG, GF quoque æquales sunt, adeoque ad BG ordinatim applicatæ, communis igitur est BG diameter vtrique parabolæ. a *Per Coroll. 346. huius.*

PROPOSITIO CCCXLVIII.



COntingens parabolis parallelis intercepta in contactu biſſecatur.

Demonſtratio.

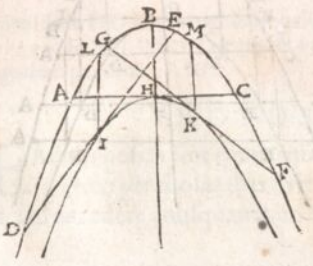
POnatur per E punctum quoduis in perimetro parabolæ DEF aſſumptum contingens AC; dico AC in E biſſecari, poſitâ per E, diametro BG, ponatur quæuis DF, æquidiſtans AC; occurrens parabolæ ABC in H & K. quoniam igitur FD, æquidiſtat contingenti AC; recta FD in G, [a] biſſecta eſt; ſunt autem æquales HD, FK: tota igitur HK in G biſſecta eſt: quare & AC [b] æquidiſtans HK, ab eadem diametro in E biſſecatur.

a 15. huius.
b Defin. 3. aut 4. huius.

PROPOSITIO CCCXLIX.

TRiangula quæ fiunt à contingentibus, parabolis parallelis interceptis, & diametris per contactuum puncta ductis, inter ſe æqualia ſunt.

Demonſtratio.



SInt ABC, HIK parabolæ parallelæ: & IHK parabolam contingant AC, DE, FG: ponanturautem per H, I, K, contactus diametri, BH, LI, MK, intelliganturque iungi FMG, CBA, DLE: dico triangula FMG, CBA, DLE inter ſe eſſe æqualia: quoniam enim parabolæ parallelæ ſunt, diametri LI, BH, MK æquales ſunt: ſunt autem AC, DE, FG contingentes in H, I, K [c] bifariam diuiſæ; æqualia igitur ſunt [d] triangula ABC, FMG, DLE.

c 348. huius.
d 218. huius.

PROPOSITIO CCCL.

EAdem poſitâ figurâ: ſint in ABC parabola lineæ tres AC, DE, FG, æqualia auferentes ſegmenta: ſecentur autem AC, DE, FG bifariam in H, I, K.

Dico puncta H, I, K eſſe ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

Demonſtratio.

ERigantur ex H, I, K punctis diametri HB, MK, LI: quoniam æqualia ſunt ſegmenta DAE, ABC, GMF, triangula quoque DLE, ABC, FMG, æqualia ſunt: quare & diametri LI, BH, MK æquales ſunt, & puncta H, I, K ad parabolam parallelam ABC.

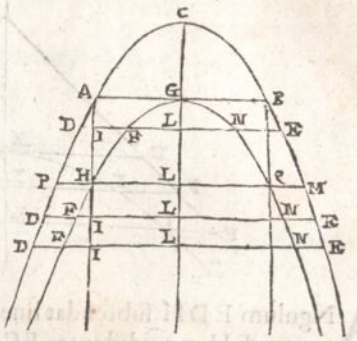
PRO-

PROPOSITIO CCCLI.

SInt ABC, FHG parabolæ parallelæ, recta autem AB contingat in G parabolam FHG; ponanturque DE æquidistantes AB.
Dico AG quadrato, æquari rectangula singula DFE.

Demonstratio.

POnatur AH æquidistans diametro CG, occurrensque FHG parabolę in H puncto per quod recta ponatur PHQ parallela AB: vt CG ad AH, sic AGB rectangulum id est quadratum AG, (est enim AB contingens in G bissecta) ad rectangulũ [a] PHM: æquales autem [b] sunt diametri CG, AH, igitur & PHM rectangulum æquale est quadrato AG. sed PHM, DFE rectangula [c] æqualia sunt, quadrato igitur AG æqualia sunt rectangula singula DFE.



a 47. huius:
b Ex 333. huius.
c 346. huius.

PROPOSITIO CCCLII.

IIsdem positis: recta AH occurrat DE lineis in I:
Dico DIE rectangula æquari quadratis FL.

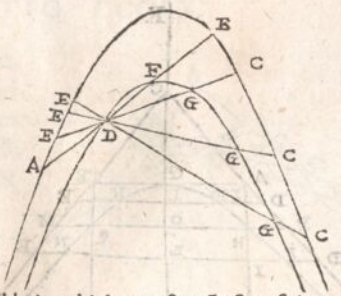
Demonstratio.

QVoniam DE lineæ in L diuisæ sunt bifariam, & non bifariam in F, quadrata LD æqualia sunt quadratis LF vnà cum rectangulis DFE: eadem de causa quadrata LD æqualia sunt quadratis LI vnà cum rectangulis DIE: rectangula igitur DFE vnà cum quadratis FL æqualia sunt quadratis LI simul cum rectangulis DIE: æqualia autem ostensa sunt [d] rectangula DFE, quadratis LI id est AG, residua igitur rectangula DIE residuis quadratis FL æqualia sunt.

d 351. huius.

PROPOSITIO CCCLIII.

INtra parabolam ABC assumpto quouis puncto D ponantur per D lineæ quotcunque AB, EC: fiant autem AD, ED lineis æquales BF, CG.
Dico D, F, G puncta esse ad parabolam parallelam parabolæ ABC.

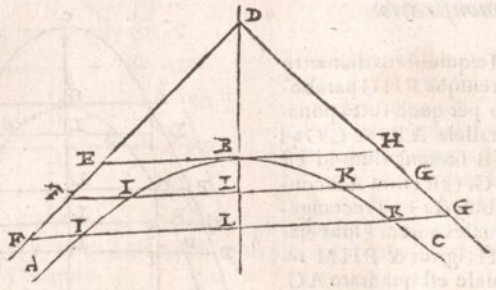


DEmonstratio manifesta est ex Coroll. huius, vbi demonstratũ est positis parabolis parallelis ABC, DFG rectas ED, GC, item AD, FB esse inter se æquales.

Applicatio parabolarum parallelarum ad hyperbolam inter asymptotos positarum.

Applicatio propositionis 343. huius.

PROPOSITIO CCCLIV.



ANgulum E D H subtendat linea E H, qua bifariam diuisa in B, ponantur E H, æquidistantes F G, quæ in I secentur, vt F I G rectangula, æqualia sint quadrato E B.

Dico B I I ad eandem esse hyperbolam.

DEmonstratio habetur in libro nostro de hyperbola propositione 14.

Applicatio propositionis 344. huius.

PROPOSITIO CCCLV.

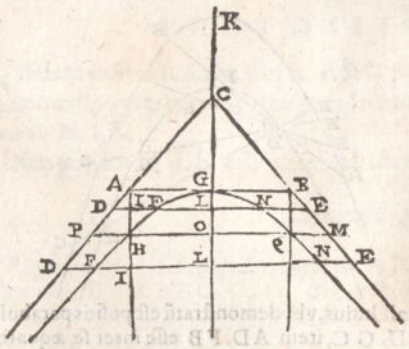
EAdem positâ figurâ.

Dico E D, D H lineas in infinitum productas, magis semper ac magis ad hyperbolam accedere, nusquam autem conuenire.

DEmonstratio habetur in lib. nostro de hyperbola propos. 15.

Applicatio propositionum 346. 351. huius.

PROPOSITIO CCCLVI.



AB recta inter asymptotos AC, CB hyperbolæ FGN constituta in G vertice diametri KG diuisa sit bifariam, & AB quidem æquidistent DFE.

Dico DFA rectangula æquari inter se vti & rectangulis DNE, siue quadrato AG.

DEmonstrationem vide in lib. de hyperbola propos.

Corol-

Corollarium.

EX his quoque ſequitur, lineas DF, NE eſſe inter ſe æquales.

Applicatio propoſ. 352. huius.

PROPOSITIO CCCLVII.

IIſdem poſitis:
Dico DIE rectangula æquari quadratis LF.

DEmonſtrationem vid. lib. de hyp. prop. 17.

Applicatio propoſitionis 348.

PROPOSITIO CCCLVIII.

OMnis contingens hyperbolam & cum aſymptotis conueniens in puncto contactus bifariam ſecatur.

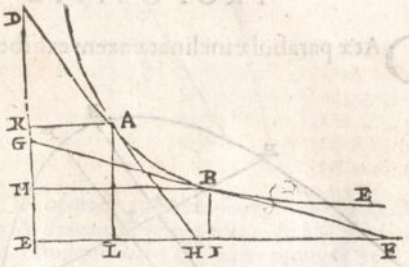
DEmonſtrationem vid. lib. de hyperb. 29.

Applicatio propoſitionis 349. *huius.*

PROPOSITIO CCCLIX.

HYperbolam ABC inter aſymptotos ED, EF conſtitutam contingant duæ lineæ DAH, FBG quæ triangula conſtituant HED, FEG.

Dico illa eſſe inter ſe æqualia.



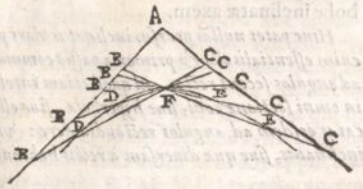
DEmonſtrationem vide in libro de hyperbola, parte ſecunda.

Applicatio propoſitionis 353. *huius.*

PROPOSITIO CCCLX.

INtra angulum BAC punctum aſſumatur quoduis F, per quod rectæ ponantur BFC, pertinentes ad vtrumque anguli latus in C & B: fiantq; BF lineis æquales CE, & viciſſim CF æquales DB:

Dico puncta EFD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſint BA, AC.



DEmonſtrationem vide in hyperbola parte, vltima.

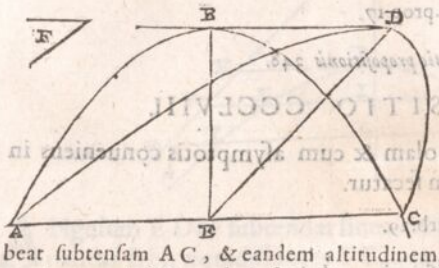
PRO-

PROPOSITIO CCCLXI.

DAtæ parabolæ rectæ ABC, æqualem exhibere inclinatam, cuius ordinatim ad diametrum positæ datum angulum constituant.

Parabolam inclinatam voco, omnem parabolam quæ lineas habet ordinatim addiametros positas ad angulos obliquos: porro nullas dari parabolas ex natura sua inclinatas, ex sequenti propositione constabit.

Constructio & demonstratio.

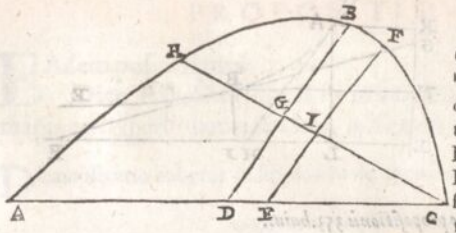


SIt ABC parabolæ axis BE, & ordinatim ad illum posita AC: positaque per B contingente, ducatur ad illam linea ED, quæ angulum EDB æqualem faciat dato F: & describatur parabola ADE, habens ED diametrum: dico illam satisfacere petitioni. cùm enim vtraque parabola, communem habeat subtensam AC, & eandem altitudinem, constat illas inter se esse æquales: quod autem ADE parabola sit inclinata, ex eo patet quod AC linea & illi æquidistantes, diametrum DE ad angulos secent obliquos.

PROPOSITIO CCCLXII.

DAtæ parabolæ inclinatæ axem exhibere.

Constructio & demonstratio.



SIt ABC parabolæ inclinatæ diameter BD, & ad illam ordinatim posita AC: ducatur autem ex C linea CH normalis ad BD. diuisaque CH bifariam in I, ponatur per I recta IF æquidistans BD: dico IF axem esse parabolæ inclinatæ. cùm enim FE æquidistet BD diametro, recta FE quoque sectionis diameter est; quia verò lineam HC, bifariam & ad rectos secat angulos, constat FE[a] axem esse parabolæ ABC. exhibuimus igitur datæ parabolæ inclinatæ axem.

a 1. *Defin. huius.*

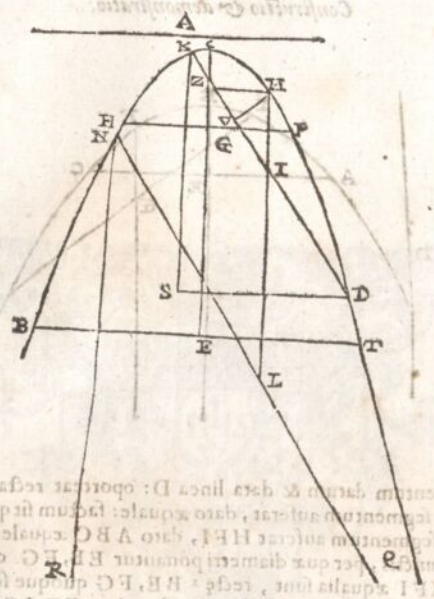
Hinc patet nullas prorsus inclinatas dari parabolas quæ diuersæ sint naturæ à rectis: vtrique enim essentialis illa & primaria passio communis, quòd ordinatim ad axem applicatæ, eundem ad angulos secent rectos. id quod etiam intelligi velim de hyperbola & ellipsi: similiter enim in omni sectione coni, siue hyperbola, siue ellipsis fuerit, ostenditur, ordinatim ad axes applicatas eosdem ad angulos rectos diuidere: vnde nullas omnino dari coni sectiones natura sua inclinatas, siue quæ diuersam à rectis habeant naturam constat.

PRO-

PROPOSITIO CCCLXIII.

IN data parabola diametrum assignare, cui data linea inseruiat pro latere recto, modò minor ea non existat latere recto axeos datæ parabolæ.

Constructio & demonstratio.



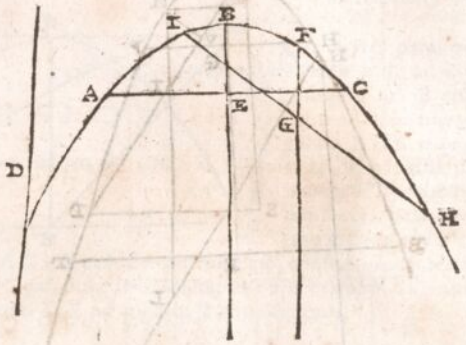
DAta sit linea A & parabola BCD. oporteat exhibere diametrum quæ latus rectum habeat æquale datæ lineæ A. factum sit quod petitur; & ML sit diameter, cui A linea inseruiat pro latere recto. Inueniatur CG axis[a] parabolę BCD, æqualis lateri recto: lineæ autem CG æqualis fiat MI, & ML, CE lineæ singulæ æquales rectæ A: ponanturque per L, & E, item G & I ordinatim ad diametros suas lineæ HP, KD, BT, NQ: quoniam igitur MI, CG lineæ æquales sunt, segmenta[b] KMD, HCP æquantur: posita igitur ex D, linea DS normali ad demissam ex K diametrum KS, rectę HP, SD[c] æquales sunt. similiter æquales ostendentur RQ, BT. Rursum cùm ML æqualis ponatur lateri suo recto A, & NL ordinatim ad ML, rectę NL,[d] ML æquales sunt. quia verò MI æqualis est CG, & CG data est vti & ML hoc est NL, recta quoque KI data est, cùm sit ML ad MI, vt NL quadratum ad quadratum KI: & quia datæ quoque sunt lineæ CG, CE adeoq; & HP, BT, rectæ quoque SD, RQ (quæ illis ostensæ sunt æquales) datæ sunt: igitur cùm anguli KSD, NRQ recti sint, data quoq; sunt triangula KSD, NSQ, & anguli SKD, RNQ id est KIM, NLM: componendo igitur datâ ML rectâ æquali A, & punctis diuisionum I & L; applicentur ad I & L, datæ lineæ KD, NQ in datis angulis KIM, NLM; rectæ autem KD, NQ bisectæ sint in I & L. tum per K, M, D, puncta parabola describatur; transibit illa per N & Q, cùm per resolutionem ostensum sit esse MI ad ML, vt KI quadratum ad quadratum NL: inueniatur deinde parabolæ KMD axis CG: & ML diameter transferatur in parabolam datam, ponaturque ab axe eiusdem, interuallo ZM normalis ad axem: patet per resolutionem, positione inuentam esse diametrum cui data A seruiat pro latere recto.

[a] 23. huius.
[b] 218. & 240. huius.
[c] 259. huius.
[d] 9. huius.

PROPOSITIO CCCLXIV.

DAtam lineam applicare ad parabolam, quæ ſegmentum auferat dato æquale. oportet autem lineam D, non minorem eſſe lineâ AC.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt ABC ſegmentum datum & data linea D: oporteat rectam D applicare ad parabolam, vt ſegmentum auferat, dato æquale: factum ſit quod petitur, & IH linea æqualis D, ſegmentum auferat HFI, dato ABC æquale: biſecentur AC, HI in E & G, punctis, per quæ diametri ponantur EB, FG. quoniam igitur ſegmenta ABC, HFI æqualia ſunt, rectę [a] BE, FG quoque ſunt æquales; datæ igitur ſunt BE & IG, dimidia HI ſiue D. fiant iam BE, IG, FK proportionales. data ergo etiam eſt FK: inueniatur igitur per præcedentem diameter, cuius FK latus rectum eſt & ponatur in parabola ABC, factaque FG æquali BE ponatur per G ordinatim linea HI: patet per reſolutionem & conſtructionem, HI lineam rectę D, & HFI ſegmentum dato ABC æquale eſſe: datam igitur lineam, &c. Quod erat faciendum.

[a] 221. & 260. *huius.*

Scholion.

DEſtinaueram duas alias Partes, quæ parabolam concernunt, præſenti libro adiungere; ſed cùm aduertam librum hunc, quo Paraboliçæ ſectionis proprietates proſecuti ſumus, in molem nimis magnam excreſcere, quàm vt libris reliquis de coni ſectionibus par ſit, in alios libros eas partes tranſtuli; exigente id maximè argumento materiæ, quam tales libri explanare intendunt.

Pars autem prima ſymbolizationes ac ſimilitudines complectitur, quæ ſunt inter parabolam ac ſpiralem figuram; mira enim eſt inter has conformitas; neque à mea ſententia recedere audeo, qua mihi planè perſuaſum eſt Archimedem in eam notitiam peruenisſe quam nobis reliquit, qua per contingentem ſpiralis figuræ lineam rectam exhibet, quæ circuli circumferentia ſit æqualis. habet præterea parabola multas alias proprietates, cum ſpirali Archimedæa communes, non ſolùm ſecundùm primam circulationem, ſed ſecundùm quotcunque numero exhibitas, quas fuſius conſiderare poterit ſuo loco.

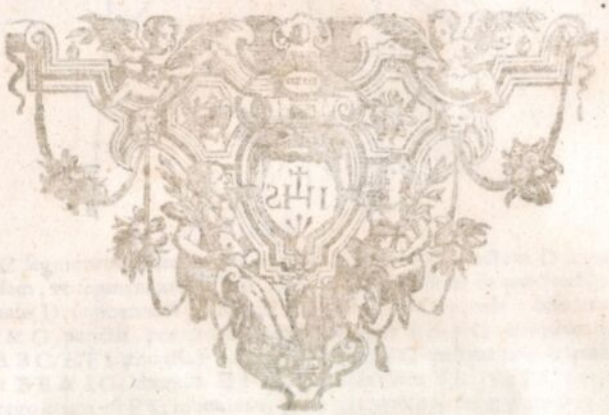
Secunda pars quæ huc ſpectabat agit de parabolis virtualibus, quarum nomenclaturam deſumpſi à proprietatibus illarum, quæ ita ſimiles ſunt proprietatibus verarum parabolarum, vt ab iiſdem non diſcrepent, niſi ſolo aſpectu vt ita dicam; nam æquales ſunt ſecundùm ſuperfi-

cies

ries consideratæ, & secundùm ordinatim applicatas ad diametrum; in hoc tamen differunt, quod earum diametri lineæ sint parabolicæ; in parabolis autem quæ sectiones conicæ sunt, axes vel diametri rectæ sunt lineæ. Coniecimus autem tractatum huius materiæ in librum de ductibus planorum in plana, eò quod vsus virtualium parabolarum, spectet ad æquationes formandas cum corporibus, quæ partes Cylindricæ sunt, concauam habentes superficiem, vel conuexam. Sed de his plura suis locis.

Libri quinti finis.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [581] - -
PUBLIC DOMAIN

QVADRATVRAE CIRCVLI

TOMVS SECVNDVS.

AVCTORE

R. P. GREGORIO
A SANCTO VINCENTIO
SOCIETATIS IESV.



ANTVERPIÆ,
Apud IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS.
ANNO M. DC. XLVII.
Cum Gratia & Priuilegio.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [582] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [583] - -

PUBLIC DOMAIN

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SEXTVS

DE

HYPERBOLA.

ARGVMENTVM.

Diuiditur liber hic in septem Partes, veluti classes totidem, quibus aptè, elegantérque hyperbolæ sectio pulcherrimæque illius proprietates, suo loco singulæ & ordine continentur.

Prima quidem hyperbolam, sectionesque tam oppositas quàm coniugatas, dein asymptotos è cono educit: primasque ac fundamentales hyperbolæ proprietates exhibet.

Secunda, sectionum oppositarum ac coniugatarum affectiones considerat.

Tertia asymptotos & concauam contemplatur hyperbolam: ac linearum præcipuè asymptotis æquidistantium indagat proportionem.

Quarta, segmenta tam conuexa quàm concaua, dein sectiones ipsas inter se confert.

Quinta, hyperbolam à parabola intersectam expendit: in qua hic etiam ordo seruatur, vt primò linearum asymptotis æquidistantium, segmentorum dein rationes considerentur.

Sexta, varia soluit problemata.

Septima, varias geneses proponit, quæ tum ex lineis & circulis, tum ex ellipsi & parabola, denique ex ipsa oriuntur hyperbola. Secundo hyperbolas reducit ad sectiones è quibus ortæ. Tertiò reliquas ex hyperbola educit sectiones.

Reliquis coni sectionibus vti nobilior est hyperbola, sic affectionum illius contemplatio, morosiorem requirit attentionem; nostri autem instituti scopus est, sectionem hanc, vti & præcedentes duas, non minus planam facere, quàm sint ipsa Euclidis elementa. quia verò ex cono suam habet originem, hinc cum Apollonio ab eius ortu ordiemur, ostensuri eius quam author prop. 12. lib. primi explicat, primariam affectionem.

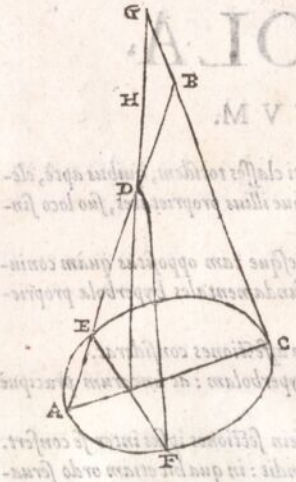
DEFINITIONES.

I.

HYperbolam voco coni sectionem cuius planum latera trianguli per axem sectione factâ emergentis ita intersecat, vt alteri illorum denuo extra conum occurrat.

II.

Diameter hyperbolæ est recta linea quæ omnes rectas, cuidam æquidistantes bifariam diuidit. quænam verò in hyperbola diameter vocetur recta, quæ transuersa, ex appositio cognosces scemate.



COnus ABC diuisus triangulo per axem ABC, secetur iterum plano DEF occurrente vtrique laterum trianguli per axem, extra conum: lateri AB quidem in G, lateri verò BC in D: recta DG diameter dicitur transuersa hyperbolæ DEF: hyperbolę verò coniugatæ ipsi DEF, recta vocatur & vicissim quę coniugatæ transuersa est, huius dicitur recta. de quibus in defin. 5. huius.

III.

Centrum hyperbolæ punctum est, quod transuersam diametrum bifariam diuidit.

Si DG bifariam secetur in H. punctum H centrum dicetur hyperbolę EDF ex quo patet centrum hyperbolæ esse extra sectionem. quod verò omnis linea per centrum ducta & hyperbolę occurrens, diameter sit: suo loco patebit.

IV.

Sectiones oppositæ, sunt hyperbolæ, quarum omnes diametri transuersæ cómunes sunt.



Sint ABC, DEF sectiones oppositæ: & ABC hyperbolæ centrum G, ponantur per G lineæ quotcunque BE, DC, FA, occurrentes sectionibus in A, B, C, D, E, F: rectæ illę communes dicuntur diametri sectionum oppositarum, eò quod si positis in hyperbola ABC ordinatim ad diametrum AG, æquidistantes ponantur in hyperbola DEF, illæ quoque ab eadem diametro bifariam secentur, adeoq; ad eandem diametrum ordinatim applicatæ sint:

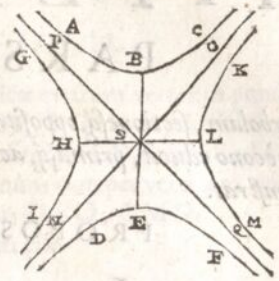
Quod verò diametri oppositis sectionibus interceptæ, in centro bisecentur, suo loco patebit.

V.

Sectiones coniugatas appello duas hyperbolarum oppositiones quæ diametros transuersas habent, quarum altera, alterius recta est, & vicissim recta, alterius est transuersa: siue sunt hyperbolæ quæ coniugatas habent diametros.

Sint

Sint binæ hyperbolarum oppositiones, vna ABC, DEF, altera GHI; KLM: & huius diameter sit transuersa BE, illius HL. & BE quidem bisecet æquidistantes HL, & illa bifariam diuidat parallelas BE, HL diameter est recta, ad transuersam BE hyperbolarum ABC, DEF, & BE recta ad transuersã HL hyperbolarum GHI, KLM. & quia positæ sunt, vt altera alterius parallelas, intra sectiones positas bisecet, diametri dicuntur coniugatæ. & hyperbolę quarum transuersæ diametri, altera alterius æquidistantes bisecat, coniugatæ vocantur.



VI.

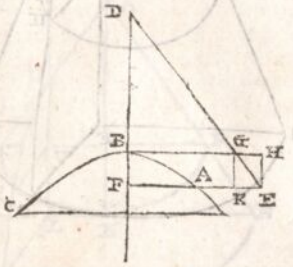
Asymptotos voco lineas quæ in plano hyperbolæ, è centro eductæ sectioni quidem magis ac magis accedunt, nunquam tamen occurrunt.

Illas in figura designant lineæ NS, SQ, PS, SO: quarum inuentionem & demonstrationem vide propos. 12. & 16. huius: vnum hîc notari debet, asymptotorũ aliquas, angulum ad centrum, formare rectum, alias acutum, vel obtusum, quarum suppositiones, varias ac diuersas inferunt proprietates, vt suis locis apparebit.

VII.

Latus rectum est linea iuxta quam possunt ordinatim ad diametrum applicatæ, siue latus rectum, mensura est iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum applicatarum.

Sit ABC hyperbolæ diameter transuersa BD & ad illam ordinatim FA: fiant autem proportionales BF, FA, FE & ex D per E recta ducatur DE, occurrens BG lineæ parallelæ FE, in G. erit BG latus rectum vti propos. 32. huius demonstrabimus.



Porro in hyperbola latus rectum hanc sibi proprietatem postulat vt quadrata ordinatim applicatarum superent rectangula quæ fiunt sub latere recto & partibus diametrorum verticem inter & punctum quo ab ordinatim positis intersecantur interceptis, figura simili ei quæ fit sub latere recto & transuerso: v. g. perficiantur rectangula BE, GF. quoniam igitur per hypothesim, rectæ BF, FA, FE proportionales sunt, quadratum FA æquale est rectangulo BE, quod superat FG rectangulum, figura HK, quę similis est illi quæ fit sub BG & BD in angulo GBD: vti propos. 32 huius ostenditur.

Illud quoque hîc obseruandum est quod alibi monui: non opus esse vt latus rectũ normaliter ad diametrum applicetur, sed ordinatim applicatis posse æquidistare. Secundò singulis diametris, diuersa conuenire latera recta; cum singularum potentiæ diuersæ sint.

VIII.

Hyperbolas æquales voco, quarum triangula quæ contingentibus & asymptotis continentur, æqualia sunt.

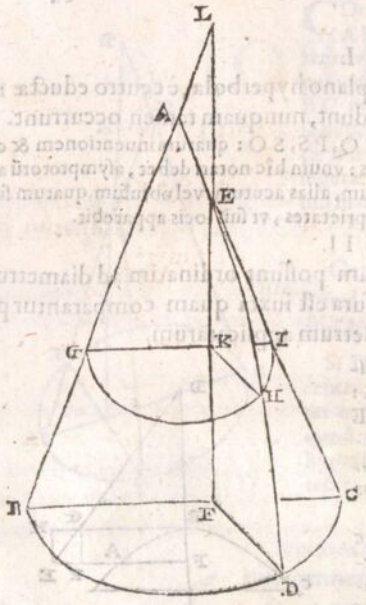
IX.

Hyperbolæ similes dicuntur quarum triangula quæ contingentibus & asymptotis æquales angulos habentibus continentur, similia sunt.

HYPERBOLÆ
PARS PRIMA

Hyperbolam, sectionesq; oppositas, & coniugatas, denique & asymptotos è cono educit, primasq; ac fundamentales hyperbolæ passiones demonstrat.

PROPOSITIO PRIMA.



COnus ABC plano per axem secetur BAC, secetur autem & altero plano, secante basim coni, secundùm rectam lineam FD, ad BC basim trianguli ABC normalem, quod sectionem in superficie coni faciat lineam DHE: sectionis autem diameter FE producta, cùm AB latere trianguli per axem, extra coni verticem conueniat in puncto L, deinde assumpto in FE diametro puncto quouis K, ponatur in plano trianguli ABC, recta GKI, æquidistans BC. & secundum GI, planum ducatur GHI, æquidistans plano baseos, exhibens in plano DFE, communem intersectionem HK.

Dico esse vt quadratum KH ad quadratum FD, sic LKE rectangulum ad rectangulum LFE.

Demonstratio.

a 16. prolog. huius.
b 16. undecimi.
c 35. tertij.

QVoniam planum GHI, æquidistat plano baseos BDC, circulus, est GHI, & HK, FD b communes intersectiones parallelæ, & quia FD normalis est ad BC, recta quoque HK ad IG parallelam BC normalis est; rectangulũ igitur GKI, æquale est quadrato c HK: rectangulũ autem BFC, æquale est quadrato FD; quadratum igitur HK ad DF, quadratum, est vt GKI rectangulum ad rectangulum BFC: quia verò ratio GKI rectanguli, ad rectangulum BFC composita est ex ratione GK, ad BF, id est LK ad LF, & ex ratione KI ad FC, id est EK ad EF; sit autem ex ijsdem quoque ratio composita rectanguli LKE ad LFE, rectangulum: vt GKI rectangulum ad rectangulum BFC, id est quadratum HK, ad quadratum FD, sic LKE rectangulum est ad rectangulum LFE. Quod erat demonstrandum.

Vocetur

Vocetur autem sectio huiusmodi hyperbola: cuius diameter transuersa LE, & ordinatim ad illam applicatæ, HK, FD.

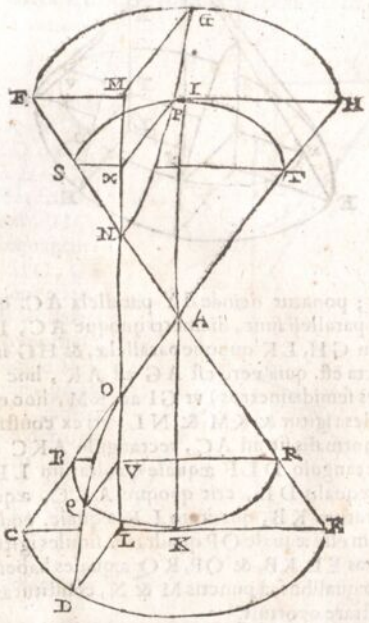
PROPOSITIO II.

SInt ad verticem superficies duæ conicæ quarum vertex A punctum: habeant autem circulos æquales CDE, FGH, & parallelos, quorum centra K, I; diametri CE, FH: positaque LD normali ad diametrum CE; ducatur secundum LD, planum non per verticem quod sectiones faciat in vtraque superficie, lineas DLO, GMN.

Dico vtramque sectionem hyperbolam esse.

Demonstratio.

PVncta N, O, vertices sint sectionum DLO, GMN: sumptisque quibusuis distantijs NX, OV, per V & X ducantur BR, ST æquidistantes CE, FH: & per BR, ST lineas, plana agantur BQR, SPT, parallela circulis CDE, FGH, exhibentia in planis DLO, GMN, communes intersectiones XP, QV: quoniam igitur plana BQR, CDE æquidistant, communes intersectiones QV, DL, in plano DLO [a] parallelæ sunt: & quia DL ad CE diametrum normalis est, recta quoque QV ad BR normalis est: igitur vt NVO rectangulum [b] ad ad rectangulum NLO, sic quadratum VQ ad quadratum LD, hyperbola est igitur sectio DLO.



a 16. undecimi.

b Ex 1. huius.

Deinde quia circuli CDE, FGH æquidistant, [c] communes quoque intersectiones DL, MG parallelæ sunt: & cùm LD normalis sit ad diametrum CE, recta quoque MG normalis est ad FH; vnde & XP normalis ad ST: quadratum [d] igitur XP ad MG, quadratum est vt NXO rectangulum est ad rectangulum NMO, quare & sectio GMN hyperbola est.

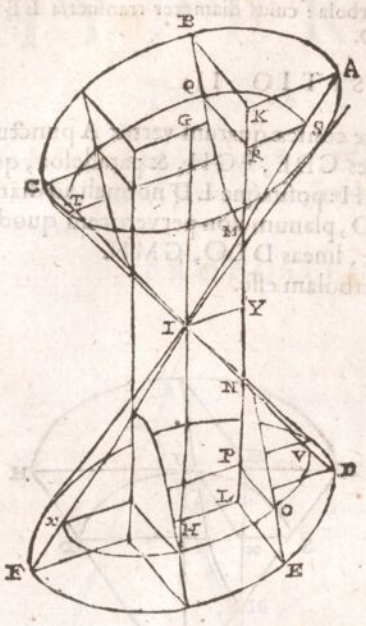
c 16. undecimi.

d Ex 1. huius.

Vocentur autem hyperbolæ GMN, DLO sectiones oppositæ: quarum communis diameter est transuersa NO.

PROPOSITIO III.

CIrculorum æqualium ABC, DEF in planis æquidistantibus descriptorum centra coniungat recta GH, bifariam diuisa in I; per quam posito plano ACFD signante diametros AC, DF parallelas, ductâque AF, quæ occurret GH in I, circumagatur hæc eadem, manente puncto I, per circulorum perimetros ABC, DEF, donec in eundem locum redierit à quo cœpit circumduci: erectâ deinde KB orthogonâ ad



ad diametrum AC, ponatur KL quæ æquidistet GH; & secundùm lineas KB, KL planum agatur exhibens sectiones MKB, NEL.

Dico illas esse similes; hoc est ordinatim applicatas ad vnius diametrum, æquales esse ijs, quæ ad diametrum alterius applicantur, si à distantijs æqualiter à punctis M & N remotis, ad æquales angulos constituantur.

Demonstratio.

ASsumatur quodlibet punctum P, in linea NL; deinde rectæ NP, fiat æqualis MR: ponantur quoque PO, RQ æquidistantes KB, hoc est EL, quæ communes intersectiones sunt plani BKL, & planorum ABC, DEF æquidistantium, ac proinde parallelæ inter se; ponatur deinde IY parallela AC. quoniam ABC, DEF circuli æquales & paralleli sunt, diametri quoque AC, DF æquales sunt & æquidistant: sunt autem GH, LK quoque parallelæ, & HG in I bissecta, recta quoque LK in Y bissecta est. quia verò est AG ad AK, hoc est DH ad DL, (ob AG, DH æquales semidiametros) vt GI ad KM, hoc est IH ad NL; sunt autem GI, IH æquales; igitur & KM & NL, vti ex constructione lineæ MR, NP: rursum, cùm BK normalis sit ad AC, rectangulo AKC æquale est quadratum KB; similiter & rectangulo DLF æquale quadratum LE; igitur cùm AC sit æqualis DF, & AK æqualis DL, erit quoque AKC, æquale DLF rectangulo, adeoque & quadratum KB, quadrato LE æquale. eodem prorsus modo constat RQ quadratum esse æquale OP quadrato. similes igitur sunt hæ sectiones & ordinatim applicatas EL, KB, & OP, RQ æquales habent, quæ à distantijs KM, LN, & RM, PN æqualibus, à punctis M & N, constitutæ sunt ad eosdem angulos. Quod demonstrare oportuit.

Corollarium.

HInc colligitur ijsdem positis, quotiescunque KB, LE rectæ parallelæ inuicem æquales fuerint, etiam diametrorum partes ab eisdem abscissas æquales esse, scilicet MK & NL, vel MR & NP. & si KB ordinatim posita fuerit, factaque NL æquali MR, ponatur LE æquidistans BK, quod LE ordinatim quoque applicata sit ad LY diametrum.

Scholion.

PRæcedenti propositione videmur eas solas hyperbolas voluisse complecti quæ fiunt sectione facta per planum aliquod quod cum axe coni non potest conuenire; verùm id studio factum est quo minùs turbetur imaginatio sese ad plura extendentis; nam eadem propositio cuicunque tandem sectioni conuenit: & eius constructio atque demonstratio siue axi planum hyperbolas continens occurrat, siue non: si enim sectio facta per KB transeat per lineam KL quæ in plano per axem facto, scilicet ACF, axi parallela non sit qui per centra circulorum transit circa quos linea conos formans circumacta fuit, diuisa nihilominùs MN bifariam in Y, ex Y ad I posita linea YI, planum fiat secundùm lineas KLYI. sumptis deinde rectis KY & YL

aqua-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [589] - 532
PUBLIC DOMAIN

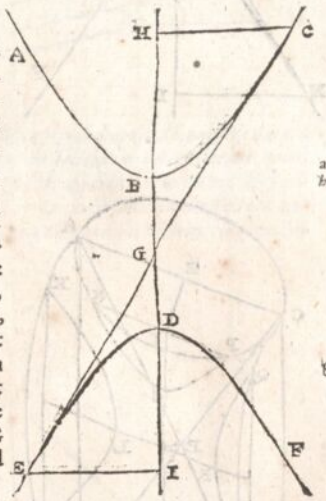
æqualibus agantur plana parallela rectæ YI *exhibentia communes intersectiones* AC, DF, *erecta denig.* GH *per* I *quæ sit parallela* KL, YL *æquales inter se, si* GI, HI *æquales fuerint: imò &* AC, DF *bifariam diuisæ in* H *&* G, *& ellipses* ABC, DEF *æquales ac similes: vnde cum rectangula* DLF, AKC *æqualia existant vti &* VPX, SRT, *etiam quadrata* EL, KB, *&* OP, RQ *æqualia erunt inter se, vt ex ijs quæ libro de Ellipsi dicta sunt manifestè colligitur. & consequenter etiam hyperbolæ in hoc casu similes erunt habebuntq. latera* KB, EL, *&* RQ, OP *æqualibus interuallis à punctis* M, *&* N *distantibus, æqualia prorsus, vt in priore schemate quod iubebat sectionem axi parallelam fieri ostensum est.*

PROPOSITIO IV.

OPpositarum sectionum ABC, EDF diameter sit BD, quâ bifariam diuisâ in G ponatur per G linea occurrens ABC hyperbolicæ in C.

Dico quod CG producta oppositæ quoque occurret sectioni in E.

Demonstratio.



a *Coroll. 3. huius.*

b *Hinc.*

POsitâ ex C ordinatim linea CH ad diametrum BD, fiat HG æqualis GI, & ex I ordinatim ponatur IE ad diametrum BD occurrens CG lineæ in E: quoniam igitur HC, IE lineæ in oppositis sectionibus ad eandem diametrum ordinatim positæ sunt, æquidistant a HC, EI adeoque anguli CHG, GIE æquantur. sunt autem anguli ad G, oppositi & HG, GI lineæ quoque æquales, æqualia igitur sunt triangula GHC, GEI: & HC, EI lineæ æquales: quia verò BG, GD æquales sunt ex hypothesi, & GH, GI per constructionem reliquæ HB, DI quoque æquales sunt: quare IE lineæ prout hyperbolæ occurrit, b æqualis est HC: eadem igitur est IE ordinatim posita, prout occurrit hyperbolæ, & prout CG lineę occurrit: vnde punctum E in perimetro est hyperbolæ, & CG producta oppositæ occurrit sectioni in E. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

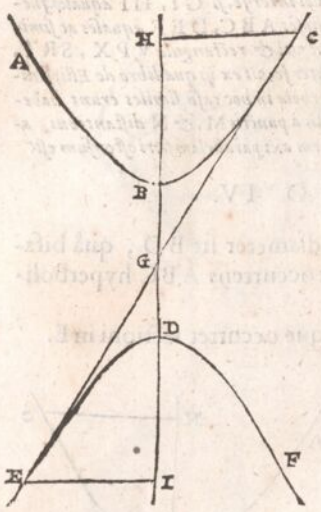
HInc sequitur si per G punctum quo BD diameter bissecatur, alia ducatur, hyperbolis occurrens in C & E, & ex C & E, ordinatim ad diametrum BD ponantur CH, EI: illas, vti etiam DI, BH esse inter se æquales: manifestum est ex priori demonstratione.

PROPOSITIO V.

EAdem positâ figurâ: si BD vna diametrorum bisecetur in G.

Dico rectas omnes per G ductas & hyperbolis occurrentes, in G bifariam secari.

Demonstratio.



POsitâ per G, linea CE, hyperbolis occurrat in C & E punctis, ex quibus ordinatim ponantur lineæ CH, IL: quoniam BD diameter in G biſſecta eſt & CE oppoſitis occurrit ſectionibus, rectæ HC, EI ordinatim ad communem diametrum BD [a] poſitæ æquales ſunt: quare & ID, BH quoque [b] æquales ſunt: ſed ex hypotheſi rectæ GD, GB æquantur, æquales igitur ſunt GI, GH, vnde reliqua CG quoque reliquæ GE æqualis eſt.

[a] *Coroll. præcedens.* [b] *Coroll. 3. huius.*

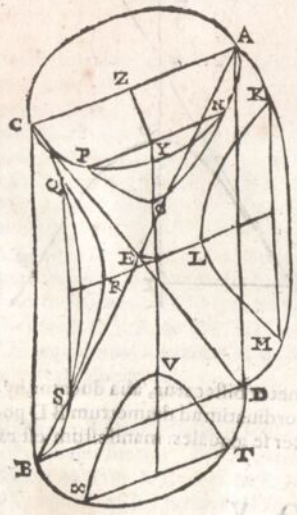
Vocetur autem punctum G centrum hyperbolarum: rectę verò BD, CE earundem diametri tranſuerſæ quæ in G centro bifariam diuiduntur.

PROPOSITIO VI.

SInt ABCD parallelogrammi diametri duæ AB, CD, deſcriptis autem ſuper ſingulis parallelogrammi lateribus, circulis, ferantur circa illos lineæ, AB, CD, formantes quatuor oppoſitos conos quorum axes FG, HI. factaq; per axes ſectione, parallelogrammum emergat, ACBD cui æquidiſtans fiat ſectio, exhibens in conicis ſuperficiebus lineas NOP, TVX, KLM, QRS.

Dico illas eſſe hyperbolas.

Demonstratio.



PLana NOP, TVX, KLM, QRS exhibeant in baſibus oppoſitorum conorum lineas NP, QS, TX, KM quæ (cùm ſectiones illæ æquidiſtēt parallelogrammo ABCC quod efformatur ſectione facta per axes conorum oppoſitorum) æquidiſtant diametris AC, CB, BD, DA: adeoque & inter ſe: diuiſis igitur AC, NP bifariam in Z & Y, ducatur ZY, per quam, vti & E verticem conorum planum ducatur, exhibebit illud triangulum per axem, cuius lateribus, extra conum occurrent ſectiones NOP, TVX: [c] hyperbolæ igitur ſunt NOP, TVX. ſimiliter oſtenduntur hyperbolę KLM, QRS.

[c] *1. huius.*

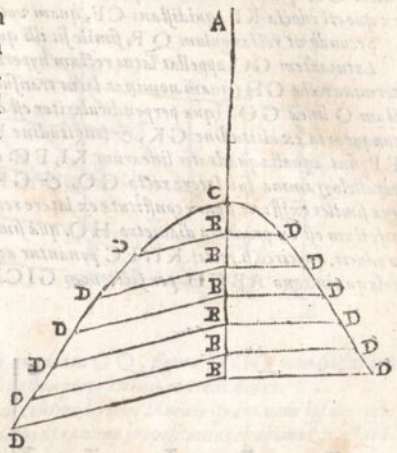
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [591] - 534
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VII.

REctâ AB diuisâ vtcunque in C ita tamen vt rectangulum ABC ad ABC, rectangulum eam obtineat rationem quam quadratum BD ad BD quadratum, ad æquales angulos applicatum ad rectam AB.

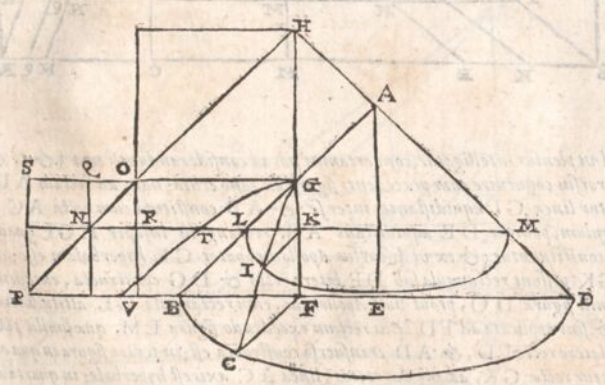
Dico CDB esse hyperbolam.



DEmonstratio manifesta est ex prima propositione huius.

Scholion.

OPeræ pretium duxi hanc propositionem hoc loco collocare, non quod aliquid à dictis diuersum contineat, sed vt nansciscerer occasionem ea quæ huc vsque in medium adducta sunt explicandi, & ea explanandi quæ Apollonius libro primo proposit. 12. nobis de natura hyperbolæ reliquit; cum ea tyrones potiùs à studio Conicarum sectionum arcere soleant quàm inuitare, conabor hoc loco per dilucidationem schematum, quæ hic apparent, rem ita manifestam reddere, vt orexim mouere cuiq. valeat ipsa facilitas. nam vt nonnulli autumant, affectata authoris obscuritas horrorem & auersionem parere nata est, quæ nihilominùs viris intelligentibus admirationem mouet.



1. Figura.

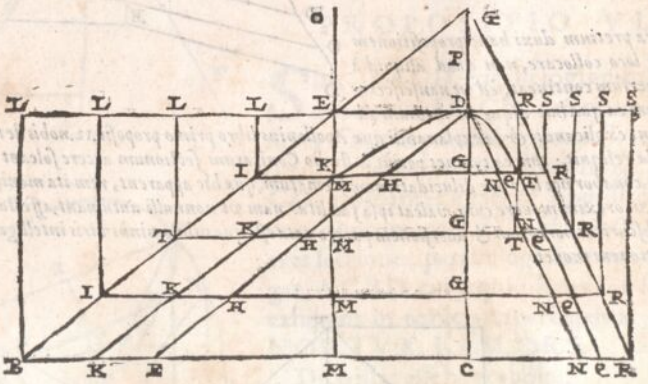
Conus ABCD *isosceli rectanguli cuius basis circularis* BCD *secetur per centrum* E *diametro* BD: *per quam & verticem coni* A *agatur planum* ABD, *deinde assumpto in diametro* BD, *quouis puncto* F *erigatur ex hoc normaliter ad diametrum* BD, *recta* FC; *fiatq. planum* HFC *occurrens rectæ* DA *productæ in* H. *Deinde per punctum quodlibet* K *lineæ* FG *statuatur* LKM *æquidistans diametro* BD: *secundùm quam parallelum planum collocetur* LIM *basi* BCD: *& sit* KI *communis sectio plani* HFC *& superficiei* LIM. *Fiat denique quadrato* KI *æquale rectangulum* GK *hoc est* LKM. *ex puncto tandem* H *demissa linea ad punctum* N, *ducatur* GO *æquidistans* KN: *&* FB *producta concurrat cum* HO *in puncto* P. *Dicit igitur Apollonius sectionem* GIC, *quam nomine hyperbolæ indigetat, habere has proprietates.*

Primò vt quæuis applicata ad rectam GF *æquidistans in plano* GIC, *possit rectangulum* GKN, *hoc est æquetur eidem; quod rectangulum ita determinat vt habeat nimirum altitudinem* GK *quantitatem interceptam inter* G *terminum diametri hyperbolici, &* K *punctum ex quo ducta* KI *æquidistans* CF, *quam vocat ordinatim positam ad diametrum* GF.

Secundò vt rectangulum QR *simile sit illi quod fit ex* OG, *in* GH *ducto.*

Latus autem GO *appellat latus rectum hyperbolæ ex eo quod normaliter ducta linea ex* H *termino rectæ* GH (*quam nominat latus transuersum eiusdem hyperbolæ* GIC,) *ad punctum* O *lineæ* GO: (*quæ perpendiculariter est erecta ad diametrum* HF.) *rectangula quæcunque orta ex altitudine* GK, *& longitudine* KN, *vel ex altitudine* GF *& longitudine* FP, *sint æqualia quadratis linearum* KI, FC: *excedunt autem rectangula* GKN, GFP *parallelogramma sub latere recto* GO, *&* GK, *vel* GO *&* GF, *figuris* QR, SB, *quæ similes existunt figuræ constitutæ ex latere recto* GO, *& transuerso* GH: *quod manifestum est ex producta diametro* HO. *quæ similia triangula* HOG *&* OQN, OSP, *producit. quocirca si rectis* KI, FC *ponantur æquales* KT, FV, *erit* GTV, *eadem hyperbola quæ in cono* ABCD *per sectionem* GICF *producta fuit.*

3. Figura.

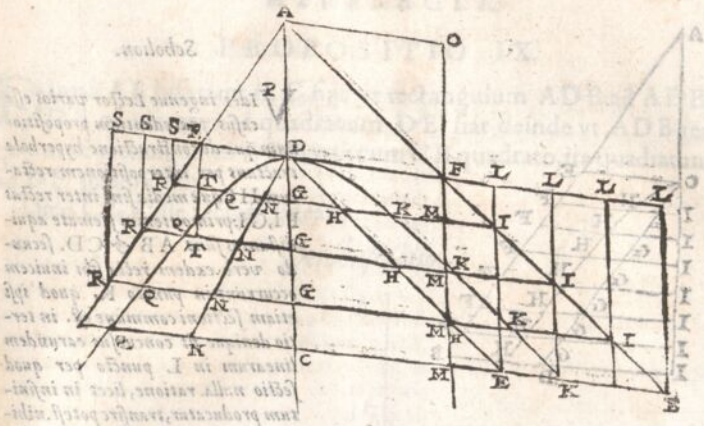


Quod vt plenius intelligatur, conuertamus nos ad considerandum scema 3. *&* 4. *& reperiemus ea prorsus conuenire cum præcedenti figura ex cono erutâ; nam ad rectam* AD *productæ applicantur lineæ* GI *æquidistantes inter se: &* AB *constitutâ cum rectâ* AC *ad quemlibet angulum, ponitur* DE *æquidistans* AB. *rectangulis insuper* HGI *quadrata* GK *æqualia constituantur: & ex vi discursus Apollonici patet* GK *hyperbolam esse; nam quadrata* GK *possunt rectangula sub* DF *latere recto &* DG *constructa, excedentia figurâ* ML *simili figuræ* DO, *prout vult Apollonius, cùm rectangula* GL *altitudinem habeant* DG, *& sint applicata ad* FD *latus rectum excedendo figura* LM, *quæ similis planè est illi quæ sub latere recto* FD, *&* AD *transuerso constructa est; in tertia figura in qua ordinatim applicantur rectæ* GK, *ad angulos rectos, lineæ* AC *axis est hyperbolæ; in quarta autem recta eadem* AC *tantum est, vna ex secundarijs diametris; quia ad obliquos angulos ordinatim positas dispescit. Recta quoque* AD *transuersa diameter & latus transuersum nihilominùs ab Apollonio appellatur, &* DF *rectum latus. secundum quod possunt omnes lineæ* GK *quæ ordinatim applicantur ad diametrum* AC. *punctum quoque* P *quod diuidit* AD *bifariam, centrum figuræ nuncupat.*

Sed prius quam vlterius pergamus, restat hoc loco elucidanda quæstiuncula cuius solutio luminis non parum secum adducet si benè percipiatur: cùm in præsenti propositione quam exponimus, vniuersaliter pronuntiatum sit secundùm primum scema. Rectâ AB *diuisâ vtcunque in* C, *vt rectangulum* ABC *ad* ABC, *rectangulum eam rationem obtineat quam quadratum* BD, *ad* BD *quadratum, exsurget* CDB *hyperbola, quare ab Apollonij videmur placito discedere qui videtur postulare vt rectangula* ABC *æqualia sint quadratis* BD:

An

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [593] - 536
PUBLIC DOMAIN



4. Figura.

an ſcilicet ſi rectangulis NGI, fiant æqualia quadrata GQ, figura DGQ non ſit futura hyperboles, ex mente Apollonij, quod ex ſenſu noſtræ propoſitionis concedi debet.

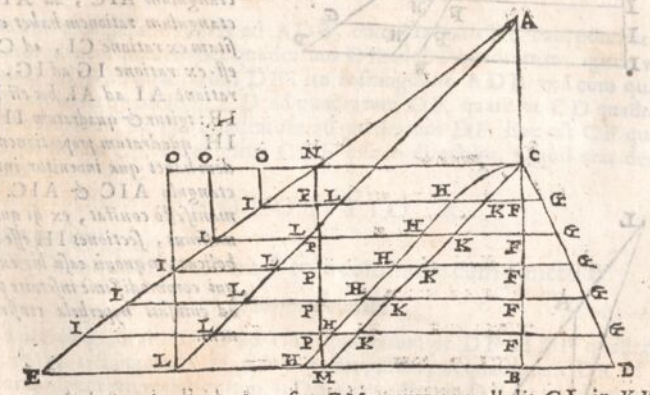
Ad ſoluendum hunc nodum nullam praxim commodiorem inuenio quàm eam ipſam conſtructionem accõmodandi Apollonico diſcurſui, quod proxima propoſitione conabimur præſtare.

PROPOSITIO VIII.

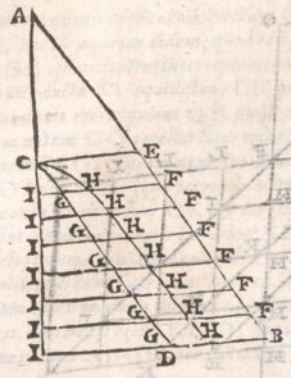
REcta AB diuiſa ſit vtcunque in C; ex quo ductâ quauis CD, ponatur quæcunque AL quam interſecent æquidiſtantes GL. Denique fiant rectangulis GFL æqualia quadrata FH.

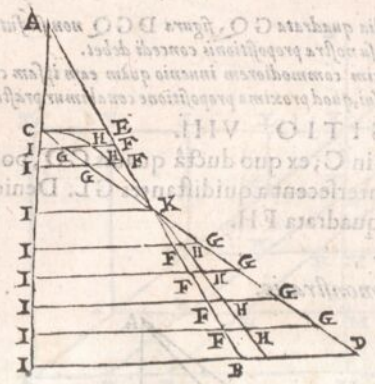
Dico CHB eſſe hyperbolam.

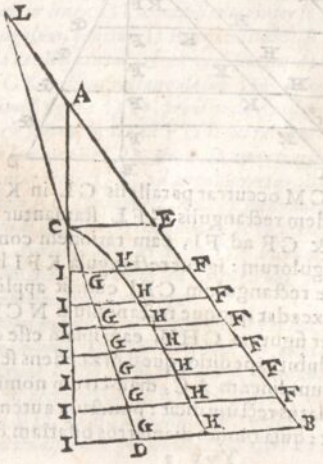
Demonſtratio.



FIat rectæ CB æqualis BM, & poſita CM occurrat parallelis GL in KK: erunt igitur rectis CF æquales FK; tandem rectangulis GFL ſtatuantur æqualia KFI, patet AIE lineam rectam eſſe & GF ad FI, eam rationem continere quam FK ad FI, ob æqualitatem rectangulorum: igitur rectangula KFI hoc eſt CF, æqualia erunt quadratis FH. quare rectangulum CFI cùm ſit applicatum ad rectam CN habens latitudinem CF excedat quoque rectangulum NCF figura OP ſimili figurę ſub NC, & CA, patet figuram CHH, eam ipſam eſſe quæ ab Apollonio deſcripta fuit: hinc igitur patet dubij expeditio: quod præcedens ſtholion in medium attulerat ſub finem dilucidandum. lineam AC, diametrum nominat & ſimul latus tranſuerſum lineæ CN, quam latus rectum dicit: punctum autem quod AC bifariam ſecat figuræ centrũ indigetat: quia omnes diametros bifariam diuidit.







Scholion.

VIdes ingenue Lector varios esse casus præcedentium propositionum quæ de constructione hyperbolæ tractant per interpositionem rectarum HI *quæ mediæ sint inter rectas* FI, GI: *primo etenim semate æquidistantes sunt* AB *&* CD. *secundo verò eædem rectæ sibi inuicem occurrunt in puncto* K. *quod ipsi etiam sectioni commune est. in tertio denique fit concursus earundem linearum in* L *puncto per quod sectio nulla ratione, licet in infinitum producatur, transire potest. nihilominùs veræ sunt & genuinæ hyperbolæ: ex eo solo capite quod rectangula* FIG, *æqualia sint quadratis* IH. *quod ex iis quæ præmissa sunt liquidò constat: rectangulum namq;* FIG *ad* FIG *rectangulum, proportionem habet compositam ex ratione* GI, *ad* GI, *&* *ex ratione* IF *ad* IF. *quare similiter quadratum* HI *ad* HI *quadratum, rationem habet ex ijsdem compositam: verum etiam rectangulum* AIC, *ad* AIC *rectangulum rationem habet compositam ex ratione* CI, *ad* CI *hoc est ex ratione* IG *ad* IG, *&* *ex ratione* AI *ad* AI, *hoc est* IF *ad* IF: *igitur & quadratum* IH, *ad* IH *quadratum proportionem eandem habet quæ inuenitur inter rectangula* AIC *&* AIC. *Vnde manifestò constat, ex ijs quæ præmisimus, sectiones* IH *esse hyperbolicas; in quouis casu hic exposito: qui commodissimè inseruire poterit ad cuiusuis hyperbolæ constructionem.*

PRO-

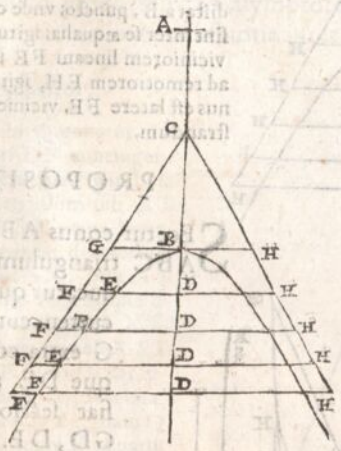
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [595] - 538
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO IX.

Diuisâ AB bifariam in C fiat vt rectangulum ADB ad ADB, ita DE quadratum ad quadratum DE. fiat deinde vt ADB rectangulum ad rectangulum ADB vnà cum CB quadrato, ita quadratum DE ad DF quadratum.

Dico CGF esse rectam lineam.

Demonstratio.



QVoniam rectangulum ADB ad ADB, cum quadrato BC eam ponatur continere rationem quam habet quadratum DE ad DF quadratum, igitur vt rectangulum ADB ad quadratum DE, ita rectangulum ADB vnà cum quadrato CB, hoc est ita quadratum CD ad quadratum DF. quare vt CD quadratum ad CD quadratum, ita DF quadratum ad quadratum DF. hoc est CF quadratum ad quadratum CF. Patet igitur CGF esse in directum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Ilsdem positis:

Dico nunquam punctum E fore commune cum puncto F.

Demonstratio.

QVoniam est quadratum CD ad CD quadratum vt DF ad DF quadratum, & ADB rectangulum, ad ADB rectangulum, vt quadratum DE ad DE, quadratum; igitur erit rectangulum ADB ad quadratum DE, vt quadratum CB, ad rectangulum FEH. ergo vt CB quadratum ad CB quadratum, ita rectangulum FEH ad FEH, rectangulum; igitur FEH rectangula inter se æqualia sunt: igitur FD quadratum cùm excedat quadratum ED, rectangulo FED, erit linea FD maior linea ED: non igitur erit vmquam commune punctum E cum puncto D. Quod fuit demonstrandum.

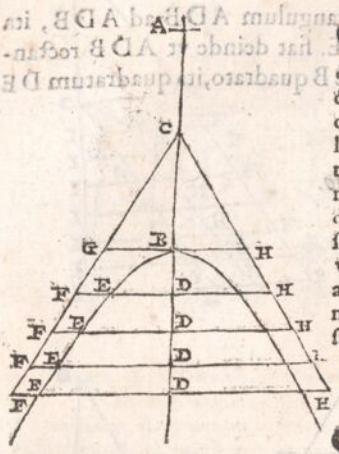
PROPOSITIO XI.

Ilsdem positis:

Dico quo remotius erit D à puncto B, eo FE recta remotior à linea GB minor erit FE, viciniore rectæ GB.

Demon-

Demonſtratio.

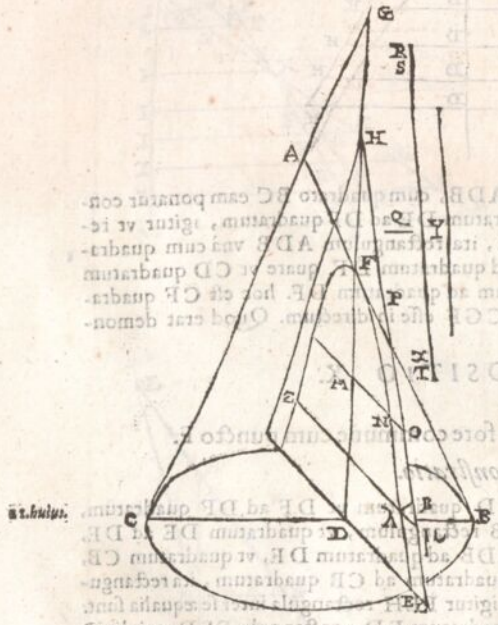


CVm rectangulum ADB ad ADB, rectangulum ſit vt quadratum DE ad DE, quadratum; igitur quo remotius D diſtat à B, puncto, eo maius erit latus DE, latere DE quod vicinius eſt rectæ GB. & conſequenter erit FD latus maius latere FD quo punctum D, remotius abeſt à puncto B, ac proinde idem aſſerendum de recta EH, quæ maiore interuallo diſtat à B, puncto; vnde cùm FEH rectangula ſint inter ſe æqualia; igitur remotior FE eſt ad viciniorem lineam FE ſicut vicinior EH, eſt ad remotiorem EH, igitur FE, remotius minus eſt latere FE, viciniore. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

SEcetur conus ABC plano per axem ABC triangulum exhibens in quo ducatur quæuis recta DF concurrens cum CA producta in G extra conum: erectâ denique DE normaliter ad CB, fiat ſectio ſecundùm rectas GD, DE. tandem diuisâ GF in H bifariam, fiat vt rectangulum GMF ad rectangulum GMF vnà cum quadrato HF ita quadratum MN ad MO quadratum, & ducatur HO.

Dico HL lineam ſectioni FDE nunquam occurſuram.



Demonſtratio.

POnatur MO æquidiſtans DL: oſtenſum eſt rectangulum GMF ad a GDF rectangulum eam habere rationem quam MN quadratum ad quadratum DE, ſed vt GMF rectangulum ad rectangulum GMF vnà cum quadrato HF, hoc eſt vt rectangulum GMF ad HM quadratum, ita eſt ex conſtructione MN quadratum ad MO quadratum: igitur vt GMF rectangulum ad MN quadratum ita eſt quadratum HM, ad MO quadratum hoc eſt HD quadratum ad DL quadratum ſed per præcedentem propoſitionem oſtenſum eſt punctum E nunquam fore commune cum puncto L; ergo HL ſectioni non occurret. Quod demonſtrandum fuit.

Corolla-

Corollarium.

IIsdem positis sequitur lineam HL, quo magis producetur, eo sectioni propinquiorem fieri. Ostensum est enim penultima propositione punctum L quo maiori interuallo distabit à puncto H, eo vicinius futurum sectioni FNE. Igitur linea HL quo magis protrahetur, eo sectioni propinquior fiet.

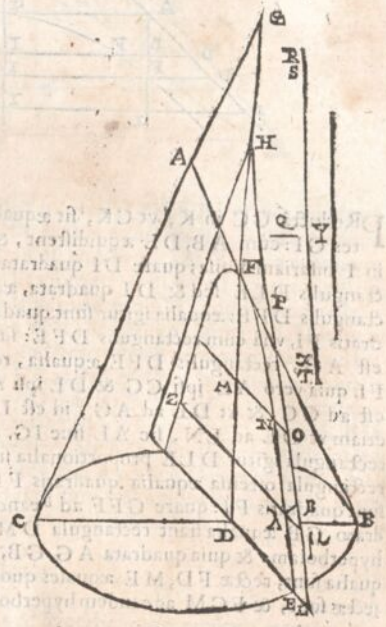
PROPOSITIO XIII.

IIsdem positis:

Dico hyperbolam productam ad asymptoton productam ita vicinam fieri vt quotuis interuallo dato distantia inter hæc minor sit futura.

Demonstratio.

DAtum sit interuallum Q, ponatur FP in termino diametri DF contingens sectionem FNE: erit hæc parallela MO. fiat autem rectangulum sub RS quæ sit minor Q & alia ST æquale quadrato FP. & applicetur ad diametrum FD ordinatim pars eius SX, quæ XT residuum habeat æquale RS. Sitque illa EDV. igitur EL æqualis est XT, cùm ELV rectangulum, hoc est RST sit æquale quadrato FP. Quod si fiat rectangulum super Q, & Y, æquale quadrato FP, erit SX maior Y, nam Q maior est quàm sit RS. quare si ponatur Y ordinatim ad diametrum FD, cadet super rectam VE. sit igitur illa Zλ; & Q æqualis λμ. quod si itaque λμ & EL normales sint ad asymptotos patet propositio, cùm λμ posita sit æqualis Q, & nihilominùs EL ostensa sit illa minor: à normalibus enim ad asymptotos ductis à sectione, desumitur asymptotorum à sectione distantia. Quod si λμ, EL non sint normales ad HL, ex λ & E ducantur normales λβ, EY. cùm itaque λμ & EL, item λβ, & EY parallelæ sint, & anguli λμβ, ELY æquales, & tamen latus λμ ostensum sit maius esse latere EL, etiam reliqua latera reliquis lateribus, & λβ, latere EY maius erit, ergo distantia EY minor est data Q. Quod fuit demonstrandum.

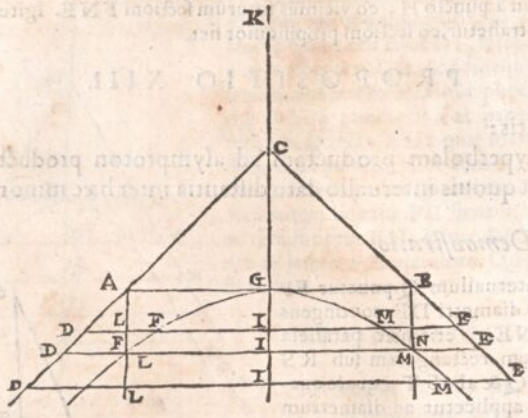


PROPOSITIO XIV.

ANgulum ACB subtendat linea AB, qua bifariam in G diuisa, ponantur AB æquidistantes DE, quæ in F secentur, vt DFE rectangula æqualia sint quadrato AG.

Dico GFF ad eandem esse hyperbolam.

Demonſtratio.



PRoductâ GC in K, vt CK, ſit æqualis CG, ponantur AL, BN æquidiſtantes GI: cùm AB, DE æquidiſtent, & AB in G diuiſa ſit bifariam, erit & DE in I bifariam diuiſa; quare DI quadrata, æqualia ſunt quadratis LI vnà cum[a] rectangulis DLE ſed & DI quadrata, æquantur etiam FI quadratis, vnà cum rectangulis DFE; æqualia igitur ſunt quadrata LI, vnà cum rectangulis DLE, quadratis FI, vnà cum rectangulis DFE: ſunt autem per hypotheſim quadrata LI id eſt AG, rectangulis DFE æqualia, reliqua igitur DLE æqualia ſunt quadratis FI. quia verò AL ipſi CG & DL ipſi AG æquidiſtat, vt DL ad LA, ſic AG eſt ad GC, & vt DL ad AG, id eſt LI, ſic AL hoc eſt GI, ad GC; ergo etiam vt DL ad LN, ſic AL ſiue IG, ad GK; & vt DL ad LE, ſic IG ad IK: rectangula igitur DLE proportionalia ſunt rectangulis GIK: ſunt autem DLE rectangula oſtenſa æqualia quadratis FI, igitur GIK rectangula proportionalia ſunt quadratis FI: quare GFF ad[b] eandem ſunt hyperbolam ſimili modo ſi quadrato GB æqualia fiant rectangula DME, oſtendentur puncta MMG eſſe ad hyperbolam: & quia quadrata AG, GB, adeoque & rectangula DFE, DME æqualia ſunt, rectæ FD, ME æquales quoque ſunt: vnde & reſiduæ FM in I, biſſectæ ſunt, & FGM ad eandem hyperbolam.

[a] *Per elementa.*

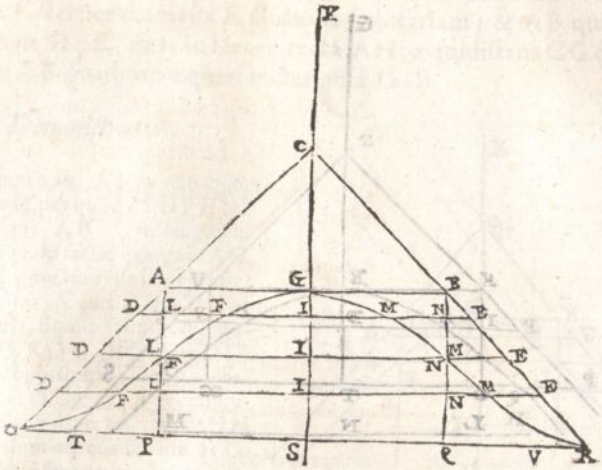
[b] *7 huius.*

PROPOSITIO XV.

ILſdem poſitis:
Dico AC, CB eſſe aſymptotos.

Demon-

Demonſtratio.



OCcurrant enim ſi fieri poteſt hyperbolæ in punctis O & R. & fiat quadrato AG, æquale rectangulum OTR. erit itaque punctum T, in ipſa ſectione GFF, adeoque & in recta AO. Idem igitur eſt punctum O & T, cùm vtrumque duarum linearum OT, AO, communis ſit interſectio: quod eſt contra conſtructionem, quâ OTR, rectangulum æquale fit quadrato AG: eodem modo oſtendetur punctum R commune non eſſe rectæ CR, & ſectioni: igitur FGM hyperbola rectis AC, CB, nuſquam occurrit. Quod verò ſemper magis ac magis ad hyperbolam accedant, ſic oſtendo: cùm DFE rectangula per hypotheſim æqualia ſint quadrato AG adeoque & inter ſe, vt DF ad DF, ſic FE ad FE, reciprocè: ſed FE quæ remotior eſt à vertice G maior eſt, FE viciniore, igitur & FD, rectæ AG viciniori, maior eſt FD, remotiore ab AG: ſimiliter oſtendetur rectas ME eò magis decreſcere quo remotiores ſunt à vertice G: rectæ igitur AC, CB magis ſemper magiſque ad ſectionem accedunt; & nuſquam occurrunt. aſymproti ſunt igitur, hyperbolæ GFF. Quod erat demonſtrandum.

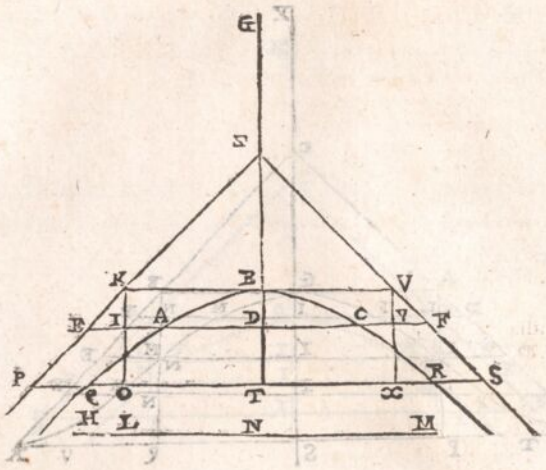
Corollarium.

HInc ſequitur rectas, inter aſymptotos & hyperbolam interceptas æquales eſſe: oſtenſæ ſunt enim in propoſ. 14. huius rectæ DF, ME æquales. vnde cùm per 15. huius puncta D & E ad aſymptotos ſint, patet veritas Corollarij.

PROPOSITIO XVI.

DAtæ hyperbolæ aſymptotos ponere.

Constructio & demonstratio.



SIt A B C hyperbola cuius asymptotos exhibere oportet: diameter sectionis sit G B, quæ in Z bifariam diuisa ordinatim ad illam positæ sint A D C: deinde fiat rectangulo G D B, aliud simile H L M. quod æquale quoque sit quadrato D A, tum H M, diuisâ bifariam in N, fiant D E, D F, æquales N H dimidiæ H M. ponanturque ex centro lineę Z E, Z F. Dico illas esse asymptotos hyperbolæ A B C. Posità enim B K, quæ æquidistet D E, ponatur K O, parallela B D, & P S æquidistans K B. Erit ergo vt E I ad I K, id est B D, sic K B ad B Z, siue K V, id est I Y dupla K B ad G B duplam Z B, & permutando vt E I ad I Y, sic B D ad B G, & E I ad I F, vt B D ad D G: vnde E I F rectangulum simile est rectangulo G D B adeoque & simile rectangulo H L M; & cum E D, H N ex constructione æquales sint, æqualia quoque sunt rectangula E I F, H L M: quare & E I F, rectangulum æquale quoque est quadrato A D. eodem modo ostenditur P O S rectangulum simile rectangulo G T B & æquale quadrato Q T. Rursum cùm quadratum E D, tam æquale sit[a] quadrato A D, vnà cum rectangulo E A F, quàm E I F rectangulo cum quadrato I D, quadratum A D vnà cum rectangulo E A F æquale est quadrato I D vnà cum rectangulo E I F: demptis igitur æqualibus, A D quadrato & rectangulo E I F, manet E A F rectangulum æquale quadrato I D, id est K B: eodem modo ostenditur P Q S rectangulum æquari quadrato K B; æqualia igitur sunt rectangula E A F, P Q S: vnde Z E, Z F asymptoti[b] sunt hyperbolæ A B C. Exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a Ex 14. huius.

b 15. huius.

Corollarium.

HInc sequitur, positis asymptotis E Z, Z F: hyperbolæ, A B C, & E A F ordinatim ad diametrum G B, &c. vt antè rectangula G D B similia esse rectangulis E I F: manifesta est demonstratio, ex discursu in priori demonstratione adhibito.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [601] - 544
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XVII.

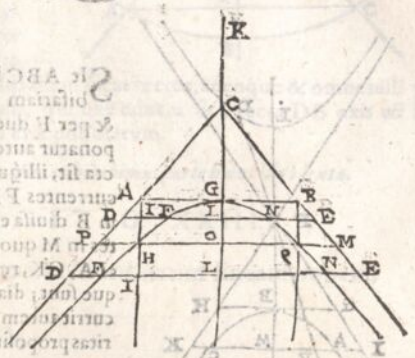
REcta AB inter asymptotos AC, CB, hyperbolæ FGN constituta, in G vertice diametri KG diuisa sit bifariam; & AB quidem, æquidistent DFE, quas in I secet recta AH, æquidistans CG diametro. Dico LF quadratis æquari rectangula DIE.

Demonstratio.

ASsumpto in AI puncto quodam H, per quod ducta PHM, æquidistans AB, rectangulum PHM æquale faciat quadrato AG; patet H punctum esse in a perimetro sectionis, & quia DIE, PHM rectangula, similia b sunt rectangulis KLG, KOG, rectangula DIE PHM proportionalia sunt quadratis FL, HO: & DIE rectangulum ad quadratum FL, vt PHM rectangulum ad quadratum HO; æqualia autē sunt ex constructo quadratum HO id est AG, & rectangulum PHM; æquantur igitur DIE rectangula quadratis FL. Quod erat demonstrandum.

a 14. huius.

b Coroll. 18. huius.



PROPOSITIO XVIII.

IIsdem positis:

Dico rectangula DFE inter se æqualia esse, vel quadrato AG.

Demonstratio.

QVadratis DL æqualia sunt rectangula DIE vnà cum quadratis LI; sed LD quadrata quoque æqualia sunt quadratis FL, vnà cum rectangulis DFE, quadrata igitur LF vnà cum rectangulis DFE, æqualia sunt quadratis LI vnà cum rectangulis DIE; sed FL quadratis, per præcedentem æqualia sunt rectangula DIE; igitur & DFE rectangula reliqua, æqualia sunt quadratis IL id est AG quadrato: vnde & inter se quoque sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc patet, rectas DF, eo fieri minores, quo remotiores sunt à contingente sibi parallela, patet ex antè dictis.

PROPOSITIO XIX.

CViusuis lineæ quæ in duobus punctis hyperbolæ occurrit diametrum assignare.

Constructio & demonstratio.

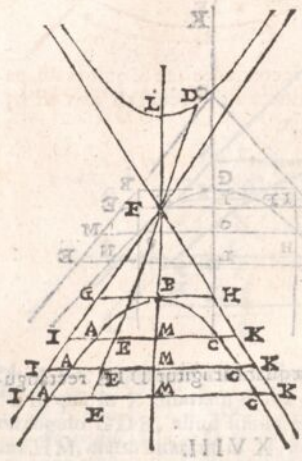
HYperbolam ABC secet recta quæuis AC, oportet illius assignare diametrum, posita AC æquidistante DE, bisecentur AC, DE in G & F punctis, per quæ recta agatur BF. dico illam esse diametrum quæsitam: sin verò sit alia quæuis linea LH diameter, occurratque DE rectæ in H: quia igitur LH diameter est æquidistantium AC, DE, bisecat



a *Defin. 2. huius.* biſecat a eaſdem in G & H. ponebatur autem DE biſecta in F; puncta igitur F & H, vnum idemque ſunt: & LH linea eadem cum BF: diameter igitur quæſita eſt BF.

PROPOSITIO XX.

Diametri omnes hyperbolæ, in vno eodemq; conueniunt puncto.



b *16. huius.*

c *Coroll. 15. huius.*
d *Defin. 2. huius.*

Demonſtratio.

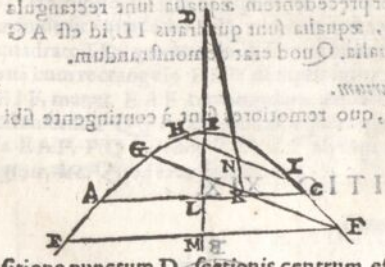
Sit ABC hyperbolæ diameter DE, quã diuisã bifariam in F; ponantur b aſymptoti FG, FH: & per F ducatur FB occurrens hyperbolę in B: ponatur autem per B linea GH quæ in B biſecta ſit, illiq; æquidiſtantes ponantur IAK, occurrentes FB lineę in M: quoniam igitur HG in B diuiſa eſt bifariam, rectæ IK illi æquidiſtantes in M quoque biſecantur: æquales autem ſunt c IA, CK, reſiduæ igitur AM, MC æquales quoque ſunt; diameter igitur d ſectionis eſt FB: occurrit autem ED diametro in F. conſtat ergo veritas propoſitionis.

Corollarium.

Oſtenſum eſt propoſition. 3. huius, rectas omnes, per F ductas, & oppoſitis ſectionibus interceptas, in F bifariam diuidi; punctum verò illud, centrum cum Apollonio apellamus; quod diametros omnes bifariam diuidit.

PROPOSITIO XXI.

Datæ hyperbolæ centrum aſſignare.



e *19. huius.*

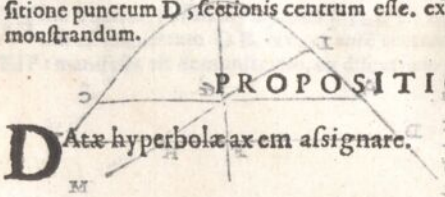
f *Ex elementis.*

Conſtructio & demonſtratio.

Sit ABC hyperbola cuius centrum oportet aſſignare: ponantur AC, EF duę quæuis parallelę, e quarum diameter ducatur DB, ponantur autem & aliæ binæ æquidiſtantes CG, FH; quibus, in N & K biſſectis, ponatur diameter NK, quæ producta f occurret DB diametro in puncto quodam D; manifeſtum eſt ex præcedenti propoſitione punctum D, ſectionis centrum eſſe. exhibuimus ergo, &c. Quod erat demonſtrandum.

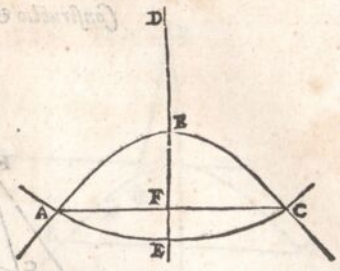
PROPOSITIO XXII.

Datæ hyperbolæ axem aſſignare.



Conſtru-

Constructio & demonstratio.



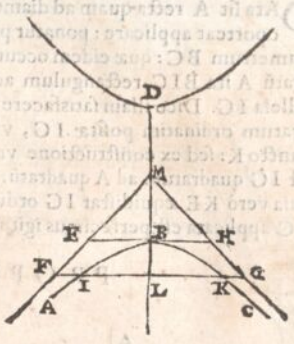
DAta sit hyperbola ABC cuius axem oportet exhibere: inuento a centro D; describatur interuallo quouis, circulus AEC occurrens hyperbolæ in A & C punctis, quibus iunctis, secetur AC bifariam in F, ducaturque DBF: dico DF axem esse hyperbolæ: cùm enim DE semidiameter circuli AEC, bifariam diuidat rectam AC, in circulo applicatam, ad angulos illam secat rectos, adeoque & omnes illi parallelas; igitur cùm è centro hyperbolæ, quoque educta sit, recta DB axis est hyperbolæ ABC. fecimus igitur quod erat postulatum. a 21. huius.

Puncta intersectionum A & C *Geometrice exhibebimus parte huius libri sexta.*

PROPOSITIO XXIII.

AD datam diametrum in hyperbola ordinatim lineam ponere.

Constructio & demonstratio.



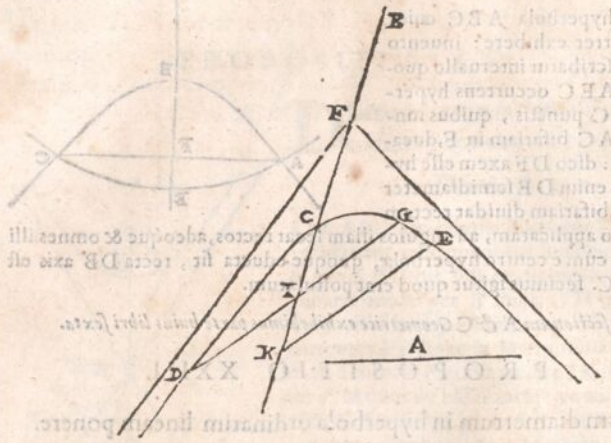
DAta sit hyperbola ABC, cuius diameter data sit DB, oportet illi ordinatim applicare lineam IK: diuisa DB bifariam in M, ponantur hyperbolæ asymptoti b DE, DH: actâque per B verticem diametri, rectâ EH, quæ in B diuisa sit bifariam, ponatur EH, æquidistans FG, occurrens sectioni in I & K. dico IK lineam omnesque illi æquidistantes bifariam diuidi à diametro DB: cùm enim EH in B diuisa sit bifariam, ipsique EH æquidistet FG, erit & illa in L bifariam diuisa: Sunt autem & FI, c KG æquales; igitur & reliquæ LI, LK inter se æquales sunt; igitur IK lineæ omnesq; illi æquidistantes à DB diametro bisecantur. Applicuimus igitur ad diametrum DB ordinatim lineam IK. Quod erat faciendum. b 16. huius. c Coroll. 15. huius.

PROPOSITIO XXIV.

DAtâ hyperbolâ & diametro, applicare datam rectam ordinatim ad eandem diametrum.

Constru-

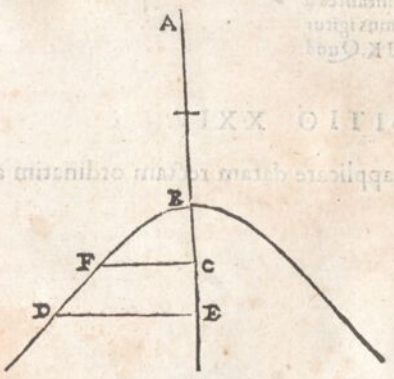
Constructio & demonstratio.



DAta sit A recta quam ad diametrum datam BC hyperbolæ DCE, ordinatim oporteat applicare: ponatur per præcedentem recta quæuis DG, ordinatim ad diametrum BC: quæ eidem occurrat in puncto I: & fiat vt quadratum IG ad quadratũ A ita BIC rectangulum ad BKC rectangulum: & per K ponatur KE parallela IG. Dico illam satisfacere petitioni; est enim rectangulum BIC ad quadratum ordinatim positæ IG, vt [a] rectangulum BKC ad ordinatim positam in puncto K: sed ex constructione vt rectangulum BIC ad rectangulum BKC, ita est IG quadratum ad A quadratũ. Quadratum igitur KE, æquale est A quadrato: quia verò KE æquidistat IG ordinatim positę, recta quoque KE ordinatim ad BC applicata est, perfecimus igitur quod postulatur.

a 1. huius.

PROPOSITIO XXV.



OPorteat ex dato in diametro hyperbolæ puncto ordinatim lineam applicare.

Constructio & demonstratio.

DAtum sit in diametro AB, punctum C, ex quo oporteat rectam ad eamdem diametrum ordinatim applicare: ponatur quæuis [b] ordinatim DE, cui ex C æquidistans ducatur CF. patet CF satisfacere petitioni.

b 13. huius.

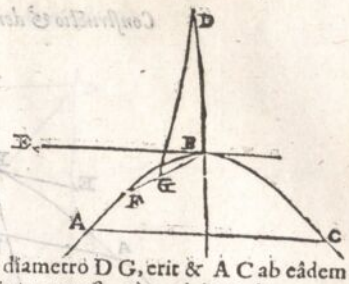
PROPOSITIO XXVI.

OMnis linea per verticem diametri hyperbolæ ducta, & ordinatim ad eandem diametrum positæ æquidistans, sectionem contingit.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [605] - 548
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.



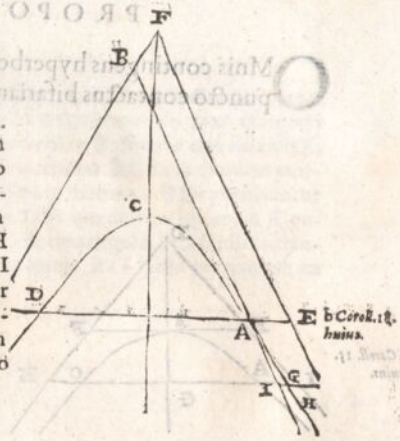
SIt ad ABC hyperbolæ diametrum DB, ordinatim applicata AC, cui per B verticem diametri æquidistans ponatur EB, dico illam contingere sectionem. si enim non contingat, occurrat denuo hyperbolæ in quodam puncto F: diuisaque FB bifariam in G, ponatur diameter GD: cùm igitur FB æquidistans AC, bifariam secetur à diametro DG, erit & AC ab eâdem diametro [a] bifariam quoque diuisa: quod fieri non potest, cùm ad DB diametrum ordinatim ponatur applicata: igitur EB hyperbolam non secat, sed contingit. Quod erat demonstrandum.

[a] *Defin. 25 huius.*

PROPOSITIO XXVII.

OMnis contingens hyperbolam, vtrique asymptotorum occurrit.

Demonstratio.



REcta AB contingat hyperbolam ACD in A. dico AB productam vtrique asymptotorum occurrere. Sin vero, æquidistet AB asymptoto EF; positaque per A quauis linea EAD, ducatur æquidistans HI, quæ AB lineæ occurrat in I, hyperbolæ in G: quoniam igitur tam AI, EH lineæ quàm EA, HI æquidistant, rectę EA, HI æquales sunt: est autem EA [b] maior HG; igitur & HI maior est HG. punctum igitur I cadit intra sectionem, adeoque AB, recta hyperbolam non contingit: non igitur AB æquidistat asymptoto EF: sed vtrique occurrit.

[b] *Coroll. 18. huius.*

Corollarium.

HInc sequitur primò ordinatim positas, vtrimque ad asymptotos pertingere, cum tangenti æquidistent:

Sequitur secundò rectas omnes intra asymptotos positas, quę diametri non sunt, eisque non æquidistant, eisdem occurrere.

Sequitur tertiò lineas omnes quæ diametri non sunt; sectioni in duobus tantum punctis occurrere; quod patet, cùm demonstratum sit, rectam omnem occurrentem sectioni quę nec contingit nec asymptoto æquidistat, ita à sectione diuisam esse, vt partes inter sectionem & asymptotos interceptę, sint inter se æquales, nec posset diuidi vlla linea in quatuor punctis vt rectangula quatuor æqualia exsurgant sub partibus lineæ diuisæ.

[c] *Coroll. 15. huius.*

PROPOSITIO XXVIII.

PEr datum in perimetro sectionis punctum contingentem ducere:

Conſtructio & demonſtratio.

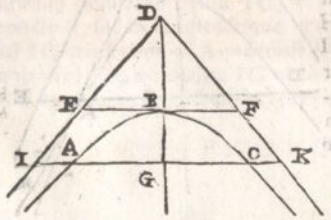


SIt in A B C hyperbolæ perimetro datum punctum B, per quod oportet contingentem ducere. Inuento centro D, ponatur D B diameter, & ad illam ordinatim linea A C, cui per B parallela ponatur E F. conſtat ex præcedenti propoſitione E F contingere hyperbolam in B.

PROPOSITIO XXIX.

OMnis contingens hyperbolam, & cum aſymptotis conueniens, in puncto contactus bifariam ſecatur.

Demonſtratio.



OCcurrat E B F, contingens hyperbolam A B C in B; vtrique aſymptotorum in E & F; dico E F in B diuidi bifariam. Ductâ diametro D B ponatur ad illã ordinatim A G C, vtrique aſymptotorum occurrens in I & K: erit igitur A C in G bifariam diuiſa: oſtenſæ autem ſunt I A, C K [a] quoque æquales, tota igitur I K in G, adeoque E F illi æquidiſtans, in B ſecta eſt bifariam. Quod demonſtrare oportebat.

[a] *Coroll. 15. huius.*

PROPOSITIO XXX.

NVlla linea, contingens hyperbolam per centrum tranſibit.

Demonſtratio.

PAtet, cùm omnis contingens vtrique aſymptotorum oſtenſa [b] ſit occurrere in diuerſis punctis.

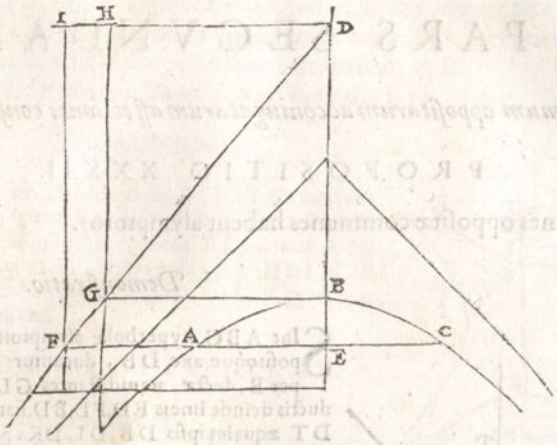
[b] *27. huius.*

PROPOSITIO XXXI.

IN data hyperbola datæ diametri latus rectum aſſignare.

Con-

Constructio & demonstratio.



SIt datæ hyperbolæ A B C assignata diameter D B, cuius latus rectum oporteat exhibere. Ponatur contingens hyperbolam recta B G, in termino datæ diametri D B. Cui ponatur æquidistans A C, diametro occurrens in E: & fiant tres lineæ B E, E A, E F proportionales, iuncta deinde recta D F occurrat B G in G quodam puncto: Dico rectam B G esse latus rectum quod inseruit diametro B D; perficiantur enim parallelogramma B H, E I circa diametrum D F; quadratum igitur A E potest rectangulum F B, superatque rectangulum G E, rectangulo F G simili rectangulo G D, quod lineis D B G continetur: linea igitur B G latus rectum est ex mente Apollonij.

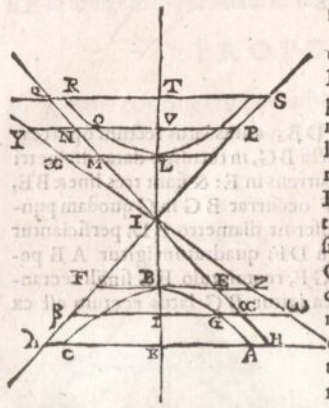
HYPERBOLÆ
PARS SECVNDA

Sectionum oppositarum ac coniugatarum affectiones considerat.

PROPOSITIO XXXII.

SEctiones oppositæ communes habent asymptotos.

Demonstratio.



SInt ABC hyperbolæ asymptoti DE, DF: positoque axe DB, ducantur contingenti per B, ductæ, æquidistantes GI, AK: productis deinde lineis ED, FD, BD, fiant DL, DV, DT æquales ipsis DB, DI, DK; ponanturque per L, V, T lineæ ML, NP, QS parallelę lineis EB, IG, HK; quoniam igitur æquales sunt lineæ DL, DB, & anguli DLM, [a] DBE ad axem recti; triangula DLM, DBE adeoque & latera LM, BE æqualia sunt: similiter ostenduntur latera VN, TQ æqualia lateribus [α] HK: igitur si fiant LM quadrato æqualia rectangula NOP, QRS; puncta L, O, R [b] ad hyperbolam sunt, cuius asymptoti DM, DP: & NOP, QRS rectangula æqualia sunt rectangulis αGβ, HAλ quia EB, LM quadrata æquantur; æqualia autem sunt quadrata NV, QT quadratis [α] HK; reliqua igitur quadrata OV, RT æqualia sunt reliquis GI, AK; sunt autem per constructionem distantiæ DL, DV, DT æquales distantiis DB, DI, DK, [c] oppositę igitur sectiones sunt LOR, BGA; quę communibus gaudent asymptotis. Quod erat demonstrandum.

a Ex defin. ordinatim positarum.

b 14. huius.

c Ex 3. huius.

PROPOSITIO XXXIII.

SEctiones oppositæ latera recta habent æqualia, quæ communi inseruiunt diametro.

Demonstratio.

EAdem assumatur figura; sitque BZ latus rectum hyperbolę ABC, & per Z & D centrum, recta ducatur, occurrens LM lineæ in X: patet LX æquari ZB (cùm DB, DL lineæ æquales sint, & anguli DLM, DBE æquales, ob LM, BE parallelas.) dico autem LX latus rectum esse hyperbolę ROL: recta ZX producta, occurrat NV, [α] lineis in Y & ω: quoniam igitur ZB latus rectum est, & GI ordinatim posita ad diametrum DB, proportionales sunt [d] lineæ BI, GI, [ιω] est autem BI æqualis LV, per hypothesim, & ex demonstratione præcedenti, rectæ IG, [ιω] æquales VO, VY: rectę quoque LV, VO, VY proportionales sunt: quare LX latus [e] rectum est hyperbolę LOR. sectiones igitur oppositę, &c. Quod erat demonstrandum.

d Ex 31. huius.

e Ibid.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [609] - 552
PUBLIC DOMAIN

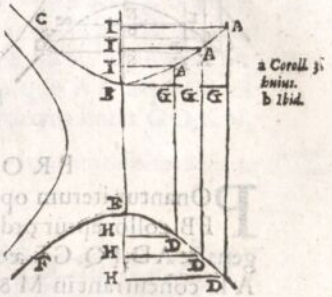
PROPOSITIO XXXIV.

SInt A B C, D E F oppositæ sectiones, quarum communis est diameter B E: cui æquidistantes ponantur quæuis A D, occurrentes contingenti per B actæ in G; ponanturq; ordinatim A I:

Dico A G D rectangula æquari rectangulis B I E.

Demonstratio.

POnantur ex D ordinatim D H ad diametrum B E. cùm igitur tam A D, I H, quàm A I, G B, [a] D H lineæ æquidistent, erunt A I æquales D H: & [b] H E æquales I B; rectangula igitur H B I id est D G A, æqualia sunt rectangulis E I B. Quod erat demonstrandum.



a *Coroll. 3. huius.*
b *Ibid.*

PROPOSITIO XXXV.

EAdem manente figurâ:

Dico A G D rectangula proportionalia esse quadratis G B.

Demonstratio.

ESt enim B I E rectangulum ad rectangulum B I F, vt [c] A I quadratum ad quadratum A I, id est B G ad quadratum B G: sed A G D [d] rectangula æqualia sunt rectangulis B I E: quadratis igitur B G, proportionalia quoque sunt rectangula A G D; quod erat demonstrandum.

c *Ex 1. huius.*
d *34. huius:*

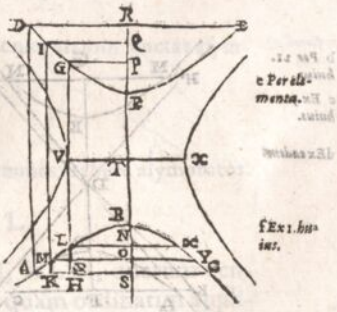
PROPOSITIO XXXVI.

SInt sectiones oppositæ A B C, D E F, & diametro cuiuis E B, ponantur parallelæ G H, I K; occurrentes A C ordinatim positæ ad E B, in punctis K & H.

Dico G H L rectangulum ad rectangulum I K M, eandem habere rationem, quam rectangulum A H C ad A K C rectangulum.

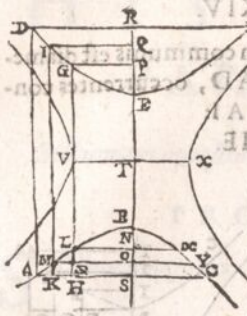
Demonstratio.

POsitâ A D æquidistante E B, constituantur ordinatim I Q, G P, L N, M O, D R ad diametrũ E B: erit ergo [e] R E S rectangulum, æquale rectangulis R Q S, vnà cum rectangulo Q E O. Similiter rectangulum Q E O æquale rectangulis Q P O, P E N: quadratum autem A S æquale est rectangulo A K C, vnà cum K S quadrato; quemadmodum etiam quadratum M O æquale est rectangulo M Z Y, vnà cum Z O quadrato: est autem rectangulum R E S ad quadratum A S, [f] vt Q E O rectangulum ad quadratum M O id est K S. Igitur & reliquum rectangulum R Q S est ad reliquum A K C, vt Q E O rectangulum ad quadratum K S; & permutando R Q S rectangulum ad rectangulũ Q E O, est vt rectangulum A K C, ad K S quadratum hoc est



e *Per elementa.*
f *Ex 1. huius.*

a Ex 34. huius.

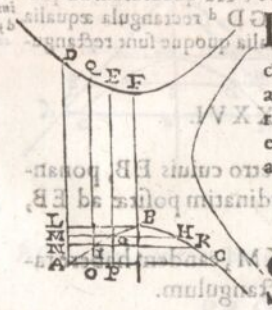


MO. est autem RQS a rectangulum æquale IKM rectangulo: igitur & IKM rectangulum, est ad rectangulum QEO, vt rectangulum AKC ad KS quadratum. erat autem RES rectangulum ad quadratum AS, vt rectangulum QEO ad quadratum MO. Igitur vt QEO rectangulum hoc est EOB ad quadratum MO, ita est RQS rectangulum hoc est IKM, ad AKC rectangulum. eodem discursu demonstratur rectangulum GHL ad AHC, eamdem rationem habere quam ENB rectangulum ad quadratum NL, hoc est quam rectangulum EOB ad quadratum MO. Igitur rectangulum AKC ad IKM, eamdem habet rationem, quam AHC, ad rectangulum GHL, & GHL rectangulum ad rectangulum IKM eamdem habet rationem, quam rectangulum AHC ad AKC rectangulum. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

PONantur iterum oppositæ sectiones ABC, DEF, & ad diametrum FB collocentur ordinatim GH, IK, AC. Ponaturq; BL contingens & AD, IQ, GE æquidistent FB: denique GH, IK protractæ cum AD concurrant in M & N.

Dico rectangulum GMH ad INK, eamdem rationem obtinere, quam GPE rectangulum ad rectangulum IOQ.



Demonstratio.

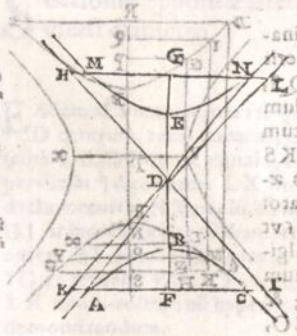
PEr præcedentem, rectangulum EPG ad QOI rectangulum, eam habet rationem, quam APC rectangulum ad rectangulũ AOC: sed rectangulo APC, æquatur GMH rectangulum, & rectangulum AOC, rectangulo INK. rectangulum igitur GMH ad INK eamdem rationem obtinet, quam IOQ rectangulum ad rectangulum GPE. Quod fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

SIt hyperbola ABC, oporteat illi oppositam constituere.

Constructio & demonstratio.

b Per 21. huius. c Ex 52. huius. d Ex eadem



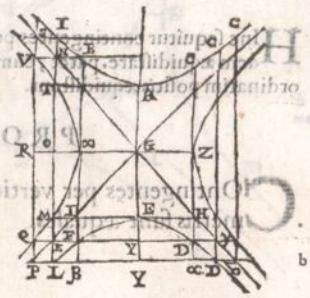
INuento centro b hyperbolæ ABC, nimirum D, erit hoc commune etiam alteri c hyperbolę, quæ inquiritur; vlterius, si asymptoti DK, DI ponantur hyperbolæ ABC, illæ similiter productæ, non minus quam diametri d communes erunt. Diuisâ insuper AC ordinatim positâ, ad quamlibet diametrũ DB, bifariam in F, si fiat DB æqualis DE, & DF æqualis DG, & per G collocetur MGN æquidistans AC; fiant autem & MG, GN lineæ æquales lineis AF, FC, & per M, E, N hyperbola describatur; patet illam satisfacere petitioni: erit enim rectangulum BFB æquale BGE rectangulo, & quadratũ AF, æquale GM quadrato: quare similis erit & æqualis hyperbola ABC hyperbo-

læ MEN, & ad diametros communes constituta adcoque & a opposita hyperbolæ ABC; constituimus igitur datæ hyperbolæ alteram oppositam, quod fuerat requisitum. a Ex 3. huius.

PROPOSITIO XXXIX.

SIt ABC, DEF oppositarum sectionum diameter transuersa AE, centrum G: actaque per E contingente HI, quæ HG, GI asymptotis occurrat in H & I, ponantur per I & H parallelæ diametro AE, quæ DEF hyperbolæ occurrant in D & F, & per G ponatur ZG æquidistans HI, deinde FD occurrat asymptoto IG in K: & per K ducatur LMN æquidistans AE, occurrens DEF hyperbolæ in L puncto, per quod acta ordinatim LD occurrat IG in P, ex quo AE æquidistans ponatur PRS: productæ autem EI, DF, FI occurrant lineis GO, KN, PR in XMQ.

Dico puncta illa esse ad hyperbolam coniugatam ipsi DEF, quam in X contingat XI.



b 1. huius.

Demonstratio.

FIant MK, PQ lineis æquales NT, SV. quoniam IG, KG, PG parallelogramma sunt, quadratum YF ad quadratum YL, id est quadratum EI ad quadratum YK, est vt quadratum XI ad quadratum OK, id est OM quadratum ad quadratum RQ. sed vt quadratum YF ad quadratum YL, sic b AYE rectangulum est ad rectangulum AYE in FD, LD contingenti æquidistent, id est TKM rectangulum ad rectangulum TLM, id est FKD rectangulum ad rectangulum FQD, id est rectangulum ZOX ad rectangulum ZRX, quadratum igitur MO ad quadratum RQ est vt rectangulum ZOX ad rectangulum ZRX, puncta igitur c QMX ad hyperbolam sunt, cuius diameter ZX & ordinatim applicatæ MO, RQ, quibus cùm æquidistet XI, erit XI d contingens & quia diametri AE, ZX, sibi mutuo parallelas bisecant, coniugatæ sunt diametri AE, ZX, & DEF, QMX e sectiones quoque coniugatæ.

c Ibid. d 27. huius. e Defin. 5. huius.

Corollarium primum.

HInc patet contingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductas asymptotis occurrere in vno eodemque puncto.

Corollarium secundum.

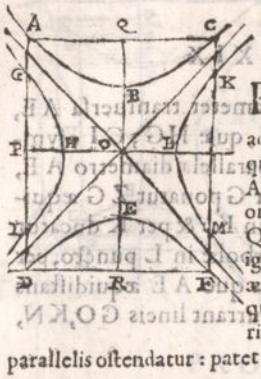
EX dictis quoque sequitur coniugatas sectiones, communes habere asymptotos.

PROPOSITIO XL.

SEctiones coniugatæ sint ABC, DEF, GHI, KLM, quarum centrum O: per quod ducta sit diameter BE, ad quam ordinatim applicetur AC:

Dico

Dico diametrum quæ AC lineæ æquidistat, coniugatam esse diametro BE.



Demonstratio.

PONatur AD parallela BE, occurrens DEF hyperbolæ in D puncto, ex quo ordinatim ponatur DF, ad BE diametrum: & per O centrum ducatur LH, æquidistans AC, occurrens AD lineæ in P. quoniam AC, DF in oppositis sectionibus, ad eandem diametrum ordinatim positæ sunt, æquidistant [a] AC, DF: sed & AD, QR ex constructione parallelę sunt, parallelogrammum igitur est DQ: & quadrata ordinatim positarũ AQ, DR æqualia sunt: igitur & OQ, OR [b] lineæ æquales, & quia PO æquidistat AC, recta quoque AD in P bifariam est diuisa: similiter cum idem de reliquis, ipsi BE parallelis ostendatur: patet LH [c] diametrum esse coniugatam ipsi BE.

a 3. huius.

b Coroll. 3.

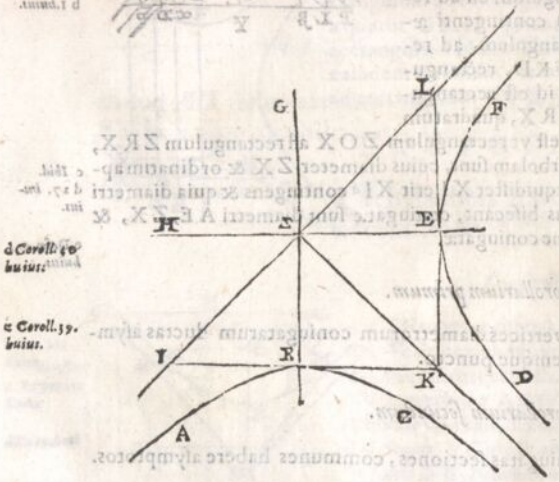
c Defin. 5. huius.

Corollarium.

HInc sequitur contingentes per vertices coniugatarum diametrorum ductas, ijsdem æquidistare. patet, cũm tam contingentes illæ quàm diametri coniugatæ, ordinatim positis æquidistent.

PROPOSITIO XLI.

COntingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductæ, diametris sunt æquales.



Demonstratio.

SInt HE, GB diametri coniugatæ; hyperbolarũ ABC, DEF & per B & E diametrorum terminos contingentes actæ, pertingant ad asymptotos, dico IK, LK lineas æquari ipsis HE, GB: rectæ IK, LK contingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductæ, ijsdem [d] æquidistant: & conueniunt cũ vna asymptotorum in [e] eodem puncto K. æquales igitur sunt BK, ZE; & KE, ZB, adeoque & illarum duplæ IK, KL æquales GB, HE. Quod erat demonstrandum.

d Coroll. 40 huius.

e Coroll. 39. huius.

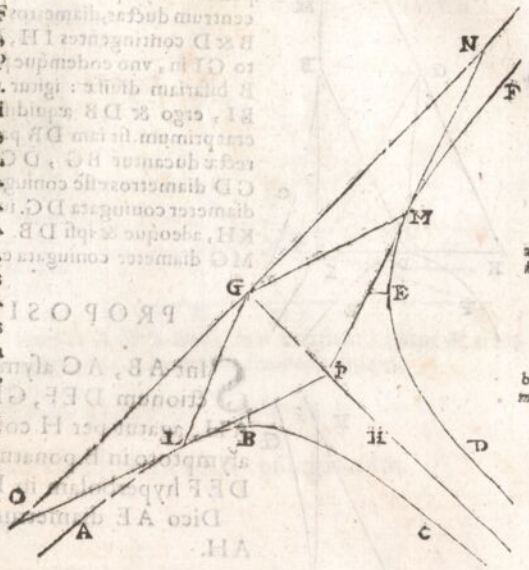
PRO-

PROPOSITIO XLII.

Diametri coniugatæ, sectionum coniugatarum quarum asymptoti rectum constituunt angulum, æquales sunt.

Demonstratio.

HAbeant ABC, DEF coniugatæ hyperbolæ, asymptotos OGQ, GP angulum formantes rectum. ponantur autem diametri quæuis coniugatę L G, G M, dico illas inter se æquari. ducantur per L & M contingentes OP, Q P, conuenient illæ cum vna asymptotorum in eodem a puncto P. quoniam igitur angulus OGP, per hypothesim rectus est, & OP contingens in L bifariam diuisa; puncta b O, G, P ad circulum sunt, & rectæ L G, P L æquales. est autem L P æqualis G M per præcedentem, æquales igitur sunt L G, G M adeoque & illarum duplæ. Quod erat demonstrandum.



a Coroll. 39. huius.

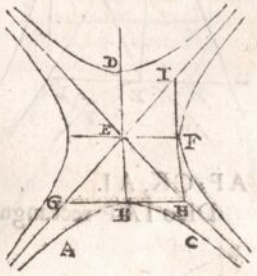
b Per elementa.

PROPOSITIO XLIII.

DAtæ hyperbolæ diametro, illius coniugatam exhibere diametrum.

Constructio & demonstratio.

SIt ABC hyperbolæ diameter D B, qua bifariam diuisa in E, ponantur c asymptoti GE, E H, & per B contingens G H, perueniens ad symptotos in G & H. positáque ex H lineâ H I, parallela D B, ducatur per E recta EF æquidistans G H, occurrens H I lineæ in F. dico EF satisfacere petitioni: demonstratio manifesta est ex precedenti propositione vel ex 40. huius.

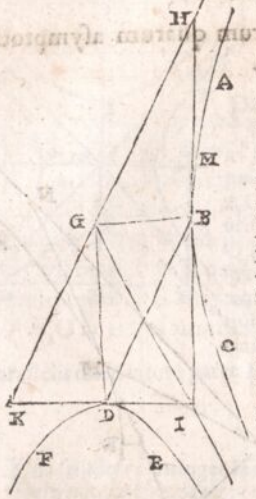


c 16. huius.

PROPOSITIO XLIV.

LInea coniungens diametrorum coniugatarum terminos, asymptoto æquidistat.

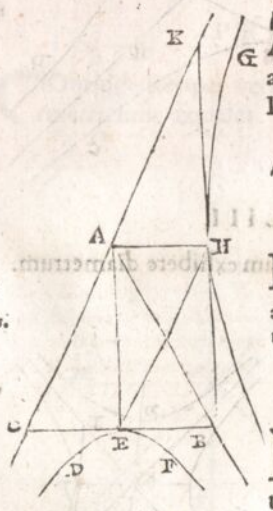
Demonſtratio.



a *Coroll.39. huius.*
b *29. huius.*

SInt A B C, D E F ſectiones coniugatæ inter aſymptotos G H, G I conſtitutæ, ponantur autem diametri coniugatæ G B, G D. dico iunctam D B æquidiſtare aſymptoto K G: & ſi D B quæcunq; æquidiſtans ponatur aſymptoto G H, dico rectas ex B & D ad G centrum ductas, diametros eſſe coniugatas. agantur per B & D contingentes I H, I K occurrent illæ aſymptoto G I in a vno eodemque puncto I; eruntque in D b & B bifariam diuiſæ: igitur vt K D ad D I, ſic H B ad B I, ergo & D B æquidiſtat K G aſymptoto, quod erat primum. ſit iam D B parallela K G, & ex B & D rectæ ducantur B G, D G ad centrum G. dico G B, G D diametros eſſe coniugatas. ſin verò, ponatur G M diameter coniugata D G. iuncta igitur D M, æquidiſtat K H, adeoque & ipſi D B. quod abſurdum: non igitur M G diameter coniugata eſt ipſi D G, ſed ſola B G.

PROPOSITIO XLV.



c *29. huius.*
d *44. huius.*

SInt A B, A C aſymptoti coniugatarum ſectionum D E F, G H I. poſitaque diametro A H, agatur per H contingens K B occurrens aſymptoto in B. ponatur autem ex B contingens, D E F hyperbolam in E.

Dico A E diametrum eſſe coniugatam ipſi A H.

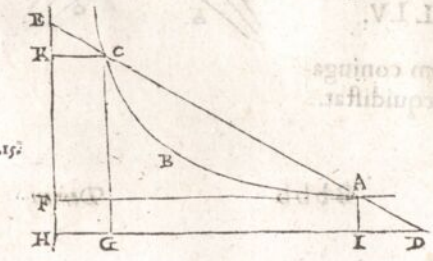
Demonſtratio.

IVngantur H E. Quoniam B K, C B contingentes ſunt, erunt in H & E bifariam c diuiſæ. Vnde H E æquidiſtat K C; & A E, A H diametri d ſunt coniugatæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

HYperbolam A B C inter aſymptotos conſtitutam, ſecet recta E D, in punctis A, & C tum aſymptotis ponantur æquidiſtantes C G, A F; C K, A I.

Dico I A F rectangulum æquari rectangulo K C G.



e *Coroll.15. huius.*

Demonſtratio.

QVoniam A I, C G, lineæ æquidiſtant, C D eſt ad D A, vt C G ad A I: ſed vt C D ad D A, ſic A E ad E C, (quia A D, C E e lineæ æquales ſunt) igitur & A E ad C E eſt, vt C G ad A I. eſt autem vt A E ad C E, ſic A F ad C K; igitur vt C G ad A I, ſic A F ad C K:

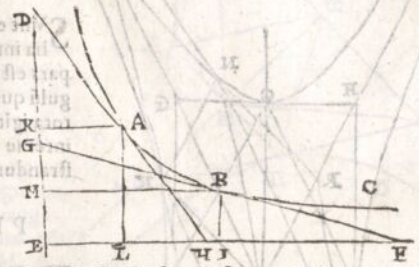
CK: æqualia igitur sunt rectangula CGHK, & AIHF: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.

HYperbolam ABC inter asymptotos ED, EF constitutam contingant duæ quæuis lineæ DAH, FBG quæ triangula constituant HED, FEG.

Dico illa esse inter se æqualia.

Demonstratio.



a 46. huius.

b Ex elementis.

EX punctis contactuum A & B, ducantur rectæ AK, AL, BM, BI parallelæ asymptotis, & AK, BM quidem ipsi FE, BI verò & AL asymptoto DE. erunt igitur LK, [a] MI parallelogramma inter se æqualia: sed HDE triangulum duplum est parallelogrammi LK, & FGE [b] duplum ipsius MI, (quia FG, DH lineę in A & B diuisæ sunt bifariam) igitur & triangula HDE, FGE inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVIII.

AXes minimi sunt omnium diametrorum coniugatarum.

Demonstratio.



c 16. Primi.

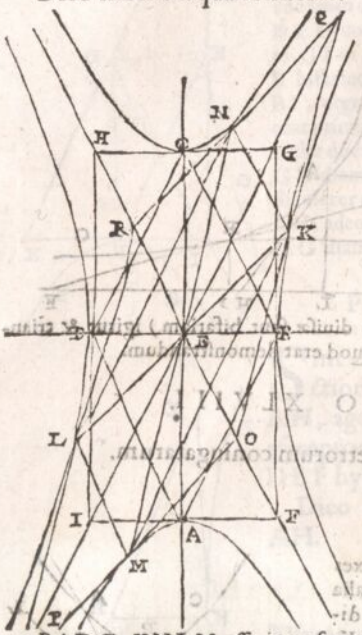
SInt ABC, DEF oppositæ sectiones: axes coniugati sint BD, HI: ponatur autem alia quæuis diametrorum coniugatio AF, LK: dico BD, HI lineas minores esse lineis AF, LK. centrum hyperbolæ sit G; ponaturque per B contingens BM, erit illa ad angulos rectos axi BD, cum ordinatim ad axem positis æquidistet: describatur deinde centro G, interuallo GB, circulus BND: quia igitur BM normalis est ad semidiametrum BG, recta MB [c] circulum contingit & tota extra illum cadit: quia verò eadem MB, hyperbolam quoque in eodem contingit puncto, tota etiam extra hyperbolam cadit, adeoque inter illam & circulum sita est: ergo circulus BND, in vno tantum puncto B hyperbolæ occurrit, & sui reliquo extra sectionem cadit. ergo AG per G centrum transiens, & hyperbolæ ABC occurrens in A, prius circulo, & tangenti occurrit, quàm hyperbolæ, ergo AG maior est BG. adeoque AF illius dupla maior est BD. similiter ostendam LK lineam maiorem esse HI: quod erat demonstrandum.

Hinc sequitur quadrata quoque axium simul sumpta minora esse quadratis cuiusuis coniugationis.

PROPOSITIO XLIX.

SI fuerint binæ hyperbolarum coniugationes A, B, C, D: ponantur autem per E centrum duæ quoque diametrorum coniugationes per quarum vertices contingentes actæ constituant duo quadrilatera FGHI, OPQR.

Dico illa esse æqualia inter se.



Demonstratio.

a 47. huius. SVnt enim a FEI, OEP triangula æqualia inter se, sed FEI triangulum quarta pars est quadrilateri FGHI, & OEP triangulũ quarta pars est quadrilateri OPQR, tota igitur quadrilatera OPQR, FGHI inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO L.

REctangulum quod fit à lineis extrema axium coniugatorum coniungentibus, æquale est illi quod fit à lineis extrema alterius coniugationis iungentibus parallelogrammo.

Demonstratio.

REctæ BC, CD, DA, AB extrema iungant axium coniugatorum: & NK, NL, LM, MK lineæ extrema iungant alterius coniugationis. dico parallelogramma BADC, KNLM esse inter se æqualia: triangulum BCD dimidium est rectanguli b BGHD, similiter BAD triangulum dimidium est rectanguli BFID: totum igitur rectangulum BCDA, dimidium est rectanguli FGHI, quod fit à contingentibus per extrema axium coniugatorũ ductis: similiter ostenditur KNLM parallelogrammum dimidium parallelogrammi OPQR: æqualia autem sunt ostensa c quadrilatera FGHI, OPQR; igitur & illorum dimidia BCDA, KNLM quoque inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

b Ex elementis.

c 49. huius.

PROPOSITIO LI.

IIsdem positis:

Dico quadrata linearum BC, CD, DA, AB extrema axium coniungentium, simul sumpta, minora esse quadratis linearum KN, NL, LM, MK, quæ extrema alterius coniugationis coniungunt.

Demonstratio.

d 17. De potentiis linearum. e Ex 48. huius. QVadrata BC, CD, DA, AB, æqualia sunt d quadratis AC, BD: similiter quadrata KN, NL, LM, MK æqualia sunt quadratis NM, KL: sed AC, BD quadrata e minora sunt quadratis NM, KB; quadrata igitur BC, DC, DA, AB simul sumpta minora sunt quadratis KN, NL, LM, MK. Quod erat demonstrandum.

PRO-

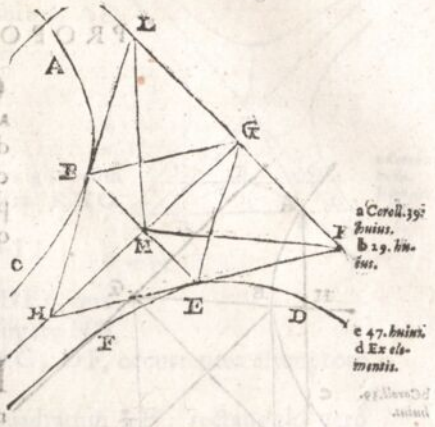
PROPOSITIO LII.

SInt ABC, DEF sectiones coniugatæ, quarum asymptoti GH, GI: ponatur autem quæuis BE parallela asymptoto GI.

Dico BE in M diuisam esse bifariam.

Demonstratio.

POnantur contingentes BL, EK, occurrent illę [a] asymptoto GH in H; eruntque diuisę [b] bifariam in E & B. igitur vt KG ad EM; sic KH ad EH; recta igitur GK dupla est EM. simili ratione ostendetur GL duplam esse MB: tota igitur KL dupla est EB. est autem triangulum GLH [c] æquale triangulo GKH; triangulo igitur GEH, (quod [d] dimidium est KGH) æquale est triangulum GBH, dimidium trianguli GLH: reliqua igitur triangula GBL, GEK sunt inter se æqualia; & cum sint inter easdem parallelas KL, EB, KG est [e] æqualis GL; & EM ipsi MB. Quod erat demonstrandum.



a Coroll. 39. huius.
b 29. huius.
c 47. huius.
d Ex elementis.
e Ex elementis.

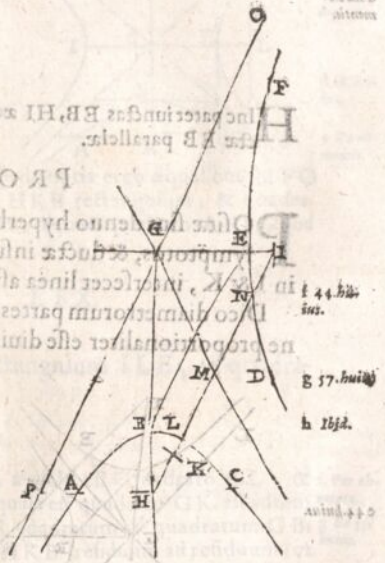
PROPOSITIO LIII.

POsitæ sint coniugatæ sectiones ABC, DEF inter asymptotos; eductis autem diametris coniugatis GH, GI ponatur quæuis HI, asymptoto æquidistans; quæ diametris occurrat coniugatis in H & I, & hyperbolis in L & M.

Dico HL, NI, rectas æquales esse.

Demonstratio.

IVngantur BE: quoniam GB, GE diametri sunt coniugatę, iuncta BE [f] æquidistat asymptoto GO: sed & GO æquidistat HI; parallelæ igitur sunt BE, HI; quare vt GE ad EI, sic GB ad BH: sed EB [g] bisecatur à GM, igitur & IH in M quoque bisecta est: est autem & LM, æquidistans GO, in N [h] bifariam diuisa; residuæ igitur LH, MI æquales sunt.



f 44. huius.
g 57. huius.
h Ibid.

PROPOSITIO LIV.

IIsdem positis si HI æquidistet asymptoto OG, occurrens sectionibus in L & M: sumantur autem partes æquales NI, LH, iungantur; HG, IG.

Dico HG, IG diametros esse coniugatas.

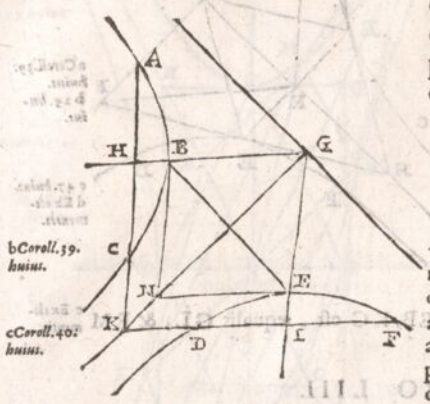
Demonſtratio.

a 53. huius. SIn verò : ponatur EG diametro, coniugata KG. æqualis igitur eſt LK, ipſi a MI, id eſt ex hypotheſi HL : pars toti, quod abſurdum, non igitur KG, diameter coniugata eſt EG, ſed ſola HG : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LV.

SInt ABC, DEF coniugatæ ſectiones quarum aſymptoti GN, GO, diametri verò coniugatæ GB, GE. ad quas ex aſſumpto quouis in aſymptoto, puncto K, ordinatim ponantur KF, KA occurrentes diametris in I & H.

Dico eſſe GB ad BH, vt GE ad EI.



b Coroll. 59. huius.

c Coroll. 40. huius.

d Ex elementis.

Demonſtratio.

POnantur per B & E contingentes BN, EN, occurrent illæ aſymptoto GK, in b vno eodemque puncto N : & quia KF, KA ordinatim poſitæ ſunt ad diametros GB, GE, æquidiſtabunt BN, HK, EN, IK : ſed iiſdem æquidiſtant diametri c coniugatę GB, GE; parallelogramma igitur ſunt NG, KG ad eandem diametrum GK conſtituta : quare vt GB d ad BH, ſic GE ad IE. Quod erat demonſtrandum.

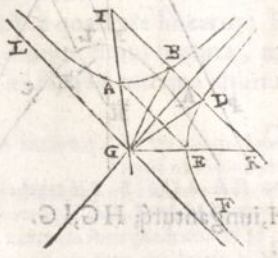
Corollarium.

HInc patet iunctas EB, HI æquidiſtare inter ſe, adeoque & aſymptoto OG, rectæ EB parallelæ.

PROPOSITIO LVI.

POſitæ ſint denuo hyperbolæ duæ coniugatæ ABC, DEF, inter aſymptotos, & ductæ inſuper duæ coniugatæ diametri GA, GE, quas in I & K, interſecet linea aſymptoto parallela;

Dico diametrorum partes inter centrum & parallelam poſitas, à ſectione proportionaliter eſſe diuiſas.



c 44. huius.

Demonſtratio.

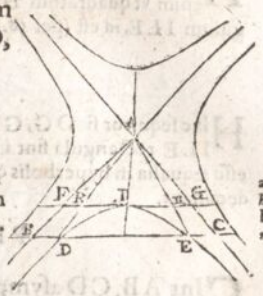
IVngantur puncta AE. quoniam GA, GE diametri ſunt coniugatæ, AE iuncta æquidiſtabit c aſymptoto GL, adeoque & ipſi IK. Quare GA ad AI, vt GE ad EK. Patet igitur veritas propoſitionis.

PRO-

PROPOSITIO LVII.

SInt asymptoti AB, AC, hyperbolæ DIE: & binæ æquidistantes FG, BC, & BC quidem hyperbolæ occurrat D & E, ponanturq; AD, AE occurrentes in K, H, rectæ FG.

Dico FK, HG æquales esse lineas.



Demonstratio.

OStendimus enim BD, [a] EB æquales esse; igitur cùm FG æquidistet BC, etiam sunt [b] æquales FK, HG.

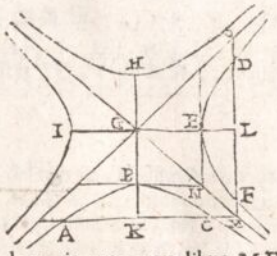
a *Coroll. 15. huius.*
b *Per elementa.*

PROPOSITIO LVIII.

SInt hyperbolæ coniugatæ ABC, DEF, quarum centrum G, & diametri coniugatæ HB, IE: ad quas sint ordinatim positæ AC, DF, occurrentes asymptoto communi, in M.

Dico rectangulo HKB, æquari quadratum LF: rectangulo verò ILE æquari quadratum AK.

Demonstratio.



QVadratum GK æquale est quadratis GB, BK, vnà [c] cum GBK rectangulo bis sumpto: id est GK quadratum, æquatur HKB rectangulo, vnà cum quadrato GB id est EN; id est [d] MFO rectangulo: Sed & GK, id est LM quadratum, æquale est rectangulo MFO vnà cum [e] quadrato LF; æqualia igitur sunt, quadratum GB vnà cum rectangulo HKB, & LF quadratum, vnà cum rectangulo MFO: demptis ergo æqualibus MFO rectangulo & quadrato GB, æqualia remanent HKB rectangulum, & quadratum LF. Similiter ostendetur ILE rectangulum, æquari quadrato AK: Quod fuit demonstrandum.

c *Ex elementis.*
d *13. huius.*
e *Ex elementis.*

PROPOSITIO LIX.

IIsdem positis;

Dico HKB rectangulum esse ad rectangulum ILE, vt quadratum HB, ad quadratum IE.

Demonstratio.

REctangulum ILE vnà cum quadrato GE, æquale est [f] quadrato GL; & HKB rectangulum, cum GB quadrato, æquale est quadrato GK. est autem vt GL quadratum [g] ad quadratum GK, sic GE quadratum ad quadratum GB; igitur & ILE rectangulum est ad rectangulum HKB (residuum ad residuum) vt GE quadratum ad quadratum GB, id est vt IE quadratum ad quadratum HB: Quod erat demonstrandum.

f *Per elementa.*
g *Ex 55. huius.*

Corolla-

Corollarium primum.

HInc ſequitur: eſſe quadratum AK ad LD, vt quadratum GE ad GB. eſt enim vt quadratum HB ad quadratum IE, ſic HKB rectangulum ad rectangulum ILE, id eſt (per 58. huius) quadratum LD ad quadratum AK.

Corollarium ſecundum.

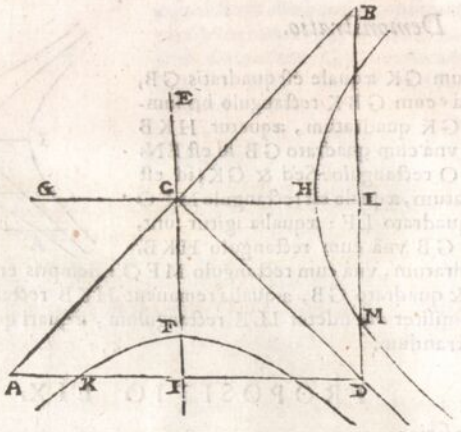
a Ex 42. huius. HInc ſequitur ſi OG, GN aſymptoti, exhibeant angulum rectum; quod HKB, ILE rectangula ſint inter ſe æqualia: oſtendimus enim HB, IE [a] quadrata eſſe æqualia in hyperbolis quæ inter aſymptotos ſtatuuntur quæ ad rectos angulos ſe decuſſant.

PROPOSITIO LX.

SInt AB, CD aſymptoti angulum rectum continentes, & duæ diametri coniugatæ ſint EF, GH, ad quas rectæ DL, DI (aſſumpto quouis D puncto in aſymptoto) conſtitutæ ſint ordinatim.

Dico rectangulum EIF quadrato IK, & quadratum LM æquari HLG rectangulo.

Demonſtratio.



b Ex 59. huius & Corollario c 42. huius. d 58. huius. VT EF quadratum ad quadratum GH, ſic EIF rectangulum [b] eſt ad rectangulum GLH: ſed EF, GH [c] quadrata ſunt æqualia, rectangulum igitur EIF, etiam GLH rectangulo æquale eſt: eſt autem EIF rectangulo æquale [d] quadratum LM, & IK quadratum æquale rectangulo GLH; rectangulum igitur EIF, quadrato IK, & GLH rectangulo æquale eſt quadratum LM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXI.

HYperbolæ ABC, DEF coniugatæ inter aſymptotos GH, GI poſitæ, ſecentur ab ordinatim poſitis HA, HF ad diametros GK, GL, aſſumpto puncto H in aſymptoto GH:

Dico

Dico KC ad CH eamdem rationem habere, quam habet LD ad DH lineam.

Demonſtratio.



VT quadratum GB ad quadratum GE, ſic quadratum GK [a] ad quadratum GL, id eſt HL ad KH; quadratum: ſed vt GB quadratum ad quadratum GE, ſic LD quadratum ad [b] quadratum KC: igitur vt quadratum LH ad quadratum HK; ſic LD quadratum ad quadratum CK, & LH linea ad HK lineam, vt LD ad CK: quare permutando, diuidendo vt LD ad HD, ſic KC ad CH. Quod erat demonſtrandum.

a *Ex 55. huius.*

b *Ex 58. & 59. huius.*

Corollarium primum.

HInc ſequitur iunctam CD, æquidiſtare aſymptoto IG: cùm enim HK, HL ex eodem puncto e ductæ ordinatim ponantur ad diametros coniugatas GK, GL, iuncta KL æquidiſtat IG: ſed oſtenſum eſt, eſſe KC ad CH, vt LD [d] eſt ad DH, æquidiſtat igitur ED ipſi KL, adeoque & aſymptoto IG.

c *Coroll. 55. huius.*

d *61. huius.*

Corollarium ſecundum.

DIco ſecundò iunctam AF æquidiſtare IG. eſt enim vt HC ad CK, ſic HD ad DL & componendo vt HK ad CK, id eſt AK, ſic HL ad LD, id eſt LF: æquidiſtant igitur LK, AF: ſed LK [e] æquidiſtat IG, ergo & FA parallela eſt ad IG.

e *Coroll 55.*

Corollarium tertium.

DIco tertiò BC, ED lineas productas aſymptoto GH in vno eodemque puncto occurrere: occurrat enim CB aſymptotis in N & M, & ED iiſdem occurrat in O, P: quoniam EB, NO [f] æquidiſtant & EB in Q biſecta eſt, NO quoque in G biſſecatur: vnde vt NG ad BQ, ſic GO ad QE: ſed vt NG ad BQ, ſic [g] GM ad QM, igitur vt GO ad QE, ſic GM ad QM: quare puncta P & M vnum idemque ſunt: & BC, ED in eodem aſymptoton decuſſant puncto.

f *44. huius.*

g *32. huius.*

PROPOSITIO LXII.

IIſdem poſitis, iungantur BA, BC, & ED, EF.
Dico triangula ABC, DEF eſſe inter ſe æqualia.

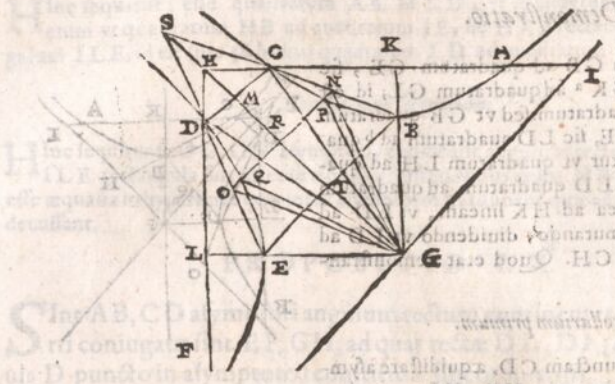
Demonſtratio.

VT GB ad BK, ſic GE ad EL, & permutando vt GB ad GE, ſic BK ad EL, ſed vt GB ad GE, ſic DL ad KC: igitur vt BK ad EL, ita eſt LD ad KC, ſunt autem anguli BKC, DLE in parallelogrammo KL oppoſiti æquales; igitur triangula BKC, DLE æqualia ſunt.

PROPOSITIO LXIII.

IIſdem poſitis ducantur GC, GD.
Dico triangula GKC, GDL æqualia exiſtere.

Demonſtratio.



QVoniam per propoſitionem 55. GB ad BK, eandem rationem obtinet, cum ratione GE ad EL, igitur & triangulum GCB ad BCK, eſt vt triangulum GED ad EDL. ſunt autem BKC, EDL triangula oſtenſa [a] æqualia; igitur BCG triangulum triangulo GDE eſt æquale. ac proinde totum triangulum GKC toti triangulo DGL. Quod erat demonſtrandum.

[a] 62. huius.

PROPOSITIO LXIV.

ILſdem poſitis ducatur CD occurrens GH aſymptoto in M. Dico trapezia GBCM, GEDM eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

VT HK ad HL, [b] ſic HC ad HD: igitur iuncta CD æquidiſtat LK ſiue [c] BE, ſiue aſymptoto GI. vnde CD [d] in M bifariam eſt diuiſa; & GCM, GDM triangula æqualia; oſtenſa ſunt autem in priori propoſitione æqualia triangula BCG, GDE; trapezia igitur GBCM, GEDM inter ſe æquantur.

[b] 61. huius. [c] Coroll. 61. huius. [d] Ex 51. huius.

Corollarium.

HInc patet & TBCM, ETMD trapezia eſſe inter ſe æqualia: eſt enim BE [e] æquidiſtans aſymptoto GI, adeoque in T bifariam diuiſa, vnde GBT, GTE triangula æqualia ſunt, quibus ablatis manent BTMC, ETMD trapezia æqualia.

[e] 44. huius.

PROPOSITIO LXV.

ILſdem poſitis biſecentur ED, BC in N & O, iunganturque GO, GN. Dico illas diametros eſſe coniugatas.

Demonſtratio.

IVncta NO occurrat ſectionibus in P & Q, aſymptoto GH in R. quoniam EB, CD, lineæ [f] æquidiſtant, & ED, BC productæ, [g] occurrant HG aſymptoto in vno eodemque puncto, recta NO biſecans BC, ED lineas etiam æquidiſtat ipſi EB: vnde NR, RO lineæ æquales; ſunt autem & PR, [h] RQ æquales, reſiduę igitur NP, QO quoque æquales ſunt: quare GN, GO [i] diametri ſunt coniugatæ. Quod erat demonſtrandum.

[f] Coroll. 61. huius. [g] Coroll. tertio 61. huius [h] 52. huius. [i] 54. huius.

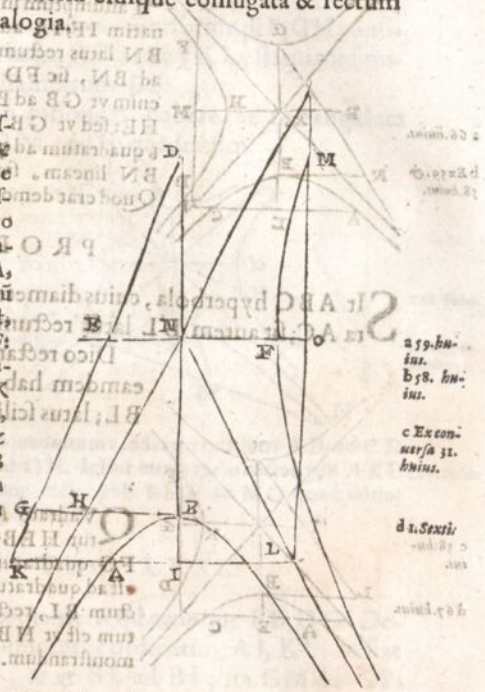
PRO-

PROPOSITIO LXVI.

IN omni hyperbola diameter transuersa eiusque coniugata & rectum figuræ latus sunt in continua analogia.

Demonstratio.

SIt hyperbolæ A B C diameter transuersa D B, eiusque coniugata E F, & latus rectum B G: oportet demonstrare tria hęc esse in continua proportione. assumpto in asymptoto N L quouis puncto L ducantur L A, L M ordinatim ad diametros D B, E F; producta deinde L A, occurrat cum recta D G, in K. rectangulũ igitur D I B ad E O F rectangulum est, vt D B [a] quadratum ad quadratum E F: sed E O F rectangulo [b] æquale est quadratum A I, id est rectangulum B I K (quia cùm B G latus rectum est, tres B I, I A, I K [c] proportionales sunt) igitur & D I B ad B I K rectangulum est, vt D B quadratum ad quadratum E F: est autem vt D I B rectangulum ad rectangulum B I K sic D I linea [d] ad lineam I K, id est D B ad B G, igitur vt quadratum D B ad quadratum E F, sic D B linea ad lineam B G: sed ratio quadrati D B ad E F, duplicata est rationis lineæ D B ad E F; igitur ratio lineæ D B ad B G, duplicata est rationis D B lineæ ad lineam E F: sunt itaque D E, E F, B G continuæ proportionales. Quod erat demonstrandum.



a 59. huius.
b 58. huius.
c Ex conuersa 31. huius.
d 1. Sexti.

Corollarium.

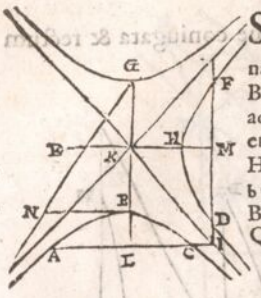
HInc manifestè colligitur, si erigatur latus rectum ad punctum diametri E F, quę est coniugata diametri D B, quod exsurgent lineæ quatuor in continua analogia, scilicet latus rectum ad punctum F erectum, cum reliquis tribus, de quibus præsenti propositione mentio facta est.

PROPOSITIO LXVII.

ERigantur à quouis puncto in asymptoto assumpto, ordinatim ad diametros coniugatas.

Dico ordinatim positarum quadrata eam rationem continere, quæ reperitur inter latus rectum & transuersum diametrorum coniugatarum.

Demonſtratio.



SInt ABC, DHF coniugatæ hyperbolæ, & punctum I aſſumptum in aſymptoto KI, ex quo poſitæ ſint ordinatim IF, IA ad diametros coniugatas HE, GB, & ſit BN latus rectum tranſuerſi lateris GB. Dico vt eſt GB ad BN, ſic FD quadratum eſſe ad quadratum AC: eſt enim vt GB ad BN, ſic [a] quadratum GB ad quadratum HE: ſed vt GB quadratum ad quadratum HE, ſic FD [b] quadratum ad quadratum AC: igitur vt linea GB ad BN lineam, ſic FD quadratum ad quadratum AC. Quod erat demonſtrandum.

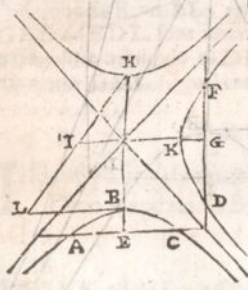
[a] 66. huius.

[b] Ex 59. & 58. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

SIt ABC hyperbola, cuius diameter HB & ordinatim ad illam poſita AC; ſit autem BL latus rectum diametro HB, ſeruiens.

Dico rectangulum HEB ad AE quadratum, eamdem habere rationem quam linea HB ad BL; latus ſcilicet tranſuerſum ad rectum.



Demonſtratio.

QVadrato AE æquale eſt rectangulum [c] IGK, igitur HEB rectangulum ad quadratum AE eſt vt FG quadratum ad quadratum AE: ſed FG quadratū eſt ad quadratum [d] AE vt HB tranſuerſum ad latus rectum BL, rectangulum igitur HEB ad AE quadratum eſt vt HB linea ad lineam BL. Quod erat demonſtrandum.

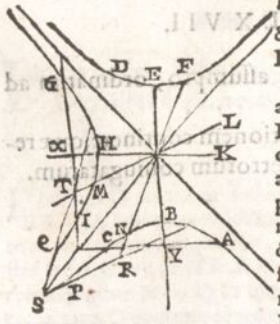
[c] 58. huius.

[d] 67. huius.

PROPOSITIO LXIX.

OMnes diametri coniugatæ ſunt axibus proportionales in quibuſuis hyperbolis coniugatis.

Demonſtratio.



POnantur ABC, DEF oppoſitæ ſectiones, quarum GHI eſt coniugata; ſintque axes earum EB, KH: & alia quęuis aſſumatur diametrorum coniugatio FN, LM.

Dico FN ad LM eam proportionem habere, quā axis EB ad HK. Poſitis enim AC, IG ad axes HK, EB ordinatim, quæ cum aſymptoto in eodem puncto conueniant; fiat FN ad NR, vt EB ad BY; & vt KH ad HX, ſic LM ad MT: & per R & T ordinatim ponantur RP, TQ. igitur erit EYB rectangulum ad rectangulum FRN, vt KXH rectangulum ad rectangulum LTM, & permutando vt EYB ad KXH, ſic FRN ad LTN rectangulum: ſed EYB, KXH rectangula [e] proportionalia ſunt quadratis EB, HK, & FN, LM quadratis proportionalia ſunt rectangula FRN, LTM: quadrata igitur FN, LM proportionalia ſunt quadratis axium EB, KH:

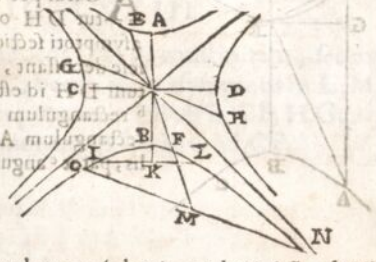
[e] 59. huius.

KH: adeoque & diametri FN, LM, diametris EB, KH proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.

SInt axes AB, CD, & altera coniugatio diametrorum EF, GH: positâ deinde quâuis ordinatim ad axem AB rectâ IKL; statuatur similiter ordinatim quæuis OM, ad diametrum EF:

Dico EMF rectangulum eam rationem habere ad rectangulum AKB, quam habet quadratum OM ad IK quadratum.



Demonstratio.

ESt enim rectanguli AKB ad quadratum KI, ratio eadem cum ratione lineæ AB [a] lateris transuersi ad latus rectum, id est eadem cum illa quæ [b] est quadrati AB ad quadratum CD. similiter ratio rectanguli EMF ad quadratum OM eadem est cum ratione EF lateris transuersi, ad latus suum rectum, hoc est quadrati EF ad GH quadratum: sed ratio quadrati AB, ad CD eadem est cum [c] ratione quadrati EF ad GH. Igitur etiam ratio rectanguli AKB ad quadratum KI eadem est cum ratione rectanguli EMF ad MO quadratum: vnde permutando constat veritas propositionis.

a 68. huius.

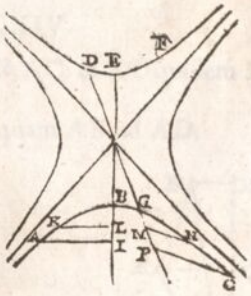
b Ex. 66. huius.

c 69. huius

PROPOSITIO LXXI.

SInt oppositæ sectiones DEF & diametri quæcunque EB, DG. Deinde ad alteram quæuis duæ applicentur ordinatim, AI, KL; & fiat vt EB ad BL, ita DG ad GM, & vt BL ad BI, ita GM ad GP: denique ponantur MN, PC ordinatim ad diametrum DG.

Dico KL ad AI eandem rationem habere quam MN ad PC.



Demonstratio.

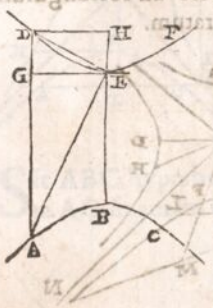
QVoniam EI, DP lineæ proportionaliter in I, L, B, item P, M, G diuisę sunt, rectangulum ELB ad EIB, est vt DMG ad DPG, hoc est quadratum KL, ad AI quadratum, vt MN ad PC quadratum. vnde patet veritas propositionis.

PROPOSITIO LXXII.

SInt A B C, D E F oppoſitæ ſectiones, quarum aſymptoti ad angulos rectos ſe decuſſant, ponatur autem A D æquidiſtans axi E B, iungantur que A E, E D.

Dico angulum A E D rectum eſſe.

Demonſtratio.

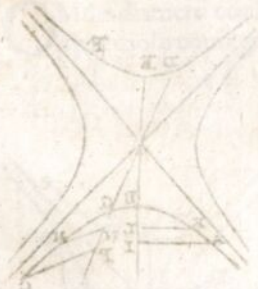


a 60. huius.

b 14. huius.

c Ex elementis.

AGatur per E contingens E G, cui æquidiſtans ponatur D H occurrens E B productæ in H. Quoniam aſymptoti ſectionum oppoſitarum A B C, D E F ad rectos ſeſe decuſſant, erit E H B rectangulo æquale [a] quadratum D H id eſt E G: ſed E H B rectangulo æquale eſt [b] rectangulum A G D, quadrato igitur E G æquale eſt rectangulum A G D: vnde cùm E G ad A D, ſit normalis, patet [c] angulum A E D rectum eſſe.



HY-

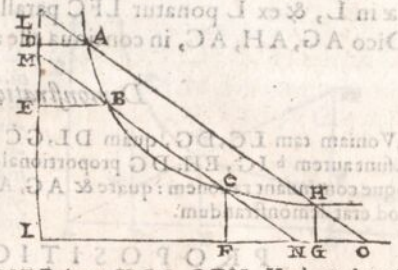
HYPERBOLÆ
PARS TERTIA

Asymptotos & concauam contemplatur hyperbolam ac linearum præcipuè asymptotis æquidistantium exhibet proportionem.

PROPOSITIO LXXIII.

HYperbolam ABC inter asymptotos DI, FI constitutam, secent duæ quæuis parallelæ AH, BC, occurrentes asymptotis in L, M, N, O: illis autem æquidistantes ponantur AD, BE, CF, HG. Dico AD ad BE eam habere rationem quàm HG ad CF.

Demonstratio.



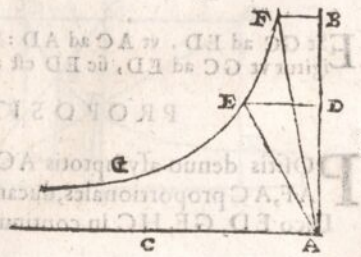
CVm HG, LI æquidistent, æquales sunt anguli OHG, OLD, item OGH, LDA: ostensæ sunt a autem LA, HO lineæ æquales, similia igitur & æqualia sunt triangula LAD, HOG, vti & latera AD, GO. eadem ratione similia sunt inter se & æqualia triangula MEB, CFN; quia verò æquidistant LO, MN, DA, EB similia quoque erunt triangula LAD, MEB, item HGO, CFN. Vnde & lateribus constant proportionalibus, & AD est ad BE, id est GO ad FN, vt HG ad CF. Quod erat demonstrandum.

a *Coroll. 17. huius.*

PROPOSITIO LXXIV.

HYperbolæ FEG, asymptoti ponantur AB, AC. & AC quidem æquidistent DE, BF.
Dico ED ad FB eandem habere rationem quam AB ad AD.

Demonstratio.



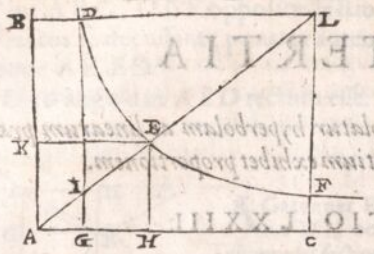
IVngantur AE, AF: Quoniam ED, FB æquidistant asymptoto AC, æqualia erunt b triangula ADE, ABF: quare & AD, AB latera c proportionalia sunt lateribus BF, DE: Quod erat demonstrandum.

b *Ex 46. huius.*

c *15. Sexti.*

PRO-

PROPOSITIO LXXV.



SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ D E F, positisq; D G, E H, asymptotorum vni parallelis, ducatur A E occurrens D G lineæ in I.
Dico I G, E H, D G in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVoniam I G, E H æquidistant, I G est ad E H, vt A G ad A H: sed vt A G ad A H, sic [a] E H est ad D G, igitur vt I G ad E H, sic E H est ad D G. Quod erat demonstrandum.

a 74. huius.

PROPOSITIO LXXVI.

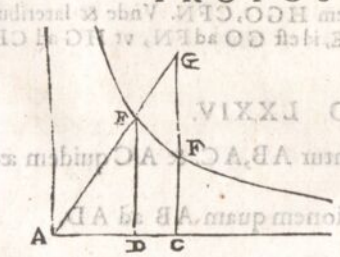
IIsdem positis; ducatur per D, æquidistans A C, occurrens A E productæ in L, & ex L ponatur L F C parallela A B.
Dico A G, A H, A C, in continua esse analogia.

Demonstratio.

QVoniam tam L C, D G, quàm D L, G C æquidistant, C L æqualis est D G; sunt autem [b] I G, E H, D G proportionales, igitur & I G, E H, L C eandem quoque continuant rationem: quare & A G, A H, A C in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

b 75. huius.

PROPOSITIO LXXVII.



SInt denuo AB, AC asymptoti hyperbolæ E F, & E D, F C æquidistent A B; positaque A E occurrat C F in G.
Dico C F, D E, C G esse proportionales.

Demonstratio.

ESt G C ad E D, vt A C ad A D: sed vt A C ad A D, sic E D est [c] ad C F; igitur vt G C ad E D, sic E D est ad C F. Quod erat demonstrandum.

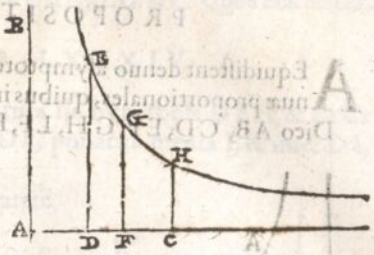
c 47. huius.

PROPOSITIO LXXVIII.

POsitis denuo asymptotis AC, AB hyperbolæ E G H. Fiant A D, A F, A C proportionales, ducanturq; D E, F G, C H æquidistantes AB.
Dico E D, G F, H C in continua esse analogia & contra.

Demon-

Demonſtratio.



VT AD ad AF, ſic a FG ad DE, & vt AF ad AC, ſic HC ad GF: ſed AD, AF, AC proportionales ſunt, igitur & HC, GF, ED eandem quoque continuant rationem. ſimiliter oſtenderur ſi ED, GF, HC aſymptoto æquidiſtantes proportionales ſint, eſſe AD, AF, AC quoque in continua analogia. Quod erant demonſtrandum.

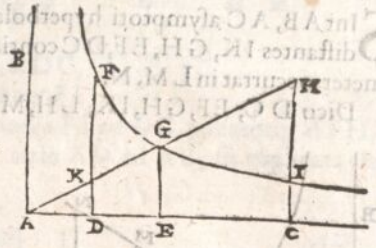
a *Ibid.*

PROPOSITIO LXXIX.

INter aſymptotos AB, AC conſtituta ſit hyperbola FGI: ponantur autem proportionales AD, AE, AC, tum ex punctis D, E, C, aſymptoto AB parallelæ ducantur DF, EG, CI, iunctaq; AG occurrat FD, CI in K & H.

Dico CH lineam æquari FD, & CI, rectæ DK.

Demonſtratio.



QVoniam proportionales ſunt AD, AE, AC, rectæ IC, GE, FD in b continua quoque ſunt analogia; ſed & IC, GE, HC quoque ſunt c proportionales, æquales igitur ſunt HC, FD. ſimiliter quia tam KD, GE, FD quàm KD, GE, HC d ſunt proportionales, patet IC, KD lineas æquales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

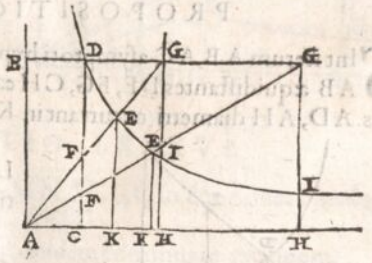
b 78. huius.
c 77. huius.
d 75. huius.

PROPOSITIO LXXX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DE; poſitâque BDG parallela AC, ducatur DC æquidiſtans AB, & quæcunque AG, occurrens ſectioni in E, & DC, DG lineis in F & G.

Dico AF, AE, AG in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



POnantur EK, GH æquidiſtantes AB: Quoniam GH, DC, item DG, HC æquidiſtant, GH æqualis eſt DC, ac proinde FC, EK, GH c proportionales ſunt, patet igitur & AF, AE, AG eandem continuare rationem. Quod erat demonſtrandum.

c 75. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

AEquidistent denuo asymptotorum alteri, AB, CD, EF, GH continuæ proportionales, quibus in I, K, L diameter occurrat MG. Dico AB, CD, EF, GH, LF, KD, IB in continua esse analogia.



a 78. huius.

b 75. huius.

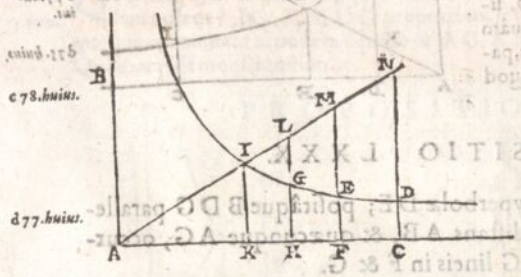
Demonstratio.

CVm AB, CD, EF, GH proportionales sint, etiam MB, MD, MF, MH [a] eandem continuant rationem. vnde & IB, KD, LF, GG in eadem sunt ratione, quam habent GH, EF, CD, AB. quia verò & LF, GH, EF sunt [b] proportionales, patet omnes AB, CD, EF, GH, LF, KD, IB eandem continuare rationem. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXII.

SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ DE, ponantur autem AB æquidistantes IK, GH, EF, DC continuæ proportionales, quibus AI diameter occurrat in L M, N.

Dico DC, EF, GH, IK, LH, MF, NC in continua esse analogia.



c 78. huius.

d 77. huius.

Demonstratio.

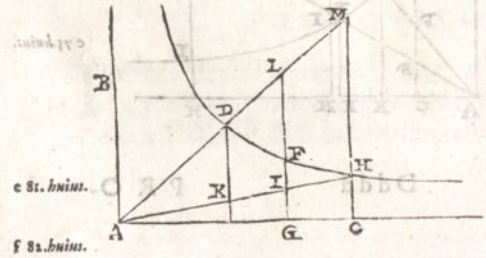
QVoniam IK, GH, EF, DC proportionales sunt, [c] erunt & AC, AF, AH, AK ac proinde & NC, MF, LH, IK in continua analogia eiusdem rationis; cum IK, GH, EF, &c. sunt autem LH, IK, GH [d] quoque proportionales, eandem igitur continuant rationem DC, EF, GH, IK, LH, MF, NC.

Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

SInt iterum AB, AC asymptoti hyperbolæ DFH, ponantur autem & AB æquidistantes DE, FG, CH eandem continentes rationem; quibus AD, AH diametri occurrant in KI, LM.

Dico EK, GI, CH, FG, DE, LG, MC eandem continuare rationem.



e 81. huius.

f 81. huius.

Demonstratio.

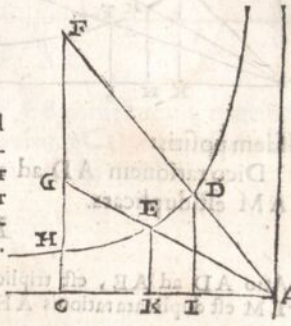
CVm DE, FG, HC ponantur continuæ, rectæ KE, IG, HC eandem continuant rationem [e] cum HC, FG, DE. sed hæ quoque cum DE, LG, MC [f] eandem continuant rationem, proportionales

tionales sunt igitur continuæ EK, GI, HC, FG, DE, LG, MC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

INter asymptotos AB, AC constituta sit hyperbola DEH, & factis FC, DI parallelis AB, ductaq; ADF, ponatur media EK inter DI, HC & ducatur AEG.

Dico rationem AF ad AD, duplicatam esse eius, quam habet AG ad AE.



Demonstratio.

ESt AF ad AD, vt AC ad AI: & AG ad AE, vt est AC ad AK. sunt autem ex constructione proportionales DI, EK, HC: igitur etiam sunt [a] proportionales AC, AK, AI. Igitur ratio AC ad AI, hoc est AF ad AD, duplicata est rationis AC ad AK, hoc est AG ad AE. Quod fuit demonstrandum.

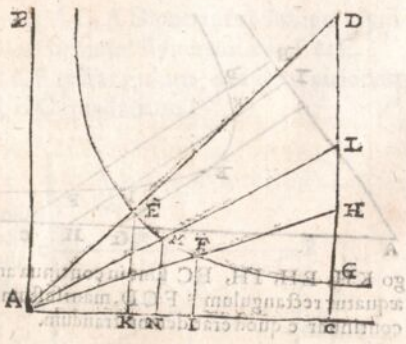
[a] 78. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

POsita denuo hyperbola vt prius, & DC, EK parallelis asymptoto, ponatur FI vt ratio EK ad FI, duplicata sit rationis FI ad GC. ponaturq; AFH.

Dico AFH in F diuisam esse vt ratio AD ad AE, sit triplicata eius quam continet AH ad AF.

Demonstratio.



RAtio AD ad AE, eadem est cum ratione AC ad AK: & ratio AH ad AF, eadem cum ratione quæ est inter AC & AI: est autem ex constructione ratio EK ad FI, duplicata rationis FI ad GC: igitur ratio AI ad AK, duplicata est rationis AC ad AI. vnde cùm ratio AC ad AK, triplicata sit eius quam habet AC ad AI, etiam ratio AD ad AE, triplicata erit eius quæ est inter AH & AF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVI.

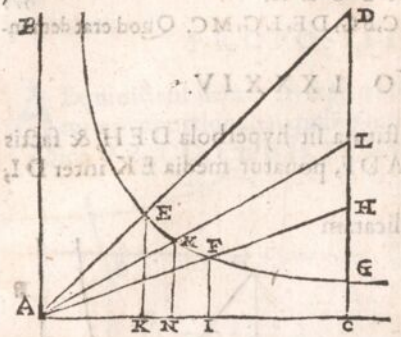
MAnentibus ijsdem, sint EK, MN, FI, GC in continuata analogia, & positæ sint AED, AML, AFH.

Dico GC, HC, LC, DC lineas eandem continuare rationem.

Demonstratio.

SVnt enim proportionales [b] GC, IF, HC: item GC, [c] NM, LC. Igitur ratio tertiæ LC ad tertiam HC [d] duplicata est eius quam habet secunda MN ad FI: sed

[b] 77. huius.
[c] Ibid.
[d] 17. De progressionibus.



a 77. huius.

sed etiam sunt a proportionales GC, EK, CD : igitur ratio DC ad LC, duplicata est rationis EK ad MN, hoc est MN ad FI. sed ratio LC ad HC duplicata erat rationis MN ad FI, igitur ratio DC ad LC, eadem est cum ratione LC ad HE. quocirca DC, LC, HC, GC lineæ sunt in continua proportione. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVII.

ISdem positis:
Dico rationem AD ad AE, esse triplicatam eius, cuius ratio AL ad AM est duplicata.

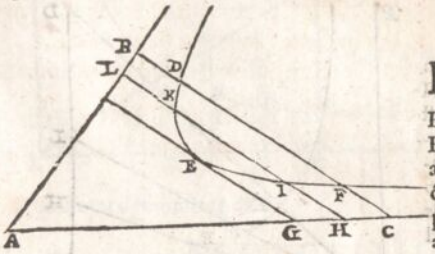
Demonstratio.

b 85. huius. c 84. huius. RAtio AD ad AE, est triplicata b rationis AH ad AF. sed ratio AL c ad LM est duplicata rationis AH ad AF, igitur patet veritas propositionis.

PROPOSITIO LXXXVIII.

INter asymptotos AB, AC posita sit hyperbola DEF. deinde ponantur CD, HK æquidistantes contingenti EG, vt sint in continua analogia FC, IH, EG.
Dico similiter FC, IH, EG, KH, DC eandem continuare rationem.

Demonstratio.



d Ex Coroll. 15. huius.

PRoductæ HK, CD secent asymptoton AB in L & B. Quoniam EG contingit sectionem, & rectæ EG æquidistat HK, quadrato GE, æquatur HIL, hoc d est IHK rectangulum. vnde sunt in continua proportione KH, EG, IH : sed vt EG ad IH, ita ponitur esse IH ad FC, ergo KH, EH, IH, FC sunt in continua analogia. & quia similiter quadrato EG

e Ibid.

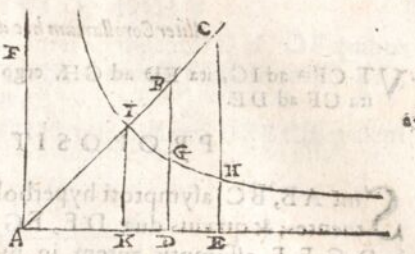
æquatur rectangulum e FCD, manifestum est omnes quinque eamdem rationem continuar e quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

EX A centro hyperbolæ, ducta sit quæuis ABC, quam intersecent BD, CE, asymptoto AF, æquidistantes.
Dico rectangula BDG, CEH inter se esse æqualia.

Demon-

Demonſtratio.



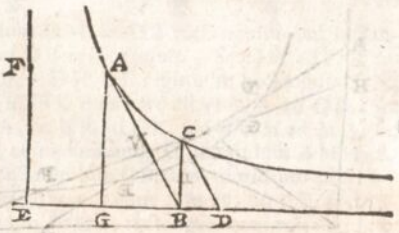
a 77. huius.

POnatur ex I recta IK æquidiſtans AF. quoniam tam BD, IK, GD, quàm CE, IK, IH [a] ſunt continuè, tã GDB rectangulum æquatur quadrato IK, quàm CEH rectangulum; patet ergo BDG, CEH rectangula eſſe inter ſe æqualia.

PROPOSITIO XC.

HYperbolam AC inter aſymptotos EF, EB conſtitutam, contingat AB; poſitiſq; BC, AG parallelis EF, ducatur CD æquidiſtans AB. Dico rectangulo EGB æquale eſſe rectangulum EBD.

Demonſtratio.



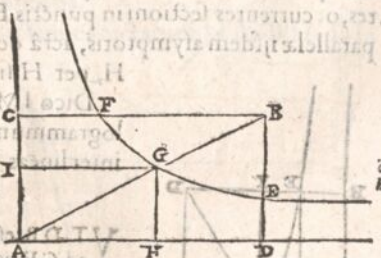
b 74. huius.

QVoniam æquidiſtant tam AG, CB; quam AB, CD; ſimilia ſunt triangula AGB, CBD. quare vt AG ad CB, ita GB ad BD: ſed vt AG ad CB; ita quoque [b] eſt BE ad GE. igitur vt GB ad BD, ita eſt EB ad EG. Vnde rectangula GBEG, & BDEB æqualia ſunt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCI.

POſita hyperbola inter aſymptotos AC, AD ponantur inſuper aſymptotis æquidiſtantes BC, BD occurrentes hyperbolæ in F & E. Dico rectangulum BDE ad BCF rectangulum, eamdem rationem habere, quam quadratum BD ad BC quadratum.

Demonſtratio.



c Ex 77. huius.

DVctâ diametro AB quæ ſectioni occurrat in G. ponantur ex G puncto interſectionis lineæ GH, GI æquidiſtantes aſymptotis; erit igitur quadrato HG æquale rectangulum [c] BDE, & BCF rectangulum æquale quadrato IG: igitur rectangulum BDE eſt ad rectangulum BCF vt GH, quadratum ad quadratum IG, id eſt BD quadratum ad quadratum BC. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc manifeſtum eſt rectam BC in F diuiſam eſſe, quemadmodum BD ſecta eſt in E. quadratum enim BC ad BD quadratum, in duplicata eſt ratione BC lineæ ad lineam BD: rectangulum verò BCF ad BDE rectangulum, rationem habet compoſitam ex ratione BC ad BD, & CF ad DE. igitur ratio CF ad DE, eadem eſt cum ratione BC ad BD.

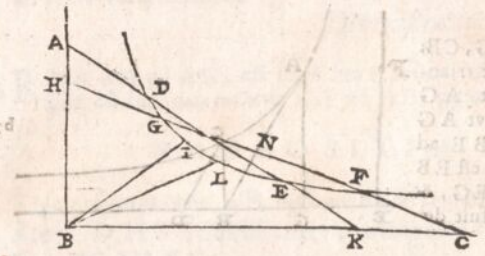
Aliter Corollarium hoc demonstratur.

a Ex eadem. VT CF a ad IG, ita ED ad GH, ergo vt IG ad GH, hoc est CB ad BD, ita CF ad DE.

PROPOSITIO XCII.

Sint AB, BC asymptoti hyperbolæ DEF angulum rectum constituentes; & quæuis duæ DE, FG ponantur, quæ obuient sectioni in D, G, E, F, assumptis autem in hyperbolę perimetro punctis quibusdam I & L, per quæ actæ contingentes æquidistant rectis AK, HC, ponantur diametri BI, BL.

Dico rectangulum ADK ad HGC rectangulum, eamdem rationem continere, quam habet quadratum BI ad BL quadratum.



b Ex 61. huius.

c 18. huius.

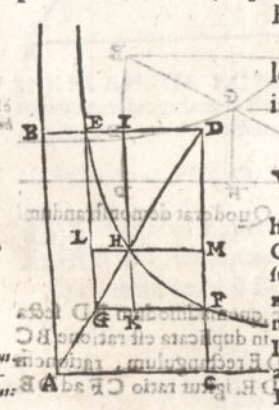
Demonstratio.

QVoniam angulus asymptotorum ABC rectus est, contingentes per I & L ductę duplæ sunt b rectarum BI, BL, illarumque dimidia ijsdem æqualia: sed ostensum est rectangulum ADK contingentis in I c quadrati, dimidio esse æquale, vti & rectangulum HGC contingentis in L, dimidio quadrati. Igitur rectangulum ADK ad HGC, rectangulum est, vt quadratum BI ad BL quadratum. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCIII.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ EHF: assumpto deinde puncto quodam intra illam D, ponantur DB, DC asymptotis æquidistantes, occurrentes sectioni in punctis E & F; ex quibus ducantur EG, FG parallelæ ijsdem asymptotis, actâ denique DA quæ occurrat sectioni in H, per H sint LM, IK parallelæ asymptotis.

Dico IM parallelogrammum ad LK parallelogrammum, eam rationem continere quæ est inter lineas DB, BE.



d Coroll. 91. huius.

e 77. huius & 1. De progressionibus.

Demonstratio.

VT DB est ad DC hoc est AC ad AB d ita est BE ad CF: igitur vt DB ad DC, ita est DE ad DF, hoc est FG ad GE: igitur AC ad AB, est vt FG ad GE; & AC ad GF, vt AB ad GE. Igitur AGD sunt in directum, & IM, IK parallelogramma ad communem diametrum IK, LM constituta sunt: vnde similia sunt inter se, adeoque in duplicata ratione DI ad IE. quia verò DB, BI. BE, e proportionales sunt, vt DI ad IE, sic e DB est ad BI: igitur parallelogramma IM, LK duplicatam habent inter se rationem rectę DB ad BI, id est sunt vt DB ad BE. Quod erat demonstrandū.

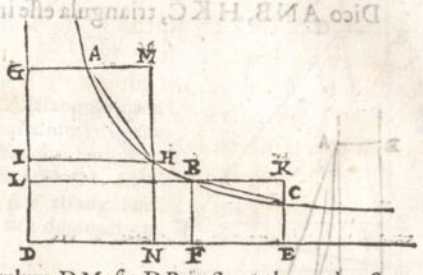
PRO-

PROPOSITIO XCIV.

COnstituta sit hyperbola ABC inter asymptotos DG, DF quibus æquidistantes ponantur quatuor lineæ inter se proportionales, AG, HI, CE, BF, ducanturque AH, BC.

Dico figuram quadrilateram AGIH, quadrilateræ BFEC, æqualem existere.

Demonstratio.



POnantur per H & B lineæ HN, BL, æquidistantes asymptotis quæ AG, CE lineis occurrant in M & K. vt AG ad HI, sic CE est ad BF ex supposito; sed vt AG ad HI, sic ID [a] est ad DG; & vt CE ad BF, sic DF ad DE. proportionales sunt igitur DI, DG, DF, DE. Igitur vt DH rectangulum ad rectangulum DM, sic DB rectangulum ad rectangulum DK, & permutando, vt DH ad DB rectangulum; sic DM ad DK rectangulum, æqualia autem sunt rectangula [b] DH, DB, igitur & rectangula DM, DK æqualia sunt; adeoque & residua IM, FK. quia vero est vt GA ad GM, sic EC ad EK, erit quoque vt GM ad MA, sic EK ad CK. sed vt GM ad MA, sic GH rectangulum ad rectangulum AH; cuius dimidium est triangulum AMH; & vt EK ad CK, sic EB rectangulum ad rectangulum CB, cuius dimidium est triangulum CKB; igitur vt HG rectangulum ad triangulum AMH; sic EB rectangulum ad triangulum CKB; & permutando, vt GH rectangulum ad rectangulum FK, sic AMH triangulum ad triangulum CKB: vnde cùm HG, BE rectangula ostensa sint æqualia, triangula quoque AMH, BKC, adeoque reliqua quadrilatera, sunt inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

a 74. huius.

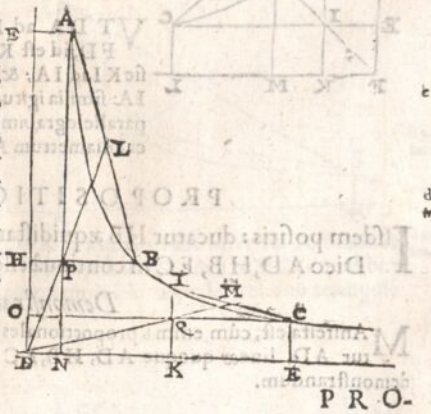
b 44. hu-ius.

PROPOSITIO XCV.

POnatur ABC hyperbola inter asymptotos DE, DF. & ratio AE, BH eadem cum ratione CF ad IK parallelarum asymptotis, iunctæ autem AB, IC diuisæ sint bifariam per diametros DL, DM. & ductæ sint AN, CO, quæ æquidistent asymptotis.

Dico P & Q esse communes intersectiones rectarum NA, BH, DL; & OC, IK, DM.

Demonstratio.



OCcurrant sibi NA, HB lineæ in P. igitur vt EA ad HB, id est HP ad HB, sic HD [c] est ad DE, id est NP ad NA; & diuidendo, vt HP ad PB, sic NP ad PA; similia igitur sunt parallelogramma HDN, APB, & iuncta DP, [d] diametrum AB bifariam secat in L, quare AN, HB, DL linearum communis intersectio est P: Eodem modo ostendetur Q communem esse intersectionem linearum IK, DM, OC. quæ fuerunt demonstranda.

c 74. huius.

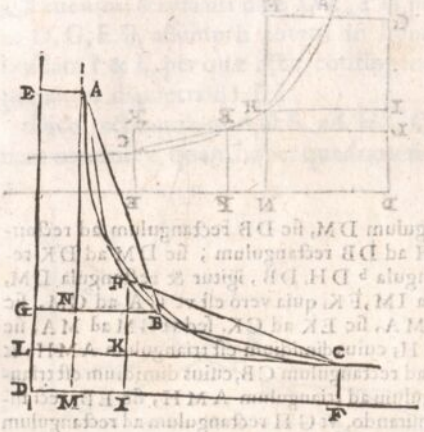
d Ex elementis.

PRO-

PROPOSITIO XCVI.

ASymptotis hyperbolæ A B C, æquidistantes, & inter se proportionales ponantur lineæ A E, G B, C F, H I: iunctisq; A B, C H; ponantur asymptotis parallelæ A M, C L: rectarum verò M A, G B communis intersectio sit N, & K communis intersectio linearum C L, H I.

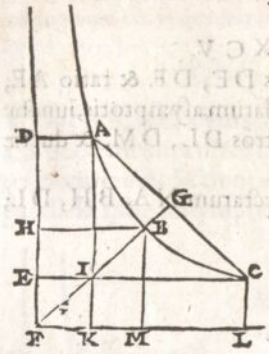
Dico A N B, H K C, triangula esse inter se æqualia.



Demonstratio.

OStendimus in prioris propositionis demonstratione esse G N ad N B, vt M N ad N A, adeoque esse vt G N ad N M, sic N B ad N A, & ob eandem rationem vt I K ad K L, sic H K ad C K: quia verò est ex positione vt E A hoc est G N ad N B, sic C F hoc est I K ad K H, & vt M N ad N A, sic L K ad K C, igitur ex æquo est vt N B ad N A, sic H K ad K C; igitur cùm anguli ad N & K, æquales sint, æqualia quoque sunt triangula A N B, H K C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVII.



HYperbolam A B C inter asymptotos D F, F L constitutam subtendat A C: ductisq; lineis A K, C E quæ asymptotis æquidistent, & inuicem decussent in I, agatur per I diameter F B:

Dico F B productam rectam A C bifariam diuidere.

Demonstratio.

VT D A ad E C, id est E I ad E C, [a] sic E F est ad F D, id est K I ad K A: & diuidendo vt E I ad I F, sic K I ad I A: & permutando vt E I ad I K, sic C I ad I A: similia igitur & ad eandem diametrum posita sunt parallelogramma E F K, A I C, & F I diameter bisecat diametrum A C. Quod fuit demonstrandum.

[a] *Per elementa.*

PROPOSITIO XCVIII.

IIsdem positis: ducatur H B æquidistans A D.

Dico A D, H B, E C in continuâ esse analogia.

Demonstratio

MAnifesta est, cùm enim [b] proportionales sint E I, H B, E C, & E I rectæ æquetur A D, lineæ quoque A D, H B, E C in continua sunt analogia. Quod erat demonstrandum.

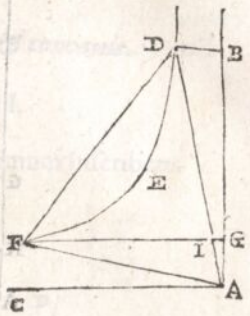
[b] *75. huius.*

PRO-

PROPOSITIO XCIX.

SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF, & ductæ DB, FG asymptoto AC æquidistent: iunganturq; AD, AF, & DF.

Dico triangulum ADF æquale esse figuræ quadrilateræ DBGF.



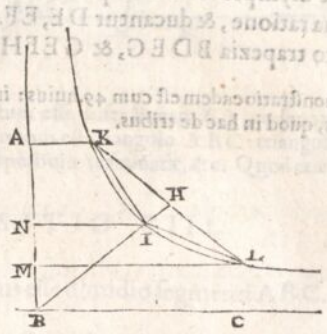
Demonstratio.

TRiangulum BDA[a] æquale est FGA triangulo (quia dimidia rectangulorum DA, AF æqualium): igitur ablato communi triangulo AGI, residua sunt æqualia: scilicet FAI triangulum, quadrilatero BDGI. additâ itaque communi figurâ DIF, erit DAF triangulum, æquale quadrilatero DBGF. Quod fuit demonstrandum.

a *huius.*

PROPOSITIO C.

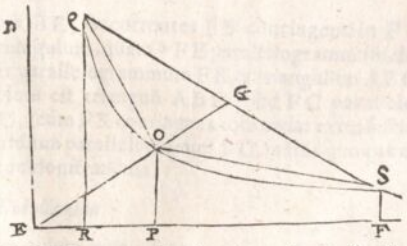
SInt duæ hyperbolæ æquales & similes, quarum asymptoti sint AB, BC; ED, EF: ponantur autem AK, LM, & SF, RQ proportionales inter se, & asymptoto cuidam parallelæ. iunctisque KL, QS ac diuisis bifariam per diametros BH, EG, occurrentes sectionibus in I & O. ducantur IK, IL, & OQ, OS.



Dico triangulum KIL æquari QOS triangulo.

Demonstratio.

POnantur IN, OP æquidistantes AK, QR. quoniam AK, LM, SF, QR, in æqualibus ac similibus hyperbolis, proportionales sunt: trapeziũ AKLM,[b] æquale est QRFS trapezio. & quia continuæ sunt proportionales tam SF, [c] OP, QR, quàm AK, NI, ML, adeoque sint proportionales AK, NI ipsis QR, OP: igitur quadrilatera AKIN, QOPR [d] æqualia sunt inter se. & similiter trapezia INML, OPFS. ablatis igitur trapezijs AKIN, & INML æqualibus ipsis QOPR, OPFS, remanet triangulum KIL æquale residuo triangulo QOS. Quod fuit demonstrandum.

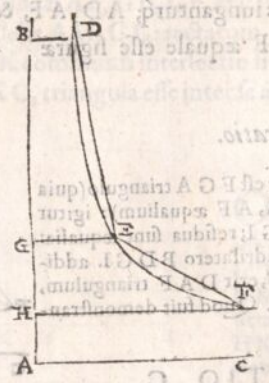


b 94. huius.

c 97. huius.

d 94. huius.

PROPOSITIO CI.



SInt asymptoto AC æquidistantes BD, GE, HF inter se in continua ratione, & ducantur DE, EF.
Dico trapezia BDEG, & GEFH inter se esse æqualia.

DEmonstratio eadem est cum 49. huius: in qua de quatuor asseritur proportionalibus, quod in hac de tribus.

HY-

HYPERBOLÆ
PARS QVARTA

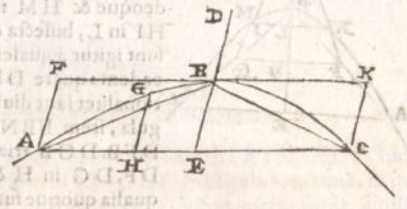
De segmentis hyperbolicis, conuexis & concauis.

PROPOSITIO CII.

DAtæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inscribere.

Constructio & demonstratio.

HYperbola ABC, cuius centrum D, terminetur rectâ AC: quâ diuisâ bifariam in E, ponatur diameter DE, occurrens sectioni in B, & iungantur AB, CB, dico triangulum ABC, esse maximum illorum, quę hyperbolæ ABC inscribi possunt. ponatur per B contingens FB. [a] æquidistabit illa rectæ AC: ducatur dein quæuis HG, parallela BE, occurrens sectioni in G. patet G punctum esse infra lineam FB, adeoque GH minorem BE. vnde triangulum AGC minus est triangulo ABC: triangulum igitur ABC maximum est. datæ igitur hyperbolæ terminatæ, &c. Quod erat faciendum.



[a] 1.6. huius.

PROPOSITIO CIII.

ISdem positis:
Dico ABC triangulum maius esse dimidio segmenti ABC.

Demonstratio.

ERigantur ex A & C æquidistantes BE, occurrentes FB contingenti in F & K: quoniam igitur tam ABC triangulum, quam [b] FE parallelogrammum, duplum est trianguli ABE, æqualia sunt parallelogrammum FE, & triangulum ABC: vnde FC parallelogrammum duplum est trianguli ABC: sed FC parallelogrammum maius est segmento ABC, (cùm FK contingens tota cadat extra sectionem,) triangulum igitur ABC, dimidium parallelogrammi FC, maius quoque est dimidio segmenti ABC. Quod erat demonstrandum.

[b] Ex elementis.

Corollarium.

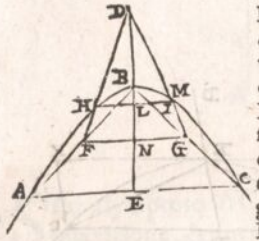
HInc apparet ratio inscribendi triangulum cuiuis segmento hyperbolico, quod ad maximum triangulum inscriptum, datam habeat rationem minoris inæqualitatis; constituendo scilicet rectam aliquam GH, quæ ad BE, datam rationem obtineat: Si enim ad G deducantur rectæ AG, CG, triangulum AGC ad ABC, est in ratione lineæ GH ad BE: cùm bases sint communes.

PROPOSITIO CIV.

HYperbolam ABC, cuius centrum D, ſubtendat recta AC, diuiſa bifariam à diametro DE; iunctiſque AB, CB, ac diuiſis bifariam in F & G; demittantur DF, DG, occurrentes ſectioni in H & I, iungantúrque AH, HB, BI, CI.

Dico triangula AHB, BIC, æqualia eſſe.

Demonſtratio.



POnatur ex H ordinatim HL, ad diametrum hyperbolæ DE. occurrens ſectioni in M, & DG lineę in I: quoniam AB, BC in F & G, diuiſæ ſunt bifariam, FG æquidiſtabit AC, adeoque & ipſi HI cum HM, & AC ordinatim poſitæ ſint ad diametrum DE: quia verò AC in E diuiſa eſt bifariam, erit & FG in N, adeoque & HM in L bifariam quoque diuiſa. Sed & HI in L, biſſecta eſt, quia FG in N biſſectæ æquidiſtat; ſunt igitur æquales lineæ HM, HI, & puncta M & I eadem: quare DF, DG diametri in H & M, proportionaliter ſunt diuiſæ. rurſus cùm DFN, DGN triangula, item FBN, GBN æqualia ſint, reliqua etiam DFB, DGB triangula inter ſe æqualia ſunt. Vnde cùm DF, DG in H & M, proportionaliter ſint diuiſæ, æqualia quoque ſunt triangula DHB, DIB; adeoque & reliqua FHB, BMG: patet igitur & illorum dupla AHB, BMC triangula, inter ſe æquari: Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

SEcent hyperbolam ABC, duæ parallelæ AD, BC, iunganturque AB, CD:

Dico triangula maxima illis inſcripta, eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.



a 101. huius.

EX centro E ducantur diametri EF, EG, diuidentes rectas AB, CD bifariam in F & G, occurrentes hyperbolæ in H & I, & iungantur AH, HB, CI, ID, erunt hæc triangula a maxima ſegmentis AHB, CID inſcripta. ductâ dein diametro EK, quæ bifariam partiatur rectam AD, ponatur FG, erit illa parallela lineæ AD, cùm AB, DC in F & G, diuiſæ ſint bifariam, conſtitutaque ſint inter parallelas AD, BC. ex H igitur ducatur ordinatim HM ad diametrum EK, oſtendetur, vt in priore propoſitione illam productam occurrere communi interſectioni I: adeoque FG, HI æquidiſtare; & EF, EG diametros in H & I proportionaliter eſſe diuiſas. Iunctis igitur EB, EC, BN, CN; cùm FG, HI, BC æquidiſtent, & in L, M, N bifariam ſint diuiſæ, æqualia ſunt triangula FBN, NCG, item NEB, NEC: vnde & reliqua FEB, ECG triangula quoque ſunt æqualia:

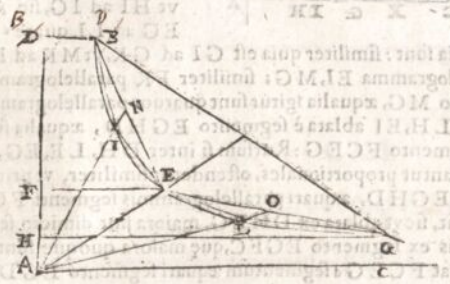
æqualia: quia verò EF, EG in H & I proportionaliter sunt diuisæ, erunt & FHB, CIG; adeoque & illorum dupla AHB, CID triangula inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVI.

SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ DEG, positaque ad diametrum AE ordinatim DG: ducantur DE, EG.

Dico segmenta conuexa DIE, GLE æquari.

Demonstratio.



Diuisis ED, GE bifariam in N & O, ponantur diametri AIN, ALO, iunganturque DIE, GLE: erunt igitur DIE, GLE triangula [a] maxima, & inter se [b] æqualia, maioraque dimidijs [c] segmentorum quibus inscribuntur. similiter si residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima, ostenditur triangula maxima segmentorum ID, IE æquari triangulis maximis segmentorum EL, LG; quæ operatio cùm sine termino in vtroque segmento continuari possit, vt ablata ex DIE segmento maiora sint dimidijs segmentorum à quibus auferuntur, & æqualia ablatis è segmento GLE, quorum singula maiora quoque sunt dimidijs illorum à quibus auferuntur, segmentum DIE [d] æquale est segmento GLE. Quod erat demonstrandum.

[a] 101. huius.
[b] 103. huius.
[c] 102. huius.
[d] 116. De progressionibus.

PROPOSITIO CVII.

IIsdem positis: ponantur DB, EF, GH asymptotorum vni æquidistantes.

Dico segmenta duo concaua BDFE, GHFE inter se æquari.

Demonstratio.

QVoniam BG ordinatim ponitur ad AE, tres BD, FE, GH proportionales sunt, vnde [e] rectilineum BDFE æquale est rectilineo FEGH. sed per præcedentem, æqualia quoque sunt segmenta conuexa DIE, GLE; residua igitur segmenta BDFB, GHFE, inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

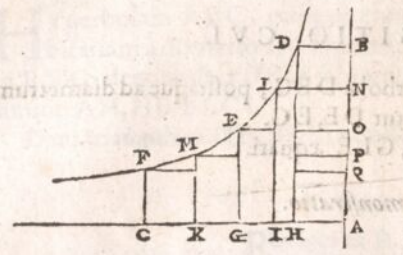
[e] 100. huius

PROPOSITIO CVIII.

SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF, & in continua sint analogia DH, EG, FC asymptoto AB æquidistantes.

Dico segmentum DHGE, æquari segmento EGCF.

Demonſtratio.



a 78. huius.

b 1. De progreſſionibus.

c 14. Sexti.

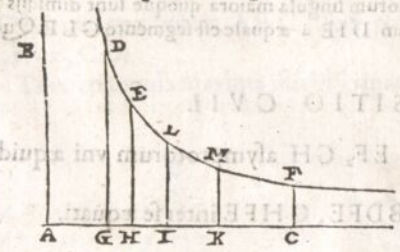
POnantur LI, MK mediæ proportionales inter HD, EG, FC; ducanturque BD, LN, EO, MP, FQ æquidiſtantes aſymptoto AC: cùm igitur DH, LI, EG, MK, FC eandem continuent rationem, proportionales ſunt AH, AI, AG, [a] AK, AC. quia verò HI, IG, GK, &c. differentiæ, ſunt in [b] ratione ſuorum integrorum, vt HI ad IG, ſic AI ad AG, id eſt EG ad LI. quare [c] parallelogramma LH, EI æqualia ſunt: ſimiliter quia eſt GI ad GK, vt MK ad EG, æqualia quoque ſunt parallelogramma EI, MG; ſimiliter FK parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo MG, æqualia igitur ſunt quatuor parallelogramma LH, EI, MG, FK: igitur duo LH, EI ablata è ſegmento EGHD, æqualia ſunt duobus MG, FK ablatis è ſegmento FCEG: Rurſum ſi inter DH, LE, EG, item EG, MK, FC, mediæ ponantur proportionales, oſtendetur ſimiliter, vt prius, parallelogramma in ſegmento EGHD, æquari parallelogrammis ſegmenti FCEG: quod cùm ſemper fieri poſſit, ſic vt ablata ex DHEG, maiora ſint dimidio ſegmenti DHEG, & æqualia ablatis ex ſegmento EGFC, quę maiora quoque ſunt dimidio eiuſdem ſegmenti, conſtat FCEG [d] ſegmentum æquari ſegmento EGDH. Quod fuit demonſtrandum.

d 11 6. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CIX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF: diuisâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



Demonſtratio.

QVoniam AG, AH, AI, &c. proportionales ſunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter ſe continuant [e] rationem; vnde DH, EI [f] ſegmenta ſunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem ſint proportione, [g] æqualia quoque ſunt ſegmenta EI, LK, MC. Conſtat igitur veritas propoſitionis.

e 78. huius.

f 106. huius.

g Ibid.

PROPOSITIO CX.

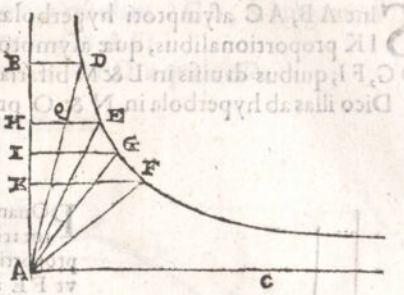
SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF, & ſegmenta ſint æqualia DEHB, EGIH, GFKI: ponanturq; AD, AE, AG, AF:

Dico figuras miſtilineas DAE, DEHB, item EAG, EGIH, &c. ac denique DAE, EAG, GAF figuras inter ſe æquari.

Demon-

Demonſtratio.

TRiangulum ABD [a] æquale eſt triangulo AHE: ablato igitur communi triangulo AHQ, manet AQE triangulum, æquale quadrilatero BDQH: addito igitur communi DQE, erit HBDE ſegmentum æquale figuræ mixtilineæ DAE. ſimiliter oſtenduntur figuræ EAG, GAF æquari ſegmentis EHGI, IKGF: quod erat primum. vnde cùm ſegmenta illa æqualia ponantur, patet & figuras DAE, EAG, GAF quoque inter ſe æquari. Quæ erant demonſtranda.



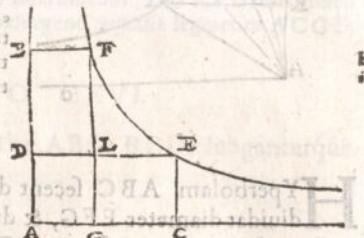
[a] Ex 47. huius.

PROPOSITIO CXI.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ FE: poſitiſq; BF, DE, FG, EC, quæ aſymptotis æquidiſtent:
Dico FEDB ſegmentum æquari ſegmento FECG.

Demonſtratio.

AEqualia ſunt [b] rectangula GB, CD: addito igitur communi FLE, conſtat FECG figuram, æquari figuræ FEDB. Quod erat demonſtrandum.



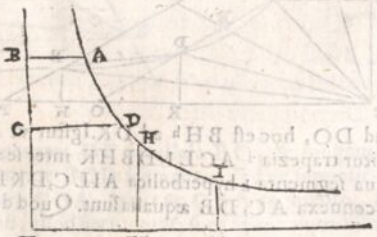
[b] 47. huius.

PROPOSITIO CXII.

DAto ſegmento concauo ABCD. parallelis lineis vni aſymptotorum intercepto aliud æquale exhibere, quod ad datum punctum pertineat.

Conſtructio & demonſtratio.

SInt BF, FG aſymptoti hyperbolæ ADH, & datum ſit ſegmentum concauum ABCD, & punctum H. oporteat ſegmentum concauum exhibere, quod æquale ſit ABCD ſegmẽto, cuius vnum latus ad H pertineat. Poſitâ HK parallelâ aſymptoto BF, fiat vt CF ad BF, ſic FK ad FG, ponaturque GI æquidiſtans HK: Dico factum eſſe quod petitur. eſt enim IG ad HK, vt [c] FK ad FG, id eſt CF ad FB, id eſt AB ad DC: quare ADCB ſegmentum, æquale eſt ſegmento IHKG. Factum igitur eſt quod petebatur.



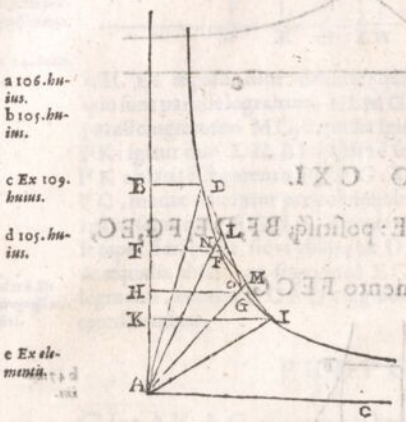
[c] 47. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXIII.

SInt AB, AC asymptoti hyperbolæ DFI, positisq; DB, FE, GH, IK proportionalibus, quæ asymptoto AC æquidistent; iungantur DG, FI; quibus diuisis in L & M bifariam, diametri ponantur AL, AM: Dico illas ab hyperbola in N & O proportionaliter diuidi.

Demonstratio.



a 106. huius.
b 105. huius.
c Ex 109. huius.
d 105. huius.
e Ex elementis.

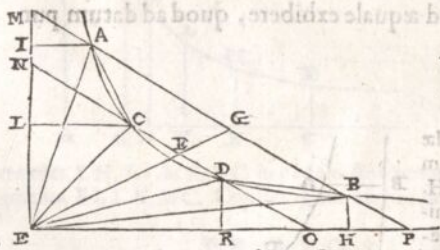
POnantur AD, AF, AG, AI, & perficiantur triangula DNG, FOI. cùm DB, FE proportionales sint GH, IK, DB est ad GH, vt FE ad IK: quare tam segmenta a concaua BDGH, FEKI, quàm conuexa b DNG, FOI æqualia sunt: quia verò BDGH & FEKI segmenta æquantur, æqualia quoque sunt triangula c ADG, AFI; similiter quia DNG, FOI segmenta æqualia sunt, triangula quoque d DNG, FOI æquantur. igitur DNG triangulum ad triangulum DAG, vt FOI triangulum ad triangulum FAI: sed DNG triangulum est ad triangulum DAG e vt LN ad LA, & vt MO ad MA, sic FOI triangulum est ad triangulum FAI; proportionaliter igitur in N & O diuisę sunt diametri LA, MA: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIV.

HYperbolam ABC secent duæ parallelæ AB, CD quas bifariam diuidat diameter EFG, & ducantur AC, BD.

Dico segmenta conuexa AC, DB esse inter se æqualia.

Demonstratio.



f Ex 73. huius.
g Coroll 15. huius.
h Ex 73. huius.
i 94. huius.
k 105. huius.

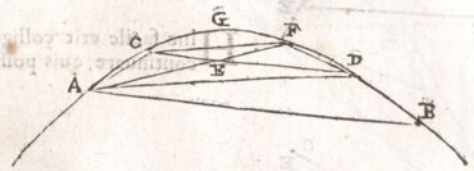
POsitis asymptotis EM & EH, producantur AB, CD donec occurrant asymptotis in M, P, N, O punctis, ducanturque EA, EC, EB, ED, item AI, CL, DK, BH, parallelæ asymptotis: erit ergo AM ad CN, f vt est AI ad CL. sed vt est AM ad CN, ita quoque est BP gad DO, hoc est BH h ad DK. Igitur vt AI ad CL, ita est BH ad DK. sunt igitur trapezia i ACLI, DBHK inter se æqualia; sed eadem de causa etiam concaua segmenta k hyperbolica AILC, DKHB æqualia sunt; residua igitur segmenta conuexa AC, DB æqualia sunt. Quod demonstrandum fuit.

PRO-

PROPOSITIO CXV.

SEcent duæ AB, CD parallelæ hyperbolam ACB, & iungatur AD, cui fiat æquidistans CF. ponaturque AF:
Dico ACF segmentum, segmento CFD æquale esse.

Demonstratio.

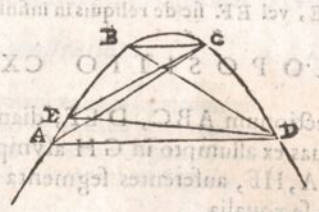


IVngantur AC, CF, FD; quoniam AD ipsi CF æquidistat: segmentum FD segmento AC [a] æquale est. quia verò triangula AFD, ACD, eamdem habentia altitudinem & basim, æqualia sunt, ablato communi AED, æqualia remanent triangula AEC, FED: igitur totum ACE mixtilineum, toti EFD mixtilineo æquatur. addito igitur communi CGFE, exsurgent æqualia segmenta ACGF, & CGFD. Quod fuit demonstrandum. [a] 113. huius

PROPOSITIO CXVI.

SInt in hyperbola, segmenta æqualia ABC, BCD. iunganturque AD, BC.
Dico AD, BC lineas æquidistare.

Demonstratio.



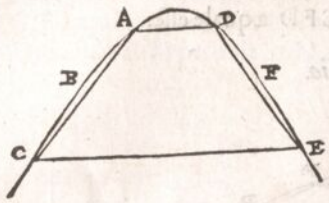
SI enim AD non æquidistat BC, ponatur DE parallela BC, & iungantur CE. segmentum igitur EBC, [b] æquatur BCD segmento: sed ex suppositione BCD segmento æquatur segmentum CBA; igitur & CBA segmento, æquale existit segmentum CBE, pars toti, quod fieri nequit; sunt igitur æquidistantes BC, AD. Quod fuerat demonstrandum. [b] 114. huius

PROPOSITIO CXVII.

DAto hyperbolæ segmento conuexo, ex dato in perimetro puncto rectam ducere, quæ segmentum auferat, dato æquale.

Conſtructio & demonſtratio.

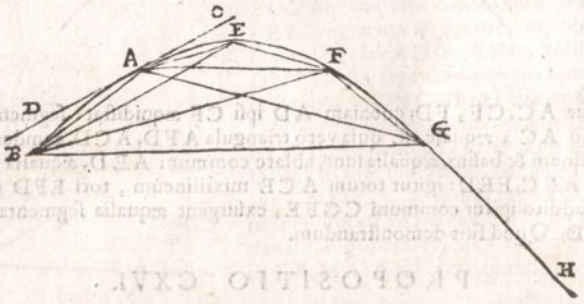
DAtum ſit ſegmentum ABC, & punctum D; oporteat ex D rectam ducere, quę ſegmentum auferat dato æquale. iungantur AD, & CE ponatur æquidiſtans AD, iunganturque DE: patet [a] ſegmentum DFE ſatisfacere petitioni.



a 113. *huius.*

Corollarium.

HInc facile erit colligere, quâ praxi continuare quis poſſit in infinitum,



æqualia ſegmenta conuexa, à quouis dato puncto, in hyperbolæ perimetro. Sit enim datum punctum A, & ſegmentum AB, cui æqualia ſegmenta exhiberi debeant. ponatur CAD contingens hyperbolam in A, & BE æquidiſtans AD, erit EA ſegmentum æquale [b] ſegmento AB; tum rectæ AE, ponatur æquidiſtans BF, iunganturque EF, erit denuò EF ſegmentum ſegmento [c] AB, hoc eſt AE æquale. eodem modo ponendo BG parallelam AF, erit ſegmentum FG, æquale AB vel AE, vel EF. ſic de reliquis in infinitum.

b *Ibid.*
c *Ibid.*

PROPOSITIO CXVIII.

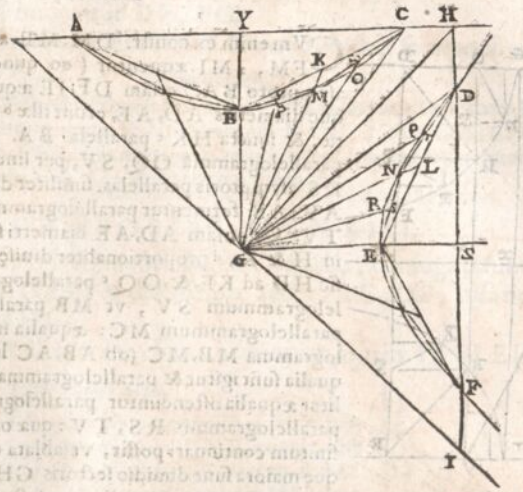
COniugatarum ſectionum ABC, DEF; diametri coniugatæ ſint GB, GE, ad quas ex aſſumpto in GH aſymptoto, puncto H, ordinatim ponantur HA, HF, auferentes ſegmenta ABC, DEF.

Dico illa eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

IVnctæ CB, DE bifariam ſecentur in K & L, per diametros GK, GL, iunganturque BMC, DNE. Quoniam igitur AC, DF ordinatim ad coniugatas diametros poſitæ, aſymptoto in eodem occurrunt puncto H, æqualia ſunt [d] triangula BYC, EZD: quia verò BC, DE bifariam ſecantur in L & K, ductæ GK, GL [e] diametri ſunt coniugatæ, & MN, LK iunctę æquidiſtant aſymptoto GL: proportionaliter igitur in M & N diuiſæ ſunt diametri GK, GL: vnde iunctis GC, GD, cùm triangula GBC, [f] GED inter ſe æqualia ſint, triangula quoque BMC,

d *Per 62. huius.*
e 65. *huius.*
f 44. *huius.*



BMC, DNE æqualia sunt. Similiter si MB, NE bifariam secentur in V, S, & MC, DN in X & T, ostendetur vt prius, iunctas VG, SG, item XG, TG diametros esse coniugatas, ac proinde triangula BPM, MOC æqualia esse triangulis NRE, NQD: quæ operatio cùm sine termino continuari possit, vt ablata triangula maxima è residuo segmenti DNE, æqualia sint ablatis è residuo segmenti BMC, • constat segmenta DNE, CMB, adeoque YBC, DEZ, & eorum dupla ABC, DEF segmenta inter se æquari. Quod erat demonstrandum.

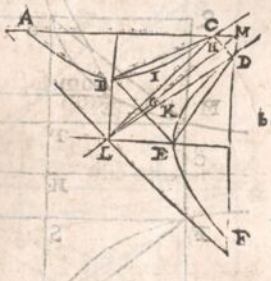
a 116. Dis progressionibus.

PROPOSITIO CXIX.

SInt ABC, DEF coniugatarum sectionum, diametri coniugatæ LB, LE: sint autem ad illas ordinatim positæ AC, DF occurrentes asymptoto HL in vno eodemque puncto M: ponanturque BE, DC.

Dico segmenta concaua, BICHG, & EKDHG inter se æqualia esse.

Demonstratio.



SVnt enim per præcedentem æqualia segmenta conuexa BIC, DKE, sed & æqualia sunt trapezia b BGHC, GEDH; igitur & residua segmenta concaua BICHG, EKDHG inter se sunt æqualia.

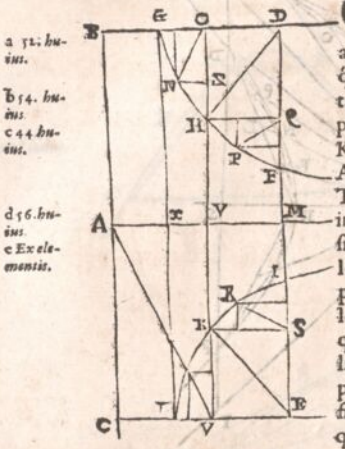
b 54. huius.

PROPOSITIO CXX.

SInt hyperbolæ coniugatæ GHF, LKI, earumq; asymptoti BAC, AM. sitq; AB æqualis AC, & DE parallela AB; alteri verò asymptoto AM, æquidistent BD, EC occurrentes sectioni in G, & L.

Dico sectorem DGHF, sectori EIKL æqualem existere.

Demonſtratio.



a 32. huius.
b 54. huius
c 44. huius.
d 56. huius.
e Ex elementis.

CVm enim ex conſtr. DM, ME æquales ſint, item FM, a MI æquentur (eo quod FI parallela ſit aſymptoto BA,) etiam DF, IE æquales erunt; ductiſque diametris AD, AE, erunt illæ b diametri coniugatæ, & iuncta HK c parallela BA. formentur itaque parallelogramma OQ, SV, per lineas OHKV, HQ, KS aſymptotis parallelas. ſimiliter ductis AO, AQ, & AV, AS formentur parallelogramma ON, PQ, RS, TV. Quoniam AD, AE diametri ſunt coniugatæ, & in H & K, d proportionaliter diuiſę, vt AD ad AE, ſic HD ad KE, & OQ e parallelogrammum ad parallelogrammum SV, vt MB parallelogrammum ad parallelogrammum MC: æqualia ſunt autem parallelogramma MB, MC (ob AB, AC lineas æquales) æqualia ſunt igitur & parallelogramma OQ, SV. Similiter æqualia oſtenduntur parallelogramma PQ, NO, parallelogrammis RS, TV: quæ operatio cùm in infinitum continuari poſſit, vt ablata è ſectore FHGD quę maiora ſunt dimidio ſectoris GHFD æqualia ſint, ablatis è ſectore IKLE, quę maiora quoque ſunt dimidio ſectoris IKLE, conſtat ſectores FH, GD, IKLE, eſſe inter ſe æquales. Quod fuit demonſtrandum.

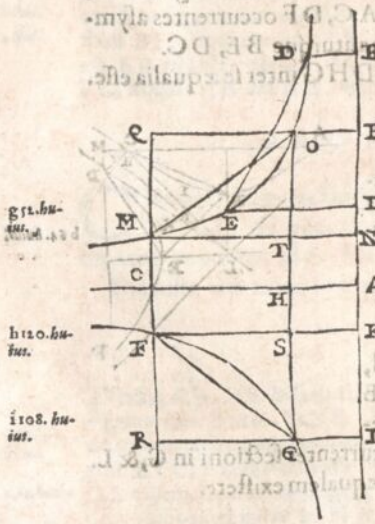
f 116. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXI.

Sint AB, AC aſymptoti coniugatarum ſectionum DE, FG: ponantur autem BD, IE proportionales LG, KF, quæ omnes aſymptoto AC æquidiſtent:

Dico BDIE concauum ſegmentum, æquari ſegmento concauo FKLG.

Demonſtratio.



g 52. huius.
h 120. huius.
i 108. huius.

POnantur FM, GO aſymptoto AB, & MN, OP ipſi AC æquidiſtantes: & FM quidem occurrat OP, LG productis in Q & R. cùm igitur tam FM, NK, quàm FK, MN æquidiſtent, æqualia ſunt latera FK, MN; MF, NK; ac proinde cùm MF in C g diuiſa ſit bifariam, æqualia ſunt parallelogramma MA, FA: vnde & reſidua quoque parallelogramma NQ, RK æqualia ſunt: (cùm enim OG in H, id eſt LP in A, id eſt QR in C diuiſa ſit bifariam, tota parallelogramma QA, RA inter ſe æquantur:) eâdem de causâ cùm æquales quoque ſint h ſectores OEMQ, FRGF, æqualia ſunt reſidua ſegmenta OPNM, FKLG: eſt autem OPNM ſegmentum, æquale i ſegmento BDIE, (cùm BD ſit ad IE, vt GL ad FK ex poſitione, id eſt OP ad MN:) ſegmentum igitur BDIE, æquale eſt ſegmento FKLG. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXXII.

ISdem positis, iungantur DE, FG.

Dico segmenta conuexa DE, FG quoque inter se æquari.

Demonstratio.

DVcatur recta MO, erit igitur segmentum [a] OEM æquale segmento FG: sed OEM segmento æquale est [b] segmentum DOE, (quia DBIE, OPNM segmenta concaua ostensa sunt æqualia in priori propos.) segmentum igitur DOE, æquale est segmento FG. Quod erat demonstrandum.

[a] 118. huius.
[b] 106. huius.

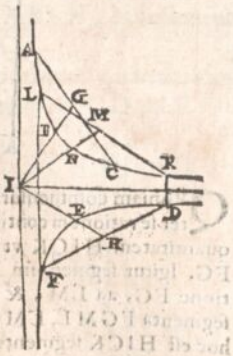
PROPOSITIO CXXIII.

SInt ABC, DEF segmenta quæuis æqualia, coniugatarum sectionum ABC, DEF; & diuidantur rectæ AC, DF, bifariam, per diametros IG, IH:

Dico IB ad BG eamdem habere rationem, quam IE ad EH.

Demonstratio.

DVctis DK & FL quæ asymptoto IO æquidistent: iungatur KL; segmentum igitur KNL æquale [c] est segmento DEF, id est per hypothesim segmento ABC. vnde LK diuisâ in M bifariam per diametrum IM, erunt GI, MI diametri proportionaliter à sectione diuisę. sed & IH quoque in E [d] diuisa, vt IM in N, proportionaliter igitur diuisæ sunt diametri IG, IH. Quod fuit demonstrandum.



[c] 119. huius
[d] 112. huius

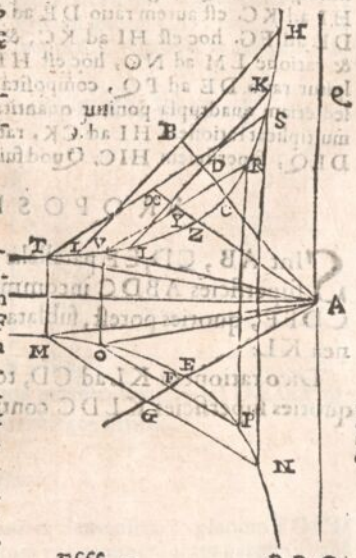
PROPOSITIO CXXIV.

SInt AC, AE coniugatarum sectionum quæcumque diametri, proportionaliter diuisæ; & AC quidem in D & B, vt AE secta est in F & G; ponantur autem in vtraque sectione, per diuisionum puncta, ordinatim lineę LK, IH, OP, MN:

Dico segmentum LCK, æquari segmento OEP, & HCI æquari segmento NEM.

Demonstratio.

POsitis MT, OV, RP, NS parallelis asymptoto AQ, iungantur RV, ST, quæ bifariam secentur in Y & X, per diametrum AZ quæ in Y & X diuisa erit, vt AE in F & G (quia ATX, AVY triangula æqualia sunt triangulis AGM, AFO) id est ex hypothesi, vt AC in D & B. quare & segmentum [e] RZV, æquale est segmento LCK, & TZS, segmento ICH æquale. Sed & segmento RZV, æquale est OEP [f] segmentum, & TZS æquale est segmentum MEN. Segmēta igitur LCK, HCI æqualia sunt segmentis OEP, NEM. Quod fuit demōstrandū.



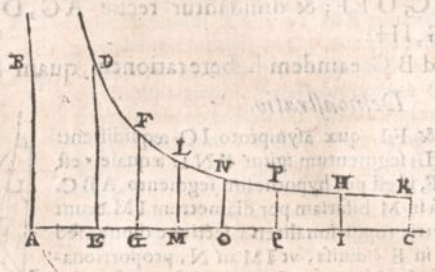
[e] 118. huius.
[f] 119. huius.

PROPOSITIO CXXV.

INter asymptotos AB, AC, constituta sit hyperbola; ex qua assumantur quæuis duæ partes terminatæ rectis DE, PQ, & HI, KC, quæ æquidistent asymptoto AB. sit autem superficies DEQP commensurabilis plano HICK:

Dico superficiem DEQP toties continere superficiem HICK, quoties ratio lineæ DE ad PQ, multiplicat rationem HI ad KC.

Demonstratio.



a 5 decimi. QVoniam commensurabiles ponuntur quantitates DEQP, HICK, eam inter se rationem continent, a quam numerus ad numerum: sit igitur DEQP ad quantitatem HICK vt quatuor ad vnum. Fiantque & HI ad KC, sic ED ad FG. Igitur segmentum HICK segmento b DEGF est æquale. Facta iterum ratione FG, ad LM, & LM ad NO eâdem, cum ratione DE ad FG, erunt segmenta FGML, LMON inter se æqualia, & singula æqualia segmento DEGF, hoc est HICK segmento. Porrò cùm superficies DEQP ponatur quadrupla superficies HICK, erit quantitas NOQP quarta pars quantitatis DEQP. proindeque NOQP segmento HIC est æquale; igitur est NO ad PQ, vt linea HI ad KC. est autem ratio DE ad PQ, composita ex multiplicatione rationis DE ad FG. hoc est HI ad KC, & ex ratione FG ad LM, hoc est HI ad KC, & ratione LM ad NO, hoc est HI ad KC, & tandem ex ratione NO ad PQ. Igitur ratio DE ad PQ, composita est ex ratione DE ad FG, quadruplicata, sed etiam quadrupla ponitur quantitas DEQP segmenti HICK. igitur toties multiplicat rationem HI ad CK, ratio DE ad PQ, quoties continet superficies DEQ, superficiem HIC. Quod fuit demonstrandum.

b 168. huius.

PROPOSITIO CXXVI.

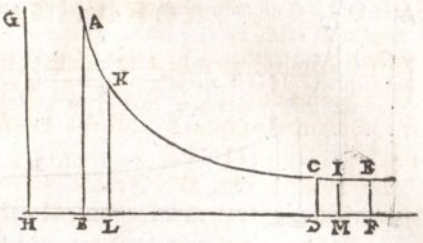
SInt AB, CD, EF parallelæ asymptoto HG hyperbolæ ACE, & superficies ABDC incommensurabilis CDEF; quantitas autem CDFE, quoties potest, sublata à superficie c ABDC terminetur in linea KL:

c Ex 1. decimi.

Dico rationem KL ad CD, toties multiplicare rationem CD ad EF, quoties superficies KLDC continet planum CDFE.

Demon-

Demonſtratio.



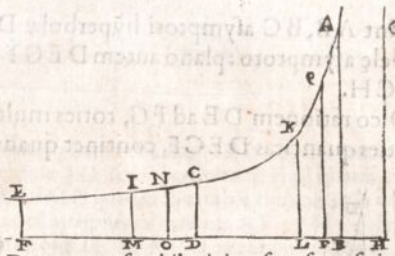
QVoniam ſuperficies CDFE aliquoties ſublata à quantitate ABDC terminatur in KL. igitur KLDC eſt figuræ CDFE commenſurabilis; quare per præcedentẽ propoſitionem ratio KL ad CD, toties multiplicat rationem CD ad EF, quoties ſuperficies KLDC, continet quantitatem CDFE. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CXXVII.

IIſdem poſitis, diuiſa ſit ſuperficies DE, per parallelam aſymptoto, bifariam in IM, & pars DI bifariam per rectam NO, & idem continuetur donec DN ſit minor quantitas ſuperficie ABLK; & auferatur QPLK planum æquale DN à quantitate ABLK.

Dico iterum quantitatem QPDC toties continere quantitatem CDFE, quoties ratio QP ad CD multiplicat rationem CD ad EF.

Demonſtratio.



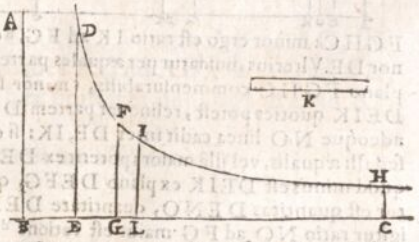
QVoniam DN ſuperficies per ſubdiuiſionẽ quantitatis CF, in æquales partes, orta eſt; ſuperficies DN, commenſurabilis eſt quantitati CF: Igitur & PK quantitas, æqualis DN, [a] commenſurat quantitatem CF. Sed FC ex hypotheſi commenſurat planum KLCD, adeoque & totum PQCD: commenſurabiles igitur ſunt ſuperficies CF, & QD: Quare toties multiplicat ratio lineæ QP ad lineam CD, rationem CD ad EF, [b] quoties planum QPDC, continet planum CF. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 12. decimi.

[b] 175. huius.

PROPOSITIO CXXVIII.

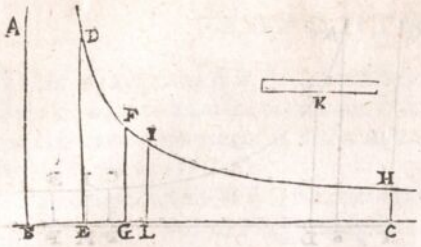
SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DFH, & ponatur quæcunque ſuperficies DEGF parallelis aſymptoto AB comprehenſa, incommenſurabilis quantitati FGCH:



Dico toties poſſe ſubdiuidi in partes æquales ſuperficiem FGCH, vt vna aliquoties commenſurans partem ſuperficiei DEGF, relinquat in ea reſiduum, quâlibet datâ quantitate minus.

Demonſtratio.

SIt quantitas data quantumuis exigua K; oportet demonſtrare, planum FGCH toties in æquales partes poſſe diuidi, vt illarum vna commenſurans partem aliquã ſuper-



ſuperficiei DEGF, relinquat in ea reſiduum, minus datâ quantitate K. ſubdiuidatur in æquales partes planum FGCH per primam decimi, toties, vt FGLI reſidua pars, minor ſit quantitate K; erit illa plano FGHC (vt patet ex ſubdiuiſione per partes æquales factâ) commenſurabilis; planum igitur FGLI quoties poteſt, auferatur ex plano DEFG: Dico reſiduum quantitatis DEFG, plano K minus eſſe: ſi non, igitur reſiduum vel æquale, vel maius eſt plano K. ſi æquale; ergo FGLI quantitas, commenſurabilis eſt quantitati DEFG: & quia FGLI, commenſurat quantitatem FGHC, (vt ex eiuſdem ſubdiuiſione in conſtructione factâ conſtat) planum igitur DEFG commenſurabile [a] eſt plano FGHC: quod eſt contra hypotheſim. Iam vero reſiduum ex DEGF relictum, maius ſit dato K; ergo quantitas FGLI (quę minor eſt quantitate K) iterum ex reſiduo plani DEFG auferri poterit: ergo facta non eſt ſublatio, quoties fieri potuit; quod rurſum contra ſuppoſitum eſt. Reſiduum igitur in plano DEFG relictum, minus eſt quantitate K: quod erat demonſtrandum.

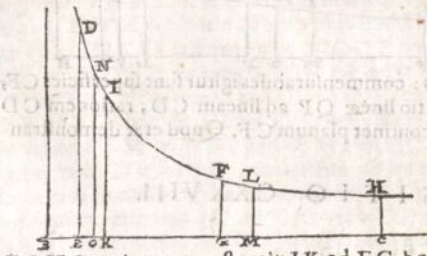
[a] Ex 11. decimi.

PROPOSITIO CXXIX.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DFH, & DE, FG, HC parallelę aſymptoto: plano autem DEGF incommenſurabile ſit planum FGCH.

Dico rationem DE ad FG, toties multiplicare rationem FG, ad HC, quoties quantitas DECF, continet quantitatem FGCH.

Demonſtratio.



SI enim ita non ſit; igitur ratio DE ad FG, ſæpius multiplicat rationem FG ad HC, quam DEFG planum, continet planum FGHC; vel contra: ſi primum, ponatur ratio IK ad FG, toties multiplicans rationem FG ad HC, quoties planum DEFG continet planum FGHC: minor ergo eſt ratio IK ad FG, [b] quam DE ad FG; adeoque & IK minor DE. Vlterius diuidatur per æquales partes planum FGHC, vt pars eius FLGM plano FGHC commenſurabilis, [c] minor ſit parte DEKI: tum FM ablatâ ex DEIK quoties poteſt, relinquat partem DNOE: quæ minor eſt parte DEKI, adeoque NO linea cadit inter DE, IK: ſi enim DENO non minor ſit DEKI, ſed illi æqualis, vel illâ maior; poterit ex DENO iterum auferri FGLE planum quod minus eſt DEIK ex plano DEFG, quod eſt contra ſuppoſitum. minor igitur eſt quantitas DENO, quantitate DEIK, & NO linea eſt inter DE, IK. igitur ratio NO ad FG maior eſt ratione [d] IK ad FG. ac proinde ratio NO ad FG, magis multiplicat rationem FG ad HC, quàm eamdem multiplicet ratio IK ad FG: quia verò FM quantitas communis eſt menſura planorum FGHC, NOFG. commenſurabilia ſunt plana [e] FGHC, adeoque toties multiplicat ratio NO ad FG, rationem FG ad HC, quoties planum NOFG continet planum FGHC; ſed & planum DEFG toties continet planum FGHC, quoties ratio IK ad FG, multiplicat rationem FG ad HC; ſæpius igitur planum NOFG continet planum FGHC, quàm DEFG idem FGHC contineat: quod fieri non poteſt,

[b] Per elementa.
[c] Ex 1. decimi.
[d] Ex elementis.
[e] 12. decimi.

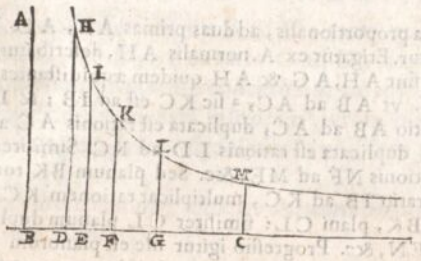
test, cùm DEFG quantitas maior ostensa sit quantitate NOFG: igitur ratio DE ad FG, non magis multiplicat rationem FG ad HC, quàm planum DEFG continet planum FGHC. Eâdem planè ratione ostenditur, planum DEFG non sæpius continere planum FGHC, quàm ratio DE ad FG, multiplicat rationem FG ad HC. Planum igitur DEFG toties continet planum FGHC, quoties ratio DE ad FG, multiplicat rationem FG ad HC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXX.

SInt AB, BC asymptoti hyperbolæ, & ponantur parallelæ asymptoto DH, EI, FK, GL, CM, auferentes segmenta æqualia HE, IF, KG, LC.

Dico lineas HD, IE, KF, LG, MC esse in continua analogia.

Demonstratio.



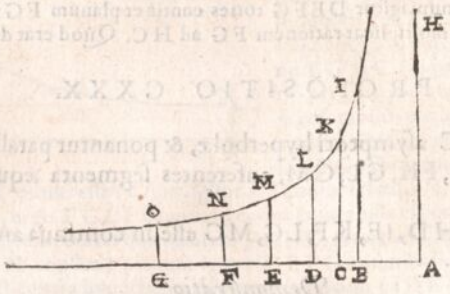
RAtio enim DH ad IE, toties multiplicat rationem IE ad MC, quoties superficies HE, continetur in superficie IC. sed superficies HE est quarta pars, verbi causa, plani HC; igitur ratio HD ad MC quadruplicata est rationis HD ad IE. Similiter ratio IE ad MC, ostenditur esse triplicata rationis KF ad MC; Igitur ratio HD ad IE, est eandem cum ratione IE ad KF. eodem pacto demonstratur, rationem IE ad KF, esse eandem cum ratione KF ad LG, & LG ad MC. Igitur continuant eandem rationem lineæ HD, IE, KF, LG, MC. Quod fuit demonstrandum. 125. & 129. huius.

PROPOSITIO CXXXI.

LInea ABC ita diuisa sit in B, C, D, E, F, vt ratio AB ad AC, duplicata sit rationis eius, quam habet AC ad AD; & AC ad AD, duplicata rationis AD ad AE; & hæc postrema duplicata AE ad AF, ita deinceps in infinitum.

Oporteat huius progressionis terminum assignare.

Conſtructio & demonſtratio.



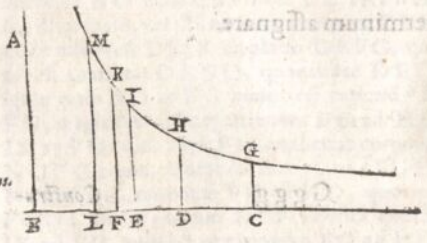
FIat AG tertia proportionalis, ad duas primas AB, AC. Dico G punctum eſſe quod poſtulatur. Erigatur ex A normalis AH, deſcribaturque hyperbola IKL, cuius aſymptoti ſint AH, AG: & AH quidem æquidiſtantes ponantur ex punctis B, C, D, E, F, G. vt AB ad AC, [a] ſic KC eſt ad IB; & LD ad KC, vt AC ad AD: ſed ratio AB ad AC, duplicata eſt rationis AC ad AD; igitur & ratio KC ad IB, duplicata eſt rationis LD ad KC. Similiter ratio ME ad LD, duplicata eſt rationis NF ad ME, &c. Sed planum BK toties continet planum CL, [b] quoties ratio IB ad KC, multiplicat rationem KC ad LD. Duplum igitur eſt planum BK, plani CL: ſimiliter CL planum duplum eſt DM, & hoc duplum plani EN, &c. Progreſſio igitur hîc eſt planorum in proportione dupla. Quia verò AB, AC, AG ſunt proportionales, erunt [c] & OG, KC, IB continuæ: ergo, cùm ratio BI ad OG, duplicata ſit rationis BI, ad CK, planum IG duplum eſt [d] plani BK, quod erat primum in ſerie planorum proportionis duplæ. Atqui tota ſeries magnitudinum proportionis duplæ [e] dupla eſt primæ magnitudinis. Ergo planum IG æquatur toti ſeriei planorum BK, CL, DM, &c. hoc eſt terminus progreſſionis planorum eſt linea OG. Quare & ſeriei linearum AB, AC, AD, &c. in proportione ante poſita continuatæ quę progreſſionem planorum ſemper comitatur, terminus eſt G. Exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

a 74. huius.
b 129. huius.
c 78. huius.
d 129. huius.
e 85. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXXII.

POnatur iterum ratio BC ad BD, duplicata BD ad BE; & ratio BD ad BE duplicata rationis BE ad BF, &c.
Oporteat terminum huius progreſſionis exhibere.

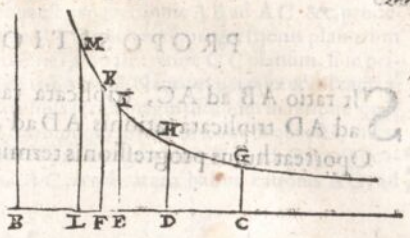
Conſtructio & demonſtratio.



FIat BL tertia proportionalis ad BD, BC. Dico L terminum eſſe quæſitum. Erectâ ex B normali ad BC, deſcribatur hyperbola GHI, cuius aſymptoti ſint AB, BC. & AB quidem æquidiſtantes ponantur CG, DH, EI, FK, LM. vt BC ad BD, [f] ſic HD eſt ad GC, & IE ad HD, vt BD ad BE. ſed ratio BC ad BD, duplicata eſt rationis BD ad BE, ratio igitur HD [g] ad GC duplicata quoque eſt rationis IE ad

f 74. huius.
g Ex cadē.

ad HD. Similiter ratio IE ad HD duplicata est rationis KF ad IE, &c. sed planum HC toties continet planum HE, [a] quoties ratio HD, ad GC multiplicat rationem IE ad HD; duplum igitur est HC planum, plani HE. Similiter ostendetur planum HE duplum esse plani IF, &c. Quare progressio hîc est planorum in proportione dupla. Quia verò BL, BD, BC, adeoq; [b] & GC, HD, ML proportionales sunt, planum [c] MC duplum est plani HC; planum igitur [d] MC æquale est toti seriei planorum HC, ID, KE, &c. hoc est linea LM terminus est progressionis planorum. Cùm igitur progressio linearum BC, BD, BE, &c. iuxta proportiones antè positas continuata, progressionem planorum perpetuò comitetur, eius quoque terminus erit punctum L. Factum igitur est quod petebatur.



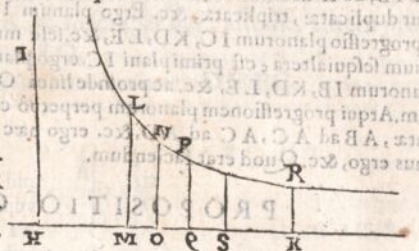
[a] 129. huius.

[b] 78. huius.
[c] 129. huius.
[d] 85. De progressionibus.

PROPOSITIO CXXXIII.

Sit ratio A ad B, duplicata rationis B ad C: ratio quoque B ad C, duplicata rationis C, ad D, vti & ratio C ad D, duplicata rationis D ad E, &c. quamuis hæc progressio continuetur in infinitum, non venietur tamen ad magnitudinem datâ minorem, vti in libro progressionum propos. . contingere demonstravimus in eiusdem rationis continuatione.

Oporteat ergo exhibere lineam, quæ sit minima omnium linearum, quę in tali progressione dari possunt.



Constructio & demonstratio.

Constituantur HI, HK asymptoti hyperbolę LNPR deinde ducatur LM asymptoto æquidistans & æqualis ipsi A.

A B C D E C

fiatque vt A ad B; ita HO ad HM. & vt B ad C, ita HQ ad HO, &c. erigantur deinde ON, QP, &c. parallelæ asymptoto HI. erit [e] LM ad NO, vt HO ad HM, hoc est ex constr. vt A ad B: & NO ad PQ, vt HQ ad HO, hoc est vt B ad C, & sic deinceps. Fiat denique vt HM ad HO, ita HQ ad HK, & erigatur KR parallela asymptoto HI. Dico KR minimam esse lineam, quæ seriem duplicatæ rationis LM, ad NO, & NO ad PQ, & sic in infinitum terminabit. Cùm enim ratio LM ad NO, vt patet ex discursu duarum præcedentium, duplicata sit rationis NO ad PQ, planum [f] LO duplum erit plani NQ: similiter & planum NQ duplum est plani PS, & sic de cæteris. Igitur superficierum LO, OP, PS, &c. series procedit in ratione dupla. quia verò HM, HO, HK, [g] adeoque & RK, NO, LM sunt proportionales, planum [h] LK duplum est plani LO. igitur planum LK, [i] æquale est toti planorum LO, NQ, PS, &c. seriei in proportione dupla continuatæ: ergo RK erit [k] terminus progressionis linearum LM, NO, PQ, &c. sed lineæ LM, NO, PQ, &c. sunt æquales lineis A, B, C, D, &c. cùm lineæ LM, NO, PQ, &c. sint lineis A, B, C, D supra proportionales, & prima LM æqualis sit primæ A. Ergo RK est minima linearum A, B, C, &c. siue terminat seriem duplicatæ rationis A, ad B. B ad C, in infinitum continuatæ. Exhibuimus igitur, &c. Quod facere oportebat.

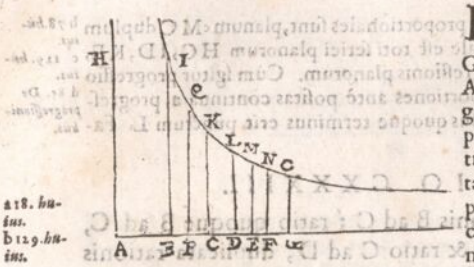
[e] 74. huius.

[f] 129. huius.
[g] 78 huius.
[h] 129. huius.
[i] 85. De progressionibus.
[k] Ex 125. de progressionibus.

PROPOSITIO CXXXIV.

SIt ratio AB ad AC, triplicata rationis AC ad AD, & ratio AC ad AD triplicata rationis AD ad AE, &c. Oporteat huius progressionis terminum assignare.

Constructio & demonstratio.



a 118. huius. b 129. huius.

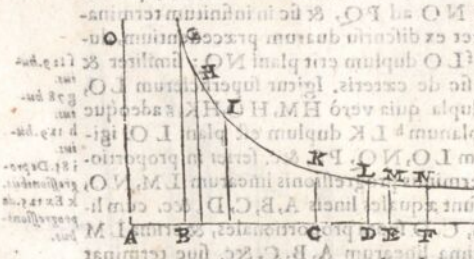
INter AB, AC media ponatur AP, fiantque continuæ, AP, AC, AG, dico G terminum esse quæsitum. Fiant AH, AB, asymptoti hyperbolæ IKL, & erigantur BI, CK, DL, &c. parallelæ asymptoto: Quoniam AB, AC, AD, AE rationem continuant proportionis triplicatæ, rectæ quoque IB, KC, LD, ME, &c. proportionem continuant rationis triplicatæ. Vnde b planum IC, triplum est plani KD: & illud rursum triplum plani LE, & sic in cæteris procedendo habetur progressio planorum in ratione tripla: quia verò AB, AP, AC proportionales sunt, & ipsis AP, AC, tertia proportionalis est adiecta AG, continuabunt AB, AP, AC, AG rationem eandem: & si ex P erigatur parallela asymptoto, BI, PQ, CK, OG, erunt ipsis AB, AP, AC, AG proportionales, ac proinde in ratione continua. Ergo ratio IB ad OG, est sesquialtera rationis IB, ad KC, eo sensu quo in definitione 10. & 11. libri 5. elem. proportiones dicuntur duplicatæ, triplicatæ, &c. Ergo planum IG sesquialterum est plani IC, sed tota progressio planorum IC, KD, LE, &c. sese mutuo in proportione tripla excedentium sesquialtera c est primi plani IC. ergo planum IG æquatur toti progressioni planorum IB, KD, LE, &c. ac proinde linea OG terminat progressionem planorum. Atqui progressionem planorum perpetuò comitatur progressio rationis triplicatæ, AB ad AC, AC ad AD, &c. ergo hæc quoque terminatur in G. Exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

c 86. de progressionibus.

PROPOSITIO CXXXV.

POnatur ratio AB, ad AC, quadruplicata rationis AC, ad AD; ratio autem AC ad AD, quadruplicata rationis AD ad AE. & sic consequenter, huius verò progressionis finis sive terminus sit punctum F. Dico rationem AB, ad AC, fore triplicatam eius, quam habet AC, ad rectam AP.

Demonstratio.



ERectâ ad AF normali AO, inter asymptotos AF, AO, hyperbola describatur GHK, & ex B, C, D, E, &c. ducantur BG, CK, DL, &c. æquidistantes asymptoto AO. vt AB ad AC, sic KC, ad GB: & LD ad KC vt AC ad AD, quadruplicata est igitur ratio GB ad KC, rationis KC ad LD. vnde & GC planum quadruplum est plani KD. Similiter ostenditur planum KD quadruplum esse plani LE & sic de cæteris. Progressio igitur hic est planorum in

in ratione quadrupla: quia verò E terminus est progressionis A B ad A C, &c. procedentium in ratione quadruplicata, F N quoque terminus est progressionis planorum in ratione quadrupla, & G F planum toti seriei æquale: vnde G C planum, si ie primus seriei terminus ad reliquum K F est vt tria ad vnũ. Nam vti patet ex constructi. 2. propos. 80. de progressionibus, primus terminus seriei magnitudinum in ratione quadrupla, est ad reliquam seriem vt primi termini qui est A, & secundi qui est I, differentia, ad secundum terminum, hoc est vt 3 ad 1. ergo [a] ratio K C ad G B triplicata rationis est N F ad K C, id est A B ad A C, triplicatam habet rationis A C, ad A F. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ex conuersa 12 huius.*

Scholion.

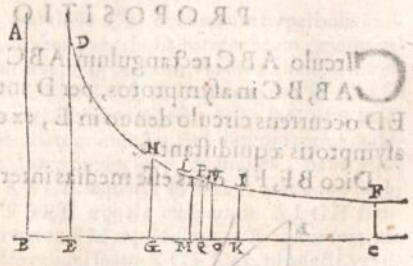
BEnigne Lector, ex hac vltima propositione clarè perspectum habes, quò tendebant præcedentes propositiones, scilicet vt aliqua ratio posset inueniri etiam per progressiones & hyperbolas exhibendi duas medias proportionales inter duas assignatas quantitates; quod profectò successisset, si hanc vltimam propositionẽ problematico more proponere ac soluere æquè feliciter licuisset atque priores resolutæ ac demonstratæ sunt. Certè primâ fronte rem intuenti, facilior longè videri posset ratio exhibendi terminum progressionis quadruplicatæ rationis, quàm triplicatæ, vel saltem non minus facilis ac rationis duplicatæ terminum Geometricè inuenimus: longè tamen aliter rem curiosius intuenti apparet; interim viam aliquo modo strauimus tibi, vt, si lubet, vlteriore conatu eò peruenire studeas, quò nobis nondum licuit.

PROPOSITIO CXXXVI.

POsitis asymptotis A B, B C, hyperbolæ D F, & quibusuis D E, F C, asymptoto parallelis; fiat H G media inter D E, F C. Deinde I K media inter H G, F C. denique L M media proportionalis inter I K, H G: & N O media inter L M, I K, & id semper fiat: alternæ autem progressionis huius terminus ponatur P Q.

Dico P Q fore vnam è duabus medijs inter D E, F C.

Demonstratio.



QVoniam D E, H G, F C sunt continuæ, planum D G [b] æquatur plano H C: sed, quia H G, I K, F C, etiam sunt in continua, planum H C duplum est plani H K. igitur planum D G duplum est plani H K. sed quia H G, L M, I K sunt in continua, planum H K duplum est plani H M. ergo planum D G quadruplum est plani H M. Ergo progressio planorum D G, H M, &c. procedit in ratione quadrupla quæ terminatur in P G. Deinde quoniam H G, I K, F C sunt in continua, plana F K, I G æquantur: sed, quia H G, L M, I K sunt in continua, planum I G duplum est plani I M. ergo planum F K duplum est plani I M. sed quia L M, N O, I K sunt in continua, planum I M duplum est plani I O. ergo planum F K quadruplum est plani I O. Ergo progressio planorum F K, I O, &c. similiter procedit in ratione quadrupla; terminatur autem in P Q. Iam verò quoniam (vt supra ostendimus) planum D G æquatur plano H C, & planum H C duplum est plani F K, erit quoque planum D G duplum plani F K. sed, vt se habent summi similium progressionum termini, plana nempè D G, F K, ita se habent & [c] progressiones totæ, hoc est plana D Q, F Q. Quare cùm planum D G duplum sit plani F K, erit & planum D Q duplum plani F Q. ergo ratio D E ad P Q duplicata est rationis P Q ad F C. ergo P Q est vna è duabus medijs inter D E, F C. Quod erat demonstrandum.

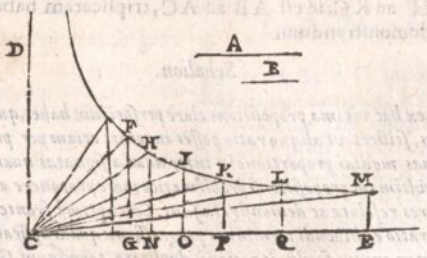
[b] 109. huius.

[c] 116. De progressionum.

PROPOSITIO CXXXVII.

INter duas datas quotlibet medias proportionales exhibere conicè.

Constructio & demonstratio.



SInt A, B duæ datæ: oporteat inter illas quatuor medias proportionales assignare; assumptâ hyperbola cuius asymptoti D C, C E, ponatur G F æqualis A & æquidistans C D; & fiat vt B ad A, ita C G ad C E; & erigatur E M æquidistans F G: & ductis C F, C M: diuisa ponatur quantitas F C M, concauæ hyperbolæ, in quinque partes æquales in H, I, K, L. & demittantur H N, I O, K P, L Q parallelæ asymptoto: dico H N, I O, K P, L Q esse quatuor quę requiruntur. Ostendimus quantitates F C H, H C I, &c. [a] æquales esse quantitatibus F G N H, N H I O, &c. ergo cùm F C M quantitas concaua, diuisa sit in quinque partes æquales etiam quantitas F G E M per parallelas H N, I O, K P, L Q in totidem partes æquales, diuisa erit: ergo cùm ratio F G ad M E, toties multiplicet rationem F G ad H N, quoties [b] quantitas F G E M continet quantitatem F G N H, hoc est quinquies ex constructione, ratio F G ad M E quintuplicata est rationis F G, ad H N. igitur H N, I O, P K, L Q sunt quatuor mediæ, inter duas datas F G, M E. Quod erat præstandum.

[a] 110. huius.

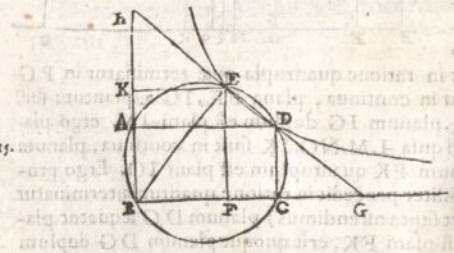
[b] 129. huius.

PROPOSITIO CXXXVIII.

CIrculo A B C rectangulum A B C D inscribatur assumptisque rectis A B, B C in asymptotos, per D inter eosdem describatur hyperbola E D occurrens circulo denuo in E, ex quo demittantur rectæ E K, E F asymptotis æquidistantes.

Dico B F, F E duas esse medias inter A B, B C.

Demonstratio.



PEr puncta E & D agatur recta H E G, ponaturque B E: erit igitur H E [c] æqualis D G: & H K æqualis D C hoc est A B. Cùm triangula H K E, D C G [d] æqualia sint inter se, & similia; quia verò circulo A B C inscriptum est rectangulum A D C, eadem vtrique [e] erit diameter; quare angulus B E D, adeoque & angulus H E B rectus est: quare cùm E K æquidistet A D, lateri rectanguli A B C D, recta E K normalis est ad H B: vnde tres sunt in continua analogia [f] H K, K E, K B: sed H K æquatur A B, & K E æqualis est B F, vti & K B ipsi F E, igitur & A B, B F, F E proportionales sunt deinde cum rectangulo A B C [g] æquale sit rectangulum K E F, vt A B ad B F, ita est F E ad

[c] Coroll. 15. huius.

[d] Ex 73. huius.

[e] Ex elementis.

[f] Ex elementis.

[g] 46. huius.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [659] - 602
PUBLIC DOMAIN

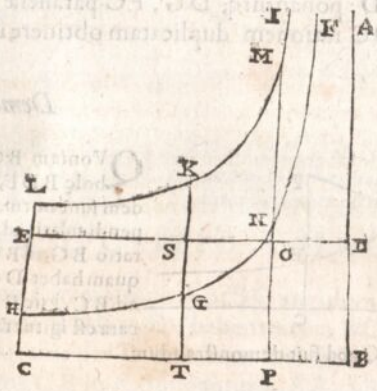
FE ad BC, igitur quatuor lineæ AB, BF, FE, BC sunt in continua analogia, ac proinde BF, FE sunt mediæ inter AB, BC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXIX.

PONantur AB, BC, & AD, DE asymptoti duarum hyperbolarum FGH, IKL æqualium & similium sic constitutæ, vt DE & BC, sint parallelæ inter se: ducatur autem LC parallela DB.

Dico parallelogrammo BE æquari spatium infinitum duabus hyperbolis IKL, HNF comprehensum.

Demonstratio.



Diuidatur BC bifariam, rectâ ST, parallelâ CL occurrente hyperbolis in K & G. vel igitur spatium KGHL, duabus hyperbolis interceptum; maius vel minus est dimidio totius spatij, duabus intercepti hyperbolis; vel illi æquale: si minus vel æquale; posita sit altera KG, parallela CL, vt KGLH spatium maius sit dimidio totius spatij hyperbolis comprehensi, occurratque GK rectis DE, BC in S & T: erit igitur TC maior quã BT, & TE parallelogrammũ maius dimidio totius parallelogrammi BE. quia verò hyperbolæ duæ æquales sunt, & similes, habentque asymptoton communem AB, spatium KSLE, æquatur GTHC spatio, additoq; communi GHSE. parallelogrammo TSEC æquale est spatium KLGH. similiter BT linea bifariam diuisa in P, ponatur PM æquidistans AB. igitur spatium MNKG. vel minus aut maius est dimidio residui spatij KGFI, &c. producti, vel illi æquale. si æquale aut minus, posita sit, vt antè, quædam MNP vt spatium MNKG maius sit dimidio residui KGFI producti: erit igitur, vt priùs ostensum est, spatium MNGK æquale parallelogrammo PS, quod maius quoque est dimidio parallelogrammi BS: quæ operatio cùm sine termino continuari possit, ita vt ablata ex parallelogrammo BE, maiora sint illius dimidio & æqualia ablatis ex spatio duabus hyperbolis intercepto quæ maiora quoque sunt dimidio eiusdem spatij, constat totũ spatium duabus interceptum hyperbolis, parallelogrammo BE esse æquale. si vero pars KGLH, æqualis sit dimidio totius spatij hyperbolis intercepti, & pars MNGK æqualis dimidio residui, eadem inferuntur quę priùs; eademq; est demonstratio,

a 116. *De progressionibus.*

HY-

HYPERBOLÆ
PARS QVINTA

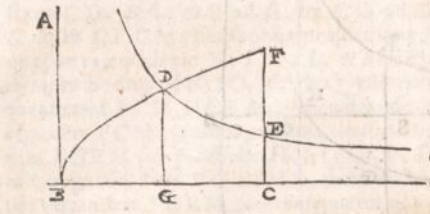
Hyperbolam expendit à parabola interſectam.

PROPOSITIO CXL.

SInt aſymptoti AB, BC, hyperbolæ DE, continentes angulum rectum: parabola verò deſcribatur BDF, cuius axis BC, occurrens hyperbolæ in D: ponanturq; DG, FC parallelæ aſymptoto AB.

Dico EC, ad DG rationem duplicatam obtinere illius, quam habet DG ad FC.

Demonſtratio.



a *Ex 1. de parabola.*

b *74. huius.*

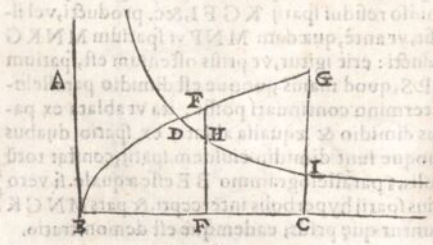
QVoniam BC axis ponitur parabolę BDF, & DG, FC ad eumdem ſunt normales, vtpotè AB (perpendiculari ad BC) æquidiſtantes, ratio BG, ad BC [a] duplicata eſt eius, quam habet DG ad FC; ſed vt BG ad BC, [b] ſic EC eſt ad DG, duplicata eſt igitur ratio EC ad DG, rationis DG ad FC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLI.

SInt denuò AB, BC aſymptoti hyperbolæ DHI rectum angulum continentes; deſcriptâ autem parabolâ BDE, habente BC axem; ponantur EF, GC parallelæ aſymptoto AB.

Dico rationem IC ad HF, eſſe duplicatam eius, quam habet EF ad GC.

Demonſtratio.



c *Ext. de parabola.*

d *74. huius.*

CVm enim angulus ABC rectus ſit, lineæ EF, GC ipſi AB æquidiſtantes, normales ſunt ad axem BC, vnde ratio BC ad BF, [c] duplicata eſt rationis GC ad EF. Sed ratio BC ad BF, eadem eſt cum [d] ratione FH ad IC; igitur ratio HF ad IC, duplicata eſt GC ad EF; ac proinde ratio IC ad HF, duplicata eius, quam habet EF ad GC.

Quod fuit demonſtrandum.

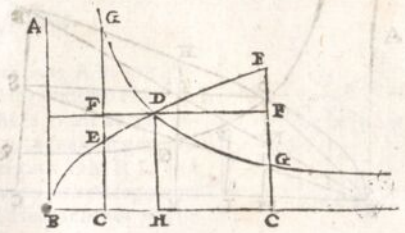
PRO-

PROPOSITIO CXLII.

IIsdem positis per punctum intersectionis D, agatur DF, asymptoto æquidistans; occurrens GC lineæ in F.

Dico rationem CG ad CF, esse duplicatam rationis CF ad CE.

Demonstratio.



POnatur DH æquidistans EC; ratio BH ad BC, *id est* GC ad DH [a] duplicata est eius quam habet DH ad EC, est autem DH [b] æqualis FC; cùm HF parallelogrammum sit. igitur GC ad CF, ratio duplicata est rationis CF ad CE.

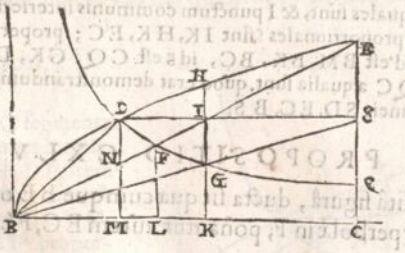
a 21. *De parabola.*
b *Ex elementis.*

PROPOSITIO CXLIII.

HYperbolam inter asymptotos AB, BC angulum rectum continentes secet parabola BDE in D, habens axem BC; positaq; CE æquidistante AB, ducatur per D punctum intersectionis, linea DI parallela BC occurrens CE in S. Iunganturq; EB, SB, quæ hyperbolæ occurrant in F & G; ponantur autem lineæ DF, FG.

Dico conuexa segmenta DF, FG esse inter se æqualia.

Demonstratio.



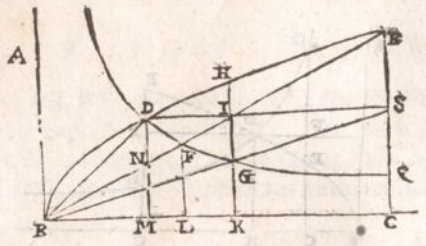
POnantur DM, FL, GK æquidistantes AB; & GK quidem rectæ BE occurrat in I: erunt igitur proportionales continuæ [c] QC, GK, SC, id est DM. quare & [d] BM, BK, BC, lineæ, adeoque & DM, [e] HK, EC eamdem continuant rationem: sed etiam HK, HK, EC, [f] sunt proportionales; DM igitur [g] æqualis est KI, & I punctum communis intersectio est linearũ DS, BE, HK; vnde continuæ [h] sunt proportionales GK, FL, DM, & segmenta tam [i] concaua, DFLM, FLGK, quàm [k] conuexa DF, FG, æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

c 77. *huius.*
d 78. *huius.*
e 33. *De parabola.*
f 42. *De parabola.*
g *Ex elementis.*
h 7. *huius.*
i 107. *huius.*
k 106. *huius.*

PROPOSITIO CXLIV.

ISdem positis:
Dico segmenta DMKG, GKCQ esse æqualia.

Demonstratio.



a 77. huius. b 107. huius.

CVm enim IK, DM lineæ ostensæ sint æquales, recta quoque KI æqualis est SC, quæ per constructionem æquatur DM: vnde cùm proportionales [a] sint QC, GK, SC: eamdem quoque continuant rationem QC, GK, DM, adeoque segmenta [b] DMGK, GKQC æqualia sunt.

PROPOSITIO CXLV.

EAdem figurâ manente, si DF, FG segmenta fuerint æqualia, & per F & G ductæ lineæ BE, BS, & BE quidem parabolę occurrat in E, ponaturque EC æquidistans AB:
Dico MDGK segmentum æquari segmento GKQC.

Demonstratio.

c 107. huius. d Ex conuersa eiusdem. e 77. huius. f 42. De parabola. g 78. huius. h 107. huius.

QVoniam segmenta conuexa DF, FG æqualia ponuntur, concaua quoque segmenta [c] DMFL, FLGK æqualia sunt; vnde & tres [d] MD, FL, GK continuæ sunt proportionales: sed & IK, FL, GK [e] quoque sunt proportionales; igitur MD, KI lineæ æquales sunt, & I punctum communis intersectio linearum EB, DI, GK. Quare cùm proportionales [f] sint IK, HK, EC; proportionales quoque sunt DM, HK, EC, id est BM, BK, BC, id [g] est CQ, GK, DM. Segmenta igitur [h] DMGK, GKQC æqualia sunt, quod erat demonstrandum. vnde patet punctum S commune esse lineis SD, EC, BS.

PROPOSITIO CXLVI.

EAdem positâ figurâ, ducta sit quæcumque BE occurrens parabolæ in E, & hyperbolæ in F; ponantur autem EC, FL, DM æquidistantes AB.
Dico segmentum FLQC triplum esse segmenti DMFL.

Demonstratio.

i Ex 143. huius. k 107. huius.

POsita DS æquidistante BC, ducatur BS, occurrens hyperbolę in G puncto, per quod recta ponatur GK, occurret [i] illa rectis BE, DS in vno eodemque puncto I: eruntque DM, FL, GK, item DM, GK, QC proportionales: quare segmenta DMFL, FLGK, [k] vti & DMGK, GKQC æqualia sunt: adita igitur

ad

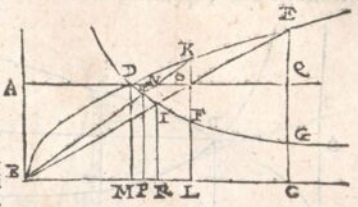
ad GKQC ſegmentum, ſegmento FLGK, patet FLQC ſegmentum triplum eſſe ſegmenti DMFL. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVII.

EAdem ponantur quæ priùs: ductaque BH occurrat hyperbolæ in H: iungantur autem DH, HI.

Dico ſegmenta conuexa DH, HI eſſe æqualia.

Demonſtratio.



POnatur HP, æquidiſtans AB. erit igitur per præcedentẽ ſegmentum HPFL triplum ſegmenti DMHP. eſt autem ſegmentum [a] FLIR, æquale ſegmento DMRI: igitur ſegmentum DMRI, vnà cũ ſegmento HPRI, triplum eſt ſegmenti DMHP: igitur HPRI ſegmentum æquale eſt ſegmento DMKP: & DK conuexum æquale conuexo KI.

[a] *Ex hypoth. theſi & ex 107. huius.*

Corollarium.

HInc ſequitur: ſi DH, HI ſegmenta fuerint æqualia, & per H & I, ex B centro rectæ eductæ BHK, BIE occurrentes parabolæ in K & E, punctis, è quibus rectę ponantur KL, EC, aſymptoto AB æquidiſtantes & per D, recta ponatur DOQ parallela BC: quod BE, DQ, KL lineę in eodem ſeſe decuſſent puncto O: vti EC, BE, DO in puncto Q, eſt conuerſa præcedentis, ex qua demonſtratio manifeſta eſt.

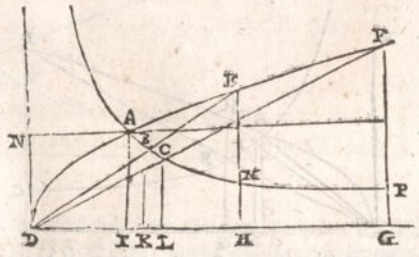
PROPOSITIO CXLVIII.

IIſdem poſitis ſi ſegmenta AB, BC, hyperbolæ ABC inter aſymptotos rectum angulum continentes conſtitutæ, æqualia fuerint, & è centro per B & C ponantur DBE, DCF occurrentes parabolæ in E & F, demittanturq; FG, EH, AI, BK, CL aſymptoto æquidiſtantes:

Dico ſegmenta MHG, AIHM, quadrupla eſſe ſegmentorum AIK, BKL.

Demonſtratio.

QVoniam AB, BC ſegmenta æqualia, communes interſectiones linearum EH, DF, item DMFG in eadem ſunt cum A puncto linea, [b] parallela DG. vnde GP, MH, AI [c] proportionales ſunt & [d] AIMH, MHPG ſegmenta æqualia: quod erat demonſtrandum.

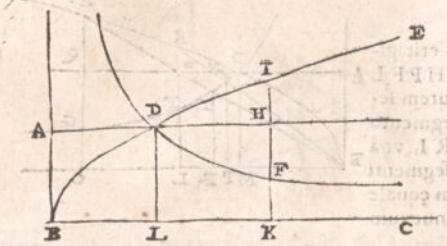


[b] *Coroll. præcedent.*
[c] *Ex 145. huius.*
[d] *107. huius.*

PROPOSITIO CXLIX.

SEcet parabola DIE hyperbolam vt priùs, & per punctum intersectionis D, agatur ADH linea, parallela asymptoto BC: deinde quæuis recta ponatur IK, parallela AB occurrens DH lineæ in H, hyperbolæ in F.

Dico IKH rectangulum ad rectangulum HKF, triplicatam habere rationem eius, quam habet linea IK ad HK.



a *Per 1e-mma.*

b 142. *huius*

Demonstratio.

REctangulum IKH ad HKF, compositam habet[a] rationem ex ratione IK ad HK, & ex ratione KH ad KF. sed ratio HK ad FK [b] duplicata est rationis IK ad HK. Igitur rectangulum IKH ad HKF, rectangulum, compositam habet rationem ex ratione IK ad HK, & ex duplicata ratione IK ad HK: ergo ex triplicata ratione IK ad HK. Quod fuit demonstrandum.

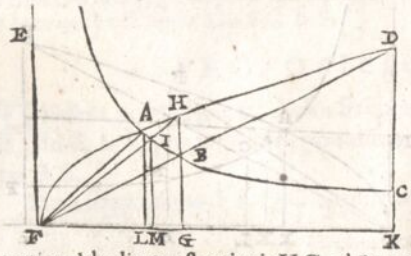
Corollarium.

HInc manifestum est rationem IK ad KF, esse triplicatam eius, quam habet IK ad HK: sunt enim rectangula IKH, & HKF inter se vt lineæ IK, & FK.

PROPOSITIO CL.

HYperbolam AB, inter asymptotos angulum rectum continentes positam, secet in A parabola FAD, habens axem asymptoton FG: sumatur autem segmentum hyperbolicum quodcumque AI, & per I punctum diameter ponatur FIH, occurrens parabolæ in H, ex quo demittatur HG æquidistans EF hyperbolæ occurrens in B: per B autem acta FB occurrat parabolæ in D. denique ex D parallela ad EF, demittatur DK, & DK hyperbolam secet in C.

Dico segmentum CKBG quadruplum esse segmenti BGIM.



c 42. *De parabola.*
d 27. *De progressionibus.*
e 17. *huius.*
f Ex 1. *de parabola.*
g Ex 44. *huius.*
h 129. *huius.*

Demonstratio.

POnatur IM, æquidistans EF. quoniam HG, DK æquidistant EF, normaliter ad FG positę, lineæ HG, DK ordinatim positæ sunt ad axem FK: vnde GB, GH, KD in [c] continua sunt analogia: sunt autem & GB, IM, HG proportionales; ratio igitur DK ad HG, tertiæ ad tertiam [d] duplicata est rationis HG ad IM, id est, IM ad BG: quia [e] GB, IM, HG sunt continuæ: sed rationis DK ad HG, duplicata quoque est ratio [f] FK ad FG, id est [g] BG ad CK. ratio igitur BG ad CK, quadruplicata est rationis IM ad BG: adeoque & segmentum BGCK, [h] quadruplum est segmenti IMBG. Quod erat demonstrandum.

PRO-

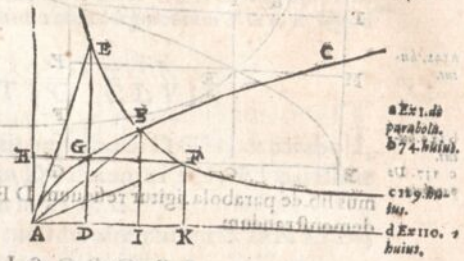
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [665] - 608
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CLI.

PArabola ABC, cuius axis AD, secet in B hyperbolam EBF, cuius asymptoti AD, AH angulum rectum contineant; & assumpto G inter A, & B, in parabola, ponantur DGE, FGH parallelæ asymptotis, iunganturque AE, AB, AF.

Dico mixtilineum EAB, duplum esse mixtilinei BAF.

Demonstratio.



a Ex 1. de parabola. b 74. huius. c 119. huius. d Ex 110. 9 huius.

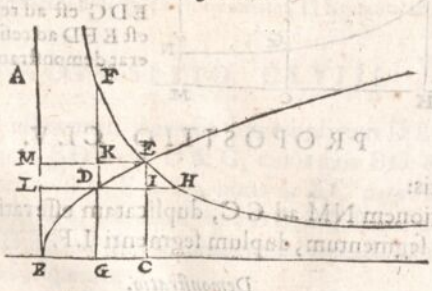
POnantur BI, FK æquidistantes asymptoto AH. erunt igitur GD, BI ordinatim positæ ad axem AD, vnde ratio AD, ad AI [a] duplicata est rationis DG ad BI, id est, FK ad BI: sed est vt AD ad [b] AI, sic BI ad ED; ratio igitur BI, ad ED duplicata est rationis FK ad BI; adeoque & [c] segmentum EDBI duplum est segmenti BIFK. est autem EAB [d] figura æqualis segmento EDBI, & BAF, æqualis BIFK segmento; figura igitur EAB, dupla est figuræ BAF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLII.

SInt AB, BC asymptoti hyperbolæ FEH, angulum rectum formantes, & parabola describatur BDE, (cuius axis BC) occurrens hyperbolæ in E, & per assumptum punctum D in parabola, inter B & E; ponantur per D rectæ FG, HL, æquidistantes asymptotis, & EM, EC ijsdem parallelę:

Dico mixtilineum FDE duplum esse mixtilinei EDH.

Demonstratio.



OStensum est rationem FG ad KG, esse duplicatam [e] eius, quam habet EC ad DG, hoc est MB ad LB, hoc [f] est HL ad EM: igitur duplum est segmentum FGCE, quantitatis HLME: sed libro de parabola demonstratum est parabolæ [g] partem EDGC duplam esse EMLD, igitur residuum FDE, duplum est residui EDH. Quod fuit demonstrandum.

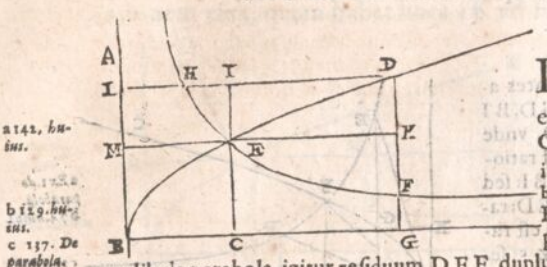
e 119. huius. f 74. huius. g Ex 27. de parabola.

PROPOSITIO CLIII.

IIsdem positis assumatur punctum D in parte parabolæ, quæ concauâ hyperbolæ EHF continetur, ductisque vt antè DL, DG quæ occurrant hyperbolæ in H & F.

Dico spatium DEF duplum esse quantitatis HED.

Demonstratio.



a 142. huius.
b 129. huius.
c 137. De parabola.

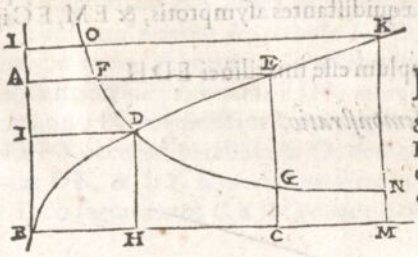
POnatur per E linea MK parallela BG. ratio GF ad GK, id est CE, duplicata a est rationis CE ad GD, id est, MB ad BL, id est LH ad ME. ergo duplum b est spatium ECGF, quantitatis EMLH. est autem DECG, duplum spatij DLME, vt c ostendimus lib. de parabola. igitur residuum DEF duplum est residui DHE: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLIV.

SEcet iterum, vt priùs, parabola BDE hyperbolam in D, & ex quibusuis punctis E & K, in parabola assumptis, ponantur EA, EC, KL, KM asymptotis æquidistantes, secantesq; hyperbolam in F, G, O, N.

Dico spatium EDG ad KEGN eandem habere rationem quam habet quantitas EFD ad quantitatem KOFE.

Demonstratio.



ESt enim per præcedentem spatium EDG spatij EFD duplum, & KDN spatij KODK: ergo EDG est ad residuum KEGN, vt est EFD ad residuum KOFE: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLV.

IIsdem positis:

Dico rationem NM ad GC, duplicatam esse rationis LO ad FA, adeoq; GM segmentum, duplum segmenti LF.

Demonstratio.

d 74. huius
e 1. de parabola.
f 74. huius.
g 129. huius.

VT NM ad GC, sic d BC ad BM: sed BC ad BM, duplicatam e habet rationem EC ad KM, id est AB ad LB, f id est LO ad FA: ratio igitur NM ad GC duplicata est rationis LO ad FA. quare & g GM segmentum duplum est segmenti LF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLVI.

Iisdem positis, ducantur DH, DI parallelæ asymptotis.

Dico segmentum DHCG, ad DIAF segmentum, eandem habere rationem, quam GCMN segmentum habet ad segmentum FALO.

Demonstratio.

RAtio GC ad DH, [a] id est BH ad BC, duplicata est rationis [b] HD ad CE, id est BI [c] ad BA, id est AF ad ID; segmentum igitur DHGC, [d] duplum est segmenti AFID. sed in præcedenti propositione ostensum est, segmentum GCNM duplum quoque esse segmenti LOFA. vt igitur GCNM segmentum ad segmentum LOFA, sic DHGC segmentum est ad segmentum FADI. Quod erat demonstrandum.

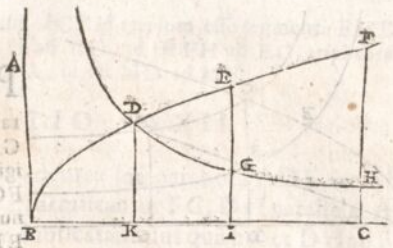
[a] 74. huius.
[b] 1. De parabola.
[c] 74. huius.
[d] 129. huius.

PROPOSITIO CLVII.

POsitis denuò AB, BC asymptotis hyperbolæ DGH, & parabolâ, vt prius, occurrente hyperbolæ in D, ducantur FC, EI parallelæ asymptoto AB secantes hyperbolam in H & G.

Dico rationem EI ad FC, toties multiplicare rationem DK ad EI, quoties superficies GC multiplex est superficiei DI.

Demonstratio.



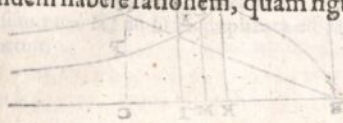
RAtio HC ad GI, id [e] est BI ad BC, duplicata est rationis EI ad FC; & ratio GI ad DK, duplicata est rationis DK ad EI. Igitur quoties multiplicat ratio HC ad GI, rationem GI ad DK, toties multiplicat ratio EI ad FC, rationem DK ad EI: sed ostensum est toties multiplicare rationem HC ad GI, rationem GI ad DK, [g] quoties multiplex est figura HI, figuræ ID. Igitur toties multiplicat ratio EI ad FC, rationem DK ad EI, quoties multiplex est quantitas HI, quantitatis ID. Quod fuit demonstrandum.

[e] 74. huius.
[f] 1. de parabola.
[g] 129. huius.

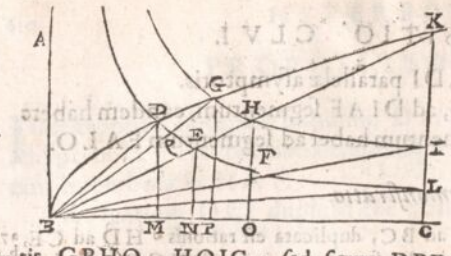
PROPOSITIO CLVIII.

SInt AB, BC asymptoti duarum hyperbolarum DEF, GHI, sectarum parabolâ BDG, in D & G, cuius axis BC: & ductâ BK, quæ occurrat hyperbolis in E & H, ponatur KC parallela asymptoto secans hyperbolas in I, L. iunganturque BD, BG, BI, BL.

Dico figuram DBE ad EBL eamdem habere rationem, quam figura GBH ad HBI, figuram.



Demon-



a 146. huius.
b Ibid.
c 150 huius
d Ibid.

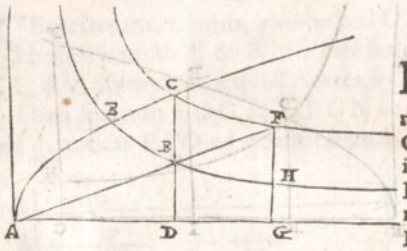
Demonstratio.

DEmittantur DM, EN, GP, HO æquidistantes AB, erit igitur segmentum DMNE tertia a pars segmẽti NELC, & GPHO b tertia pars segmenti HOIC; vnde proportionalia sunt segmenta DMNE, NELC, segmentis GPHO, HOIC; sed figuræ DBE, EBL æquales sunt c segmentis DMNE, NELC; & segmentis GPHO, HOIC æquales sunt d figuræ GBH, HBI; manifestum igitur est eandem esse rationem figuræ DBE ad EBL, quæ est figuræ GBH ad HBI. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLIX.

POnantur denuò duæ hyperbolæ inter easdem asymptotos angulum rectum constituentes, & parabola ABC, habens axem AD occurrat FC hyperbolæ in puncto C, per quod agatur CD asymptoto parallela, quæ sectioni BE occurrat in E, iunctaque AE occurrat hyperbolæ CF in F, & demittatur FHG:

Dico HG, ED, FG, CD quatuor esse in continua analogia.



e 74. huius.
f Ibid.

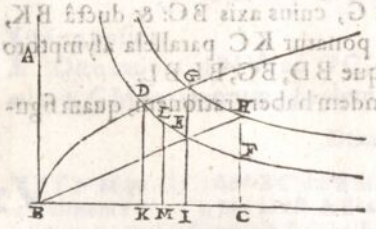
Demonstratio.

PEr propositionem huius 77. constat HG, ED, FG eamdem continuare rationem: sed vt DE ad HG, ita e est GA ad AD, hoc f est DC ad FG; igitur vt HG ad ED, id est ED ad FG, ita est FG ad CD. igitur continuant eamdem rationem rectæ HG, ED, FG, CD: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLX.

IIsdem positis quę priùs, ex puncto D, in quo parabola BG minori sectioni occurrit, demittatur DK parallela asymptoto.

Dico FC ad EI, triplicatam habere rationem eius quam habet HC ad DK.



g Ibid.
h 1. de parabola.
i 27. De progression.

Demonstratio.

PEr præcedentem in continua sunt analogia FC, EI, HC, GI. ratio insuper EI ad DK, id est g BI ad KB, duplicata est h rationis DK ad GI. igitur si LM media ponatur inter EI, DK; rectæ quoque EI, LM, DK, GI proportionales sunt i duæ igitur series sunt continuarũ GI, HC, EI, FC; item GI, DK, LM, EI: habentque communem primam GI. quare ratio FC ad IE, quartæ ad quartam triplicata est i rationis HC ad KD, secundæ ad secundam.

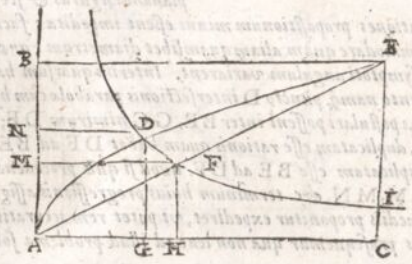
PRO-

PROPOSITIO CLXI.

REctæ AB, BC ad angulos rectos se decussantes inseruiant tùm asymptotis hyperbolæ DF, tum axi parabolæ ADE, & eius contingenti in A, ductâ deinde AE per D & F, agantur DG, FH parallelæ asymptoto.

Dico rationem EC ad FH, triplicatam esse rationis quam habet DG ad FH, siue FM ad DN.

Demonstratio.

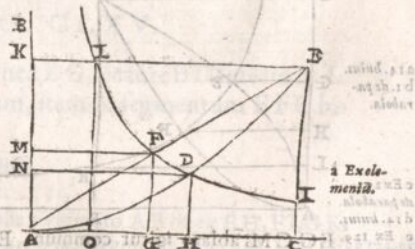


OStensum est 146. huius segmentum ICFH triplum esse segmenti FHDG: igitur ratio IC ad FH, id est AH ad AC, id est FH ad EC, triplicata est rationis FH ad DG, id est MA ad NA, id est ND ad MF.

PROPOSITIO CLXII.

POnantur eadem quæ in præcedente: sed parabola ADE axem habeat lineam AB: ductaq; AE, demittantur FG, DH parallelæ AB. Dico rationem IC ad DH, esse duplicatam eius quâ habet DH ad FG.

Demonstratio.

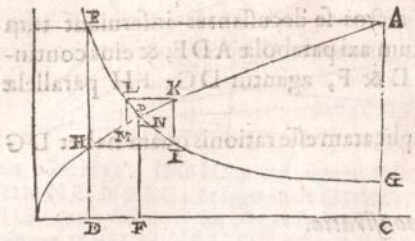


EX E ducatur ELK parallela AC. ostensum est prop. præc. EK ad FM triplicatam esse rationis DN ad FM, hoc est FG ad DH. sed ratio EK ad FM, eadem est a cum ratione EC ad FG; quia KC, MG parallelogramma eandem habèt diametralem; igitur ratio EC ad FG, est triplicata rationis FG ad DH, atque adeò ratio EC ad DH, quadruplicata est rationis FG ad DH; est autem ratio LO hoc est EC ad DH, duplicata b rationis AC ad AH, id est DH ad IC; igitur & ratio DH ad IC, duplicata est rationis FG ad DH; siue ratio IC ad DH, duplicata est rationis DH ad FG. Quod demonstrare oportuit.

a *Ex elemeniã.*

b *Ex 121. de parabola.*

Scholion.

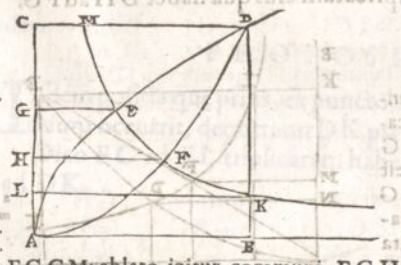


PRæcedentibus propoſitionibus quæ parabolam habent admixtam ſecantem hyperbolicam lineam, vſus ſum ordinariè aſymptotis hyperbolarum quæ angulum rectum contineant; non quod propoſitiones vniuerſales non ſint, & excludi debeant aliæ hyperbolæ, quarum aſymptoti contractiorem, aut diductiorem recto, angulum conſtituunt, ſed hoc eo conſilio factum eſt, vt commodior ratio iniretur explanandi figuras & ſcemata, imò vt conſtructiones ac demonſtrationes propoſitionum minùs eſſent impeditæ: facilius enim eſt axem parabolæ aſymptoto accommodare quàm aliam quamlibet diametrum, quæ diuerſa ſemper reperiri deberet, quoties aſymptoti angulum variarent. Interim quorſum hæc materia vergat, facilè colligi poteſt: inuento namq; puncto D *interſectionis parabolæ cùm hyperbola haberetur vna è mediis duabus, quæ poſtulari poſſent inter* BE, GC *nimirum* DF; *cum oſtenſum ſit rationem* GC *ad* DF, *duplicatam eſſe rationis quam habet* DF *ad* BE: *ac proinde rationem* GC *ad* BE, *triplicatam eſſe* BE *ad* DF. *quod ſi quis procedendo per rectas* AB, BH, HI, IK, KL, LM, MN, *&c. terminum huius progreſſionis aſſignare valeret, problema quod de duabus mediis proponitur expediret, vt patet rem accuratius conſideranti. Interim proprietates alias proſequemur quæ non leue ad illud problema ſoluendum ſubſidium ſunt allaturæ.*

PROPOSITIO CLXIII.

ITerum AB, AC ſint axes parabolarum AED, AFD ſecantium hyperbolam in E & F, conſtitutam inter aſymptotos AB, AC continentes angulum rectum; demittantur autem ex D puncto interſectionis parabolarum aſymptotis æquidiſtantes DB, DC, EG, FH, LK.

Dico CM, GE, HF, LK eſſe quatuor in continua analogia.



a 14. *huius.*
b 1. *de parabola.*
c Ex 29. *de parabola.*
d 14. *huius.*
e Ex 129. *huius.*
f Ex 172. *huius.*

Demonſtratio.

ESt enim ratio CM ad HF, [a] id eſt AH ad AC, duplicata [b] HF ad LK, ſiue CD: quare ſegmentum MCHF, duplum eſt ſegmenti FH, KL per 129. huius, ſimiliter quia ratio DC ad EG, id eſt KL ad EG, [c] duplicata eſt AG ad AC, id eſt [d] EG ad CM: ſegmentum KEGL duplum eſt ſegmenti EGCM: ablato igitur communi EGHF, æqualia ſunt ſegmenta KLHF & EGCM: vnde [e] vt KL ad FH, ita EG ad CM: ſed ratio LK ad EG, [f] duplicata eſt EG ad MC: igitur ratio KL ad EG, duplicata eſt KL ad HF, ergo ratio KL ad FH, eadem eſt cum ratione FH ad GE: & GE ad CM. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

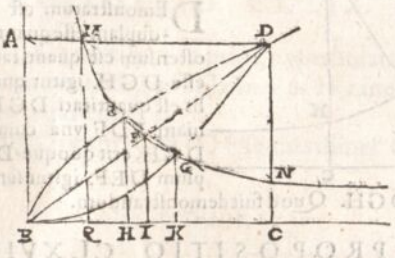
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [671] - 614
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CLXIV.

PONantur denuò A B, B C asymptoti vt priùs hyperbolæ E F G: quas parabolæ B E D, B G D conuenientes in D, secent in punctis E, G; & agatur B D occurrens sectioni in F & demittantur parallelæ asymptoto E H, F I, G K.

Dico E H, F I, G K, fore in continua proportione.

Demonstratio.



RAtio D C ad G K, [a] duplicata est rationis C B ad B K, id est, [b] G K ad N C; sed M Q æqualis est D C, ratio igitur M Q ad G K, duplicata est rationis G K ad N C: adeoque segmentum M Q G K duplum [c] est segmenti G K N C: quia verò M Q, E H, G K, N C proportionales sunt [d] ratio N C ad E H, primæ ad tertiam, duplicata est rationis E H ad M C, tertiæ ad quartam: segmentum igitur E H N C [e] duplum est segmenti M Q E H; dempto igitur communi segmento E H G K manet segmento M Q E H æquale segmentum G K N C. Rursum quia N C, F I, D C, id est N C, F I, M Q proportionales sunt, segmentum M Q F I [f] æquale est segmento F I N C: demptis igitur æqualibus segmentis M Q E H, G K C N. æqualia sunt segmenta F I G K, E H F I: vnde E H, F I, G K proportionales sunt. Quod erat demonstrandum.

a Ex 192. de parabola.
b 74. huius.
c 129. huius.
d 173. huius.
e 129. huius.
f Ex 107. huius.

PROPOSITIO CLXV.

IIsdem positis iungantur E G puncta lineâ E G, secante B D lineam in L.

Dico E G in L bifariam esse diuisam, item & segmentum E F G bifariam per B D.

Demonstratio.

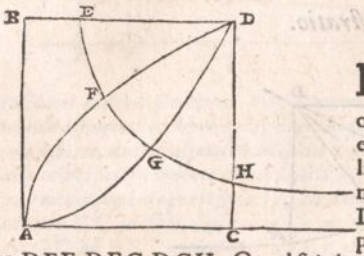
DVcantur enim ex E, F, G punctis parallelæ asymptoto A B lineæ E H, F I, G K, [g] eruntq; illæ continuæ proportionales; ac proinde [h] segmenta concaua E H I F, F I K G æqualia: quare si connectantur E F, F G puncta, conuexa quoque [i] segmenta E F, F G æqualia erunt: quare linea E G ordinatim [k] applicata est ad diametrum B F, ac proinde in L diuisa bifariam. Iam verò cùm E L, L G æquales sint bases, & L F communis altitudo triangulorum E F L, L F G, illa triangula æqualia erunt, ac proinde segmenta tota E F L, L F G æquabuntur inter se: quare E F G segmentum bifariam diuisum est linea B D. Quæ omnia fuerant demonstranda.

g 174. huius.
h 107. huius.
i 106. huius.
k Ex conuersa eiusdem.

PROPOSITIO CLXVI.

SInt AB, BC axes duarum parabolarum æqualium, angulum rectum continentes, quæ & asymptoti sint hyperbolæ EFG: punctum autem D sit illud in quo parabolę conueniunt; ex quo demittantur DB, DC æquidistantes asymptotis.

Dico spatia DEF, FGD, GDH inter se esse æqualia.



a 153. huius.

Demonstratio.

DEmonstratum est quantitatem DFH [a] duplam esse quantitatis DEF. insuper ostensum est quantitatem EGD duplam esse DGH. igitur quantitas DEF æqualis est quantitati DGH: ac proinde quoniam EDF vnà cum DFG, duplum est DGH, erit quoque DEF cum DFG duplum DEF. igitur sunt æquales quantitates DEF, DFG, DGH. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVII.

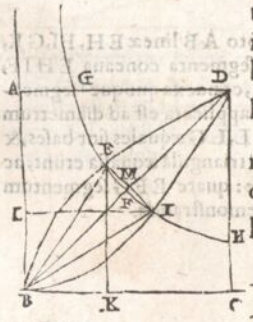
IIsdem positis:

Dico spatia similiter æquari inter se quæ residua sunt, nimirum EBAF, FAGF, GACH.

Demonstratio.

LIbro de parabola propos. 237. ostensum est AFDC parabolam conuexam duplam esse concauæ ABDFA: similiter AGDB conuexam duplam esse concauæ ACDGA: sunt autem ex hypothesi æquales parabolæ AFDC, AGDB, residuæ igitur ABDF, AGDC æquales quoque sunt: quia verò tam AFDB cum AFDGA duplum est AGDC; & rursum AGDC cum AFDGA duplum AFDB, tres quantitates ABDF, AFDGA, ACDG æquales sunt: sed per præcedentem æquales quoque sunt EFD, DFG, DHG, residuæ igitur æquales sunt ABEF, AFGA, AGHC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.



SEcet parabola BED, hyperbolam GEH vt priùs inter asymptotos AB, BC constitutam in E, & ducta BD hyperbolam secet in F, parabolam verò in D, ex D verò ducantur DG, DH parallelæ asymptotis.

Dico quantitatem mixtilineam DEF, ex parabolica, hyperbolica & recta constantem, dimidiæ parti figuræ DGE esse æqualem vel quartæ parti figuræ DEH.

Demonstratio.

PEr B enim & D ducatur parabola BID ad axem BA, iunganturque EI, BE, BI, & EK, IL parallelæ ducantur

cantur asymptotis; erunt triangula [a] EKB, ILB inter se æqualia, ac proinde totæ [b] parabolæ EBK, BLI æquales erunt. quia verò EM, MI [c] lineæ æquales sunt EMB triangulo, BMI æquatur: sed etiam segmenta [d] conuexa EFM, MFI æquantur; igitur etiam pars parabolica BEM, parti parabolicæ MBI est æqualis, estque segmentum hyperbolicum EFI, bifariam diuisum diametro BM, igitur sublatis segmentis hyperbolicis æqualibus remanent quantitates mixtilineæ EFB, FBI ex parabolicis hyperbolicis & communi rectâ efformatæ inter se æquales: & quia parabola BEDB æqualis est parabolę BIDB. igitur etiam mixtilineum EFD mixtilineo DFI est æquale: est verò mixtilineum DEFID æquale DGE, igitur pars DEFD dimidia est figuræ DGE, & quartæ parti figurę DEIH æqualis. Quod fuit demonstrandum.

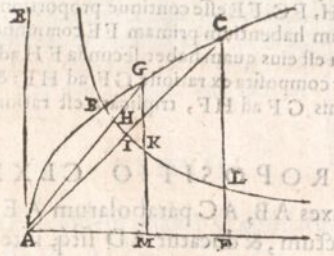
[a] ex 46. huius.
[b] 240. De parabola.
[c] 164. huius.
[d] Ibid.

PROPOSITIO CLXIX.

SEcet parabola ABC constituta vt priùs, hyperbolam in B, & ductæ sint AC, AG occurrentes hyperbolæ in I & H, tandem demittantur CFGM asymptoto parallelæ.

Dico partem mixtilineam GHIC esse mixtilinei CGKL quartæ parti æqualem.

Demonstratio.



ESt enim BGH æqualis quartæ parti GBK per propositionem præcedentem, quemadmodum per eandem, spatium CBI quarta est pars quantitatis CBL: est autem AICG, HA quarta [c] pars CFMG: & HAB, quantitas est quarta pars quantitatis KMFL, igitur GHIC spatium, spatij GKLC quartę parti existet æquale. Quod fuit demonstrandum.

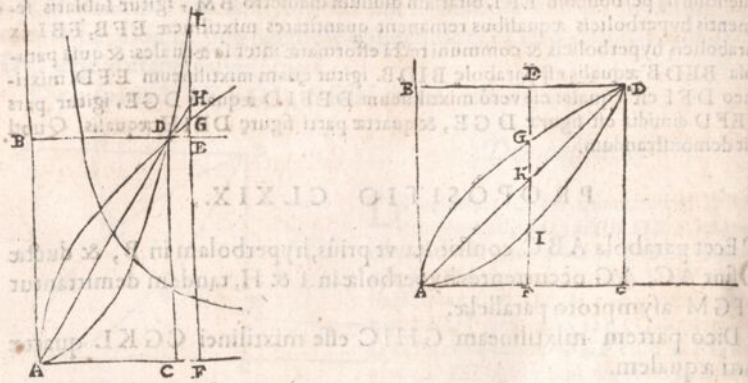
[c] 244. De parabola.

PROPOSITIO CLXX.

SInt AB, AC axes parabolarum AGD, AID ad angulos rectos constituti, & positis DB, DC parallelis, axibus, actaq; AD ponatur quæuis EF occurrens sectionibus in G & I, & rectæ AD in H.

Dico rationem GF ad IF, esse triplicatam eius quam habet GF ad HF.

Demonſtratio.



a 42. huius. OStendimus libro de parabola, IF, FH, FE tres eſſe in continua ratione. Oſtenſum inſuper eſt FH, FG, FE eſſe continuè proportionales. Igitur cùm ſint tres ſeries trium continuarum habentium primam FE communem, ratio tertiæ FI ad tertiam FH b duplicata eſt eius quam habet ſecunda FH ad ſecũdam GF. igitur ratio GF ad IF, quę eſt compoſita ex ratione GF ad HF: & ex ratione HF ad IF, quę duplicata eſt rationis GF ad HF, triplicata eſt rationis GF ad HF. Quod demonſtrare oportuit.

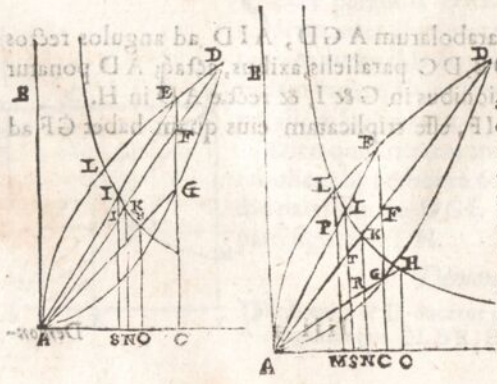
b 27. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CLXXI.

COnſtituantur axes AB, AC parabolarum AED, ADG continentes angulum rectum, & ducatur AD ſitq; inter illos axes tamquam aſymptotos collocata hyperbola IH occurrens AD, in K, & recta EC aſymptoto æquidiſtans occurrat ſectionibus parabolicis in E & G: per quæ puncta agantur AE, AG occurrentes ſectioni hyperbolicæ in punctis I & H.

Dico ſegmentum IAK tertiam eſſe partem ſegmenti IAH, ſiue dimidiam FAH.

Demonſtratio.



OStenſum eſt præcedenti propoſitione rationẽ EC ad GC, eſſe triplicatam eius quam habet ratio EC ad FC. vnde ratio FC ad GC, eſt duplicata rationis EC ad FC. ſed ratio FC ad GC, eadem eſt cum ratione KN ad RN, & ratio EC ad FC, eadem cum ratione IS ad TS, igitur ratio KN ad RN, duplicata eſt rationis IS ad TS. ſed ratio KN ad RN, duplicata

cata est, rationis KN ad HO, igitur ratio KN ad HO, eadem est cum ratione IS ad TS. ratio verò IS ad TS, duplicata [b] quoque est rationis IS ad KN: igitur ratio KN ad HO, duplicata est rationis IS ad KN: igitur [c] segmentum ISNK hoc est IAK dimidium est segmenti KNOH, hoc est KAH; & IAK tertiæ parti segmenti IAH æquale est. Quod fuit demonstrandum.

[a] 75. huius.
[b] Ibid.
[c] 129. huius.

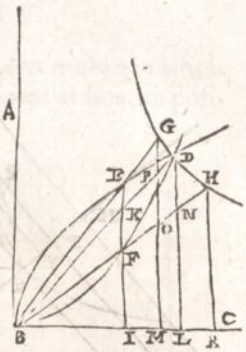
PROPOSITIO CLXXII.

REctæ AB, BC ad angulos rectos collocatæ ponantur, quæ sint asymptoti hyperbolæ GDH & axes parabolarum BED, BFD: sitque EF asymptoto AB parallela, per cuius extrema agantur BEG, BFH ducaturq; BD.

Dico figuram GBD, figuræ DBH dimidiam esse.

Demonstratio.

RAtio IK ad IF [d] duplicata est eius rationis, quam habet EI ad KI. sed vt IK ad FK, sic DL est ad NL. Igitur ratio DL ad NL, duplicata est rationis EI ad KI, hoc est GM ad PM, est autem ratio DL ad NL, duplicata rationis DL ad HR (quod DL, HR, NL proportionales sint) & ratio GM ad PM duplicata rationis GM ad DL, ob eandem causam. Igitur etiam ratio DL ad HR, duplicata est rationis GM ad DL. Igitur superficies [e] DLRH dupla est plani GMLD, hoc est DBH, [f] quantitas dupla quantitatis DBG. Quod fuit demonstrandum.



[d] Ex 170. huius.
[e] 129. huius.
[f] 110. huius.

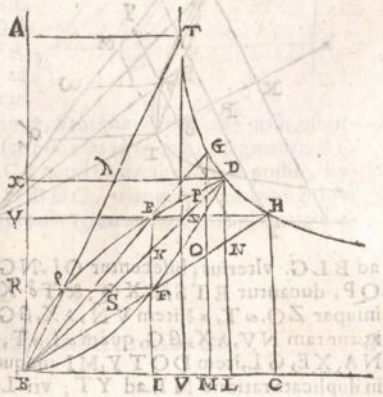
PROPOSITIO CLXXIII.

QVod si manentibus ijsdem recta FQ constituatur parallela BC & agantur lineæ BQT, BFH.

Dico segmentum DBH dimidium fore segmenti DBT.

Demonstratio.

DVctis enim HY, DX, & TA quæ æquidistent asymptoto BC, apparebit ratio RQ ad RS, hoc est Xλ ad XD, duplicata [g] rationis RS ad RF, hoc est YZ ad YH: sed ratio Xλ ad XD, duplicata est eius quam habet [h] Xλ ad AT; similiter ratio YZ ad YH, duplicata est rationis YZ ad XD; igitur ratio AT ad XD, duplicata est rationis XD ad YH. quare cùm quantitas ATDX dupla sit quantitatis DXYH etiam TBD, dupla erit quantitatis DBH. Quod fuit demonstrandum.



[g] Ex 170. huius.
[h] 75. huius.
[i] 129. huius.

HY-

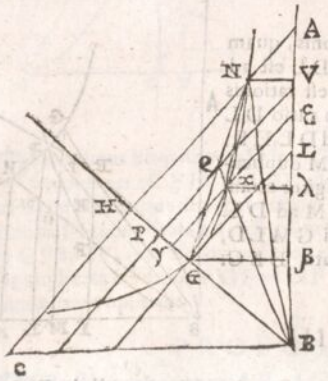
HYPERBOLÆ
PARS SEXTA

Varia proponit ac soluit problemata, &c.

PROPOSITIO CLXXIV.

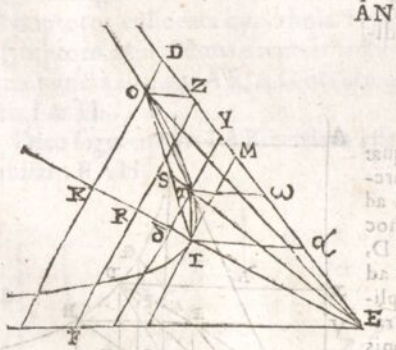
DAtarum hyperbolarum conuexarum exhibere rationem.

Constructio & demonstratio.



SInt ABC, DEF asymptoti hyperbolarum conuexarũ NXG, OTI: positisque axibus BG, EI, agantur per G & I contingentes GL, MI: dico NXG hyperbolam esse ad hyperbolam OTI, vt LGB triangulum ad triangulum MIE. fiat enim vt BG ad GH, sic EI ad IK, & per H & K, ordinatim ponantur lineæ ANH, DOK, iungaturque NG, OI, BN, EO. Quoniam est vt BG ad GH, sic EI ad IK, quadratum LG (id est [a] rectangulum ANC,) est ad quadratum AH vt MI quadratum (id est rectangulum DOF) ad quadratum DK: & permutando vt ANC rectangulum ad rectangulum DOF, sic quadratum AH ad quadratum DK: reliquum igitur quadratum NH est ad quadratum OK, vt ANC rectangulũ ad rectangulum DOF, id est quadratum LG, ad quadratum MI. quare NH linea, est ad LG lineam, vt OK ad MI. est autem vt BG ad GH, sic EI ad IK, triangulum igitur IOK est ad EIM, triangulum, vt GNH ad BGL: & vt EIM, ad BGL, sic IOK ad GNH: sed etiam vt EI ad IK, sic EOI triangulum ad triangulum IOK, & vt BG ad GH, sic BNG ad GNH, igitur & EOI ad IOK, triangulum est, vt BNG ad GNH, & vt IOK ad GNH, sic EOI ad BNG: quare & EOI ad BNG est, vt EMI

a 18. huius.



ad BLG. vlterius, bisecentur OI, NG, in Q & S, positisque ordinatim SR, QP, ducantur ETS, BXQ; & Tδ Xγ ordinatim ad axes BG, EI; ponantur insuper ZO, ωT, αI item VN, λX, βG æquidistantes asymptotis BC, EF: erunt igitur tam NV, λX, βG, quàm αI, ωT, [b] ZO continuæ proportionales; vnde & NA, XE, GL, item DOTY, MI quoque in continua sunt analogia; & MI ad DO, in duplicata ratione MI, ad YT; vti LG ad AN, in duplicata ratione LG ad εX: quia verò DK est ad MI, vt AH ad LG, & OK ad MI, vt NH ad LG, reliqua DO est ad MI, vt NA ad LG: igitur & YT ad MI, vt εX ad LG, &

b Ex 78. huius.

ME

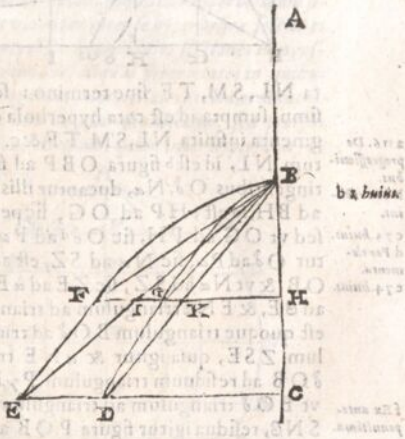
ME ad YE, id est IE ad δE, vt LB ad εB, id est BG ad Bγ. est autem etiam vt EI ad IR, sic BG ad GP, quia IK, GH in P & R, bisfectæ sunt, ex constructione; igitur & Bγ ad γP, vt Eδ ad δR, id est BX ad XQ, vt ET ad TS: & BQ ad QX, vt ES ad ST, sed vt ES ad ST, sic OEI triangulum est ad triangulum ITO, & vt BQ ad XQ, sic NBG triangulum est ad triangulum NXG, triangulum igitur BNG ad NXG, est vt EOI ad OTI triangulum, & permutando OTI ad NXG, vt OEI ad NBG. id est vt EIM ad BLG, per ante demonstrata; similiter ostendemus, si residuis segmentis OT, TI, item NX, XG triangula inscribantur maxima; triangula segmentis OT, TI inscripta, esse ad triangula segmentis NX, XG inscripta, vt EMI triangulum est ad triangulum BLG. Quod cùm fieri possit sine termino, constat [a] segmentum ITO esse ad segmentum GXN, vt EMI triangulum ad triangulum BLG: additis igitur triangulis NGH, ORI, quæ proportionalia ostensa sunt triangulis BLG, EMI, patet semihyperbolam NXGH esse ad semihyperbolam OTIH, vt BLG triangulum ad triangulum EMI: quod propositum fuit.

[a] 116. *De progressionibus.*

PROPOSITIO CLXXV.

HYperbolæ ad eandem applicatæ diametrum & communi gaudentes transuersa, eandem inter se habent rationem, quam ordinatim positæ eandem habentes altitudinem.

Demonstratio.



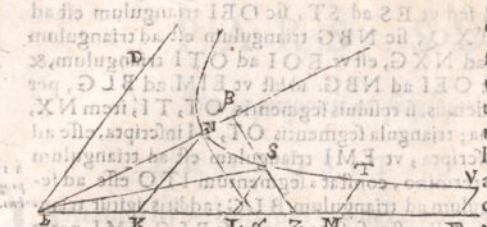
SIt AB diameter transuersa communis hyperbolis BGD, BFE: positaque ordinatim ad BC diametrum, linea EDC, bisecetur BC in H, & HGF ducatur æquidistans EDC, iunganturque puncta BD, BE, FE, FB, GD, GB: vt AHB rectangulum ad rectangulum ACB, sic [b] HG quadratum ad quadratum DC, & FH quadratum ad quadratum EC; igitur & HG linea est ad DC lineam, vt FH ad EC, & vt DC ad EC, sic HG ad HF: sed vt DC ad EC, sic HK est ad IH, rectę igitur HG, FH proportionales sunt HK, HI: quare vt HG ad HF, sic GK residuum ad residuum FI: est autem vt GK ad FI, sic BGK triangulum ad triangulum BFI; adeoque & BGD ad BFE, triangulum igitur BGD ad BFE, triangulum est vt GH ad FH, id est vt DC ad EC: similiter si residuæ BH, HC bisecentur, & à sectionum punctis ordinatim ponantur lineæ, fiantque triangula vt priùs, ostendetur triangula residuis segmentis BGD inscripta, esse ad triangula segmentis BF, FE inscripta, vt DC linea est ad lineam EC: quod cùm semper fieri possit, hyperbola BDC est ad hyperbolam BEC vt BDC, triangulum ad triangulum BEC, id est DC linea ad lineam EC, hyperbolæ igitur ad eandem applicatę diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] *huius.*

PROPOSITIO CLXXVI.

DVarum hyperbolarum concauarum exhibere rationem.

Constructio & demonstratio.



SInt A B C, D E F asymptoti hyperbolarum O P Q, N S T, positisque axibus B O, E N ducantur O G, N K æquidistantes asymptotis A B, D E: dico spatium infinitum inter asymptotos A B C & hyperbolam O P Q constitutum, ad spatium infinitum hyperbolę concauæ N S T; eam habere rationem, quam O B G triangulum habet ad triangulum N E K. fiant continuæ proportionales B G, B H, B I, B C, &c. factoque vt B G ad B H, sic E K ad E L, continuetur ratio E K, E L in M, & F; eriganturque H P, I Q, C R, &c. item L S, M T, F V, &c. æquidistantes asymptotis A B, D E. quoniam igitur B G, B H, B I, B C proportionales sunt, & O G, P H, Q I, R C æquidistant asymptoto A B, æqualia sunt segmenta P G, Q H, R I, &c. sine termino sic continuata: similiter æqualia sunt segmenta N L, S M, T F sine termino; segmenta igitur O H, P I, Q C, &c. in infinitum simul sumpta, id est tota hyperbola concaua O P Q sine termino producta, est ad segmenta infinita N L, S M, T F, &c. in infinitum, [a] vt segmentum O H ad segmentum N L, id est [b] figura O B P ad figuram S E N. vlterius positis per N & O, contingentibus O δ, N α, ducantur illis parallelæ per S & P, lineæ Z β, γ ω. vt B G ad B H, id est [c] H P ad O G, sic per hypothesim est E K ad E L, id est S L ad N K. sed vt O G ad P H, sic O δ [d] ad P ω, & vt N K ad S L, sic N α est ad S Z, vt igitur O δ ad P ω, sic N α ad S Z, est autem vt O δ ad ω P, sic [e] ω B ad δ B, id est γ B ad O B & vt N α ad S Z, sic Z E ad α E, id est β E ad N E, igitur vt O B ad γ B, sic N E ad β E, & E N α triangulum ad triangulum E β Z, vt B O δ ad B γ ω triangulum: sed est quoque triangulum B O δ ad triangulum ω P B, vt α N E triangulum ad triangulum Z S E, quia igitur & α N E triangulum est ad residuum triangulum S β E, vt δ O B ad residuum triangulum P γ B, & vt δ O B ad α N E, sic P γ B ad S β E. sed vt B O δ triangulum ad triangulum E N α, sic [f] P O γ segmentum ad segmentum S N β, residua igitur figura P O B ad residuam S E N, est vt triangulum δ O B ad α N E, triangulum, id est ex ante demonstratis triangulum ω P B ad triangulum Z S E, id est vt ante ostendi B P H triangulum ad triangulum L S E. id est [g] B O G triangulum ad triangulum K N E. vnde cùm ostensum sit hyperbolas concauas, B O P Q R, E N S T V in infinitum productas illam inter se obtinere rationem, quam figuræ P B O, S E N, patet esse vt B O G triangulum ad triangulum K N E, sic B O P Q hyperbolam concauam ad hyperbolam E N S T. Quod erat postulatum.

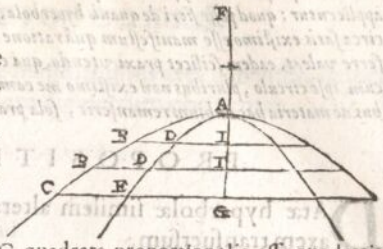
a 116. *De progressionibus.*
b 116. *huius.*
c 74. *huius.*
d *Per elementa.*
e 74. *huius.*
f *Ex ante-penultima.*
g 14. *huius.*

PROPOSITIO CLXXVII.

HYperbolæ communem habentes diametrum transuersam, ordinatim positas ex ijsdem erectas punctis, habent proportionales; & contra.

Demon-

Demonſtratio.

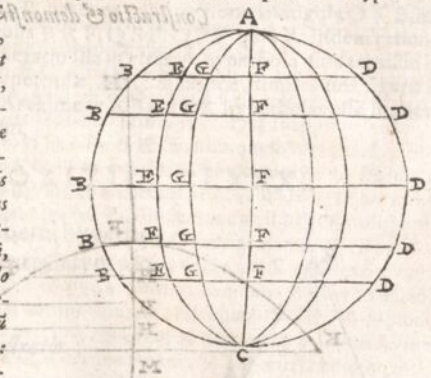


HAbeant ABC, ADE hyperbolæ communem diametrum tranſuerſam AF, ad quam ex ijſdem punctis I, G ordinatim ponantur IDB, GEC, dico ID, GE proportionales eſſe IB, GC: cùm enim quadratum ID ſit ad quadratum EG, vt FIA rectangulum ad rectangulum FGA; eandemque ſeruent proportionem quadrata BI, CG: patet ID, EG quadrata proportionalia eſſe quadratis IB, CG, adeoque & lineas, lineis proportionales; quod erat primum.

Sint iam ID, GE lineæ proportionales rectis IB, CG; dico hyperbolas ABC, ADE communem habere tranſuerſam diametrum FA. ſit enim FA diameter hyperbolę ABC. erit igitur vt quadratum IB ad quadratum CG, ſic FIA rectangulum ad rectangulum FGA, ſed vt IB quadratum ad quadratum CG, ſic ID quadratum ad quadratum EG ex ſuppoſito, quadratum igitur ID ad EG, quadratum eſt vt FIA, rectangulum ad rectangulum FGA: quare FA quoque diameter eſt hyperbolæ ADE. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

LOcus hic exigere videtur, vt paulò fuſius explicemus in quibus ſimilitudo hyperbolarum ſimilium conſiſtat, vt meliùs diſcrimen quo differre videntur inter ſe hyperbolicæ ſectiones dignoſci queat. Enimuerò plurimi perſuaſum ſibi habent, differentiam inter ſectiones illas, vſque adeò vagam eſſe & indeterminatam, vt præter communes aliquas proprietates in quibus omnes hyperbolæ conueniunt, quales ſunt diametri coniugatæ aſymptoti, laterarecta, ordinatim poſitæ, & his ſimilia, nulla poſſit formari ſcientia, quâ alia ab aliis dignoſcatur. ſed prorſus falluntur: nam inter Ellipſes non eſt maius diſcrimen, ac circulum, quam inter hyperbolas reperiatur: & vti circulus ABC cum quauis ellipſi comparari poteſt, ſecundùm ordinatim poſitas, ſcilicet ſecundum rationem BF ad EF, vel GF, (dummodo propoſita quæuis ellipſis ad vnam ſibi ſimilem quæ axem AC habeat æqualem reducatur) ita quoque omnibus hyperbolis id commune eſt: quod quo meliùs aſſequi valeamus, comparabimus hyperbolam ABC. cuius aſymptoti, rectum continent angulum circulo ABC: in circulo quadrata BF ordinatim applicatarum ad diametrũ AC, æqualia ſunt rectãgulis AFC: ita quoque in hyperbola cuius aſymptoti ſe ad rectos ſecãt angulos quadrata EB ordinatim poſitarum ad diametrum DE, [a] æqualia exiſtunt rectangulis DEA: Ellipſeon verò EF, vel GF quadrata rectarum quæ ordinatim ponuntur ad axem AC, talem obtinent inter ſe rationem quæ inter quadratia BF reperitur. eodem prorſus tenore in hyperbolis contingit, nam quadrata FE, vel GE, eandem inter ſe ſor-





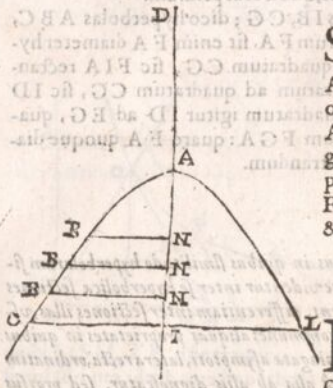
a 60. huius.

ſortiuntur proportionem, quæ inter quadrata BE *exſurgit, dummodo ad eamdem diametrum applicentur: quod poſſe fieri de quauis hyperbola, ſuperiore propoſitione eſt demonſtratum. quocirca ſatis exiſtimo eſſe manifeſtum quâ ratione datam hyperbolam cum quauis alia quis conferre valeat, eadem ſcilicet praxi vtendo, qua cum ellipſibus hanc comparationem inſtitueret, cum ipſo circulo, pluribus non exiſtimo me eam rem inculcare debere, præſertim cùm illiquibus de materia hac dubium remanſerit, ſola praxi quam propoſuimus ſibi facturi ſint ſatis.*

PROPOSITIO CLXXVIII.

DAtæ hyperbolæ ſimilem alteram conſtruere quæ datum habeat axem tranſuerſum.

Conſtructio & demonſtratio.



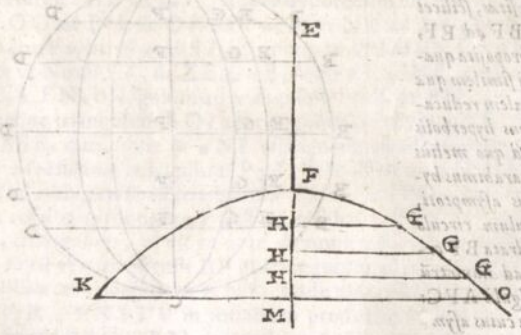
a *Scholion precedent.*

SIt ABC hyperbola, & recta data EF, oportet ad EF hyperbolam ponere, ſimilem datæ ABC: ſit ABC hyperbolæ axis AD ad quam ordinatim applicentur BN, fiantque vt DA ad AN, ſic EF ad FH, & ex H normales erigantur HG, proportionales BN, [a] patet FGG puncta eſſe ad hyperbolam ſimilem ABC, & FE eiuſdem eſſe axem; datæ igitur hyperbolæ, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLXXIX.

IIſdem manentibus figuris, propoſitum ſit datæ hyperbolæ ſimilem exhibere, ſuper data recta.

Conſtructio & demonſtratio.



HYperbola data ſit ABL: recta verò data ſit OK, oportet ſuper OK hyperbolam conſtituere ſimilem hyperbolæ BAL. Hyperbolæ BAL axis ponatur DA & ad illum ordinatim linea CIL; diuiſâque bifariam in M lineâ OK, erigatur ex M normalis ad GK, linea ME, vt OM ſit ad ME, ſicut CI ad ID: tum EM ſecetur in F & H, ſicut ID ſecta eſt in A & C. fiatq; vt EMF rectangulum ad quadratum OM, ſic EHF rectangulum ad quadratum GH, patet OGFK eſſe adhyperbolam ſimilem BAL; datæ igitur hyperbolæ, &c. Quod erat faciendum.

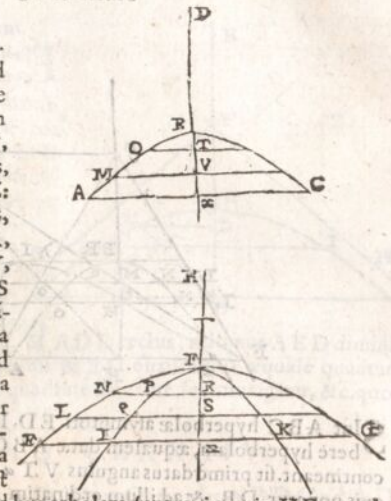
PRO-

PROPOSITIO CLXXX.

DAtas duas hyperbolas diuersæ magnitudinis axes habentes, reducere ad hyperbolas similes eandem diametrum obtinentes.

Constructio & demonstratio.

HAbeant ABC, EFG hyperbolæ inæquales axes DB, HF; oportet ad axium alterutrum, putà HF applicare hyperbolam similem ABC. ponantur in ABC hyperbola ordinatim lineæ OT, MV, AX; & DB, DT, DV, &c. lineis, proportionales fiant HF, HR, HS, HZ: ponanturq; ordinatim in hyperbola EFG, lineæ NR, LS, EZ. deinde fiant BR, QS, IZ. lineæ proportionales OT, MV, AX: quoniam igitur HZ linea in F, R, S diuisa est vt DX in B, T, V, X. patet rectãgulis DTB, DVB, &c. proportionalia esse rectangula HRF, HSF, &c. sed DTB, DVB rectangulis proportionalia sunt quadrata OT, MV, AX, id est per cõstructionem quadrata PR, QS, IZ, quadrata igitur RP, QS, IZ proportionalia sunt rectangulis DTB, DVB, &c. id est HRF, HSF, &c. quare puncta I, Q, P ad hyperbolam sunt cuius axis HF. quod autem IQP hyperbola similis sit AOB: sic ostendo intelligantur iungi puncta OB, MB, MO, item PF, QF, QP, patet ex constructione triangula OTB, MVB, item MOB similia esse triangulis PRF, QSF, QPF quia ex ijsdem rationes habent compositas; quare cùm operatio illa in vtraque hyperbola sine termino continuari possit, vt figuræ omnes hyperbolæ ABC inscriptæ, similes sint figuris inscriptis hyperbolæ IFK, patet ex Archimede ABC, IFK hyperbolas esse similes. fecimus igitur, quod erat postulatum.

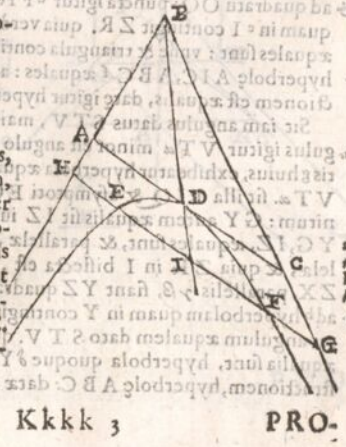


PROPOSITIO CLXXXI.

DAtis asymptotis, exhibere hyperbolam, quæ per datum intra asymptotos punctum transeat.

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint asymptoti AB, BC, & intra illas, punctum D. oportet exhibere hyperbolam, quæ per datum punctum D transeat, ponatur per D linea AC pertingens vtrimque ad asymptotos, a quæ in D bisecta sit: illiq; æquidistans ponatur GH: & CD quadrato, æqualia fiant rectangula GFH, GEH: erunt F, D, E b puncta hyperbolam, cuius asymptoti sunt AB, BC, datis igitur asymptotis, &c. Quod erat faciendum.

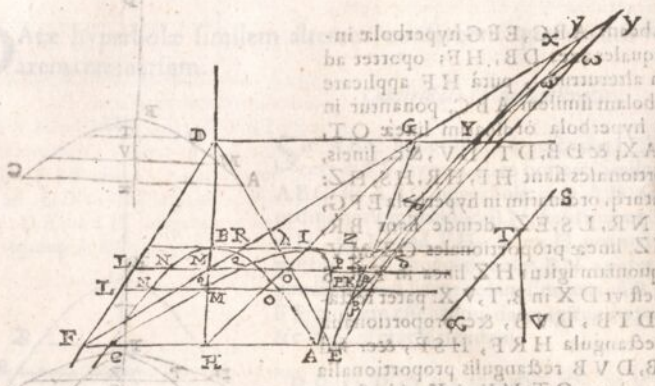


a *Ex elementis.*
b *14. & 15. huius.*

PROPOSITIO CLXXXII.

DAtæ hyperbolæ aliam exhibere æqualem cuius asymptoti datum contineant angulum.

Constructio & demonstratio.



SInt ABC hyperbolæ asymptoti ED, DF: angulus datus VTα, oporteat exhibere hyperbolam, æqualem datæ ABC, cuius asymptoti, datum angulum VTα contineant. sit primò datus angulus VTα minor angulo EDF, hyperbolæ ABC axis ponatur DB, & ad illum ordinatim AC, pertingens ad asymptotos in E & F. Super EF segmentum describatur [a] circuli continens angulum æqualem VTα: qui cum minor ponatur angulo EDF, cadet [b] segmentum descriptum supra D, adeoque DG æquidistans AC, segmento circuli occurret in puncto quodam G: iungantur igitur GE, GF, GH: actæq; per B contingenti BI, æquidistantes ponantur LK, occurrentes ABC hyperbolæ in N, axi DB in M, rectæ HG in O: fiantque MN lineis æquales OP, OQ: dico P, I, Q, esse ad hyperbolam, æqualem ABC, cuius asymptoti EG, GF datum obtinent angulum. cum enim GD, EF, IB, &c. æquidistent, vt rectangulum DMB est [c] ad rectangulum DMB, sic GOI rectangulum est ad rectangulum GOI: sed vt DMB ad DMB, sic MN quadratum ad quadratum MN id est OP quadratū ad quadratū OP: igitur vt GOI rectāgulum ad rectangulum GOI, sic quadrarum OP ad quadratum OP, siue OQ quadratū ad quadratū OQ: puncta igitur [d] PIQ sunt ad hyperbolā cuius asymptoti, GE, GF, quam in [e] I contingit ZR. quia verò GD, ZQR, EH æquidistant, rectæ ZI, λB æquales sunt: vnde & triangula contingentium GIZ, λDB æqualia sunt: quare & hyperbolę AIC, ABC [f] æquales: angulus autem EGF dato VTα per constructionem est æqualis, datę igitur hyperbolæ, &c.

a *Per elementa.*
b *Ex elementis.*
c *Ibid.*
d 1.9.11. & 15. *huius.*
e 26. *huius.*
f 174. *huius.*

Sit iam angulus datus STV, maior angulo EDF, producaturque ST in α, angulus igitur VTα minor est angulo EDF: per constructionem igitur primæ partis [g] huius, exhibeatur hyperbola æqualis ABC cuius asymptoti angulum obtineant VTα. sit illa PIQ & asymptoti EG, GF. producantur DG in Y & FG in infinitum: GY autem æqualis sit IZ iuncta ZY, occurrat FG in X. quoniam igitur YG, IZ, æquales sunt, & parallelæ, rectæ quoque GI, ZY æquales sunt & parallelæ, & quia ZR in I bisecta est, ZX quoque in Y bisecta erit: positis igitur ZX, parallelis γβ, fiant YZ quadratis æqualia rectangula βδγ & βωγ: erunt δ, Y, ω [h] ad hyperbolam quam in Y contingit ZX. & asymptoti sunt γG, GH constituentes angulum æqualem dato STV. quia verò triangula contingentium ZIG, ZYG æqualia sunt, hyperbola quoque δYω æqualis est hyperbolæ PIQ id est per constructionem, hyperbolę ABC: datæ igitur hyperbolę, &c. Quod erat faciendum.

g 15. *huius.*
h 1.9.11.15. 26. *huius.*

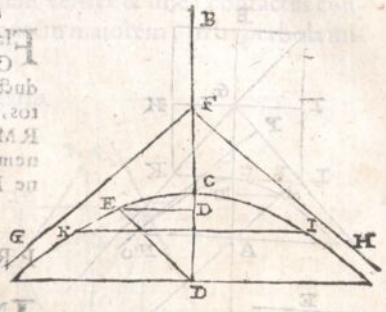
PRO-

PROPOSITIO CLXXXIII.

DAtam AB diuisam in C denuo secare in D, vt rectangulum BDC quadrato residui AD sit æquale.

Constructio & demonstratio.

ERigatur AE vt cum BAD, angulum semirectum constituat, & ex F dimidio CB, lineæ ponantur FG, FH angulos semirectos exhibentes cum AF linea: & descripta sit hyperbola ICE, inter asymptotos FG, FH habens axem AE: sitque E punctum intersectionis rectæ AE, productæ cum hyperbola ICE: demissa igitur perpendicularis ex E ad AB, exhibebit punctum D quæsitum, cùm enim asymptoti HF, FG angulum formet rectum ex constructione, rectangulum a BDC æquale est quadrato DE; quia vero angulus DAE semirectus est, & ADE rectus, reliquus AED dimidio recti, adeoque & angulo EAD æqualis est & ED quadratum æquale quadrato AD: vnde & rectangulum BDC, AD quadrato æquatur. fecimus igitur, &c. quod petebatur.



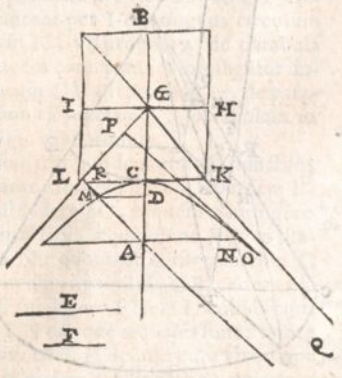
a 60. huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.

DAtam AB sectam in C partiri in D. Vt rectangulum BDC ad AD, quadratum datam obtineat rationem quadrati E ad F quadratum.

Constructio & demonstratio.

DIuisa CB bifariam in G ponatur orthogonalis HG vt ratio quadrati CG ad GH, hoc est CB ad HI, eadem sit cum proportione E ad F. perfecto deinde parallelogrammo ductisque GK, GL descripta ponatur hyperbola inter asymptotos GK, GL, habens verticem C. ex puncto deinde A ducatur AM, vt cum DA recta semirectum angulum formet, occurrens perimetro sectionis in M: & ponatur MD parallela HI. Dico punctum D esse quod quæritur: est enim rectangulum BDC ad quadratum DM vt CB, quadratum ad HI quadratum per ea quę præmisimus. sed quadrato DM æquale est DA quadrato, igitur rectangulum BDC ad DA, quadratum eam habet rationem quam CB ad HI quadratum, hoc est quadratum E, ad F, quadratum. quod præstandum fuit.

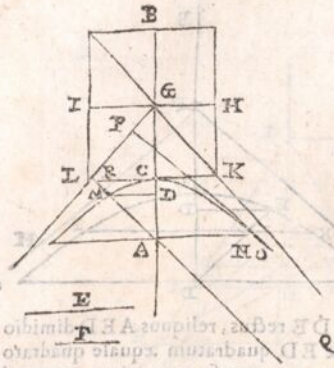


PRO-

PROPOSITIO CLXXXV.

OPorteat his positis assignare punctum M intersectionis rectæ AM, cum perimetro sectionis NCM.

Constructio & demonstratio.

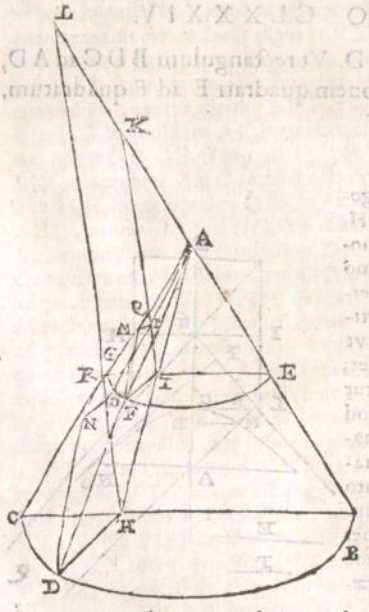


FIat ex 28. huius rectæ AM parallela OP, quę contingat sectionem in O. & producta vtrimque recta AM, vsque ad asymptotos, fiat quadrato OP æquale rectangulum RMQ. Dico punctum M fore intersectionem communem rectæ AM cum sectione NCM. Quod patet ex 14. huius, &c.

PROPOSITIO CLXXXVI.

IN omni cono sectiones hyperbolicæ parallelæ similes figuras exhibent.

Demonstratio.



SIt ABC triangulum per axem coni ABDC, sitque EFG sectio basi æquidistans: ducta deinde AH in plano trianguli per axem quæ circulorum diametris occurrit in I & H, cum in eodem sint plano, erigatur ex H recta HD normalis ad BC, occurrens circuli perimetro in D, ducaturque DA, occurret illa circuli EFG perimetro in F: iungatur autem IF: denique secundum HD, FI lineas plana ducantur parallela, quæ cum AB linea conueniant in K & L, & AC in Q & R. erunt igitur IFQ, RHD [a] hyperbolæ, quarum diametri KQI, LRH ad quas ordinatim positæ sunt IF, HD: quia verò æquidistant EG, BC, [b] item IF, HD vt AI ad IF, sic AH est ad HD: rursum assumpto in IQ puncto quodam P, ponatur ex A per P linea, occurrens LR quæ in eodem cum IK, plano est in O: ponantur autem PM, ON æquidistantes FI, HD: cùm igitur IQ, RH æquidistent: vt QP ad QI, sic RO est ad RH; igitur KPQ rectangulum est ad rectangulum KIQ, vt LOR rectangulum est ad rectãgulum LHR: sed vt KPQ ad KIQ, rectangulum [c] sic PM quadratum ad quadratum IF & vt LOR, rectangulum ad LHR, sic ON quadratum ad quadratum HD; quadratum igitur ON est ad HD, vt PM quadratum ad quadratum IF: & PM, IF lineę proportionales rectis ON, HD: quia verò QP, QI rectæ, quoque proportionales sunt RO, RH: figuræ QPM, QIF similes sunt figuris RON, RHD: similes igitur [d] sunt hyperbolæ QMF, RND. Quod erat demonstrandum.

a 11. huius.

b 16. vndecimi.

c 1. huius.

d Per Archimedem.

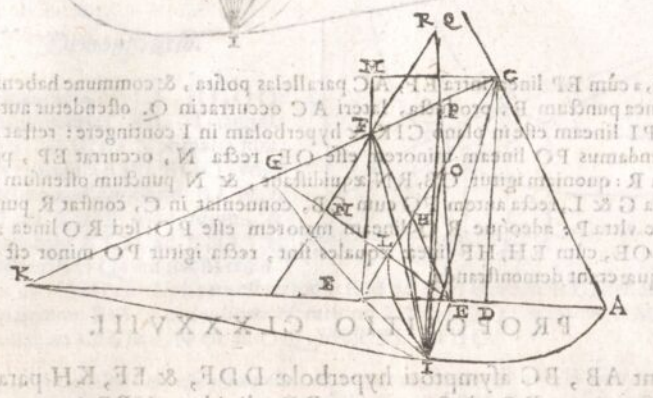
PRO-

PROPOSITIO CLXXXVII.

SI in cuiuſcunque ſectionis diametro producta, punctum aſſumatur, & ab illo ad ſectionem contingentes ducantur, iunganturq; contactuum puncta:

Dico in parabola partē diametri à vertice eiuſdem & contingente interceptam æqualem eſſe illi, quæ ab eiuſdem vertice & linea contactus coniungente intercipitur lineæ: in ellipſi autem maiorem, in hyperbola minorem.

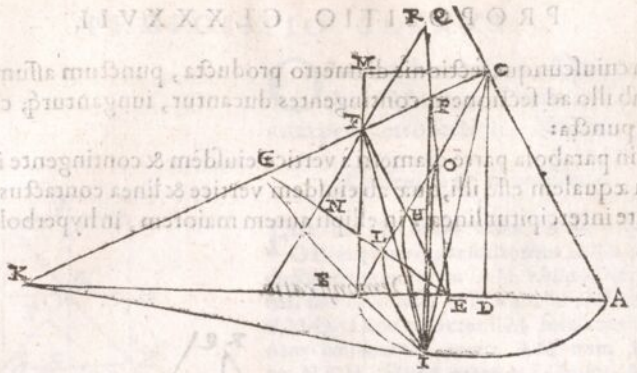
Demonſtratio.



SIt ABC conus, ſectus triangulo per axem ABC, diameter autem baſeos AGB ſit AB in qua aſſumpto quouis puncto E, ponatur EH æquidiſtans AC, & EI normalis ad AB, tum per HE, & IE, fiat ſectio exhibens in ſuperficie coni lineam GHI: erit illa [a] parabola: ponatur exinde axis coni CD, perficiaturq́ue parallelogrammum CDB, cuius lateri BM occurrat EH producta in F, iunctaq́ue CF, diametro AE protractæ occurrat in K, ponatur autem per I contingens circulum AIB in I: conueniet illa cum AK, CK lineis in K, vti propoſ. 17. de parabola oſtendi: vlterius, ſi ſecundùm IK & per C verticem coni, planum intelligatur duci, continget illud ſuperficiem coni ſecundùm lineam CI: vti propoſit. 17. de parabola oſtendi: eadem quoque propoſitione oſtenſum eſt iunctam IF, parabolam in I contingere, & EH, HF lineas eſſe æquales: quod erat primum. a 21. *De parabola.*

Rurſum inter F & K in FK linea punctum ſumatur quodcunque G; iunctiſq́; EG, IG ſecundum IE, EG lineas planum agatur, exhibens in coni ſuperficie lineam LI: erit IEL [b] ellipſis; oportet autem oſtendere IC, eandem contingere in I, & GL maiorem eſſe LE. ponatur per F linea FN, æquidiſtans BC in plano trianguli per axem occurrens EG, lineæ in N: quoniam igitur punctum G ſumitur inter F & K, ſi per G, recta intelligatur duci, parallela CB, cadet [c] illa vltra FN, adeoq́ue N punctum inter G & L eſt: quia verò FN, HL æquidiſtant, & [d] EH, HF oſtenſæ ſunt æquales, rectæ EL, LN quoque æquales ſunt: quare cum LG maior ſit LN, recta quoque LG maior eſt LE. deinde cùm vtrumque punctum I & G, in plano ſit CIK, recta IG in eodem exiſtit plano: quia verò planum CIK. in linea CI [e] contingit ſuperficiem coni. & EIL ellipſis in vno tantum puncto occurrit CI lineæ nimirum in I. planum CIK, in I, adeoq́ue & GI, linea in vno tantum puncto occurrit ellipſi, adeoq́ue in I contingit. Quod erat ſecundum. b 1. *vel* 2. *De ellipſi.* c *Ex elementis.* d 17. *De parabola.* e *Ibid.*

Sumatur denique inter C & F, in CF linea punctum quodcumque P; iunctiſq́ue PE, PI fiat ſecundùm EI, EP lineas planum IEO: patet IEO eſſe hyperbolam



a 1. huius

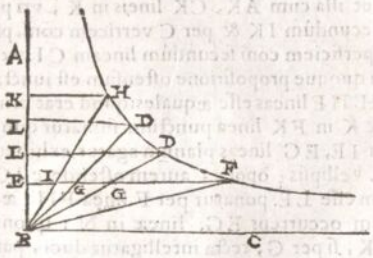
bolam, a cùm EP linea, intra EF, AC parallelas posita, & commune habens cum EF linea punctum E, producta, lateri AC occurrat in Q. ostendetur autem vt priùs PI lineam esse in plano CIK & hyperbolam in I contingere: restat igitur vt ostendamus PO lineam minorem esse OE. recta N, occurrat EP, productæ in R: quoniam igitur CB, RN æquidistant, & N punctum ostensum est esse intra G & L, recta autem FG cum CB, conueniat in C, constat R punctum cadere vltra P: adeoque RO lineam maiorem esse PO: sed RO linea æqualis est OE, cùm EH, HF lineæ æquales sint, recta igitur PO minor est quàm EO. quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

SInt AB, BC asymptoti hyperbolæ DDF, & EF, KH parallelæ asymptoto BC: ductæ quoque BD, diuidant HBF in partes seu sectores æquales, occurrentes EF lineæ in IGG.

Dico EF in IGG, diuisam esse in continuè proportionales.

Demonstratio.



b Ex conuersa 109. huius.

QVoniam segmentum HBF diuisum est in partes æquales; igitur sunt in continua b analogia lineæ FE cum reliquis sibi parallelis, sunt autem IE, HK, EF, & GE, DL, FE in continua proportione; igitur quoniam prima EF communis est, & HK, DL, EF, sunt proportionales, hinc etiam mediæ EI, EG, EG, EF, proportionales existunt. Quod erat demonstrandum.

PRO-

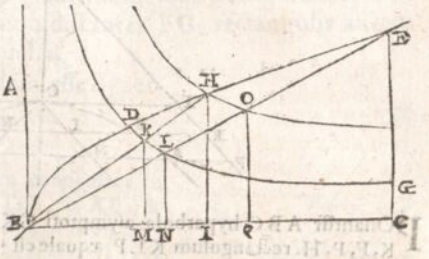
PROPOSITIO CLXXXIX.

HYperbolam DFG inter asymptotos rectum angulum formantes constitutam, secet in D parabola BDE habens axem BC positaq; ex B quauis linea BKH, quæ hyperbolæ occurrat in K & parabolæ in H, describatur per H hyperbola HO habens AB, BC asymptotos; & ex B quæuis alia ducatur BLOE, occurrens hyperbolis in L, & O parabolæ in E.

Dico BK esse ad BH, vt BL est ad BO.

Propositionem hanc, vti & duas sequentes, quòd suis locis exciderint, huic parti apponere visum est.

Demonstratio.



POnantur KM, LN, HI, OQ: æquidistantes AB. Triangula [a] igitur BKM, BLN æqualia sunt, vti & triangula BHI, BOQ: vnde BKM triangulum est ad BLN, vt BHI ad BOQ triangulum, & permutando BKM ad BHI, vt BLN ad BOQ: sed BKM triangulum ad [b] BHI, in duplicata est ratione KM ad HI; similiter BLN triangulum ad triangulum BOQ in duplicata est ratione LN ad OQ; igitur vt KM ad HI, id est BK ad BH, sic LN est ad OQ, id est BL ad BO.

[a] Ex 46. huius.

[b] Ex elementis.

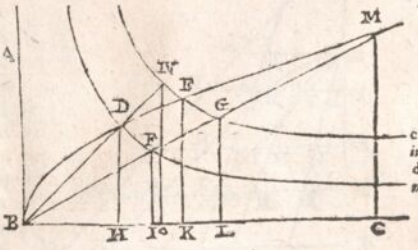
Nota vniuersalem hanc esse propositionem: neque necessarium esse vt BH linea incidat in H, communem hyperbolæ cum parabola intersectionem; sed BH, BE quasuis posse esse, vti ex demonstratione iam posita manifestum est.

PROPOSITIO CXC.

SInt AB, BC rectum angulum formantes asymptoti hyperbolarum DF, EG, quas in D & E secet parabola habens axem BC: ponatur autem ex B quæuis secans hyperbolas in F & G, occurrens parabolæ in M. & ex F, D, G, E punctis rectæ demittantur DH, FI, EK, GL parallelæ AB.

Dico rationem DH ad FI, maiorem esse ratione FK ad GL.

Demonstratio.



REcta BD producta occurrat EG hyperbolæ in N, ponaturque NO, parallela AB; erit igitur DH ad FI, [c] vt NO ad GL: sed ratio NO ad GL, maioris ad eandē, maior [d] est quā ratio EK ad GL, minoris ad eandem: ratio igitur DH ad FI, maior est ratione FK ad GL. Quod fuit demonstrandum.

[c] 189. huius.

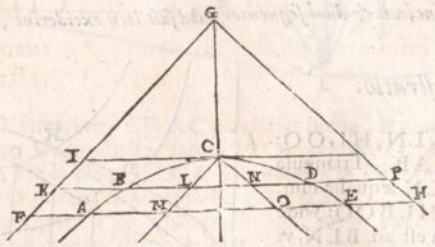
[d] Per elementa.

PROPOSITIO CXCI.

Sit ABC hyperbolæ vertex C, ex qua demissis lineis CL, CN quæ asymptotis æquidistent, ponantur BD, AE æquidistantes contingenti per C ductæ occurrentes CL, CN lineis in L, N, M, O.

Dico quod BLD rectangulum ad rectangulum AME sit vt LN linea ad lineam MO.

Demonstratio.



a *Ex elementis.* b *Ibid.* c *18. huius.* d *1. Sexti.*

POnantur ABC hyperbolæ asymptoti GK, GH occurrentes BD, AE lineis in K, F, P, H. rectangulum KLP æquale est[a] rectangulis KBP, BLD: sed etiam KLP id est LKN, (ob KL, NP lineas æquales) æquale est[b] quadrato KL, (id est IC, id est KBP[c] rectangulo) vnà cum rectangulo KLN: demptis igitur æqualibus KBP, & quadrato KL, æqualia remanent rectangula BLD, KLN: similiter æqualia ostenduntur rectangula AME, FMO: igitur vt KLN ad FMO rectangulum, id est vt[d] LN ad MO, sic BLD rectangulum est ad rectangulum AME. Quod erat demonstrandum.

HY-

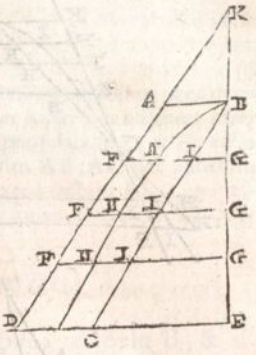
HYPERBOLÆ
PARS SEPTIMA

Varias exhibet geneſes, quæ tam ex lineis & circulis, tam ex ellipſi & parabola, denique ex ipſa oriuntur hyperbola. Secundò hyperbolas reducit ad ſectiones, è quibus ortæ. Tertiò reliquas ſectiones ex hyperbola educit.

PROPOSITIO CXCII.

SIt parallelogrammum ABCD, cui adiungatur triangulum BEG: rectæ verò DE, ponantur æquidiſtantes FG; rectangulis autem IGF, fiant quadrata GH æqualia.

Dico puncta B, H, H ad eandem eſſe hyperbolam, cuius diameter eſt BE.

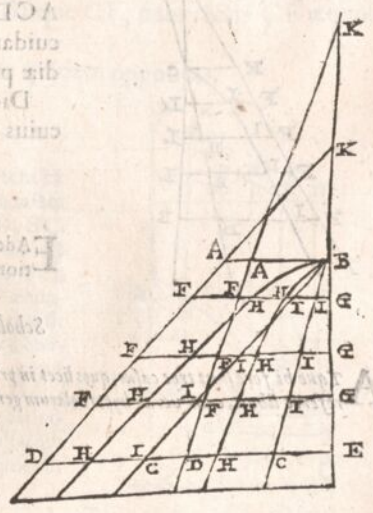


Demonſtratio.

PRoducantur rectę DA, EB donec conueniant in K. quoniam æquidiſtant FG, rectæ DE, vel AB, & AD ipſi BC; igitur vt KB ad KG, ita eſt AB ad GF: & vt KB ad BG, ita AB, hoc eſt FI ad IG; & vt KG ad GB, ita eſt FG ad GI. quare rectangulum KGB, ad KGB, rectangulum eam rationem obtinet, quę reperitur inter rectangula FGI ad FGI, cùm ex ijſdem rationibus componantur: ſed vt rectangulum FGI, ad FGI rectangulum, ita ponitur quadratum GH ad HG quadratum; igitur vt eſt rectangulum KGB ad KGB rectangulum, ita eſt GH ad GH quadratum. Igitur HH ſunt ad eandem hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt KB. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

HInc colligere licet methodum deſcribendi hyperbolas, non ſolùm eas, quæ aſymptotos habent ad rectos angulos conſtitutas, verùm etiam alias omnes, quæ vel obliquiſſimo ſeſe angulo decuſſant. hyperbola enim cuius aſymptoti ſeſe inuicem orthogonaliter diuidunt, rectangula KGB æqualia quadratis [a] ordinatim applicatarum exhibent: cùm verò rectangula KGB, maiora ſunt quadratis GH, aut minora, tunc aſymptotos habent ſibi inuicem ad angulos obliquos inſiſtentes: vnde aſymptotorum quoad angulos conſtitutio, dependet à proportione rectangulorum KGB, ad quadrata GH, non autem à proportione rectangulorum IGF ad quadrata GH. nam vt in præſenti ſcemate videre eſt, rectangula IGF æqualia ſunt quadratis HG; nihilominus aſymptoti harum hyperbolarum occurrunt ſibi ad inæquales angulos,



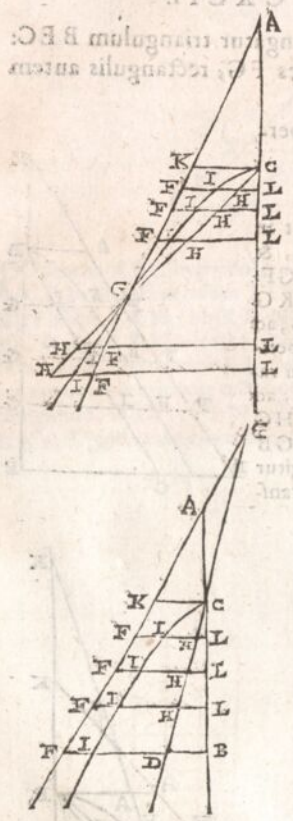
[a] 60. huius.

quod si quis hyperbolas contractas magis aut diductas eadem praxi describere desiderat, augeat tantummodo lineas ordinatim positas GH. vel decurtet secundùm rationem, quam desiderat, habebitque intentum.

PROPOSITIO CXCIII.

DEcussent se inuicem rectæ AL, CG in C: occurrat deinde AF rectæ DC in G: & positis FL, quæ æquidistent cuidam CK fiant inter LH, LF mediæ proportionales LI.

Dico IIC esse ad eandem hyperbolam cuius AC est latus transuersum.



Demonstratio.

QVoniam enim FL, æquidistant KC lineæ, ac proinde inter se, erit ratio FLH rectanguli, ad rectangulũ FLH, composita ex ratione HL ad HL, hoc est CL, ad CL, & ratione FL ad FL, hoc est AL ad AL: igitur rectangulum ALC ad ALC, est vt rectangulum FLH ad FLH. cùm ergo quadrata IL, æqualia sint rectangulis FLH, erit quadratum IL ad IL, quadratum vt rectãgulum ALC ad ALC, vnde patet CII esse ad hyperbolam cuius CB, est diameter, & AC latus transuersum. Quod demonstrare oportuit.

PROPOSITIO CXCIV.

DEcussent sese rursus AB, CD in C: occurrat deinde AF rectæ DC in G, sic vt AG non subtendat angulum ACD; & positis FL quæ æquidistent cuidam CK, fiant inter FH, HL mediæ proportionales HI.

Dico IIC ad eandem esse hyperbolam cuius GC latus transuersum est.

Demonstratio.

EAdem est planè quæ in præcedenti propositione.

Scholion.

ATque hi ferè sunt tres casus, quos licet in prima parte exposuerimus, tamen hunc in locum referre libuit, cùm veras hyperbolarum geneses exhibeant.

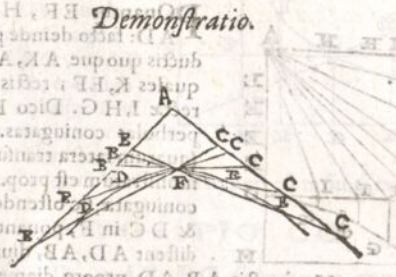
PRO-

PROPOSITIO CXCV.

CONstituant AB, AC quemuis angulum, & per assumptum in eo punctum F ducantur BC, rectis autem F, DB, æquales fiant, F, EC.

Dico DFE fore ad eandem hyperbolam cuius asymptoti sint AB, AC.

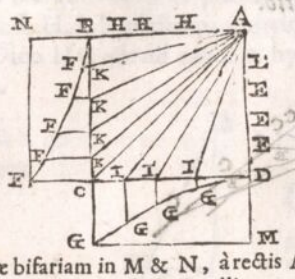
Demonstratio.


A
E
E
E
D
F
C
C
C
E
E
E

PROPOSITIO CXCVII.

DAtis AB, AD pro diametris hyperbolæ ad rectos angulos constitutis coniugatas sectiones describere.

Constructio & demonstratio.



PONantur EF, HG æquidistantes AB, AD: facto deinde parallelogrãmo ADC. ductis quoque AK, AI fiant rectis AK æquales K, EF; rectis insuper AI æquales rectæ I, HG. Dico BFF, DGG esse hyperbolas coniugatas. quod sint hyperbolæ (quarum latera transuersa sunt AB, AD) demonstratum est prop. præced. Quod autem coniugatæ, sic ostendo. Productis BC in G, & DC in F, ponantur FN, GM quę æquidistent AD, AB, diuidentur ex constructione hæ bifariam in M & N, à rectis AB, AD, vtpote diametris, si vsque ad sectionem vtrimque productæ intelligantur. suntque rectis AD, AB quæ latera transuersa suarum hyperbolarum ostensa sunt, æquidistantes; igitur AB,[a] AD sunt diametri coniugatæ, ac proinde ipsæ etiam figuræ coniugatę sunt; fecimus igitur quod fuerat postulatum.

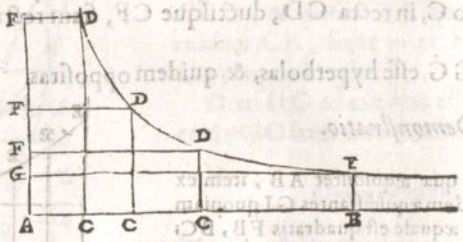
a Ex 40. huius.

PROPOSITIO CXCVIII.

LIneæ AB, AF positæ sint ad quemcumque angulum FAB, lineaque AB diuisa sit vtcunque in CC, & fiat vt AC ad AB, ita BE ad CD. sintque BE, CD parallelæ AF.

Dico puncta DE esse ad eandem hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, AF.

Demonstratio.



DVcantur EG & DF, quæ æquidistent AB: cùm igitur sit vt AC ad AB, sic EB ad DC, parallelogramma CDF [b] æqualia sunt parallelogrammo BEG, puncta igitur EDD [c] ad eandem sunt hyperbolam.

b Ex elementis.
c Ex conuersa 46. huius.

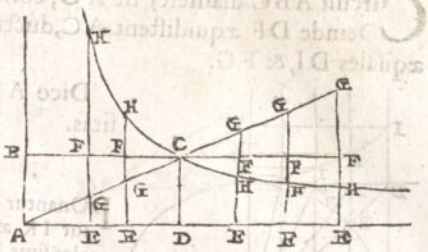
PROPOSITIO CXCIX.

SInt AB, AE lineæ quemcumque angulum constituentes, ex B verò puncto lineæ AB, ducatur BF parallela AE: & ducta quauis AC quæ FB lineam secet in C, fiant in continua analogia EG, EF, EH quę parallelæ sint lineæ AB.

Dico

Dico H C puncta esse ad eandem hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, AD.

Demonstratio.



QVoniam supponuntur lineę EG, EF, EH eandem continuare rationem, rectangula GEH, quadrato CD, adeoque & inter se æqualia sunt: est autem EG ad EG, vt AE est ad AE; igitur AEH, rectangula inter se quoque sunt æqualia: cum ex ijsdem rationem habeant compositam, ex quibus ratio GEH rectangulorum componitur. puncta igitur HHC [a] ad hyperbolam sunt, cuius asymptoti sunt AB, AD.

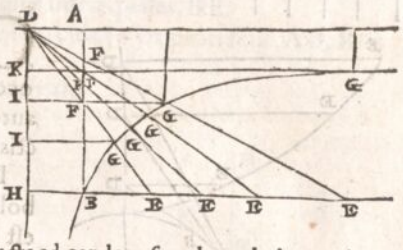
a 75. huius.

PROPOSITIO CC.

COnstituantur duæ lineæ AB, BC formantes angulum quendam ABC, & ex puncto quouis D extra angulum assumpto ducantur rectæ DE, occurrentes AB in F punctis. Fiant autem DG mediæ proportionales inter DF, DE.

Dico GG esse ad eandem hyperbolam cuius centrum est D punctum.

Demonstratio.



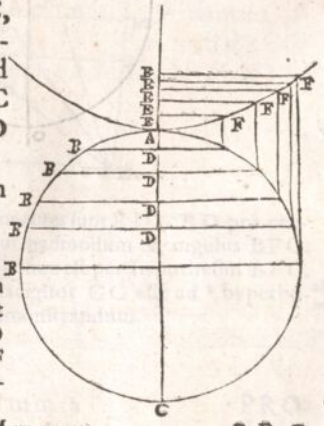
POnatur DH æquidistans AB, & FK, GI parallelæ BC. quoniam igitur in continua sunt proportione DF, DG, DE, erunt quoque in continua analogia KF, LG, HC, hoc est DK, DI, DH: igitur vt DI ad DH, (id est DK ad DL,) sic KF id est HB ad IG: rectangula igitur [b] DHB, DIG æqualia sunt: quare BGG [c] puncta ad eandem sunt hyperbolam cuius centrum D.

b Ex elementis.
c Ex conuersa 4. huius.

PROPOSITIO CCI.

CIrculus ABC diuisus diametro AC, habeat BD normaliter ad AC constitutas; producta verò CA, fiat vt ADC ad ADC rectangulum, ita rectangulũ AEC ad AEC rectangulum, & fiant rectis BD æquales & parallelæ EF.

Dico FF fore ad eandem hyperbolam cuius diameter est transuersa AC.



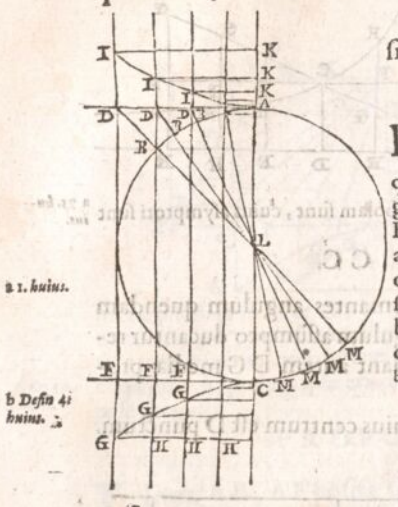
Demonstratio.

QVoniam ADC ad ADC, est vt quadratum DB ad DB quadratum; igitur etiam erit AEC ad AEC rectangulum, vt quadratum BD ad BD, id est EF ad EF quadratum: igitur FF est [d] hyperbola, ad cuius diametrum CAE ordinatim posite sunt EF.

d 1. huius.

PROPOSITIO CCII.

CIrculi ABC diameter sit AC, contingentes ad A & C, AD, CF: Deinde DF æquidistent AC, ductis insuper LD, fiant rectis L, BD, æquales DI, & FG.



Dico AI, & CG hyperbolas esse oppositas.

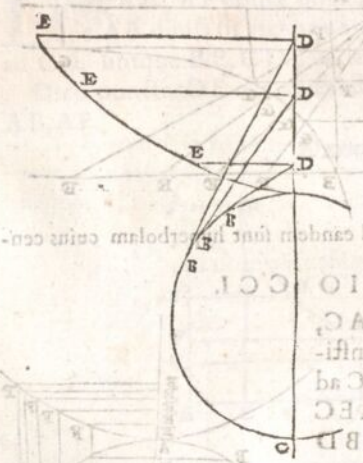
Demonstratio.

POnantur IK quę æquidistent AD: erunt igitur IK æquales DA, quia verò BM lineis æquales sunt DF, & DI æquales L, BD, rectangula DIF idest AKC, æqualia sunt rectangulis BDM, id est quadratis DA siue IK, igitur AKC ad AKC, rectangulum est vt IK quadratum ad quadratum IK. vnde AI, puncta [a] ad hyperbolam sunt. similiter ostendam puncta CGG ad hyperbolam esse. quia verò AII, CGG hyperbolæ communi gaudent transuersa AC, oppositæ erunt [b] sectiones AII, CGG.

[a] 1. huius.

[b] Defin 4. huius.

PROPOSITIO CCIII.



CIrculum ABC cuius diameter AC, contingant quotuis DB, occurrentes diametro in D: erectis autem parallelis DE, fiant DB rectis æquales DE.

Dico AE esse ad eandem hyperbolam, cuius diameter transuersa est AC.

Demonstratio.

QVoniam BD contingentes sunt, rectangulis ADC æqualia sunt quadrata DB id est ex hypothesi quadrata DE: quare ADC ad ADC rectangulum, est vt DE quadratum ad quadratum DE. igitur A, EE puncta ad hyperbolam sunt cuius transuersa diameter AC. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

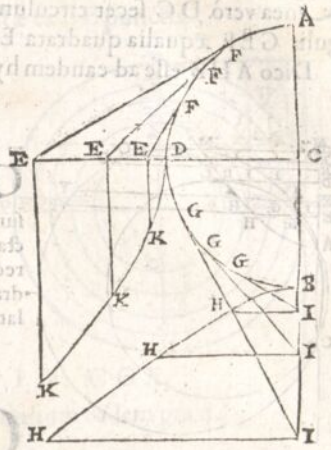
PROPOSITIO CCIV.

CIrculi ABC diametri sint AB, CD, sese decussantes ad angulos rectos. Fiant deinde contingentibus EF, IG ductis, (ex lineâ AB, & CD) productâ æquales lineæ EK, IH parallelæ diametris AB, CD.

Dico DK, BH sectiones esse coniugatas.

Demonstratio.

CVm enim DKK, BHH hyperbolæ ostensę sint prop. præc. habentes latera transuersa AB, CD, quæ æqualia sunt inter se; & præterea quadrata EK æqualia sint quadratis IH (si BI, & DE æquales assumantur) manifestum est eas esse sectiones coniugatas. Quod fuit demonstrandum.

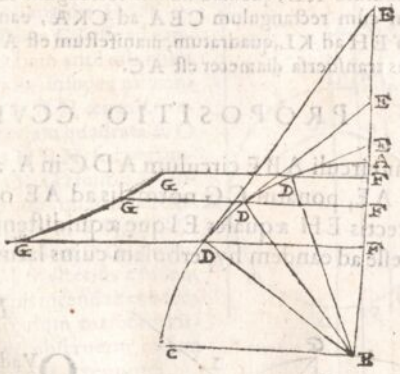


PROPOSITIO CCV.

QVadrantem circuli ABC contingant DE, ducantur autem per D D parallelæ BC, rectæ FDG, quæ sint æquales, BE.

Dico GG esse ad hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, BC.

Demonstratio.



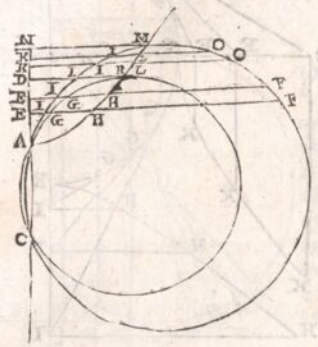
PEr centrum B ponantur BD. Quoniam contingentes sunt ED, & BD per centrum actæ, igitur angulus EDB rectus est, quemadmodum & angulus BFG. quare quadrato BD æquale est rectangulum FBE hoc est per hypothesim BFG. vnde æqualia sunt inter se rectangula BFG. constat igitur GG esse ad [a] hyperbolam, cuius asymptoti sunt AB, BC. Quod fuit demonstrandum. [a] Ex 46. huius.

PROPOSITIO CCVI.

CIrculum A B C contingat D B, cui ponantur æquidistantes E F. linea verò D C secet circulum in punctis A, C. fiant quoque rectangulis G E F æqualia quadrata E H.

Dico A H B esse ad eandem hyperbolam cuius latus transuersum A C.

Demonstratio.



a *Per elementa.*

QVoniam E H quadratis æqualia sunt rectangula G E F quadratis E H, æqualia quoque sunt rectangula A E C: (cùm A E C, G E F rectangula æquentur) quare vt A E C ad A E C, rectangulum, ita quadratum E H ad H E quadratum: igitur A H B sunt ad hyperbolam, cuius latus transuersum A C.

PROPOSITIO CCVII.

OPorteat autem hyperbolam A H B producere in infinitum.

Constructio & demonstratio.

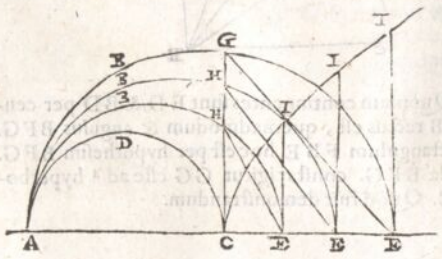
PEr puncta A C describatur circulus C A M cuiuscunque magnitudinis; & contingente posita N M quę æquidistet D B, ponantur prętereà K L parallelæ contingenti: denique fiant rectangulis O K I æqualia quadrata K L. Dico A H B L M esse ad eandem hyperbolam. est enim rectangulum A N C æquale quadrato N M, & A K C æquale quadrato K L, quemadmodum rectangulis A E C æqualia sunt quadrata D H: igitur cùm rectangulum C E A ad C K A, eandem habeat rationem quam quadratum E H ad K L, quadratum, manifestum est A H L M esse ad eandem hyperbolam cuius transuersa diameter est A C.

PROPOSITIO CCVIII.

COntingant circuli A B E circulum A D C in A. actâ verò communi diametro A E, ponatur C G normalis ad A E occurrens circulis in G H: & fiant rectis E H æquales E I quę æquidistent G C.

Dico C I I esse ad eandem hyperbolam cuius latus transuersum A C.

Demonstratio.



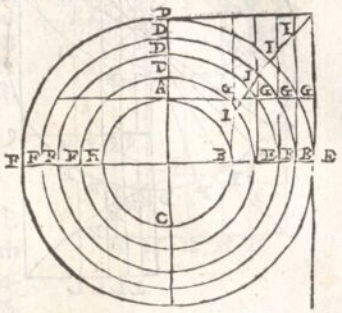
QVadratis E H æqualia sunt rectangula A E C; sed E H quadratis æquatur quadrata E I, quadratis igitur E I æqualia sunt rectangula A E C: quare C E A ad C E A rectangulum est vt quadratum E I ad E I quadratum: puncta igitur C I I ad hyperbolam sunt. Quod demonstrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO CCIX.

Circulo ABC ponantur concentrici DEF. contingat quoque AG circellum ABC occurrens reliquis circulis in GG. Fiant autem rectis AG æquales EI, orthogonaliter erectæ ex EE punctis.

Dico BII esse hyperbolam cuius diameter transuersa est BH.



Demonstratio.

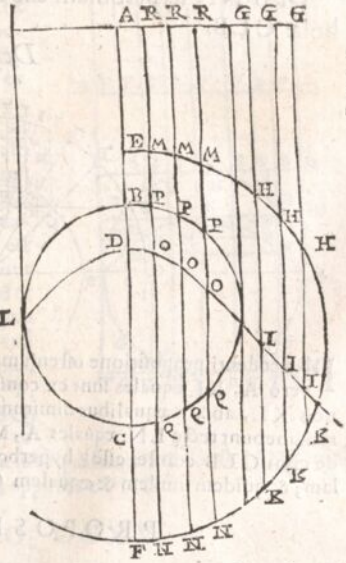
QVadratis AG æqualia sunt rectangula CDA, hoc est HEB. igitur etiam quadratis EI æqualia sunt rectangula HEB. quare rectangulum HEB ad HEB est, vt quadratum EI ad EI quadratum; patet igitur HB esse latus transuersum hyperbolæ BII. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCX.

EAndem hyperbolam producere in infinitum eadem praxi.

Constructio & demonstratio.

FIat rectangulo AB, AC, siue quadrato AD æquale rectangulum EAF cuius latus AE minus sit latere AB. deinde describatur [a] circulus cuius diameter sit EF, & ductæ sint RMN, erunt rectangula MRN æqualia rectãgulis PRQ. ductis itaq; GHK parallelis AF, fiant rectangulis HGK æqualia quadrata GG. Dico GI esse ad eandem hyperbolam IOD. nam antè ostensum est esse II ad hyperbolam. insuper ex constructione sunt rectangula MRN æqualia rectangulis PRQ, igitur etiam quadrata RO æqualia sunt rectangulis MRN, sed per præcedentem quadrata RO, GI sunt ad eandem hyperbolam, ex eo quod quadrata RO, GI sint æqualia rectangulis MRN, HGK; igitur produximus hyperbolam DOO, quod requisitum fuerat. quod si vlteriùs eandem hyperbolam extẽdere quis intendat, eandem praxim extendat ad circulum maiorem circulo EHF, ita tamen vt obseruetur eadem conditio, quam hæc propositio requirit.



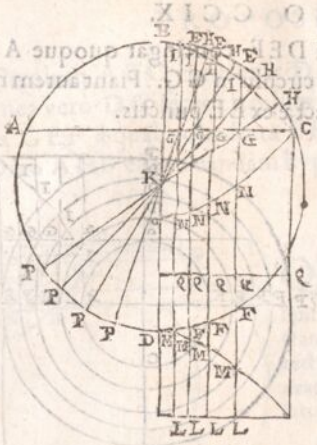
[a] Ex Pappo lib 7. prop. 159. & ex præcedenti huius.

PROPOSITIO CCXI.

CIrculum ABC cuius diameter BD secet quæuis AC orthogona ad BD, & ponantur EF quæ æquidistent BD, occurrentes AC in punctis GG, tum per centrum K & puncta G, agantur K, PH, rectis autem K, GH, fiant æquales GI.

Dico BIC esse ad hyperbolam.

Demonſtratio.



FIant GL æquales BD, & LM æquales GI. ſimiliter ipſis ML æquales GN. ducatur præterea QQ, parallela LL, quæ rectas GL bifariam diuidat. quoniam GQ æquales ſunt dimidijs GL id eſt BD, ſiue PH, erunt GQ æquales KB, ſunt autem GN, vel ML æquales K, GH, hoc eſt GI: igitur KG reliquæ æquales ſunt rectis QN. oſtenſum verò eſt [a] ONC eſſe hyperbolam, igitur & DMM eſt hyperbola, ac proinde etiam BIC, eſt enim rectangulum NGM ad NGM rectangulum hoc eſt rectangulum PGE, ad PGE, vt rectangulum AGC ad AGC rectangulum.

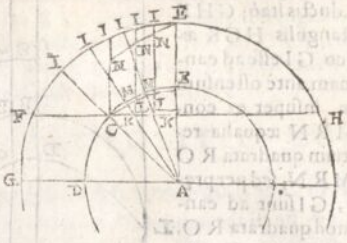
a 196. huius.

PROPOSITIO CCXII.

SIt A centrum circulorum parallelorum BCD, EFG, quos ſecet recta FH orthogona ipſi diametro communi AE. diametri autem AI occurrant FH in KK, & circulis in II, MM: tandem fiant rectis A, KM æquales KL: & lineis A, KI æquales KN quæ diametro AE æquidiſtent.

Dico NN hyperbolam eſſe & quidem parallelam ac æqualem hyperbolæ CLB.

Demonſtratio.



PRæcedenti propoſitione oſtenſum eſt CLB eſſe ad eandem hyperbolam. quia verò A, KI æquales ſunt ex conſtructione rectis KN, & A, KM æquales lineis KL, ablatis æqualibus nimirum KL, à rectis KN, & A, KM, à rectis A, KI remanebunt rectę LN æquales A, MI, ac proinde LN lineæ æquales inter ſe. vnde cùm CLB conſtet eſſe [b] hyperbolam, conſtat quoque NNE eſſe hyperbolam; & quidem ſimilem & æqualem CLB. Quod fuit demonſtrandum.

b 211. huius.

PROPOSITIO CCXIII.

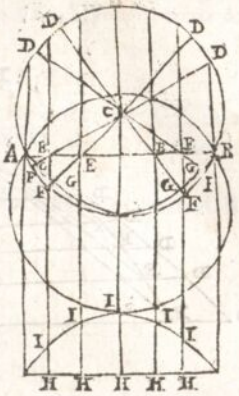
SEcent inuicem æquales circuli in punctis AB: ductamq; AB ſecent diametri DCF in EE: & per EE ponantur æquidiſtantes HE orthogonæ ad AB. fiant denique rectis C, EF æquales EG, & EH æquales diametro DCF: rectis quoque EG, fiant æquales HI.

Dico GG, II eſſe hyperbolas oppoſitas.

Demon-

Demonſtratio.

OStenſum eſt propoſitione 202. huius GG, II eſſe hyperbolas, reſtat igitur vt oſtendamus illas oppoſitas eſſe ſectiones; quoniam EF lineis æquales ponuntur EG vel HI, & DCF æquales EH, rectangula GEI æqualia ſunt rectangulis FED, id eſt AEB; igitur vt AEB ad AEB rectangulum, ita eſt rectangulum GEI ad GEI rectangulum; oppoſitæ igitur ſunt [a] ſectiones GG, II, cùm ſint AEB, & HH rectæ lineæ.



a *Ex conuerſa 36. huius.*

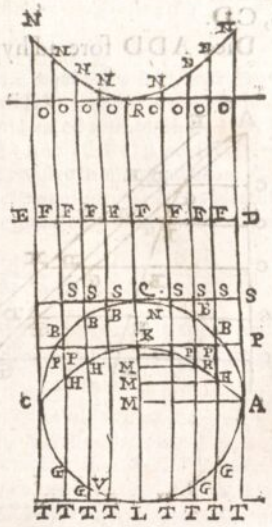
PROPOSITIO CCXIV.

CIrculum ABC contingant AD, CE æquales & parallelæ; coniuncta autem DE diuidatur in FF punctis; per quæ ponantur FG, quę æquidiſtent AD. fiantq; rectangulis BFG æqualia quadrata FH.

Dico HH eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

PRoductis GF, fiant FN æquales FH: & ponantur PN & OR, æquidiſtantes DE, intelligatur inſuper duci quęcunque FKV occurrens circulo in V & Z: quoniam igitur IQ, IK, IL, proportionales ſunt & angulus FIK ex hypotheſi rectus, lineæ FZ, FK, FV [b] proportionales ſunt, vnde ZFV rectangulum, id eſt BFG, æquale eſt quadrato FK id eſt quadrato IK vel FP, id eſt rectangulo SFT vnà cum quadrato FI id eſt SQ, id eſt rectangulo BSG: rectangula igitur BFG id eſt ex hypotheſi, quadrata FH, maiora ſunt rectangulis SFT id eſt quadratis FP: igitur FH quadrata æqualia ſunt quadratis FP vnà cum rectangulis NPH: ſed & FH quadrata, id eſt per hypotheſim rectangula BFG, æqualia oſtenſa ſunt rectangulis SFT vnà cum rectangulis BSG, ablatis igitur æqualibus, nimirum quadratis FP, & rectangulis SFT, manent BSG rectangula, id eſt quadrata SQ, vel PK, æqualia reliquis NPH rectangulis: rectangula igitur NPH id eſt RMK, æqualia ſunt quadratis PK id eſt HM, quare puncta HH ad [c] hyperbolam ſunt, cuius [d] oppoſita eſt NN.



b *Pappus lib. 7. prop. 159.*

c *Ex 60. huius.*
d *36. huius.*

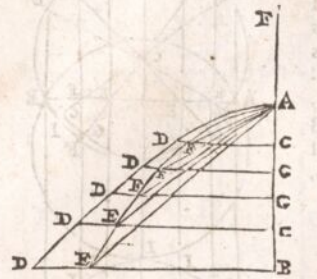
PROPOSITIO CCXV.

SIt AB axis parabolæ AEE, ad quem ordinatim ponantur E; CD æquales rectis AE.

Dico ADD eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter AB; & latus tranſuerſum lateri recto parabolæ datæ æquale.

Demon-

Demonſtratio.



a Ex 8. De parabola.

b 1. huius.

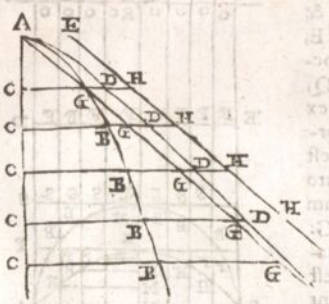
QVoniam CD æquales ſunt rectis AE, quadratum DC æquale eſt quadratis AC, CE. Fiat igitur recta AF, æqualis recto lateri parabolæ AEE; erit itaque [a] rectangulũ FAC æquale quadrato CE. igitur rectangulũ FCA, æquale eſt quadrato AC, vnà cum rectangulo FAC hoc eſt quadrato CE. vnde FCA rectangulo æquale eſt quadratum AE, hoc eſt CD quadratum. Igitur rectangulum FCA, ad FCA rectangulum, eandem obtinet rationem, quam quadratum CD ad CD quadratum. Ergo ADD eſt [b] hyperbola cuius diameter eſt AB. latus tranſuerſum verò AE. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXVI.

LIbet id ipſum aliter demonſtrare. ſit parabolæ ABB axis AC, & ordinatim poſitæ ad eandem CB: fiant verò rectis AB æquales lineæ B, CD.

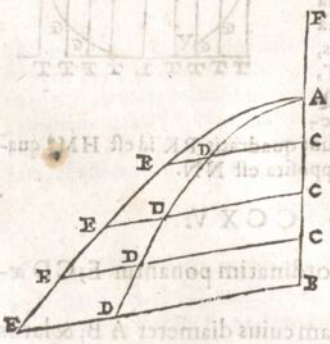
Dico ADD fore ad hyperbolam cuius axis ACC.

Demonſtratio.



SIt AE, lateri recto parabolæ ABB æqualis, & parallela CB; ducaturq; AG quæ rectum angulum EAC bifariam partiatur, cui æquidiſtet recta EH ducta per E. Erit itaque rectangulum CAE æquale CB quadrato, hoc eſt erit quadrato CB æquale rectangulum CGH, cum GC & CA, item AE, GH æquales ſint; & conſequenter rectangulo GCH æquale quadratum CD, cùm illud æquale poſitum ſit quadrato AB, hoc eſt quadratis CB & CA hoc eſt CG. igitur cùm ſit GCH rectãgulum ad GCH rectangulum, vt quadratum CD ad CD quadratum, patet ADD hyperbolam eſſe, & rectas CD ordinatim eſſe poſitas ad axem AC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXVII.



c 8. De parabola.

SIt AB diameter ſecundaria parabolę ad quam ordinatim ponantur CD, quadratis autem AC, CD fiant æqualia quadrata CE.

Dico AEE eſſe hyperbolam, cuius latus tranſuerſum ſit latus rectum diametri AB in parabola.

Demonſtratio.

FIat AF æquale lateri recto diametri AB in parabola ADD. erit itaque quadratũ [c] DC æquale FAC rectangulo, & conſequenter rectangulũ FCA æquale quadratis AC, CD.

hoc

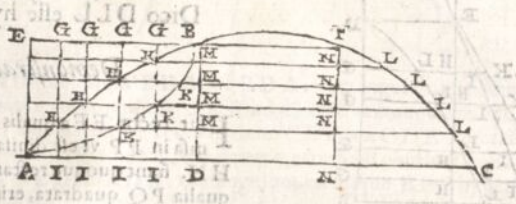
hoc est quadrato CE. ergo cùm sit rectangulum FCA ad FCA, rectangulum vt quadratum CE ad CE, quadratum, manifestum est AEE hyperbolam esse & AF latus eius transuersum. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CCXVIII.

SIt parabola ABC quam secet quædam EF: ductisque GK quæ æquidistent diametro BD, fiat vt GH ad GH, ita GK quadratum ad quadratum GK.

Dico KK esse ad eandem hyperbolam cuius latus transuersum BF.

Demonstratio.



DVcantur HL quę æquidistent BF, & FN quæ æquidistet BD. erit itaque HML ad HML rectangulum, [a] vt linea BM ad BM lineam, est autem lineę BM æqualis GH. Igitur vt est GH ad GH lineam, ita est rectangulum HML, ad HML. hoc est rectangulum NHM ad NHM, hoc est FGB ad FGB rectangulum: sed vt GH ad GH lineam, ita est ex constructione quadratum GK ad GK, quadratum; igitur vt est FGB, ad FGB rectangulum, ita est quadratum GK, ad GK quadratum. Quocirca BKK est hyperbola cuius latus transuersum est BF. ex 1. huius. Quod fuit demonstrandum.

[a] 47. De parabola.

PROPOSITIO CCXIX.

DAtâ parabolâ ABB, cuius axis AC & ad eundem constitutæ ordinatim BC, ponatur quæuis AD, & quadratis BC, CD, fiant æqualia quadrata CE.

Dico AEE esse ad eandem hyperbolam.

Demonstratio.



FIat rectangulum DCF æquale quadrato CB. igitur quoniam quadratum CB ad CB quadratum, eam obtinet rationem, quã [b] linea AC ad AC, estque AC ad AC, vt CD ad CD, igitur CF æquales sunt inter se, & FF puncta in directum: posita deinde recta GG quæ æquidistet AD, erit GF æquales rectis DC, ac proinde rectangulum DCG, æquale quadratis CD, CB: id est ex hypothesi quadratis CE. ergo vt rectangulum DCG ad DCG, ita quadratum CE ad CE, quadratum. vnde liquet [c] AEE esse ad hyperbolã cuius axis AC ad quem ordinatim positæ sunt CE. Quod fuit demonstrandum.

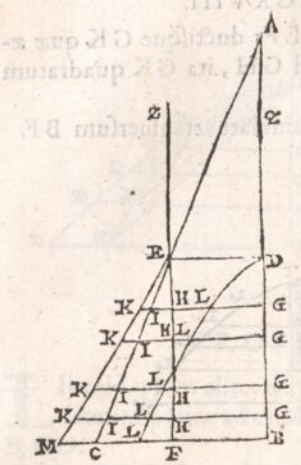
[b] 1. De parabola.

[c] 192. huius.

PROPOSITIO CCXX.

VErùm præcedentem propoſitionẽ vniuerſalius placet proponere. Triangulo A B C inſcribatur quodlibet parallelogrammum D E F. Deinde ponatur quæuis recta linea ex puncto E, ſcilicet E M, & ductis G K quæ æquidiſtent B F, fiat rectangulis G H I vnà cum quadrato, I K æquale quadratum G L.

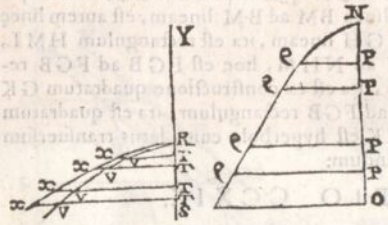
Dico D L L eſſe hyperbolam.



Demonſtratio.

Fiat rectæ E F æqualis N O quę ſit diuiſa in P P vt eſt diuiſa E F in punctis H H. fiant quoque rectangulis G H I æqualia P Q quadrata, erit N O Q [a] parabola: aſſumptâ denique rectâ R S quæ æqualis ſit C M, diuidatur R S in T T, vt eſt diuiſa E F vel N O in punctis P P, erunt rectis I K æquales rectæ R T, cum ſit F E ad E H, vt C M ad S K; ſed vt F E ad E H, ita eſt ex conſtr. S R ad R T, igitur S R eſt ad R T, vt C M ad I K; æquales igitur ſunt R T & I K, cùm S R, C M æquales poſitæ ſint, itaque rectis P Q, fiant æquales T V, etiam R T V parabola erit, [b] cùm ſit R T ad R T, vt N P ad N P. tandem ſi fiant rectis R V æquales V T X, [c] erit R X X hyperbola.

a 294. De parabola.



b Ibid. & ex 1. de parabola.

igitur rectangulum G H I hoc eſt quadratum T V vnà cum quadrato I K, hoc eſt R T producet hyperbolam, ſit itaque recta Y R latus tranſuerſum hyperbolę R X X, & fiat vt R S ad R Y, ita E F ad E Z. Dico rectas G L æquales rectis T X cùm earum quadrata æqualia ſint, etiam eſſe ad hyperbolam cuius diameter D B, eſſeque G L, G L ordinatim ad D B poſitas. Erit enim vt Y T R rectangulum ad rectangulum Y T R hoc eſt vt quadratum X T ad quadratum X T, hoc eſt vt quadratum G L ad G L, ita rectangulum Z H E ad rectangulum Z H E, hoc eſt, ſi intelligatur D α linea æqualis lineæ, Z E, rectangulum α G D, ad rectangulum α G D. itaq; D L L [d] eſt hyperbola, & linea G L ordinatim applicata ad D G. Hinc quadrata æqualia rectangulis G H I, & quibuſcumque quadratis I K producent hyperbolam, modò quadrata I K inter duas lineas C E, M E quemcumque angulum continentia parallela ſint poſita. Quod vniuerſaliter placuit demonſtrare.

c 215. huius.

d 7. huius.

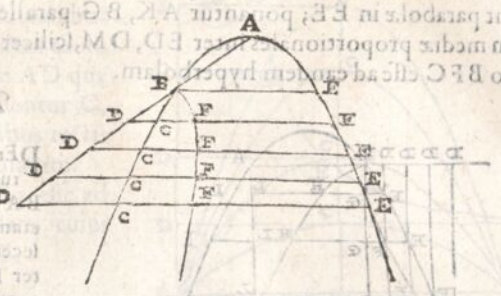
PROPOSITIO CCXXI.

PArabolam A B C ſecet quædam recta A B, ductis deinde parallelis C E fiant rectangulis C D E æqualia quadrata D F.

Dico B F F eſſe ad eandem hyperbolam cuius A D B diameter eſt.

Demon-

Demonſtratio.



OStenſum eſt rectangulum BDA ad BDA, rectangulum eandem habere rationem, quam rectangulum CDE ad CDE rectangulum: ſed quadratum DF eſt ad DF, quadratum vt rectangulum CDE ad CDE, rectangulum; igitur etiam quadratum DF ad DF, quadratum rationem continet eandem cum ratione rectanguli ADB ad ADB, rectangulum, eſt itaque BFF hyperbola. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXII.

PONatur AB, axis parabolæ DAE ad quem ordinatim poſitis CF, ex puncto quouis axeos G, fiant rectis GF, æquales F, HI, & F, HK. Dico KK, II eſſe hyperbolas oppoſitas.

Demonſtratio.



PONatur ex G quæuis GC, occurrens AL contingenti in L, & IK lineis in N: ducta autem per G, linea DE parallela CF, ponantur per D & E, lineæ DO, EP contingentes parabolam: quoniam igitur GC vel GF quadratis, æqualia ſunt quadrata KH, vel HI; ſint autem HK quadratis æqualia quadrata CH, vnà cum rectangulis KCI; quadratis verò GC æqualia ſint quadrata CH, HG: demptis communibus quadratis CH, æqualia remanent rectangula KCI, quadratis HG: igitur vt HG quadratum ad quadratum HG, id eſt OD quadratum ad quadratum OD, ſic KCI, rectangulum ad rectangulum KCI. quia verò OD, EP contingunt parabolam, vt OD [a] quadratum ad quadratum OD, ſic OCP rectangulum eſt ad rectangulum OCP, reliquum igitur KOI rectangulum ad KOI, eſt vt quadratum OD, ad quadratum OD. quare [b] oppoſitæ ſectiones ſunt KK, II.

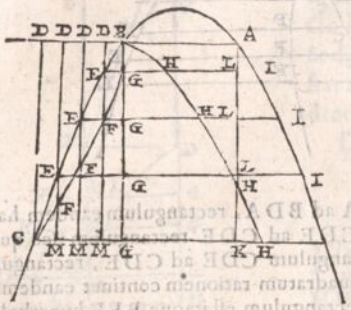
[a] 87. *De parabola.*
[b] Ex 34. *huius.*

PROPOSITIO CCXXIII.

PArabolam ABC ſecet AB, & poſitis DM axi parallelis quæ occurrant parabolæ in EE; ponantur AK, BG parallelæ diametris. fiant tandem mediæ proportionales inter ED, DM, ſcilicet DF.

Dico BFC eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



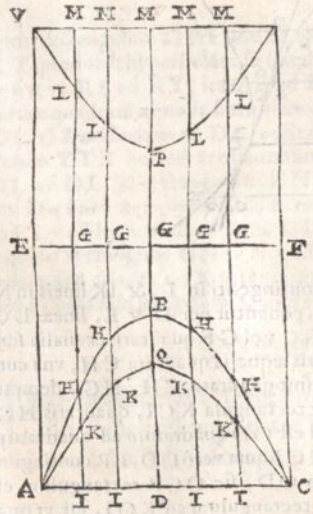
PEr puncta EE ducantur parallelæ EI ipſi BA, quæ lineam BG ductam ex B parallelam axi ſecent in G, G. fiantq; inter IG, GE mediæ proportionales HG. erit hæc parabola prout lib. de parabola 275. demonſtratũ eſt; igitur vt quadratum GH ad GH, quadratum, ita eſt BG linea ad lineam BG. ſed quadrato HG æquale eſt IGE rectangulum, hoc eſt LEG, hoc eſt ADB: igitur vt ADB rectangulum ad rectangulum ADB, ita eſt BG linea ad lineam BG. hoc eſt DE recta ad rectam DE: ſed vt DE ad DE, ita rectangulum EDM ad EDM rectangulum; igitur BDA rectangulum eſt ad rectangulum BDA, vt eſt EDM rectangulum ad rectangulum EDM. eſt autem EDM rectangulo æquale quadratum DF, ex ipſa conſtructione; igitur vt BDA ad BDA, rectangulum, ita eſt quadratum DF ad DF quadratum. Quare liquet BFC eſſe hyperbolam cuius diameter AB eſt tranſuerſa. Quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXXIV.

SIt parabolę ABC axis BD ad quem ordinatim ſit conſtituta AC, cui ſit æquidiſtans EF, ductiſque GI parallelis ad axem, fiant rectangulis HGI æqualia quadrata GK.

Dico KK eſſe ad eandem hyperbolã.

Demonſtratio.



FIant GK lineis æquales GL, & AE æqualis EV; ponaturq́ue VM æquidiſtans AC. Quoniam rectangulis HGI æqualia ſunt quadrata GK, hoc eſt rectangula LGK, & quadratum GI, æquatur [a] rectangulis HGI & GIH ſimul ſumptis; & idem quadratum GI hoc eſt rectangula MGI æquentur quadratis GK, & rectangulis MKI id eſt MLI, igitur rectangula MLI, hoc eſt LIK, æqualia ſunt rectangulis GIH. eſt autem HI, linea ad lineam HI, vt [b] rectangulum AIC ad AIC, rectangulum, igitur etiam MKI rectangulum eſt ad rectangulum MKI vt AIC, rectangulum ad rectangulum AIC; puncta [c] ergo KK ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Per elementa.*

[b] *47. De parabola.*

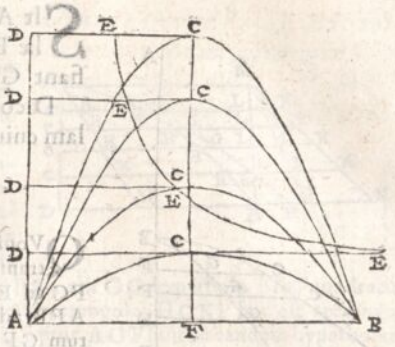
[c] *Ex converſa 36. huius.*

PRO-

PROPOSITIO CCXXV.

SVper rectâ AB constituantur quotuis parabolæ ACB, ad eundem axem CF: erectâ deinde AD quę æquidistet CF ponantur C, DE æquales lateribus rectis singularum parabolarum.

Dico EE puncta esse ad eandem hyperbolam cuius asymptoti AD, AB.



Demonstratio.

REctangulum enim CF, DE, æquale est semper eidem [a] quadrato AF, vnde omnia rectangula ADE inter se sunt æqualia. quare EE puncta sunt ad eandem [b] hyperbolam, cuius asymptoti sunt AD, AB. Quod fuit demonstrandum.

[a] 8. Depar. bola.
[b] Ex conuersa 462 huius.

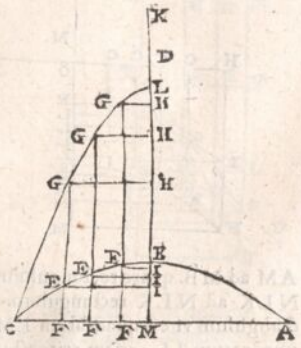
PROPOSITIO CCXXVI.

HYperbolæ ABC sit diameter transuersa BD ductaq; AC ordinatim ad DB, sint illis parallelę FE. Fiant autem FG ad FG, vt sunt FE ad FE.

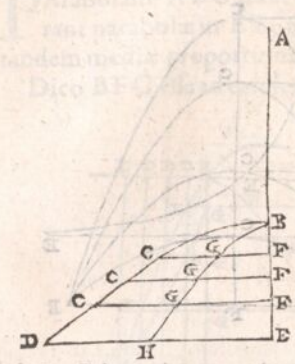
Dico GG esse ad eandem hyperbolam.

Demonstratio.

FIat vt EF ad FG, ita BD diameter transuersa hyperbolę ABC ad LK. & ponantur EI, & GH quæ æquidistent AC. quoniam EF ad FE eam rationem habent quam MB ad ML, erit quoque MI ad MB, vt MH ad ML. ac proinde vt MI ad IB, ita MH ad HL. & consequenter vt MI ad MH, ita IB ad HL. sed MI est ad MH hoc est FE ad FG, vt BD ad LK, ex constructione igitur vt IB ad HL, ita est BD ad LK. ergo rectangulum DIB est ad rectangulum DIB, vt est rectangulum KHL ad KHL, rectangulum. nam rectangulum BID ad BID, rectangulum habet rationem compositam ex ratione BI ad BI, hoc est LH ad LH; & ex ratione DI ad DI, hoc est KH ad KH. est autem quadratum IE, ad IE quadratum vt rectangulum DIB ad DIB rectangulum, quoniam supponitur DB transuersa diameter hyperbolæ ABC: igitur etiam rectangulum KHL ad KHL, rectangulum est vt quadratum IE ad IE, quadratum, hoc est quadratum HL ad HL, quocirca LGG, est hyperbola. Quod fuit demonstrandum.



PROPOSITIO CCXXVII.



SIt AB diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD: ductiſque ordinatim CF, fiant GF ad FG, vt CF ad FC.

Dico BGG eſſe ad eandem hyperbolam cuius tranſuerſum latus eſt AB.

Demonſtratio.

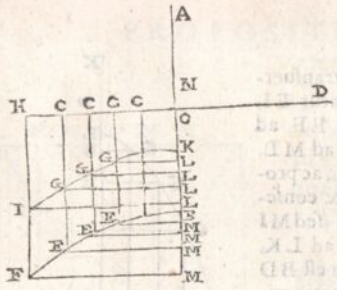
QVoniam ex ſuppoſitione AB eſt diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD, igitur vt eſt FC ad ED, quadratum, ita eſt rectangulum AFB, ad AEB rectangulum. ergo vt quadratum GF ad HE quadratum, ita quoque eſt AFB rectangulum ad rectangulum AEB. igitur BGH hyperbola eſt cuius latus tranſuerſum eſt AB. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXXVIII.

SInt AB, CD diametri coniugatæ hyperbolæ BEF & diametro AB fiant æquidiſtantes CE. Deinde fiat vt CE ad HF, ita CG ad HI.

Dico IGG eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



FIat rectæ OK æqualis ON: & ponantur GL, IL parallelæ CD, quemadmodum etiam EM & FM. quoniam BEF ponitur hyperbola cuius tranſuerſa diameter AB, erit AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM quadratum, hoc eſt vt quadratum GL ad IL quadratum. eſt autem CE ad OB, vt CG ad OK; igitur eſt OL ad OK, vt OM ad OB: & OK ad KL, vt OB ad BM; & NK ad KL, vt AB ad BM; denique & NL ad LK, vt AM ad MB. quare rectangulum AMB ad AMB, rectangulum eſt vt rectangulum NLK ad NLK rectangulum. quare cùm ſit rectangulum AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM, quadratum, hoc eſt GL quadratum ad quadratum IL, etiam erit rectangulum NLK ad NLK, rectangulum vt quadratum GL ad IL quadratum. igitur manifeſtum eſt KGI eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt NK. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXIX.

SIt hyperbola ABB, cuius axis AD: ductiſq; ad eandem ordinatim rectis BC, fiant lineis AB æquales lineæ B, CG.
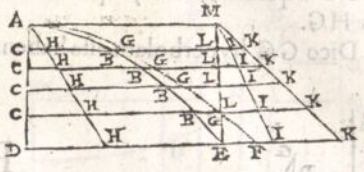
Dico AGF eſſe ad eandem hyperbolam cuius axis eſt AD.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [707] - 650
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

DVcatur linea A H ſecãs lineam B C, ſic vt H C, C A ſint æquales; & fiant tres quantitates in continua analogia C H, C B, C I: erit I I linea recta per conuerſam propoſit. 75. huius. Fiant præterea rectis C H æquales I K: erunt igitur rectangula H C K æqualia quadratis C G. igitur A G G eſt hyperbola, quod ita patebit. ponatur M L æquidiſtans A D. Igitur per 192. huius ſi fiant quadrata C G æqualia rectangulo H C L, vnà cum rectangulo H C L K, erit G G hyperbola: ſed quadratum H C vnà cum quadrato C B, æquale eſt rectangulo H C K; hoc eſt rectangulo H C I. vnà cum quadrato K I, vel H C. igitur A G F ſunt ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.



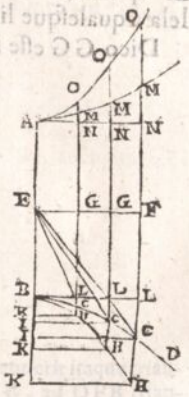
PROPOSITIO CCXXX.

SIt A B axis hyperbolæ B C D, cuius E centrum, & axis coniugatus F E, è centro verò E ductis diametris E C ponantur C, G H, æquales E C, & axi parallelæ.

Dico B H H fore hyperbolam.

Demonſtratio.

POnãtur ordinatim C I & H K. quoniam B C D hyperbola eſt erit A I B ad A I B, rectangulum vt quadratum C I ad C I quadratum. poſita itaque B L; quæ æquidiſtet E F, & hyperbola oppoſita A M M; erit rectangulum M L C ad M L C, vt quadratum L B ad L B, hoc eſt C I ad C I, quadratum. Sed quadratum E C æquale eſt quadratis E I & C I, hoc eſt quadrato E B & rectangulo A I B, vnà cum quadrato C I: eſt autem quadratum G H illis ipſis æquale; igitur ablato communi quadrato G L remanet L H N, æquale rectangulo A I B vnà cum quadrato C I. erit ergo rectangulum H C O æquale quadrato C I, quoniam rectangulo A I B æquatur M N C rectangulum. quia verò eſt vt C I quadratum ad C I quadratum, ita rectangulum A I B ad A I B, hoc eſt M N C ad M N C, erit quoque rectangulum O M H ad O M H, vt rectangulum M N C ad M N C, rectangulum; ergo etiam rectangulum O N H ad O N H, hoc eſt A K B ad A K B, eandem rationem habet quam quadratum C I ad C I, hoc eſt H K ad H K, quadratum. patet igitur B H H eſſe ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.



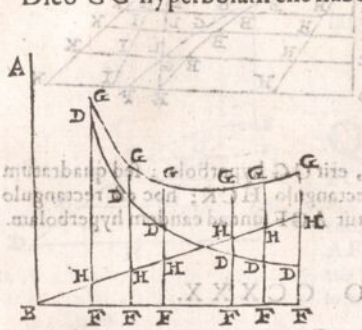
a 7. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCXXXI.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD. ductâ verò BH, ponantur FG æquidiſtantes aſymptoto AB: fiant præterea rectis FD æquales HG.

Dico GG hyperbolam eſſe habentem AB, BH aſymptotos.



Demonſtratio.

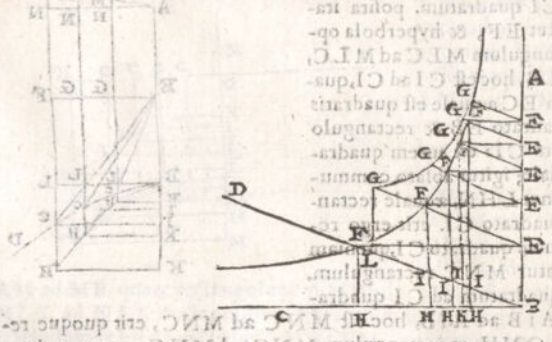
PAtet demonſtratio ex eo quod quemadmodum omnia parallelogramma BFD ſunt inter ſe æqualia, ſic quoque æquantur inter ſe parallelogramma BHG. Igitur cùm ex eo ſit DD hyperbola habens aſymptotos AB, BC, etiam eadem de cauſa GG hyperbola futura [a] eſt habens aſymptotos AB, BH. Quod fuit demonſtrandum.

a Ex converſa 46. huius.

PROPOSITIO CCXXXII.

POnantur AB, BC aſymptoti hyperbolæ FF & aſymptoto BC æquidiſtent EF. Ducta verò quauis diametro BD, fiant EG illi parallelæ æqualeſque lineis EF.

Dico GG eſſe hyperbolam cuius aſymptoti AB, BD.



Demonſtratio.

DVctis etenim parallelis AB aſymptoto rectis FH & GI, erunt omnia parallelogramma EFH, æqualia [b] inter ſe; quemadmodum etiam parallelogramma EGI, igitur GG hyperbola eſt inter aſymptotos [c] AB, BD conſtituta. Quod fuit demonſtrandum.

b 46. huius.
c Ex converſa eiuſdem.

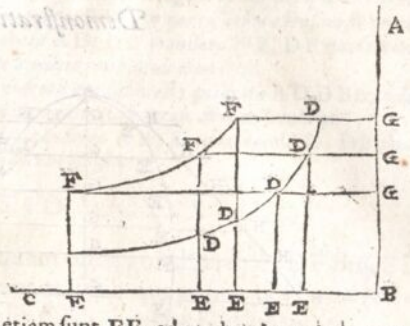
PROPOSITIO CCXXXIII.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD; poſitiſq; DE parallelis aſymptoto AB, fiant FE ad FE, in eadem ratione cum rectis DE ad DE.

Dico

Dico FF esse ad hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, BC.

Demonstratio.



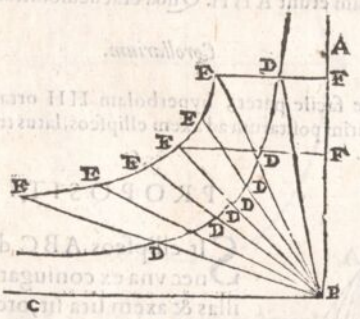
QVoniam DD hyperbola asymptotos habet rectas AB, BC; & rectæ DE asymptoto AB æquidistant, igitur parallelogramma GDE æqualia sunt inter se sunt autem parallelogramma GFE similiter inter se æqualia cùm sint composita ex ijsdem rationibus ex quibus parallelogramma GDE sunt composita, igitur etiam sunt FF a ad eandem hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, BC. Quod fuit demonstrandum.

a Ex 48. huius.

PROPOSITIO CCXXXIV.

SInt AB, BC denuo asymptoti hyperbolæ DD: ductis insuper diametris BD fiant BE ad BE, in eadem ratione cum lineis BD ad BD. Dico EE esse ad eandem hyperbolam cuius asymptoti sunt AB, BC.

Demonstratio.



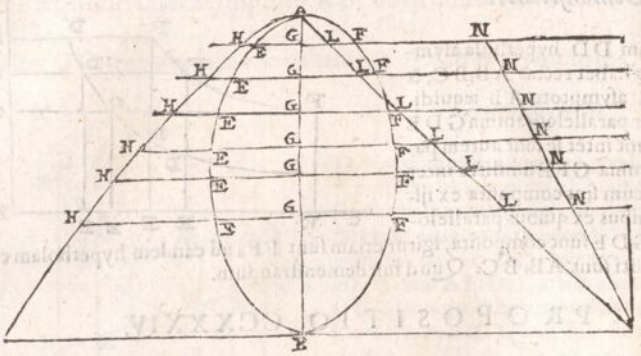
POnantur enim lineæ EF, DF quæ asymptoto BC æquidistent: erit itaque triangulum EFB ad EFB, triangulum vt est triangulum DFB, ad DFB triangulum, cùm sint figuræ similes, ac proinde in duplicata ratione laterum homologorum. Igitur patet etiam EE esse b hyperbolam quæ asymptotos AB, BC communes habet cum hyperbola DD. Quod fuit demonstrandum.

b Ex eadem.

PROPOSITIO CCXXXV.

SInt ellipseos extremæ diametri AB maior, minor CD, positis autem EF ordinatim ad axem AB, fiant rectis AE, æquales F, GH. Dico AHH esse hyperbolam cuius diameter AB.

Demonſtratio.



a Ex 150. de ellipſi.

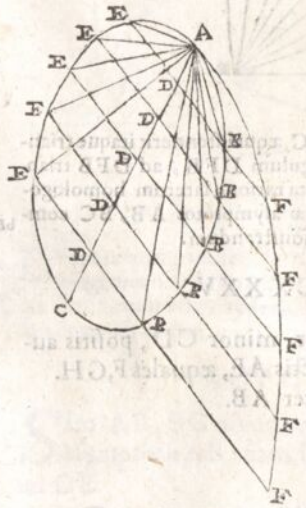
b Ex 192. huius.

Eſt ipſi AB æqualis BL, ductaque AL lineas GN ſecans in punctis L, fiant quadratis GF æqualia rectangula GLN, erunt NNL in [a] recta lineâ; igitur cùm rectangula NLG, æqualia ſint quadratis GF, addito quadrato AG, hoc eſt GL totum rectangulum NGL, æquale erit quadratis AG, GF, hoc eſt quadrato AF, hoc eſt GH quadrato. Igitur cùm GH media proportionalis ſit inter NG, & GL, ad [b] hyperbolam erunt AHH. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX conſtructione facile patet, hyperbolam HH ortam ex translatione linearum AE, ordinatim poſitarum ad axem ellipſeos, latus tranſuerſum habere æquale axi ellipſeos AB.

PROPOSITIO CCXXXVI.



SIt ellipſeos ABC diameter AC non axis nec vna ex coniugatis æqualibus; ſed intra illas & axem ſita ſit, ordinatim autẽ ad illam poſitis BE fiant quadratis rectarum AE, AB ſimul ſumptis æqualia quadrata DF.

Dico AFF fore ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

SVnt enim quadrata rectarum AE, AB ſimul ſumpta æqualia quadratis AD, BD bis ſumptis, ſed AD, DB quadrata, tranſlata in quadrata DF, producunt hyperbolam, vti ex præcedenti conſtat; igitur AFF ad hyperbolam ſunt. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

PRimò aſſumpſi in propoſitione, AC *diametrum quæ inter axem maiorem & diametros coniugatas æquales ſita eſt: quia tunc quadrata ordinatim poſitarum, puta*

ta BD *minora sunt rectangulis* ADC; *adeoq; illa reduci possunt ad ellipsim quæ axem habet æqualem* AC, *& ordinatim ad illarum positas* BD: *in quo casu cùm ostensum sit propositi precedenti, quadratum* AB, *siue quadrata* AD, DB *translata in* B, DF *quadratum, producere hyperbolam; patet idem quoque accidere in obliquis diametris.*

Secundò dum AC *vna è diametris coniugatis æqualibus est; quadrata* AD, DB *translata in* B, DF *quadrata, producunt parabolam, vti* 333. *de parab. demonstrauimus.*

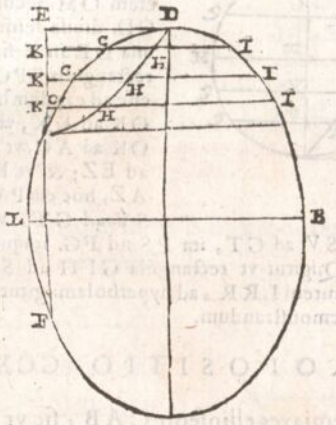
Tertiò si AC *verò axis minor fuerit, quadrata* AB, *siue quadrata* AD, DB *simul sumpta & translata in* DF *quadrata producunt ellipsim.*

PROPOSITIO CCXXXVII.

SIt AB axis ellipseos ACB: quem orthogonaliter secet EF sitq; ED ellipsim contingens æquidistans axi: denique positis KH quæ rectæ AB sint parallelę, fiant rectangulis CKI æqualia KH quadrata.

Dico HHD esse ad eandem hyperbolam cuius axis FE.

Demonstratio.



ESt enim rectangulum FEL ad FKL, sicut[a] rectangulum DED ad CKI rectangulum; igitur quadratum ED ad KH, eam habent rationem quam rectangulum FEL & FKL, igitur LHD est hyperbola cuius latus transuersum LF. Quod fuit demonstrandum.

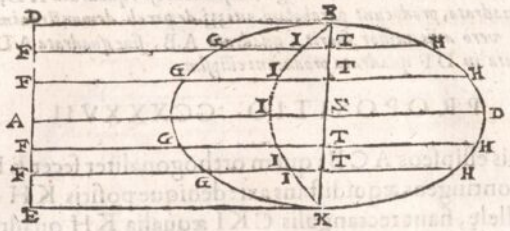
[a] 99. de ellips.

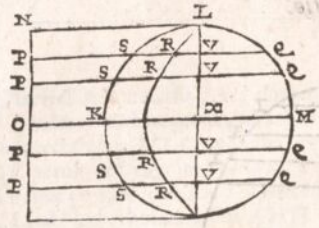
PROPOSITIO CCXXXVIII.

COntingat ellipsim recta AB axi CD parallela, quam orthogonaliter secet AE: fiant autem rectangulis GFH, æqualia quadrata FI.

Dico BII esse ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



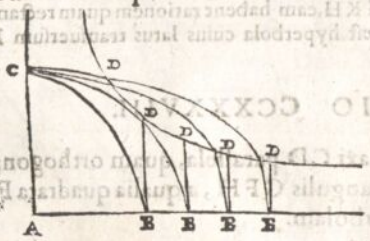


PONatur quicunque circulus KLM quem contingat NL & recta NO normalis ad OM parallelam NL, diſpeſcat rectam OM ſecundùm rationem AC ad CD. diuiſa deinde NO in PP, vt eſt diuiſa DE in F fiant quadrata PR æqualia rectangulis SPQ, oſtendimus puncta LRR eſſe ad eandem hyperbolam. quia verò eſt OK ad KX, vt AC ad CZ, erit quoque OK ad AC, vt KX ad CZ, hoc eſt OX ad EZ; & vt KX ad CZ, ita OX ad AZ, hoc eſt PV ad FT, ita quoque eſt SV ad GT, vt demonſtratum eſt libro

a 214. huius. de ellipſi. Igitur vt SV ad GT, ita PS ad FG. itaque rectangula GFH ſimilia rectangulis SPQ; igitur vt rectangula GFH ad SPQ, ita quadrata FI ad PR quadrata, ſunt autem LRR a ad hyperbolam: igitur etiam BII ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXXIX.

SInt AB, AC ſemiaxes ellipſeon CAB; ſic vt AB prima æqualis ſit AC, & ex B rectæ erigantur BD, parallelæ AC, æquales autem lateribus rectis ellipſeon.



Dico puncta DD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AC, AB.

Demonſtratio.

QVoniam BD, lateribus rectis ellipſeon æquales ſunt, rectangula ABD ſingula æqualia ſunt b quadraro AC adeoque & inter ſe. vnde puncta DD ad hyperbolam ſunt, cuius aſymptoti AC, AB.

b 11. De ellipſi.

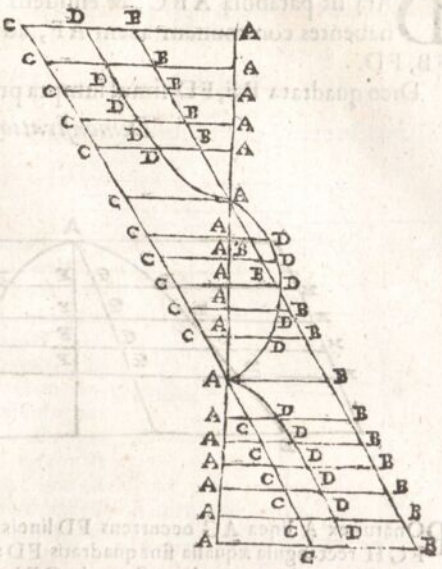
PRO-

PROPOSITIO CCXL.

PRopositum sit vna eademque praxi tres coni sectiones describere.

Constructio & demonstratio.

POsita A A linea, secetur rectis BB, CC parallelis; inter rectas verò AB, BC in prima figura mediæ ponantur BD. In secunda verò & tertia inter AB, AC, mediæ ponantur AD parallelæ inter se. Dico in prima figura [a] parabolam oriri, in secunda [b] ellipsim, aut circulum, in tertia denique [c] hyperbolam. quarum demonstrationes suis locis cùm expositæ sint frustra repetendas censeo.



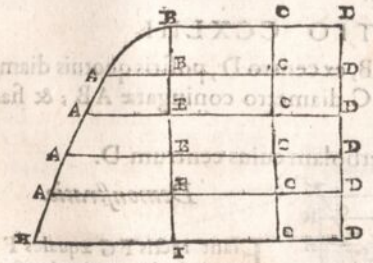
a Ex 193. de parabolam.
b 150. De ellipsi.
c 196. huius.

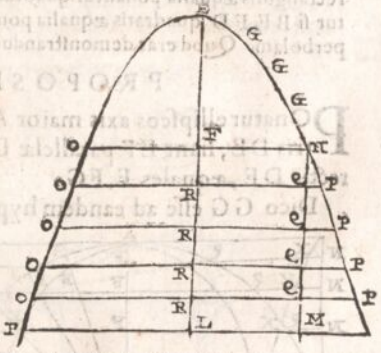
PROPOSITIO CCXLI.

DAta sit parabola AB & ei in directum adiungatur quadratum aut rectangulum BC, vel BD: ponantur autẽ ad axem BB ordinatim AB, pertingentes ad latera rectanguli.

Dico BC quadrata addita quadratis AB, producere parabolam.

Demonstratio.





POnatur EG parabola cuius axis EF, æqualis parabolæ A BB id est habens latus rectum axeos æquale lateri recto axeos BB, & IB, æqualis sumatur FN quæ in EG parabola ordinatim [d] applicetur ad axem EF sumptaque FL æquali ICC, ponantur F, NO, & N, QM æquidistantes KL, FE: erit igitur NL rectangulum æquale rectangulo BC & RQ quadrata æqualia quadratis BC. vlterius si inter PO, QO mediæ poni intelligantur, producent illæ parabolam æqualem EGG, id est ABB: hoc est parabolam producent habentem ad axem latus rectum æquale lateri recto axeos BB, rectangula igitur PQO parabolam producunt ABB. sed PQO rectangula vnà cum quadratis QR, quadrata producunt PR quæ ordinatim posita sunt in parabola EGG ad axem EF; quadrata igitur AB, vnà cum quadratis BC parabolam producunt EGP. Quod erat demonstrandum.

d Per 5. de parabola.

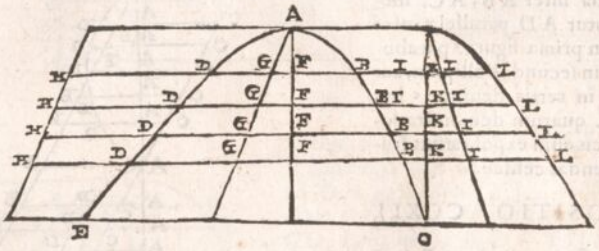
Idem est si hyperbolæ adiungatur quadratum aut rectangulum.

PROPOSITIO CCXLII.

DAta sit parabola ABC, & eiusdem altitudinis hyperbola ADE, habentes communem axem AF, ad quem ordinatim positæ sint FB, FD.

Dico quadrata BF, FD simul sumpta producere hyperbolam.

Demonstratio.



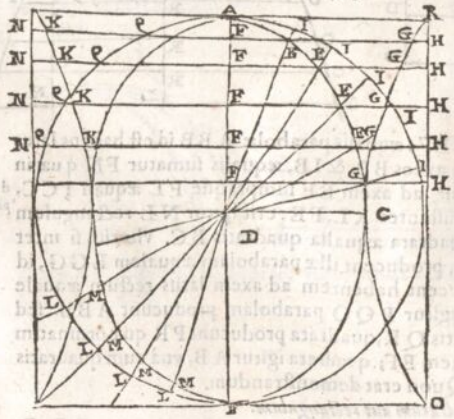
a *Ex conuersa 192. huius.*
b *Ex 193. de parabola.*

POnatur ex A linea AG occurrens FD lineis in GG, & AG parallela HH, vt FGH rectangula æqualia sint quadratis FD: patet [a] HH esse in directum. fiant iterum FB quadratis æqualia rectangula GFI: constat [b] quoque II esse rectam lineam. deinde IK rectæ æquales fiant FG; patet & KK esse rectam lineam, rectangula igitur IKF æqualia sunt quadratis BF. & IKFH rectangula æqualia quadratis FD: vnde IKH rectangula æquantur quadratis BF, FD. si autem IKH, rectangulis æqualia ponantur quadrata KL, puncta KLL ad hyperbolam sunt, igitur si BF, FD quadratis æqualia ponantur quadrata, patet illa quoque esse ad hyperbolam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXLIII.

POnatur ellipseos axis maior AB, ex centro D, positis quotuis diametris DE, fiant EF parallelæ DC diametro coniugatæ AB; & fiant rectis DE, æquales E, FG.

Dico GG esse ad eandem hyperbolam cuius centrum D.



c *Ex elementis.*

Demonstratio.

FIant rectis FG æquales FK, & describatur circulus super axe AB, & perficiatur quadratum NH, erit itaque rectangulum IEL ad IEL, rectangulum quemadmodum est [c] rectangulum QEP ad QEP, rectangulum hoc est vt quadratum FE ad FE quadratum. vnde vt est FE quadratum ad quadratum FE, ita similiter est HGN rectangulum ad rectangulũ HGN cùm ex constructione DE sint æquales FG vel FK, & DI æquales FH vel FN, est autem quadratum

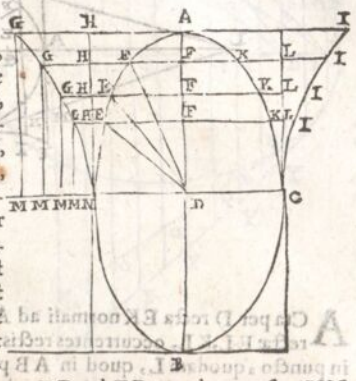
quadratum FE ad FE, quadratum vt rectangulum [a] AFB, ad AFB rectangulum, hoc est RHO ad RHO: igitur GHK rectangulum est ad rectangulum GHK, vt rectangulum RHO ad RHO rectangulum. ergo GG, KK sunt sectiones [b] oppositæ habentes centrum D. Quod fuit demonstrandum.

a 4. De ellipsi.
b Ex 36. huius.

PROPOSITIO CCXLIV.

LVbet propositionem præcedentem nonnihil aliter demonstrare.

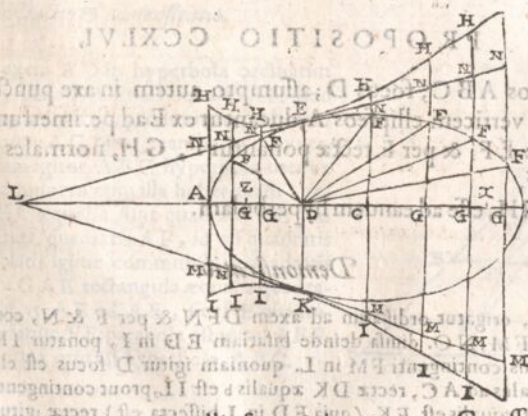
Demonstratio.



SIt itaque ellipsis ABC cuius centrum D, axis maior AB, minor DC: cui parallelæ ponantur FH; & rectis DE fiant æquales E, FG, & E, FI. Dico GG, II esse oppositas sectiones, quarum centrum D: ponantur HH, LC axi parallelæ: erit itaque quadratum DE, æquale quadratis EF, FD, igitur etiam quadratum FG ijsdem æquabitur: ablato igitur communi quadrato EF, remanebit rectangulum GEI, æquale FD quadrato. vnde vt est FD quadratum ad FD quadratum, hoc est quadratum GM ad GM quadratum, ita est rectangulum GEI ad GEI rectangulum, est autem & HEL rectangulum ad HEL, rectangulum id est EHK ad EHK, vt quadratum FD ad FD, quadratum siue HN ad HN quadratum, igitur & GHI rectangulum reliquum ad rectangulum GHI est, vt quadratum FD ad FD quadratum; (nam GEI rectangulum æquatur rectangulis GHI, & HEL.) igitur vt rectangulum GHI ad GHI, ita FD quadratum ad quadratum FD, id est HN ad HN quadratum; quare GG, II sunt [c] oppositæ sectiones, quarum centrum est D punctum. Quod fuit demonstrandum.

c Ex conuersa 36. huius.

PROPOSITIO CCXLV.

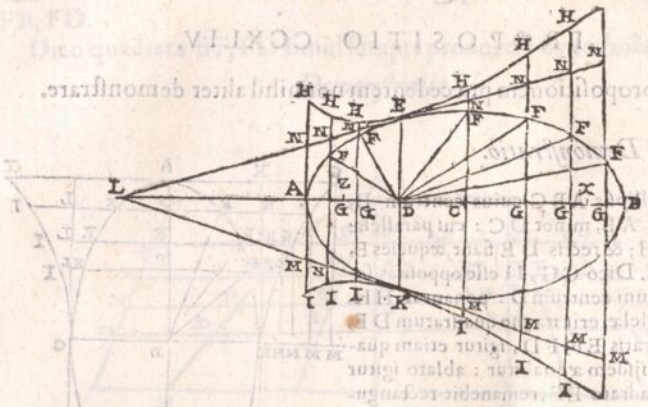


PONatur AB axis maior ellipseos, cuius centrum C: assumpto verò puncto quodam D in axe AB, quod inter centrum C & punctum foci constitutum sit, ducantur ex eo rectæ DF. ex punctis quoque FF ponatur FG, ordinatim ad axem AB. fiant autẽ rectis DF, æquales F, GH, GI.

Dico puncta HH, II esse ad hyperbolas oppositas.

Demon-

Demonſtratio.



ACta per D recta EK normali ad AB, ponantur per E & K, eõtingentes ellipſim, rectæ EL, KL, occurrentes rectis GH, in N & M: conuenient igitur EL, KL
a 34. De ellipſi. in puncto a quodam L, quod in AB producta eſt, quoniam rectis DF æquales poſitæ ſunt F, GH, & F, GI, igitur quadrata FG, GD æqualia ſunt quadratis HG, hoc eſt rectangulis HFI, vnà cum quadratis FG. vnde ablato communi quadrato FG, remanet HFI rectangulum æquale quadrato GD: quare vt eſt quadratum GD, ad GD quadratum id eſt NE quadratum ad quadratum NE, ſic rectangulum HFI ad HFI, rectangulum. eſt autem oſtenſum NFM, rectangulum eſſe ad rectangulum NFM vt NE, quadratum ad quadratum NE: reſiduum igitur rectangulum HNI ad HNI eſt, vt quadratum NE ad NE quadratum. igitur per conuerſam 36. huius erunt HH, II ſectiones oppoſitæ. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXLVI.

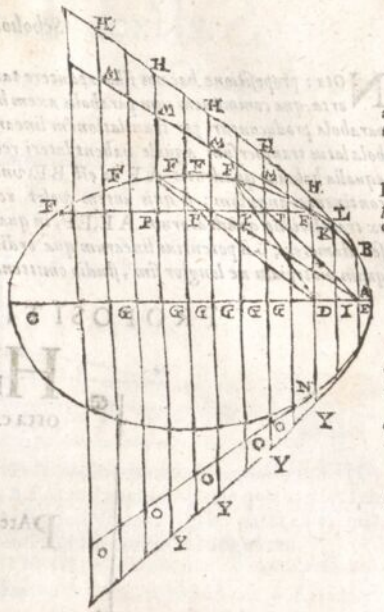
SIt ellipſeos ABC, focus D; aſſumpto autem in axe puncto E inter focum & verticem ellipſeos A, ducantur ex E ad perimetrum ellipſeos quotcunque EF; & per F rectæ ponantur F, GH, normales ad AC & æquales EF.

Dico BHH, eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

EX foco D, erigatur ordinatim ad axem DFN & per F & N, contingentes ponantur FM, NO. diuiſa deinde bifariam ED in I, ponatur IK parallela
b 139. De ellipſi. DF, occurrens contingenti FM in L. quoniam igitur D focus eſt ellipſeos, & IK, EB normales ad AC, rectæ DK æqualis b eſt IL, prout contingenti occurrit: ſed DK rectæ æqualis eſt EK, (quia ED in I biſſecta eſt) rectæ igitur EK, IL æquales ſunt: ſed per hypotheſim rectæ EK æqualis eſt IL, prout occurrit figuræ ABH. punctum igitur L communis interſectio eſt figuræ BHH & lineam IK, FM: fiant deinde GH lineis, æquales GY: erunt igitur HG quadrata æqualia quadratis MG, vnà cum rectangulis HMY: quia verò rectæ EF, per hypotheſim æquales ſunt GH, & DF æquales ipſis GM, quadrata EF, DF æqualia ſunt quadratis

dratis HG, MG: adeoque EF quadrata superant quadrata MG id est DF, rectangulis HMY. sed EF quadrata quoque superant quadrata DF rectangulo EDG bis sumpto [a] vnà cū quadrato ED: rectangula igitur EDG bis sumpta vnà cum quadrato ED, æqualia sunt rectangulis HMY: rursum si EDG rectangulis æqualia fiant quadrata, [b] producent illa parabolam, & si parabolę illi addatur ED quadratum; producet [c] illud vnà cum parabola, parabolam; igitur & HMY rectangulis si æqualia fiant quadrata, producent illa parabolam. similiter MPO rectangulis æqualia fiant quadrata, producent [d] illa hyperbolam; quæ addita parabolæ, quam HMY producit; generabit [e] hyperbolam; igitur si HPY rectangulis, (quę æqualia sunt HMY, MPO) æqualia fiant quadrata, producent illa quoque hyperbolam: cui si addantur quadrata PG, producent illa simul [f] cum hyperbola, hyperbolam. sed HPY rectāgulis vnà cum quadratis PG, æqualia sunt quadrata HG, id est EF, quadrata igitur EF hyperbolam producunt cuius ordinatim ad axem positæ sunt EF, id est GH: hyperbola igitur est HH, YY.



a Ex elementis.

b 193. De parabola. c 241. huius

d 192. huius.

c 242. huius.

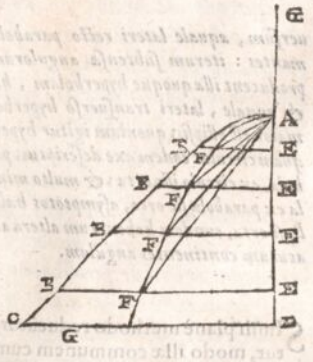
f Ibidem.

PROPOSITIO CCXLVII.

HYperbolam ABC cuius axis AD communis est parabolæ ex qua orta est, reducere ad parabolam.

Constructio & demonstratio.

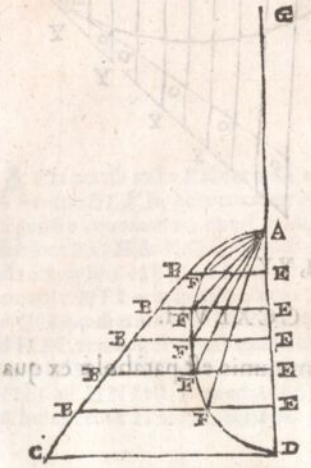
POsitis ad axem AD in hyperbola ordinatim lineis BE; fiant EB lineis æquales AF. dico AFF esse parabolam quę produxit hyperbolam ABC: ponatur AG latus transuersum hyperbolæ; quoniam igitur ABC hyperbola orta ex parabola communem cum illa habet axem, rectangula GEA æqualia sunt quadratis BE, id est per construct. quadratis AF, id est quadratis AE, EF: ablatis igitur communibus quadratis AE, manent GAE rectangula æqualia quadratis EF: vnde vt AE ad AE, sic FE quadratum ad quadratum FE: parabola est igitur AFF, & eadem ex qua orta est hyperbola ABC.



Scholion.

NOta: propositione hac nos illas reducere tantum voluisse hyperbolas adparabolas è quibus ortæ, quæ communem cum parabolis axem habent: id est hyperbolas rectas, illæ enim ex parabola producuntur, per translationem linearum AF *in* F, EB: *vnde omnes illæ hyperbolæ latus transuersum æquale habent lateri recto parabolæ; adeoq; cum* GEA *rectangula æqualia habeant quadratis* AF *id est* BE: *vnde hyperbola* ABC *asymptotos habet rectum continentes angulum: si quis autem volet reducere hyperbolas obliquas, id est quæ oriuntur ex translatione quadratorum* AE, EF, *in quadrata* EB (*quando* AD *axis parabolæ non est sed diameter,*) *is potentias linearum quæ ordinatim ad hyperbolam ponuntur, transferat: quam materiam ne longior sim, studio omittendam duxi.*

PROPOSITIO CCXLVIII.



HYperbolam ABC, quæ AD axem habet communem cum ellipsi ex qua orta est, reducere ad suam ellipsim.

Constructio & demonstratio.

PAtet ex 219. vel 220. huius, cuius sit conuersa.

Scholion.

HYperbolæ communem habentes axem in ellipsi ex qua oriuntur, asymptotos habent acutum angulum continentes: intelligantur enim circulus & ellipsis communem habere axem maiorem, & ad illum ordinatim lineas poni. deinde subtensæ angulorum rectorum in circulo transferri in normales ad axem: producent illæ parabolam communem cum circulo axem habentem, & latus rectum æquale diametro circuli. Rursum subtensæ angulorum rectorum in parabola illa, transferantur in ordinatim positas ad axem parabolæ, producent illæ hyperbolam, habentem latus transuersum, æquale lateri recto parabolæ, ex qua oritur; & asymptotos rectum angulum formantes: iterum subtensæ angulorum rectorum in ellipsi, ponantur normaliter ad axem, producent illæ quoque hyperbolam, habentem latus transuersum æquale axi ellipseos, adeoq; & æquale, lateri transuerso hyperbolæ, ortæ mediatè ex circulo, cuius diameter, axis maior est ellipsis; quoniam igitur hyperbola orta ex illa ellipsi, ordinatim positas minores habet, quàm circulus eodem axe descriptus; patet illas minores quoque esse ordinatim positis in parabola, ex circulo illo orta; & multo minores, quàm hyperbola ex parabola illa orta: sed hyperbola ex parabola sic orta, asymptotos habet angulum rectum formantes; igitur hyperbola ex ellipsi orta, eundem habens cum altera axem, & latus transuersum commune, asymptotos habet acutum continentes angulum.

Corollarium.

SImili planè methodo reducũtur parabolæ ad parabolas, & circulos è quibus oriuntur, modo illæ communem cum parabolis aut circulis è quibus oriuntur habeant axem, reduci etiam potest parabola ad ellipsim ex qua oritur, vti proposit. 333. de parabola ostendi, sed praxis illa requirit translationem linearum secundum potentias.

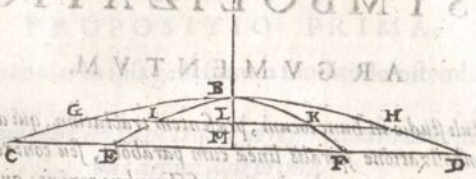
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [719] - 662
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CCXLIX.

HYperbolam quamcunque reducere ad hyperbolam cuius asymptoti rectum continent angulum.

Constructio & demonstratio.



SI AB latus transuersum hyperbolæ CBD & ordinatim ad AB, positę sint HG, DC occurrentes AB in L & M. Fiat AL B rectangulo æquale quadratum LI, vel LK; item AMB rectangulo æquale ME quadratum vel MF: patet ex 60. huius hyperbolam esse FKBIE cuius asymptoti rectum continent angulum.

Scholion.

EX præmissis propositionibus manifesta est praxis quâ ex hyperbola reliquæ sectiones educi possint, quæ communem cum hyperbola axem habent: sit enim ABC *hyperbola, (vide figur. 147. huius) cuius axis* AD, *& asymptoti rectum angulum continent. si* EE *ordinatim positas transferas in* AF: *patet* AFF *esse parabolam.*

Si verò ABC *hyperbola asymptotos habeat acutum obtinentes angulum;* EB *ordinatim ad axem positæ si transferantur in* AF, *constat ex* 148. *huius* AFF *esse ellipsim.*

Cæterum innumeræ penè supersunt praxes educendi parabolas, ellipses, circulos, ex hyperbola, à quibus consultus abstineo, ne multitudo lectorem fatiget, contentus, viam satis amplam & praxes plurimas similes Parte hac protulisse, quas industrius Geometra, ad infinitas penè extendere facile poterit.

SPIRALIS ET PARABOLÆ SYMBOLIZATIO.

ARGVMENTVM.

Dixi studio in hunc locum, præsentem tractatum, qui de conuenientia ac symbolizatione spiralis lineæ cum parabola, seu coni rectanguli sectione tractat, vt coronidem imponam sectionibus conicis, quas huc vsque exponere lucubrationibus hisce conatus sum. Admiranda certè symbolizatio & similitudo est harum duarum figurarum parabolæ nimirum & spiralis, quam excogitauit atque suo ingenio commentus est Archimedes: vt viam sibi sterneret ad circuli quadraturam exhibendam: quæ res me non exiguo temporis spatio, sollicitum habuit, neque enim vel hac hora, mihi in animum inducere possum, quid mouerit Archimedem, per spiralem lineam, circuli quadraturam indagare: maximè affirmando, eius contingente inuentâ, repertam quoque fore lineam rectam, quæ cum circuli perimetro, æqualitatis rationem contineat. methodus enim demonstrationis, qua Archimedes in hac materia vtitur, vsque adeò secreta est & inuoluta, vt mihi nunquam occurrere potuerit, quâ ratione Archimedi incideriť, per contingentem spiralis lineæ, deueniri posse ad lineam rectam reperiendam, quæ perimetro circuli sit æqualis; quæ etenim affinitas esse potest, spiræ cum circulo, maximè si contingentem eius conferas cum perimetro circuli? ante annos circiter viginti quinque, cùm in speculationem, quam explicare intendo, incidissem, planè mihi persuaseram verissimam me reperisse viam, qua Archimedes adinuenit, circuli perimetrum æqualem esse lineæ illi, quam contingens spiralis assignat: illo tenore qui ab eodem authore libro de spirali declaratus, sed ab hac opinione me semouere conatus est anno vigesimo quinto huius sæculi, P. Christophorus Grimbergerus, P. Clauij (cuius & ego per aliquot annos domesticus auditor fui) indiuiduus comes, cuius opera Clauij lucubrationes, magnum pondus & auctoritatem acquisiere: vix enim sequentem speculationem eidem viro explicueram, cùm subiungeret eam nimis pulchram sibi videri, quam vt Archimedes suppressam eam voluerit, quæ pulchritudine sua si non excederet, saltem non inferior esset Archimedeâ contemplatione, quam posteris de spiralis lineæ natura reliquit. Nihilominùs difficulter à persuasione mea semoueri me patior; tuum igitur benigne Lector, iudicium exspecto & rogo vt bene perspecto, quem subiungemus discursu, sententiam tuam libere eloquaris; donec alia tibi via vel ratio occurrerit, explicandi Archimedis artificium quo connexionem perimetri circularis, cum lineâ per contingentem spiralis inuentâ, repererit. Antiquis enim valde solenne fuit, artificium adinuentionis celare, quo admirabilior euaderet propositionis veritas, celata methodo, quæ ad eius cognitionem perueniendi viam fecit. Intentum itaque præsentis partis est, ostendere parabolæ naturam eandem esse cum natura

spiralis

Spiralis figuræ, & proprietates omnes, ab Archimede in ſpirali figura explicatas, reperiri ad vnguem etiam in parabola, & per contingentem parabolæ, etiam pari ratione, qua per tangentem ſpiralis, poſſe aſſignari lineam perimetro circuli æqualem. Ordiemur itaque comparationem ipſam, origines vtriuſque figuræ inter ſe conferendo. deinde ſingulas propoſitiones tum ab Archimede, tum etiam à Pappo Alexandrino allatas, quæ de ſpiralis figuræ natura tractant, parabolæ adaptando.

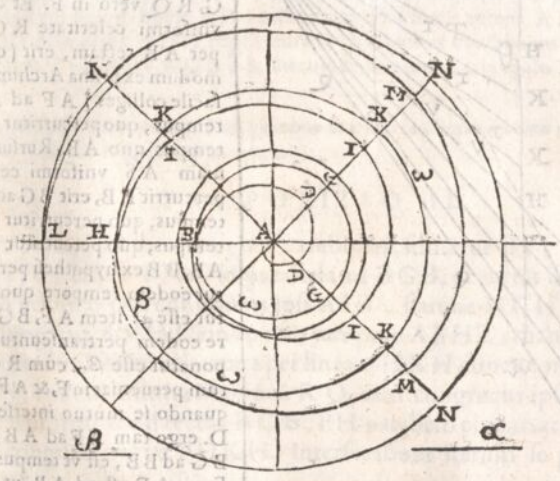
SPIRALIS.

PROPOSITIO PRIMA.

SPiræ & parabolæ in ipſa geneſi mira ſimilitudo oſtenditur.

Spirarum geneſim hanc tradit Archimedes in libro de ſpiralibus definitione prima.

SI in plano recta linea altero termino manente, æquali celeritate circumlata redeat deinceps eò vnde profecta eſt: ſimul verò cum linea circumuoluta feratur punctum pari velocitate ſibi ipſi, ſecundùm rectam lineam ducto, motus initio ab immobili termino: iſtud punctum lineam ſpiralem in plano deſcribet.



DAta ſit recta linea A B quæ manente puncto A & vniformi celeritate in orbem moueatur donec in eum locum redeat, à quo moueri cæperat. Eodem verò tempore punctum A percurrat vniformi celeritate rectam A B, ita vt A non priùs perueniat in B quam recta A B, primam reuolutionem peregerit. Feretur igitur punctum A motu neque recto neque circulari, ſed compoſito ex vtroque. Lineam compoſito illo motu puncti A deſcriptam Archimedes ſpiralem vocat. Quod ſi ſumatur B H, ipſi A B æqualis, & punctum B percurrat rectam B H, eodē tempore, quo manente puncto A recta A H in orbem vertitur, deſcribetur ſpira ſecundę reuolutionis. eundem in modum deſcribetur ſpira reuolutionis tertiæ, quartæ atque ita in infinitum.

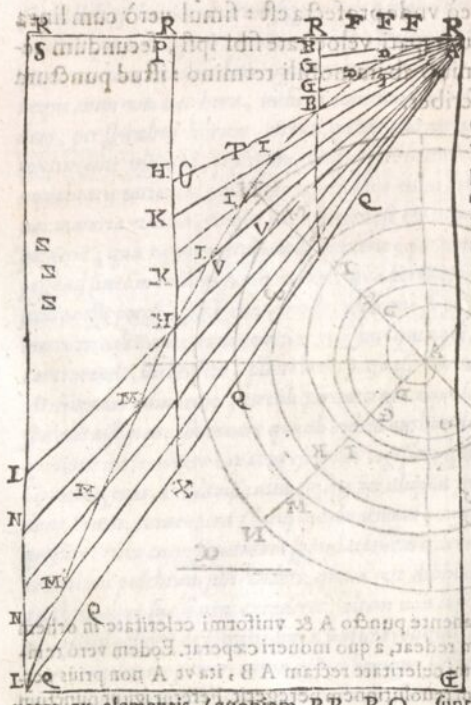
Vidimus ſpirarum origines; ad originem parabolæ veniamus.

APPLICATIO.

DAtum sit triangulum ABGB, cuius latus AFB. producatur infinitè versus S: per verticem anguli A, ducta sit RG, parallela BB etiam infinita, quæ motu vniformi, & semper manens ad BB parallela, feratur per rectam AS, donec congruat lineæ BB: eodem autem tempore linea ABS, manente puncto A, moueatur donec congruat rectæ ATB. Sed hic motus sic peragi debet vt AB, BB in æquè multas æquales partes diuisis, quo tempore RQ vnam æqualium partium rectæ AB absoluit, eodem etiam ABS absoluat vnam æqualium partium rectæ BB, & sic deinceps, hæc autem vniformitas non sumitur secundùm vniformitatē motus secundùm suas partes, sed secundùm partes spatij quod per motum decurritur. quæ partes æquales inter se existunt. Intersecabunt se perpetuo in motu illo rectæ AS, RG in punctis D, D.

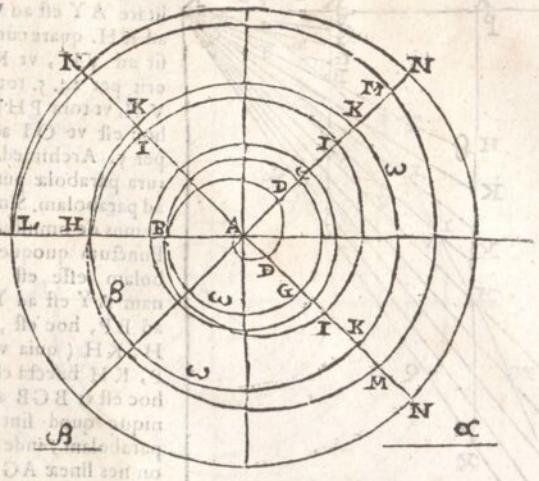
Dico intersectionibus illo motu factis parabolam describi.

Demonstratio.



SVmatur quoduis punctum intersectionis D. quando igitur AS, RQ, se intersecant in puncto D, AS quidem peruenit in G, RQ verò in F. Et quoniam vniformi celeritate RQ fertur per AB rectam, erit (quemadmodum ex prima Archim. de spir. facile colliges) AF ad AB, vt tempus, quo percurritur AF ad tempus quo AB. Rursum quoniam AS vniformi celeritate percurrit BB, erit BG ad BB vt tempus, quo percurritur BG ad tempus, quo percurritur BB. Sed AB, BB ex hypothesi percurruntur eodem tempore quod ponatur esse α: item AF, BG tempore eodem pertranseuntur, quod ponatur esse β, cùm RQ rectum peruenerit in F, & AFS in G, quando se mutuo intersecant in D. ergo tam AF ad AB, quàm BG ad BB, est vt tempus α ad β. Ergo AF est ad AB, vt BG ad BB. Ergo diuidendo AF est ad FB, hoc est AT ad TB, vt BG ad GB, hoc est quemadmodum patet ex elementis (quoniam BB, RQ, sunt parallelæ) vt FD ad DT. Ergo per 5. Archimedis de quadrat. parabolæ punctum D est ad parabolam. Similiter ostendimus omnia puncta intersectionum DDD esse ad parabolam. Quod erat demonstrandum.

Similitudinem porrò sic ostendemus: motus rectæ ABS per lineam BB, manente puncto A fixo, repræsentat motum circularem rectæ AB qui fit in spirali manente puncto A: motus autem rectæ RQ per rectam AB, semper ad BB parallelus



rallelus exhibet fluxum puncti A in ſpirali per rectam AB, punctum igitur A in parabola refert principium ſpiræ A; recta AFB vel ATB, eam quæ eſt principium circulationis, nempè ipſam AB; linea BGGB peripheriam BGGB primi circuli; ſingulæ verò parallelarum FDT peripherias ſingulas; quæ primo circulo concentricæ per ſingula lineæ AB puncta ducuntur; lineæ autem ADG, (partes ipſius AS) diametros ADG repræſentant. Ex quibus conſequens eſt ſpiralem ipſam ADB à parabola ADB, & circulum primum à triangulo BAB adumbrari.

Vides igitur, niſi fallor amice Lector, quantum in ipſo ortu, atque à primis (vt ita loquar) incunabilis ſymbolizent ſpiralis & parabola.

PROPOSITIO II.

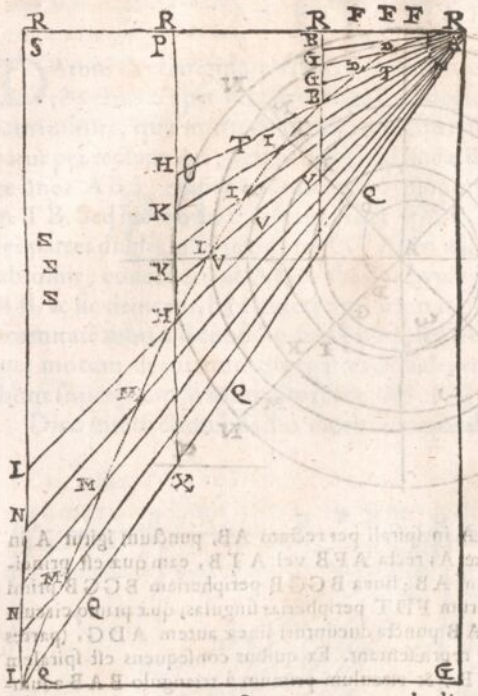
IIſdem poſitis, nimirum figurâ parabolicâ, ſumatur BP, ipſi AB æqualis, ductaque PHKH parallela ad BGB, occurrat illi in H recta ATBZ infinita, iam congruens ipſi AIB, fiatque HKH æqualis ipſi PH, & iungatur AVH. Deinde quo tempore ABHZ, manente puncto A, mouetur vniformi celeritate per lineam HKH donec congruat rectæ AYVH, eodem infinita illa linea RQ, iam congruens ipſi BB, motu ſemper vniformi & ad rectas BGB, PH parallelo percurrat lineam BP, donec congruat rectæ PHKH. Interſecabunt iterum ſe perpetuò in punctis I.

Dico interſectionibus II, illo motu factis eandem parabolam continuari.

Demonſtratio.

ASſumatur quoduis I punctum, eodemque planè diſcurſu oſtendemus eſſe BO ad OP, hoc eſt YV ad VH, vt HK ad KH, quo propoſ. 1. oſtendimus AT eſſe ad TB, vt BG ad GB. Deinde cùm AY ſit ad YH, vt AB ad BP, AB autem ſit ad BP, vt PH ad HKH, cùm ex conſtructione tam AP, quàm PKH biſectæ ſint in B & H; etiam AY eſt ad YH, vt PH ad HKH: ſed YH eſt ad VH, vt HKH ad KH, ſiam enim oſtendimus diuidendo YV eſſe ad VH,

vt



vt H K ad K H.) Ergo æqualitate A Y eſt ad V H, vt P H ad K H. quare cùm etiam Y V ſit ad V H, vt K K ad K H, erit per 24. 5. tota A Y V ad V H, vt tota P H K H ad K H, hoc eſt vt O I ad I V. Ergo per 5. Archimed. de quadratura parabolæ punctum I, eſt ad parabolam. Similiter oſtendemus de omnibus II punctis. Punctum quoque B ad parabolam eſſe eſt manifeſtum, nam A Y eſt ad Y H, vt A B ad B P, hoc eſt, vt P H ad H, K H (quia vtraque A P, P, K H biſecta eſt in B & H) hoc eſt vt B G B ad B Y. Denique quod ſint ad eandem parabolam, inde patet quod omnes lineæ A G, A I ex eodem puncto A egrediantur. Vera igitur ſunt, quæ oportebat demonſtrare.

APPLICATIO PARABOLÆ.

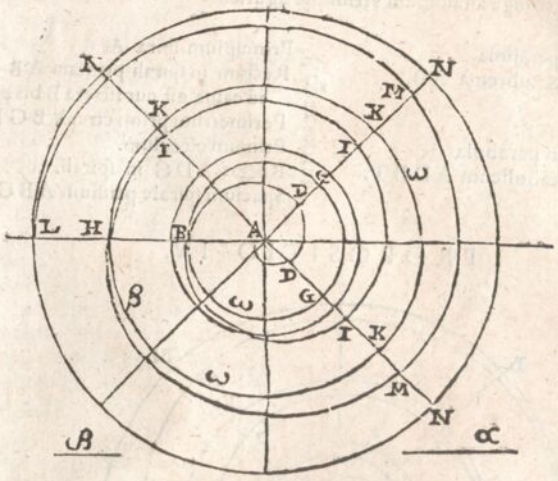
REpræſentat igitur ſegmentum parabolicum ſecundum B H Y A, ſpiram ex ſecunda reuolutione: triangulum verò H A H, circulum ſecundum; recta H K H perimetrum ſecundi circuli, B H, Y H, B P ſecundam in ſpirali lineam B H referunt.

Quod ſi ſumpta P S æquali rurſum ipſi A B, ducatur parallela S L cui occurrat A Y, H Z in L, & factâ L N L dimidia ipſius S L, iungatur A X ∝ L; ac tum moueri pergant modo ſupra explicato infinitæ illæ lineę R L Q, A L Z, ſuis iterum interſectionibus M M continuabunt eandem parabolam, & ſegmentum quidem A H L X A repræſentabit tertiam reuolutionem: triangulum L A L tertium circulum referet: Atque ita procedendo vlterius iuxta methodum iam præſcriptam, quartam etiam & quintam reuolutionem, & ſic deinceps in infinitum in parabola exhibebimus.

Quæ cùm ita ſint nónne iure meritò ſpiralem eſſe dixerim euolutam ſiue expanſam parabolam? Verùm id planius adhuc fiet ex ſequentibus propoſitionibus; nihil ſiquidem de ſpirali vel Archimedes vel Pappus demonſtrarunt, quod viciſſim in parabola non exhibebimus. Quod priuſquam proſequamur, lubet duobus adhuc ſequentibus Theorematis eandem analogiam ampliùs declarare.

PRO-

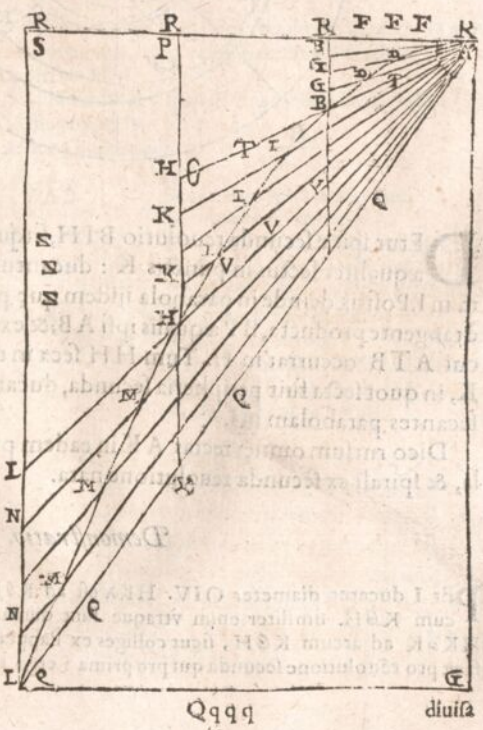
PROPOSITIO LII.



DAta sit spiralis A D B, cuius primus circulus diuisus sit æqualiter in punctis G; & ex principio spiræ ducantur ad puncta G quotuis rectæ A G, secantes spiralem in D.

Sit præterea parabola A D B, cuius tangens A B; subtensa A T B; diameter B B secta in æquè multas æquales ac fuit secta perimeter in punctis G: ducanturque ad puncta G rectæ quotuis A G, secantes parabolam in D:

Dico omnes rectas A G in parabola, similiter sectas esse à parabola, vt rectæ A G in spirali ductæ à spirali diuisæ sunt.



Demonstratio.

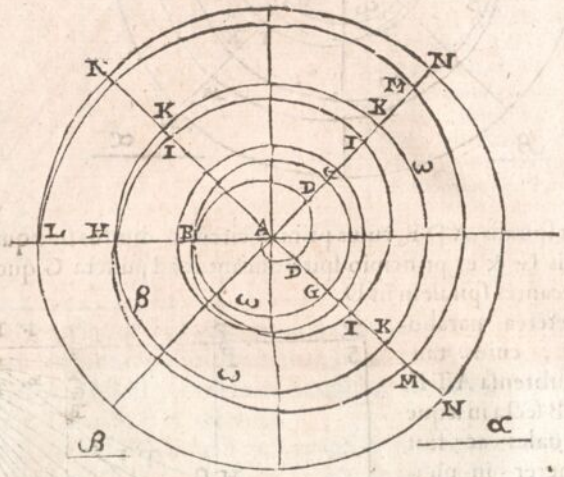
PEr D duc diametrũ F D T, siue (quod idem est) parallelam ad B B. A D est ad D G, vt A T ad T B, hoc est per 5. Archim. de quadratura parabolæ, vt F D ad D T, hoc est vt B G ad G D; hoc est (quoniam tam B B quàm peripheria primi circuli ex hypothesi

diuiſa ſunt in partes æquales æquè multas) vt arcus B G ad arcũ reliquum G ω G B; hoc eſt per 19. Pappi l. 4. vt in ſpirali A D, ad D G. Ergo à primo ad vltimum in parabola A D eſt ad D G, vt in ſpirali A D ad D G. Quod erat demonſtrandum.

Hinc rurſum collige analogiam vtriuſque figuræ:

	Repræſentat
Punctum A in parabola	Principium ſpiræ A.
Tangens A B, & ſubtenſa A B.	Rectam in ſpirali primam A B quæ etiã cauſa eſt cur littera B bis ponatur.
Diameter B B.	Perimetrum primi circuli B G B.
Triangulum B A B.	Primum circulum.
Rectæ A D G in parabola	Rectas A D G in ſpirali.
Segmentum parabolicum A D B T.	Spacium ſpirale primum A B G A.

PROPOSITIO IV.



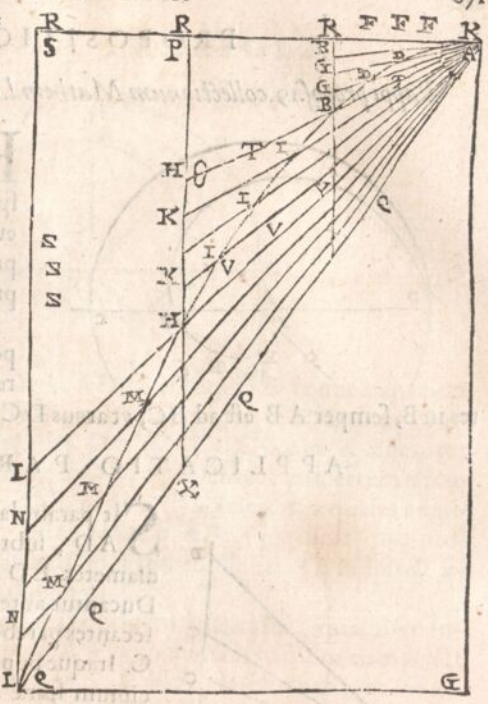
DEtur ſpiræ ſecunda reuolutio B I H, ſitque ſecundus circulus H K K, æqualiter ſectus in punctis K : ducanturq; rectę A K ſecantes ſpirã in I. Poſitis deinde in parabola ijſdem quę propoſitione tertia, ſumatur è tangente producta, B P æqualis ipſi A B; & ex P duc diametrum P H K A, cui A T B occurrat in H. Tum H H ſeca in totidem æquales, in punctis K, in quot ſecta fuit peripheria ſecunda, ducanturque tandem rectæ A K ſecantes parabolam in I.

Dico rurſum omnes rectas A K in eadem proportione ſecari à parabola, & ſpirali ex ſecunda reuolutione nata.

Demonſtratio.

PEr I ducatur diameter O I V. H K λ eſt ad K θ H, vt arcus H K ω K φ ad arcum K β H. ſimiliter enim vtraque ſunt diuiſa. ſed K K I ad I I G, vt arcus H K ω K ad arcum K β H, ſicut colliges ex Pappi 19. lib. 4. idem enim diſcurſus facit pro reuolutione ſecunda qui pro prima : ergo recta H K λ in parabola eſt ad K θ H, vt

KθH, vt φKIϖ ad ϖIG: quod erit in memoriam reuocandum cùm paulò post ex æquo argumentabimur; ergo etiam componendo & inuertendo HθKλ est ad HH, vt GIϖ ad GKφ. sed HH ipsi PH. & AG ipsi GK ex hypothesi æqualis est; ergo HθK est ad HP, vt GIϖ ad AG: Ergo ex æquo HKλ est ad PH, vt φKIϖ ad AG. ergo per 24. 5. HKλ est ad KP, vt KIϖ ad IA. sed vt HKλ ad KP, sic VI, ad IO, hoc est per 5. Archim. de quadrat. parabol. HV ad VAH, hoc est in parabola λKI ad IA. Ergo vt in spira φKIϖ ad IA, sic in parabola KI ad IA. Quod erat demonstrandum.



Deinde ex diametro AB producta plures sumantur æquales ipsi AB, vt PS, &c. & ex puncto S ductâ diametro SNL, cui AVH occurrat in L, ducantur quotcunque rectę AN, secantes parabolam in MM. & diametri partem LL in æquales partes in punctis N: ducantur autē & in spira reuolutionis tertię HMM quotuis rectæ AN, secantes similiter perimetrum tertij circuli in punctis N, N, ac secta fuit LL, spiram verò in punctis MM:

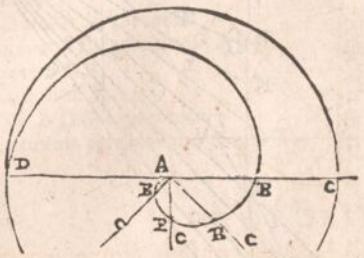
Dico rursum rectas omnes AMN similiter à spirali & parabola diuisas esse. Quod simili ferè discursu demonstrabitur quo priùs.

Ex his, similitudinis scema deduco huiusmodi.

Segmentum parabolicum BHYAB.		Secundum spirale spacium.
Triangulum HAH.		Secundum circulum.
Recta HH.		Peripheriam secūdi circuli HKKH.
Singulæ rectæ BH, YH, BP.	Repræsentat	Rectam in spira secundam BH.
Rectæ in parabola AIK.		Rectas in spirali AIK.
Segmentum parabolicum HLXA.		Tertium spirale spacium.
Triangulum LAL.		Tertium circulum.
Recta LL.		Tertij circuli peripheriam LMNL.
Singulæ rectæ HL, XL, PS.		Tertiam in spira rectam HL.
Rectę AMN in parabola.		Rectas AMN in spirali.

PROPOSITIO V.

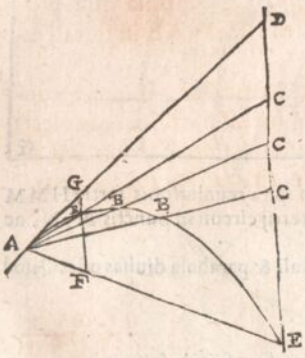
Pappi propos. 19. collectionum Mathem. l. 4. applicatur parabolæ.



HAnc præmitto Archimedæis, quod primam ſpiralis proprietatem, ex ipſa eius definitione immediatè profluentem contineat. Pappi ſenſus hic eſt:

Si ex ſpiræ principio A ad peripheriam circuli ducantur rectæ A B C ſpiralem ſecantes in B, ſemper A B eſt ad B C, vt arcus D C ad arcum C M D.

APPLICATIO PARABOLÆ.



SIt parabola A B E, cuius tangens ſit A D, ſubtenſa A E, ex E verò ducta diameter E D occurrens tangenti in D. Ducantur autem quotcunque rectæ A B C ſecantes parabolam in B, & diametrum in C. Itaque punctum A, in parabola, principium ſpiræ A, diameter verò D E perimetrum circuli repræſentat.

Dico A B eſſe ad B C, vt D C ad C E.

Demonſtratio.

PEr B ducatur diameter G B F, hoc eſt parallela ad D E. Per 5. Archim. de quadr. parab. vt G B eſt ad B F, ſic A F ad F E, hoc eſt A B ad B C: ſed vt G B ad B F, ſic D C ad C E. Ergo A B eſt ad B C, vt D C ad C E. Conueniunt igitur in hac prima proprietate helix & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Huius propoſitionis demonſtratio ferè in præcedenti demonſtratione inuoluitur. Placuit tamen eam ſeorſim applicare, quòd Pappi ſit, & primam ſpiralis proprietatem contineat.

PROPOSITIO VI.

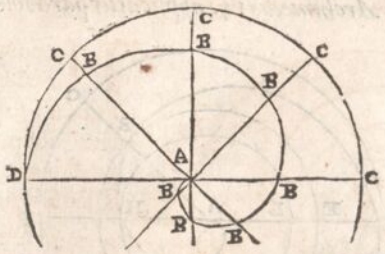
Archimedis 12. parabolæ applicatur.

AB hac Archimedem delibare incipio, quod prima ſit earum, quibus ſpiralium proprietates demonſtrantur.

Archimedes ſic habet: ſi in ſpiralem vnâ quidem circumuolutione deſcriptam à principio ſpiralis (A) rectæ quotlibet (A B C) cadant quę æquales inter ſe angulos (D A C, C A C, C A C) contineant; ſeſe mutuo æqualiter (hoc eſt exceſſu æquali) excedent.

APPLI-

APPLICATIO PARABOLÆ.

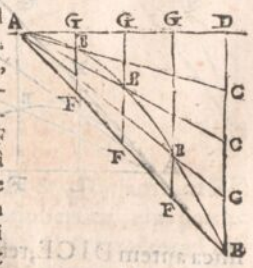


SIt parabola A B E quam tangat A D, secet verò D E conueniens cum tangente in D, & parallela diametro, iungaturq; A E. Secetur deinde D E in quotlibet partes æquales D C, C C, C C, & ex A ducantur quotlibet rectæ A B C. Linea igitur D E, repræsentat perimetrum circuli D C D; æquales verò rectæ D E partes C C, referunt æquales angulos, siue arcus æquales C C; rectæ tandem A B in parabola quæ protractæ abscindunt æquales partes C C, exhibent lineas A B in spirali æquales angulos siue arcus continentes.

Dico A E æqualium sui partium continere vnam plus, quàm secunda contineat A B; secundam verò A B æqualium sui partium complecti vnam plus, quàm contineat tertia A B, & hanc rursum partium sui æqualium vnam plus continere quàm contineat quarta, & sic deinceps.

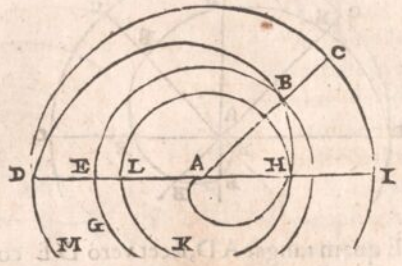
Demonstratio.

PEr puncta B ducantur G B F parallelæ ad D E. Quoniam igitur parallelæ sunt G B F ad D E, G B est ad B F, vt D C ad C E. sed per 5. Archimed. de quadr. parab. etiam A F est ad F E, vt G B ad B F. Ergo A F est ad F E, vt D C ad C E. Patet igitur ex elementis cùm D E sit æqualiter secta in punctis C, etiam E A in punctis F æqualiter esse diuisam. Atque inde vlterius ob rectarum G B F æquidistantiam est manifestum singulas A B C lineas à parallelis G B F sectas esse æqualiter. Perspicuum itaque est A E vnam plus æqualium sui partium continere quàm contineat secunda A B; secundam verò æqualium sui partium complecti vnam plus, quàm contineat tertia, & sic de cæteris. Sed cùm in spirali A D, A B, A B, sese mutuo æquali excessu superent, etiam prima A D æqualium sui partium continet vnam plus quàm secunda A B: & hæc æqualium sui partium vnam amplius quàm tertia A B & sic de cæteris. Et hîc igitur symbolizant spiralis & parabola. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO VII.

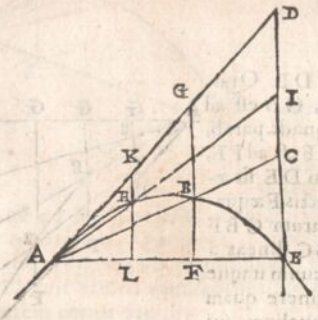
Archimedis 14. applicatur parabolæ.



SI in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ lineæ (AH, AB) à puncto quod principium eſt ſpiralis, & producantur ad perimetrum vſque primi circuli (in I & C) eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli medij inter terminum ſpiræ (D) & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in conſequentia arcubus à fine ſpiralis (hoc eſt quam arcus, DMI, DMC.)

Ex quo ſequitur, ſi centro A per B & H ducantur circuli FBG, LHK, quod AL ſit ad AF vt arcus DMI ad arcum DMC.

APPLICATVR PARABOLÆ.



SIt parabola ABE quam tangat AD, ſecet verò diameter DE; iungaturq; AE. Ex puncto A educantur rectæ AHI, ABC, & per puncta H, B ducantur LHK, FBG parallelæ ad DE.

Recta igitur AE circuli diametrum AD; rectę verò AHI, ABC, ductæ à principio ſpiræ AHI, ABC repræſentant, linea autem DICE, refert peripheriam DCI ac proinde rectæ DI, DC arcus DMI, DMC exhibent. Denique parallelæ LHK, FBG referunt circulos concentricos ſeu parallelos LHK, FBG:

Dico AL eſſe ad AF, vt DI ad DC: planè vt in ſpirali AL erat ad AF, ſicut arcus DMI ad arcum DMC.

Demonſtratio.

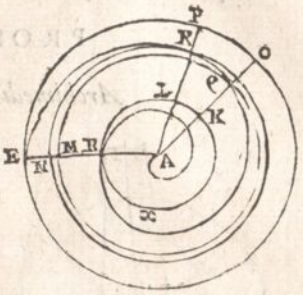
PEr 5. Archimedis quadr. parab. vt AL ad LE ita KH eſt ad HL, hoc eſt DI ad IE; & vt AF ad FE, ita GB eſt ad BF, hoc eſt DC ad CE: Quare ex elementis patet AL eſſe ad LF, vt DI, ad IC. Ergo hic etiam conueniunt ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Archimedis 15. parabolæ applicatur.

SI in helicem in secunda reuolutione sectam rectæ (AQ, AR) ceciderint à principio helicis, eandem rationem huiusmodi rectæ ad inuicem, quam dicti arcus (BXK, BXL) cum tota circuli (BKL) circumferentia simul assumpta habebunt.

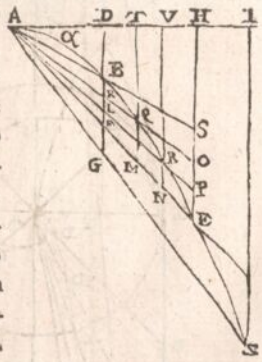


Hoc est AQ erit ad AR, vt arcus BXK cũ tota peripheria BXKL, ad arcũ BXL vnà cum circumferentia tota BXKL.

Ex quo sequitur, si centro A per P & R ducantur circuli QM, RN, rectam AM futuram ad AN, vt arcus BXK cum tota peripheria ad arcum BXL cum tota peripheria.

APPLICATVR PARABOLÆ.

DAta sit parabola ABE cuius diameter sit EH, tangens AH, quâ bisectâ in D, ex D fac DB parallelam ad HE, iunganturq; AB, AE. Patet igitur ex 4. primis propos. huius, segmenta parabolica A α B, BREF referre spiralia ordine spacia. ALB quidẽ referre primum; BREF verò secundũ: Rectam quoque DB exhibere peripheriam primi circuli. Producatur modò DB in F. Quoniam AH bisecta est in D, etiam AE bisecta est in F. Quare cùm per 5. Archim. de spir. DB sit ad BF, vt AF ad FE, etiam DF bisecta est in B, & æquales sunt BF, BD. Cùm igitur DB referat peripheriam primi circuli, referet etiam BF.



Ducantur deinde rectæ AQ, AR secantes parabolam in Q & R, rectam verò DBF in K, & L; & quoniam tam BF quàm BD, vt antè ostendi, refert primi circuli peripheriam, eius partes BK, BL referent primæ peripheriæ partes BXK, BXL. Itaque tota DK refert totam peripheriam cum arcu BXK, & tota DL totam peripheriam cum arcu BXL. Denique per Q, & R ducantur parallelæ TM, VN, quæ exhibebunt peripherias MQ, NR. Rectæ autem AM, AN siue A, T, AV, repræsentabunt in spirali rectas AM, AN.

Dico AM esse ad AN, siue AT, ad AV, vt DK ad DL.

Demonstratio.

CVm parallelæ sint, TM, DF; erit TQ ad QM, vt DK ad KF; vtque VR ad RN, sic DL ad LF. Sed per 5. Archim. de parabola, vt TQ ad QM, sic AM ad ME; vtque VR ad RN, sic AN ad NE: quare vt AM ad ME, sic DK ad KF; & AN ad NE, vt DL ad LF. Patet igitur ex elementis AM esse ad AN,

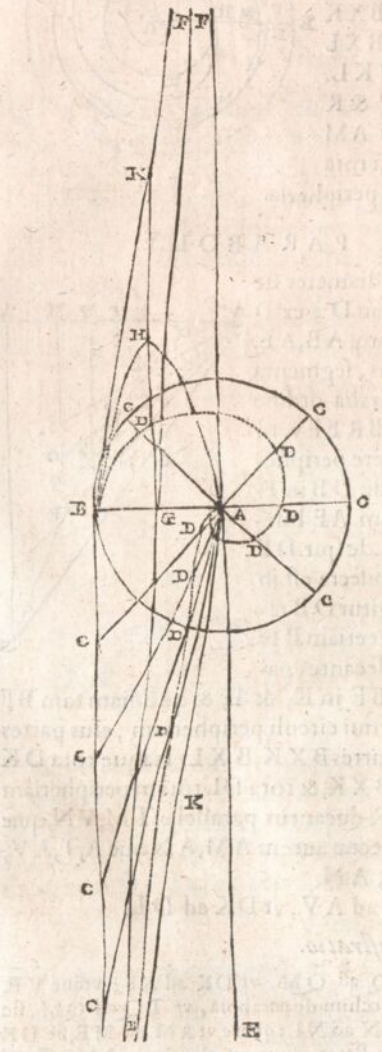
AN, vt DK est ad DL. Ergo hic etiam symbolizant spiralis & parabola. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

EX his perspicuum est, Archimedis manifestum quod propositioni 15. subiungitur eodem planè discursu posse accommodari.

PROPOSITIO IX.

Archimedis 18. *applicatur parabolæ.*



SI spiralem ex prima circumuolutione ortam recta linea (BF) tetigerit in termino spiræ (B:) à puncto verò quod est principium spiræ, quædam (AF) ducatur ad angulos rectos ei, quæ est principium circumuolutionis (nempè AB) ducta incidet in tangentem, & ipsius quę pars media erit (nempè AF) inter tangentem & principium spiræ, æqualis erit peripheriæ primi circuli (CC.)

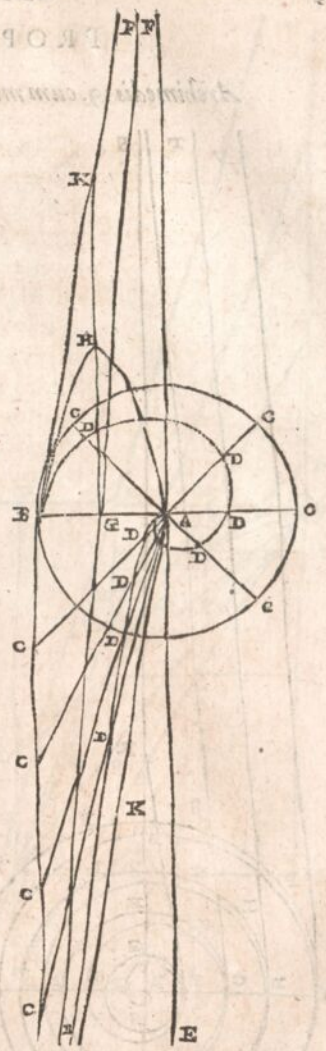
Atque hoc est illud theorema, quod hactenus Geometræ admirati sunt. Nos qua ratione conueniat parabolæ videamus.

APPLICATIO.

DVcatur AE ad angulos rectos ipsi AB, describaturque parabola ADB cuius axis sit AE, tangens verò BA. Ducta deinde BCB parallela axi, inferius occurrat parabolæ in B, iungaturque BE parallela ad BA. Denique peripheria circuli & recta BB in æquè multas æquales partes diuidantur per rectas ADC. Igitur per propos. 3. huius, rectæ ADC in spirali & parabola similiter ab vtriusque perimetro in punctis D, diuiduntur. Ex quo patet rectam BCB, prorsus peripheriam BCB repręsentare: circulum verò à triangulo ABB spiralem, cuius princi-

principium A, terminus B, à parabola, cuius item A est quasi principium, B autem terminus, aptissimè exhiberi.

Tangat iam parabolam in termino suo B recta BF occurrens axi EA producto, in F, auferet hæc ab axe producto per 35.1.con. rectam AF, æqualem ipsi AE, hoc est ipsi BCB, quã ostendimus repræsentare peripheriam circuli, planè quemadmodum tangens spiralem in termino spiræ B, auferebat ex eâdem linea æqualem eiusdẽ circuli peripherię. Non minus igitur parabolæ, quàm spirali conuenit hæc proprietas. Quod erat demonstrandum.



Quòd si AE siue BB æqualis ponatur peripherię primi circuli, transferaturq; parabola ADBK ad partem alteram in H, (quod fiet si ex G puncto medio rectæ AB erigatur pro axe GH quæ sit quarta pars AE, siue AF.) Aliter, & fortasse adhuc maior orietur similitudo. Nam si BF tangat parabolam in B, dico quod abscindat AF æqualem peripheriæ primi circuli. Producatur enim axis GH in K; eritque per 35.1.con. KG bisecta in H, adeoque GK dupla est ipsius GH. Est verò & FA dupla ipsius KG, cum FA sit ad KG, vt AB ad GB. Ergo FA quadrupla est axis HG. sed etiam AE, hoc est ex hypothesi peripheria primi circuli, ex constructione quadrupla est ipsius HG. Æquales igitur sunt, recta FA, quæ aufertur à tangente parabolam, & peripheria primi circuli.

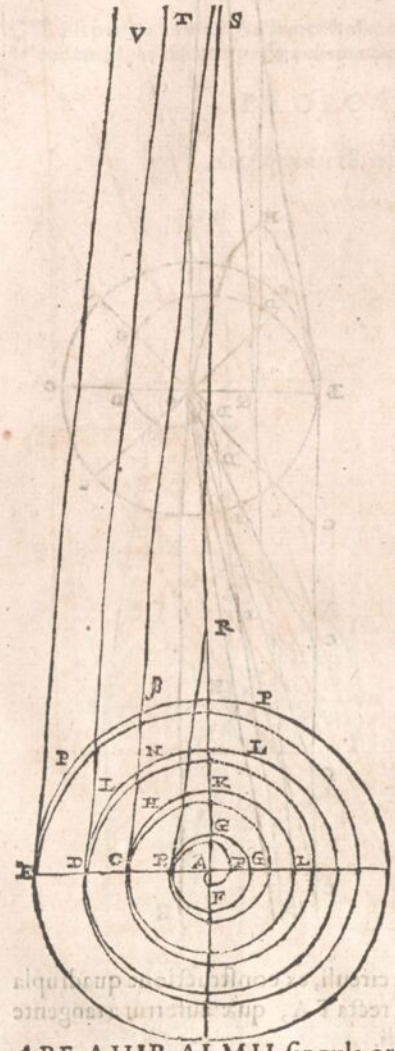
Iam subsumo: atqui recta, quæ spiralem tangit in eodem puncto B, etiam abscindit rectam AF æqualem peripheriæ primi circuli: omnimoda igitur vtrimque similitudo. Quod oportebat ostendere.

Corollarium.

EX his sequitur, posito quod recta AF æqualis sit peripheriæ axis parabolę GH quarta pars ipsius AF, lineam FB spiram & parabolam in eodem B puncto contingere.

PROPOSITIO X.

Archimedis 19. cum manifesto 8. parabolæ applicatur.



AT si spiralem ex secunda reuolutione ortam in termino (C) tetigerit recta linea, & à principio spiræ (A) ducatur aliqua ad angulos rectos lineæ, quæ sit initium reuolutionis: ipsa concidet in tangentem, & erit recta media, inter tangentem & principium spiræ (recta nempè AS) dupla circumferentiæ secundi circuli.

Hoc ipsum modò demonstrandū est. quod si spiralem ex quacunque circumuolutione natam tangat quędam recta in termino spiræ, tum ab initio spiralis ducatur linea recta ad principium reuolutionis, cadet in tangentem, totuplexq; erit circumferentiæ circuli, quotus est numerus reuolutionis denominatus ab eodem numero.

APPLICATIO PARABOLÆ.

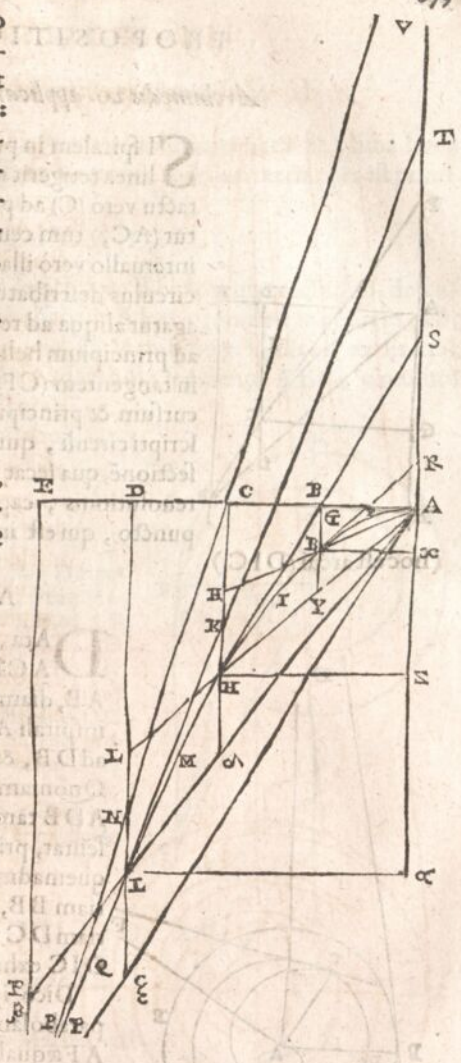
DAta sit spiralis quotuis reuolutionum & parabola, ABLP, cuius axis sit Aα, tangens AE, ex qua sume tot æquales partes AB, BC, CD, DE quot reuolutionibus data spiralis constat, & ex punctis B, C, D, E, ducantur diametri secantes parabolam in B, H, L, P, iunganturque AB, AH, AL, AP, quæ producantur in H, L, P. Patet igitur ex propositionibus primis, præsertim ex 4. huius, singula segmenta parabolica ABF, AHIB, ALMH singula ordine spiralia spacia; singulas verò rectas BGB, HKH, LNL, PβP singulas quoque ordine suo peripherias BGB, HKL, LNL, PβP per omnia repræsentare. Deinde punctam A principium spiræ; puncta verò B, H, L, P, terminos spirarum B, C, D, E referunt. Axis demum AX, qui normalis est ad AE productus exhibet lineam quæ à principio spiræ ad AE normalis ducitur.

Dico igitur, si segmentum parabolicum AHIB referens secundum spacium

ſpacium tangat in termino ſuo H recta HS abſcindi AS duplam rectę HKH quæ refert ſecũdam peripheriam HKH: & ſi tertium ſegmentum parabolicum ALMH repræſentans tertium ſpacium in termino ſuo L tangat LT, abſcindi AT triplam ipſius LNL, quę referebat tertiam peripheriam LNL. Atque ita deinceps ſemper, &c.

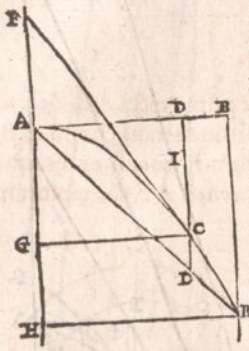
Demonſtratio.

DVcantur BX, HZ, Lα, &c. parallelæ ad AE, & BB, CH, DL, &c. producantur in γ, δ, ξ, &c. CH eſt ad HKH, vt BB ad BY, hoc eſt per 5. Archim. de ſpir. vt AY ad YH, hoc eſt vt AB ad BC. Quare, cùm ex conſtr. AB, BC æquales ſint, etiam CH, HKH æquales ſunt. Ergo CKH, hoc eſt AZ, hoc eſt per 35. 1. conico. AS, dupla eſt ipſius HKH. ſimiliter DL eſt ad LNL, vt CKH ad Hδ, id eſt vt Aδ ad δL, id eſt vt AC ad CD. Quare cùm AC dupla ſit CD ex conſtr. etiam DL dupla eſt ipſius LNL. Ergo DNL hoc eſt Aα, hoc eſt per 35. 1. conic. AT, tripla eſt ipſius LNL. Eadem erit in cæteris demonſtratio. Mirabiliter igitur rurſum ſymbolizant ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO XI.

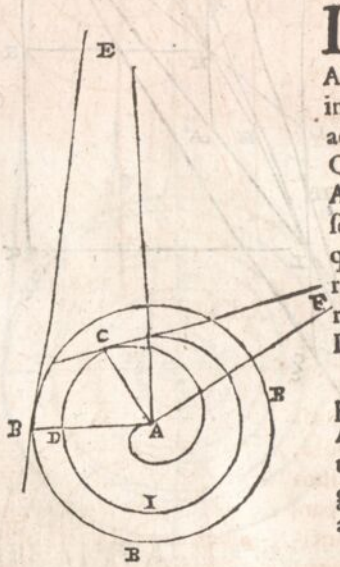
Archimedis 20. applicatur parabolæ.



(hoc est arcui DIC.)

SI spiralem in prima reuolutione factam recta linea tetigerit non in termino spiræ (B) à contactu verò (C) ad principium volutæ, recta iungatur (AC,) tum centro quidem principio volutæ, interuallo verò illa iuncta (interuallo nempè AC) circulus describatur: à principio præterea spiralis agatur aliqua ad rectos angulos ei, quę à contactu ad principium helicis iungitur (nempè AF,) cadet in tangentem (CF,) & erit recta (CF) inter concursum & principium helicis, æqualis arcui descripti circuli, qui intercedit inter contactum & sectionē, qua secat descriptus circulus principium reuolutionis, capto in antecedentibus arcu à puncto, qui est in principio circumuolutionis

APPLICATIO.



DAta sit spiralis ACB, & parabola ACB cuius axis sit AH, tangens AB, diameter BB subtensa AB. Fiat vt inspirali AD ad DB, ita in parabola AD ad DB, & ducatur DCD parallela BB. Quoniam igitur (vt ostendi in 13. huius) ADB tam superior quàm inferior repręsentat, primam rectam in spirali ADB, quemadmodum recta BB refert peripheriam BB, ita recta DCD refert peripheriam DCID. Ex quo iam sequitur arcum DIC exhiberi à recta DIC.

Dico igitur si recta quæpiam tangat parabolam in C, abscindi ex axe producto AF æqualem ipsi, DIC, quæ repræsentabat arcum DIC, planè vt in spirali tangens CF auferebat AF æqualem eidem arcui DIC.

Demonstratio.

DVcatur CG parallela ad AB, per 35.1. Conic. FA æqualis est AG, hoc est DC. rursum igitur habetur similitudo. Quod erat demonstrandum.

Manifestum Archimedis 9. quod propositioni 19. subiungitur, eâdem prorsus ratione applicandum lectori relinquo.

PRO.

PROPOSITIO XII.

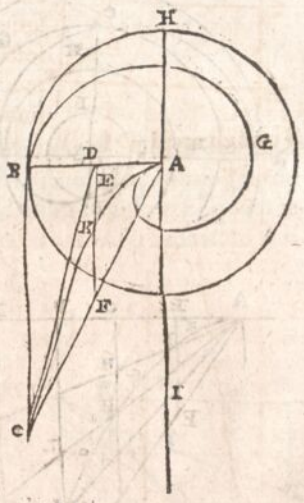
Archimedis 24. applicatur parabolæ.

COmprehensum à spirali ex prima reuolutione nata & prima linea (A B) quæ principium est reuolutionis, spacium tertia pars est primi circuli.

APPLICATIO.

SIt A G B prima voluta cum suo circulo B H, & prima recta A B; describatur autem parabola axem habens A I ac proinde tangentem A B, ductâque B C parallelâ axi, iunge A C. Manifestum igitur est ex ijs quę diximus 1. & 3. propositi. spiralem à parabolæ segmento A E C, circulum verò à triangulo A B C repręsentari.

Dico A E C segmentum parabolę tertiam esse partem, trianguli A B C.



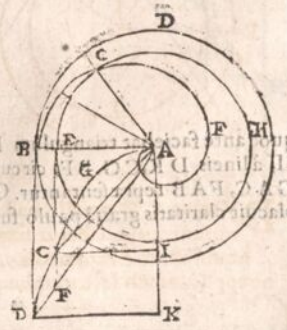
Demonstratio.

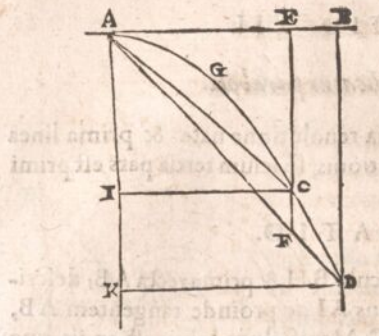
BIsectâ A B in D, iunge C D, & duc D F parallelam ad B C, hoc est ad A I. Per 5. Archim. de quad. parabol. D K est ad K F, vt A F ad F C, hoc est vt A D ad D B. Quare cùm A D sit par ipsi D B, erit & D K ipsi K F. Ergo per 33. 1. Conic. C D tangit parabolam in C. Atqui parabola A E C est duæ tertiæ trianguli A D C cuius duo latera tangunt parabolam, (per propos. 137. libri nostri de parabola) ac proinde vna tertia trianguli A B C, quod duplum est alterius. Igitur etiam hæc nobilissima spiralium proprietas conuenit parabolæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

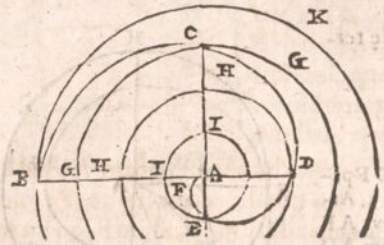
Pappi 21. l. 4. applicatur parabolæ.

PAppus l. 4. Collectionum Mathematicarum prop. 21. demonstrat non solũ, quod fecit Archimedes, totum spacium spirale primum B C F A B tertiam esse partem circuli primi B H: sed etiam ex principio spiræ A ductâ vtcunque A C, & centro A per C descripto circulo E C H, spacium spirale C F A C tertiam esse partem sectoris E H C.

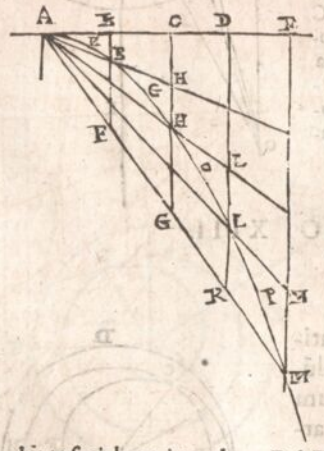




Hanc quoque proprietatem in parabola demonstrabimus. sit enim parabola A C D cuius tangens sit A B, diameter B D, & ducta A C, ex C duc C E parallelam ad B D. quemadmodum ergo triangulum A B D repræsentat circulum primũ A B D, ita triangulum A E F dici poterit referre circulum A E C H, proindeque triangulum A C E repræsentare sectorem E H C, & quemadmodum parabola A C D refert spiralem B C F A, ita segmentum parabolicum A C G exhibere poterit segmẽtum spirale A F C. Quare cùm iuxta ea quæ diximus prop. præcedenti, triangulum A E C triplum segmenti A C G. Etiam hîc symbolizatio est manifesta. Quod erat demonstrandum.



Obseruandum hîc est segmenta parabolæ A B K, A H G B, A L O H, A M P L, repræsentare posse non solùm singula volutę spacia, etiam ex pluribus reuolutionibus orta, sed etiam eiusdem B C D E F spacij spiralis segmenta, sit vt segmentum parabolæ A B K respondeat segmento spirali A F E, segmentum verò A H G B segmento E A D & sic deinceps. Hoc tamen vlterius annotandum: quando segmenta parabolica referunt spacia diuersarum reuolutionum, singularum reuolutionum peripheriæ (vt in præcedẽtibus sæpius dictum) repræsentantur à lineis B B, H H, L L, M M, ipsis verò circulis, vt prop. 4. huius diximus, triangula B A B, H A H, L A L, M A M respondent: quando verò segmenta parabolica repræsentant segmenta eiusdem circumuolutionis, sicut ante segmentum A B K referebat primum spacium B C D F F, ita iam tota parabola A M O repræsentat primum spacium B C D E F, & totum triangulum M A E totum primum circulum A B K exhibet quod ante faciebat triangulum B A B: peripheriæ autem segmentorum G G, H H, I I, à lineis D K, C G, B F, circuli quoque G A G, H A H, I A I à triangulis K A D, G A C, F A B repræsentantur. Quod hoc loco, quamuis prop. 11. huius insinuauerim, placuit claritatis gratiâ paulò fusius explicare.



PRO-

PROPOSITIO XIV.

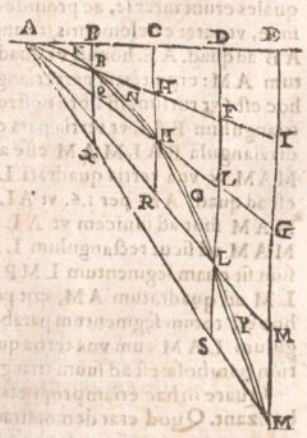
Archimedis 25. applicatur parabolæ.



SPatium ſub helica (B M C) ex ſecunda reuolutione deſcripta & recta linea ſecunda, eius quæ eſt in principio reuolutionis (B C) ad ſecũdum circulum, hanc habet rationem, quam habent 7. ad 12. quæ eadem eſt quam habent hæc duo, nempè quod comprehenditur ſub radio ſecundi circuli & radio primi circuli, & tertia pars quadrati exceſſus, quo excedit radius ſecundi circuli, radium primi circuli, ad quadratum à radio ſecundi circuli, hoc eſt quam habet rectãgulum C A B cum vna tertia quadrati B C, ad quadratum A C.

Manifeſti autem Archimedis, quoniam verboſius eſt, quàm vt illud libeat deſcribere, ſenſum paucis reddo: eſto ſpiralis & quacunque reuolutione orta D E: eam habet proportionem ad ſuum circulum E, quam rectangulum D A E, vna cum quadrati D E tertia parte ad quadratum A E.

APPLICATIO.



ESto parabola A H M, cuius tangens in quotlibet æquales partes in punctis B, C, D, &c. diuidatur, ductiſq; diametris B B, C H H, D L L, E M M, ex A per puncta B, H, L, M, ad parabolam poſita ducantur A B H, A H L, A L M. Patet igitur ex ſæpè iam demonſtratis, ſegmenta parabolica A B K, A H N B, &c. ſingulas reuolutiones referre, rectas verò B B, H H, L L, &c. repræſentare ſingulas ordine peripherias, ac proinde à triangulis A B B, A H H, A L L, A M M ſingulos circulos exhiberi: rectas verò A K, A L, &c. ſiue A B, A C, &c. diametris in ſpirali A B, A C, A D E reſpondere.

Dico primò ſegmentum A H N B eſſe ad triangulum A H H, vt 7. ad 12. hoc eſt vt rectangulum B A H cum vna tertia quadrati B H, ad quadratum A H.

Demonſtratio.

IVngatur B H, & producatur A H, in F, I; & B B, in Q. Triangulum H B A C (vt patet ex elementis) quadruplum eſt trianguli B A B: ſed triangulum B A B

per



per 12. hui. triplũ est segmẽti BAK: Ergo HAC duodecuplum est segmenti BAK. Et quoniam per 5. Archim. de quad. parab. BB est ad BQ, vt AQ ad QH, hoc est vt CB ad BA; estque AB par BC, etiam BB par est ipsi BQ; ac proinde & CH ipsi HH. Quare etiam triangulũ HAH æquale est triangulo HAC, sed HAC, vt iam ostendi, est duodecuplum segmẽti ABK: ergo & HAH eiusdem est duodecuplum. Ergo ABH triangulum dimidium ipsius HAH, est sextuplum eiusdem segmenti. Atqui, vt ostendimus in libro de parabola, [a] segmentum BHN, æquatur segmento AKB. Ergo ABH triangulum sextuplum est segmenti BNH. Ex quo manifestum iam est segmentum parabolicũ AHNB esse ad triangulum HAH vt 7. ad 12. quare etiam hic, &c.

[a] *Prop. 24. lib. de parabola.*

Dico secundò: quoduis segmentum parabolicum (verbi gratia) quartum, AMPL, esse ad suum triangulũ MAM vt rectangulum LAM, vna cum vna tertia quadrati LM, ad quadratum AM.

Producantur ARL in M & ABH, AHL, in I, G & BB in X, iungaturque LM. EI est ad IM 2, vt BB ad BX, hoc est per 5. Archim. de quad. parab. vt AX ad XM, hoc est vt AB ad BE. sed AB est ipsius BE vna tertia EI ipsius EM 2 est vna tertia. Ergo EI ipsius EM 2 est vna quarta. Rursum MM est ad ME, vt SL ad LD, hoc est vt MS ad SA, hoc est vt ED ad DA. sed ED est vna tertia ipsius DA. Ergo & MM vna tertia est ipsius ME. Ergo MM est vna quarta ipsius ME 2. Cùm igitur tam EI quàm MM eiusdem ME sint vna quarta, æquales erunt inter se, ac proinde etiam triangula M 2 AM, EAI æqualia sunt. Deinde, vt patet ex elementis, triangulum BAB est ad triangulum EAI, vt quadratũ AB ad quad. AE. hoc est vt quad. DE ad quad. AE, hoc est vt quad. LM ad quadratum AM: ergo tertia pars trianguli BAB hoc est segmentum parabolicum ABK, hoc est (vt rursum in libro nostro de parabolà ostendimus) segmentum LMP, est ad triangulum EAI, vt tertia pars quadrati LM ad quadratum AM. Atqui antè ostendi triangula EAI, MAM esse æqualia: ergo segmentum LMP est ad triangulum MAM vt vna tertia quadrati LM ad quadr. AM. Præterea rectangulum LAM 2 est ad quad. AM per 1.6. vt AL ad AM: sed etiam par eandem, triangula AML, MAM sunt ad inuicem vt AL ad AM. Ergo triangulum AML ad triangulum MAM est sicut rectangulum LAM, ad quadratum AM. Quare, cùm antè ostensum sit etiam segmentum LMP esse ad triangulum MAM vt vna tertia quadrati LM ad quadratum AM, erit per 24.5. triangulum AML cum segmento LMP, hoc est totum segmentum parabolicum AMPL, ad triangulum MAM vt rectangulum LAM cum vna tertia quadrati PM ad quadratum AM, hoc est segmentum parabolæ est ad suum triangulum, vt spirale spacium ad suum circulum.

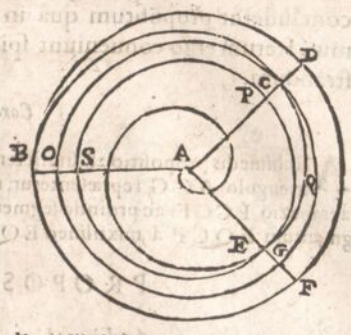
Quare in hac etiam proprietate pulcherrimè ad amussim spiralis & parabola symbolizant. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Archimedis 26. applicatur parabolæ.

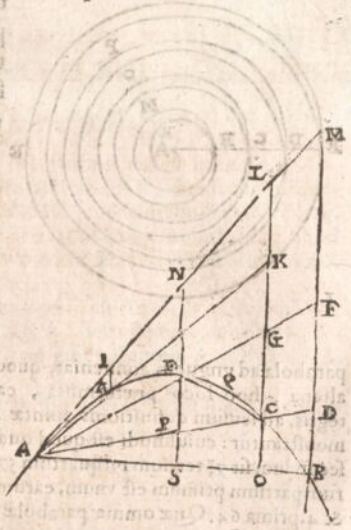
COmprehensum spacium sub spirali quæ est minor ea quæ ex vna reuolutione fit, nec habet terminum principium spiralis, & rectis quæ à termi-

à terminis ipſius in principium ſpiralis ducuntur, ad ſectorem habentem radium æqualem maiori earum quæ à termino ad principium ſpiralis ducitur: arcum verò qui intercipitur inter ductas rectas ſecundùm eaſdem partes ſpiralis hanc habet rationem, quam habent hæc duo, rectangulum comprehenſum ſub rectis à terminis in principium ſpiralis ductis, & tertia pars quadrati exceſſus quo maior dictarum linearum ſuperat minorem ad quadratum maioris linearum à terminis ad ſpiralis principium coniunctarum.



Senſus eſt, quod ductis à principio helicis rectis ACD, AEF, & centro A per C circulo deſcripto GCO, ſpirale ſpacium CAE ſit ad ſectorem circuli ACG vt rectangulum CAE cum vna tertia quadrati GE, ad quadratum AC.

APPLICATIO.



ESto parabola AEB, cuius tangens ſit AM, diameter MB, ſubtenſa AB; & centro A per E ducto in ſpirali circulo ſecante AB in S fiat vt in ſpira ad CD, ita in parabola AO ad OB, vtque in ſpira AE ad EF, ita in parabola AS ad SB, & per puncta, S, O ductis parallelis CL, SEN, per E & C ducantur AEF, ACD. ſpiralis igitur à parabola, diameter AB à ſubtenſa AB, peripheriæ per B, C, E, à parallelis BM, OL, SN; circuli demum AB, AC, AE, à triangulis ABM, AOL, ASN repræſentantur. Et quoniam ex conſtr. ſubtenſa AB ſecta eſt in O & S, vt diameter AB in O & S, & per 5. Archim. de quadratura parabolæ, OL, SN in C, & E, ſimiliter ſectæ ſunt vt AB in O, & S, hoc eſt vt AB in ſpirali in O, & S, hoc eſt vt AB & AF in C & E, hoc eſt perig. l. 4. apud Pappum, vt peripheria per O in punctis C, G; manifeſtum eſt ſectorem ACG repræſentari à triangulo ACG, vti & ſpacium ſpirale ACE à ſegmento ACQE exhibetur.

Dico igitur ſegmentum ACQE eſſe ad triangulum ACG, vt rectangulum OAS vna cum vna tertia quadrati OS ad quadratum AO, plane quemadmodum ſpirale ſpacium erat ad ſectorem, vt rectangulum CAE cum vna tertia quadrati GE ad quadratum AC, ſiue vt rectangulum OAE cum vna tertia quadrati GE ad quadratum AO. Pro conſtructione ſume AI æqualem NL, ductâque per I diametro IH, per H

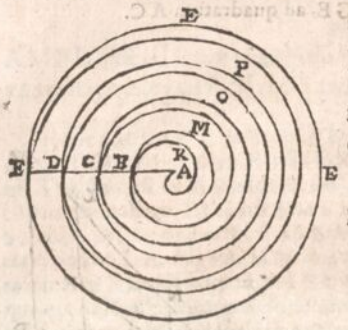
ducatur AHK, iungaturq; EC. Quibus peractis eâdem ratiocinatione concludetur propositum quâ in secunda parte propositionis 14. vsi sumus. Iterum ergo conueniunt spiralis & parabola. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

ARchimedis propositio 28. simili ferè via applicabitur, cùm enim sector ACG à triangulo ACG repræsentetur, manifestum quoque est illius partem PCGE à trapezio PCGE; ac proinde segmentum GEQC à mixtilineo GEGC, & segmentum EQCP à mixtilineo EQCP repræsentari.

PROPOSITIO XVI.

Archimedis 27. applicatur parabolæ.



SPaciorum comprehensorum sub spiralibus & rectis lineis quæ in circulatione sunt, tertium quidem secundi duplum est: quartum verò triplum: quintum autem quadruplũ, & semper quod sequitur, secundùm numeros qui deinceps sunt multiplex est secundi spatij.

Sumit hîc Archimedes spacia non more solito sed pura prout inuicem non includunt. secundum igitur spacium hîc est, id quoddempto primo supereſt ex secundo: tertium id quod demptis primo & secundo & sic deinceps. Sic loqui voluit Archimedes vt certam numerorum progressionem haberet. Nos hac spaciorum acceptione, quamuis etiam in parabola ad vnguem conueniat, quod tetrica sit nonnihil & à communi conceptu aliena, hoc loco prætermisså, ea solum camparabimus quæ de spaciis integris, ad sensum definitionis quintæ libri spiral. acceptis in hac propositione demonstrantur: cuiusmodi est quod quarum partium primum spacium est 1; earum secundum sit 7; tertium 19; quartum 37. &c. Ex quo deducitur etiam illud, quod quarum partium primum est vnum, earum primum cum secundo sit 8, & tria prima 27, & 4. prima 64. Quæ omnia parabolæ ad amussim accommodabimus.

APPLICATIO.

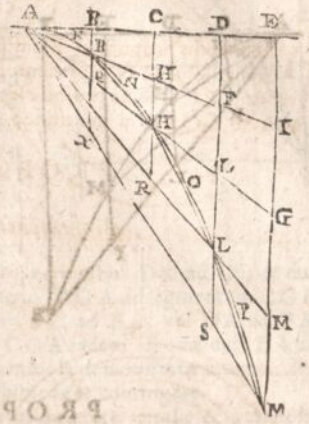
DAta sint voluta quotlibet spirarum, & parabola, diameter ME, subtensa AM, tangens AE in tot partes æquales secta, quot spiras habet voluta: & ab æqualium diuisionum punctis, ducantur BB, CHH, DLL, diametro parallelæ, iunganturque ABHFI, AQLG, ARLM.

Dico quarum partium segmentum primum parabolæ, cum ABE est 1. earum secundum AHNB esse 7; tertium 19. quartum 37.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur rectæ BH, HL, LM. quod primum ad ſecundum ſit vt 1. ad 7. iam oſtenſum eſt in demonſtratione prop. 14. huius. Quod autem tertium ſit 19. ſic demonſtro. Producantur CH, DL, in R, S. ex iis quæ ſub initium demonſtrationis pro 2. aſſertione Prop. 14. allatę diximus, patet lineas SL, FD, imò & LL, LF omnes inter ſe æquales eſſe. Triangulum igitur LAL, eſt triangulum FAD, ſed triangulum FAD, cùm ſit ad triangulum BAB in duplicata ratione DF ad BB, eſt nuncuplum ipſius BAB, hoc eſt vigintiſeptuplũ ſegmẽti ABKA, vtpote partis tertiæ ipſius BAB; quemadmodum in libro de parabola demõſtrauimus: Ergo etiam triangulum LAL eſt vigintiſeptuplum ſegmenti ABKA. Cùm autẽ AC ſit ſubſeſquialtera ipſius AD, etiam AH ipſius AL, ac proinde & triangulũ AHL trianguli LAL ſubſeſquialterum eſt. Ergo cùm LAL ad ſegmentũ ABKA ſit vt 27. ad 1. LAH ad ABK, erit vt 18. ad 1. Atqui ſegmenta HLO, ABK, vt in libro de parabola oſtẽdimus, ſunt æqualia: Ergo addito ad triangulum AHL, ſegmento HLO, totum ſegmentum AHOLA eſt ad ſegmentum ABK vt 19. ad 1.



a *Ad Schol. prop. 24. de parabola.*

b 26 9. *De parabola.*

Similiter demonſtrabimus triangulum MAM, hoc eſt IAE, eſſe decuploſextuplum trianguli BAB, ac proinde triangulum AML eiuſdem eſſe duodecuplum, hoc eſt trigecuploſextuplum ſegmenti ABK: cui ſi addas ſegmentum LMP, quod æquale eſt ſegmento ABK, fiet ſegmentũ totum AMPLA ad ſegmentum ABK vt 37. ad 1.

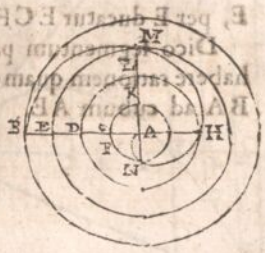
Ex quibus denique illud etiam eſt manifeſtum, quod, cũ ABK ſit 1, AHNA 7; ALOA 19, AMPA 37; ſegmentum AHNKA, hoc eſt prima duo ſint 8; ſegmentum verò ALONKA, hoc eſt tria prima, 27: ſegmentũ autem AMPONKA, hoc eſt quatuor prima ſint 64.

Quare in his quoque tam multis tamque miris proprietatibus ſpiralis, & parabola conueniunt. Quod erat demonſtrandum.

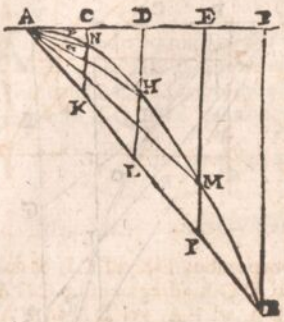
PROPOSITIO XVII.

Pappi 22. libri 4. parabolæ applicatur.

PAppus Collectionum Mathematicarum libro quarto propoſitione vigeſima ſecunda illis quæ ab Archimede propoſitione vigeſima ſeptima demonſtrantur, hoc inſuper addidit Theorema; ſi recta quæ eſt in principio circulationis producta in B, per A principium ſpirę normaliter diuidatur recta MN, ſegmenta quoque AFN, AGNH, HAM, MAB eandem ſeruare rationem, quam 1, 7, 19, 37.



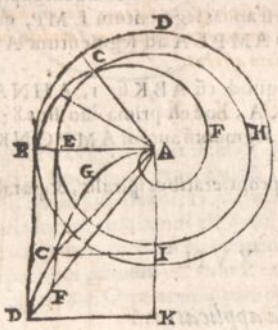
APPLICATIO.



QVod ipſum in parabola exactè repræſentatur. Diuidatur parabolæ tangens in 4. partes æquales ductiſq; diametris CK, DL, EP, BB, iunge AN, AH, AM, AB. Per ea igitur, quæ ad propoſitionem decimam tertiam huius obſeruauimus, manifeſtum eſt, ſegmentum ſpirale AFNG à parabolico AFNG, ſpirale itē ANH à parabolico AGNH, & ſic deinceps, repreſentari. Quare cū prop. 16. huius oſtenſum fuerit eam eſſe ſegmentorum parabolicorum rationem, quæ eſt inter 1, 7, 19, 37, iſtud etiam Pappi theorema exactè conuenit parabolæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Archimedis 29. applicatur parabolæ.



SI in ſpiralem ex vna reuolutione ortam à principio ſpiralis recta linea ceciderit (AC:) ſpacium comprehenſum ſub ſpirali & linea prima (AB) eam habet rationem ad ſpacium comprehēſum ſub prima ſpiralis parte (AFC) & linea incidente, (AC,) quam habet cubus primæ lineæ (AB) ad cubum lineæ incidentis (AC.)

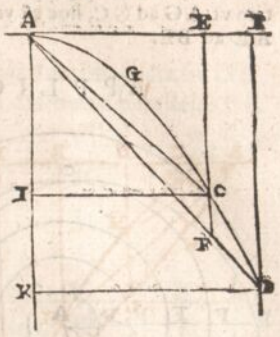
APPLICATIO.

ESto parabola AGCD, & ducto centro A circulo rectam AB ſecante in E, per E ducatur ECF diameter iungaturque AC:

Dico ſegmentum parabolæ ADG ad ſegmentum ACG, eandem habere rationem quam cubus AD, ad cubum AF: hoc eſt quam cubus BA ad cubum AE.

Demon-

Demonſtratio.



DVcatur diameter AK, & CI, FK ad diametrum ordinatim applicatæ. Quoniam igitur per 24. Archim. de quad. parab. parabolæ DAK, CAI ſeſquitertiæ ſunt triangulorum DAK, CAI, parabola eſt ad parabolam vt triangulum ad triangulum, hoc eſt, totum eſt ad totum vt ablatum ad ablatum. Ergo reliquum ſegmentum DGA eſt ad reliquum ſegmentum CGA, vt totum ad totum ſiue ablatum ad ablatum. ſed (vt demonſtrat Clauius ex Commandino ad 23. 6.) proportio ablati trianguli DAK ad ablatum triangulum CAI componitur ex proportionibus DK ad CI, & KA ad IA, hoc eſt ex duplicata rationis DK ad CI per 20. 1. Conicorum. Ergo proportio ſegmenti DGA ad ſegmentum CGA componitur ex proportionibus DK ad CI, & duplicatâ rationis DK ad CI. Ergo proportio ſegmenti DGA ad ſegmentum CGA triplicata eſt rationis DK ad CI, hoc eſt rationis BA ad EA, vel DA ad FA. Ergo proportio ſegmenti DGA ad ſegmentum CGA eadem eſt quæ cubi BA ad cubum EA, aliter autem pleraque in libro de parabola demonſtrata inuenies, ſed nolui meis demonſtrationibus propoſitiones Archimedæas contingere.

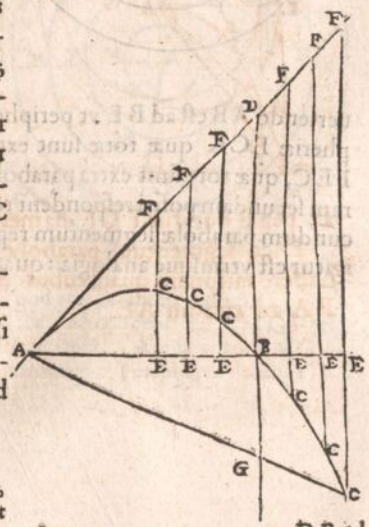
Conueniunt igitur etiam in hac tam eximia proprietate ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

HActenus parabolæ applicauimus quidquid notatu dignum de ſpiralibus vel Archimedes vel Pappus demonſtrauit. Et quidem iſta ſufficiebant vt me promiſſione mea exſoluiſſe videri poſſem. Sed cùm non exiguum ſimilitudinis campum ſupereſſe viderem; ſtatui alias nonnullas parabolæ proprietates viciſſim ſpirali applicare; omnino tamen paucas è multis, ne dum appendix excreſcit in librum, prolixitas lectori moleſtiam afferat.

PROPOSITIO XIX.

EGregia eſt parabolæ proprietas quam prop. 5. de quadratura parabolę Archimedes demonſtrat, noſq; in hoc libro non ſemel citauimus. Parabolam tangat AD, & ſecet diameter eius DB, iungaturque AB. Ducantur deinde quotuis FCE parallelę diametro. Erit perpetuo AE ad EB, vt FC ad CB.



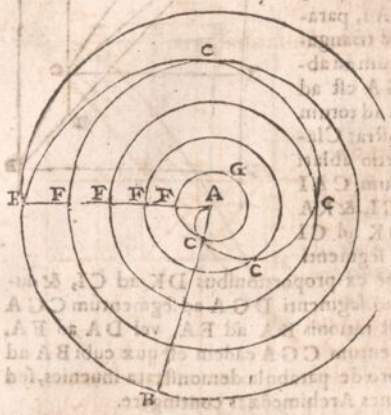
Verùm, quod Archimedes aut neglexit aut nõ aduertit, eadem proprietas reperitur extra parabolam. Nam ſi producatur AB ducanturque diametro parallelę FEC, ſemper AE eſt ad EB vt FC ad CE.

Demonſtratio.

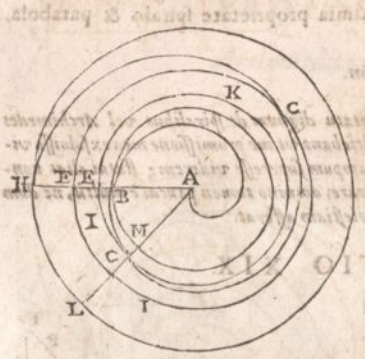
EX A ad vnum punctorum C ducatur AG, cui DB occurrat in G. FE eſt ad EC, vt DB ad

DB ad BG, hoc est per primam Theorematis partem ab Archimede demonstratam vt AG ad GC, hoc est vt AB ad BE. Ergo componendo FC ad CE, vt AE ad BE.

APPLICATVR SPIRALI.



PRima pars theorematis. centro A describantur quotcunque concentrici radium AB secantes in punctis F, & spiralem in punctis C. Patet igitur ex 19. Pappi l. 4. arcum FC esse ad reliquâ peripheriam CGF, vt AF est ad FB. Atqui peripheria tota FEG, respondet in parabola rectæ FCF, & arcus FC qui extra spiram est rectæ FC extra parabolam positæ, arcus quoque CGF, intra spiram cadens rectæ CE intra parabolam. Constat igitur rursum similitudo. Quæ erat demonstranda.



Secundam partem sic applicabimus. sit spira duarum reuolutionum & ducantur peripheriæ concentricæ ECK secantes spiram in punctis C. Erit igitur ducta per C rectâ RML, MC ad ML, id est BE ad BH, vt arcus HL ad totam peripheriam secundi circuli, hoc est vt arcus EIC ad totam peripheriam ECK. sed BH æqualis est AB: Ergo BE est ad AB vt arcus EIC ad peripheriam ECK: & inuertendo AB est ad BE vt peripheria ECK ad arcum EIC. Atqui peripheriæ ECK quæ totæ sunt extra primam spiram, respondent rectis FEC, quæ totę sunt extra parabolam: arcus verò EIC inter AH & spiram secundam positi respondent rectis EC positis inter rectam AE, & secundum parabolæ segmentum repræsentans secundam spiram. Manifesta igitur est vtriusque analogia: quam oportuit demonstrare.



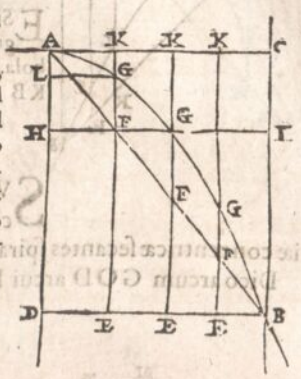
PRO-

PROPOSITIO XX.

PArabolæ AGB diameter sit AD, ad quam ordinatim ducta sit DB, & iungatur AB. Ducantur deinde quotuis diametro parallelæ EK secantes AB in F & parabolam in G:

Dico KG, KF, KE siue CB, esse in continua analogia.

Demonstratio.

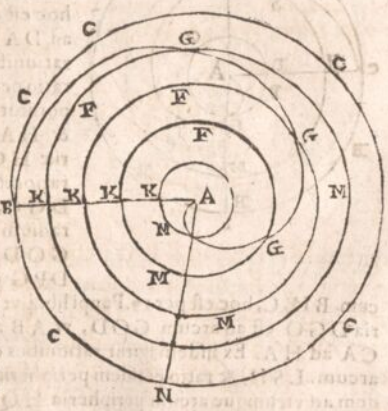


PEr G & F ordinatim applicetur LG, HFI. Quoniam DB est ad HF, vt DA ad HA, per 22. 6. etiam quadratum DB est ad quadratum HF, hoc est ad quadratum LG, vt quadratum DA ad quadratum HA. Atqui per 20. 1. conic. DA est ad LA, vt quadratum DB ad quadratum LG: ergo etiam DA est ad LA, vt quadratum DA ad quadratum HA ergo ratio DA ad LA duplicata est rationis DA ad HA. Ex quo patet DA, HA, LA, ac proinde EK, FK, GK esse in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

APPLICATIO.

SIt iam spiralis AGB, & principium circulationis AB; describantur quotuis primo circulo BC concentrici, secantes spiralem in punctis G, & AB in K.

Dico arcum KMG, circulum KMGF, & peripheriam BCC esse in continua analogia.



Demonstratio.

PEr G ducatur recta AGC. Arcus KMG est ad peripheriam KMGF, vt arcus BCCN ad peripheriam totam BCC, sed arcus BCCN est ad peripheriam BCC, sicut recta AG ad AC, per 19. Pappi lib. 4. ergo arcus KMG est ad peripheriam KMGF, vt AG ad AC, hoc est per Pappi 11. lib. 5. vt peripheria KMGF ad peripheriam BC. Quod erat demonstrandum.

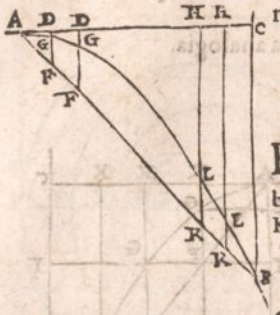
Similitudo in eo sita, quod peripheriæ parallelæ id est concentricæ KMGF referant parallelas KF, KF (vt prop. 13. huius declarauimus:) Arcus verò KMG qui sunt extra spiram referant lineas KG extra parabolam: Peripheria denique BC rectam CB, siue KE repræsenter.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

PArabolam ſubtendat quæuis recta AB, & ſumptis æqualibus AF, BK, ducantur diametri DGF, HLK.

Dico ſemper FG, KL eſſe æquales.



Demonſtratio.

a 47. De parabola.

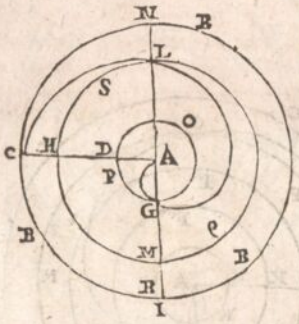
ESt GF ad LK, vt rectangulum AFB ad rectangulum AKB. vti demonſtrauimus in libro de a parabola. Atqui rectangula ſunt æqualia, cum ex hypoth. AF, KB æquales ſint. Ergo & rectæ FG, KL, æquales ſunt.

APPLICATVR SPIRALI.

SVmptis in recta AC æqualibus AD, CH, centro A per D & H, deſcribantur peripheriæ concentricæ ſecantes ſpiralem in G & L.

Dico arcum GOD arcui HL æqualem eſſe.

Demonſtratio.



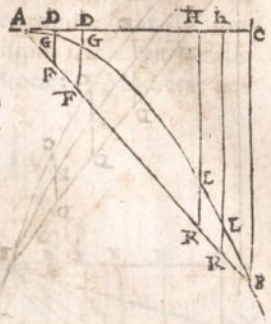
PEr G & L ducantur rectę AMB, ALN. Peripheria HQLS eſt ad arcum LSH, vt AN ad LN per 19. Pappi l. 4. hoc eſt vt AC ad HC, hoc eſt quia ex hypoth. æquatur HC, AD, vt CA ad DA, ſed ratio CA ad DA, componitur ex rationibus CA ad HA, & HA ad DA: Ergo ratio peripheriæ HQLS ad arcum LSH componitur ex hiſce duabus rationibus CA ad HA, & HA ad DA. Similiter ratio eiuſdem peripheriæ HQLS ad arcum GOD, componitur ex rationibus peripheriæ HQLS ad peripheriam DGO, (hoc eſt per 11. l. 4. Pappi, radij HA ad radium DA) & peripheriæ DGO ad arcum GOD (hoc eſt rectæ CA ad HA:) nam arcus DPG eſt ad arcum GOD vt arcus CBI ad arcum BIBC, hoc eſt per 19. Pappi lib. 4. vt AG ad GB: ergo componendo peripheria DGO eſt ad arcum GOD, vt AB ad BG; hoc eſt vt AC ad CD, hoc eſt vt CA ad HA. Ex iiſdem igitur rationibus componitur ratio peripheriæ HQLS ad arcum LSH, & ratio eiuſdem peripheriæ HQLS ad arcum GOD: quare eandem ad vtrumque arcum peripheria HQLS rationem habet. Ergo æquales ſunt arcus illi. Quod erat demonſtrandum.

Similitudo in eo poſita, in vtraque figura ſumptæ fuerunt æquales, in parabola nempè AF, BK, in ſpira AD, CH, peripheriæ per D, & H referunt diametros DF, HK. Tam arcus verò GOD, LSH, qui oſtenſi ſunt æquales eſſe, quàm lineæ FG, KL, quas ſimiliter æquales eſſe demonſtrauimus, intra figuras ſuas exiſtunt, arcus nempè intra ſpiram, lineæ verò intra parabolam.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

ISdem positis quæ superiori propositione, Dico DG, GF, LH esse proportionales.



Demonstratio.

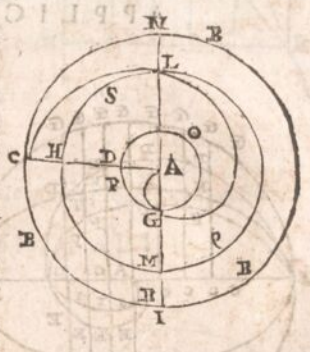
HAnc propositionemcog or ex meis lucubrationibus demonstrare, eo quod Archimedis non sit illius demonstrationem reperies propositione centesima septuagesima libri nostri de parabola.

APPLICATVR SPIRALI.

ISdem quoque positis in spirali, Dico semper arcus DPG, GOD, HQL esse in continua analogia.

Demonstratio.

ARcus DPG est ad arcum GOD, vt arcus CBI ad arcum BINC hoc est per 13. Pappi lib. 4. vt AG ad GI, siue AD ad DC. similiter arcus HQL est ad arcum LSH, vt arcus CIN ad arcum, CN hoc est vt AL ad LN, siue AH ad HC. ergo inuertendo arcus LSH est ad arcum LQH; vt CH ad HA, hoc est vt AD ad DC, (cùm ex hypoth. CH, AD, sint æquales) hoc est, sicut iam ostendimus vt arcus DPG ad arcum GOD: sed arcus HSL per præced. æqualis est arcui GOD; ergo etiam arcus GOD est ad arcum HQL, vt arcus DPG ad arcum GOD. sunt igitur tres arcus DPG, GOD, HQL in continua analogia. Quod erat demonstrandum.



Similitudo in eo posita quod arcus DPG extra spiram, rectam DG extra parabolam; arcus DOG intra spiram rectam GF intra parabolam; arcus denique HQL iterum extra spiram, rectam HL rursum quoque extra parabolam repræsentent.

Corollarium.

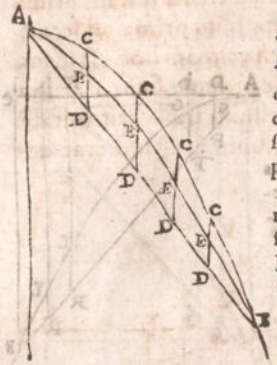
EX positis licet inferre etiam spatium spirali linea & circuli perimetro DBG, terminatum æquari spatio spirali LC & arcu LH clauso: & in hoc symbolizatio perseuerat, nam AGF, LBK parabolica spatia inter se sunt æqualia.

PROPOSITIO XXIII.

SIt parabola ACB, quam subtendat ADB. Ducantur diametri CD, quas biseca in punctis E.

Dico puncta E esse ad parabolam, quæ sit dimidia primæ.

Demonſtratio.



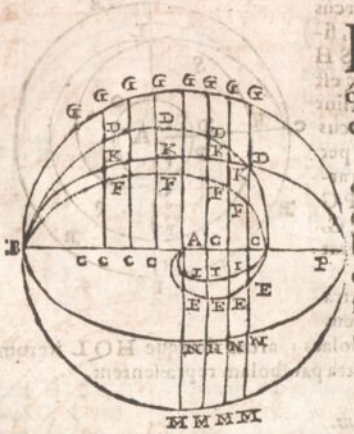
a 47. De parabola.

REctangula A D B inter ſe eandem habent proportionem quam rectæ C D, vt a oſtendimus in libro de parabola. ſed rectæ E D ſunt inter ſe vt rectæ C D, cùm ſint earum dimidiæ: ergo & rectæ E D ſunt inter ſe vt rectangula. Ergo puncta E ſunt ad parabolam per propoſit. 329. de parabola. Quod erat primum.

Cogitentur deinde in parabola A C B ductæ eſſe rectæ C C, in parabola verò A E B rectæ E E, ſic vt vtrique inſcripta ſint trapezia C C D D E E, D D. facilè oſtendetur (quod breuitatis cauſa hîc omitto) tot duci poſſe diametros C D ac rectas E E, & tot proinde Trapezia inſcribi, vt ſi auferantur, ex vtraque parabola relinquantur ſuperficies minores datâ. Atqui Trapezia parabolæ A C B ſimul ſumpta dupla ſunt, Trapeziorum parabolæ A E B ſimul ſumptarum, vt patet ex elementis cum rectæ C D duplæ ſint rectarum E D ergo per ea quæ in libro b progreſſionum demonſtrauimus, parabola A C B dupla eſt parabolæ A E B. Quod facilè etiam quiuis Geometra Archimedæo diſcurſu aut Euclidæo lib. 12. demonſtrabit. Puncta igitur E ſunt ad parabolam quæ dimidia ſit primæ. Quod erat demonſtrandum.

b 85. De progreſſ.

APPLICATVR SPIRÆ.



INtra ſpiralem A E D B ducantur D C, D C, E C, E C parallelæ inter ſe, adeoque normales ad rectam C A B, & biſecentur in punctis F, F, I, I.

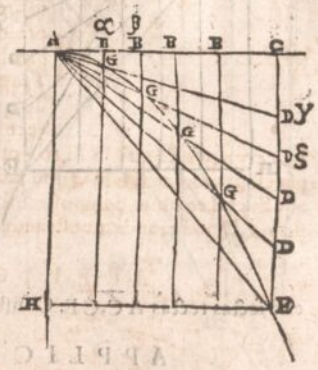
Dico puncta F F, I, I eſſe ad ſpiralem, quæ dimidia ſit ſpiralis primæ ac proinde etiam hic ſpiralem cũ parabola ſymbolizare: ſed hæc ſecunda ſpira non erit circularis, at elliptica. Quod futura ſit dimidia ſpiralis primæ eodem modo demonſtrabitur quo in parabola. Quod futura ſit ſpiralis elliptica ſic oſtendo. Rectæ D C, D C; E C, E C producantur vſque ad peripheriam circuli in G & M; & biſeca rectas G C in K. rectas verò M C in N. Erunt puncta K, K; E, E ad ellipſim vt colligitur ex Archimed. 5. de conoid. Quoniam igitur rectę D C ſunt ad rectas F C, vt rectæ G C ad rectas K C, nam ex conſtructione vtræque biſectæ ſunt. Erunt permutando & inuertendo rectæ K C ad rectas F C, vt rectæ G C ad rectas D C. Similiter oſtendemus rectas N C eſſe ad rectas I C, vt rectæ M C ad rectas E C. habet igitur ſeſe quoad hanc proprietatem ellipſis ad ſpiralem ſecundam, vt circulus ad primam. Sed clarius adhuc oſtendamus propoſitum. Per Archimed. 5. de Conoid. circulus G Q eſt ad ellipſim K K, vt B P, hoc

eſt

est G A M, ad K A N hoc est vt G A ad K A. Quare cùm ex hypothesi G A bisecta sit in K, circulus duplus erit ellipseos, sed etiam spiralis prima dupla est secundæ. Ergo vt circulus ad ellipsim ita spira prima ad secundam: & permutando vt circulus se habet ad spiram primam hoc est suam, ita ellipsis ad secundam hoc est etiam ad suam, ac proinde sicut circulus triplus est sui spacij nempè spiralis spacij, sic & ellipsis tripla erit spiralis spacij sui A I F B. Meritò itaque dicetur spiralis elliptica. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

PArallelogrammum rectangulum A E habeat latera A C, C E similiter diuisa in punctis B, & D, ductisque B Q parallelis ad A H, ex A per puncta D describantur rectæ quæ parallelis occurrant in punctis G.



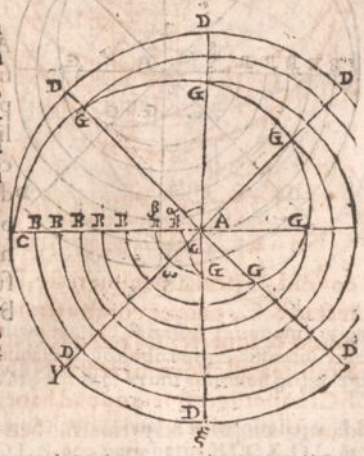
Dico puncta G esse ad parabolam.

Demonstratio.

PArallelarum vna B G producatur donec occurrat ipsi A E in puncto F. A F est ad F E, vt A B ad B C, sed A B est ad B C vt C D ad D E, sunt enim A C, E E similiter sectæ ex hypothesi. Ergo A F est ad F E, vt C D ad D E; hoc est (quemadmodum ex elem. facilè demonstrabitur) vt B G ad G F. Ergo patet ex 5. Archim. de quadratura parab. punctum G esse ad parabolam. Similiter ostendemus de quibuslibet punctis D. Patet igitur propositionis veritas.

APPLICATIO SPIRALI.

PEripheria primi circuli eiusque radius A C similiter sint diuisa in punctis D, D, & B, B: Ductis autem ex centro A ad puncta D rectis A, D, centro A per singula puncta B ducantur arcus B G, ea ratione quam figura exhibet, occurrentes lineis A D in punctis, G:



Dico puncta G ad spiralem esse.

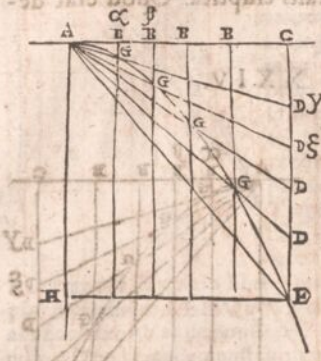
Demonstratio.

CVm enim radius A C, & peripheria circuli similiter sint diuisæ in punctis, B, B, & D D, erit vt A B, ad B C, hoc est vt A G ad G D, ita arcus C D ad reliquam peripheriam D D C. Ex quo patet punctum G ad spiralem esse. Similiter ostendemus de reliquis G punctis.

Similitudo in eo sita, quod A spiræ principium pũcto A in parabola, radius A C, &

peripheria D D, similiter diuisæ, rectis A C, C E similiter quoque sectis; arcus concentrici B G, B G parallelis B G; rectæ demum A D in spirali, rectis A D in parabola respondeant ad amussim quemadmodum ad propos. 13. huius docuimus. Conuenit igitur spiralis cum parabola. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.



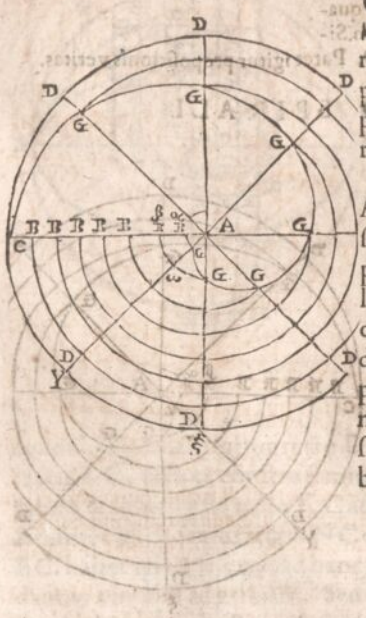
PArabolę tangens sit A C, diametri verò illam secantes B G, B G quotcunque. Per puncta G, G, ex A ducantur rectę quæ occurrant diametrorum vltimæ C E, in punctis D D:

Dico rectas A C, C E similiter esse sectas & æquales proinde fore omnes D D, si B B fuerint æquales.

Demonstratio.

IVngatur A E, & parallelarum vna B G occurrat ipsi A E in F. A B est ad B C, vt A F ad F E, hoc est per 5. Archim. de quad. parab. vt B G ad G F; hoc est vt C D ad D G. similiter ostendemus in singulis punctis, B, B & D, D similiter esse sectas rectas A C, C E. Constat igitur veritas theorematis.

APPLICATIO SPIRALI.



SIt spiralis A G C: & centro A ductę sint quotcunque concentricæ peripheriæ B G occurrentes spirali in punctis G, G; ducantur autem ex A per puncta G, ad primi circuli peripheriam rectæ A D, A D.

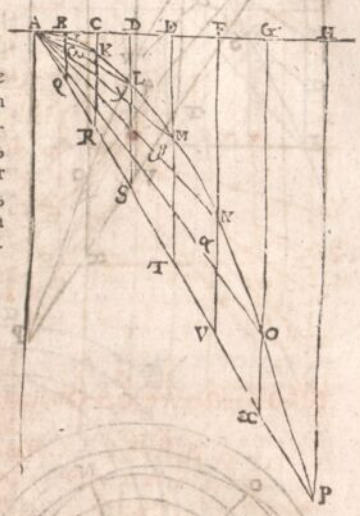
Dico peripheriam D D D, & rectam A C similiter esse diuisas. demonstratio similis est demonstrationi præcedentis petita ex ipsa generatione spiralis. Similitudo in eo sita, quod peripheriæ B G, concentricæ seu parallelę, parallelas seu diametros B G; rectæ A C, ipsam A C in parabola, & peripheria D D D extimam diametrum C E repręsentet. Rursum igitur conuenit spiralis cum parabola. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

DAta sit parabola AMP, quam tangat AH diuisa in continuè proportionales AB, AC, AD, &c. ductisque diametris BI, CK, DL, EM, &c. iunge AI, AK, AL, AM, &c.

Dico segmenta omnia parabolica AI, AIK, AKL, AIKLM, AIKLMN, esse continuè proportionalia.

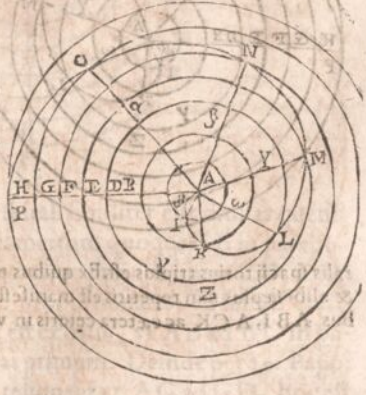


Demonstratio.

QVoniam sunt in ratione continua lineæ AB, AC, AD, &c. etiam cubi harum linearum erunt in proportione continua. Atqui per 18. huius segmẽta tota parabolica AI, AKIA, ALIA, AMIA, &c. eandem inter se proportionem habent quã cubi AB, AC, AD, AE, &c. Ergo etiam dicta segmenta sunt in continua. Ergo per 1. l. nostri progressionum etiam sunt illorum differentiæ, segmenta nempè AI, AIK, AKL, AωLM, &c. continuè proportionalia. Quod erat demonstrandum.

APPLICATVR SPIRALI.

DAta sit spiralis AINH, cuius linea, quæ est in principio circulationis, nempè AH diuisa sit in continuè proportionales AB, AC, AD, &c. ac centro A interuallis B, C, D, E, F, G descriptis circulis qui spiram secent in I, K, L, M, N, O, iungantur AI, AK, AL, &c.



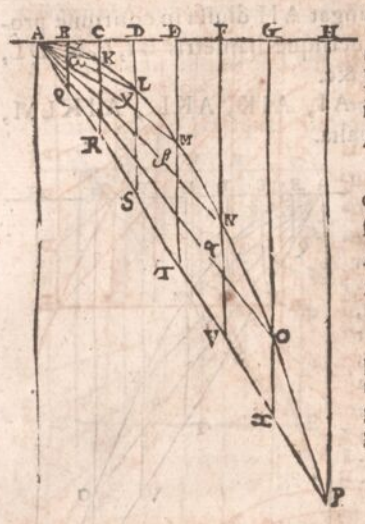
Dico segmenta omnia spiralia AI, AIK, AIKL, AIKLM, &c. esse continuè proportionalia.

Demonstratio.

PLanè eadem quæ in parabola, seruatis etiam ijsdem vtrobiq; litteris: quandoquidem enim per 29. Archim. de spirali, segmenta spiralia tota AGI, AKβA, ALβA, AMβA, &c. vt cubi rectarũ AI, AK, AL, AM, &c. hoc est rectorum AB, AC, AD, AE, &c. sintque hi in continua, ob continuam suorum laterum rationem, etiam dicta segmenta spiralia erunt in continua ratione; ac proinde eorum differentiæ segmenta nempè AHOαA, AONβA, ANMγA, &c. erunt continuè proportionalia. Quod erat demonstrandum.

Symbolizat igitur rursum mirabiliter vtraque figura. Nam AK in spirali ipsi AH in parabola siue AP: BIQ, verò CKR, DLS, &c. peripherijs BI, CK, DL, &c. respondent. Vnde & segmenta segmentis respondeant necesse est.

PROPOSITIO XXVII.

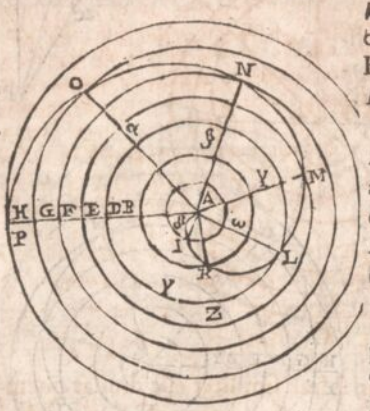


SIt parabola AMP quam tangat AH. Ducantur diametri BI, CK, DL & quotuis aliæ secantes parabolam in punctis I, K, L, &c. iunganturq; AI, AK, AL, AM, &c.

Dico segmenta omnia parabolica contenta parabolæ perimetro & rectâ subtensa, nempè AI, AKIA, AILωA, AIMγA, &c. omnibus triangulis ABI, ACK, ADL, &c. esse proportionalia.

Demonstratio petenda ex ijs, quæ diximus prop. 12. huius, quæque sub finem libri de parabola demonstrauimus propositione 236. singula illa triangula esse tripla singulorum segmentorum sibi inclusorum.

APPLICATIO.



SIt iam spiralis ANH; & centro A ductis quotcunque concentricis spiralem secantibus in punctis, I, K, L, M, &c. iungantur AI, AK, AL, AM, &c.

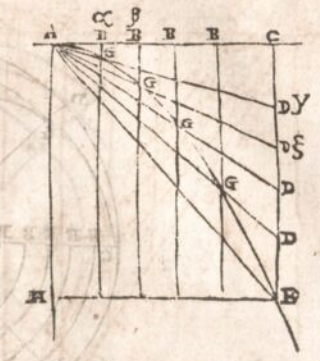
Dico segmenta spiralia AβI, AβIKA, AβILωA, AβIMγA, &c. ac denuò totum spirale spacium sectoribus ABI, ACK, ADYL, AEZM, &c. Et toti denique primo circulo proportionalia esse.

Demonstratio facilis est ex ijs quæ à Pappo l. 4. prop. 21. & ab Archimede prop. 24. demonstrantur: singuli enim sectores tripli sunt segmentorum spiralium sibi inclusorum; totus etiam primus circulus, spiralis spacij totius triplus est. Ex quibus patet propositum. Similitudo etiam ex prop. 13. & alibi sæpius iam repetitis est manifesta; triangula enim ABI, ACK, &c. sectoribus ABI, ACK ac cætera cæteris in vtraque figura respondent.

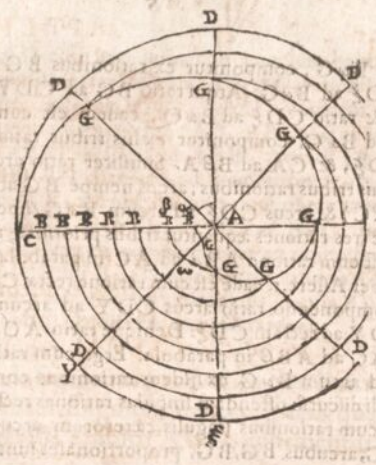
PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Sit parabola A G E, quam tangat A C, secet verò diameter C E, iungaturque A E. Ducantur deinde quotuis diametri occurrentes parabolæ in G; punctis G G ducanturque A G D:



Sit quoque spiralis A G G & primus circulus C D D, radius A C. Centro autem A ducantur totidem arcus concentrici quot in parabola ductæ fuerant diametri, qui spirali occurrant in punctis G, & radium A C similiter diuidant in punctis B, vt secta fuerat in parabola A C. Denique ex A per G puncta ducantur rectæ A G D.

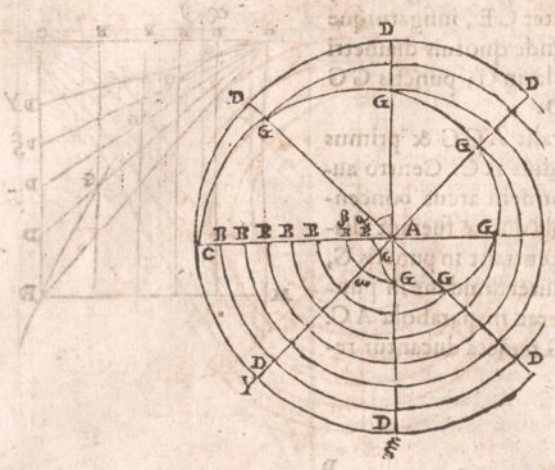


Dico primò omnes rectas A G D in spirali similiter esse diuisas quemadmodum sunt A G D in parabola. Diametrum quoque C E in parabolâ & peripheriam C D D similiter esse sectas, ac proinde lineas C D, D D, D E, arcubus C D, D D, D C, esse proportionales; in spirali enim A G sunt ad G D, vt A B ad B C, hoc est ex datis, vt A B ad B C in parabola, hoc est vt A G ad G D, quod erat primum. Deinde per 19. Pappi lib. 4. arcus C D Y est ad peripheriam reliquam vt A G ad G D, hoc est vt A B ad B C, hoc est ex datis vt in parabola A B ad B C, hoc est per 25. huius vt C D ad D E. similiter igitur diuisæ sunt recta C E & peripheria D D, quod erat alterum è demonstrandis.

Dico secundò singulas diametros B G, B ω G, &c. singulis arcubus concentricis B G, B ω G, &c. esse proportionales.

Demon-

Demonſtratio.



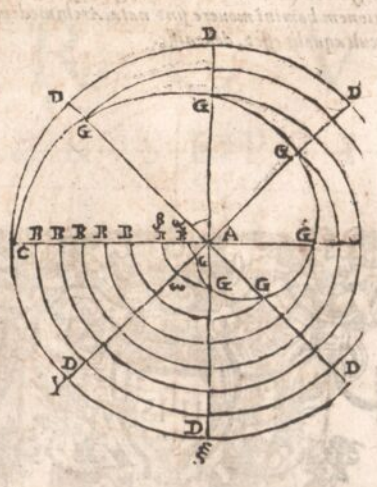
RAtio BG ad BωG, componitur ex rationibus BG ad CDY, & CDY ad CDξ, & CDξ ad BωG. Atqui ratio BG ad CDY, eadem eſt cum ratione ABα ad AC: & ratio CDξ ad BωQ, eadem eſt cum ratione AC ad ABβ, ergo ratio BG ad BωG, componitur ex his tribus rationibus ABα ad AC, & & CDY ad CDξ, & CA ad BβA. Similiter ratio arcus BG ad arcum BωG componitur, ex his tribus rationibus, arcus nempè BG ad arcum CDY, (hoc eſt rectæ ABα ad AC) & arcus CDξ ad arcum BωG (hoc eſt rectæ AC ad rectam ABβ.) Atque hæ tres rationes æquantur tribus prioribus; nam ratio ABα ad AC, in ſpirali eadem eſt cum ratione ABα ad AC in parabola, & ratio arcus CDY ad arcum DY Dξ per Aſſert. 1. eadē eſt cum ratione rectæ CDY ad rectam DYDξ, adeoque etiam componendo ratio arcus CDY ad arcum CDξ eadem eſt cum ratione rectæ CDY ad rectam CDξ: Denique ratio AC ad ABξ, in ſpirali eadem eſt cum ratione AC ad ABβ in parabola. Ergo cùm ratio rectæ BG ad BωG, & ratio arcus BG ad arcum BωG ex iiſdem rationibus componantur, eædem ſunt ſiue æquales. Simili diſcurſu oſtendam ſingulas rationes rectarum cæterarum BG ad BG, eaſdem eſſe cum rationibus ſingulis cæterorum arcuum BG ad BG. Quare diametri BG, BG, arcubus BG, BG, proportionales ſunt: quod erat demonſtrandum.

Dico terriò. Singula triangula CAD, DAD, ſectoribus ſingulis CAD, DAD proportionalia eſſe, triangula enim ſe habent vt baſes CD, DD, & ſectores vt arcus CD, DD. Sed lineæ CD, DD, arcubus per Aſſert. 1. præced. ſunt proportionales. Ergo & triangula ſectoribus proportionalia ſunt.

Dico 4. Singula triangula BAG, BAI, &c. vna cum poſtremo CAE, ſingulis ſectoribus BAG, &c. vna cum circulo toto primo proportionalia eſſe.

Demon-

Demonſtratio.



TRiangula B A G, B A G cùm angulum ad B æqualem habeant, rationem habent adinuicem compoſitam ex laterum AB, B G, rationibus, vt demonſtrat Clauius ad 23. 6. Similiter ſectores B A G, B A G adinuicem rationem habent compoſitam ex rationibus ſemidiametrorum AB, AB, & arcuum B G, BG. Atqui ex hypotheſi ratio A α B in parabola ad A β B, æqualis eſt rationi A α B ad A β B in ſpirali; ratio item B G diametri ad diametrum B ω G, eadem eſt cum ratione arcus B G ad arcum B ω G per Aſſert. 2. propoſit. præcedent. Ergo ratio compoſita ex rationibus, A α B ad A β B, & B G ad B ω G, hoc eſt ratio triangulorum A B G, A β B G eadem eſt cum compoſita ex rationibus A α B ad A β B in ſpirali, & arcus B G ad arcum B ω G; hoc eſt cum ratione ſectoris A α B G, ad ſectorem A B ω G. Igitur permutando patet triangula ſingula B A G ſingulis B A G ſectoribus eſſe proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

Dico quintò. Singula ſegmenta parabolica quæ lineis rectis A G, & curuis A G G continentur, ſingulis ſpiralibus ſpaciis quæ viciſſim lineis rectis A G & curuo ſpiralis ambitu A G G, continentur eſſe proportionalia.

Nam ſingula ſegmenta parabolica per 27. huius ſingulis triangulis B A G ſunt proportionalia. Rurſum per eandem ſingula ſpiralia ſpacia ſingulis ſectoribus B A G proportionalia ſunt. Atqui per Aſſert. quartam triangula ſingula B A G, ſectoribus B A G ſingulis proportionalia ſunt. Ergo & ſegmenta parabolica ſegmentis ſpiralibus ſunt proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

VIdes benigne Lector symbolizationes inter duas figuras spiralem & parabolicam esse tales quæ magnam suspicionem homini mouere sint natæ, Archimedem hac via in cognitionem lineæ quæ perimetro circuli æqualis esset, deuenisse.



QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SEPTIMVS

DE

DVCTV PLANI IN PLANVM.

ARGVMENTVM.

Diuiditur liber hic omnis, in decem partes.

Prima superficies exhibet & communes intersectiones, ortas ex ductu rectilinei in rectilineum: deinde corpora sic producta inter se comparat.

Secunda superficies contemplatur & communes intersectiones, natas ex ductu plani circularis in rectilineum: & corpora sic producta exhibet.

Tertia vniuersales quasdam continet propositiones, reliquis fundamentales.

Quarta in comparationem adducit corpora, orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum illis quæ exsurgunt ex ductu partium circularium in se, vel in alias circulares.

Quinta agit de æquationibus solidorum, quæ gignuntur ex ductu partium circularium, in alias circulares.

Sexta ampliorem continet comparationem corporum ex ductu plani circularis in circulare, cum iis, quæ oriuntur ex ductu partium circularium in ellipticas, parabolicas, hyperbolicas.

Septima contemplatur corpora nata ex ductu plani parabolici in parabolicum.

Octaua corpora huc vsque ex vario planorum inter se ductu nata, reducit ad corpora determinatam habentia altitudinem & basim, vt eorum notitia habeatur.

Nona vsum docet & praxim libri huius; illique applicat lineares propositiones, partim ex Euclide & Pappo Alexandrino, partim ex primo libro nostro petitas.

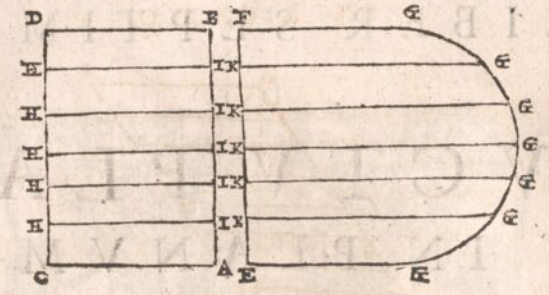
Decima parabolas exhibet virtuales: quæ, quales & cui vsui aptæ sint, suo loco patebit.

DEFINITIONES.

I.

DVctum plani in planum voco, corporis cuiuſcunq; efformationem, ex duabus ſuperficiebus eandē habentibus aut æqualē baſim ortam.

EXPLICATIO.

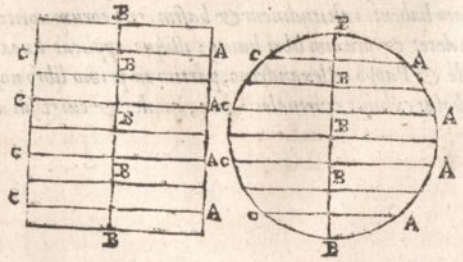


PONantur ſuperficies duæ ABCD, EFG, æquales habentes altitudines AB, EF: quibus proportionaliter ſeu in eadem ratione diuiſis, ducantur ipſis AB, EF orthogonæ & inter ſe parallelæ IH, KG: intelligatur verò plano ABCD, planum, EFG ad angulos rectos imponi, ſecundùm lineas AB, EF: deinde BD, IH, AC lineas, ductas in EG, KG, FG, rectangula producere quorum baſes ſunt BD, IH, AC, altitudines verò EG, KG, FG: patet ex illa rectangulorum conſtructione corpus produci cuius baſis eſt rectangulum ABCD & altitudo planum EGF: porrò corpus illud voco, corpus ortum ex ductu plani in planum. quod autem aſſumam ſuperficies, & ſingulas lineas in alias duci ad angulos rectos, id facilitatis cauſa præcipuè feci, & vt certa ac determinata in omni ſuperficierum in inuicem ductu inclinatio ſeruaretur: vndę in poſterum ductum omnem ſuperficierum & linearum in ſe vel in alias, ad angulos rectos fieri, ſupponam.

II.

Ductum plani in ſe voco, cū data ſuperficies plana in aliam ſibi æqualem ac ſimilem ſimiliterq; conſtitutam ſecundùm omnes partes, ducitur.

EXPLICATIO.



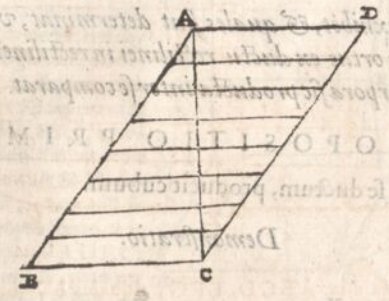
SIt AB ſuperficies quæuis, cui addatur in directum, æqualis ac ſimilis ſimiliterque poſita figura BC; corpus igitur ex ductu ſuperficiei AB in ſe, idem eſt cum corpo-

corpore orto ex ductu AB plani in planum BC : cùm ſingulæ lineæ AB ductæ in ſe, idem producant, quod AB ductæ in BC. vnde definitio hæc ferè cum prima coincidit.

III.

Ductum plani in ſe ipſum ſubalternè, voco cùm plana ſuperficies ducitur in aliam æqualem ſibi ac ſimilem, non ſimiliter tamen conſtitutam, ſed inuersè.

EXPLICATIO.



Sit ABC *triangulum cui adijciatur in directum triangulum* ADC, *æquale ac ſimile, diſſimiliter tamen conſtitutum : corpus ex* ABC *ductum in ſe ſubalternè, voco corpus ortum ex ductu* ABC, *in planum* ADC, *inuersè poſitum : quantum autem differat planum ductum in ſe, ab eodem ducto in ſe ſubalternè, ſuo loco patebit.*

DVCTVVM PLANI IN PLANVM

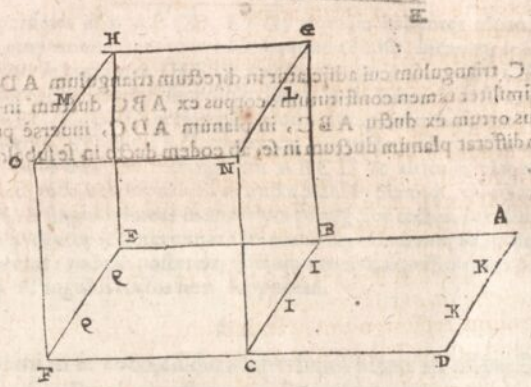
PARS PRIMA

Superficies primò exhibet, & quales sint determinat, vti & communes intersectiones ortas ex ductu rectilinei in rectilineum: deinde corpora sic producta inter se comparat.

PROPOSITIO PRIMA.

QVadratum in se ductum, producit cubum.

Demonstratio.



QVadratum ABC ductum in se, id est per secundam huius distinctionem in quadratum BEFC, illi æquale & indirectum appositum, exhibeat figuram BGHON: dico illam esse cubicam. ponantur quotuis lineæ KIQ æquidistantes ABE. AB linea ducta in BE planum [a] exhibet BGHE rectum ad planum BEFC; similiter KI ducta in IQ, planum producit ILMQ, rectum ad idem planum BEFC: normales igitur sunt BG, IL lineæ ad planum BEFC, adeoque [b] parallelæ: & quia puncta BIC indirectum sunt lineæ BG, IL in eodem sunt plano: similiter HE, MQ lineæ, rectæ sunt ad planum BEFC, & inter se æquidistantes, & in eodem plano, & quia GB, LI, NC lineæ, æquales sunt rectis AB, KI inter se æqualibus, æquales quoque sunt lineæ GB, LI, NC, & puncta [c] GLN in directum: similiter puncta HMO in directum sunt. quare & GH, LM, NO in eodem quoque [d] sunt plano. eadem de causa rectæ GH, LM, NO æquales sunt BE, IQ, CF, id est AB, KI, id est GB, LI, NC; quadrata igitur sunt plana GC, GO, HF ac proinde anguli HGB, HGN, GBC, GBE recti sunt: vnde corpus GHOFEBC, cubus est: quadratum igitur in se ductum, producit cubum. Quod erat demonstrandum.

a Ex 1. Defin. huius.

b 6. Vndecimi.

c Ex elementis.

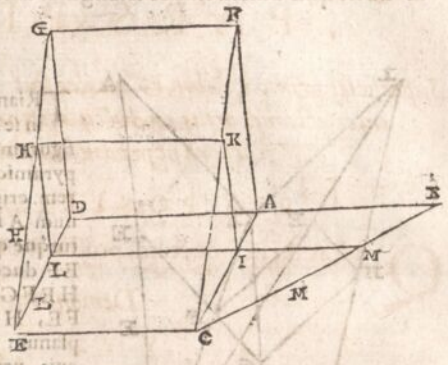
d Per elementa.

PRO-

PROPOSITIO II.

TRiangulum rectangulum ductum in quadratum, aut rectangulum eiusdem altitudinis, producit corpus, habens quatuor hædras planas quarum communes intersectiones, lineæ sunt rectæ.

Demonstratio.



TRiangulum rectangulũ ABC, ductum in rectangulum, aut quadratum ADE triangulo in directum appositum figuram producat FGECAD; dico itaque FAC, GDE, FGCE superficies esse planas, & GHE, FKC communes intersectiones, lineas esse rectas. ponantur quotuis MIL æquidistantes BAD, a recta BA ducta in AD, planum producat AFGD, rectum ad planũ ADEC: similiter MI ducta in IL, planum producat rectangulum IKHL ad rectos angulos plano ADEC, lineæ igitur FA, KI, rectę quoque sunt ad planum ADEC, & inter se parallelæ: quia verò FA æqualis est AB, & IK rectæ MI æqualis, vt BA ad MI, id est AC ad IC, sic FA ad KI: in directum igitur sunt puncta [b] FKC: & FAC superficies plana est, similiter ostenditur, puncta GHE esse in directum, & GDE superficiem esse planam. deinde quia GD linea æqualis est FA, & LH ipsi KI æqualis, æquidistant autem FA, KI, ipsius GD, HL, rectæ FG, KH [c] æquales sunt AD, IL, & FG, KH, CE lineæ in eodem sunt plano. Triangulum igitur rectangulum, &c. Quod erat demonstrandum.

a Ex 1. definitionis.

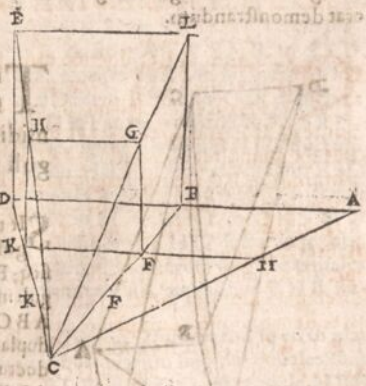
b Ex elementis.

c Ex elementis.

PROPOSITIO III.

TRiangulum rectangulum in se ductum, pyramidem producit quæ basim habet quadratam.

Demonstratio.



TRiangulum rectangulum ABC, ductum in se, figurã exhibeat BLEDC: dico illam esse pyramidẽ quæ basim habet quadratam. AB ducta in se vel in BD illi æqualem, quadratum producit, rectum ad planum BCD. Similiter MF ducta in se vel in FK, quadratum producit rectum ad planum BCD, cùm igitur ex hypothesi, rectæ BD, FK parallelæ sint; æquidistant [e] plana BLED, FGHK: & rectæ LE, GH, item LB, GF, & ED, HK parallelæ sunt. & quia LB æquatur rectæ AB & FG, rectæ MF; vt AB ad MF, id est BC ad FC, sic LB ad FG; in directum igitur sunt LGC, & LBC superficies est plana; similiter ostenduntur EHC in directum esse & EDC exhibere superficiem planam. deinde quia LD, ED, item GF, HK [f] lineę æquales sunt, & EHC, LGC lineæ rectę, superficies igitur omnes

d Ex 1. definitionis.

e Schol. 18. undecimi.

f. Exelementu.

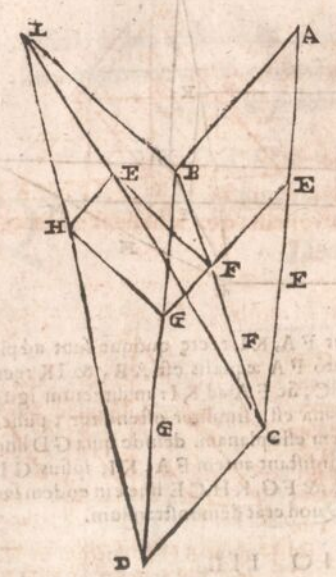
præte

præter baſim quadratam, figurę LEDBC planæ ſunt & triangulares ad punctum C concurrentes, vnde & figura pyramidalis eſt, quæ baſim habet quadratam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

TRiangulum rectangulum in ſe ductum ſubalternè, pyramidem producit quæ baſim habet triangularem.

Demonſtratio.



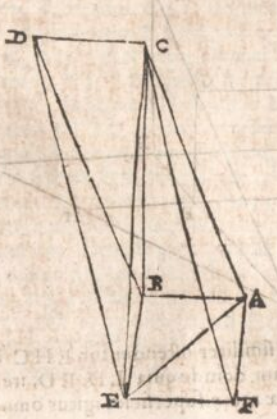
a Ex 1. defin. huius.

TRiangulum rectangulum ABC, ductum in ſe ſubalternè, id eſt in triangulũ BCD, figuram producat LBCD. dico illam eſſe pyramidalem, quæ baſim habet triangularem. erigatur ex B linea LB, recta ad planum ABC: & AB lineæ æqualis: ponanturque quotuis EFG parallelæ AB. linea EF ducta in FG rectangulum producit HEFG, rectum [a] ad planum BCD; quare FE, HG lineæ quoque rectæ ſunt, ad planum BCD, & LB lineę parallelæ. quia verò LB, FE æquales ſunt rectis AB, EF; vt AB eſt ad EF, id eſt BC ad FC, ſic LB eſt ad EF; in directum igitur ſunt L,E,C, & LBC ſuperficies plana eſt & triangularis cuius latera BL & CL, concurrunt in L, ſimiliter oſtendetur, L, H, D puncta in directum eſſe & LBD ſuperficiem eſſe planam & triangularem deſinentem in L: & quia LEC, LHD lineæ rectæ ſunt & EH æquidiſtat FG, adeoque & CD, rectæ EH, CD quoque in eodem ſunt plano & CLD triangulare planum deſinens in L: quare cùm illæ ſuperficies triangulares ſint & concurrent esin L, pyramis eſt figura LBCD, habens baſim BCD triangularem. Triangulum igitur rectangulum ductum in ſe ſubalternè, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

TRiangulum rectangulum ductum in ſe ſubalternè æquale eſt dimidio pyramidis quæ reſultat ex ductu eiuſdem trianguli in ſe.

Demonſtratio.

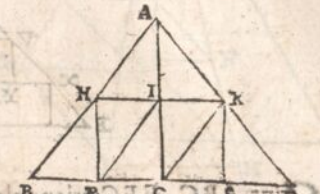


b 3. Huiny.

SIt triangulum ABC ductum in BCD triangulum æquale & ſimile, ſubalternè poſitum: ſitq; FEBCA pyramis orta ex ductu ABC trianguli in ſeipſum, & DCEB pyramis orta ex ductu ABC in ſe ſubalternè, dico pyramidẽ AFEBC duplam eſſe pyramidis CBED; planum ABC ductum in ſe [b] exhibet pyramidem, quadratam ABEF baſim habentem. quia verò angulus ABC rectus aſſumitur, erit BC altitudo pyramidis ex triangulo ABC in ſe ducto exhibitæ; ducta

ducta igitur diagonali AE, & plano per AE & punctum C. erit pyramis ex basi AEB, & altitudine BC, dimidia pyramidis ex basi quadrata ABEF & communi altitudine BC. sed pyramis CEBD, æqualis est pyramidi ABEC, cùm basis ABC, sit æqualis CBD, & altitudo BE, communis; igitur pyramis EBCD, ex ductu ABC in BCD subalternè positi, dimidio pyramidis AFECB est æqualis, quæ æqualis est pyramidi ex ductu ABC trianguli in se. Quod fuit demonstrandum.

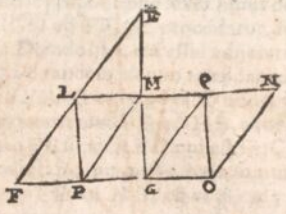
PROPOSITIO VI.



Sint ABC, EFG triangula rectangula, inter se similia & æqualia, diuisisq; AC, EG bifariam in I & M, agantur per I & M lineæ HI, LN, parallelæ rectis BC, FG.

Dico corpus ortum ex ductu plani BHIC in se, ad corpus ex ductu FLMG in se subalternè, eam habere rationem, quam habent quatuordecim ad tredecim.

Demonstratio.



Fiant lineis HI, BC æquales indirectũ IK, CD, iunganturque KD, item LM lineæ æqualis fiat GO, & FG lineæ æqualis MN, iunganturque NO, erit igitur MNOG subalternè posita ad LMGF demittantur ex H & L lineæ HR, LP parallelæ rectis AC, EG: iunganturque RI, PM. Planum BHIC ductum in se siue in IKCD æquale est corporibus ortis ex ductu BHR [a] in ID, HRI in ID, & RIC ducto in ID, sed planum BHR ductum in ID, æquale est corporibus ortis ex ductu BHR in ICK, in CKS & in SKD: & HRI planum ductum in ID est æquale plano HRI ducto in ICK, in CKS, & in SKD: dein planum RIC ductum in planum ID æquale est plano RIC ducto in ICK, in CKS, & in SKD: igitur planum BHIC ductum in se æquale est plano BHR ducto in ICK, in CKS, in SKD: & plano HRI ducto in ICK, in CKS, in SKD, vna cum plano RIC ducto in ICK, in CKS, in SKD: est autem planum BHR ductum in CKS, æquale BHR ducto in se, & BHR in SKD æquale BHR in se ducto, item HRI in ICK, æquale HRI in se, item RIC in CKS, æquale RIC in se, vti & RIC in SKD: dein BHR in CIK dimidium est BHR in se, & HRI in CKS dimidium HRI in se, vti & HRI in SKD, insuper & RIC in ICK, dimidium RIC in se: igitur planum BHIC ductum in se æquale est plano BHR in se ducto bis; plano HRI in se semel, & plano RIC in se bis; id est quinque quantitatibus quarum singulæ æquales sunt BHR ductæ in se; quibus si addideris quatuor quantitates BHR in ICK, HRI in CKS & in SKD, item RIC in ICK quarum singulæ dimidium sunt BHR ductæ in se; erit planum BHIC, ductum in se æquale septem quantitatibus, quarum singulæ æquales sunt BHR ductę in se: id est quatuordecim [b] quantitatibus, æqualibus BHR ductæ in se subalternè.

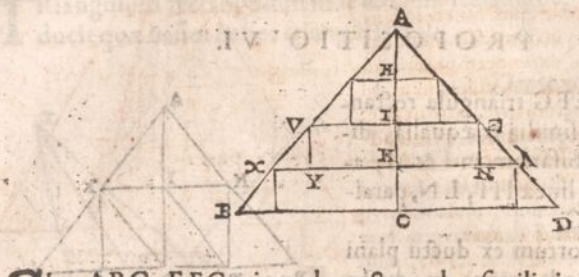
[a] Ext. secundi elementorum.

[b] 6. huius.

Eodem modo ostenditur planum FLMG ductum in se subalternè, id est in planum GMNO æquale esse tredecim quantitatibus quarum singulæ æquales sunt FLP siue BHR in se subalternè ductæ; nam FLP, in MGQ est æquale HBR in ICK, quæ est pars decimaquarta BCI ducti in ICD. Cui si adiungas LFP in QON, illi æquale & FLP in GQO, habebis duplum BHR in IKC, additis

insuper LPM in MGQ & QON, & QGO, habebis nonuplum: quibus si adiunxeris PM in MGQ & QON, & GOO, fient tredecim. vnde BHIC ductum in se ad FLMG ductum in se subalternè eam habet rationem quam quatuordecim ad tredecim.

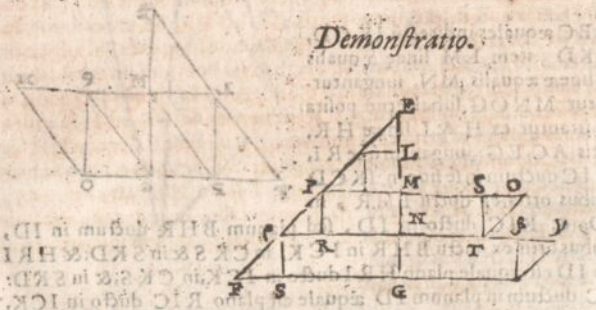
PROPOSITIO VII.



Sint ABC, EFG triangula rectangula, similia inter se & æqualia: diuisæq; AC, EG similiter in quotuis partes æquales, punctis H,I,K; L,M,N, agantur per H,I,K; L,M,N lineæ parallelæ rectis BC, FG.

Dico XI planum ductum in se, æquari plano QM ducto in se subalternè, vnà cum XVY ducti in se subalternè. idem est de reliquis.

Demonstratio.

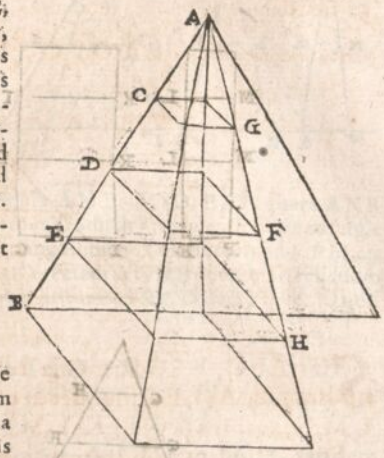


PLanum XI ductum in se siue in planum Iλ, æquale est plano YI ducto in Iλ, & XVY in Iμ, vnà cum XVY ducto in μZλ: planum verò QM ductum in se subalternè, id est in planum NO, æquale est plano RM ducto in NO (id est YI in Iλ) & QPR in MT (id est XVY in Iμ) vnà cum QPR in SOT (id est XVY in se subalternè.) igitur excessus quo XI ductum in se excedit QM ductum in se subalternè, est ille quo XVY ductum in se siue in μZλ, superat QPR ductum in SOT, siue in se subalternè. sed XVY ductum in se superat QPR ductum in se subalternè, plano XVY ducto in se subalternè. igitur planum XI ductum in se superat QM ductum in se subalternè, plano XVY ducto in se subalternè, siue XI ductum in se æquale est QM ducto in se subalternè vnà cum XVY in se subalternè: Quod erat demonstrandum.

PRO-

Corollarium primum.

QVæ hîc de diuisione lineæ AC vel EG, in quatuor partes æquales dicta sunt, extendere poteris ad quasuis subdiuisiones in partes æquales: modò sint numero pares in vtraque linea, vbique enim inuenies fundamentum discursus in demonstratione explicati. Imò etiam extendere poteris ad ipsum triangulum VXY, ducti in se, ad idem triangulum ductum in se subcõtrariè. nam, vt patet ex præcedentibus, ex sola additione VXY in se subcontrariè ducti fiet æqualitas cum VXY ducti in se.



Corollarium secundum.

OPeræ pretium videtur hîc adiungere methodum reperiendi proportionem inter partes pyramidis diuisæ per interualla æqualis altitudinis. nam FC pars pyramidis vel coni, habet rationem ad partem pyramidis AGC, quam habet quatuordecim ad duo, sicut propositione sexta huius docuimus: ad cognoscendam autem rationem partis GD ad FE, sic procedatur. sumatur excessus quo FC, excedit AGC, qui est 12. Deinde huic excessui adijciatur ipsum FC, (est autem FC 14.) resultabit numerus 26. tandem denuo 12. addantur, exsurget summa quæsita scilicet 38. nam ratio FC ad FE, est vt 14. ad 38. Quod si vlterius pergere desideras, ijsdem insiste vestigijs. Rationem enim FE ad HB, eâdem praxi reperies sumendo scilicet vt prius excessum quo FE superat FC, qui est 24. Cui adiungatur ipsum FE. quod ostendimus esse 38. resultabit summa 62. huic summæ addantur 12. & exsurget summa quæsita 74. nam ratio FE, ad HB, est vt 38. ad 74. Hanc praxim si continuò obseruaueris, poteris in immensum in indaganda ratione progredi partium pyramidis aut coni, dummodo interualla eandem sortiantur altitudinem.

Corollarium tertium.

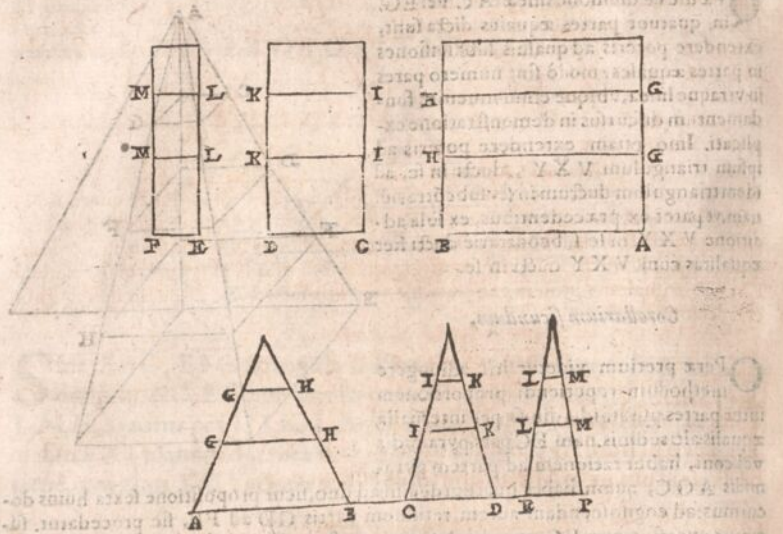
HInc etiam manifestum, pyramidem aut conum qui tali ratione sectus est vt altitudines continuo æquales sint inter se, non admittere rationem incommensurabilitatis inter suas partes hoc modo sectas. cùm enim per numeros continuo reperiatur earundem proportio, fit vt semper partes eam inter se contineant rationem quam numeri ipsi per quos producuntur, inter se sortiuntur.

PROPOSITIO VIII.

SI triangula vel rectangula tria eandem habeant altitudinem & bases continuè proportionales:

Dico corpus ortum ex ductu primi rectanguli vel trianguli, in tertium, æquale esse illi, quod exsurgit ex ductu medij in se.

Demonſtratio.



SInt AB, CD, EF baſes continuè proportionales, rectangulorum vel triangulorum GH, IK, LM eandem habentium altitudinem: dico planum GH ductum in LM æquale corpus proferre illi quod oritur ex plano IK ducto in ſe. planũ HG ductum in LM, parallelopipedum producit, habens planum GH baſim & altitudinem EF: planum verò IK ductum in ſe, parallelopipedum producit habens IK baſim & altitudinem CD. ſed parallelopipeda illa baſes habent altitudinibus reciprocè proportionales, cùm ſit vt planum GH ad IK planum, baſis ad baſim id eſt AB, ad CD, ſic reciprocè CD ad EF, altitudo ad altitudinem; corpus[a] igitur ortum ex ductu HG in LM, æquale eſt corpori, orto ex IK ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Per 34. undecimi.*

PROPOSITIO IX.

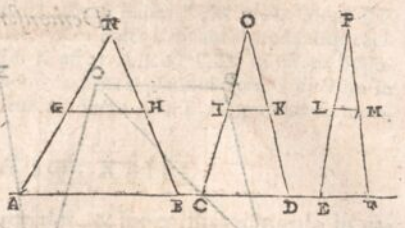
HAbeant trapezia tria in eadem altitudine conſtituta, baſes continuè proportionales; latera verò quæ altitudines terminant, baſibus æquidiſtent, & in eadem cum illis ſint proportione.

Dico primum trapezium, ductum in tertium, corpus proferre æquale illi quod emergit ex ductu medij in ſe.

Demonſtratio.

HAbeant AGB, CID, ELF trapezia tria in eadem altitudine poſita baſes AB, CD, EF continuè proportionales: latera verò GH, IK, LM quæ altitudines terminant, æquidiſtent baſibus AB, CD, EF. & in eadem cum illis ſint ratione: dico GB ductum in LF, quantitatem efferre æqualem illi, quam profert ID ductum in ſe. productæ AG, BH conueniant in N & CI, DK in O, EL, FM verò in P. vt GH ad AB, ſic IK eſt ad CD, & LM ad EF, ex hypotheſi, igitur vt ANB trian-

a triangulum ad triangulum GNH, sic COD ad IOK, & EPF ad LPM: & permutando, conuertendo, & iterum permutando vt GB trapezium ad ID, sic GNA triangulum ad triangulum IOK, & vt ID ad LF, sic IOK ad LPM: sed trapezia GB, ID, LF sunt in b ratione basium vel linearum GH, IK, LM, quę basibus sunt proportionales; igitur & triangula GNH, IOK, LPM sunt vt bases GH, IK, LM: in eadem igitur sunt c altitudine triangula ANB, COD, EPF. quare ANB triangulum ductum in triangulum EPF, corpus producit d æquale illi quod exsurgit ex COD, ducto in se. sed eadem de causa triangulum GNH ductum in LPM, æquale est IOK ducto in se; residuum igitur trapezium AGHB ductum in residuum LMEF, æqualem e molem generat illi, quæ oritur ex IKCD ducto in se. Quod erat demonstrandum.



a Eucl. mostris.

b Ex 1. sexti.

c Ex [illegible]

d Ex [illegible]

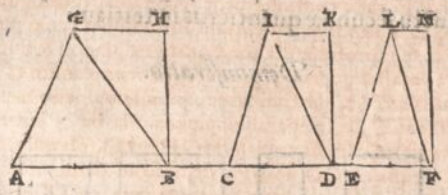
e Ex 9. quinti.

PROPOSITIO X.

IIsdem positis iungantur BG, DI, FL.

Dico planum AGB ductum in GHB, & CID in IKD, tandem ELF ductum in LMF in continua esse analogia.

Demonstratio.



PLanum AGB ductum in planum GHB, pyramidem producit f habentem basim, triangulum GHB, & altitudinem AB: similiter planum ICD ductum in IKD, & ELF ductum in LMF pyramides producunt, quarum bases sunt triangula IKD, LMF; altitudines verò CD, EF. sed per hypothesim triangula GBH, IKD, LMF in eadem altitudine constituta, proportionalia sunt g in ratione basium GH, IK, LM; & AB, CD, EF altitudines proportionales quoque sunt; eandem igitur continuant rationem pyramides, productę ex AGB in GHB, & CID in IKD, denique LEF in LMF. Quod erat demonstrandum.

f 4. huius.

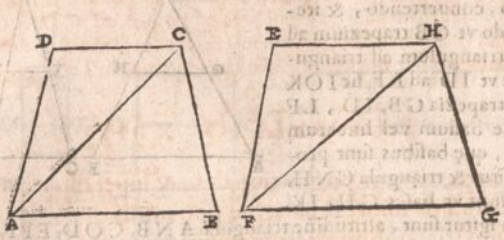
g Ex 1. sexti.

PROPOSITIO XI.

IIsdem positis:

Dico planum ADC ductum in FGH, æqualem proferre magnitudinem, illi quæ oritur ex ABC ducto in FEH.

Demonſtratio.



a 4 *huius.* PLanum ADC ductum in planum FGH, pyramidem producit habentem [a] baſim triangularem FGH, & altitudinem DC. ſimiliter ABC quantitas, ducta in ſuperficiem FEH pyramidem producit, cuius baſis triangulum eſt ABC, & al-

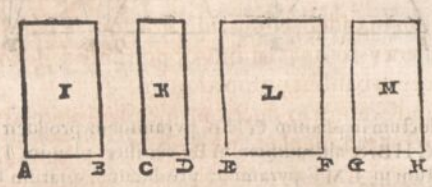
b 34. *vndecimi.* titudo EH. ſed [b] pyramides illæ æquales ſunt, cùm baſes habeant reciprocè altitudinibus proportionales; eſt enim baſis ABC ad baſim FGH, vt AB ad FG, id eſt DC ad EH, altitudo ad altitudinem reciprocè; planum igitur ADC ductum in planum FGH, æqualem profert molem illi, quæ producitur ex ductu plani ABC in planum FEH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

SI quatuor rectangula vel triangula in eadem conſtituta altitudine, baſes habeant proportionales:

Dico corpus ortum ex ductu primę ſuperficiei in quartam, æquari corpori orto ex ductu ſecundæ quantitatis in tertiam.

Demonſtratio.





REctangula vel triangula I,K, L,M, eandem habentia altitudinem, baſes AB, CD, EF, GH habeant proportionales: dico planum I ductum in planum M, æquari K plano, ducto in L. planum I ductum in M planum, parallelopipedum producit habens baſim, planum I, & altitudinem GH: ſimiliter K ſuperficies ducta in ſuper-

superficiem L, parallelopipedum producit habens basim K; & altitudinem EF: sed parallelopipeda illa inter se æqualia sunt, [a] cùm bases habeant altitudinibus reciprocè proportionales (nam basis I ad basim K est vt AB ad CD, id est ex hypothesi EG ad GH, altitudo ad altitudinem reciprocè) planum igitur I ductum in M, corpus producit æquale illi, quod oritur ex ductu K in L. Quod fuit demonstrandum. [a] 34. undecimi.

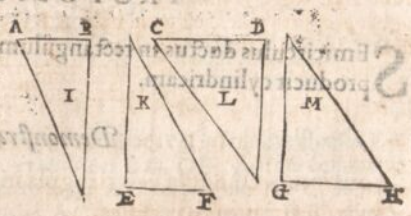
PROPOSITIO XIII.

SI quatuor lineæ fuerint proportionales, & super illis triangula in eadem exstructa altitudine, subalternè ponantur.

Dico primum triangulum ductum in quartum, æqualem efferre quantitatem illi, quæ producitur ex ductu secundi in tertium.

Demonstratio.

SVper AB, EF, CD, GH lineis proportionalibus, in eadem constituantur altitudine triangula I, K, L, M; & K quidem secundum, primo I, quartum verò M, tertio L subalternè ponatur; dico I ductum in M, æquari K ducto in L. Triangulum I ductum in M pyramidem [b] producit habentem basem triangularem I & altitudinē GH: similiter planum K ductum in L pyramidi æquatur habenti basim K, & altitudinem CD: sed pyramides illę inter se [c] æquales sunt, cùm bases habeant altitudinibus reciprocè proportionales; corpus igitur quod emergit ex I ducto in M, æquale est corpori orto ex ductu K in L. Quod erat demonstrandum.



[b] 4. huius.

[c] Ex 34. undecimi.

PROPOSITIO XIV.

TRapezia quatuor in eadem constituta altitudine, bases habeant proportionales; latera verò quę basibus opponuntur, ijsdem equidistent, & eandem seruent cum basibus proportionem.

Dico corpus quod exsurgit ex ductu primi plani in quartum, æquari corpori orto ex ductu secundi plani in tertium.

Demonstratio.

HAbeant A, B, C, D, trapezia in eadem altitudine constituta, bases NO, PQ, RS, TV proportionales, & EF, GH, IK, LM lineas basibus æquidistantes, in eadem cum basibus proportione. dico planum A ductum in planum D, æquari B ducto in C. planum A ductum in D, corpus producit habens basim planam A, & altitudinem TV. similiter B ductum in C, corpus generat habens basim B & altitudinem TV, sed corpora illa, inter se æqualia sunt, [d] quia bases habent altitudinibus reciprocè proportionales; planum igitur A ductum in D æquatur plano B ducto in C. Quod fuit demonstrandum. [d] Ibid.



DV.

DVCTVVM PLANI IN PLANVM

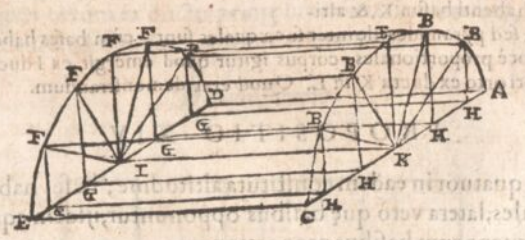
PARS SECVNDA

Superficies contemplatur & communes intersectiones natas ex ductu plani circularis in rectilineum, deinde corpora sic producta exhibet.

PROPOSITIO XV.

SEmicirculus ductus in rectangulum eiusdem altitudinis, superficiem producit cylindricam.

Demonstratio.



SIt ABC semicirculus & ADEC rectangulum eiusdem cum semicirculo altitudinis. dico semicirculum ABC ductum in rectangulum, superficiem producere cylindricam. K centrum ponatur semicirculi: assumptisque in AC punctis quibuscuis HH erigantur ex H & K, normales ad AC, erunt illæ quoque rectæ ad planũ ADEC; cùm ABC ductum in ADEC, ad rectos illi insistat angulos, ex hypothesi posita in defin. prima huius; parallelæ igitur sunt HB, KB. ponantur deinde in plano AEC, lateri AD æquidistantes KI, HG: & HB, KB lineæ ductæ in HG, KI, plana exhibeant HBFG, KBFI: quoniam igitur HB, KB rectę sunt ad planum AEC & HGKI, parallelæ, plana quoque HBFG, KBFI a recta sunt ad idem planum, & inter se æquidistant; parallelę igitur sunt lineæ BF, BF; item FG, FI quæ rectæ quoque sunt ad planum AEC, adeoque & in eodem existunt plano, deinde cum HB, KH lineis, æquales sint FG, GI, & anguli illis contenti recti, iunctæ FI quoque, æquales sunt iunctis BK: sed BK lineæ semidiametri sunt semicirculi ABC, adeoq; & inter se æquales, igitur & IF lineæ quoque æquales sunt, & DFE puncta ad semicirculum æqualem ABC: quare & BF, æquidistantes HG, adeoque & axi KI, superficiem producunt cylindricam.

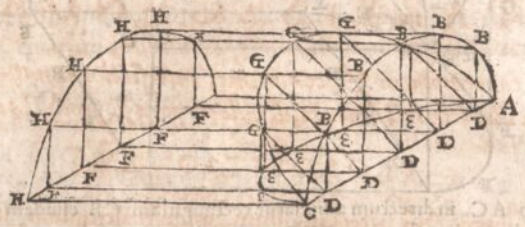
a 34. undecimi.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SEmicirculus ductus in se, superficies duas producit cylindricas, quarum communis intersectio, figura est elliptica.

Demonstratio.



SEmicirculus ponatur A B C: dico illum in se ductum vel in semicirculum A E C illi æqualem, superficies producere cylindricas B G, G E; quarum communis intersectio A G C figura est elliptica. facto super A C rectangulo A F C, sumantur in A C, puncta quæuis D, è quibus ad A C normales erigantur D B: ponanturque D F in plano A F C æquidistantes A F. rectæ D B ductæ in D F superficiem producunt [a] cylindricam B H, igitur & B G lineæ quæ pars sunt B H, ad superficiem sunt cylindricam. Similiter ostendetur G E superficiem esse cylindricam. quod verò A G C figura sit elliptica, sic ostendo: iungantur D G. rectæ D B ductæ in se, quadrata generant D B G E, quorum diametri sunt D G: quia verò quadrata illa, [b] rectæ sunt ad planum A C F, & A F, D F parallelæ, plana A B G E æquidistant, & triangula quoque D E G parallela sunt: quia verò D E G anguli sunt recti, & D E, G E lineæ æquales, anguli E D G, E G D semirecti sunt: in eodem igitur sunt plano, [c] lineæ D G: rursum cùm D G diametri sint quadratorum D B G E, quadrata D G dupla sunt quadratorum D B: vnde vt B D quadratum ad quadratum D B, id est rectangulum A D C ad rectangulum A D C, sic D G quadratum ad quadratum D G: ellipsis [d] igitur est A G C. vocetur autem corpus constans superficiebus B G, G E, vngula: cuius proprietates, & cubaturam suo loco trademus.

a 15 huius.

b Ex hypothesi 11. defin. huius.

c Educitur ex elemẽtis.

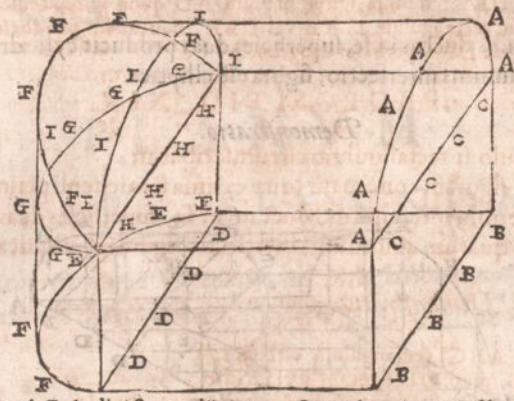
d 4. De ellips.

PROPOSITIO XVII.

SEmicirculo si rectangulum eiusdem altitudinis in directum adijciatur.

Dico totam illam quantitatem in se ductam superficies producere cylindricas, quarum communis intersectio figura est elliptica.

Demonſtratio.



SEmicirculo AC, in directum adijciatur rectangulum CB eiuſdem cum ſemicirculo altitudinis: dico figuram ACB ductam in ſe, ſuperficies producere cylindricas AF, FE, quarum communis interſectio FF figura eſt elliptica. fiat conſtructio quam indicat figura. planum ACB ductum in ſe, æquatur [a] AC ducto in ſe, & CB in ſe ducto, vnà cum AC ducto in CB bis. ſed AC ductum in ſe, eſt HI ductum in HG, & CB in ſe ductum, eſt parallelopipedum CBDH; præterea AC ductum in CB bis, eſt AC ductum in CH, vnà cum HG ducto in HD; planum igitur ACB ductum in ſe æquatur HI ducto in ſe, CB ducto in ſe, id eſt corpori CBDH, & AC ducto in CH, vnà cum HG ducto in HD: planum autem HI ductum in ſe vel in HG, ſuperficies producit [b] cylindricas IF, FG, & FF communem interſectionem ellipticam, item AC ductum in CH ſuperficiem [c] producit cylindricam AI; tandem HG ductum in HD, ſuperficiem producit cylindricam GE, planum igitur ACB ductum in ſe, ſuperficies producit cylindricas AIF, FGE, quarum communis interſectio FF, figura eſt elliptica.

[a] Ex 1. ſecundi.

[b] 16. huius.

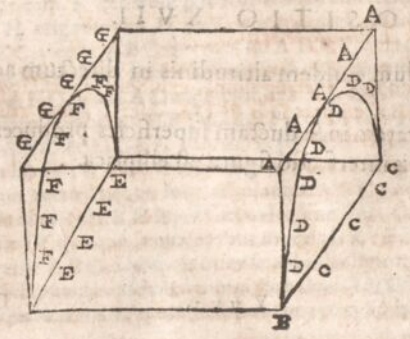
[c] 15. huius.

PROPOSITIO XVIII.

SEmicirculo ſi rectangulum circumſcribatur:

Dico figuram concauam quę extima ſemicirculi perimetro & rectis lineis intercipitur, ductam in totum rectangulum, corpus producere habens cylindricam ſuperficiem concauam & extimas tres planas.

Demonſtratio.



SEmicirculo CDB rectangulum circumſcribatur CAB, dico planum DA ductum in rectangulum CAB, corpus producere habēs ſuperficiem concauam cylindricam. Rectangulum CAB ductum in ſe, vel in rectangulum BEC æquatur CDB ſemicirculo ducto in rectangulum CAB vel CBE, vnà cum DA ſuperficie ducta in rectangulum CBA vel BE: ſed CBD ſe-

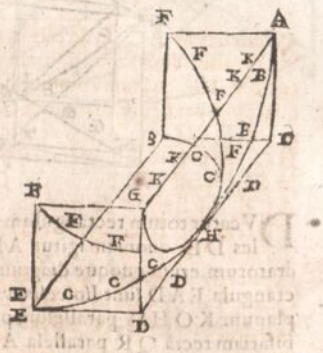
CBD ſemicirculus ductus in rectangulum CAB vel BE, ſuperficiem producit a cylindricam DF: reſiduum igitur planum AD quod ſemicirculo CBD congruit ductum in rectangulum CAB vel CBE, concauam producit ſuperficiem cylindricam, quæ DF ſuperficiei congruit. a 15. huius.

PROPOSITIO XIX.

SEmicirculo ſi rectangulum circumſcribatur:
Dico figuram concauam (quæ extima ſemicirculi perimetro & rectanguli lateribus intercipitur) ductam in ſe, ſuperficies duas producere cylindricas, quarum communis interſectio figura eſt elliptica.

Demonſtratio.

SEmicirculo ABG rectangulum circumſcribatur ADG. dico DB figuram ductam in ſe, ſuperficies duas cylindricas producere, quarum communis interſectio figura eſt elliptica: ſuper DD linea rectangulum ponatur EDE æquale ADG: dein EDE, ſemicirculus inſcribatur ECE, patet illum æquari ſemicirculo ABG, & DB, DC lineas omnes æquari. Oſtenſum eſt præterea figuram concauam BD, ductam in ADG rectangulum, exhibere ſuperficiem cylindricam: atqui BD id eſt DC, pars eſt illius rectanguli, etiam DB ductum in DC producet ſuperficiem cylindricam. quia verò DB ad DB, eandem habent rationem quam DC ad DC, etiam DB ad DB, eandem habebunt rationem quam DF ad DF, quę diagonales ſunt quadratorum DB. quare cùm BB & CC ſint ad eoſdem circulos, ex conſtructione patet b FF eſſe ad eandem ellipſim, cùm DB minor ſit diagonale DF.



b Ex 18 & 16. huius.

PROPOSITIO XX.

IIſdem poſitis, ſi figura concaua ducatur in ſuum ſemicirculum cui congruit, dico ſuperficiem produci cylindricam.

Demonſtratio.

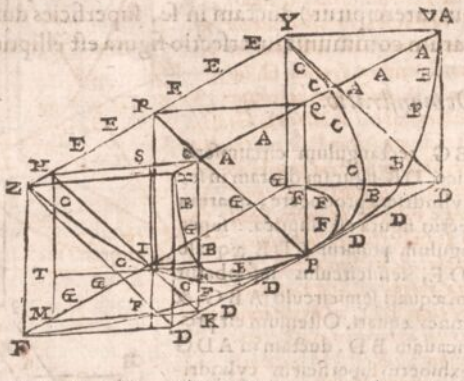
DEmonſtratum eſt DB ductum DK rectangulum, c exhibere ſuperficiem cylindricam. ſed DB ductum in BK eſt pars DB in DK ducti; igitur etiam DB in BK exhibent ſuperficiem G cylindricam. c 19. huius.

PROPOSITIO XXI.

SIt ſemicirculus ABB, inſcriptus rectangulo ADD, cui æquale ſit conſtitutum DG ad angulos rectos, ſemicirculum GFF continens æqualem AB. ducatur autem eo ſitu AB ſemicirculus in ſemicirculũ FG.

Dico ſuperficies oriri cylindricas, & communem interſectionem CC fore ellipticam.

Demonſtratio.



DVcatur totum rectangulum AD, in DG rectangulum; & ponantur diagonales DE. quoniam igitur AD, AE æquales ſunt, vtpotè latera eorundem quadratorum, erunt quoque diagonales DE, inter ſe æquales, ac proinde triangula rectangula EAD ſunt Iſoſcelia: vnde DE[a] planum eſt. agatur deinde quodcunque planum KOHM parallelum planis DGY, DFZ: ſimiliter, diuiſa ſuperficie AA bifariam rectâ QR parallela AY, per QR ponatur alterum planum iſidem DGY DFZ planis æquidiſtans. Quoniam OK ductũ in KM, æquatur KN in ſe ducto & NO, hoc eſt IS in ſe ducto, vnà cum rectangulo KNO bis ſumpto, hoc eſt rectangulis NS, IM, ſimul ſumptis. Igitur figurę NKL, [b] SIT quadratæ ſunt, quarum diagonales ſunt KI, IH. oſtenſum eſt autem BD ductum in ſe [c] producere ſuperficiem cylindricam: igitur lineæ NI, IL, hoc eſt omnes BC, CF, ſunt in ſuperficie cylindricâ.

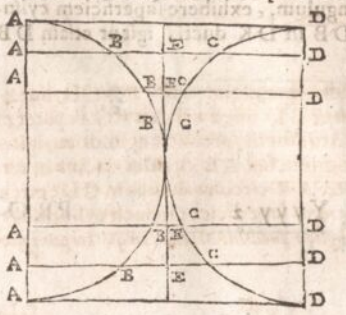
a *Per elementa.*

b *Ex elementis.*

c 19. *huius.*

Quia verò eſt vt quadratum QP ad ØN quadratum, hoc eſt SI, ſic quadratum PR ad IH, quadratum (illorum nimirum dupla) eſtque rectangulum VQX ad VOX, hoc eſt YRZ ad YHZ, vt quadratum PQ ad ON quadratum, (quia PQ, ON normales ſunt ad VX diametrum in ſemicirculo VBX) etiam quadratum PR ad IH, quadratum eandem habebit rationem, quam rectangulum YRZ ad YHZ. quare YPIZ hoc eſt [d] CC, ſunt ad eandem ellipſim; quæ exhibet communem interſectionem planorum AB, FG. Quod erat demonſtrandum.

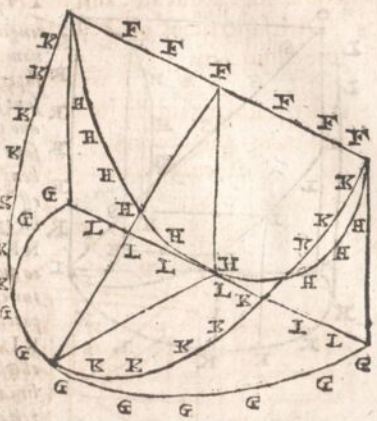
d 4. *De ellipſi.*



Scholion.

PRopoſitum ſit AB, *ductum in* CD, *diſtinguere à ductu* AB, *in ſe: nam cùm* AB, *lineæ ſint æquales* CD, *videtur prorſus idem corpus debere produci cum illo quod producitur per ductum* AB, *in ſe: longè tamen eſt diuerſum. ſit enim quadratum* AD, *quod diuidat* EE *linea bifariam lateribus quadrati æquidiſtans, & deſcripti ſint æquales ſemicirculi* AB *&* CD, *& ducatur* AB, *in* CD *vt propoſit.* 21. *poſtulabat, orietur figura cuius dimi-*

dimidium eſt F G, *figura autem inſcripta huic corpori ſcilicet* F H K, *eſt dimidium* A B *ducti in ſe; igitur* A B, *ductum in ſe longè diuerſum corpus producit ab illo quod oritur ex* A B *ducto in* C D. *quare corpus ex* A B *ducto in* C D, *æquale eſt illi quod exſurgit ex* A B, *ducto in ſe ſimul cum* A B, *ducto in* B C, *ſiue quod in idem recidit* A B, *ductum in* C D, *æquale eſt corpori quod exſurgit ex* A B *ducto in totum* B D. *itaque ad complementum Cylindri qui conſurgeret ex baſi* A B, *in altitudinem* A D *nihil aliud requiritur quàm* A B *ductum in ſe, vt facilè cognoſci poteſt ex figura* F G, *cui ſi addatur dimidium* A B, *ducti in ſe, habebitur integer Cylindrus baſim habens* A B, *ſeu* L G, *& altitudinem* F L; *figura igitur* F G *continet dimidium* F H, *ducti in ſe ſimul cum* H L *ducto in* L G, *quibus ſi addideris reliquum dimidium corporis ex* F H, *in ſe ducti, ſimul cum* H L *ducto in* L G, *exſurget figura quam vocauimus hac propoſitione natam ex* A B, *ducta in* C D, *reuera autem eſt figura orta ex* A B, *ducta in ſuperficiem* B D, *vt explicatum eſt. quod ſi diſpliceat hæc nomenclatura, vocetur figura* F G, *dimidium illius corporis quod oritur ex ductu* A B, *in ſuperficiem* B D.

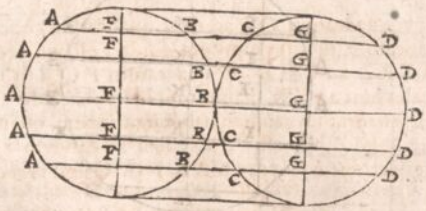


PROPOSITIO XXII.

SInt duo circuli æquales A B, C D, ſeſe tangentes exteriùs, & ducatur A B, in C D, etiam in eodem ſitu.

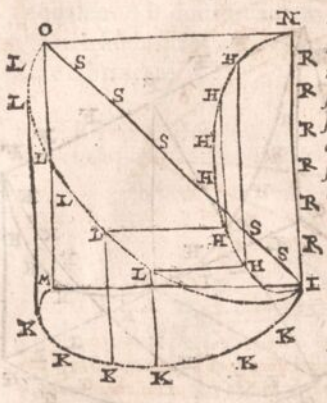
Dico ſuperficies produci Cylindricas.

Demonſtratio.



POnantur F F, G G diametri circulorum parallelæ, & A B C D lineæ, normales ad F F, G G diametros; erunt igitur B D lineæ æquales F G, vt patet ex elementis: ſed A B circulus ductus in F G altitudinem, producit cylindrum; igitur & A B circulus ductus in B D, cylindrum producit. ſed A B circulus ductus in circulum C D, pars eſt A B ducti in B D; igitur & A B circulus ductus in C D, circulum, ſecundùm mentem præcedentis propoſitionis ſuperficies producit cylindricas: *quod verò communis interſectio ſit ellipſis, vide Scholion quod hîc appono: in quo corpus ipſum de quo propoſitio eſt, exprimitur, & explicatur.*

Scholion.

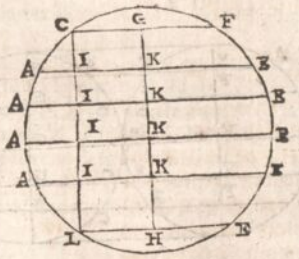


Nota: id quod producitur per A B, *ductum in* CD, *sunt duæ partes cylindri inter se æquales sicut contingit in sectionibus* H H *circuli ducti in* K K *circulum; nam* HL *sunt parallelæ* IM. *ergo sunt in cylindri superficie eodem modo* KL, *cùm sint parallelæ* NL *sunt similiter in superficie cylindrica. vnde cùm hîc sint duo cylindri æquales habentes bases & altitudines vt sunt* NOLI, *habens basim* HH, *&* OMKI, *habens basim* KK, *sintq; altitudines* NO, OM, *hoc est* NI, IM, *inter se æquales, manifestum est producti hîc cylindricum corpus æquale cylindro qui habet basim* KK, *& altitudinem* IM, *quod in idem recidit cum eo quod supra dictum est æquale corpori quod producitur ex ductu baseos* AB, *in altitudinem* FG. *quare patet* HL, *superficiem esse cylindricam, vti etiam est* KL, *quod propositio asserebat. Deinde quod* LL *sit ellipsis, inde patet quod* R S *lineæ sint æquales* ST *& lineæ* HL *sint æquales* LK, *vnde* N R I *ad* NRI, *rectangulum est vt* O S I *rectangulum ad* OBI *rectangulum hoc est vt quadratum* RH *ad* RH; *vel* SL *ad* SL *quadratum.*

PROPOSITIO XXIII.

CIrculum ABC secet recta quæuis CL non per centrum ducta. Dico AI ductum in IB superficiem producere cylindricam, & communem intersectionem fore ellipsim.

Demonstratio.

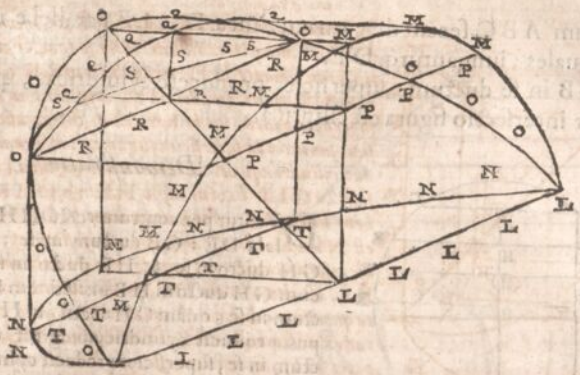


DVcatur per centrum recta HG parallela CL; AK ductum in KB æquale est AI ducto in IB & IK, ducto in se, vt patet ex [a] elementis. sed AK ductum in KB superficies producit [b] cylindricas, quarum communis intersectio est elliptica; igitur & AI ductum in IB, (nimirum pars AK ducti in KB) superficies producit cylindricas, quarum communis intersectio est elliptica. Quod fuit demonstrandum.

a 4. *secundi.*
b 16. *huius.*

Scholion.

Scholion.



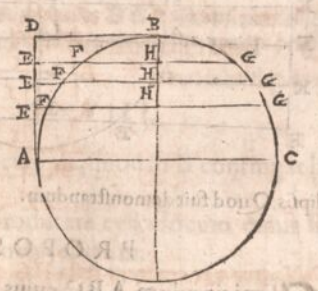
SIcut semicirculus in se ductus producit figuram MN, *ita quoque* AI, *pars circuli in se ducta producit aliquam partem corporis* MN, *quam in ipso* MN, *hac praxi inueniemus. sit enim* AI *pars circuli æqualis parti* MP, *ita vt* PP, *sit parallela* LL *diametro: igitur* AI *ductum in* IB, *æquale est* AI, *ducto in* IK *bis, & simul* AI, *ducto in se semel: verùm* AI, *ductum in* IK *bis, æquale est corpori orto ex ductu* MP, *in* PR, *& ex* TN *hoc est* MP *ducto in* TR. *quæ quoniam sunt æqualia inter se, erunt æqualia & similia solido quod fit ex* AI, *plano ducto in* IK *bis. Igitur supereſt* AI, *ductum in se, quod repræsentatur per* QR *hoc est* MP, *hoc est* AI, *ducto in* RS, *hoc est* QR, *in se; patet igitur* QO *&* OS, *esse cylindricas superficies, & ipsam* OO *esse ellipticam lineam, vt ostendimus propositione 16. huius libri.*

PROPOSITIO XXIV.

CIrculum ABC cuius diameter AC, contingat in A linea AD, quam in D secet tangens DB, parallela diametro AC.

Dico FE ductum in EG, superficies producere cylindricas, quarum communis intersectio est elliptica.

Demonstratio.



PLanum FF ductum in EG, æquale est EF ducto [a] in EH, & EF ducto in HG. sed tam EF [b] ductum in EH, quàm EF ductum in HG siue FH, superficies producit cylindricas; igitur & EF ductum in EG, superficies producit cylindricas, communem vero intersectionem figuram esse ellipticam patet ex Scholio prop. 21. huius, igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

a 1. *secundi.*
b 20. *huius.*

Corollarium.

PRopositio quoque vera est, si DA linea circulum non contingat, sed tangenti æquidistet: demonstratio ferè eadem est cum priori.

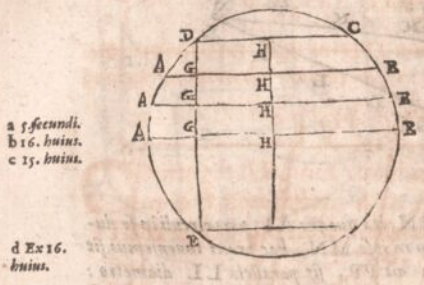
PRO-

PROPOSITIO XXV.

CIrculum ABC secent duæ quæuis lineæ DC, EF parallelæ inter se & æquales; iunganturq; DE.

Dico GB in se ductum, superficies producere cylindricas, quarum communis intersectio figura est elliptica.

Demonstratio.



a 5 *secundi.*
b 16. *huius.*
c 15. *huius.*
d Ex 16. *huius.*

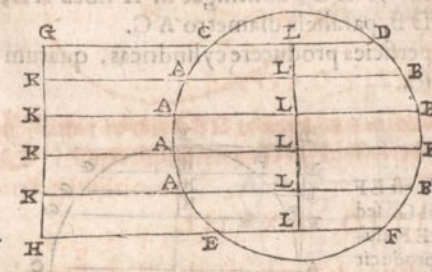
DVcatur per centrum recta HH, parallela DE: GB ductum in se, æquale GH ducto in se, & HB ducto in se,[a] vnà cum GH ducto in HB bis: sed tam HB ductum in se[b] quàm GH ductũ[c] in HB, corpus producit cylindricum; igitur GB ductum in se, superficies producit cylindricas. rursum cùm HB ductum in se, communem[d] producat intersectionem ellipsin, exhibebit & GB ductum in se, ellipsim pro communi intersectione; igitur, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

SEcent ABC circulum duę quæuis parallelæ & æquales lineæ CD, EF: quas extra peripheriam productas secet orthogonalis quæuis GH.

Dico KB ductum in se, superficies producere cylindricas, quarum communis intersectio est ellipsis.

Demonstratio.



e Ex 4. *secundi.*
f 15. *huius.*
g 16. *huius.*

AGatur per centrum circuli recta LL parallela GH. KB ductum in se æquale est KL ducto in LB bis, & KL ducto in se, vnà cum LB, ducto in se: sed[f] KL ductum in LB corpus producit cylindricum, & LB ductum in se superficies producit cylindricas quarũ communis intersectio,[g] ellipsis est; igitur & KB ductũ in se, superficies producit cylindricas quarum communis intersectio est ellipsis, Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

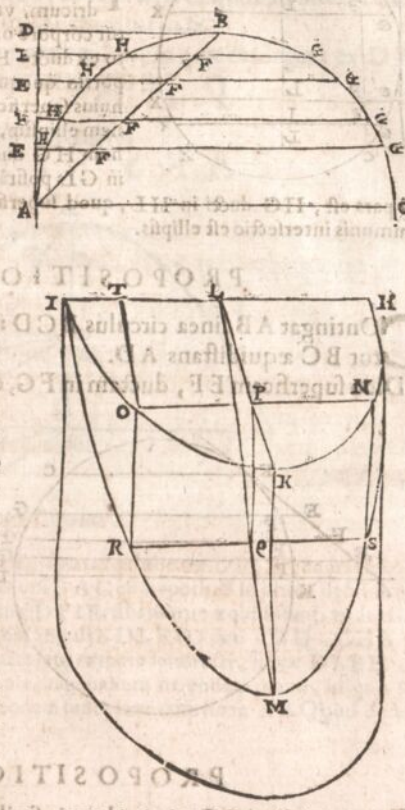
SEmicirculum ABC cuius diameter AC contingat in A linea AD, quam in D secet contingens quædam DB, parallela diametro AC, iunganturq; AB.

Dico EF ductum in GH, corpus producere cylindricum cuius superficies habent communem intersectionem ellipsim.

Demon-

Demonſtratio.

SIt HIK, baſis cylindri æqualis ABC ſemicirculo & diametro HI diuisâ in L bifariam, ducatur LK, eidem orthogonaliter. fiat autem LK, æqualis KM, & ducatur LM, erit itaque triangulum ABD æquale LKM triangulo: cùm AD, & DB æquales ſint ſemidiametro CD, ob BD parallelam AC, & AD contingentem in A; eſt autem circulus KIH, æqualis CB, quare etiam LK æqualis DB. Igitur quoniam KM, axi parallela eſt, vtpotè orthogonaliter poſita ad LK, erit quoque AB æqualis LM. Ducantur igitur NO, parallelæ HI, diuidentur illæ bifariam in punctis PP. Deinde ducantur PQ æquidiſtantes KM, erunt illæ æquales PL. Fiat denique ſectio per M punctum & lineam HI, exhibebitur [a] IRMSH ſemiellipſis, eritque LM in plano HIMS: cùm ſit KM, æqualis KL, vti etiam PQ, æqualis PL. Igitur etiam OR & NS, ipſis PQ æquales erunt: nam ducta OT quæ æquidiſtet KL erit OT æqualis OR, cum PL ſit in plano eodem cum OT, & LQ cum TR; & OT ſit æqualis PL, quare cùm ſint OR & NS, æquidiſtantes PQ erit rectangulum NOR, æquale rectangulo EFHG, cum ſint æquales lineæ, ſed NO, in OR, ductæ producunt cylindrum; igitur etiam EF, ductæ in HG, cylindri portionem efformabunt, illam ſcilicet quam exhibet ſectio HIMK. patet igitur veritas propoſitionis.



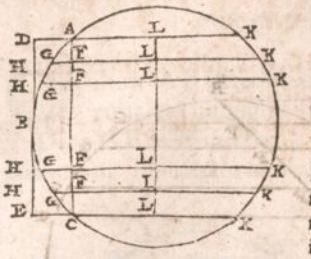
[a] *Per ſeptimum.*

PROPOSITIO XXVIII.

ESto ABC ſegmentum circuli quodcunque, quod in B contingat linea DE, parallela AC.

Dico FG ductum in GH, corpus producere cylindricum cuius ſuperficies communem habent interſectionem, ellipſim.

Demonstratio.



a 19. huius. b Ex 18. huius.

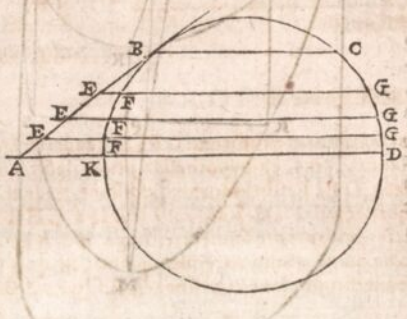
PLanũ HG ductũ in se producit [a] corpus cylindricum, vti & HG [b] ductũ in FH: ablato igitur corpore orto ex ductu HG in se, à corpore orto ex ductu HG in FH, remanebit HG in GF, portio quoque cylindrica. quod autem corporis huius superficies communem habeant intersectionem ellipsim, facilè deducitur ex 20. & 24. huius: nam HG ductum in GF, pars est HG ducti in in GL positâ LL diametro parallela DB: vti etiam pars est, HG ducti in HL, quod superficies producit cylindricas, quarum communis intersectio est ellipsis.

PROPOSITIO XXIX.

COntingat AB linea circulus BCD: actâq; AD per centrum, ducatur BC æquidistans AD.

Dico superficem EF, ductam in FG, corpus producere cylindricum.

Demonstratio.



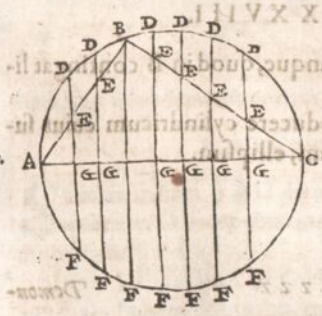
PLanum EF ductum in FG, rectãgula exhibet EFG, recta ad planum BCD (& quia FG æquidistant KD) parallela rectangulo AKD. quare EF quoque rectæ sunt ad planum ABC, igitur assumpto circulo BCD pro basi cylindri; EF ductæ in FG æquidistantes sunt axi cylindri: vnde & in superficie sunt cylindrica. Quod erat demõstrandum.

PROPOSITIO XXX.

SEmicirculo ABC triangulum inscribatur quodcunque ABC.

Dico superficiem DE, ductam in EF superficiem, corpus producere cylindricum.

Demonstratio.



c Elementis. d 16. huius. e 3. huius.

PLanum DG ductum in se siue in GF [c] æquale est DE ducto in EF, & EG ducto in se: sed DG ductum in se, producit [d] corpus cylindricum, & EG ductum in se [e] producit pyramidem, ablatâ igitur pyramide ex DG ducto in se, remanebit DE ductum in EF producens corpus cylindricum. Quod fuit demonstrandum.

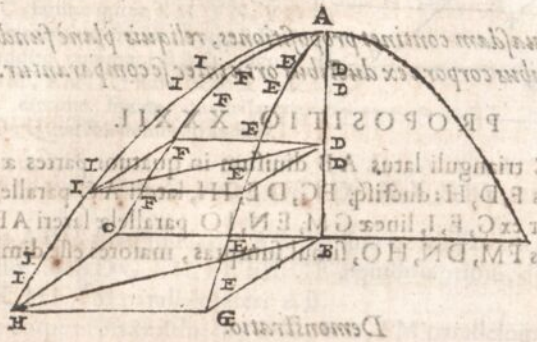
PRO-

PROPOSITIO XXXI.

SIt ADBCF figura quæcunque, & ADB, BC quidem lineæ sint rectæ, AFC verò quæuis: dein DF ducatur in se.

Dico communem intersectionem hædrarum quæ exsurgent ex DF in se ducto, in eodem esse plano cum recta ADB.

Demonstratio.



LIneæ DF parallelæ BC ductę in se, figuras exhibeant DFIE, quadratæ igitur sunt figuræ DFIE & rectæ ad planum BAC ex hypothesi in prima defin. huius. quia verò DF æquidistant BC, plana DFIE, sibi mutuo æquidistant, vnde triangula DIF, BHC æquidistant; & quia anguli FDI, FID, vti CBH, CHB per diametros quadratorum ablati, æquales sunt, vtpote semirecti, lineæ DI, BH [a] in eodem sunt plano: sunt autem extrema diagonalium in eodem plano, in quo sunt ipsæ diagonales; igitur & puncta in eodem sunt plano cum linea AB. Quod demonstrare oportuit.

[a] *Exelementis.*



DVCTVVM PLANI IN PLANVM

PARS TERTIA

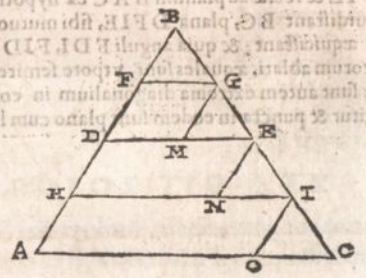
Vniuersales quasdam continet propositiones, reliquis planè fundamentales quibus corpora ex ductibus orta inter se comparantur.

PROPOSITIO XXXII.

ESto ABC trianguli latus AB diuisum in quatuor partes æquales in punctis F, D, H: ductisq; FG, DE, HI, lateri AC parallelis, demittantur ex G, E, I, lineæ GM, EN, IO parallelæ lateri AB.

Dico figuras FM, DN, HO, simul sumptas, maiores esse dimidio figuræ ABC.

Demonstratio.



VT AB ad HB, sic AC est ad HI, id est ad AO; sed HB continet tres partes, quarum AB habet quatuor ex construct. igitur & AO tres partes habet, quarum AC continet quatuor: vnde AC maior est rectâ AO: & illa maior quàm OC: ac proinde HO figura maior triangulo OIC: eodem modo ostenditur DN figuram maiorem esse triangulo NEI, & sic de cæteris. quia verò BF, FD æquales sunt, parallelogrammum FM duplum est trianguli FBG, id est æquale triangulis FBG, MGE; figuræ igitur FM, DN, HO simul sumptæ, maiores sunt quatuor triangulis FBG, MGE, NEI, OIC, id est residuo figuræ ABC, quare & maiores sunt dimidio eiusdem. Quod oportebat demonstrare.

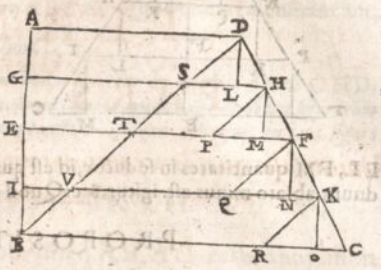
PROPOSITIO XXXIII.

ESto ABCD figura quadrilatera, habens AD, BC parallelas inter se; diuisâ autem AB in quatuor partes æquales punctis G, E, I, ducantur

cantur æquidistantes vni laterum (puta BC) rectæ GH, EF, IK, & ex D, H, F, K rectæ demittantur DL, HM, FN, KO, parallelę lateri AB.

Dico AL, GM, EN, IO, figuras simul sumptas maiores esse dimidio figuræ quadrilateræ AB, CD.

Demonstratio.



DVcantur HP, FQ, KR parallelæ BD: secantes lineas GH, EF, IK in S, T, V. erunt igitur SP, TQ, VR, a figuræ simul sumptę maiores dimidio figuræ BDC: figuræ igitur SM, TN, VO multò maiores sunt dimidio figurę BDC: quare addito communi BAD, figuræ AL, GM, EN, IO simul sumptæ sunt maiores dimidio figuræ quadrilaterę ABCD: Quod fuit demonstrandum.

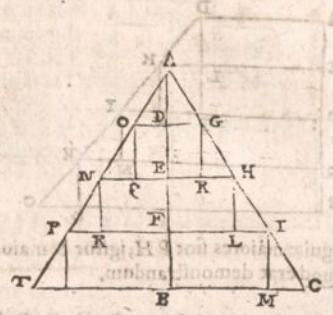
a 32. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto ABC trianguli latus AB diuisum quadrifariam in D, E, F; ductisq; lineis DG, EH, FI, basi CB æquidistantibus, demittantur rectæ GK, HL, IM parallelę lateri AB.

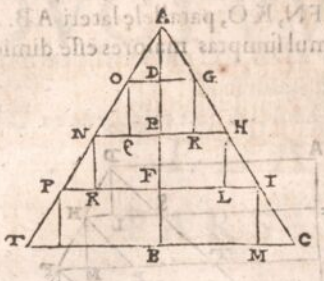
Dico corpora orta ex ductu, DK, EL, FM parallelogrammorum in se, plus dimidio complecti corpus quod exsurgit ex ductu ABC in se.

Demonstratio.



PArallelopipedū habens basim, quadratum lineæ EH, & altitudinem EF, ad parallelopipedum habens basim, quadratū lineæ DG, & altitudinē DE id est EF, eam habet rationem quam EH quadratum ad quadratum DG: id est quam quatuor ad vnum: nam EH linea cum dupla sit lineæ DG, erit quadratum EH b quadruplum quadrati DG. eodem modo parallelopipedum habens basim quadratum lineæ FI & altitudinem FB, ad parallelopipedum habens DG quadratum pro basi & DE altitudinem; est vt nouem ad vnum; quia FI linea tripla est rectæ DG: igitur DK, EL, FM, ducta in se, continent decies & quater corpus habens basim quadratum DG & altitudinem DE: Rursum corpus habens basim quadratum DG & altitudinem DE triplum est pyramidis, habentis basim quadratum KH id est DG & altitudinem DE, siue GK siue DA; igitur DK ductum in se tertiò continet DAG ductum in se, & EL ductum in se, duodecies continet pyramidem habentem basim, quadratum DG & ED altitudinem, id est duodecies continet GKH ductum in se; similiter FM ductum in se, continet GKH siue HLI, ductum in se vigesies septies: igitur DK, EL, FM, in seipsas ductæ, continent ADG ductam in se quadragesies & bis. iterum, DH ductum in se æquatur EG ducto in se, & GKH ducto in se vnà cum EG ducto in GKH bis; sed EG ductum in se triplum est ADG siue GKH, ducti in se; addito igitur GKH ducto in se, erit EG ductum in se vnà cum GKH ducto in se quadruplum ADG ducti in se. & quia EG ductum in GKH æquatur triangulo EGK ducto in GKH id est ADG ducto in se, & triangulo EDG ducto in GKH, id est dimidio ADG ducti in se. totum DH ductum in se, quinies continet ADG ductum in se, cum di-

b *Ex elementis.*



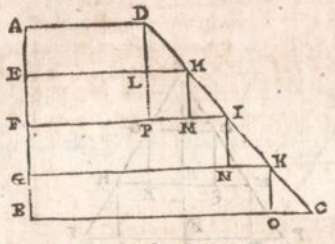
midio eiusdem ducti in se. Simili ratione procedendo ostendetur EFHI ductum in se, continere DAG ductum in se, tertiò supra vigesies: & FC ductum in se idem ADG ductum in se continere trigesies octies cum dimidio ADG ducti in se. addito ergo ADG ducto in se, totum ABC ductum in se id est ADG ductum in se, DH ductum in se, EI ductum in se, FC ductum in se, simul sumpta continent ADG ductum in se sexagesies sexies, vnà cum dimidio ADG ducti in se. si igitur ab hac summa auferantur DK, EL, FM quantitates in se ductæ, id est quadragesies & bis ADG ductum in se; residuum ablato minus est. igitur, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

ESto ABCD trapezium habens AD, CB latera æquidistantia, diuisaque AB quadrifariam in E, F, G ducantur rectæ EH, FI, GK parallelæ basi BC, dein lineæ demittantur DL, HM, IN, KO.

Dico AL, EM, FN, GO figuras ductas in se, maiores esse dimidio figuræ ABCD ductæ in se.

Demonstratio.

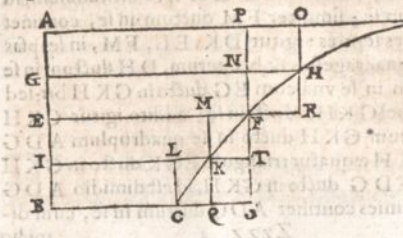


a Ex elementis.

ESt enim figura ABCD ducta in se æqualis figuris AL, EM, FN, GO, ductis in se, a item DLH, HMI, INK, KOC in se ductis; vnà cum DLH ducto in altitudines AD, EH, FI, GK, bis: id est PH ducto semel in easdem altitudines simul cum DLH quater in se ducto, sed AL, EM, FN, GO ductæ in se, maiores sunt PH ducto in altitudines AD, EH, FI, GK vnà cum LDH quater in se ducto, cùm altitudines sint communes, & AL, EM, FN, GO quantitates singulæ maiores sint PH; igitur & maiores sunt dimidio figuræ ABCD ductæ in se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SIt ABCD, figura intercepta duabus parallelis AD, BC habens AB rectam & DFC curuam, diuisaq; AB in partes quatuor æquales in G, E, I, ductisq; parallelis GH, EF, IK, erigantur rectæ, HO, FN, KM, CL æquidistantes AB: sit autem AD minor duplâ secundæ GH, & illa minor duplâ tertiæ, & sic de cæteris.



Dico figuras AHO, GFN, EKM, ICL simul sumptas maiores esse dimidio figuræ ABCD.

Demon-

Demonſtratio.

CVm enim AD minor ponatur duplâ ipſius GH, patet AH rectangulum maius eſſe reſiduo OHD: ſimiliter ob eandem rationem, GF maius eſt quàm FNH; & EK maius ipſo KMF, &c. vnde AH, GF, EK, IC, figuræ ſimul ſumptæ, maiores ſunt dimidio figuræ mixtilineę ABCD. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

NOta: ſi eadem conſtructio & procedendi methodus ſeruetur in reſiduis figuris OHD, FNH, *&c. patet rectangula illis inſcripta, ſimul ſumpta, maiora eſſe dimidiis figurarum* OHD, FNH, *&c. adeoq; per ſimiles ablationes tandem reſiduam relinqui, ex tota figura mixtilinea quantitatem, datâ minorem.*

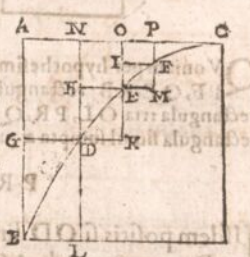
PROPOSITIO XXXVII.

ESto ABC figura intercepta duabus lineis AB, AC rectum angulum continentibus, perimeter verò CDB concaua ſit, diuisâ autem AB bifariam in G, ducatur GD parallela AC & DN æquidiſtans AB: dein ND bifariam diuiſa in H, ducatur HE æquidiſtans AC & EO, ipſi AB æquidiſtans, & hoc ſemper fiat.

Dico rectangula hoc pacto ablata continere plus dimidio figuræ mixtilineę ABC.

Demonſtratio.

PErficiantur rectãgula BGD, DHE, EIF, &c. erunt illa æqualia rectangulis AD, NE, OF, &c. ob ſubdiuiſionem linearum per æquales partes: ſed GL, HK, IM rectangula maiora ſunt figuris mixtilineis BDG, DEH, EFI, igitur & rectangula AD, NE, OF, &c. ſimul ſumpta maiora ſunt figuris BDG, DEH, EFI, &c. id eſt reſiduo figurę mixtilineæ ABC. Quod erat demonſtrandum.



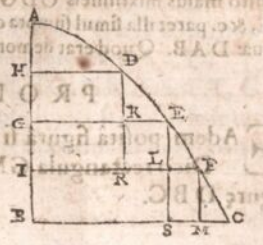
PROPOSITIO XXXVIII.

ESto ABC figura intercepta rectis duabus, AB, BC angulum ABC rectum continentibus, & ADC perimetro conuexâ; diuiſa AB quadrifariam in H, G, I: ducantur HD, GE, IF, parallelæ BC; & DK, EL, FM, æquidiſtantes AB, ita vt rectangulis AN, GO, IP, BQ contineantur omnes partes curuitatis.

Dico HK, GL, IM, figuras ſimul ſumptas maiores eſſe dimidio figuræ ABC.

Demonſtratio.

QVantitas HK maior eſt figurâ HAD; & KL maior eſt ipſa DKE: dein & LM maior quàm ELF: patet autem IS maiorem eſſe figurâ MFC, igitur HK, GL, IM figuræ ſimul ſumptæ multo sũt maiores figuris HAD, DKE, ELF, FMC, id eſt reſiduo figuræ ABC; igitur & maiores dimidio figurę ABC. Quod fuit demonſtrandum.



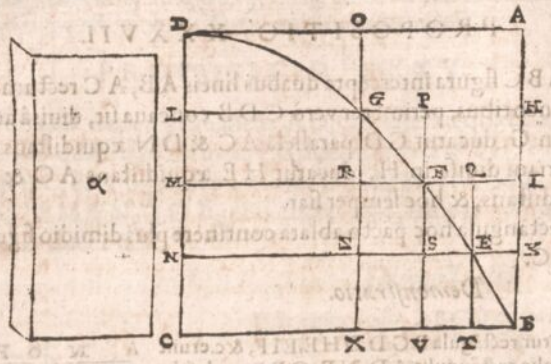
PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

REctangulum ABCD diuisum sit figurâ curuâ DGFEB, diuisâ autem DC altitudine in partes quotuis æquales, in punctis L, M, N, ponantur LH, MI, NK, CB parallelę AD, occurrentes curuæ lineæ in G, F, E punctis per quæ ponantur rectæ OR, PS, QT, parallelę DC.

Dico rectangula OL, PR, QS, KT, æqualia esse rectangulo AL, siue KC.

Demonstratio.



QVoniam per hypothesim æquales sunt lineæ DL, LM, MN, NC, id est OG PF, QE, KB: rectangula duo OL, PR æqualia sunt rectangulo PM, similiter, rectangula tria OL, PR, QS æqualia sunt rectangulo QN; & OL, PR QS, KT rectangula simul sumpta æqualia sunt rectangulo KC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

IIsdem positis si OD linea minor sit AO.

Dico rectangula AG, HF, IE, &c. maiora esse dimidio figuræ concauę DAB.

Demonstratio.

QVoniam AO linea per hypothesim maior est OD, rectangulum quoque AG maius est dimidio rectanguli AL: quia verò OL, PR, QS, KT rectangula per præcedentem æqualia sunt rectangulo AL, rectangulum AG, quod maius est dimidio AL, maius quoque est triangulis ODG, PGF, QFE, KEB; adeoque multo maius mixtilineis ODG, PGF, QFE, KEB: additis igitur rectangulis HF, IE, &c. patet illa simul sumpta cum AG rectangulo, maiora esse dimidio figuræ concauæ DAB. Quod erat demonstrandum.

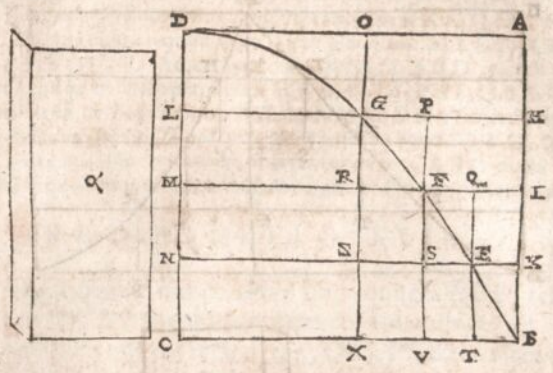
PROPOSITIO XLI.

EAdem positâ figurâ si AO, OD lineæ æquales sint:

Dico rectangula GM, FN, EC simul sumpta maiora esse dimidio figurę DBC.

Demon.

Demonſtratio.



PRoducta GR, pertingat ad NE in Z. quoniam igitur AO, OD lineæ æquales ſunt, rectangulum LO id eſt GM dimidium eſt AL; duo igitur rectangula GM, RN æqualia ſunt toti AL; ſed AL rectangulo æqualia ſunt rectangula OL, PR, QS, KT, igitur & illa quoque æquantur rectangulo GN: ergo & GN maius eſt conuexis figuris DGL, GFR, FES, EBT; additis igitur reſiduis rectangulis FZ, EC, rectangula GM, FN, EC inſcripta maiora ſunt dimidio figurę conuexæ DBC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

EAdem poſitâ figurâ:

Dico tot poſſe rectangula concauæ & conuexę inſcribi figurę, quę æqualem habeant altitudinem, vt reſiduum relinquant, dato minus.

Demonſtratio.

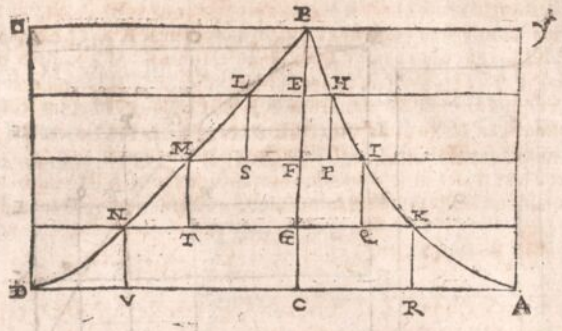
DAta ſit quantitas α: dein toties ſubdiuidatur DC linea, in partes æquales donec ſub BC baſi & altitudine NC rectangulum ſit minus quantitate α: tum per puncta diuiſionum lineæ ponantur parallelæ BC, occurrentes concauę figuræ in punctis G, F, E, per quæ lineæ ponantur æquidiſtantes DC; erunt igitur per 39. huius, rectangula omnia OL, PR, QS, KT ſimul ſumpta æqualia rectangulo KC, adeoque & minora quantitate datâ α, ſed ODG, PGF, QFE, KEB reſidua figuræ concauę minora ſunt rectangulis OL, PR, QS, KT: multò igitur minora ſunt quantitate datâ α. ſimiliter oſtenditur, ablatis ex conuexa figura rectangulis GM, FN, EC, reſidua relinqui, datâ quantitate minora. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO XLI.

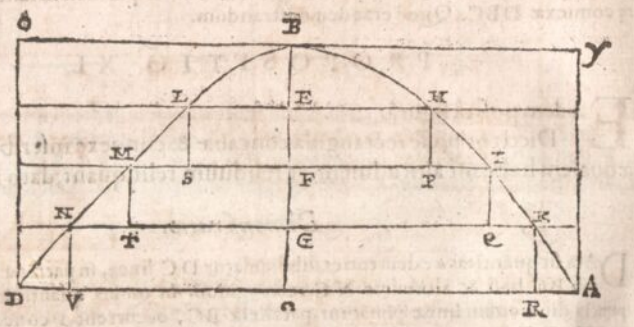
DAtæ ſint figuræ concauæ aut conuexæ ABC, CBD communem habentes altitudinem BC, normalem ad ſubtenſam ACD.

Dico tot illis inſcribi poſſe rectangula (EP, FQ, GR: ES, FT, GV) æqualis altitudinis & baſibus in directum poſitis, vt ſi hęc in ſe inuicem ducta auferantur ex concauis ABC, CBD etiam ductis in ſe inuicem, relinquant quantitatem datâ minorem.

Demonſtratio.







STatuatur ſolidum quoduis Z. ex 42. huius, figuræ ABD inſcribi poſſunt tot rectangula, vt ijs ablatis ex figura ABD plana reſidua BHE, PHI, QIK, RKA, LBE, MLS, NMT, DNV ſint quouis dato plano minora, ac proinde fieri à fortiori poterit, vt reſidua illa plana dempto LBH, ſint dato plano minora. Inſcribi igitur poterunt figuræ ABD tot rectangula vt ſolidum, quod fit ex ductu planorum BHE, PHI, QIK, RKA, in figuram CBD minus ſit dimidio ſolidi Z; itemque ſolidum quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, DNV in rectangula EP, FQ, GR minus ſit dimidio ſolidi Z: ac proinde vt vtrumque ſimul ſumptum dato ſolido Z ſit minus. Iam verò AHEC ductum in CELD, æquatur planis BKA, QIK, PHI ductis in CELD, & rectangulis EP, FQ, GR ductis in CELD. ſed rectangula EP, FQ, GR ducta in CELD æquantur iiſdem rectangulis ductis in rectangula ES, FT, GV, vnà cum iiſdem rectangulis ductis in plana MLS, NMT, VND, ſiue vnà cum planis MLS, NMT, VND ductis in rectangula EP, FQ, GR. ergo AHEC ductum in CELD æquatur planis RKA, QIK, PHI, ductis in CELD, & rectangulis EP, FQ, GR, ductis in rectangula ES, FT, GV, vnà cum planis MLS, NMT, DNV ductis in rectangula EP, TQ, GR. ſed tota figura ABC ducta in totam CBD æquatur AHEC ducto in CELD, & HBE

ducto

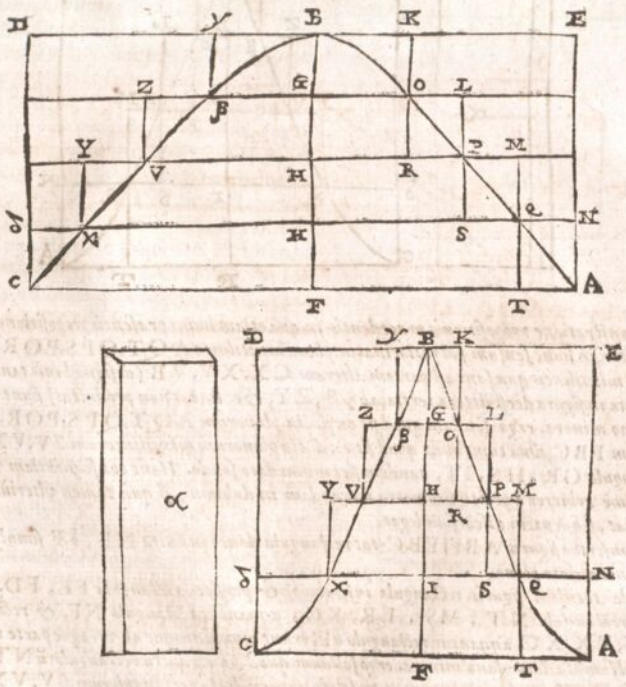
ducto in EBL, ergo figura tota ABC ducta in totam CBD æquatur planis RKA, QIK, PHI, HBE, ductis in totam figuram CBD, & rectangulis ductis in rectangula vnà cum planis MLS, NMT, DNV ductis in rectangula EP, EQ, GR. Ergo si rectangula ducta in rectangula auferantur ex toto ABC ducto in totum CBD, residuum erit id quod fit ex ductu planorum RKA, QIK, PHI, HBE in figuram CBD, vnà cum eo quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, BNV in rectangula EP, FQ, GR. Atqui supra ostendi figuræ ABD inscribi posse tot rectangula, vt quod fit ex ductu planorum RKA, QIK, PHI, HBE, in CBD, vnà cum eo quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, DNV in rectangula EP, FQ, GR sit minus dato solido Z. Inscribi igitur possunt figuris ABC, CBD tot rectangula, vt si hæc ducta in se inuicem auferantur ex tota ABC ductâ in totam CBD, relinquant quantitatem datâ minorem. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

DAta sit figura quæuis siue concaua siue conuexa ABF, terminata rectis lineis BF, AF angulum rectum continentibus.

Dico huic inscribi posse tot rectangula, OH, PI, &c. vt si ea in se ducta auferantur ex figura in se ductâ, relinquatur quantitas datâ minor.

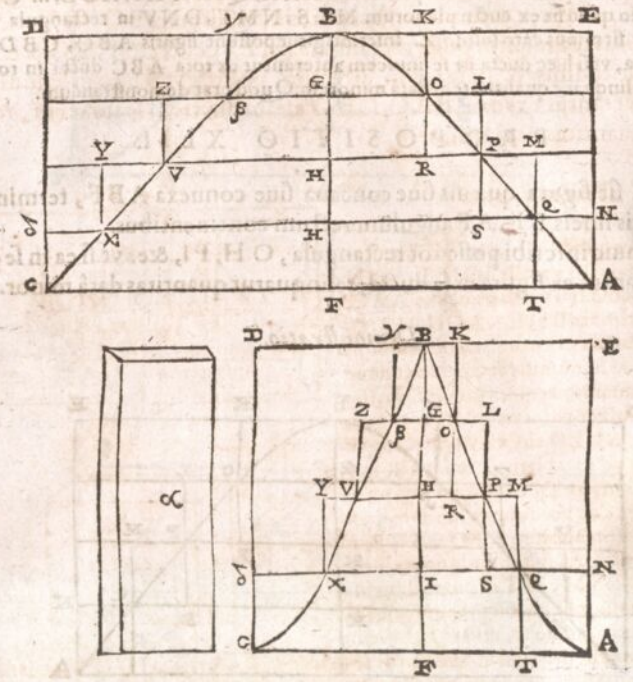
Demonstratio.



FIguræ ABF, apponatur æqualis & similis figura BFC, communem habens altitudinem BF, & subtensam FC, subtensæ AF indirectum, huic inscribantur totidem rectangula βH, VI, &c. quot inscripta vis figuræ ABF, & sunt eiusdem altitudinibus ac basibus indirectũ positis. Manifestum igitur est, ex definit. secũda huius

figuram ABF ducti in ſeipſam, nihil aliud eſſe quàm ducti in figuram BFC, ſibi ex conſtr. ſimilem & æqualem: rectangula item huic inſcripta OH, PI, &c. in ſe ducti, nihil aliud eſſe, quàm ea ducti in rectangula βH, VI, &c. reuocatur igitur hæc proportio ad præcedentem, ex qua proinde eius habetur demonſtratio.

Scholion.



IN demonſtratione propoſitionis præcedentis in qua etiam huius præſentis propoſitionis probatio nititur, in hunc ſenſum fui ratiocinatus: plana mixtilinea AQT, QPS, POR, OBG vnà cum mixtilineis quæ ſunt ad partem alteram CX, XV, VB (deſigno binis tantùm litteris, quia in figura deeſt littera tertia, o b γ β, ZY, &c. lineas non producťas) fiunt tandem dato plano minora. ergo ſolidum quod fit ex ducťu planorum AQT, QPS, POR, OBG in figuram FBC, vnà cum ſolido quod fit ex ducťu planorum mixtilineorum βV, VX, XC, in rectangula GR, HS, IT, tandem fiet minus dato ſolido. Hanc conſequentiam, quamuis minimè arbitrer à perito Geometra vocandam in dubium, ſi quis tamen vlteriùs probatam cupiat, ſequentem diſcurſum legat.

Circumſcribe figuris ABF, FBC tot rectangula donec infinita NF, δF ſimul ſumpta fiant minora dato plano.

Deinde totidem figuris rectangula inſcribe; & perfice rectangula FE, FD. Quoniam [a] *rectangula NT, MS, LR, KG, æquantur rectangulo NF, & rectangula Bβ, βV, VX, XC æquantur rectangulo δF, erunt omnia quoque ab vtraque parte rectangula ſimul ſumpta dato plano minora. ergo ſolidum quod fit ex ducťu rectangulorũ NT, MS, LR, KG in rectangulum FD, vnà cum ſolido nato ex ducťu rectangulorum βV, VX, XC in rectangnla OH, PI, QF, fiet tandem dato minus. ergo à fortiori ſolidum quod fit ex ducťu planorum mixtilineorum AQT, QPS, OBG in figuram FBC, vnà cum ſolido nato ex ducťu planorum mixtilineorum βV, VX, XC in rectangula δH, PI, QF tandem fiet dato ſolido minus. Quod erat probandum.*

a 39. huius.

Quæ

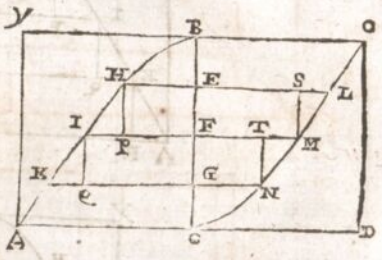
Quæ hoc scholio dicta sunt, sequenti etiam propositioni subseruiunt. Cæterùm malui seorsim hæc demonstrare quàm discursu non vsque adeo necessario propositionis 39. demonstrationem per se satis difficilem facere prolixiorem.

PROPOSITIO XLIII.

DAtæ sint figuræ quæuis concauæ aut conuexæ ABC, CBO subalternè positæ, communem habentes altitudinem BC.

Dico illis tot inscribi posse rectangula (HF, IG : &c. SF, TG, &c.) æqualis altitudinis & basibus in directum positis, vt si hæc in se inuicem ducta auferantur ex totis BAC, CBO etiam ductis in se inuicem, relinquatur quantitas datâ minor.

Demonstratio.

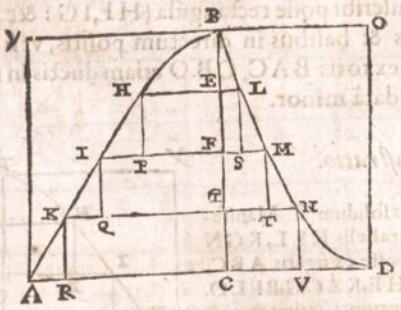


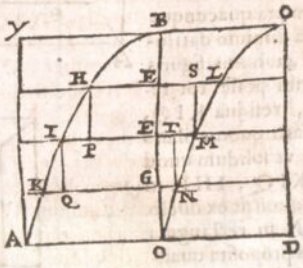
STatuatur quoduis solidum Z. Manifestum est ductis parallelis HEL, KGN tã paruas abscindi posse ex figuris ABC, CBO portiones BHE, KACG, BELO, GCN, vt solida ex eorum ductibus mutuis nata minora sint simul sumpta quacunque propositâ quantitate, puta dimidio dati solidi Z. similiter patet ex 42. huius, figuris KHEG, GELN inscribi posse tot rectangula, vt ijs ablatis, residua KIQ, IHP, LSM, MTN dato quouis plano sint minora, ac proinde vt solidum quod fit ex ductu planorum KIQ, IHP, in GELN, vnà cum solido quod fit ex ductu planorum LSM, MTN in rectangula HF, IG, minus sit quauis proposita quantitate, puta dimidio solidi dati Z. Inscribi igitur possunt figuris ABC, CBO tot rectangula, vt solida quæ fiunt ex ductu planorum AKGC, HBE in plana CGN, BELO, & ex ductu planorum KIQ, IHP, in planum ELNG, & ex ductu planorum LSM, MTN in rectangula HFIG, hoc est vt solidum quod fit ex ductu planorum AKGC, KIQ, IHP, HPE, in figuram totam CBO, vnà cum solido facto ex ductu planorum LSM, MNT in rectangula HF, IG, sit minus dato solido Z. Iam verò eodem discursu quo vsus sum in præcedenti, ostendam KHEG ductum in GELN æquari planis KIQ, IHP ductis in planum GELN, vnà cum planis LSM, MTN ductis in rectangula HF, IG, ac rectangulis insuper HF, IG ductis in rectangula SF, TG. sed tota figura ABC ducta in totam CBO æquatur KHEG ducto in GELN, ac planis AKGC, HBE, ductis in plana CGN, EBLO. Ergo figura tota ABC ducta in totam CBO, æquatur planis AKGO, KIQ, IHP, HBE, ductis in figuram totam CBO, vnà cum planis LSN, MNT ductis in rectangula HF, IG, ac rectangulis insuper HF, IG ductis in rectangula SF, TG. Quare si ex figurâ ABC, ducta in figura CBO auferantur rectangula ducta in rectangula, residuum erit solidum



quod fit ex ductu planorum AKGC, KIQ, IHP, HBE, in figuram CBO, vnà cum ſolido quod fit ex ductu planorum LSM, MTN in rectangula HF, IG. ſed hæc ſolida, vt ſuprà demõſtraui ſimul ſumpta minora eſſe poſſunt dato ſolido Z. ergo figuris ABC, CBO inſcribi poſſunt tot rectangula, vt ſi hæc in ſe mutuo ducta auferantur ex ductu totius in totum, relinquatur quantitas datâ minor. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.





SInt ABC, CBD figuræ, quarum vna conuexa, altera concaua; poſitæ autem ſint ſubalternè vel non ſubalternè.

Dico vtrique tot poſſe inſcribi rectangula (HF, IG, KC: LF, MG, NC) vt illa ducta in ſe mutuo plus auferant dimidio totius ducti in totum.

DEmonſtratio primæ figuræ eadem eſt cum 43. vel 42. ſecundæ verò eadem cum præcedenti.

PROPOSITIO XLV.

DAta ſint tria plana BAC, BEC, BDC qualiacunque, communem habentia altitudinẽ BC: poſitâq; BD normali ad BC, ducantur illi infinitæ, (hoc eſt quotcunque) æquidiſtantes AKED, quæ occurrant communi lineæ in punctis KK, planorum verò perimetris in punctis AA, EE, DD.

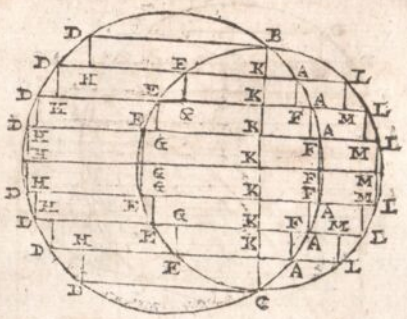
Si AK, KE, KD, ſint continuè proportionales, ſiue, (quod idem eſt,) ſi quadrata KE, æqualia ſint rectangulis AKD:

Dico planum BAC ductum in planum BDC, æquari plano BEC ducto in ſe.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [795] - 738
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



DVctis lineis AF, DH parallelis ad BC, inſcribantur planis BAC, BDC infinita rectangula KF, KF: KH, KH. ductis item lineis EG figuræ BEC infinita ſimiliter rectangula inſcribantur KG, KG. Rectangula KF, ducta in rectangula KH, corpori quod fit ex ductu plani BAC, in planum BDC inſcribunt infinita parallelopipeda, quorum baſes ſunt rectangula AKD, altitudines verò AF, AF ſiue DH, DH. Similiter rectangula KG, KG ducta in ſe; corpori quod fit ex ductu plani BEC in ſeipſum inſcribunt infinita parallelepipeda, quorum baſes ſunt quadrata KE, KE, altitudines GE, GE. Atqui ex hypotheſi rectangula AKD ſemper æqualia ſunt quadratis KE, Ergo parallelepipeda inſcripta corpori facto ex ductu plani BAC in planum BDC æquales baſes habent baſibus parallelopepedorum inſcriptorum corpori genitò ex ductu plani BEC in ſeipſum. ſunt autem & altitudines AF altitudinibus EG æquales. Ergo omnia parallelopipeda inſcripta corpori genito ex ductu mutuo planorum BAC, BDE, æqualia ſunt omnibus parallelopipedis inſcriptis corpori producto ex plano BEC ducto in ſe. Cùm igitur in propoſitionibus proximè præcedentibus demonſtratum ſit parallelopipeda illa ita poſſe multiplicari vt corpora ipſa quibus inſcribuntur exhauriant, hoc eſt vt ex ijs ablata relinquant quãtitatem datâ qualibet minorem; ipſa etiam corpora inter ſe æqualia eſſe neceſſe eſt.

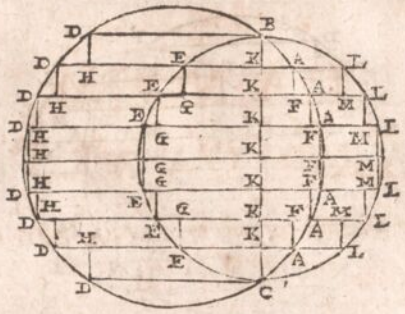
Vlteriorem huius rei demonſtrationem peritus Geometra non requiret. Vt tamen rigori geometrico per omnia ſatisfiat id ipſum accuratiùs demonſtrabimus hunc in modum.

Si corpus genitum ex mutuo ductu planorum BAC, BDE, non ſit æquale corpori quod fit ex plano BEC in ſe ducto, neceſſe eſt alterutrum eſſe minus altero. Ponatur primò id quod fit ex ductu plani BEC in ſeipſum eſſe minus altero quantitate aliquâ quam vocemus Z. Breuitatis etiam cauſa corpus natum ex ductu plani BEC, in ſe vocemus corpus BEC, & corpus factum ex ductu mutuo planorum BAC, BDC, corpus ABCD appelletur. Ex propoſitionibus proximè præcedentibus patet figuris BAC, BDC tot inſcribi poſſe rectangula KK, KF, KH, KH, vt ea in ſe mutuo ducta inſcribant corpori ABCD parallelopipeda, quæ deficiant ab ipſo corpore; cui inſcribuntur, quantitate minori quàm ſit data quantitas Z. ergo parallelopipeda inſcripta corpori ABCD maiora ſunt corpore BEC: ſed parallelopipeda inſcripta corpori ABDC ſupra demonſtrauimus æqualia ſemper eſſe totidem parallelopipedis inſcriptis corpori BEC. ergo parallelopipeda inſcripta corpori BEC etiam maiora ſunt ipſo corpore BEC, pars toto; quod eſt abſurdum. Non igitur corpus BEC minus eſt corpore ABDC. Eodem modo demonſtrabitur corpus ABDC non eſſe minus corpore BEC. Neutrum igitur altero minus eſt, æqualia igitur ſint neceſſe eſt. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [796] - 739
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLVI.



DAta ſint quatuor plana BLC, BAC, BEC, BDC qualiacunque, communem habentia altitudinem BC: poſitâq; normali ad BC, ducantur illi quotcunque æquidiſtantes LAKED, quę communi altitudini occurrant in punctis K, K, perimetris verò planorum in punctis LL, AA, EE, DD.

Si KE, KD rectæ proportionales ſint rectis KA, KL, ſiue (quod idem eſt) ſi rectangula LKE æqualia ſint rectangulis AKD:

Dico corpus genitum ex mutuo ductu planorum BLC, BEC, æquale eſſe corpori facto ex ductu mutuo planorum BAC, BDC.

Eodem prorſus diſcurſu demonſtratur quo prima pars.

Scholion.

THeorema iam demonſtratum vniuerſaliſſimum eſt, extenditq; ſeſe ad ſequentes propoſitiones fere omnes. Ne igitur idem diſcurſus in ſingulis propoſitionibus labore inutili, & cum noleſtia lectoris repetendus eſſet, placuit totum exhauſtionis negotium hoc loco terminis vniverſalibus proponere ac demonſtrare.

DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS QVARTA

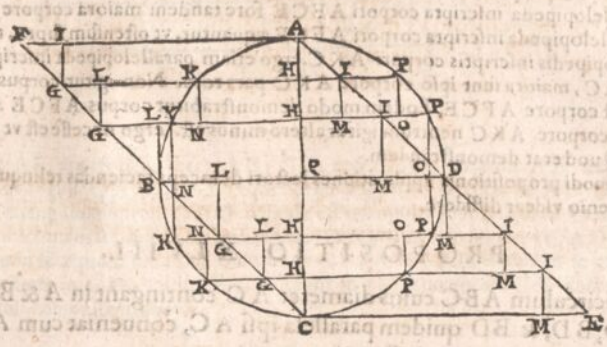
In comparationem adducit corpora orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum illis quæ oriuntur ex ductu partium circuli in se vel in alias circulares.

PROPOSITIO XLVII.

CIrculum ABC, cuius diameter AC, contingant A & C rectæ, AF, CE æquales diametro AC, iunganturque FC, AE.

Dico ACF ductum in ACE æquale esse semicirculo ABC ducto in se.

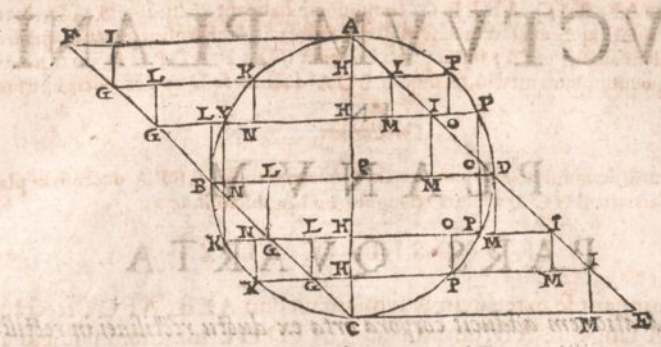
Demonstratio.



DVcantur quotcunque rectæ GK, HI, parallelæ ad AF, CE. Quoniam triangula FAC, GHC sunt similia, & ex hypothesi EA, AC æquales sunt, etiam GH, HC æquales erunt. Eodem modo HI, HA probantur æquales. Ergo rectangula GHI æquantur rectangulis AHC, hoc est quadratis KH. cùm igitur tria plana CFA, CKA, CAE communem habeant altitudinem AC, & rectangula AHI quorum latera sunt in extremis planis CFA, CAE, æquentur quadratis plani medij CKA, constat ex 45. huius corpus ortum ex ductu plani CFA in planum CAE æquari corpori quod fit ex ductu plani CKA in se.

Sed doceamus in hoc exemplo quomodo præcedentis propositionis vniuersalis demonstratio deinceps applicari debeat.

Vocemus autem breuitatis gratia corpus natum ex ductu plani CFA in planum CAE, corpus AFCE: corpus verò natum ex ductu plani CKA in se, appelletur corpus AKC. Ducantur GL; IM; KN, parallelæ ad AC. Rectangula LH ducta in rectangula HM inscribunt corpori AFCE parallelopipeda



quorum baſes ſunt rectangula GHI, altitudines GL, ſiue IM. ſimiliter corpori AKC quadrata HK in ſe ducta inſcribuut parallelopipeda quorum baſes ſunt quadrata KH, æqualia (vt oſtendi ſupra) rectangulis baſibus GHI, altitudines verò KN æquales item altitudinibus GL, ergo omnia parallelopipeda inſcripta corpori AFCE æquantur omnibus parallelopipedis inſcriptis corpori AKC, & hoc ſemper cõtinget, ſi iam negas corpora AFCE, AKC æqualia eſſe, neceſſe eſt alterũ altero ſit minus. ponatur primò corpus AKC eſſe minus corpore AFCE quantitate aliqua, quam vocemus Z. Quoniam liquet ex propoſitione 42. huius, ductis ſemper pluribus ac pluribus parallelis GKHI, tot rectangula LH, HM inſcribi poſſe planis CFA, CAE, vt parallelopipeda quæ ex eorum mutuo ductu inſcribuntur corpori AFCE deficiant ab ipſo corpore AFCE quantitate minori quàm ſit data quantitas Z, quâ ponebatur deficere corpus AKC à corpore AFCE, manifeſtum eſt parallelopipeda inſcripta corpori AFCE fore tandem maiora corpore AKC. ſed parallelopipeda inſcripta corpori AFCE æquantur, vt oſtenſum ſupra, totidem parallelopipedis inſcriptis corpori AKC. ergo etiam parallelopipeda inſcripta corpori AKC, maiora ſunt ipſo corpore AKC pars toto. Non igitur corpus AKC, minus eſt corpore AFCE. Eodem modo demonſtrabitur corpus AFCE non eſſe minus corpore AKC neutrum igitur altero minus eſt. ergo neceſſe eſt vt ſint æqualia. Quod erat demonſtrandum.

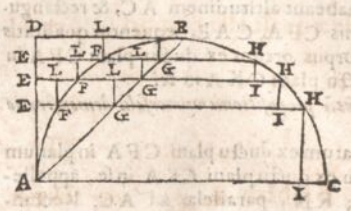
Huiuſmodi propoſitionis applicationes lectori deinceps faciendas relinquam, ne ipſius ingenio videar diffidere.

PROPOSITIO XLVIII.

SEmicirculum ABC cuius diameter AC contingant in A & B, lineæ AD, BD, & BD quidem parallela ipſi AC, conueniat cum AD in D. Iunganturq; puncta A, B.

Dico ADB triangulum ductum in ſe æquale eſſe plano BDAF ducto in planum ADBHC.

Demonſtratio.



DVcantur quotcunque rectæ EFGH, parallelæ ad tangentem BD, quæ, vt patet ex elementis, recta eſt ad AD. Triangula AEG, ADB ſunt ſimilia, ergo quadrata AE ſunt ad quadrata EG, vt quadrata AD ad quadrata DB. ſed quadrata AD, DB æquantur, ergo & quadrata AE, hoc eſt rectangula FEH, æquantur quadratis EG. Cùm igitur tria plana

plana BDAF, BAG, ADBHC, communem habeant altitudinem AD; & rectangula FEH quorum latera sunt in planis extremis, semper sint æqualia quadratis EG plani medij; per 45. huius plana extrema BDAF, ADBHC, in se mutuo ducta, æquantur plano medio, triangulo BDA ducto in se. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

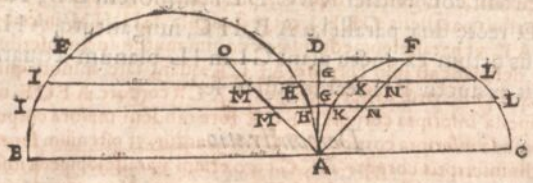
EX discursu demonstrationis patet etiam partiale planum EFFA ductum in planum partiale EHCA æquari triangulo EGA ducto in se.

PROPOSITIO XLIX.

COntingant se exteriùs in A semicirculi duo AEB, AFC: erectáq; ex A tangente AD, ducatur tangens FDHE minorem semicirculum in F.

Dico planum HG ductum in planum GI, æquari plano KG ducto in planum GL.

Demonstratio.



IVnge AF, apteturque inter AB, GE, recta AO, æqualis AF. æquales igitur sunt anguli OAD, DAF: sunt autem anguli ad D recti & AD linea communis; triangulum igitur OAD æquale est triangulo DAF: quare OAD triangulum ductum in se, æquale est triangulo DAF ducto in se, sed [a] OAD triangulo ducto in se æquale est HG ductum in GI, & [b] FAD ducto in se æquale est GK ductum in GL, igitur HG ductum in GI æquale est GK ducto in GL. Quod fuit demonstrandum.
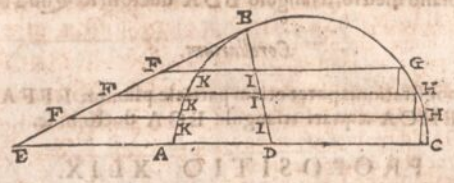
[a] *Coroll. praced.*
[b] *48 huius.*

PROPOSITIO L.

CIrculum ABC cuius diameter AC contingat in B recta quæuis EB conueniens cum diametro AC in E, factaq; ED æquali EB ducatur recta BD.

Dico EBD triangulum ductum in se æquale esse corpori orto ex ductu plani FK in FH planum.

Demonſtratio.



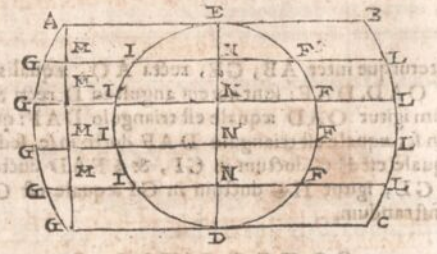
DVcantur quotcunque FKIH parallelæ ad AC, cùm BE, DE ex hypotheſi ſint æquales, ob triangulorum ſimilitudinem, æquantur etiam BF, FI, adeóque ſemper quadrata BF hoc eſt (quoniam BF tangens eſt) rectangula KFH, quadratis FI æqualia ſunt. Igitur per 45. huius planum KF, KF ductum in planum FH, FH æquatur triangulo EBD ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

SInt duo circuli concentrici ABC, DEF; minorem DEF contingant in E & D rectę duæ parallelæ AB, HC, iunganturq; AH.

Dico corpus ortum ex ductu plani GI in IL planum æquari corpori quod exſurgit ex ductu EH rectanguli in ſe.

Demonſtratio.



a *Ex elementis.* b *45. huius.*

DVcantur quotcunque lineæ GMINL, patet a rectangula ſingula GIL æquari quadrato tangentis AE, hoc eſt quadratis ſingulis MN, MN: ergo b corpus factum ex ductu plani GI, GI in planum IL, IL, æquatur rectangulo EH in ſe ducto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LII.

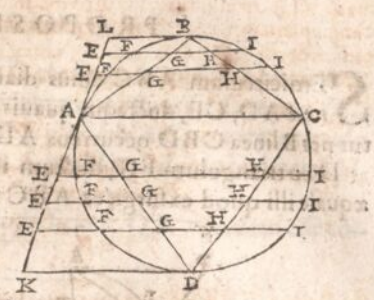
CIrculum ABC ſecet vtcunque recta AC, actaque per A recta AL quę circulum contingat in A, ducantur lineæ AC parallelæ BL, contingentes eundem circulum in B conuenientelq; cum AL in L; deinde rectæ ducantur AB, BC.

Dico planum EF ductum in quadrilaterum GH æquale eſſe FG ducto in ſe.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [801] - 744
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.



DVcantur quotcunque lineæ EFGHI, parallelæ ad BL & AC. Quoniam AL, BL lineæ circulum contingunt, & illis EFGI æquidistant, constat ex elementis EF, EG, EI lineas esse proportionales, & ABC triangulum isosceles. vnde FG, HI lineæ inter se æquales sunt, per 15. igitur libri de progressionibus etiam proportionales sunt EF, FG, GH: Quare EF ductum [a] in GH, æquale est FG ducto in se. Quod fuit demonstrandum.

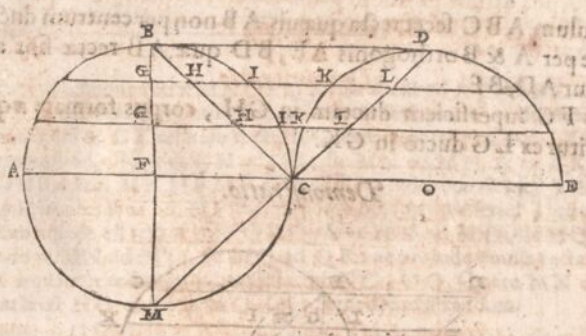
[a] 45. huius.

PROPOSITIO LIII.

COntingant se exterius in C duo circuli æquales ABC, CDE ductaque BD æquidistante diametris ACE quę circulos contingit in B & D, iungantur BC, CD, & diameter ducatur BFM.

Dico GH ductum in IK æquale esse corpori quod exsurgit ex HI ducto in se.

Demonstratio.



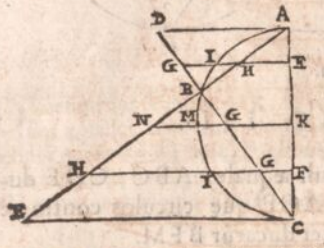
DVcantur quotcunque GHIKL parallelæ ad BD, ACE, & à contactu ponatur diameter BM, iungaturque MC, quoniam in BD, AC parallelas incidit BC, erit angulus CBD par angulo BCF, & ob eandem causam angulus CDB par angulo MCF, sed anguli MCF, BCF faciunt rectum: ergo & anguli CBD, CDB faciunt rectum. ergo angulus BCD rectus est: est autem & BCM rectus, ergo MC, CD sunt vna recta linea. Deinde cùm BD tangat æquales circulos, par erit [b] diametro BM. ergo ob triangulorum similitudinem etiam GL par est GM. similiter cùm FC, FB sint æquales, etiam GH, GB æquales erunt. ergo rectangula HGL rectangulis BGM hoc est quadratis GI semper sunt æqualia. Itaque semper GH, GI, GL sunt in continuâ ratione; ergo cùm rectæ KL æquentur lineis HI, etiam GH, HI, IK [c] sunt continuæ; adeoque rectangula omnia GH, IK, quadratis omnibus HI æqualia sunt. ergo [d] triangulum GH, GH ductum in planum IK, IK æquatur plano HI, HI ducto in se. Quod erat demonstrandum.

[b] Ex elementis.
[c] 15. De progress.
[d] 45. huius.

PROPOSITIO LIV.

SEmicirculum ABC cuius diameter AC contingant in A & C lineæ AD, CE, ductaque quauis ABE quæ circulo occurrat in B agatur per B linea CBD occurrens AD lineæ in D.

Dico triangulum FG, ductum in triangulum FH corpus producere æquale illi quod exsurgit ex ABC semicirculo ducto in se.



Demonstratio.

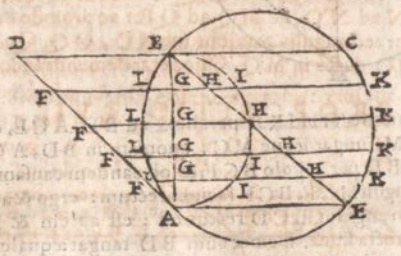
DVcatur enim quæuis KN, parallela contingenti AD quæ occurrat ABH, CD, AC lineis in N, L, K; triangula igitur CKL, AKN similia sunt, vt patet ex elementis. vnde KL ad KC, est vt AK ad KN, & LKN rectangulum æquale rectangulo AKC, id est quadrato KM; rectangula igitur HFG æqualia quoque sunt quadratis FI; quare FG ductum in FH corpus generat, æquale illi quod oritur ex ABC semicirculo ducto in se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

CIrculum ABC secet recta quæuis AB non per centrum ducta, actisque per A & B orthogonis AE, BD quæ AB rectæ sint æquales, iungantur AD, BE.

Dico FG superficiem ductam in GH, corpus formare æquale illi quod oritur ex LG ducto in GK.

Demonstratio.



SVper AB vt diametro, semicirculus describatur BIA & ducantur quotcunque LGIK parallelę ad BC, AE. erit igitur [a] FG ductum in GH, æquale BIA semicirculo ducto in se, sed [b] BIA ducto in se æquale est LG ductum in GK eum omnia rectangula LGK, æqualia sint rectangulis BGA, hoc est quadratis GI, igitur & FG ductum in GH æquale est corpori quod oritur ex LG ducto in GK. Quod fuit demonstrandum.

[a] 47. huius.
[b] 45. huius.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

Circulum ABC cuius diameter AC contingant in A & B lineæ AE, BE conuenientes in E, & BE quidem æquidistans sit diametro AC: dein iunctâ AB ducatur quæuis GHKL parallela AC occurrens circulo in H & L, rectæ verò AB in K, & ex A per H & L ducantur lineę AH, AL occurrentes EB rectæ in I & F.

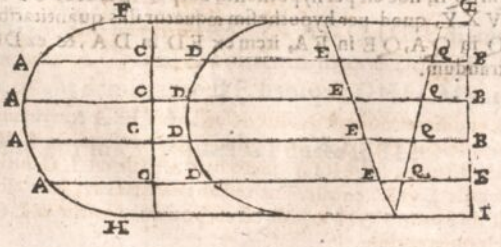
Dico MN superficiem ductam in superficiem QR æqualem esse cori orto ex ductu NO in MQ.

Demonstratio.

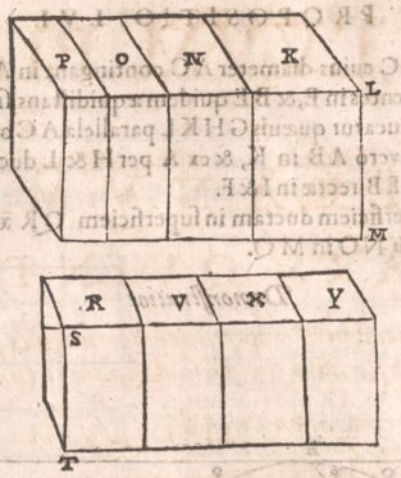


DVcantur quotcunque rectæ MNOPQR, parallelæ ad AC, vel BE. Quoniam AE, BE lineę circulum contingunt, erunt inter se æquales; vnde ob similitudinem triangulorum & GK æqualis rectę AG, quia verò GH, GK, GL continuæ proportionales sunt, estque vt GH ad GK, sic MN ad MP, & vt GK ad GL, sic MP ad MR, etiam MN, MP, MR cõtinuę sunt proportionales: sed & MO, MP, MQ proportionales sunt, & MP media communis vtrique seriei; igitur NMR rectangulum æquale est rectangulo OMQ: & vt MN ad MO, sic MQ ad MR, & diuidendo vt MN ad NO, sic MQ ad QR: ac proinde omnia rectangula sub MN, QR æquantur rectangulis omnibus sub NO, OQ. Quare MN ductum in QR æquale est NO ducto in MQ. Quod erat demonstrandum. 246. huius.

PROPOSITIO LVII.



FIguram AB, parallelis FG, HI, terminatam, secent lineæ quæcunque CC, DD, EE, QQ, BB. dein AC ductum in CB exhibeat corpus

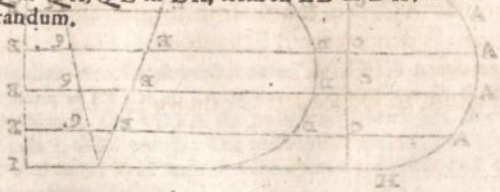


pus habens basim K & altitudinem L M: & C D in D B æquale sit magnitudini habenti basim N & L M altitudinem, corpus quoque ex ductu D E in E B quantitatem proferat habentem basim O & altitudinem L M, tandem E Q in Q B æquale sit corpori habenti basim P & eandem cum reliquis altitudinem: simili modo fiat corpus habens basim R & S T altitudinem æquale illi quod oritur ex ductu B Q in Q A, & quantitas habens basim V & S T altitudinem, producta sit ex Q E in E A: dein E D in D A generet corpus habens basim X & S T altitudinem, & D C in C A, corpus efformet cuius basis sit Y & altitudo reliquis æqualis.

Dico corpus habens bases K N O P & altitudinem L M æquale esse illi quod bases habet Y X V R, & altitudinem S T.

Demonstratio.

OStensum est in libro de linearum potentijs, prop. 61. eiusque Corollario, rectangula A C B, C D B, D E B, E Q B æqualia esse rectangulis B Q A, Q E A, E D A, D C A, igitur corpora orta ex ductu A C in C B, ex C D in D B, item ex D E in E B, & E Q in Q B, hoc est per hypothesim corpus M L K N O P, æquale est corpori T S R V X Y, quod per hypothesim æquatur illis quantitatibus quæ oriuntur ex ductu B Q in Q A, Q E in E A, item ex E D in D A, & ex D C in C A. Quod fuit demonstrandum.



D V.

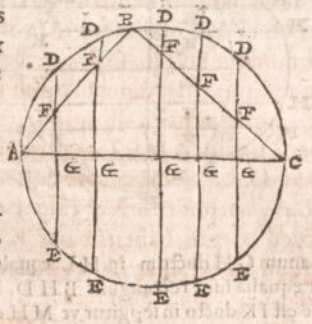
DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS QVINTA

Agit de æquationibus & proportione ſolidorum quæ gignuntur ex ductu partium circularium in alias circulares.

PROPOSITIO LVIII.

ESto circulo A B C cuius diameter A C inſcriptum triangulum rectangulum A B C, ducanturque rectæ D F G E normales ad diametrum A C.

Dico D F ductum in F E, corpus producere æquale illi quod exſurgit ex A B C ſemicirculo ducto in ſe, minus A B C triangulo ducto in ſe.



Demonſtratio.

QVoniam D F E rectangula vnà cum quadratis F G, æqualia ſunt quadratis D G, a igitur D F ductum in F E vnà cum F G ducto in ſe æquale eſt D G ducto in ſe; igitur ſi à D G ducto in ſe auferatur F G ductum in ſe, reſiduum D F ductum in F E æquale eſt A B C ſemicirculo ducto in ſe, minus ſuperficie F G id eſt triangulo A B C ducto in ſe: Quod fuit demonſtrandum.

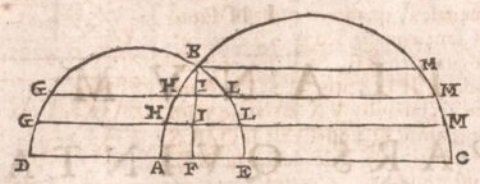
a 45. huius.

PROPOSITIO LIX.

HAbeant circuli duo ſeſe interſecantes A B C, D B E diametros in directum poſitas A C, D E, & punctum interſectionis B; ex quo ad diametrum normalis demittatur B F, fiantque G H I L M parallelæ D C occurrentes circulis in G H L M.

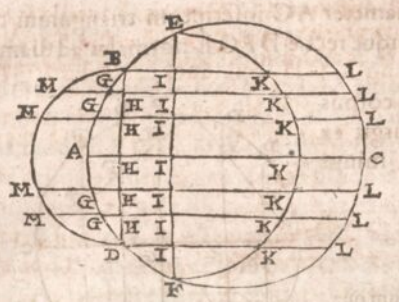
Dico H I ductum in I M æquari G I ducto in I L.

Demonſtratio.



INtelligatur enim ad BF deſcribi quadrans BKK, erit tam HI ſuperficies ducta in ſuperficiem IM, quàm GI ſuperficies ducta in IL ſuperficiem æqualis IK ductæ in ſe; igitur HI ductum in IM æquale eſt GI ducto in IL: Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.



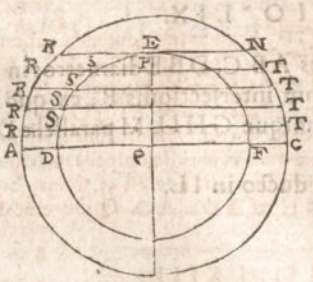
CIrculum A B C ſecent parallelę duæ D B, E F diametri circulorum E K F, B M D.

Dico G H ductum in H L, ad G I ductum in I L eam habere rationem quam M H ductum in ſe, habet ad I K ductum in ſe.

Demonſtratio.

PLanum G H ductum in H L, æquale eſt M H ducto in ſe, quia G H I rectangula æqualia ſunt rectangulis B H D, id eſt quadratis M H. ſimiliter G I in I L æquale eſt I K ducto in ſe; igitur vt M H ductum in ſe ad I K ductum in ſe, ſic G H ductum in H L ad G I ductum in I L. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXI.



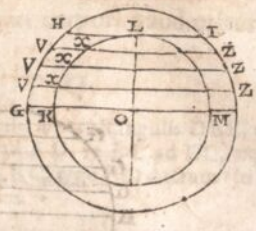
SInt A B C, D E B, item G H I, K L M circuli concentrici, & lineæ B N, H I quæ circulos K L M, D E F contingunt in E & L ſint æquales, ducantur deinde diametri A C, G Z parallelæ ad B N, H I, ductâq; normali O L, fiat illi æqualis Q P normalis.

Dico R S ductum in S T æquale eſſe V X ducto in X Z.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur quotuis RST, VXZ parallelæ ad BN, HI. Quoniam HI, BN lineæ contingentes ſunt & æquales, quadrata quoque dimidiorum HL, BE ſunt æqualia. ſed RST rectangula æqualia ſunt quadrato BE, & VXZ rectangula æqualia quadrato HL; igitur RST rectangula æqualia ſunt rectangulis VXZ: vnde cùm altitudo ſit eadem (nam PQ æqualis eſt LO,) RS ductum in ST [a] æquale eſt VX ducto in XZ. Quod fuit demonſtrandum.

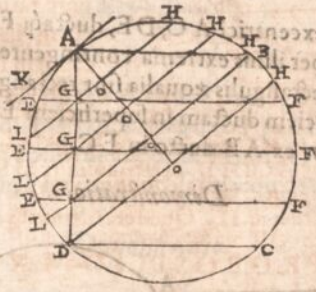


a 46. huius.

PROPOSITIO LXII.

CIrculum ABC ſecet recta quæuis AD non per centrum ducta, diuiſaq; AD in partes quotuis æquales in GG, agantur per G rectæ EH, DH parallelæ contingenti AK; & LF, DC parallelæ ad AB orthogonę ad AD lineam: dein ex A demittatur AO normalis ad rectas EH: Dico planum AED ductum in planum ABCD ſecundùm parallelas LH eſſe ad LG planum ductum in GH, ſecundùm parallelas LGH, vt AD ad AO.

Demonſtratio.



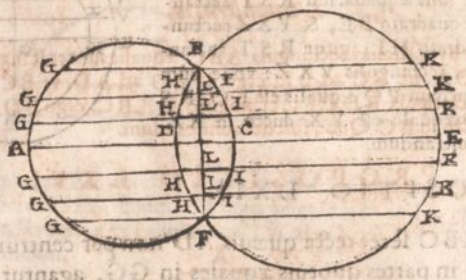
REctangula EGF æquantur rectangulis LGH. Ergo parallelopipeda habentia pro baſibus rectangula LGH, quę exhauriunt corpus natum ex ductu LG, in GH, ſunt ad parallelopipeda quorum baſes ſunt rectangula EGF, & exhauriunt corpus genitum ex ductu EG in GF, vt altitudines AO, ad altitudines AD, ſed quæ eſt proportio parallelopipedorum infinitorum ad infinita parallelopipeda, eadem eſt proportio corporum quibus parallelopipeda inſcribuntur, vti facilè colligitur ex diſcurſu propoſitionis vniuerſalis quæ eſt 45. huius. Ergo EG, ductum in GF, eſt ad LG, ductum in GH vt AD ad AO. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIII.

SEcent ſe vtcunque circuli duo ABC, DBE in B & F, iunctiſq; interſectionum punctis, agantur per B & F orthogonæ ad BF.

Dico ſuperficiem HL ductam in IK, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu ſuperficiei GH in LI.

Demonſtratio.



DVcantur infinitæ GHLIK, parallelæ ad GBK, GFK. quoniam tam HLK, quã GLI rectangula æqualia ſunt rectangulis BLF, erunt HLK, GLI rectangula quoque inter ſe æqualia. ergo vt GL ad HL, ſic LK ad LI, & diuidendo GH ad HL, vt KI ad IL. ergo GHIL rectangula æqualia ſunt rectangulis HLKI. corpus igitur ortum ex HL ducto in IK, æquale eſt [a] corpori orto ex GH ducto in LI. Quod fuit demonſtrandum.

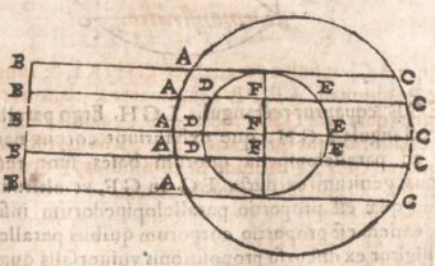
[a] 46. huius.

PROPOSITIO LXIV.

SInt duo circuli excentrici AC, DE, ductaq; FF minoris circuli diametro, agantur per illius extrema contingentes AC, quę producantur in B, vt ABC rectangulis æqualia ſint rectangula DBE.

Dico AD ſuperficiem ductam in ſuperficiem EB æquale corpus proferre illi, quod oritur ex AB ducto in EC.

Demonſtratio.



QVoniam ABC, DBE rectangula æqualia ſunt, ex hypotheſi AB eſt ad BD, vt BE ad BC, & diuidendo BA ad AD, vt BE ad EC. vnde rectangula ABEC æqualia quoque ſunt rectangulis ADBE: ergo AD ductum in EB, æquale [b] eſt AB ducto in EC: Quod fuit demonſtrandum.

[b] Ibid.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [809] - 752
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXV.

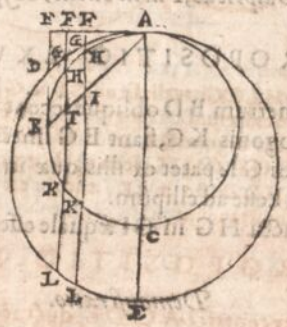
Ilsdem positis:

Dico corpus ortum ex BD in EC æquari corpori quod oritur ex ductu AD in BC.

Demonstratio.

QVoniam per hypothesim rectangula ABC æqualia sunt rectangulis DBE, erit vt BD ad DA, sic BC ad BE. ergo & BD ad AD, vt BC ad EC, æqualia igitur sunt rectangula BDCE, rectangulis DABC. ergo BD ductum [a] in EC æquale AD ducto in BC. Quod fuit demonstrandum. a *Ibid.*

PROPOSITIO LXVI.



COntingant sese interiùs in A circuli duo ABC, ADE: ductaque AE communi diametrali, ponatur BF parallela AE, contingens circulum ABC in B, conuenientsque in F cum AF contingente in A.

Dico FG ductum in FL corpus proferre æquale illi quod oritur ex FH ducto in FK.

Demonstratio.

DVcantur (ipsi AC) infinitæ parallelæ FGHIKL & iungantur puncta contactuum A & B: quoniam AF, FB continentes æquantur, rectę quoque AF, FI æquales sunt: vnde (quia tam GFL rectangula, quàm HFK, æquantur quadratis AF,) æqualia etiam existunt quadratis FI; æqualia igitur sunt inter se rectangula GFL, HFK. quare (cùm AF altitudo sit communis) FG ductum in FL [b] æquale est FH ducto in FK. Quod fuit demonstrandum. b *Ibid.*

DVCTVVM PLANI IN PLANVM

PARS SEXTA

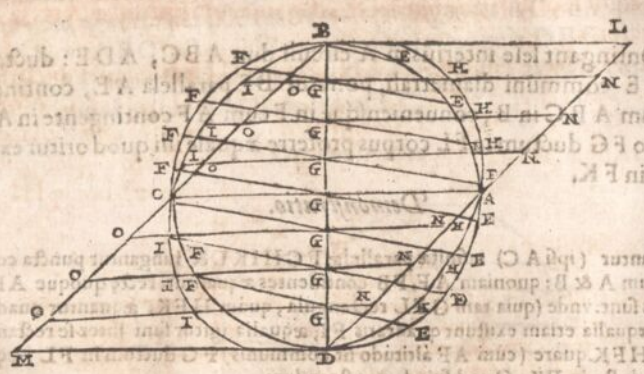
Ampliorem continet comparationem corporum productorum ex ductu plani circularis in circulare, cum ijs quæ oriuntur ex ductu circularium partium, in Ellipticas, Parabolicas, Hyperbolicas.

PROPOSITIO LXVII.

CIrculi A B C diametrum B D obliquè secent in G parallelæ E F: actisque per G orthogonis K G, fiant E G lineis æquales rectæ H G & ipsis G F æquales G I: patet ex illis quæ in libro de ellipsi demonstraui, puncta H H, I I esse ad ellipsim.

Dico corpus ex ductu H G in G I æquale esse semicirculo B A D ducto in se.

Demonstratio.



QVoniam E G, G F lineæ æquales sunt lineis H G, G I, rectangula H G I æqualia sunt rectangulis E G F id est quadratis K G: quare H G superficies ducta in superficiem G I, [a] æquale producit corpus illi quod K G planum, ductum in se. Quod fuit demonstrandum.

a 45. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

IIsdem positis rectæ B L, D M quæ in B & D tangunt, fiant æquales diametro B D, ponanturque L D, B M occurrentes rectis H I in N & O.

Dico

Dico NG planum ductum in planum GO efferre corpus æquale illi quod educit HG superficies ducta in superficiem GI.

Demonstratio.

ESt enim per præcedentem HG ductum in GI æquale semicirculo BAD ducto in se: sed semicirculo BAD in se ducto, æquale est planum NG ductum in GO, igitur NG ductum in GO æquale est HG ducto in GI. Quod fuit demonstrandum. [a] 47. huius

PROPOSITIO LXIX.

ISdem positis:

Dico corpus ortum ex ductu GO in HN æquale esse illi quod oritur ex ductu HG in OI.

Demonstratio.

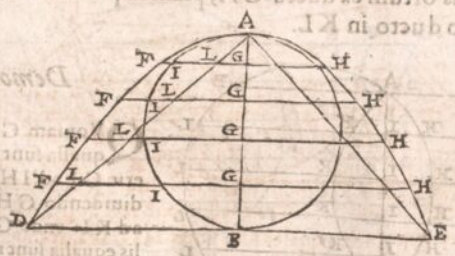
QVia ex hypothesi BL, DM æquales sunt BD, erunt & GN, GO æquales GD, GB, adeoque rectangula NGO æqualia rectangulis BGD. sed ex hypothesi rectangula quoque HGI æquantur rectangulis EGF, hoc est rectangulis BGD; ergo rectangula NGO æquantur rectangulis HGI. ergo vt NG ad HG, sic IG ad OG, & diuidendo vt GH ad HN, sic GO ad OI: vnde GONH rectangula, æqualia sunt rectangulis HGOI: & GO [b] ductum in HN æquale HG ducto in OI. Quod fuit demonstrandum. [b] 46. huius

PROPOSITIO LXX.

SIt DAE parabolæ axis AB æqualis lateri recto, positâque ad AB, per punctum B ordinatim lineâ DE, ducatur AD, & super AB circulus describatur.

Dico FL planum ductum in LH, æquari GI semicirculo ducto in se.

Demonstratio.



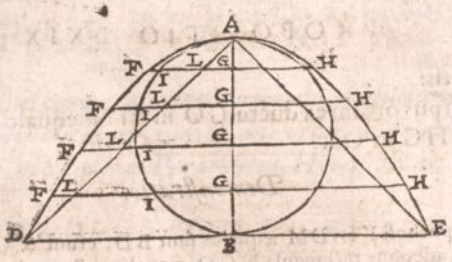
POnantur quotcunque FLH parallelæ DE, ostensum est propos. 201. lib. de parabola; rectangula omnia FLH æquari quadratis IG: igitur per 45. huius patet FL planum ductum in LH æquari GI semicirculo in se ducto. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.

ISdem positis:
Dico F G semiparabolam ductam in se, æquari semicirculo A I B in se ducto vnà cum triangulo A D B ducto in se.

Demonstratio.



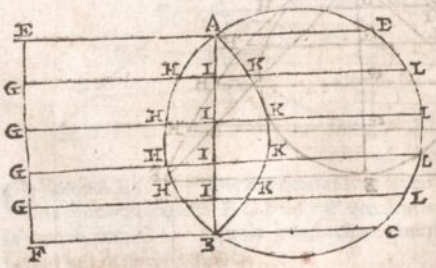
PLanum F G in se ductũ æquale est F L, ducto in L H & L G ducto in se: sed F L, ductũ in L H æquale est I G ducto in se; igitur F G ductum in se æquatur L G, I G ductis in se: vnde cùm A B altitudo sit communis & basis corporis quod oritur ex F G plano in se ducto æqualis basibus corporum productorum ex C G, L G planis in se ductis, erit A D B parabola in se ducta æqualis semicirculo A C B in se, & A D B triangulo in se ducto. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXII.

CIrculum A B C secet linea A B, super qua descripto quouis rectangulo A F: fiant H I L rectangulis æqualia rectangula G I K; erunt K K a ad parabolam.

a 311. lib. de parabola.

Dico corpus ortum ex ductu G H, plani in planum I K, æquari corpori ex H I plano ducto in K L.



Demonstratio.

QVoniam G I K rectangula æqualia sunt rectangulis H I L, erit G I ad I H, vt L I ad I K, & diuidendo G H ad H I, vt L K ad K I: vnde G H K I rectangulis æqualia sunt rectãgula H I L K, vnde cùm A B altitudo sit communis, corpus ex ductu G H plani in planum I K, b æquale est corpori ex ductu H I in K L. Quod erat demonstrandum.

b 46. huius.

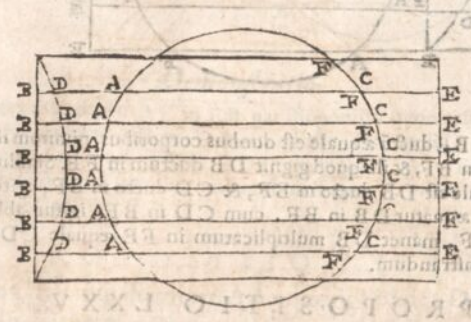
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

CIrculum A C ſecent parallelæ B E inter ſe æquales, factaq; parabola B D producat D B planum ductum in altitudinem B E, corpus æquale illi, quod oritur ex ductu A B in B F.

Dico B D ſuperficiem ductam in ſuperficiem E A æquale producere ſolidum illi quod emergit ex ductu B A in D F.

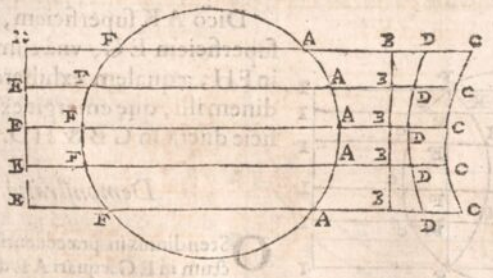
Demonſtratio.



PLanum D B in B E ductum æquale eſt a B D ducto in B A & B D ducto in A E: ſimiliter A B ductum in B F æquale eſt A B ducto in B D; & A B ducto in D F; igitur cùm D B ductum in B E æquale ponatur A B ducto in B F, B D ductum in B A cum B D ducto in A E, æquatur B A ducto in B D, vnà cum B A ducto in D F; ablato igitur communi A B ducto in B D, remanebit B D ductum in E A æquale A B ducto in D F. Quod fuit demonſtrandum.

a *Ex 1. ſecundi.*

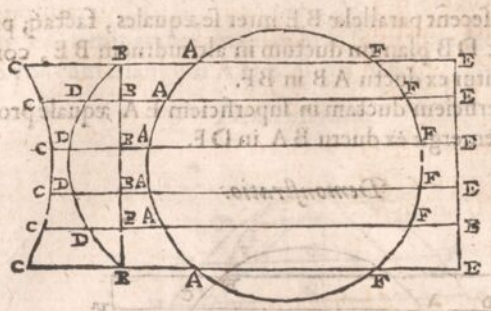
PROPOSITIO LXXIV.



SInt A B, B C lineæ inter ſe æquales, ponaturq; A F circulus & D D parabola; ſit autem corpus ex D B baſi in altitudinem B E æquale corpori quod emergit ex C B plano in planum B F.

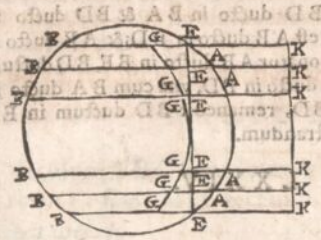
Dico D B multiplicatum in F E exhibere quantitatem æqualem illi quæ exſurgit ex plano C D ducto in B F.

Demonſtratio.



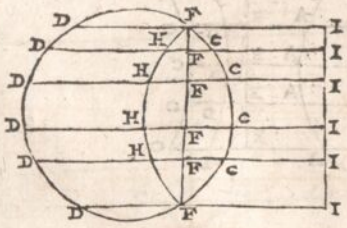
PLanum DB in BE ductū æquale eſt duobus corporibus, nimirum illi quod oritur ex DB ducto in BF, & illi quod gignit DB ductum in FE. Similiter & CB ductum in BF æquale eſt DB ducto in BF, & CD ducto in BF; igitur DB in BF cum DB in FE æquatur DB in BF, cum CD in BF; igitur ablato communi DB ducto in BF, manet DB multiplicatum in FE æquale CD ducto in BF. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXV.



CIrculos æquales AB, CD ſecent rectæ EE, FF æqualia auferentes ſegmenta AE, CF. deſcriptiſq; parabolis GG, HH: ſit corpus ex AE ducto in EB æquale corpori orto ex EG ducto in altitudinem EK & quod fit ex plano CF ducto in FD æquale ſit producto ex FH in altitudinem FI:

Dico AK ſuperficiem, ductam in ſuperficiem EG, vnà cum IC ducta in FH, æqualem exhibere magnitudinem illi, quę emergit ex AE ſuperficie ducta in GB & HD.



Demonſtratio.

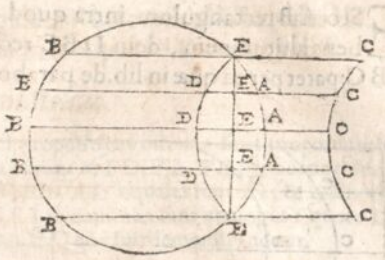
OStendimus in præcedentibus AK ductum in EG æquari AE ducto in GB; ſimiliter & IC in FH æquale eſſe CF ducto in HD, id eſt AE ducto in HD: vnde patet AK ductum in EG, vnà cum IC ducto in FH æquari AE ducto in GB & HD. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

POsitis ijsdem circulis & segmentis vt suprà, ductisq; CC, DD parabolis, sit AE multiplicatum in EB æquale CE in ED.

Dico CA ductum in ED corpus proferre æquale illi quod oritur ex AE ducto in DB.



Demonstratio.

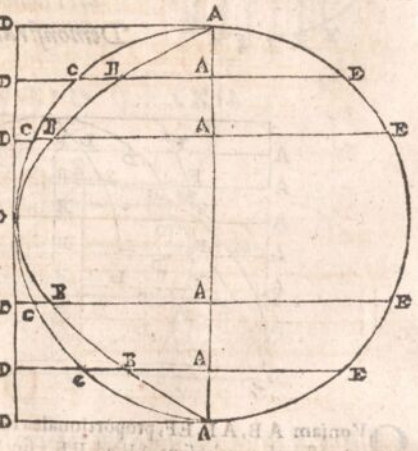
QVoniam corpus ex ductu AE in EB par illi ponitur quod oritur ex CE in ED, AE in ED, vnà cum AE in DB æquabitur CA in ED, vnà cum AE in ED; ablato igitur communi AE in ED, remanebit CA in ED ductum, æquale AE ducto in DP, quod fuit demonstrandum. vera quoque est propositio si DD parabola contingat rectam EE.

PROPOSITIO LXXVII.

CIrculum CE, cuius diameter AA contingat linea DD æquidistans & æqualis diametro AA, ponatur autem & AB parabola transiens per D punctum contactus. Ducanturq; infinitæ DCBAE, normales ad DD.

Dico planum DB ductum in AB planum magnitudinem exhibere æqualem illi quæ emergit ex CB ducto in BE.

Demonstratio.



LIneæ DA, CA, BA sunt [a] proportionales; igitur AC quadratum æquale est rectangulo DAB; id est DBA rectangulo vnà cum quadrato AB. sed AC quadratum æquale est quadrato AB vnà cum rectangulo CBE; igitur CBE rectangulum vnà cum quadrato AB æquatur ABD rectangulo vnà cum quadrato AB; dempto igitur communi quadrato AB, manet DBA rectangulo æquale rectangulum CBE; atque ita omnia rectangula CBE æqualia sunt rectangulis omnibus DBA. vnde cùm altitudo AA sit communis, DB ductum in AB æquale est CB ducto in BE. Quod fuit demonstrandum.

[a] 67. de parabola.

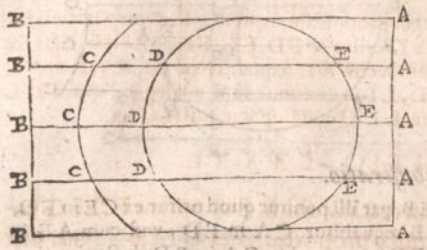
Corollarium.

QVod si DD linea, æquidistans diametro AA, circulum non contingat, sed eundem secet, aut remotior à circulo ponatur, ponantur autem tres proportionales DA, CA, BA, eadem manebit corporum æquatio, eritque AB ad parabolam, vti lib. de parabola ostendimus. Quod verbo indicasse sufficiet.

PROPOSITIO LXXVIII.

ESto A B rectangulum, intra quod circulus ponatur D E eandem habens altitudinem, dein D B E rectangulis æqualia fiant rectangula A B C: patet per ea quæ in lib. de parabola ostendi, C C esse ad parabolam.

Dico C D planum ductum in planum B E æquale corpus proferre illi quod oritur ex ductu B C in E A.



Demonstratio.

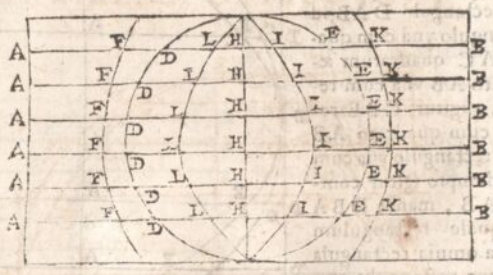
DVcantur infinitę parallelæ B C D E A. Quoniam D B E rectangula æqualia ponuntur rectangulis A B C, est vt B C ad B D, sic B E ad B A, & diuidendo vt B C ad C D, sic B E ad E A; rectangula igitur B C E A æqualia sunt rectangulis C D B E quare B C planum ductum in planum E A æquatur C D ducto in B E. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIX.

SIt iterum A B rectangulo inscriptus circulus D E, ita vt A D, B E lineæ sint æquales & circulus eandem habeat cum rectangulo altitudinem; fiant autem proportionales A B, A E, E F, & F D rectis æquales K E.

Dico planum A F ductum in se, æquale corpus proferre illi quod oritur ex F D ducto in D K.

Demonstratio.



QVoniam A B, A E, E F, proportionales sunt, vt A B ad A E prima ad secundam hoc est ex hypothesi vt A E ad E F, sic E B id est ex hypothesi A D excessus ad excessum A F. ergo conuertendo vt E A ad F A, sic D A ad F D: diuidendo, igitur vt E F ad F A, sic F A ad F D: quare tres sunt proportionales E F, F A, F D, & A F quadratum æquale rectangulo E F D, id est, quia ex hypothesi F D, K E æquantur, rectangulo F D K. planum igitur A F ductum in seipsum est æquale plano F D ducto in planum D K. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXX.

ISdem positis; fiant AF rectis æquales FL, & ipsis AL æquales BI. Dico DL superficiem ductam in se æquari FD ductæ in LI.

Demonstratio.

QVoniam FD, FA, FE præcedenti propositione ostensæ sunt proportionales, & FA lineis æquales ponuntur FL, erunt & FD, FL, FE proportionales: & quia LD lineis æquales sunt IE; (nam rectis AL æquales sunt BI, & rectis AD æquales BE) rectę quoque FD, DL, LI in continua sunt analogia: quare DL ductum in se, [b] æquale est FD ducto in LI. Quod fuit demonstrandum.

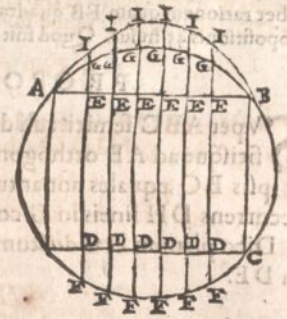
[a] 9. De progressionibus.
[b] 45. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

ESto circulo ABC inscriptum rectangulum ED positis FDEG parallelis lateri BC fiant continuæ proportionales DE, EG, GI. erit AIB [c] parabola.

[c] 310. De parabola.

Dico corpus ortum ex ductu IE in se, æquari corpori quod formatur ex ductu IG plani in planum IF.

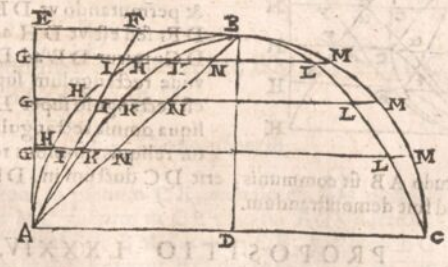


Demonstratio.

QVoniam ED ponitur rectangulum rectæ AB, HC sunt æquales, adeoque & æqualia sunt segmenta EG, DF. vnde & FD lineæ æquales lineis EG: igitur & etiam proportionales sunt IG, IE, IF; quare & IE ductum in se æquale est IG ducto in IF: Quod fuit demonstrandum.

[d] 12. vel 13. de progressionibus.

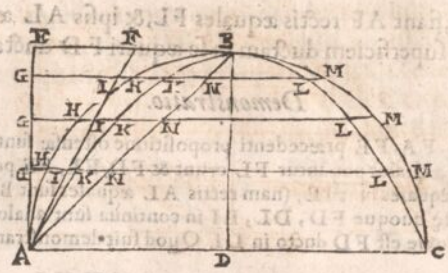
PROPOSITIO LXXXII.



SEmicirculum ABC cuius diameter AC contingant in A & B lineæ AE, BE conuenientes in E, & BE quidem æquidistet AC: erectaque ex D centro ad contactum B rectâ DB, describatur per ABC parabola cuius axis BD, quam in A contingat recta AF iunganturq; AB.

Dico IK ductum in IL, ad HG ductum in GM eam habere rationem quam FB quadratum ad quadratum EB.

Demonſtratio.



a 4. *Sexti.* b 87. *De parabola.*

QVoniam EB, EA contingentes æquales ſunt, rectæ quoque a AG, GN æquales ſunt; rectangula igitur HGM æqualia quadratis GN & KIL[b] rectangula æqualia quadratis IN, ſed quadrata IN ſunt ad quadrata GN vt quadratum FB ad quadratum EB; ergo & rectangula KIL ſunt ad rectangula HGM, vt quadratum FB ad quadratum EB; igitur IK ductum in IL ad HG ductum in GM, eam habet rationem quam FB quadratum ad quadratum EB, vt colligitur ex diſcurſu propoſitionis 45. huius. Quod fuit demonſtrandum.

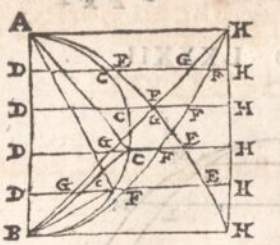
PROPOSITIO LXXXIII.

SVper ABC ſemicirculi diametro AB, quadratum ſtatuatur DH, poſitiſque ad AB orthogonis DCH, fiant AC lineis æquales DCE, & ipſis BC æquales ponantur DCF: diameter autem quadrati ſit BL occurrens DH lineis in G. conſtat, [c] AEH, BFH eſſe parabolas.

c 300. *lib. de parab.*

Dico planum DC ductum in DF, æquari ſolido orto ex ductis DG in DE.

Demonſtratio.



d 42. *De parabola.*

VT AC ad AB, id eſt vt DE ad DH, ſic CD ad BC, id eſt CD ad DF; & permutando vt DE ad DC, ſic DH ad DF; ſed eſt vt DH ad DF, ſic [d] DF ad DG; igitur DE ad DC, vt DF ad DG. vnde rectangulum ſuper DCDF æquale eſt rectangulo ſuper DGDE; ſimiliter reliqua omnia rectangula DCDF, æquantur reliquis omnibus rectangulis DG, DE.

e 46. *huius.*

ergo cùm altitudo AB ſit communis, erit DC ductum in [e] DF æquale DG ducto in DE. Quod fuit demonſtrandum.

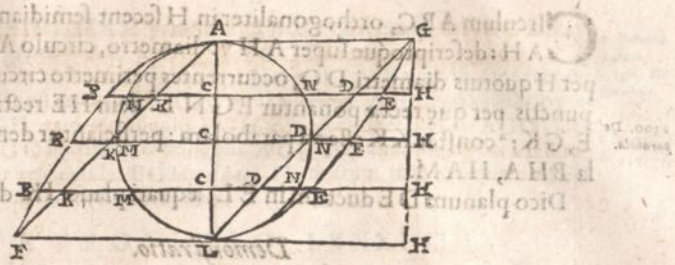
PROPOSITIO LXXXIV.

HAbeant BC, CE parabolæ ſubalternè poſitę communem axem AL æqualem lateri recto: ductiſque ordinatim AG, FL, deſcribatur ſuper AL vt diametro circulus MN qui per 126. parab. totus intra parabolas cadet, iunganturque puncta AF, LG.

Dico corpus ortum ex ductu BK in CD æquari corpori orto ex ductu MC in NE.

Demon-

Demonstratio.



PLanum BC ductum in CD per præcedentem æquale est MC ducto in CE: sed BC ductum in CD æquale est BK ducto in CD, vnà cum KC ducto in CD; & MC ductum in CE æquatur MC ducto in CN & MC ducto in NE. Igitur BK in CD cum KC in CD, æquatur MC in CN, cum MC in NE. est autem prætereà KC ductum in CD ostensum [a] æquale MC ducto in CN; ablatis igitur æqualibus, nimirum KC ducto in CD, & MC ducto in CN, remanebit BK ductum in CD æquale MC ducto in NE. Quod fuit demonstrandum.

[a] 67. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

IIsdem positis demittatur ex G linea GHF parallela & æqualis axi AL. Dico MC ductum in EH æquari BC ducto in DE.

Demonstratio.

VT CH ad CE, sic BC est ad [b] MC: sed vt CH ad CE, sic CE ad CD, igitur BC est ad MC, vt CE ad CD: est autem vt EC ad DC, sic [c] HE ad ED; quia HC, EC, DC proportionales sunt; igitur vt HE ad ED, sic BC ad MC: ergo rectangula MC HE, æquantur rectangulis BC ED; igitur MC ductum in HE æquatur BC ducto in DE. Quod fuit demonstrandum.

[b] Ex 108. de parabola.
[c] 1. De progressionibus.

PROPOSITIO LXXXVI.

IIsdem positis:
Dico magnitudinem productam ex BM ducto in EC, æquari magnitudini ortę ex BC ducto in DE.

Demonstratio.

PLanum BC ductum in planum CE, æquale est BM ducto in CE & MC, ducto in CE; sed MC ductum in CE æquatur BC [d] ducto in CD; igitur & BC ductum in CE æquale est BM ducto in CE, vnà cum BC ducto in CD. Rursum BC ductum in CE æquatur BC ducto in CD & BC ducto in DE; ergo BM in CE cum BC in CD, æquatur BC in CD cum BC in DE; ablato igitur communi BC ducto in CD, remanebit BM ductum in EC æquale BC ducto in DE. Quod fuit demonstrandum.

[d] 162. huius.

PRO-

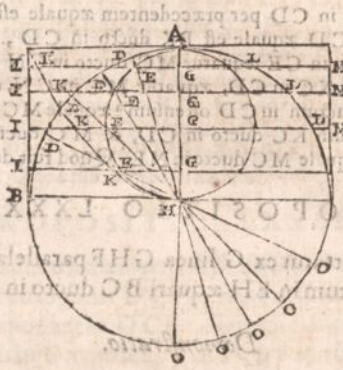
PROPOSITIO LXXXVII.

CIrculum ABC, orthogonaliter in H ſecent ſemidiametri duæ BH, AH: deſcriptoque ſuper AH vt diametro, circulo AEH, ponantur per H quotuis diametri DO, occurrentes perimetro circuli AEH in EE punctis per quę rectæ ponantur EGNL. dein HE rectis æquales fiant E, GK: [a] conſtat KK eſſe ad parabolam: perficiantur denique rectangula BHA, HAM.

a 300. De parabola.

Dico planum DE ductum in EL, æquari plano IK ducto in KM.

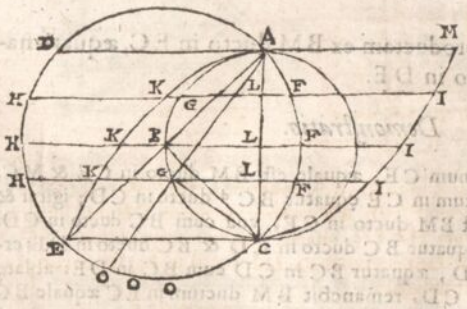
Demonſtratio.



QVoniam HE lineis æquales ſunt E, GK & HD ſemidiametri æquantur HB ſiue GI; reliquæ IK æquales ſunt H, ED. quia verò & IM lineis æquales ſunt AC ſiue DO, rectangula IKM æqualia ſunt rectangulis DEO, id eſt DEL. quare DE planum [b] ductum in EL æquatur IK ducto in KM.

b 46. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.



CIrculum AGC, cuius diameter AC, contingant in A & C lineæ CE, AM æquales ipſi AC, deſcriptiſq; per AEC, CMA parabolis quę vertices habeant in A & C. Patet ex 126. parabol. has cadere totas extra circulũ AGC. Ducatur AE occurrens circulo AGC in B, & centro B interuallo BA deſcribatur circulus AHF, liquet hunc tranſire per E & C.

Dico IL planum ductum in LK æquale corpus producere illi quod oritur ex FG ducto in GH.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur infinitæ IFL, GKH parallelæ ad AM, CE, rectangulis AGC æquantur rectangula ſuper [a] AC & LG: ſed CG lineis æquantur [b] lineæ LI, & ipſis AC ſunt æquales rectæ LK; igitur & ILK rectangula æqualia ſunt rectangulis AC, LG, hoc eſt rectangulis AGC. ſunt autem & AGC rectangulis æqualia rectangula FGH nam rectangulis FGH æquantur rectangula AGO, hęc autem quia [c] GO, GC æquantur, rectangulis AGC æqualia ſunt; igitur ILK rectangulis æquantur rectangula FGH. quare IL ductum in LK æquale eſt FG ducto in GH. Quod fuit demonſtrandum.

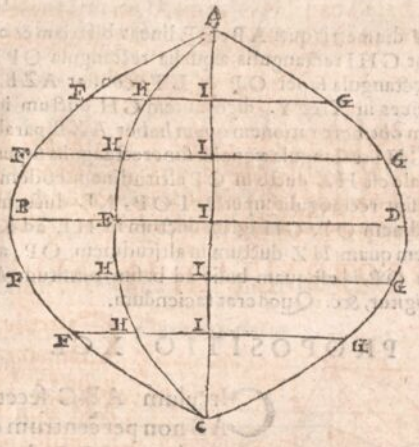
[a] *Patet ex 8. ſexti.*
[b] *300. De parabola.*
[c] *Serenus L. 2 prop. 43.*

PROPOSITIO LXXXIX.

HAbeant ABC, ADC ſimiles & æquales ſectiones conicę communem ordinatim poſitam AC, ad communem axem BD, ſic vt GF, parallelæ BD, ab AC biſecentur. tum ſuper AC, deſcribatur arcus quicunque circularis IH, vel alia quæuis ponatur ſectio conica.

Dico FH ductum in ſe, vnà cum HG ducto in ſe, duplum eſſe corporis, quod oritur ex HI ducto in ſe vnà cum IG ducto in ſe.

Demonſtratio.



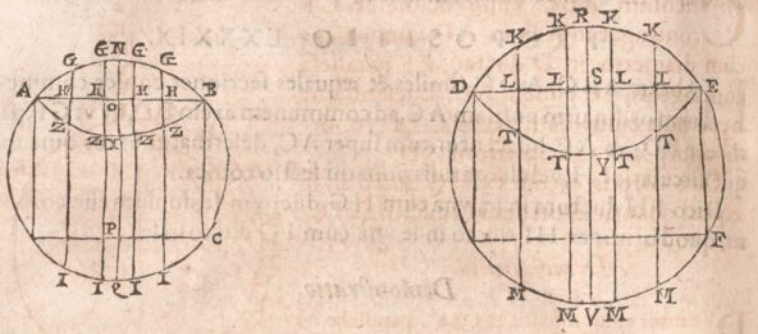
QVoniam ABC, ADC ſimiles & æquales ſectiones ponuntur, & recta BD, adeoque & illi parallelæ biſecantur ab AC; quadrata igitur FH, HG [d] ſimul ſumpta duplicia ſunt quadratorum HI, IG, quare [e] corpus ortum ex ductu FH in ſe, vnà cum HG in ſe, duplicia ſunt corporis ex HI ducto in ſe, ſimul cum IG ducto in ſe: Quod fuit demonſtrandum.

[d] *9. ſecundi.*
[e] *Ex diſcurſu 45. huius facile colligitur.*

PROPOSITIO XC.

SInt ABC, DEF circulis inscripta quæcunque rectangula AC, DF: oportet exhibere rationem quam obtinet GH segmentum ductum in segmentum HI, ad L K segmentum ductum in segmentum LM.

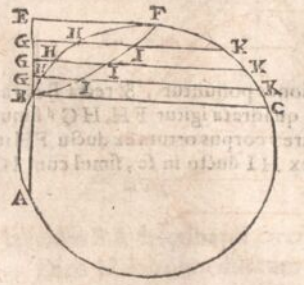
Constructio & demonstratio.



DVctis NQ, RV diamẽtris quæ AB, DE lineas bifariam & ad rectos dividant in O & S; fiant GHI rectangulis æqualia rectangula OPHZ & KLM rectangulis æqualia rectangula super OP & LT: constat AZB, DTE esse[a] parabolas habentes vertices in X & Y. dico autem GH ductum in HI ad KL ductum in LM eandem obtinere rationem quam habet AXB parabola ad parabolam DYE. Quoniam GHI rectangula æqualia sunt rectangulis super HZ & PO; GH ductum in HI æquale est HZ ducto in OP altitudinem. eodem modo cùm KLM rectangula æqualia sint rectangulis super LTOP, KL ductum in LM æquatur LT ducto in altitudinem OP, GH igitur ductum in HI, ad KL ductum in LM eam obtinet rationem quam HZ ductum in altitudinem OP, ad LT ductum in eandem altitudinem OP, id est quam basis ad basim, nimirum AXB parabola ad parabolam DYE. igitur, &c. Quod erat faciendum.

[a] 113. *parab.*

PROPOSITIO XCI.



CIrculum ABC secet recta quædam AB non per centrum ducta; actâque per B orthogonâ BC, ducatur EF parallela BC, circulum contingens in F conuenienſq; cum AB linea in E. dein per puncta B & F ducatur hyperbola BIF, cuius diameter ABE ad quam EF sit ordinatim applicata.

Dico GI ductum in se æquari HG ducto in GK.

Demon-

Demonſtratio.

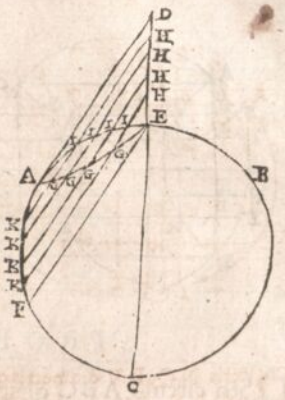
DVcantur quotcunque GHIK parallelæ ad EF, BC, quę omnes erunt ordinatim poſitæ ad diametrum ABE, vtpote æquidiſtantes ordinatim poſitæ EF: oſtenſum eſt autem lib. noſtro de Hyperbola [a] GH, GI, GK eſſe continuas : igitur [b] planum GI ductum in ſe æquatur GH ducto in GK. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Ex conuerſa 200. Hyp.*
[b] *45. huius.*

PROPOSITIO XCII.

CIrculum ABC cuius diameter CE contingat in A linea AD conueniens cum diametro in D ductaq; EF parallela contingenti, per puncta A & E deſcribatur hyperbola cuius diameter ſit CED, & ordinatim poſita ad diametrum AD.

Dico corpus ortum ex HG ducto in ſe æquari quantitati ortę ex HI ducto in HK.



Demonſtratio.

DVcantur enim infinitę HIGK, parallelæ ad AD, EF, defendimus lib. de Hyperbola [c] lineas omnes HI, HG, HK in continua eſſe analogia, vnde patet [d] HG ductum in ſe æquari HI ducto in HK. Quod fuit demonſtrandum.

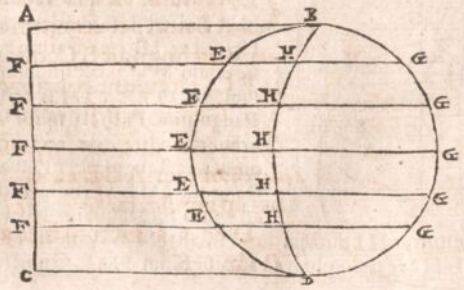
[c] *Conuerſa 206. Hyp.*
[d] *45. huius.*

PROPOSITIO XCIII.

CIrculum EBD contingant duæ rectæ AB, CD ſibi mutuo æquidiſtantes, quas orthogonaliter in A & C, ſecet linea AC; per puncta deinde B, D deſcribatur hyperbola cuius axis æquidiſtet tangentibus AB, CD.

Dico FH ductum in ſe æquari FE ducto in FG.

Demonſtratio.



DVcantur quotuis FEHG parallelę ad AB. libro noſtro de Hyperbola [e] oſtenſum eſt omnes lineas FE, FH, FG eſſe in continua analogia. igitur ex propoſ. vniuerſali 45. huius, patet veritas propoſitionis. Quæ fuit demonſtranda.

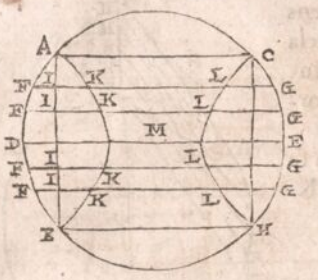
[e] *Conuerſa 210. Hyp.*

PROPOSITIO XCIV.

CIrculum A B C ſecet recta quæuis A B non per centrum acta, ductiſque per A & B orthogonis A C, B H deſcribantur oppoſitę ſectiones A K B, C L H habentes centrum M commune cum centro circuli.

Dico L I ductum in I K ad F I ductum in I G, eam habere rationem quam L I K rectangulum habet ad rectangulum F I G.

Demonſtratio.



a 36. hyperb.

b Colligitur ex diſcurſu 46. huius.

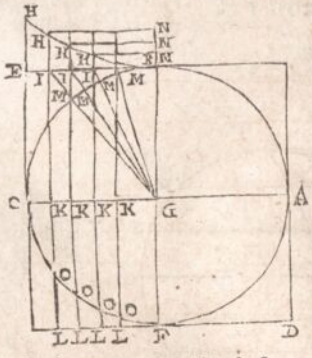
REctangulum a L I K eſt ad rectangulum L I K, vt A I B rectangulum ad rectangulum A I B, id eſt vt F I G rectangulum ad rectangulum F I G. Ergo omnia rectangula L I K ſunt ad omnia F I G, vt vnum L I K ad vnum F I G. vnde cùm A B altitudo ſit communis, erit b L I planum ductum in planum I K ad F I ductum in I G vt L I K rectangulum ad rectangulum F I G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCV.

ESto circulo A B C quadratum circumſcriptum D E, actiſque per G centrum lineis G M I quæ circulũ ſecent in M, agantur per M quotcunque orthogonæ I L, quæ erunt parallelæ ad L E. fiantque G I lineis æquales K H I, conſtat puncta H H, eſſe ad hyperbolam.

Dico H I planum ductum in planum H L, ad I M, ductum in M L, eſſe vt I H L rectangulum ad rectangulum I M L.

Demonſtratio.



c 202. hyperbol.

d 35. hyperb.

DVcatur diameter F B N tranſiens per cõtactum B, oſtenſum eſt lib. de Hyperb. c puncta B H H eſſe ad Hyperbolam: vnde d L H I rectangulum eſt ad rectangulum L H I vt N H quadratum ad quadratum N H, id eſt I B quadratum ad quadratum I B: ſic etiam M I O rectangulum eſt ad rectangulum M I O id eſt I M L rectangulum ad rectangulum I M L; igitur L H I rectangula proportionalia ſunt rectangulis I M L. ergo omnia rectangula I H L ſunt ad omnia rectangula I M L vt vnum rectangulum I H L ad vnum rectangulum I M L. vnde cùm E B

e Colligitur ex diſcurſu 46. huius.

altitudo ſit communis, e H I ductum in H L, ad I M ductum in M L, eam obtinet rationem quam L H I rectangulum ad rectangulum I M L. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

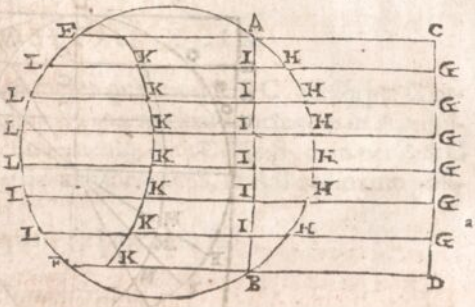
PROPOSITIO XCVI.

CIrculum ABF secet recta quædam AB non per centrum ducta; actisque per A & B orthogonis CAE, DBF, fiat super AB rectangulum ACDB: & HGL rectangulis æqualia ponantur rectangula IGK: facile colligitur ex illis quę in libro de parabola demonstraui, puncta KK esse ad parabolam.

Dico GH ductum in KL æquari HI ducto in GK.

Demonstratio.

DVcantur infinitæ GHIKL parallelæ ad CAE, DBF. Quoniam IGK rectãgula æqualia ponuntur rectangulis HGL, erit vt GH ad GI, sic GK ad GL; & diuidendo vt GH ad HI, sic GK ad KL: vnde HIGK rectangulis æqualia sunt rectangula GHKL. ergo GH ductum in KL [a] æquale HI ducto in GK. Quod fuit demonstrandum.



a 46. huius

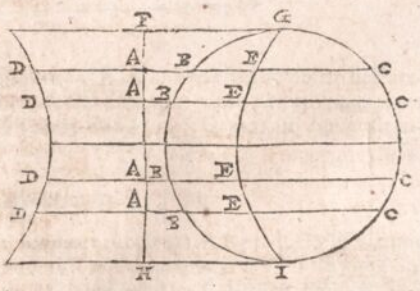
PROPOSITIO XCVII.

CIrculum BC contingant duæ parallelæ FG, HI quas orthogonaliter secet in F & H linea AA; fiantque BAC rectangulis æqualia rectangula DAE; sint autem DD, EE sectiones oppositæ quarum centrum sit in recta AA.

Dico DA planum ductum in planum BE æquari AB ducto in EC.

Demonstratio.

QVoniam BAC rectangulis æqualia ponuntur rectangula DAE, AE ductum in se, [b] æquale est AB ducto in AC. sed AB ductũ in AC æquatur AB ducto in AE, & AB ducto in EC; item AE ductum in se, siue DA ductum in AE æquatur DA siue EA ducto in AB, vnà cum DA ducto in BE; dempto igitur communi EA ducto in AB, remanebit DA ductum in BE æquale AB ducto in EC. Quod fuit demonstrandum.



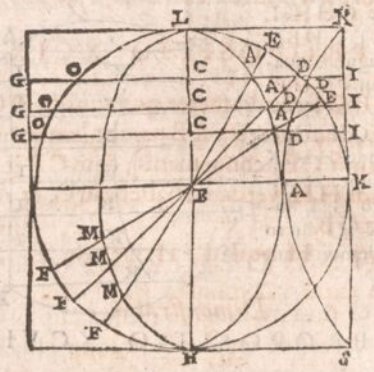
b 45. huius.

PROPOSITIO XCVIII.

QVadrato GI inſcriptus ſit circulus cuius centrum B, & diameter CH; circulo verò inſcripta ſit ellipſis habens centrum commune B & HC axem maiorem: rectis deinde BA æquales quotcunque ponantur orthogonæ CAD. patet ex 243. de hyperb. puncta DDD eſſe ad hyperbolam.

Dico OA ductum in AE æquale eſſe GD ducto in DI.

Demonſtratio.



PRotractæ DC occurrant circulo in O, & lateri quadrati in G. Quoniam lineæ CI æquantur diametris BE, & BA lineis æquales ponuntur CAD, erunt AE reliquis æquales ID, ſunt verò & FA, lineis æquales lineæ GD. ergo ID G rectangula æqualia ſunt rectangulis BAF id eſt rectangulis OAE. quare [a] OA ductum in AE æquale eſt GD ducto in DI. Quod erat demonſtrandum.

a 46. huius.

D. V-

DVCTVVM PLANI IN PLANVM

PARS SEPTIMA

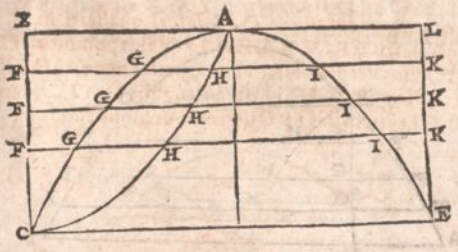
Confert inter se corpora nata ex ductu plani parabolici in parabolicum.

PROPOSITIO XCIX.

PArabolam A B C secet diameter quæcunque B C, actâq; per C orthogonâ C E, ducatur recta A B parabolam contingens in A, æquidistans autem ipsi C E, conuenienſq; cum C B in B: dein per A & C parabola describatur H H, verticem habens in C, & A B ordinatim positam ad diametrum C B.

Dico F G ductum in F I æquari F H ducto in se.

Demonstratio.



DVcantur infinitæ F G H I K, parallelæ ad C E, ostensum est libro nostro de Parabola, [a] rectas F G, F H, F I in continua esse analogia: vnde per 45. huius patet F G planum ductum in F I æquari F H plano ducto in se. Quod fuit demonstrandum.

[a] 167. parabola.

Corollarium.

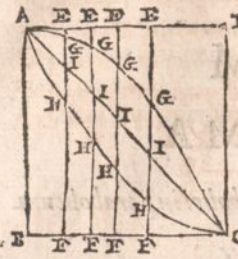
HInc patet si ex E quoque erigatur diameter, occurrens A B productæ in L, quod F G superficies ducta in superficiem G K æquale producat corpus illi quod oritur ex F H plano in se ducto, nam cum I K lineæ æquales sint rectis F G, & F G, F H, F I sint continuæ, erunt & F G, F H, G K in continua analogia: vnde per 45. huius patet propositum.

PRO-

PROPOSITIO C.

SIt ABC rectanguli diameter AC, descriptâque per A & C parabolâ cuius sit axis AB, describatur & altera per AC cuius axis sit CD.

Dico EG superficiem ductam in superficiem HF æquari plano GI ducto in se.



a 67. parab:
b Coroll. 9. de progress.
c 45. huius.

Demonstratio.

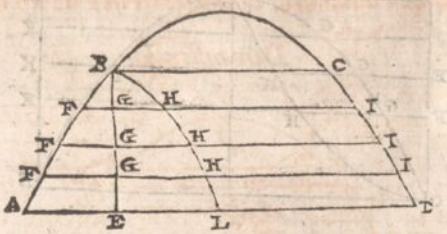
DVcantur quotcunque EGIHF parallelę ad DC, AB. Quoniam[a] EF, EI, EG sunt continuæ, & IH rectæ æquales rectis IG, erunt[b] & EG, GI, HF in continua analogia: vnde patet[c] EG planum ductum in planum HF, æquari GI plano ducto in se. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CI.

SEcent ABC parabolam duæ quæuis parallelæ AD, BC, demissâque ex B diametro BK, fiant inter AK, KD mediæ EL, dein per B & L parabola describatur HH, cuius diameter BE & EL ordinatim posita.

Dico planum FG ductum in planum GI æquari GH plano in se ducto.

Demonstratio.



d 45. huius.

DVcantur enim ad BC parallelæ quotuis FGHI, colligitur ex libro de parabola propos. 275. FG, GH, GI lineas in continua esse analogia: vnde[d] planum FG ductum in planum GI æquatur HG plano in se ducto. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CII.

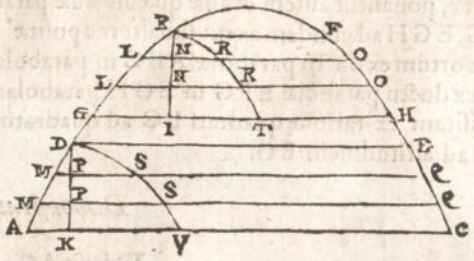
SEcent ABC parabolam æquidistantes quatuor BF, GH, DE, AC, sic vt BFGH eandem habeant altitudinem quam DE, AC: tum ex B & D diametri demittantur BI, BK.

Dico LN planum ductum in planum NO æquari MP ducto in PQ.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [829] - 772
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.



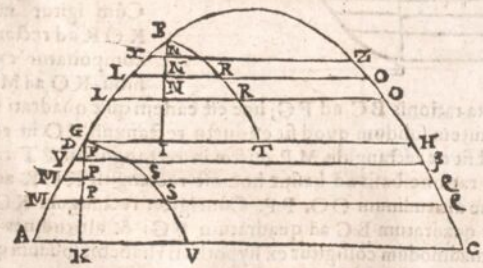
DVcantur rectæ quotuis LNRO, MPSQ, parallelæ ad BF. ponatur inter GI, IH media IT, item inter AK, KC media KV, & per puncta B, T, D, V parabolæ describantur quarum diametri BI, DK, & ordinatim positæ IT, KV, a erunt illæ æquales & similes. quare per præcedent. GN ductum in NO, æquale est NR ducto in se, & MP ducto in PQ æquale PS in se ducto: sed NR ductum in se æquale est PS ducto in se (sunt enim b NR, PS eædem parabolæ & æquè altæ;) igitur LN planum ductum in planum NO, æquatur MP ducto in PQ. Quod fuit demonstrandum. a 175. *parabol.* b Ex 175. *parab.*

PROPOSITIO CIII.

IIsdem positis sumatur ex BI pars quæuis IN, cui æqualis ponatur PK; & per N, P rectæ agantur XZ, Yβ parallelę ipsis GH, AC.

Dico rursum LN ductum in NO æquari MP ducto in PQ.

Demonstratio.



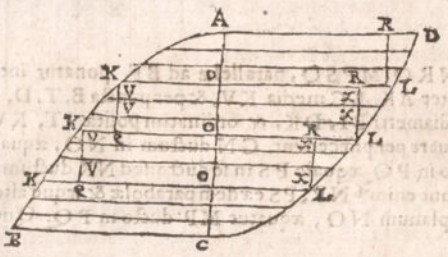
DVctis more solito parallelis infinitis LNRO, & MPSQ; lineæ LN, c NR, NO sunt in continua analogia. Ergo LN ductum in NO æquatur NR ducto in se: eodem modo quoniam MP, PS, PQ sunt continuè proportionales, MP ductum in PQ æquatur PS ducto in se: sed NR, PS in se ducta æquantur (sunt enim NR, PS eædem parabolæ & æquè altæ:) ergo LN ductum in NO æquatur MP ducto in PQ. Quod erat demonstrandum. c 45. *huius.*

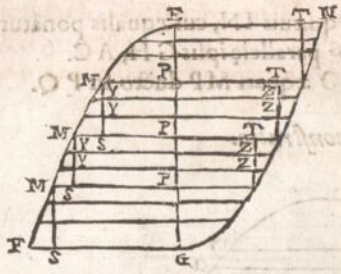
PROPOSITIO CIV.

SInt ABC, ACD parabolæ æquales & similes ad eundem axem subalternè positæ, ponantur autem & aliæ quæuis duæ parabolę æquales ac similes EFG, EGH ad eundem axem subalternè positæ.

Dico corpus ortum ex ductu parabolæ ABC in parabolam ACD, ad corpus ortum ex ductu parabolæ EFG in EGH parabolam, rationem habere compositam ex ratione quadrati BC ad quadratum FG, & ex AC altitudine ad altitudinem EG.

Demonstratio.





a 11. *De parabola.*

DIuisis AC, EG quadrifariam, actisque per diuisionum puncta parallelis KL, MN, demittantur ex K & M ad KL, orthogonæ KQ, MS: item ducantur LR, NT iisdem orthogonæ: breuitatis autem causâ corpora ex ductu mutuo parabolarum orta vocentur corpora A, E. Quadratum KO est ad quadratũ BC, vt [a] OA ad CA, hoc est ex const. vt PE ad GE, hoc est vt quadratum MP ad quadratum FG. ergo & KO ad BC, vt MP ad FG, & permutando KO ad MP, vt BC ad FG. Eodem modo ostendam, OL hoc est OR esse ad PN, hoc est PT vt AD, ad HE, hoc est ex hyp. vt BC ad FG. Cùm igitur ratio rectanguli KOR ad rectangulum MPT componatur ex laterum rationibus KO ad MP, OR ad PT, erit hęc duplicata rationis BC ad FG; hoc est eadem quæ quadrati BC ad quadratum FG: iam autem solidum quod fit ex ductu rectanguli KO in rectangulũ OR ad solidum quod fit ex rectangulo MP ducto in rectangulum PT rationem habet compositam ex ratione basis ad basim hoc est rectanguli KOR ad rectangulum MPT, & ratione altitudinum OO, PP. Cùm igitur rectangula KOR, MPT sint ad se inuicem vt quadratum BC ad quadratum FG; & altitudines OO, PP, vt AC, EG, quemadmodum colligitur ex hypothesi; habebit solidum quod fit ex KO in OR, ad solidum ex MP in PT rationem compositam ex rationibus quadrati BC ad quadratum FG, & AC ad EG. similiter ostendam singula reliqua solida facta ex rectangulis reliquis KO, in reliqua OR eandem habere rationem compositam ad singula alia solida facta ex rectangulis reliquis MP, in rectangula reliqua PT. ergo singula solida inscripta corpori A sunt proportionalia singulis solidis in-

b 12. *quinti.* scriptis corpori E. ergo vt vnum ad vnum, sic [b] omnia ad omnia: sed supra ostendi vnius ad vnum rationem esse compositam ex rationibus quadrati BC ad quadratum FG, & AC ad EG. ergo omnia solida inscripta corpori A sunt ad omnia inscripta

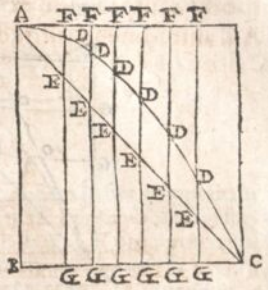
c 43. *huius.* solida corpori E in dicta ratione composita; cùm igitur [c] solida vtrique corpori tot inscribi possint, vt deficiant à corporibus ipsis quantitate datâ minori, concluditur eodem

eodem fore discursu qua vsi sumus in præcedentibus, corpora A, & E, in eadem esse ratione composita ex rationibus quadrati BC ad quadratum FG, & altitudinum AC, EG. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CV.

PArabolam ADC, cuius axis AB & ordinatim posita CB, contingat in A linea AF, ducaturq; recta AC.

Dico FD superficiem ductam in superficiem EG corpus producere æquale illi quod oritur ex ductu FE in ED.



Demonstratio.

DVcantur quotuis FDEG parallelæ ad AB, vt CE ad EA, sic GE ad EF; sed vt [a] CE ad EA, sic ED est ad DF; igitur vt EG ad EF, sic ED ad DF. vnde rectangulum sub EGFD æquale est rectangulo sub ED, EF; ergo FD planum ductum in planum EG æquale [b] FE plano ducto in planum ED. Quod fuit demonstrandum.

a 94. *Dς parab.*

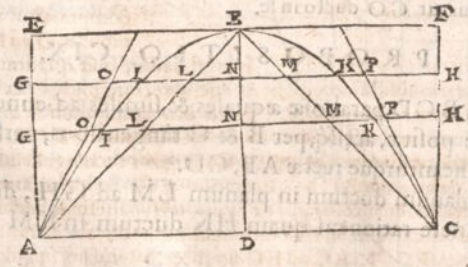
b 46. *huius.*

PROPOSITIO CVI.

PArabolam ABC cuius axis BD & ordinatim posita AC, contingat in B linea EF, occurrens CF, AE diametris in E & F, ducanturq; lineæ AB, BC.

Dico magnitudinem productam ex IL plano ducto in planum LK æquari quantitati ortę ex ductu NM in MH.

Demonstratio.



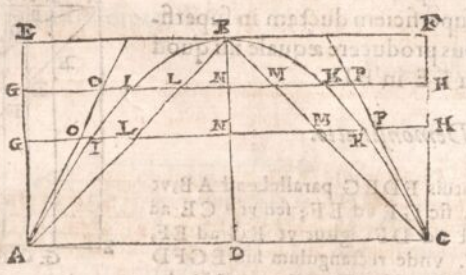
DVcătur vt supra parallelę. Quoniam [c] GN, IN, LN lineæ sunt continuæ, erit vt GI ad IL, sic IN ad LN, id est KN ad NL, & componendo vt GL ad IL, sic KL ad LN. vnde ILK rectangulum æquale est rectangulo GLN id est HMN: & per 46. huius IL ductum in LK æquale NM ducto in MH. Quod fuit demonstrandum.

c 42. *Dς parab.*

PROPOSITIO CVII.

Iisdem positis AO, CP ducantur tangentes in A & C.
Dico OI planum ductum in planum LM æquari IL plano ducto in se.

Demonstratio.



Ostensæ sunt proportionales [a] OI, IG, GH. igitur cum OG, differentiæ æqualis sit HP rectæ quoque OI, GO id est [b] OL, IP id est OK proportionales sunt: sed etiam cum MK sit æqualis ipsi IL, rectæ OI, [c] IL, LM continuæ sunt. quare OI planum ductum in LM [d] æquale IL ducto in se. Quod fuit demonstrandum.

a 89. De parab. b Ex 9. de progress. c Ibid. d 45. huius.

PROPOSITIO CVIII.

Iisdem positis:
Dico GO planum ductum in se æquari plano OI ducto in IP.

Demonstratio.

Lineæ [e] IO, IG, GH sint in proportione continua & OG differentiæ æqualis sit HP. Ergo etiam OI, OG, IP [f] sunt in proportione continua. Ergo OI in IP ductum æquatur GO ducto in se.

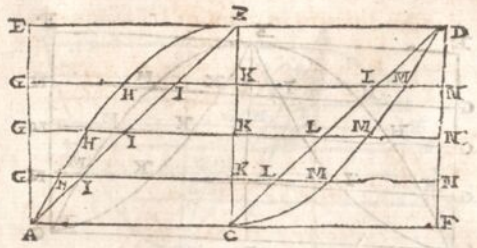
e 89. parab. f 9. De progressionibus. g 45. huius.

PROPOSITIO CIX.

Sint ABC, BCD parabolæ æquales & similes ad eundem axem BC subalternè positæ, actisq; per B & C tangentibus, perficiatur rectangulum EF ducanturque rectæ AB, CD.
Dico HI planum ductum in planum LM ad GH, ductum in MN eandem obtinere rationem quam HK ductum in KM habet ad GK ductum in se.

Demon-

Demonſtratio.



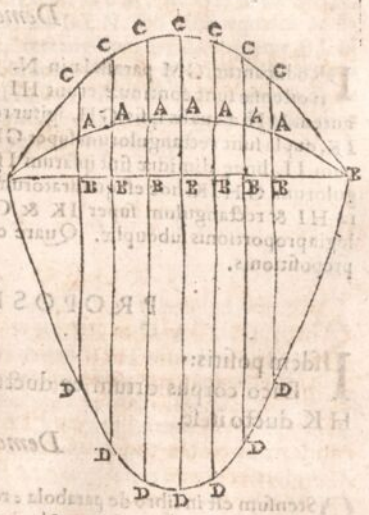
REctangulum HILM ad GHMN rectangulum rationem habet compoſitam ex HI ad GH, id eſt [a] HK ad GK (quia GK, HK, IK [b] proportionales ſunt) & ex ratione LM ad MN, id eſt MK ad NK (ob NK, MK, LK proportionales) ſed ratio quoque rectanguli HKM ad GKN, compoſita eſt ex ratione HK ad GK, & MK ad NK; igitur vt HILM rectangulum eſt ad GHMN rectangulum, vt HKM ad GKN rectangulum; igitur vt ex 4. huius colligitur, HI ductum in LM ad GH ductum in MN, eſt vt HK ductum in KM ad GK ductum in KN. Quod erat demonſtrandum.

[a] 1. *Deprogreſſ.*
[b] 42. *De parabola.*

PROPOSITIO CX.

SVper recta BB deſcribantur tres parabolæ AB, CB, DB, quarum diametri per verticem ſint continuæ proportionales, & BB ordinatim ad eam ſit poſita.

Dico CB planum ductum in ſe æquari AB plano ducto in planũ BD.



Demonſtratio.

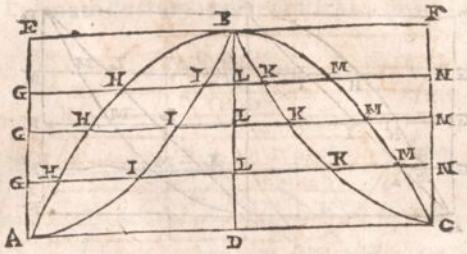
DVcantur quotuis CA BD parallelę ad diametros primo datas. Cùm enim diametri per verticem ponantur proportionales, etiam diametri AB, BC, BD erunt continuæ: quare CB parabola ducta in ſe æqualis AB parabolæ ductæ in parabolam BD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXI.

PArabolam ABC cuius axis BD, & ordinatim poſita AC contingat in B recta EF occurrens diametris AE, CF in E & F: dein per A & B, item B & C parabolæ deſcribantur quarum axes ſunt AE, CF.

Dico GH ſuperficiem ductam in ſuperficiem IK æquari HI plano ducto in ſe.

Demonſtratio.



a 167. parab. b 9. De progreſſion.

DVcantur ad AC parallelæ infinitę GHILKM. docuimus libro de parabola [a] GH, GI, GM rectas in continua eſſe analogia: quare cùm HI, KM lineæ ſint [b] inter ſe æquales, erunt GH, HI, IK continuæ. vnde per 45. huius patet veritas propoſ.

PROPOSITIO CXII.

ISdem poſitis:
Dico corpora orta ex GH plano ducto in IL, item ex HI in ſe ipſum, tandem ex GH & MN ductis in IK, in continua eſſe analogia proportionis duplæ.

Demonſtratio.

PRoducantur GM parallelæ in N. Quoniam GH, HI, IK rectæ in præcedenti oſtenſæ ſunt continuæ, erunt HI quadrata æqualia rectangulis GHIK; ſunt autem MN æqualis ipſis GH, igitur rectangula ſuper GHMN tanquam vnis & IK, dupla ſunt rectangulorum ſuper GHIK, id eſt dupla quadratorum HI: rurſum cùm IL lineę dimidiæ ſint ipſarum IK, erunt GHIL rectangula dimidia rectangulorum GHIK, hoc eſt quadratorum HIF: vnde rectangula GH, IL quadrata HI & rectangulum ſuper IK & GHMN tanquam vnâ in continua ſunt analogia proportionis ſubduplæ. Quare ex diſcurſu 45. huius facilè colligitur veritas propoſitionis.

PROPOSITIO CXIII.

ISdem poſitis:
Dico corpus ortum ex ductu GM in IK æquari corpori orto ex HK ducto in ſe.

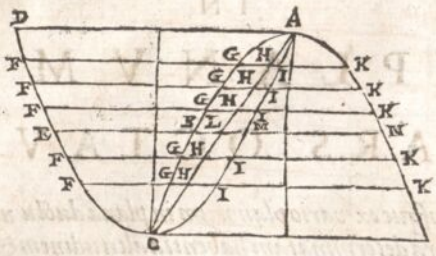
Demonſtratio.

c 167. parab. d 9. De progreſſ. e 13. De progreſſ.

OStenſum eſt in libro de parabola [c] rectas GH, GI, GM in continua eſſe analogia. cùm autem MK ſint æquales ipſis HI, rectæ etiam GH, HI, IK ſunt [d] continuæ. vnde & [e] IK, IM id eſt KH, GM in continua erunt analogia. ergo per 45. huius GM ductum in IK æquale HK ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

Demon-

PROPOSITIO CXIV.



SInt ABC, ACD parabolæ duæ æquales & similes, subalterno situ positæ, actaq; per A verticem tangente AD, iungantur AC.

Dico FG planum ductum in planum HI æquale esse HG plano ducto in planum IK.

Demonstratio.

BIsecetur AC in L, positaque per L, linea EBLMN parallela contingenti AD, ponantur ipsi EN infinitæ æquidistantes FGHIK. rectangulum FHI ad ELM est vt AHC ad ALC, rectangulum: sed vt AHC ad ALC, sic GHK rectangulum est ad rectangulum BLN igitur vt FHI ad ELM, sic GHK ad BLN, & permutando FHI est ad GHK vt ELM ad BLN. sed cùm æquales & similes sint parabolæ & AC in L bisecta sit, rectangulum ELM æquatur BLN rectangulo, vt colligitur ex illis quæ in parabola demonstraui: igitur & FHI æquale est rectangulo GHK: quare vt FH ad HK, sic GH ad HI, & permutando ac diuidendo vt FG ad GH, sic IK ad HI, vnde FGHI rectangula æqualia sunt rectangulis GHIK. ergo per 46. huius patet veritas propositionis.

D V.

DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS OCTAVA

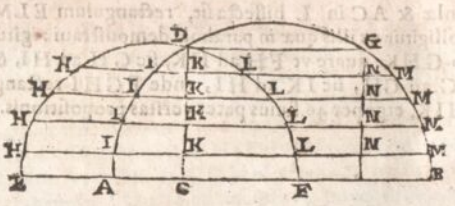
Corpora huc vsque ex vario planorum in plana ductu nata, reducit ad corpora determinatam habentia altitudinem & basim.

PROPOSITIO CXV.

INterſecent ſeſe in D, ſemicirculi duo inæquales EDF, ADB, communem habentes diametrum EACFB, ſic, vt demiſſa ex D, ad AB normalis DC incidat in centrum circuli EDF. Ponatur deinde DG æquidiſtans EB.

Dico corpus ortum ex ductu HI in IL æquari corpori habenti baſim IK & altitudinem DG.

Demonſtratio.



DVcantur infinitæ HIKLNM parallelæ ad EB, DG, ponaturque GN æquidiſtans DC: quoniam HL biſecta eſt in K & non biſecta in I, quadrato HK æquale eſt rectangulum HIL vnà cum quadrato IK. ſed IKM rectangulum quo-
a *Colligitur ex 35. tertij.* b *1. ſecundi.* que HK quadrato æquale eſt [a] rectangulum igitur IKM, id eſt [b] IKN vnà cum rectangulo IK, NM, id eſt rectangulum IKN cum quadrato IK æquale eſt rectangulo HIL vnà cum quadrato IK: quare dempto communi quadrato IK manet HIL rectangulum æquale rectangulo IKN: ſimiliter omnia rectangula HIL
c *46. huius.* oſtenduntur æquari rectangulis omnibus IKN. planum [c] igitur HI ductum in IL, corpus producit æquale *illi* quod oritur ex IK ducto in KN, ſiue in altitudinem DG. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXVI.

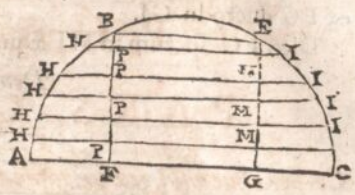
SEmicirculum ABC ſecet quæuis BE æquidiſtans diametro AC: & ex B ponatur BF normalis ad AC.

Dico

Dico P I ductum in se corpus proferre æquale illi quod basim habet HI & altitudinem B E, vnà cum H P ducto in se.

Demonstratio.

DEmittatur ex E linea EMG æquidistans BF. Ducanturque lineæ infinitę HPMI, parallelæ ad AC : rectangulum HIPM æquale est quadrato PM & rectangulis MPH, PMI hoc est HPM rectangulo bis sumpto. addito igitur communi quadrato HP, rectangulum HIPM cum quadrato HP æquale est quadratis HP, PM vnà cum rectangulo HPM bis sumpto, sed & [a] quadratum HM id est PI æquale est quadratis HP, PM vnà cum rectangulo HPM bis sumpto quadrata, igitur HM hoc est PI æquantur rectangulis HIPM, vnà cum quadratis HP. quare H M siue PI [b] ductum in se, [c] corpus profert æquale illi quod oritur ex ductu HI in PM vnà cum corpore orto ex HP ducto in se.



a 1. secundi.

b 4. secundi.

c Colligitur ex 43. huius.

Corollarium.

PRopositio hæc omni sectioni conuenit : illud tamen obseruandum, vt in ellipsi AC linea sit axis : in parabola vero & hyperbola, sit AC vnà ex illis quæ ad axem ordinatim ponuntur. vt vniformitas in omnibus seruetur.

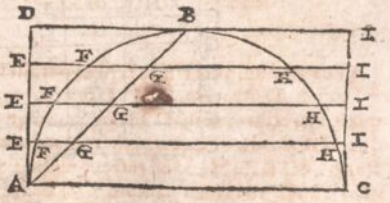
PROPOSITIO CXVII.

SEmicirculum ABC cuius diameter AC, contingant in A & B lineæ duæ AD, BD conuenientes in D, & BD quidem æquidistet AC diametro : iunganturq; contactus A & B.

Dico corpus ortum ex ductu EG in se vnà cum EF ducto in se, æquale esse corpori habenti basim EF & altitudinem AC.

Demonstratio.

PErficiatur rectangulum DAC. Ducanturque lineæ quotuis EFGHI parallelæ ad AC, DBI. quoniam DA, DB contingentes ex eodem educuntur puncto, æquales inter se erũt : quare [d] & AE lineis æquales sunt EG, & AE quadratis æqualia quadrata EG. rectangula igitur FEH quia æquantur quadratis AE, etiam æqualia sunt quadratis EG. additis igitur communibus quadratis EF, rectangula FEH vnà cum quadratis EF æqualia sunt quadratis EF, EG : sed FEH rectangulis vnà cum quadratis EF, id est vnà cum rectangulis EFHI æqualia sunt rectangula FEI ; rectangula igitur FEI æqualia sunt quadratis FE, EG : quare [e] EG ductum in se vnà cum FE ducto in se æqualia sunt corpori habenti basim EF & altitudinem EI id est AC. Quod erat demonstrandum.



d Colligitur ex 4. sexti.

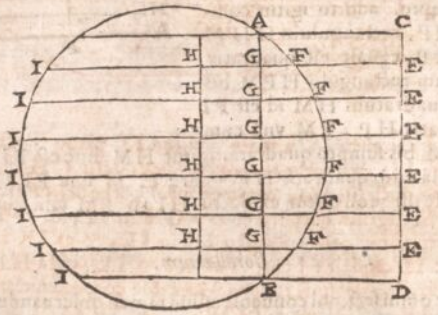
e Colligitur ex 45. vel 46. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

SEcet AB recta non per centrum ducta, circulum F I actisque per A & B normalibus D B, C A, ponantur C D, H H æquidistantes A B: sic vt corpus habens basim E G & altitudinem G H, æquale sit corpori orto ex F G ducto in G I.

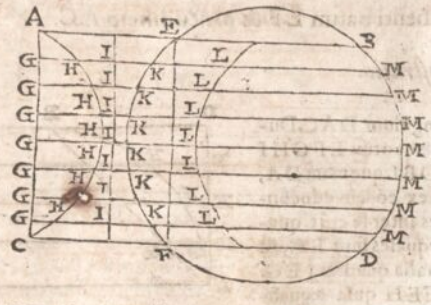
Dico F G ductum in H I æquari E F ducto in G H.

Demonstratio.



PLanum E G ductum in G H æquale est E F ducto in G H vnà cum F G ducto in G H: item F G ductum in G I æquatur F G ducto in G H & F G ducto in H I: est autem per hypothesim E G ductum in G H æquale F G ducto in G I. æquantur ergo E F in G H, cum F G in G H, ipsi F G in G H, cum F G in H I. ablato igitur communi corpore orto ex ductu F G in G H, planum E F ductum in G H æquatur F G ducto in H I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXIX.

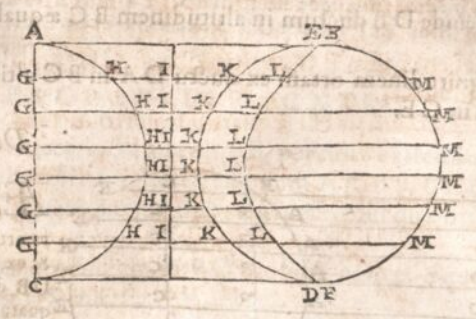


CIrculum E B D, secent vel contingant: æquales duæ & parallelę E B, F D, quibus æqualiter in A & C productis, ponatur A C normalis ad A B, C D & super A C arcus describatur circularis H H æqualis arcui E K F: diuisis deinde bifariam A E, C F rectâ I I, parabola describatur L L: sit autem corpus ex I L in altitudinem I G æquale corpori quod fit ex ductu I K in I M.

Dico corpus ex ductu I K in L M æquari corpori quod fit ex G H in I L.

Demon-

Demonſtratio.



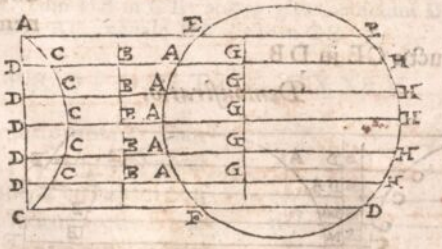
PLanum IG ductum in IL æquale ponitur IK plano ducto in IM: ſed IG plano ducto in IL æquantur corpora orta ex ductu GH in IL, & ex HI in IL: & IK plano ducto in IM, duo æquantur corpora, nimirum ex ductu IK in IL, & IK in LM; igitur corpora duo ex GH in IL, & ex HI in IL, æqualia ſunt duobus corporibus ortis ex ductu IK in IL, & ex IK in LM. ſed corpori ex HI ducto in IL æquale eſt corpus ex KI in IL (cùm HI, IK lineę, vt ex hypotheſi deducitur, æquales ſint) reliqua igitur duo corpora nimirum ex ductu GH in IL & ex ductu IK in LM æqualia ſunt.

PROPOSITIO CXX.

POſitis ijſdem arcubus circularibus CC, AA, & parallelis lineis DD, BB, AEB, CFD: ſit corpus ex AB in BH æquale corpori ex ductu GB in altitudinem BD; ſit autem GG linea recta.

Dico DC in BG ductum, proferre corpus æquale illi quod oritur ex AB in GH.

Demonſtratio.



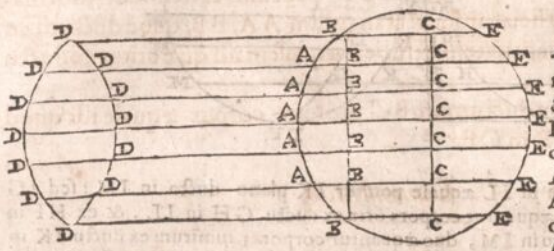
PLanum AB in BH æquale ponitur GB ducto in BD. ſed AB in BH, æquatur AB in BG, & AB in GH. ſimiliter GB in BD, æquatur GB in BC, vel in BA (cùm CB, BA æquales ſint lineę) vnà cum GB in DC; igitur corpora duo, ex DC in BG, & ex CB in BG, çqualia ſunt duobus corporibus, ex AB in BG, & AB in GH: ablatis igitur æqualibus nimirum AB ducto in BG, & CB ducto in BG, remanebit DC in BG æquale AB in GH.

PROPOSITIO CXXI.

POsitis ijſdem vt figura oſtendit, ſit DD parabola, & BB, CC lineæ rectæ, deinde DB ductum in altitudinem BC æquale ſit AB ducto in BE.

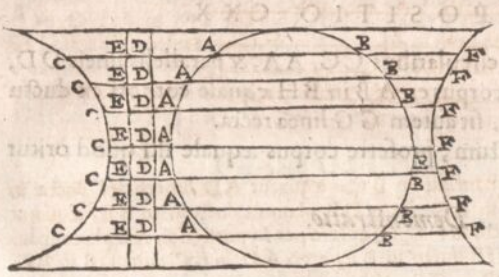
Dico magnitudinem ortam ex ductu DA in BC altitudinem æquari AB ducto in CE.

Demonſtratio.



ÆQualia ſunt ex hypotheſi corpora orta ex DB in BC, & ex AB in BE: ſed DB ductum in BC æquatur DA in BC, & AB in BC; ſimiliter AB ductum in BE æquatur AB in BC, & AB in CE. igitur DA in BC, vnà cum AB in BC, æquale eſt AB in BC, vnà cum AB in CE, ablato igitur communi AB in BC, manet DA in BC altitudinem, æquale AB ducto in CE.

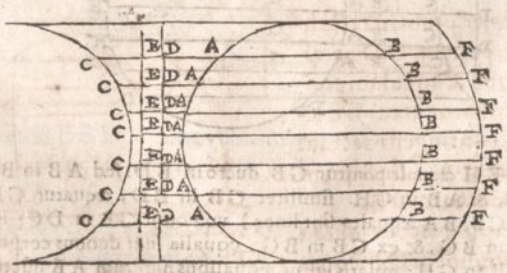
PROPOSITIO CXXII.



CIrculum AB tãgant parallelæ FC, FC quas ſecent lineę CC, EE, DD, FF. ſupponatur autẽ CD ductum in DB æquale FD ducto in DE.

Dico etiam FB ductum in altitudinem ED ęquari corpori orto ex ductu CE in DB.

Demonſtratio.



PLanum CD ductum in DB, æquale eſt CE ducto in DB; vnà cum ED ducto in DB: item planum ED ductum in DF æquatur ED ducto in DB, vnà cum

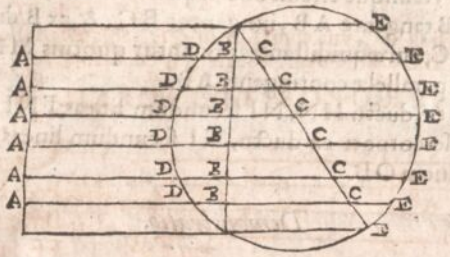
cum ED ducto in BF: æqualia autem per hypotheſim ſunt corpora orta ex ductu CD in DB, & ex FD ducto in ED; ergo CE in DB, cum ED in DB æquatur ED in DB, cum ED in BF: ablato igitur communi corpore ex ductu ED in DB, manet FB ductum in altitudinem ED æquale CE ducto in DB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIII.

CIrculum DE ſecet recta quæuis BB: per cuius extremitates, normales ducantur perficiaturque rectangulum AA, BB; quod ductum in triangulum BC, quantitatem exhibeat æqualem illi quæ oritur ex ductu DB in BE.

Dico AD planum ductum in BC proferre corpus æquale illi quod exſurgit ex ductu DB in CE.

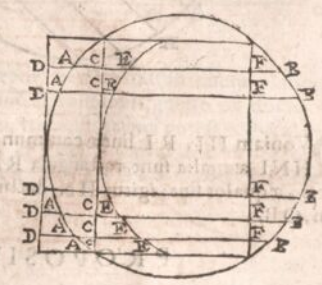
Demonſtratio.



SVperficies AB ducta in quantitatem BC, æquatur AD ſuperficiei ductæ in BC vnà cum DB ducta in BC. item DB planum ductum in BE, æquatur DB ducto in BC, & DB ducto in CE; eſt autem per hypotheſim, AB planum ductum in planum BC æquale DB ducto in BE, ergo AD in BC, cum DB in BC, æquatur DB in BC, cum DB in CE: ablato igitur communi DB ducto in BC, manet AD ductum in BC, æquale DB ducto in CE.

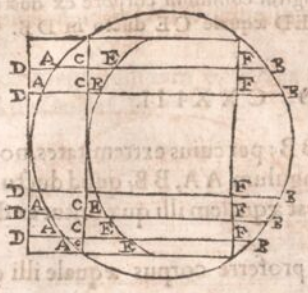
PROPOSITIO CXXIV.

CIrculo AB inſcriptum ſit rectangulum CF; poſitaq; DD parallela lateri CC, quę & circulum contingat in A, deſcribatur arcus EE æqualis arcui AA contingens rectam CC: ponatur autem AC ductum in CB æquari AD ducto in DB.



Dico corpus quod fit ex ductu plani DA in altitudinem DF æquari corpori quod profertur ex ductu AC in EB.

Demonſtratio.



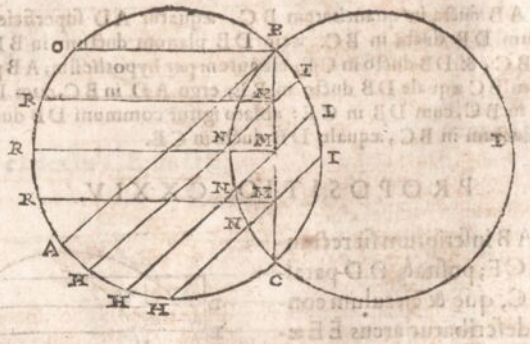
PLanum DA ductum in DB æquale eſt DA ducto in DF, vnà cum DA ducto in FB, id eſt vnà cum CE in AC: item AC ductum in CB, æquatur AC ducto in CE, vnà cum AC ducto in EB: æqualia autem ſunt per hypotheſin corpus ex ductu AD in DB, & corpus ex ductu AC in CB; ergo DA in DF, & CE in AC æquantur AC in CE, & AC in EB; ablato igitur communi AC ducto in CE, manet DA ductum in DF æquale AC ducto in EB.

PROPOSITIO CXXV.

INterſecent ſe vtcunque circuli duo æquales ABC, BCD in B & C. Actaque per B tangente AB, iungantur BC, & ex B ducatur OB orthogona ipſi BC, cui æquidiſtantes ponantur quotuis MNR: & per N, totidem N, IH parallelæ contingenti AB.

Dico corpus ex ductu HN, NI ſecundùm lineas FNI parallelas ipſi AB, æquale eſſe corpori ex ductu, NI ſecundùm lineas parallelas ipſi OB in altitudinem OB.

Demonſtratio.



QVoniam HI, RI lineæ commune ponuntur habere punctum N, rectangulis HNI æqualia ſunt rectangula RNI, id eſt R, NI & OB, cum OB, RN lineæ [a] æquales ſint: igitur HN ductum in NI æquatur R, NI ducto in altitudinem OB.

[a] *Lib. de circulis.*

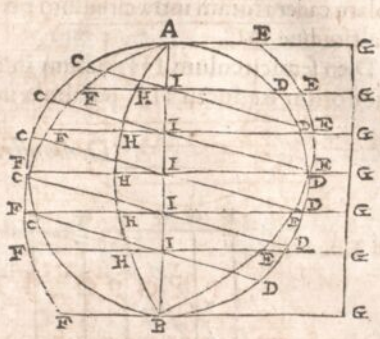
PROPOSITIO CXXVI.

SEcent AB diametrum circuli ABC in I obliquè DC, actiſque per I orthogonis EF, fiant DI lineis æquales EI, & rectis IC æquales IF dein

IF dein quotuis ducantur GG parallelæ ad AB, occurrentes EF lineis in G: & EIF rectangulis æqualia fiant rectangula GIH.

Dico corpus ex HF plano in altitudinem GI æquari magnitudini ortæ ex ductu superficiei GE in IF.

Demonstratio.



QVoniam EIF rectangulis id est rectangulis AIB æqualia sint rectangula GIH erunt puncta AH [a] ad parabolam: vlterius GI est ad EG, vt IF ad HF, adeoque & GE ad GI, vt FH ad IF: vnde FHGI rectangula æqualia sunt rectangulis GEIF: & cum altitudo omnibus sit eadem erit [b] HF ductum in GI altitudinem æquale GE ducto in IF. Quod fuit demonstrandum.

[a] 31 12 *parab.*

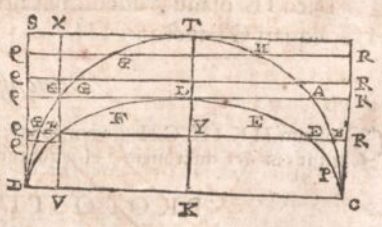
[b] 46. *huius.*

PROPOSITIO CXXVII.

CIrculum ABC secet recta quædam AG parallela diametro CD, erectaque ex K centro orthogona KLT describatur per CLD ellipsis contingens circulum in C & D, dein ex C & D tangentes erigantur occurrentes lineæ AG illiusq; parallelis in Q & R.

Dico corpus ex ductu QF in FR, eam habere rationem ad corpus ex ductu QG in GR, quam habet LK ad TK.

Demonstratio.



DVctâ quauis XV æquidistante rectæ TK, quę circulo occurrat in G, & ellipsi in F agantur per G & F parallelę diametro CD: erit igitur RGQ rectangulum æquale rectangulo RFQ, vnde parallelopipedum habens basim rectangulum RGQ & GV altitudinem ad parallelopipedum habens basim rectãgulum RFQ & altitudinem FV est vt GV ad FV, hoc est vt TK ad LK, [c] similiter ostẽdemus infinita parallelopipeda inscripta corpori nato ex mutuo ductu planorum QG, GR esse ad infinita parallelepipeda inscripta corpori genito ex ductu mutuo planorum QF, FR vt TK ad LK. ergo, vti facile deduci potest & discursu 45. huius, magnitudo orta ex ductu QF in FR ad quantitatem ortam ex ductu QG in GR, eam habet proportionem quam habet LK ad TK. Quod erat demonstrandum.

[c] *Vt colligitur ex illis quæ in lib. de ellipsi ostendi.*

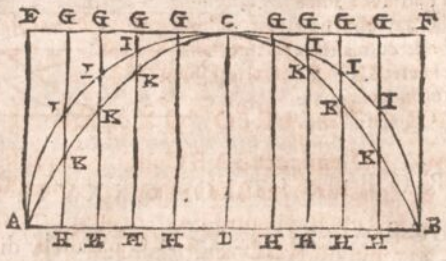
PRO-

PROPOSITIO CXXVIII.

SIt AKB parabolę axis CD æqualis lateri recto centroq; D interuallo DC circulus describatur cuius diameter AB patet ex 141. parab. parabolam cadere totam intra circulum perficiatur rectangulum, sub basi AB & altitudine DC.

Dico semicirculum IH ductum in se, corpus producere æquale illi quod oritur ex ductu HK parabolæ in altitudinem CD.

Demonstratio.



a 204. parab. b 45. huius. DVcantur ad EA vel CD parallelæ infinitæ GIKH. Libro de parabola a ostendimus HK, HI, HG, lineas esse proportionales, igitur b HK ductum in HG, hoc est in altitudinem DC æquatur HI ducto in se.

PROPOSITIO CXXIX.

IIsdem positis:

Dico IK planum ductum in altitudinem CD vel in rectangulum HG, æquari GI ducto in IH.

Demonstratio.

c 45. huius. QVoniam HK, IH, GH proportionales sunt, vt GH ad IH, sic GI est ad IK: igitur c & GI ductum in IH æquatur IK ducto in altitudinem CD.

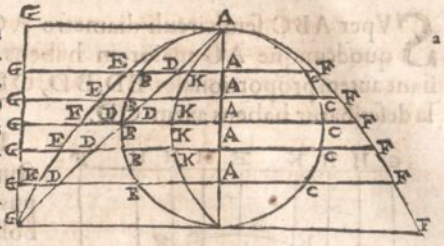
PROPOSITIO CXXX.

d 114. parab. e 9. parab. SIt EF parabolę axis AA, par lateri recto; super quo descripto circulo BC, (qui d totus intra parabolam cadet) ponatur LA ordinatim, quæ e æqualis erit axi AA. Completo igitur quadrato AG, iunge LD, ductisq; rectis infinitis, parallelis ad LA, fiat rectangula BAC, æqualia rectangulis GAK. erit KK parabola.

Dico EB ductum in BF æquari DK in GA ducto.

Demon-

Demonſtratio.



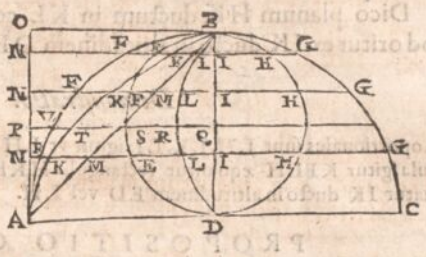
QVadrata EA hoc eſt rectangula EAF [a] æqualia ſunt rectangulis EBF, vnà cum quadratis BA, id eſt rectangulis BAC. item GAD rectangula æqualia ſunt quadratis AE. æqualia igitur ſunt GAD rectangula, rectangulis EBF: vnà cum rectangulis BAC. rectangulis autem GAD æqualia ſunt rectangula GAK, GADK; rectangula igitur GAK, GADK æqualia ſunt rectangulis EBF, BAC: ablatis igitur æqualibus ex hypotheſi rectangulis BAC, GAK manet rectangulum EBF æquale rectangulo DK, GA. ergo planum EB ductum in BF [b] eſt æquale DK ducto in altitudinem GA. a 5. ſecundi. b 46. huius.

PROPOSITIO CXXXI.

DIametri duæ AC, BD ſemicirculi ABC ad angulos inſiſtant rectos; iunctaq; AB, deſcribatur ſuper BD vt diametro circulus BED.

Dico FE planum ductum in planum EG, corpus proferre æquale illi quod baſim habet triangulum ABD & altitudinem BD.

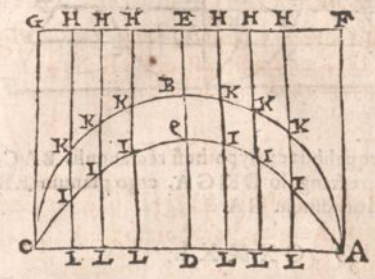
Demonſtratio.



DVcantur quotcunque rectæ NFKEMLIHE, parallelæ ad AC, agantur per B & A contingentes quæ conueniant in O; poſitiſque NFI parallelis AC, fiant proportionales NI, EI, LI, item NI, FI, KI: erunt [c] AKB, DLB parabolæ. ſecetur deinde BD bifariam in Q ponaturque QP æquidiſtans AC, occurrens parabolis in R T, ſemicirculis autem in S & V, ducaturque recta AB, quæ circulo EE, & rectæ MM occurrit in eodem puncto S, vt facile demonſtrabitur quoniam AKB parabola eſt, a proportionales ſunt lineæ PQ, PS, PT: eſt autem PQ in S biſecta, recta igitur PS in T quoq; biſecta eſt: & ST dimidia eſt ipſius SP, hoc eſt SQ. quia vero PQ, SQ, RQ [e] proportionales ſunt, & SQ dimidia PQ; recta quoque RQ dimidia eſt SQ. [f] æquales igitur ſunt TS, RQ quoniam autem LI eſt ad RQ, vt DIB rectangulum ad rectangulum DQB id eſt AMB ad ASB rectangulum, & vt AMB rectangulum ad rectangulum ASB ſic [f] MK linea ad lineam TS, erit vt LI ad RQ, ſic MK ad TS, id eſt RQ. æquales igitur ſunt lineæ LI, KM, vlterius cum FG in I diuiſa ſit bifariam & non bifariam in E quadrata FI [g] æqualia ſunt rectangulis FEG, vnà cum quadratis EI, id eſt (quia NI, EI, LI ſunt continuæ) vnà cum NI rectangulis id eſt (quia LI, KM æquantur) rectangulis NIKM. ſed FI quadrata quoque æqualia ſunt rectangulis NIK, (quod NI, FI, KI ſint proportionalis) rectangula igitur NIK [g] æqualia ſunt rectangulis FEG, & NIKM. rectangula autem NIK æqualia quoque ſunt rectangulis NIM, NIMK, igitur NIM, NIMK rectangula æqualia ſunt rectangulis NIMK, FEG. dempto ergo communi NIMK, reſidua NIM, FEG rectangula æqualia ſunt: planum igitur FE ductum in EG æquatur MI triangulo, ducto in quadratum NI id eſt in altitudinem BD. c Ex 29. parab. d 67. parab. e 299. parab. f 47. parab.

PROPOSITIO CXXXII.

SVper ABC semicirculi diametro AC, descriptum sit rectangulum quodcunque AG maiorem habens semicirculo altitudinem ED: fiant autem proportionales ED, BD, QD & per AQC puncta parabola describatur habens axem QD.



Dico LK semicirculum ductum in se, æquale proferre corpus, illi quod oritur ex LI parabola ducta in altitudinem ED.

Demonstratio.

DVcantur infinitæ HKIL parallelę ad DE. Quoniam ED, BD, QD proportionales, & AQC parabola est proportionales quoque erunt HL, KL, IL: semicirculus igitur [a] LK ductus in se, æquatur LI parabolæ ductæ in altitudinem ED vel LH.

[a] 45. huius.

PROPOSITIO CXXXIII.

IIsdem positis:
Dico planum HK ductum in KL corpus producere æquale illi quod oritur ex IK ducto in altitudinem DE vel LH.

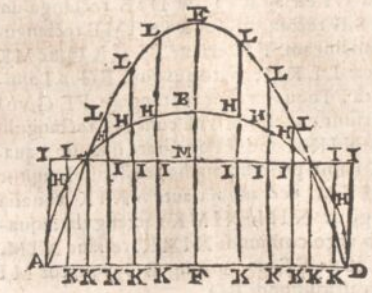
Demonstratio.

PRopottionales sunt LH, LK, LI: igitur vt LH ad KL, sic HK ad KI: rectangula igitur KILH æquantur rectangulis HKKL. quare [b] HK ductum in KL æquatur IK ducto in altitudinem ED vel LH.

[b] 46. huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

SEmicirculi ABD diametri AD, BF ad angulos insistant rectos: descriptoq; super AD basi rectangulo minorem habente altitudinem quam sit BF, fiant proportionales FE, FB, FM: & per A, F, D puncta parabola describatur habens axem FE.



Dico HK semicirculū ductum in se, æquale corpus proferre illi quod emergit ex LK parabola ducta in altitudinem IK.

Demonstratio.

DVcantur infinitæ KIHL parallelæ ad EF. quoniam FE, FB, FM proportionales sunt, & AEC parabola est, rectę quoque KI, KH, KL proportionales sunt. quare [c] HK semicirculus ductus in se æquatur LK parabolæ ductæ in altitudinem IK.

[c] 45. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXXXV.

ISdem positis.

Dico planum LH ductum in altitudinem IK æqualem proferre molem illi quæ exsurgit ex HI ducto in HK.

Demonstratio.

QVoniam proportionales sunt LK, HK, IK, recta LH est ad HI vt LK ad HK, id est HK ad IK. Quare rectágula LH, IK æquantur rectangulis HI, HK. quare [a] LH ductum in altitudinem IK, corpus producit æquale illi quod oritur ex ductu HI in HK. [a] 46. huius.

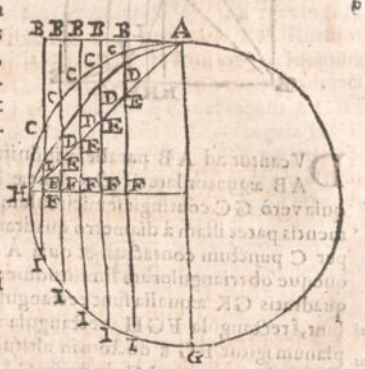
PROPOSITIO CXXXVI.

QVadranti circuli ACH inscripta sit parabola ADH habens apicem in A: iunctaque AH, ponatur contingens parabolam in A in qua sumpto quouis puncto B ducatur BCDEFI.

Dico BC planum ductum in BI æquari BD plano ducto in altitudinem BF.

Demonstratio.

DVcantur more solito quotuis BCDEFI parallelæ ad AG. [b] quadratis BE æqualia sunt rectangula DBF, sed & EB quadratis id est vt iam sæpius ostensum est quadratis AB, æqualia sunt rectangula CBI: rectangula igitur CBI æqualia sunt rectangulis DBF; & BC ductum in BI æquatur DB ducto in altitudinem BF. [b] 67 parab.



PROPOSITIO CXXXVII.

ISdem positis:

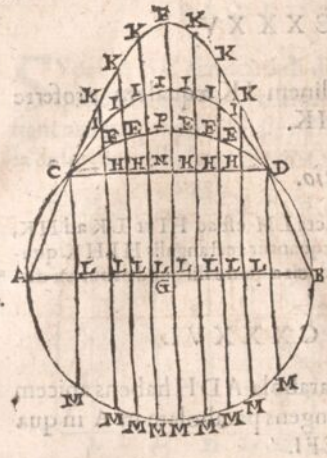
Dico DB ductum in DF æquari CD plano ducto in DI.

Demonstratio.

REctangula BFD æqualia [c] sunt quadratis CF: quadrata vero FC [d] æqualia sunt rectangulis CDI vnà cum quadratis DF; rectangula igitur BFD id est BDF rectangula vnà cum quadratis FD æqualia sunt rectangulis CDI vnà cum quadratis FD: ablatis igitur communibus quadratis DF, rectangula CDI æqualia sunt rectangulis BDF. quare & DB planum ductum [e] in DF æquatur CD ducto in DI. Quod erat demonstrandum. [c] 104 parab. [d] 5. secundi. [e] 46. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

SEmicirculum secet recta quædam CD æquidistans diametro AB: eductaque ex G centro normaliter GF quæ CD lineæ occurrat in N & perimetro circuli in P; fiant proportionales GN, GP, GF: & per CFD puncta parabola describatur CKFD: ductis deinde HE lineis infinitis ad PN parallelis fiant his æquales EI, EI.



Dico planum KI ductum in altitudinem LH æquari EH plano in se ducto.

Demonstratio.

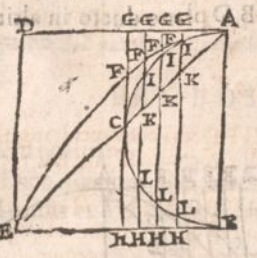
PRoducantur HEI parallelæ in K, L, M, quoniam GN, GP, GF proportionales sunt & CFB parabola, rectæ [a] LH, LE, LK proportionales sunt: quia vero HE lineis æquales sunt EI, rectæ quoque [b] LH, HE, IK proportionales erunt. quare [c] KI ductum in altitudinem LH corpus profert æquale illi quod oritur ex ductu HE in se.

a Exconuersa 310. parab.
b Corell. de progress. c 46. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

SIt AB axis parabolæ AFE, æqualis lateri recto; positâque ad illum ordinatim linea EB; super AB vt diametro circulus describatur ACB qui [d] totus cadet intra parabolam, circulum hunc contingant linea CG æquidistans AB, & AG, GĐ.

Dico GL planũ ductum in GI, æquari FG plano ducto in altitudinem AB.



d 12 6pa. rab.

Demonstratio.

DVcantur ad AB parallelæ infinitæ GFILH, iungatur item AE. Quoniam AB æquatur lateri recto, lineæ EB, BA [e] æquales sunt & DB quadratum, quia verò GC contingit semicirculum super AB latere quadrati descriptum, ex elementis patet illam à diametro quadrati AE bisecari: adeoque rectam AE transire per C punctum contactus. & quia AG, GC contingentes æquales sunt, æquales quoque ob triangulorum similitudinem erunt AG, GK: vnde AG quadratis id est quadratis GK æqualia sunt rectangula IGL. sed & GK quadratis æqualia quoque sunt, [f] rectangula FGH: rectangula igitur FGH æqualia sunt rectangulis IGL: planum igitur FG [g] ductum in altitudinem AB vel GH æquale corpus producit, illi quod emergit ex IG ducto in GL.

e 9 parab.
f 67. parab.
g 46. huius.

PROPOSITIO CXL.

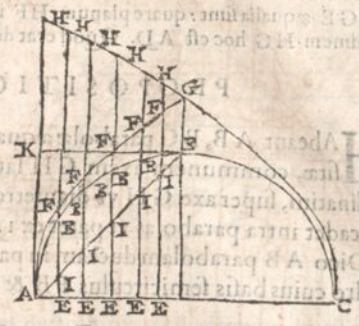
SIt rursum parabolæ FF axis AC æqualis lateri recto & super AC diametro descripto circulo, contingat eum AK.

Dico planum FE ductum in EH gignere æquale cylindricę quadranti, cuius basis BE, & altitudo AC.

Demon-

Demonſtratio.

QVoniam AFG parabolę axis AC lateri recto ęqualis eſt, lineæ EF a æquales ſunt AB, per hypotheſim vero BC lineis æquales ſunt EBH, rectangula igitur FEH æqualia ſunt rectangulis ABC id eſt b AC, BE rectangulis ergo c planum FE ductum in planum EH æquatur quadranti BE ducto in altitudinem AC hoc eſt quadranti cylindrico, cuius baſis BE, altitudo AC. Quod erat demonſtrandum.



a 126 parab.

b 69. lib. de circulo.

c 46. huius.

PROPOSITIO CXLI.

IIſdem poſitis:

Dico EF ductum in FH æquari, parti cylindricę quæ baſi conſtat BI, & altitudine AC.

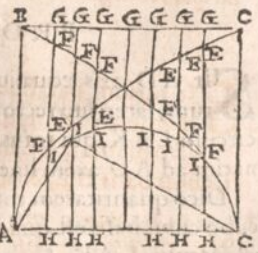
Demonſtratio.

REctangula FEH æqualia ſunt rectangulis HFE vnà cum quadratis FE: ſed FEH rectangulis etiam æqualia oſtenſa ſunt rectangula ACBE rectangula igitur ACBE æqualia ſunt rectangulis HFE vnà cum quadratis FE. Rurſum rectangula ACBE æqualia ſunt rectangulis ACBI, ACIE, id eſt rectangulis ACBI vnà cũ rectangulis ACIE, id eſt EAC, id eſt quadratis AF, id eſt quadratis FE æqualia igitur ſunt HFE rectangula vnà cũ quadratis FE rectangulis ACBI vnà cum quadratis FE: quare demptis communibus quadratis FE, rectangula HFE æqualia ſunt rectangulis AC, BI. Vnde planum HF ductum in FE corpus producit æquale plano BI ducto in planum EK, hoc eſt plano BI, ducto in altitudinem AC hoc eſt portioni cylindricę cuius baſis BI altitudo AC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLII.

SVper AC quadrati latere vno AD, deſcriptus ſit ſemicirculus AID: deſcriptæ quoq; ſint parabolę ſimiles & æquales AEC, DFB habentes apices in A & D, & communem axem AD æqualem lateri recto, totus igitur circulus intra d parabolas cadet.

Dico corpus ortum ex ductu HF in GE, æquari corpori quod oritur ex ductu FI in altitudinem AD.



d 126. parab.

Demonſtratio.

DVcantur infinitę GFEIH parallelę ad AB & iunge AI, CI. rectæ AI æquales ſunt HE, & DI rectæ æquales ſunt HF: eſt autem AD lineę æqualis HG cum AC quadratum ſit, igitur vt DA ad AI, ſic GH ad HE: ſed vt AD ad AI, ſic e DI eſt ad IH, igitur GH ad EH, ſic DI ad IH, id eſt FH ad IH; & per conuerſionem

e Patet ex 8. ſexti.

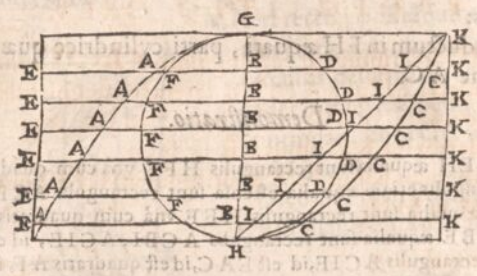
uersionem rationis HG est ad GE vt HF ad IF, rectangula igitur FIGH, FHGE æqualia sunt: quare planum HF in GE, æquatur FI plano ducto in altitudinem HG hoc est AD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLIII.

HAbeant AB, BC parabolæ æquales ac similes & situ subalterno positæ, communem axem GH lateri recto æqualem, positâque KG ordinatim, super axe GH vt diametro circulus describatur FD, qui totus cadet intra parabolas vt patet ex 126. parabolæ.

Dico AB parabolam ductam in parabolam BC æqualem esse semicylindro cuius basis semicirculus FB & altitudo GH.

Demonstratio.



COmple rectangulum BK, BK, ductisque infinitis AFBDCK, iunge puncta GF, HF; HD. Quoniam GH axis parabolarum æqualium AB, BC, lateri recto æqualis est, lineis GF [a] æquales sunt AB, & lineis HD, id est lineis HF æquales BC. rectangula igitur ABC æqualia sunt rectangulis GFH id est [b] GH, FB: sed rectangula GH, FB æquantur rectangulis FBK, cum enim HG axis parabolarum sit æqualis lateri recto, HB est æqualis ipsi GK, hoc est rectis BK. ergo rectangula ABC æquantur rectangulis FBK. parabola igitur AB ducta in BC parabolam, producit corpus, æquale illi quod fit ex ductu plani FB in planum BK, hoc est semicylindro cuius basis est semicirculus FB altitudo GK, hoc est GH. Quod erat demonstrandum.

[a] *Ex conuersa 300. parab.*
[b] *69. De circulis.*

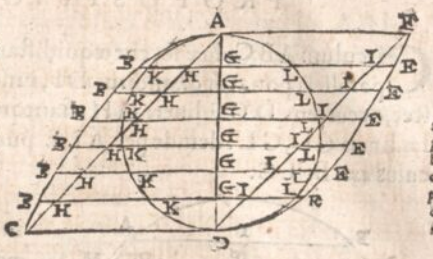
PROPOSITIO CXLIV.

SIt AD axis æqualium ac similium parabolarum subalternè positarum, lateri suo recto æqualis: descriptoque super AC vt diametro, circulo LAK, qui totus intra parabolas cadet, ponantur ex A & D, ordinatim ad AD axem lineæ AF, DC.

Dico quantitatem totam EB ductam in se, corpus producere æquale cubo cuius basis est quadratum lineæ AD, vnà cum cylindro cuius basis est circulus LAK, & altitudo AD.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur quotuis lineæ BKHG LIE, parallelę AF: quibus FD, AC iunctę occurrant in H & I, quadrata BE æqualia ſunt, GB, GE id eſt [a] quadratis AK, DE, ſiue AK, KD, id [b] eſt quadrato AD, id eſt [c] quadrato DC, id eſt HI quadratis vna cum [d] rectangulis BGE bis ſumptis. igitur EB ductum in ſe, æquale eſt HI ducto in ſe, id eſt cubo, cuius baſis eſt quadratum DC, id eſt AD quadratum & BG plano ducto bis in GE planum, id eſt cylindro [e] habenti baſim circulum LAK & altitudinem AD. Quod erat demonſtrandum.

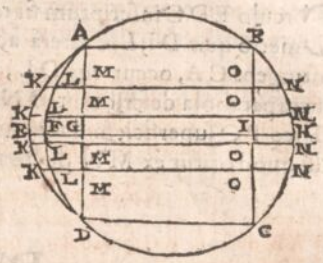
a 300. de parabola.
b 47. primi.
c 9. De parabola.
d Ex elementis.
e Colligitur ex præcedenti.

PROPOSITIO CXLV.

CIrculo ABC inſcriptum ſit rectangulum ABCD ponatur autem circuli diameter FH quę AD, BC latera rectanguli inſcripti ad angulos ſecet rectos; fiatq; vt HG, ad GI ita GE ad GF: & per AED puncta parabola deſcribatur KK cuius axis ſit EG:

Dico corpus habens baſim KM & altitudinem GI æquari corpori orto ex ductu LM in MN.

Demonſtratio.



INfinitæ ducantur lineæ KLMON parallelæ ad EH. Quoniam HG, GI lineæ per hypotheſim proportionales ſunt rectis EG, GF, rectangulum FGH æquale eſt rectāgulo EGI: & quia AED parabola eſt, rectangula quoque KMO [f] æqualia ſunt rectangulis LMN, corpus [g] igitur habens baſim KM & altitudinē MO vel GI, æquale eſt LM plano ducto in MN. Quod erat demonſtrandum.

f Ex conuerſa 310. parab.
g 46. huius.

PROPOSITIO CXLVI.

IIſdem poſitis:

Dico planum KL ductum in altitudinem IG æquari, LM plano ducto in ſe.

Demonſtratio.

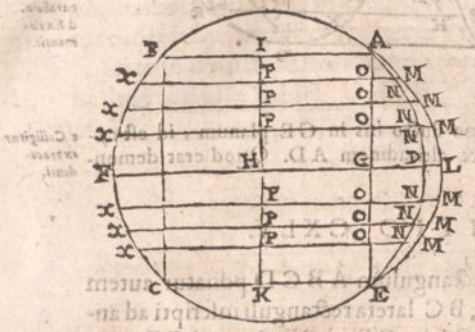
QVoniam ex hypotheſi eſt vt HG ad IG, ſic EF ad FG, diuidendo eſt vt HI id eſt FG ad GI, ſic EF ad FG, proportionales igitur ſunt EF, FG, GI: & [h] quia AED parabola eſt, proportionales [h] quoque ſunt KL, LM, MO. quare [i] KL ductum in MO ſiue GI æquatur LM ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

h Ex conuerſa 310. parabola.
i 45. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXLVII.

CIrculum ABC duæ secent æquidistantes & æquales AB, EC, quibus parallela ponatur diametrus DF, iunctæque AE quæuis IK æquidistet, occurrens DGF lineæ in H: fiantque GH, GF lineæ proportionales lineis GD, GL: deinde per ALE puncta parabola MM describatur cuius axis sit LG.



Dico NO superficiem ductam in planum PX, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu MN in altitudinem OP.

Demonstratio.

DVcantur quotcunque rectæ MNO PX, parallelæ ad LF. vt GH ad GF, sic DG est ad GL per hypothesim, diuidendo igitur vt GH ad HF, sic GD est ad DL. ergo LDGH rectangulum æquale rectangulo DGHF: quia vero ALE parabola est, rectangula[a] quoque MNOP æqualia sunt rectangulis NOPX. planum igitur MN ductum[b] in OP vel in altitudinem GH æquale est plano NO ducto in PX.

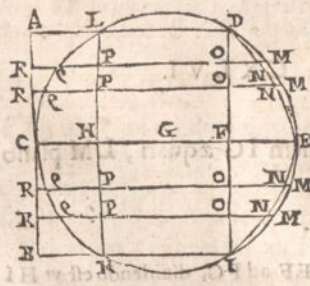
[a] *Colligitur ex 310 parab.*
[b] *46. huius.*

PROPOSITIO CXLVIII.

CIrculo EDC inscriptum sit rectangulum DIKL positaq; EC diametro quæ DI, LK latera ad angulos secet rectos, ponatur per C contingens CA, occurrens DL, IK lineis in A & B: deinde per IED puncta parabola describatur DNEI habens axem EC.

Dico PQ superficiem ductam in planum QR corpus proferre æquale illi quod oritur ex MN ducto in altitudinem FC.

Demonstratio.



[c] *47. parab.*
[d] *Ex elementis.*
[e] *46. huius.*

DVcantur vt prius quotcunque rectæ MN OPQR parallelæ ad EC. vt EF est ad NO, sic[c] DFI rectangulum est ad rectangulum DOI; sed vt EF ad NO, sic EFC rectangulum quoque ad rectangulum NOR, vt igitur DFI rectangulum ad rectangulum DOI, sic EFC rectangulum est ad rectangulum NOR: & permutando vt EFC ad DFI rectangulum, sic rectangulum NOR ad DOI rectangulum. æquantur autem rectangula EFC, DFI, rectangula igitur NOR, DOI quoque æqualia sunt, & quia DOI rectangulis[d] æqualia sunt rectangula MOQ, rectangula MOQ, NOR æqualia sunt. quare MO est ad NO, vt OR ad OQ: & conuertendo OM est ad NM vt OR ad QR: rectangula igitur MNOR æqualia sunt rectangulis MOQR. ergo MN planum ductum in altitudinem RO siue FC,[e] æquale est plano MO, id est PQ ducto in planum QR. Quod erat demonstrandum.

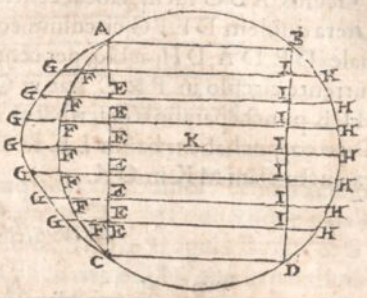
PRO-

PROPOSITIO CXLIX.

CIrculo ABC inscriptum sit rectangulum ABCD: ductâq; AB lateri parallelâ vnâ IEF, fiant proportionales IE, EF, FG. Deinde per puncta CGA describatur parabola, cuius axis sit GK.

Dico FI planum ductum in se corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu GH in altitudinem EI.

Demonstratio.



DVcantur more solito lineæ quotcunque GFEIH, & quoniam vnæ GF, FE, EI, ex hypothesi sunt in continua, estque GG parabola, etiam [a] reliquæ omnes GF, FE, EI erunt in continua. Componendo igitur vt GE sunt ad FE, sic HE sunt ad IE: & alternando vt GE ad EH, sic FE ad EI: & componendo vt GH ad EH, hoc est FI, sic FI ad EI; quadrata igitur FI æquantur rectangulis GH, EI. Ergo [b] planum FI ductum in se æquatur plano GH ducto in planum EI, hoc est in altitudinem EI. Quod erat demonstrandum.

[a] Ex 11. parab.

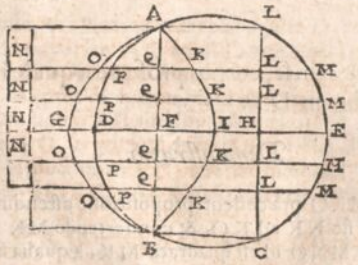
[b] 45. huius.

PROPOSITIO CL.

CIrculo ABC inscriptum sit rectangulum AC ductâq; BC lateri parallelâ HFD, fiant proportionales HF, FD, DG & rectæ FG æqualis fiat FI. Tum per puncta BGA, BIA describantur parabolæ, quarum axes sint FG, FI. Demum rectangulo AC, adiiciatur indirectum æquale rectangulum AN.

Dico MK planum ductum in altitudinem HF æqualem exhibere molem illi quę producitur ex ductu NP in PL.

Demonstratio.



DVcantur infinitæ lineæ NOPQKLM parallelę ad BC. Quoniam OO, KK sunt parabolę, & HF, FD, DG sunt [c] proportionales, etiam LQ, QP, (id est ML) PO proportionales erunt. igitur componendo vt OQ ad PQ, sic MQ ad QL. sed, quia parabolę OO, KK similes sunt & æquales, rectę KQ æquantur rectis OQ. ergo vt KQ ad PQ, sic MQ ad QL. Igitur permut. vt KQ ad MQ, sic PQ ad QL,

[c] Ex 10. parab.

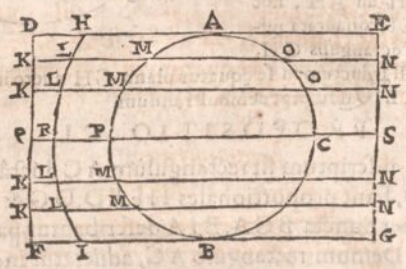
hoc est ex hypothesi NQ. Ergo inuertendo MQ ad KQ, vt NQ ad PQ, &
[a] 46. huius. conuertendo vt MQ hoc est LP ad MK, sic NQ hoc est QL ad NP. Igitur rectangula MK, QL æquantur rectangulis LP, PM; ergo [a] planum MK, ductum in planum LQ hoc est in altitudinem HF, æquatur plano NP ducto in planum PL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLI.

CIrculus ABC idem habeat centrum cum rectangulo DFEG, & latera quidem DE FG circulum contingant in A & B: fiant proportionales DE, DA, DH; actâq; per centrum rectâ QS parallelâ ad DE, & occurrente circulo in P & C, fiat vt QS ad QC, ita QP ad QR: tum per H, R puncta parabola describatur LLL habens axem RS.

Dico corpus habens basim LK & altitudinem FG æquari corpori orto ex ductu plani MK in OK.

Demonstratio.



DVcantur infinitæ KLMON parallelæ ad DE, FG. positâ constructione hypotheseos, singulæ KN, sunt ad singulas KO, vt KM singulæ ad singulas KL, vt facilè deducitur ex ijs quæ in lib. de parabol. demonstraui. ac proinde rectangula
[b] 46. huius. NKL æquantur rectangulis OKM. ergo [b] KL ductum in altitudinem KN id est FG æquatur KM ducto in KO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLII.

IIsdem positis:

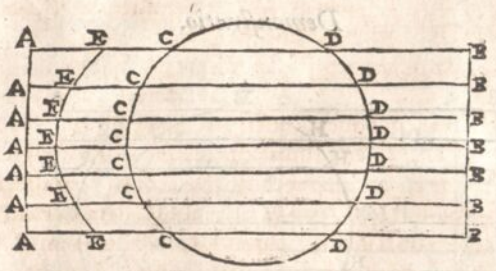
Dico MK ductum in se, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu LM in altitudinem DE.

Demonstratio.

REctangula LKN, MKO præcedenti propositione ostendimus esse æqualia: igitur vt MK ad LK, sic NK ad KO, & conuertendo MK ad ML, vt NK ad NO rectangula igitur KMNO id est quadrata MK, æqualia sunt rectangulis LM,
[c] 45. huius. KN. ergo LM ductum in altitudinem [c] KN id est DE æquale est MK ducto in se.

PRO-

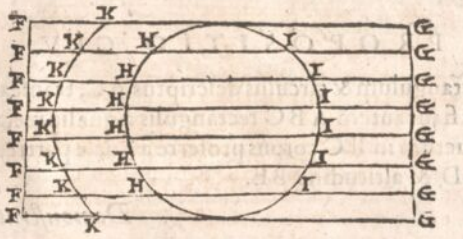
PROPOSITIO CLIII.



HAbeant AB, FG rectangula, æquales altitudines: centris autem rectangulorum, circuli describantur CD, HI: ductisque parallelis AEDB fiantque CAD rectangulis æqualia rectangula BAE, & GFK rectangula æqualia rectangulis HFI, patet ex illis quæ in parabola demonstraui puncta tam E quam K esse ad parabolam.

Dico AC ductum in se ad FH ductum in se illam obtinere proportionem quæ est inter superficies EC, KH.

Demonstratio.



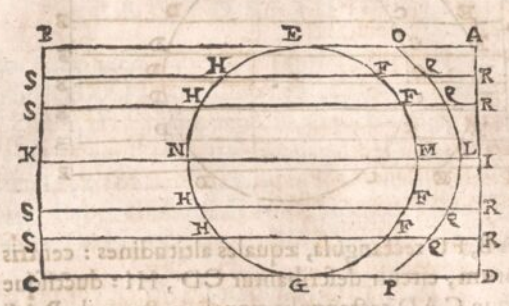
QVoniam rectangula BAE, æquantur rectangulis DAC, erunt AC ad AE, vt AB ad AD: & conuersim AC ad EC, vt AB ad DB, rectangula ergo AC, DB, (hoc est, quod rectæ AC, DB sint æquales, quadrata AC,) æquantur rectangulis EC, AB. Corpus igitur ex ductum plani AC in seipsum æquatur corpori nato ex EC ducto in altitudinem AB. similiter ostendam FH ductum in se æquari KH ducto in altitudinem FG. ergo AC ductum in se est ad FH ductum in se, vt EC ductum in AB ad KH, ductum in FG; hoc est quoniam altitudines ex hypothesi sunt æquales, vt bases EC, EC, KH, KH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLIV.

ESto rectangulum ABC altera parte longius cui inscriptus sit circulus EFG, contingens parallelas in E & G, non habens idem centrum cum rectangulo: & fiant proportionales IK, IN, & IM, IL. Deinde fiant continuæ AB, AE, AO, & per O & L, descripta sit parabola habens axem IK.

Dico corpus ex ductu ſuperficierum RF, HS inter ſe emergens æquale eſſe illi magnitudini quàm producit baſis QF ducta in altitudinem IK.

Demonſtratio.



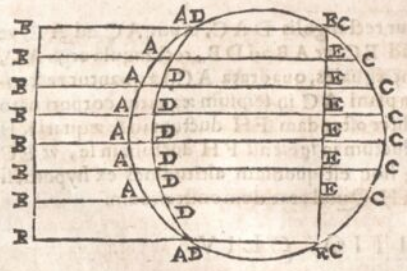
DOcuimus lib. de parabola poſita parabola vti hoc loco eſt conſtituta quod omnia rectangula QRS, æqualia ſint rectangulis FRH igitur ſunt proportionales lineę RQ, RF cum lineis RH & RS. quare diuidendo vt RQ eſt ad QF, ita eſt quoque RH recta ad lineam HS ac proinde componendo eam habet rationem RS ad HS, quam habet RF ad FQ. igitur rectangula RS, QF æqualia ſunt rectangulis RF, HS. Quare erit corpus conſtans altitudine quæ ſit æqualis rectæ IK ſiue RS, & baſi QF ſuperficiè, æquale illi magnitudini quæ profertur ex multiplicatione figurarum ſeu ſuperficierum RF & HS inter ſe. quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CLV.

ESto BE rectangulum & circulus deſcriptus AC, tranſeat per extrema lateris EE: fiant autem ABC rectangulis æqualia rectangula EBD.

Dico AB ductum in EC corpus proferre æquale parti cylindricę, quæ baſi conſtat, AD & altitudine BE.

Demonſtratio.



a 46. huius.

DVcantur lineæ infinitę BADEC parallelæ lateribus rectanguli quoniam ABC rectangula æqualia ponuntur rectangulis EBD, vt AB ad BD, ſic EB ad BC: & diuidendo vt BA ad AD, ſic BE ad EC, æquantur ergo rectangula BA, EC, rectangulis AD, BE igitur AB ductum in EC corpus producit æquale [a] illi quod oritur ex AD baſi ducta in altitudinem BE.

PROPOSITIO CLVI.

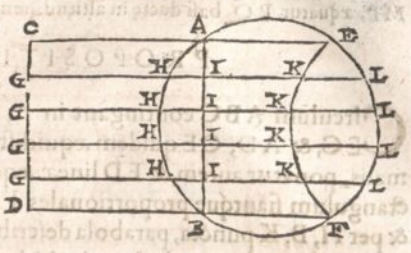
SIt iterum ABCD rectangulum & per extremæ lateris AB circulus deſcriptus tranſeat occurrens CA, DB lineis in E & F: fiant autem HGL rectangulis æqualia rectangula IGK.

Dico

Dico planum H I ductum in G L, corpus producere æquale illi quod oritur ex L K basi ducta in altitudinem G I.

Demonstratio.

DVcãtur quotuis numero G H I K L parallelæ ad C E. Quoniam H G L rectangulis æqualia ponuntur rectangula I G K; vt G H ad G I, sic G K est ad G L & conuertendo vt H I ad G I, sic K L ad L G, rectangula igitur H I G L, æqualia sunt rectangulis L K G I: quare L K ductum in altitudinem G I corpus producit [a] æquale illi quod emergit ex H I ducto in G L. Quod erat demonstrandum.



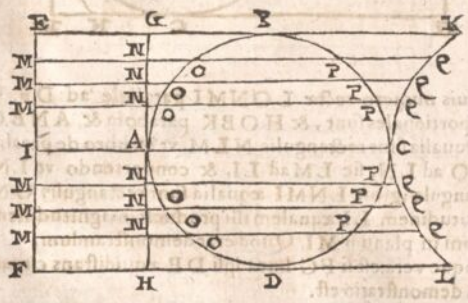
[a] 46. huius.

PROPOSITIO CLVII.

CIrculum A B C, contingant in B, A, D punctis lineæ B G, A G H, D H, & G B, H D quidem æquidistent & A G H ad easdem sit normalis: rectæ vero A G H parallela ponatur E F, fiantque E G, E B, E K, & F H, F D, F L proportionales dein per A punctum contactus ducatur I A C æquidistans E K, occurrens circulo A B C in C, & per K, C, L puncta, parabola describatur L C K.

Dico O M planum ductum in M P, æqualem illi proferre magnitudinem, quæ oritur ex M Q plano ducto in altitudinem M N.

Demonstratio.



DVcantur lineæ infinitæ M N O P Q parallelæ ad E K. Quoniam E G, E B, E K, &c. proportionales sunt, & K C L parabola est & B O D circulus rectangula, N M Q æqualia sunt O M P vt facile deducitur ex iis quæ in lib. de parabola demonstraui planum igitur M Q ductum [b] in altitudinem M N æquale est M O | plano ducto in planum M P. Quod erat demonstrandum.

[b] 46. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

IIsdem positis:

Dico N O ductum in M P corpus proferre æquale illi quod oritur ex basi P Q ducta in altitudinem M N.

Demonſtratio.

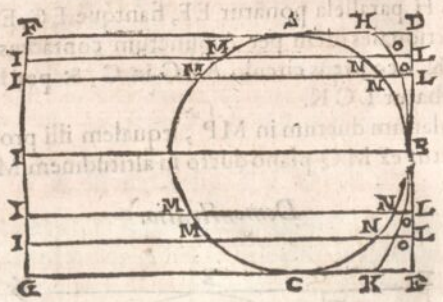
QVoniam NMQ rectangula æqualia ſunt rectangulis OMP, vt MN ad MO, ſic MP ad MQ, & diuidendo vt MN ad NO, ſic MP ad PQ: rectangula igitur MNPQ, æqualia ſunt rectangulis NOPM, & NO planum ductum in MP, æquatur PQ baſi ductę in altitudinem MN. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLIX.

CIrculum ABC contingant in A, B, C punctis lineæ tres AD, DE, EC, & AD, CE quidem æquidiſtantes ſint, DE vero ad illas normalis, ponatur autem & ED lineæ æquidiſtans FG faciens DFGE rectangulum fiantque proportionales FD, AD, HD; item EG, EC, EK: & per H, B, K puncta, parabola deſcribatur.

Dico LM planum ductum in MI, corpus proferre æquale illi quod exſurgit ex NO plano ducto in altitudinem LI.

Demonſtratio.



DVcantur quotuis numero rectæ LONMI parallelę ad DF. Quoniam FD, AD, HD proportionales ſunt, & HOBK parabola & ANBC circulus, rectangula OLI æqualia ſunt rectangulis NLM vt ex libro de parabola facile colligitur quare vt LO ad LN, ſic LM ad LI, & conuertendo vt LN ad ON, ſic LI ad IM, rectangula igitur LNMI æqualia ſunt rectangulis ONLI. ergo ON baſis ducta in [a] altitudinem LI æqualem illi producit magnitudinem quę exſurgit ex ductu LN plani in planum MI. Quod erat demonſtrandum.

[a] 46. huius.

Propoſitio quoque vera eſt ſi FG linea ipſi DE æquidiſtans circulum contingat: & prorſus eadem demonſtratio eſt.

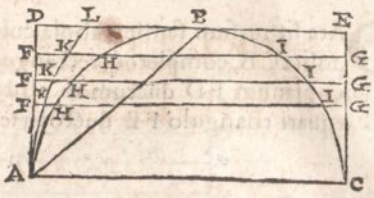
PROPOSITIO CLX.

SEmicirculo ABC circumſcriptum ſit rectangulum ADEC & DE quidem ſemicirculum contingat in B: fiantque proportionales ED, ED, BD, LD: & per L & A parabola deſcribatur habens verticem in A.

Dico FK planum ductum in altitudinem FG æquari FH ducto in HG.

Demon-

Demonſtratio.



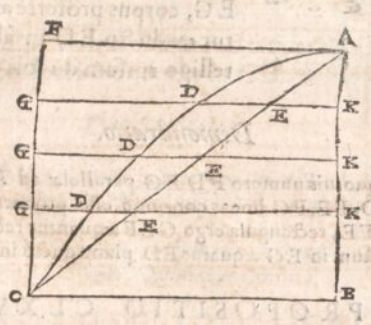
DVcantur infinitæ FKHIG parallelæ ad AC: Quoniam ED, BD, LD proportionales ſunt, & AKL parabola, [a] rectangula KFG æqualia ſunt rectangulis HFI id eſt FHG, vt in lib. de parab. oſtendi: planum igitur FK ductum in altitudinem FG, corpus producit æquale illi quod oritur ex ductu FH in HG. Quod erat demonſtrandum. [a] 46. huius.

PROPOSITIO CLXI.

DAta ſit ſemiparabola ABC, cuius axis AB, ad quam ordinatim poſita ſit CB, completoque rectangulo ABCF, iungatur CA.

Dico triangulum EK ductum in altitudinem æquari parabolæ ductæ in ſeipſam.

Demonſtratio.



DVcantur quotcunque numero lineæ GDEK parallelę ad CB, rectæ GK, DK, EK ſunt in [b] continua analogia. ergo quadratis DK æquantur rectangula GKE. Ergo EK triangulum ductum in altitudinem GK, id eſt CB, æquatur [c] parabolę ductæ in ſe ipſam. Quod erat demonſtrandum. [b] 42. parab. [c] 45. huius.

PROPOSITIO CLXII.

IIſdem poſitis:

Dico planum ED ductum in altitudinem CB, æquari plano GD ducto in planum parabolicum DK.

Demonſtratio.

QVoniam [d] eſt vt GK ad DK, ſic DK ad EK, erit conuertendo vt KG ad GD, ſic KD ad ED. Ergo rectangula ED, KG æquantur rectangulis KDG, ergo ED [e] ductum in altitudinem KG id eſt BC, æquatur plano GD ducto in planum DK. Quod erat demonſtrandum. [d] 42. parab. [e] 46. huius.

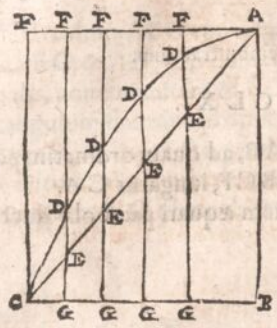
PRO-

PROPOSITIO CLXIII.

DAta sit rursum semiparabola cuius axis AB, & ordinatim ad axem posita CB, completoq; rectangulo FG, ducatur AC.

Dico planum FD ductum in altitudinem AB secundùm parallelas FG æquari triangulo FE ducto in se secundùm parallelas FE.

Demonstratio.



a 67. parab.

b 45. huius.

DVcantur infinitæ FDEG, rectæ FG, [a] FE, FD sunt in continuâ proportione. Quadratis ergo FE æquantur rectangula DFG. Ergo [b] FD planum ductum in altitudinem FG id est AB, æquatur triangulo FE ducto in se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXIV.

IIsdem positis:

Dico FE planum ductum in planum EG, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu ED in altitudinem AB: intelligo rursum ductus secundùm parallelas FDEG factos.

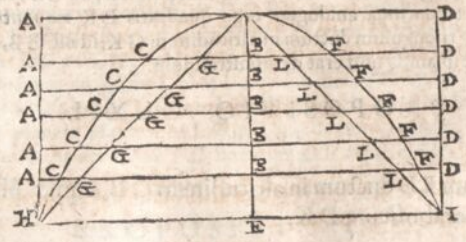
Demonstratio.

c 67. parab.

d 46. huius.

DVcantur lineæ quotuis numero FDEG parallelæ ad AB, libro de parabola [c] ostendimus FD, FE, FG lineas continuè esse proportionales: igitur GE est ad DE, vt GF ad FE, rectangula ergo GEF æquantur rectangulis DEFG. quare FE [d] planum ductum in EG æquatur ED plano ducto in altitudinem FG id est AB.

PROPOSITIO CLXV.

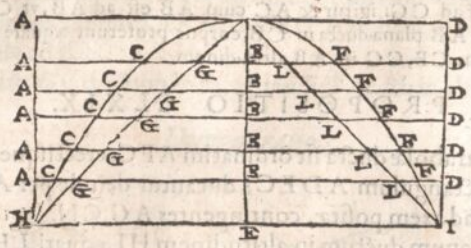


SIt ad KBE axem parabolæ CF ordinatim applicata HI, erectisque ex H & I axi parallelis HA, ID, perficiatur rectangulum, iungaturq; HK, IK.

Dico AC planum ductum in planum CD, æquari plano AG ducto in altitudinem AB.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur lineæ rectæ infinitæ ACGBLFD parallelę ad HI, libro de parabola [a] oſtendimus BAG rectangula æquari rectangulis CAF id eſt ACD: [a 43. parab.] ergo planum AC ductum in CD æquatur AG plano ducto in altitudinem AB.

PROPOSITIO CLXVI.

IIſdem poſitis:

Dico CG ductum in altitudinem AB æquari AC ducto in CB; & AC ductum in GB, æquari CG ducto in CB.

Demonſtratio.

QVoniam AB, CB, GB [b] proportionales ſunt, vt AB ad CB, ſic [c] AC ad CG, planum igitur CG ductum in altitudinem AB, æquatur AC ducto in CB. [b 42. parab. c 1. Progr.] Quod erat primum.

Rurſum vt AB ad CB, id eſt CB ad GB, ſic AC ad CG, igitur CG ductum in CB, æquatur AC ducto in GB. Quod erat alterum.

PROPOSITIO CLXVII.

IIſdem poſitis:

Dico plana AC, AB ducta in planum CG æqualem illi proferre molem quæ oritur ex ductu planorum CG, CB in AC planum.

Demonſtratio.

ESt AB ad CB, vt [d] CB ad GB. Ergo conuertendo vt BA ad CA, ſic BC ad GC: & componendo vt BA cum CA ad CA, ſic BC cum GC ad GC; rectangula igitur ſuper AB, AC & CG, æqualia ſunt rectangulis ſuper CB, CG & AC. ergo AB, AC plana ducta in planum CG, æqualia ſunt planis CB, CG ductis in planum AC. Quod erat demonſtrandum. [d 42. parab.]

PROPOSITIO CLXVIII.

IIſdem poſitis:

Dico plana AC, AB ducta in CB, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu planorum CG, CB in altitudinem AB.

Demonſtratio.

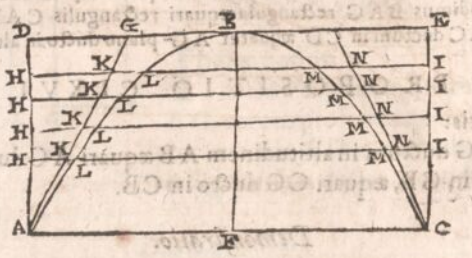
OStenſum eſt præcedenti propoſitione, AB cum AC eſſe ad AC, vt BC cum CG eſt ad CG; igitur & AC cum AB eſt ad AB, vt CG cum CB ad CB. quare AC, AB plana ducta in CB, corpus proferunt æquale illi quod oritur ex ductu planorum CB, CG in AB altitudinem.

PROPOSITIO CLXIX.

AD axem parabolæ ducta ſit ordinatim AFC, erectiſque normalibus, perfice rectangulum ADEC; ducantur deinde per A & C extrema ordinatim ad axem poſitæ, contingentes AG, CN.

Dico LK planum ductum in altitudinem HI æquari LH ducto in ſe.

Demonſtratio.



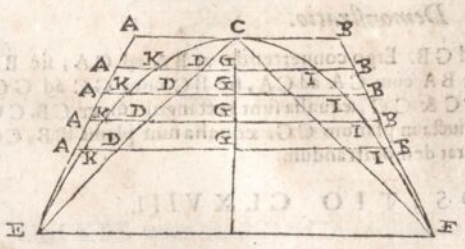
a 88. *parab.* DVcantur ad AC parallelę infinitæ HKLMI, libro de parab. oſtenſum eſt LK, LH, HI lineas in continua eſſe analogia; quadrata ergo LH æquantur rectan-
b 45. *huius.* gulis LK, HI; planum igitur LH ductum in ſe, æquale LK[b] ducto in altitudinę HI.

PROPOSITIO CLXX.

EAdem iterum ponantur quæ priùs: ducaturq; EC.

Dico AD planum ductum in ſe, æquari AK ducto in KB.

Demonſtratio.



DVcantur rurſum ad EF parallelæ infinitæ AKDB. libro de parabola oſtendi AK. AD, AI, hoc eſt KB in continua eſſe analogia: ergo quadrata AD æquantur rectangulis AKB; planum igitur AD ductum in ſe æquatur AK ducto in KB.

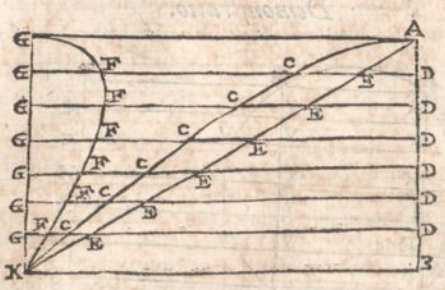
PRO-

PROPOSITIO CLXXI.

SIt AB axis parabolæ A C K, & ad illum ordinatim applicata K B; perfecto autem rectangulo A B K, ductaq; A K, fiant G F rectæ æquales C E & parallelę ad K B.

Dico planum G C ductum in se æquari F C ducto in altitudinem G D.

Demonstratio.



LIneæ G D, C D, E D sunt [a] proportionales: sunt autem G F æquales differentiis C E; ergo etiam [b] F C, F E siue G C, G D in continua sunt analogia. Ergo quadrata G C æquantur rectangulis F C, G D. Ergo [c] G G ductum in se æquatur F C ducto in G D. Quod erat demonstrandum.

[a] 43. parab.
[b] 13. & 9. Progr.
[c] 45. huius.

PROPOSITIO CLXXII.

IIsdem positis:

Dico E D planum ductum in C F æquari E C ducto in se.

Demonstratio.

QVoniam E D, C D, G D proportionales sunt, & E C differentiis æquales ponuntur F G; rectæ quoque [d] E D, C E; F C proportionales sunt; rectangula igitur F C, E D æquantur quadratis C E: quare E D planum ductum in C F [e] æquatur E C plano ducto in se.

[d] 9. Progr.
[e] 45. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

MAnentibus ijsdem:

Dico C E ductum in altitudinem G D, dare corpus æquale magnitudini quam efficit ductus superficierum G C, & C D in se inuicem.

Demonstratio.

QVoniam eandem rationem continuant rectæ D E, D C, D G; igitur quam rationem habent D C lineæ ad C E, eandem quoque habent D G rectæ ad rectas G C. quare D C, G C rectangula rectangulis C E, D G, æquari debent. Ergo C E, superficies in [f] altitudinem G D multiplicata, parem exhibet magnitudinem illi quę producitur per ductum mutuum planorum G C, C D. Quod erat demonstrandum.

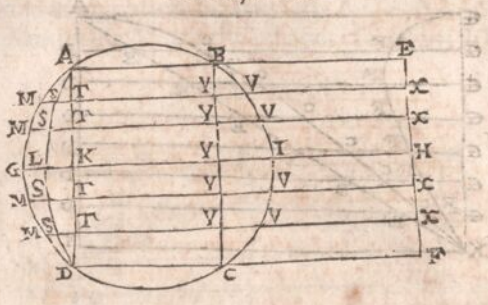
[f] 46. huius.

PROPOSITIO CLXXIV.

CIrculum ABC, secent æquales duæ parallelæ lineæ AB, DC, iunctisque AD, BC ponatur quæuis EF æquidistans BC, posità deinde GKIH diametro, parallelâ AB, fiat vt HK ad KI, sic KG ad KL, denique per A, L, D, puncta parabola describatur, habens apicem in L.

Dico MS ductum in altitudinem TX, æquari YV in VX.

Demonstratio.



POnantur infinitæ MSTYVX, parallelæ GH. Quoniam est vt HK ad KI, sic KG ad KL, rectangulum HKL, æquatur IKG rectangulo. quia verò ALD parabola est, vt[a] LK ad ST, sic AKD rectangulum est ad rectangulum ATD: sed vt LK ad ST, sic quoque est LKH rectangulum ad rectangulum STX, igitur vt AKD ad ATD rectangulum, id est vt GKI ad MTV, sic LKH ad STX, & permutando vt GKI ad LKH, sic MTV ad STX: sed LKH rectangulum æquale ostensum est rectangulo GKI; igitur & STX rectangula æqualia sunt rectangulis MTV, quare vt MT ad ST, sic TX ad TV, & conuertendo vt MT id est YV, ad MS, sic TX ad VX: vnde YVX rectangula æqualia sunt rectangulis MSTX, planum[b] igitur MS ductum in altitudinem TX, æquatur YV in VX. Quod erat demonstrandum.

a 47. parab.

b 46. huius.

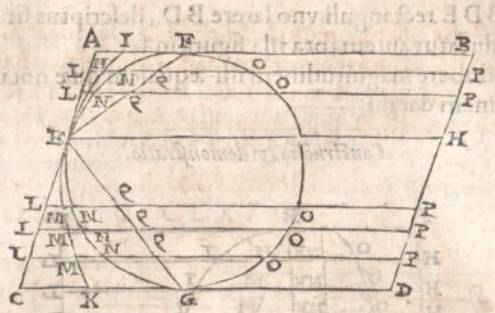
PROPOSITIO CLXXV.

SIt ABCD rhomboides, includens circulum EFG quem in punctis tribus E, F, G contingat: factis autem proportionalibus AB, AF, AI: CD, CG, CK describatur per I, E, K parabola cuius diameter sit EH parallela AB.

Dico corpus ortum ex ductu LN in LO æquari magnitudini quę oritur ex ductu LM in altitudinem EH.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur EF, EG, & infinitæ LMNQOP, parallelæ AB. Quoniam IEK parabola eſt, rectangula PLM æqualia ſunt[a] quadratis LQ: quia verò EC, CG, item EA, FA contingentes æquales ſunt, quadratis LQ æquantur[b] quadrata EL, id eſt rectangula OLN; igitur & OLN rectangula, æqualia ſunt rectangulis PLM. quare LM ductum[c] in LP ſiue in altitudinem EH æquatur LN ducto in LO. Quod erat demonſtrandum.

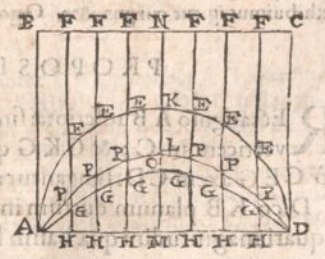
a 67. *parab.* b *Per elementa.* c 46. *huius.*

PROPOSITIO CLXXVI.

ESto ſuper ABCD rectanguli latere AD vt diametro deſcriptus ſemicirculus AED, cuius centrũ M, ex quo recta erigatur MOLKN æquidiſtans lateri AB, deſcribatur autem parabola quæcunque AGD occurrens MN lineę in O puncto, quod eiuſdem vertex ſit, fiant deinde tres proportionales NM, KM, LM;

Dico EH ſemicirculum in ſe ductum ad GH parabolam ductam in altitudinem AB eam habere rationem quam habet LM linea ad lineam OM.

Demonſtratio.



DEſcribatur per A, L, D puncta parabola habens apicem in L. erit igitur HP[d] parabola ducta in altitudinem AB, æqualis EH ſemicirculo in ſe ducto: ſed PH ductum in altitudinem AB ad GH in eandem ductum altitudinem, eſt vt PH parabola ad parabolam GH, [e] baſis ad baſim; igitur & EH ductum in ſe ad GH ductum in altitudinem AB eſt PH, parabola ad parabolam GH, quia verò PH, GH parabolæ communem habent ſubtenſam AD, illam inter ſe ſortiuntur rationem, quam [f] LM ad OM: igitur & EH ſemicirculus ductus in ſe ad GH parabolam ductam in altitudinem AB eſt vt LM linea ad lineam OM.

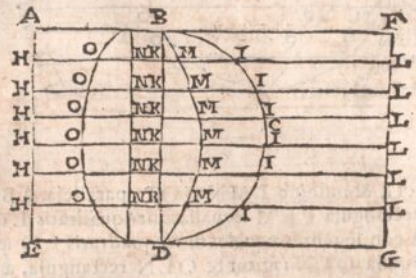
d 45. *huius.* e 32. *vndecimi.* f *Coroll.* 240. *de parab.*

PROPOSITIO CLXXVII.

SVper A B D E rectanguli vno latere B D, descriptus sit B C D semicirculus, ducatur autem tota illa figura in se:

Oportet exhibere magnitudinem illi æqualem quæ notam habet basim & altitudinem datam.

Constructio & demonstratio.



a 299. *Dat.* DAta sit altitudo B F, in directum posita cum A B: perfecto autem rectangulo D B F G, L K M rectangula æqualia fiant quadratis I K, cõstat B M D esse a parabolam. Deinde quadratis H K æqualia fiant rectangula L K N, patet ex elementis N N esse lineam rectam. denique rectangulis subdupla H K & rectis K I, æqualia fiant rectangula L K, N O: constat ex illis quæ in libro de ellipsi demonstrauí, puncta O O esse ad ellipsim. Dico igitur corpus ex ductu O M basi cognitæ in B F altitudinem datam æquari H I ducto in se. H I ductum in se sunt H I quadrata: sed H I quadrata æqualia sunt quadratis H K & K I, vnà cum rectangulis H K I bis sumptis: quadratis H K autem æquantur ex constr. rectangula L K N, & I K quadratis æqualia sunt rectangula L K M per constructionem; rectangulis item H K I bis sumptis id est rectangulis subduplis H K & rectis K I, æquantur rectangula L K N O, igitur H I ductum in se, id est quadrata H I æqualia sunt rectangulis L K M id est K M ducto in altitudinem K L, & rectangulis L K N id est N K in altitudinem L K, vnà cum rectangulis L K N O, id est N O ducto in altitudinem L K, id est H I ducto in se, æquatur O M ducto in altitudinem datam B F siue L K, exhibuimus igitur corpus, &c. Quod erat faciendum.

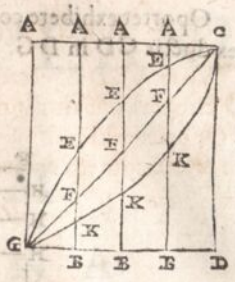
PROPOSITIO CLXXVIII.

REctangulo A B inscriptæ sint parabolæ duæ C E G, C K G habentes verticem in C: & C K G quidem axem habeat C A, parabola verò C E G axem C D. Iungantur autem C G puncta.

Dico K B planum ductum in triangulum F A simul cum A E in F B, æquari magnitudini quæ basim habet E F & altitudinem A B.

Demon-

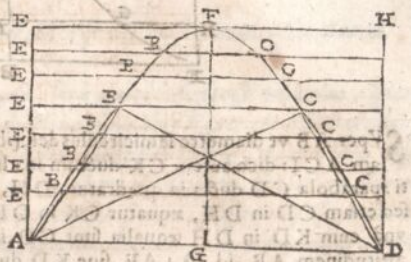
Demonſtratio.



PLanum EF ductum in altitudinem AB, id eſt rectangula omnia EFAB, æqualia ſunt rectangulis EFAF & EFB, id eſt EF ducto in AF & EF ducto in FB: ſed EF in FA, æquatur [a] AE in FB: & EF in FB [b] æquale eſt KB in FA. igitur EF ductum in altitudinem AB, æquale AE in FB, & KB in FA. Quod erat demonſtrandum.

a 105. huius.
b Ibid.

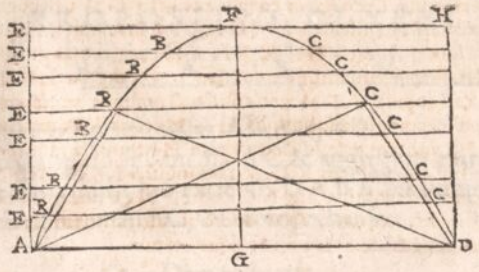
PROPOSITIO CLXXIX.



SIt BC quæuis ſectio conica; illiuſque axis FG ad quem ordinatim poſita ſit AD: actaque per F contingente FH, occurrant illi, erectæ ex A & D lineæ æquidiſtantes axi FG.

Dico BC planum ductum in altitudinem AD vnà cum EB ducto in ſe, æquari EC plano ducto in ſe.

Demonſtratio.



DVcantur quotuis AC, & per C rectæ ponantur CBE parallelæ AD, quadratum AC [c] æquale eſt rectangulis ADBC, ABDC; id eſt ADBC rectangulo vnà cum quadrato AB: eſt autem quadratum AC æquale quadratis AE, EC: igitur quadrata AE, EC æqualia ſunt quadrato AB, id eſt quadratis AE, EB vnà cum rectangulo ADB; ablato igitur communi quadrato AE, manet rectangulum ADBC vnà cum quadrato EB, æquale quadrato EC. igitur BC ductum in altitudinem AD, vnà cum EB in ſe ducto, æquatur plano EC ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

c Ptolo. meus lib. 1. prop. 20.

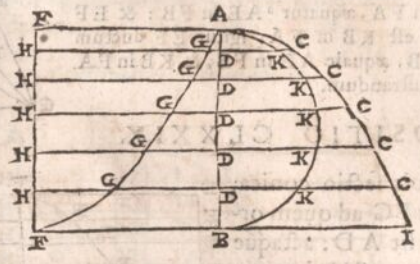
PROPOSITIO CLXXX.

SIt AB axis parabolæ ACI, æqualis lateri recto: fiat autem ſuper AB quadratum AB, EF, & per A & F parabola deſcribatur AGF, æqualis ACIB habens verticem in F: recta verò FB producta occurrat parabolæ ACI in I.

Opor-

Oportet exhibere corpus cuius altitudo sit AE, æquale magnitudini ex ductis CD in DG.

Constructio & demonstratio.



a 12 6. parab. SVper AB vt diametro semicirculus describatur AKB: cadet ille intra a parabolam ACI: dico autem CK ductum in altitudinem AE, satisfacere problemati: parabola CD ducta in quadratum DH, æquatur CD in DG, & b CD in GH: b Ex 1. secundi. sed etiam CD in DH, æquatur CK in DH c & KD in DH: igitur CK in DH, c Eandem. vnà cum KD in DH æqualia sunt CD in DG, & CD in GH: sed KD in d 9. Parab. altitudinem AB, id est d AE, siue KD ductum in DH, æquatur CD e paraboe 70. huius. læ ductæ in GH parabolam; residuum igitur CK in DH, vel in altitudinem AE; æquale est CD parabolæ ductæ in DG: exhibuimus igitur corpus, &c. Quod erat faciendum.

D V-

DVCTVVM PLANI IN PLANVM

PARS NONA.

Praxis huius libri de Planorum inter se ductu seu multiplicatione.

ETsi ex toto huius libri decursu, satis apertè colligi possit methodus, quam obseruare debeat is, qui in doctrina huius libri se exercere desiderat; nihilominus has paucas propositiones subiungere decreui, maioris lucis ergo: vix enim linea recta, secundùm vllam propositionem, siue notam, siue incognitam diuidi potest, quin, secundùm eandem diuisionem, subseruire possit huius libri argumento. quod quoniam multis paradoxi loco habendum existimarem, operæ pretium, imò necessarium duxi, partem hanc adiungere, vt hoc ipsum luce clarius innotescat, & Geometriæ studiosi Oceanum patentissimum sibi detectum agnoscant, cui sese tutò posse concredere, vel tenuissimo lembo vecti scientiæ elementorum persuasum habeant.

PROPOSITIO CLXXXI.

E A B C D

SInt tres lineæ proportionales AB, AC, AD.
Dico rectangulo sub media AC & aggregato extremorum DA, BA æquari rectangulum sub extremis DA, BA bis sumptum, vnà cum rectangulo sub differentiis BC, CD comprehenso.

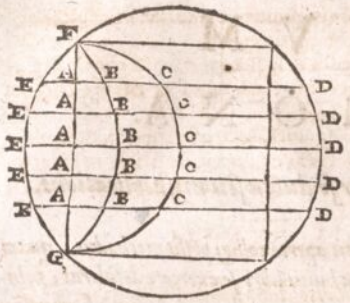
Demonstratio.

FIat EA æqualis AB. Quoniam DA, CA, BA sunt proportionales, erit diuidendo DC ad CA, vt CB ad BA. ergo rectangulum DC, AB æquatur rectangulo ACB. Ergo rectangulum DC, AB bis, æquatur rectangulis ACB, DC, AB. Addito igitur communi rectangulo CAB bis sumpto, rectangula DC, AB bis, CAB bis, hoc est[a] rectangulum DAB bis, æquabitur rectangulis ACB, DC, AB, CAB bis, sed duo huius summæ rectangula CAB, ACB[b] æquantur quadrato AC. ergo rectangulum DAB bis æquatur quadrato AC cum rectangulis CAB, DCAB. quare vtrique summæ addatur rectangulum DCB, erit rectangulum DAB bis cum rectangulo DCB æquale quadrato AC, & rectangulo CAB id est CAE, vnà cum DC, AB, DCB rectangulis: hoc est quadrato AC, & rectangulo CAE, vnà cum rectangulo DCA, siue ACD. sed quadrato CA, & rectangulis CAE, ACD æquatur rectangulum AC, ED, hoc est rectangulum super AC & AB, AD tanquam vna recta; ergo rectangulum sub AC & AB, AD æquatur rectangulo DAB bis cum rectangulo DCB. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. secundi.
[b] 4. secundi.

APPLICATIO

Ductui planorum in plana.



SVbtendat AA linea arcum quendam circuli; & ſuper AA diametro ſemicirculus CC deſcribatur, ductiſq; normalibus ad FG infinitis EABCD, fiant rectis AE æquales AB. Igitur erunt lineæ AB, hoc eſt AE, AC, AD proportionales, quoniam EAD rectangulis æquantur FAG rectangula, hoc eſt AC quadrata. Quare per præcedentem propoſitionem rectangula ſub AC, ED æquantur rectangulis DAB ſiue DAE bis ſumptis vnà cum rectangulis BCD: colligitur ergo ex propoſitione vniuerſali [a] huius libri, corpus ex ductu plani AC in ſuperficiem ED, æquari ſolido quod fit ex multiplicatione ſuperficiei AB in ED bis vnà cum quantitate quæ reſultat ex ductu plani BC in CD. quare propoſitionem aptauimus ad ductum planorum inter ſe.

[a] 46. huius.

Scholion.

DE modo reducendi corpora ex ductu genita ad quantitates ſolidas certæ altitudinis, hac parte libri non intendimus mentionem ingerere, cùm particulari tractatu de eo argumento in præcedenti parte actum fuerit.

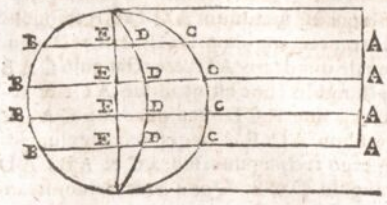
PROPOSITIO CLXXXII.

Quarta libri noſtri de linearum potentiis.

A C D E B

SEcta ſit AB in C & D mediâ & extremâ ratione proportionali, & CB compoſita ex altera extremarum & media bifariam ſecetur in E. Dico CE quadratum rectangulo DEA æquale exſurgere.

APPLICATIO.



CIrculum CC ad extremitates EE diametri contingant duæ rectæ, quas ſecet AA parallela ad EE, ductiſque AC, EB parallelis ad tangentes infinitis, fiant rectæ AB, BD rectis AC, CD proportionales, erunt [b] puncta DD ad parabolam.

[b] Colligitur ex illis quæ in parab. demonſtrata.

Dico ſemicirculi planum CE in ſe, æquari plano ED ducto in EA.

Quoniam

QVoniam enim rectæ AB in C & D diuisæ sunt extremâ ac mediâ ratione proportionali: & CB compositæ ex altera extremarum & media bifariam à diametro secantur in E; erunt per 4. prop. libri nostri de lineis, rectangula omnia DEA æqualia quadrato CE. Ergo per propos. vniuersalem quę est huius libri 45. planum DE ductum in EA æquatur plano semicirculi CE ducto in se. Ductibus ergo applicauimus theorema propositum.

Verùm eadem opera Corollarium propositionis quintæ libri de lineis breuiter accommodare operę pretium erit.

Primò infertur BDC rectangulum rectangulo ADE æquari, vnde concludimus planum BD ductum in DC planum, solidum constituere quod sit æquale corpori producto ex AD superficie ducta in planum DE.

Secundò infertur BAC rectangulum rectangulo EAD esse æquale, & consequenter ex lege ductuum asserimus corpus exsurgens ex ductu plani BA in superficiem AC, æquari solido quod resultat ex multiplicatione plani EA in planum AD.

PROPOSITIO CLXXXIII.

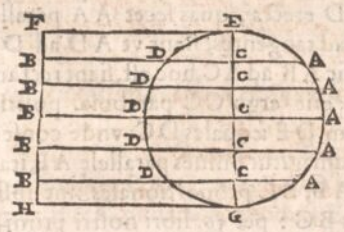
Quinquagesima quinta eiusdem libri.

A C D B

SI AB linea diuisa fuerit vtcunque in C & D.

Dico ACB, CDB rectangula æqualia esse rectangulis BDA, DCA.

APPLICATIO.

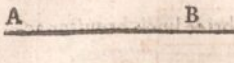


POnatur exempli gratia circulus AD, quem tangant GH, EF parallelę inter se, in punctis EG; & iuncta EG ponatur FBH quæuis linea, ducanturq; parallelæ infinitę ACDB, per 55. libri de lineis omnia rectangula ACB, CDB æquantur omnibus rectangulis BDA, DCA. ergo secundùm sensum propositionis vniuersalis[a] corpus ortum ex superficiebus AC, CB simul cum illo quod fit ex ductu plani CD in DB, æquatur solidis duobus quæ oriuntur ex planis BD in DA, & DC in CA. quare hanc etiam propositionem aptauimus nostro instituto.

[a] 46. huius.

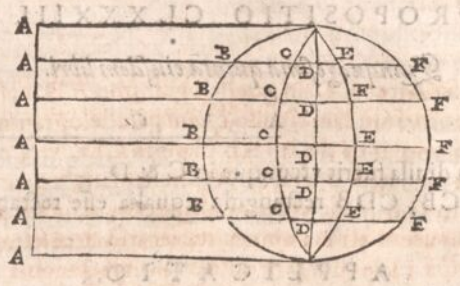
PROPOSITIO CLXXXIV.

Quinquagesima sexta eiusdem libri.



SI fuerit vt AB ad BC, sic AD ad DF, & BC lineæ æqualis EF. Dico ABDE rectangulum æquale esse rectangulo CBD.

APPLICATIO.



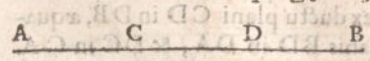
CIrculum BF cuius diameter DD, contingant æquidistantes à terminis diametri DD erectæ, quas secet AA parallela DD, ductisque ABCDF parallelis ad tangentes, fiant vt AD ad DF, sic AB ad BC, siue vt AD ad AF, sic AB ad AC, hoc est, fiant rectangulis FAB æqualia rectangula DAC: erit [a] ergo CC parabola. positis deinde FE æqualibus BC, erunt etiam DE æquales DC: vnde consequenter EE etiam parabola est. Quoniam igitur omnes parallelę AF, ita sunt diuisę in punctis B, C, D, E, F, vt AB, BC proportionales sint ipsis AD, DF; & FE æquales existant ipsis BC: per 56. libri nostri primi, omnia rectangula AB, DE æquantur rectangulis CBD. quare solidum emergens ex ductu AB in DE, [b] æquatur solido quod fit ex ductu CB, in BD.

[a] *Colligitur ex lib. de parab.*

[b] *46. huius.*

PROPOSITIO CLXXXV.

Quinquagesima septima eiusdem libri.

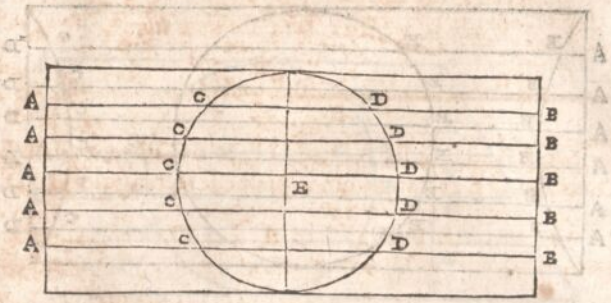


SI fuerit AB recta diuisa in C & D, vt AC, DB lineæ sint inter se æquales:

Dico CB quadratum æquari quadrato AC, vnà cum rectangulo ABCD.

AP-

APPLICATIO.



CIrculus deſcribatur CD in parallelogrammo AB, vt ſit punctum E commune centrum tam circulo quàm parallelogrammo.

Dico denuo corpus ex ductu AB plani in CD, vnà cum quantitate quæ reſultat ex ductu ſuperficiei AC in ſeipſam, æquari ſolido quod naſcitur ex plano CB, in ſeipſum multiplicato. Ductis enim parallelis ACDB, manifeſtum eſt eas omnes ita ſecari à circulo in punctis C, C & D, D, vt AC æquales ſint DB; omnia igitur rectangula AB, CD, vnà cum quadratis AC, æquantur quadratis CB per 57. prop. libri noſtri de lineis. Vnde per vniuerſalem 2 propoſ. huius libri, liquet propoſitum. 2 46. huius.

PROPOSITIO CLXXXVI.

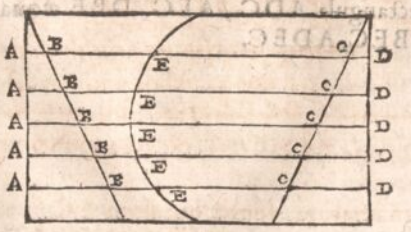
Quinquageſima octaua eiuſdem libri.

A B E C D

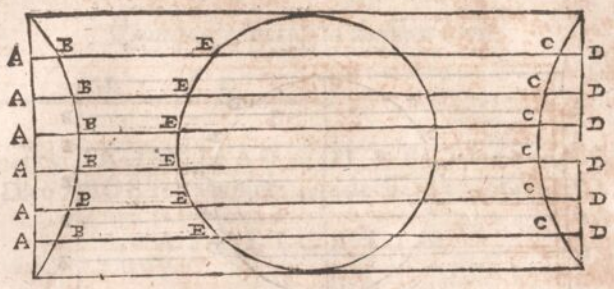
SI fuerit AD linea diuiſa in B & C vt AB, CD lineæ ſint æquales, ſumatur autem inter B & C punctum quoduis E.

Dico AED rectangulum æquale eſſe rectangulis CEA, EAB.

APPLICATIO.



COnſtituatur parallelogrammum AD, ductiſq; parallelis AD infinitis, lineæ AB fiant æquales CD: denique ponatur quiuis arcus EE.



Dico quod producitur ex plano DE in EA planum æquari ſolido quod fit ex ductu plani CE in EA, ſimul cum eo quod fit ex EA in BA;
a 46. huius. ſecundùm tenorem vniuerſalis propoſitionis[a] ſuo loco demonſtratę.

Corollarium.

HÆc propoſitio (quod in pleriſque etiam ſequentibus erit obſeruandum) ampliſſimi vſus eſt. nam EE linea quęuis eſſe poteſt quemadmodum & lineæ BB, CC, modò æquales ſint AB, CD. Inſuper ex eadem propoſitione conſequitur ſolida quę proferuntur ex ductu mutuo planorum CE, EA, & EA, BA æqualia eſſe ſolidis quę fiunt ex ductu mutuo planorum BE, ED, & ED, CD, quod liquet ex eo quod rectangula AED rectangulis DEA ſint æqualia; rectangulis autem AED æqualia ſint CEA, BAE rectangula, & ſimiliter rectangulum DEA æquale eſt rectangulis BED, CDE. Igitur[b] etiam ſolida ex ſuperficierum ductu æqualia exiſtunt: nimirum corpora ex planis CE in EA & BA in AE, corporibus ex ſuperficiebus BE in ED & CD in DE producta.

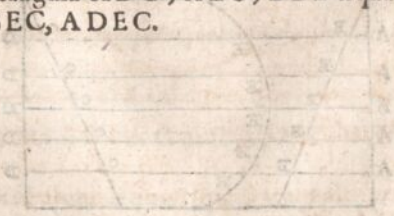
b *Patet ex 46. huius.*

PROPOSITIO CLXXXVII.

Quinquageſima nona eiuſdem libri.

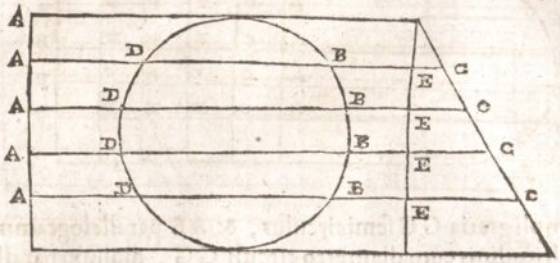
A D B E C

SI fuerit AC linea vtcunque diuiſa in DBE.
Dico rectangula ADC, AEC, DBE æqualia eſſe rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC.



APPLI-

APPLICATIO.



COnstituatur verbi gratia circulus D B intra parallelas parallelogrammi A E, & adijciatur quædam linea C C.

Dico solida quæ nascuntur ex ductu.

$$\text{plani}\left\{\begin{matrix}AD\text{ in }DC\\AE\text{ in }EC\\DB\text{ in }BE\end{matrix}\right\}\ \text{æquari solidis ex}\ \left\{\begin{matrix}AB\text{ in }BC\\AD\text{ in }DB\\BE\text{ in }EC\\AD\text{ in }EC\end{matrix}\right.$$

DEmonstrationem huius collige ex propositione vniuersali; [a] ductis enim parallelis infinitis ADBEC, semper rectangula ADC, AEC, DBE æquantur rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC. [a] 246. huius.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

Sexagesima eiusdem libri.

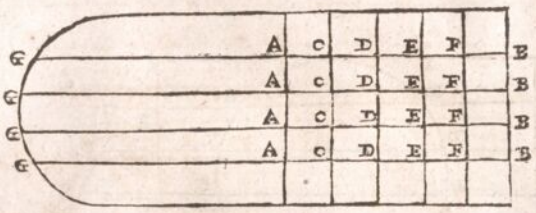
G A C D E F B

SI fuerit AB linea diuisa in quinque partes æquales punctis C, D, E, F, & ei quæuis in directum adijciatur G A.

Dico G D quadratum æquale esse quadrato A G, vnà cum rectangulo G C B.

APPLI-

APPLICATIO.



SIt exempli gratia G G ſemicirculus, & A B parallelogrammum eiuſdem altitudinis cum diametro circuli G G, diuiſum parallelis C C, D D, E E, F F in quinque æquales partes.

Dico ſuperficiem G D in ſe ductam exhibere ſolidum æquale corporibus quæ fiunt ex A G in ſe ducto ſimul cum eo quod reſultat ex plano G C in C B planum. Ductis enim infinitis parallelis G B, erunt ſemper quadrata G D æqualia quadratis G A vnà cum rectangulis G C B. itaque per 46. huius patet propoſitum.

PROPOSITIO CLXXXIX.

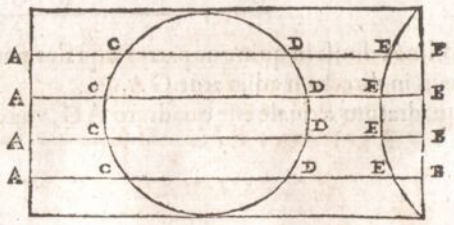
Sexageſima prima eiuſdem libri.

A C D E B

SEcentur A B in quotuis partes vtcunque C, D, E, &c.

Dico quadrata A C, C D, D E, E B ſimul cum rectangulis A C B, C D B, D E B bis ſumptis, æquari quadrato A B.

APPLICATIO DOCTRINÆ DE DVCTIBVS.



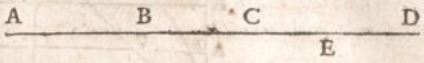
PArallelogrammo A B inſcribatur C D circulus, & ponatur quiuis arcus E E ſubtenſus à recta B B.

Dico ſolida ex multiplicatione ſingulorum planorum A C, C D, D E, E B in ſe, ſimul cum illis quæ emergunt ex ductu A C in C B, & C D in D B, ac D E in E B bis ſumptis, æquari parallelepipedo quod gignitur ex parallelogrammo A B ducto in ſeipſum. Ductis enim parallelis infinitis

nitis ACDEB, ſemper quadrata AC,CD,DE,EB vnà cum rectangulis ACB,CDB,DEB, bis ſumptis æquantur quadratis AB. vnde res patet ex 46.huius.

PROPOSITIO CXC.

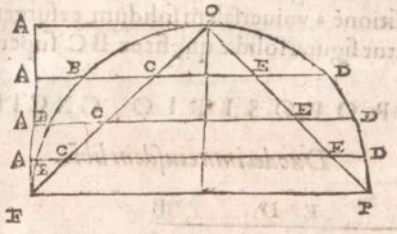
Vndecima libri progreſſionum Geometricarum.



SInt AB, AC, AD in continua analogia, & minori differentiæ BC fiat æqualis DE.

Dico CE, CD, AD eſſe etiam in analogia continua.

APPLICATIO.



SIt ſemicirculus BB, DD eiuſque diameter FP, ductiſq; FO, PO quæ bifariam ſecent peripheriam ſemicirculi, ponantur tangentes OA, FA.

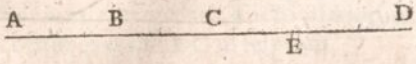
Dico planum CE ductum in planum AD æquari plano CD ducto in ſeipſum.

Ducantur enim infinitæ ABCED parallelæ ad FP. patet ED æquales eſſe BC. Quare cùm AB, AC, AD ſemper [a] ſint continuæ, etiam CE, CD, AD [b] erunt continuæ. ergo per 45. huius patet propoſitum.

[a] Ex elementis.
[b] 9. Progreſſ.

PROPOSITIO CXCI.

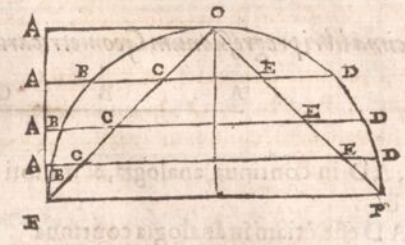
Nona eiuſdem libri.



SInt in continua analogia AB, AC, AD, & minori differentiæ BC æqualis ſit ED.

Dico minimam AB & minorem differentiam eſſe proportionales.

APPLICATIO.



REpetatur præcedentis figura: quoniam AB, AC, AD ſunt in continua, & ED æquales ſunt BC, rectę AB, BC, CF. ſunt in continuata proportione; igitur rectangulum ſub AB & CE æquatur BC quadrato. Vnde per propoſitionē [a] vniuerſalem ſolidum exſurgens ex plani AB in CE ductu, æquatur figuræ ſolidæ quę fit ex BC ſuperficie in ſe ducta.

[a] 45. huius.

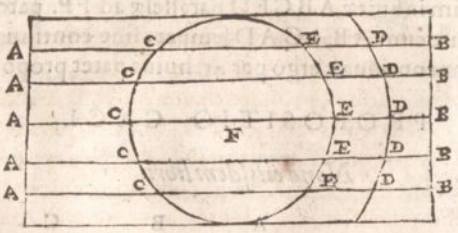
PROPOSITIO CXCII.

Duodecima eiuſdem libri.

A C E D B

DEntur tres magnitudines AB, BC, CD in continua analogia, ita vt BC ſit maior AC & fiat rectæ AC æqualis BE.
Dico AB, BE, ED eſſe proportionales.

APPLICATIO.



PArallelogrammo AB circulus concentricus inſcribatur CE, ductiſq; infinitis ACED parallelis, fiant rectangulis EBC æqualia rectangula ABD: erit itaque DD [b] parabola: & vt BD ad BE, ita BC ad BA; igitur permutando BD ad BC vt BE ad BA. vnde diuidendo BD ad DC, vt BE ad EA. Igitur & BD ad BE, vt DC ad EA. ſed quia vt BD ad

[b] *Colligitur ex 20. & 32. parab.*

BD ad BE; ita quoque est BC ad BA, hinc vt BC ad BA, ita DC ad EA, ergo alternando BA ad BC, vt EA, hoc est BC, ad DC: sunt itaque tres proportionales AB, BC, CD. estque AC æqualis EB ex constructione. nam centrum F commune est & parallelogrammo AB & CE circulo per propositionem duodecimam libri de progressionibus Geometricis, etiam AB, BE, ED proportionales sunt. Omnia igitur rectangula ABED æquantur quadratis BE. Igitur per [a] propositionem vniuersalem planum AB ductum in ED, solidum format quod corpori æquatur ex ductu plani BE in seipsum ducto. [a] 45. huius.

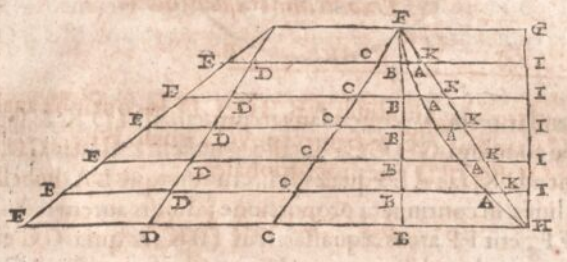
PROPOSITIO CXCIII.

Decimatertia eiusdem libri.

A B C D E

PONantur AB, BC, CD tres lineæ in continua proportione, & fiat BC æqualis DE.
Dico AE, EC, CD esse in continua analogia.

APPLICATIO.



SIt FAA parabola cuius axis FG & contingens FB, ductàque FH ponatur GH quæ æquidistet FB, conueniens cum FK in H communi intersectione: erunt itaque [b] proportionales lineæ BA, BK, BI. Vnde si fiant rectæ BC, CD æquales rectis BK, BI, erunt similiter proportionales AB, BC, CD: denique si ponantur DE quę sint æquales BC, erunt per 13. progress. semper AE, EC, CD in continua analogia, quocirca per propositionem [c] vniuersalem erit solidum emergens ex ductu planorum AE in CD, æquale corpori quod oritur ex ductu EC in seipsum. [b] 67. parab. [c] 45. huius.

PROPOSITIO CXCIV.

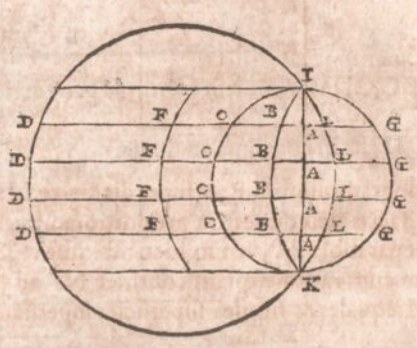
Decimaquinta eiusdem libri.

G A B C D
F

SInt proportionales AB, AC, AD, & linea composita ex vtraque differentia BC, CD diuidatur bifariam in F ac mediæ proportionali AC æqualis sit producta AG.

Dico FC, FB, FG in continuata esse proportione.

APPLICATIO.



SVbtendat recta AA quendam arcum circuli IDK & super IK describe circulum GG, CC: ductisq; parallelis infinitis GD, quæ normales sint ad IK, fac AB æquales AL. erunt itaque LA (hoc est AB) AC, AD tres lineæ in continuata proportione: diuisis autem rectis BD bifariam in FF, erit FF arcus æqualis arcui IBK: & quia GC circulus est, hinc GA normales ad diametrum IK æquales sunt rectis AC. Ergo per 15. progress. FG, FB, FC sunt semper in continua. Quare solidum quod fit ex ductu FB in seipsum, æquatur solido quod gignitur ex planis FC, FG inter se multiplicatis.

PROPOSITIO CXCV.

Quadragesima secunda eiusdem libri.

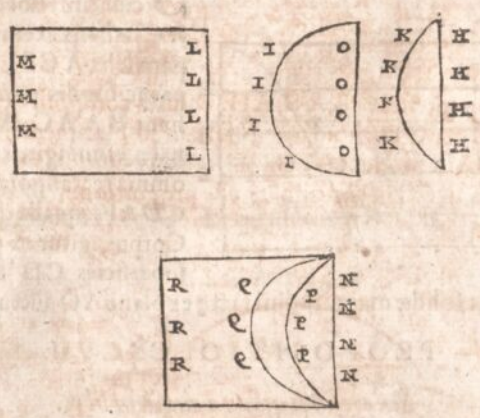
A B C D
K E G

SInt AB, BC, CD in continua analogia; deinde secetur quæpiam linea GF in E vt FE ad EG, eandem habeat rationem quam AB ad BC.

Dico rectangulum BCFG æquale esse duobus ABEG & CDFE rectangulis.

AP-

APPLICATIO.

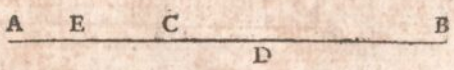


PONatur parallelogrammum NR, & ſuper diametro NN circulus deſcribatur NQ: factis deinde tertijs proportionalibus NP ad rectas NR, NQ, exſurget parabola PP, vt ſuo loco oſtenſum [a] eſt, eritque ratio PQ ad QR, eadem cum ratione quam continet NP ad NQ. ſunt itaque HK, OI, LM æquales & ſimiles ſuperficies ſuperficiebus NP, NQ, NR. [a] 2199 Pa. rati.

Dico igitur ex ſenſu propoſitionis vniuerſalis 45. huius planum PR ductum in ſuperficiem circularem OI æquale ſolidum proferre magnitudini emergenti ex baſi PQ in altitudinem LM, ſimul cum magnitudine orta ex plano HK in QR planum.

PROPOSITIO CXCVI.

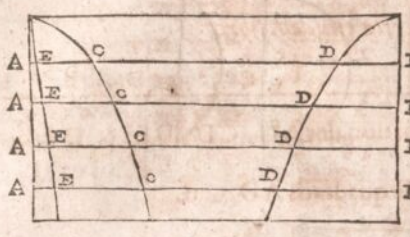
Sexageſimaquinta eiuſdem libri.



CONtinuæ proportionales ſint AB, AC, AE; & ex BC ſumi poſſit BD æqualis AC.

Dico rectangulum ſub BA & CD, AE tamquam vnâ lineâ conſtructum æquari quadrato AD.

APPLICATIO.



SIt parallelogrammum AB, cui inſcribatur parabola AC habens axem AA, ductiſq; parallelis ACB, ponatur BD par ac ſimilis parabolæ AC, & fiant BA, AC, AE proportionales; erunt igitur per 64. progr. omnia rectangula ſuper AB, & CDAE, æqualia quadratis AD. Corpus igitur ex plano BA in ſuperficies CD & AE geni-

a 45. huius. tum,[a] æquatur ſolidæ magnitudini factę ex plani AD ductu in ſeipſum.

PROPOSITIO CXCVII.

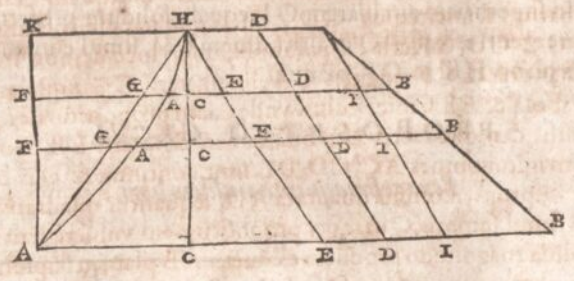
Sexageſima quarta eiuſdem libri.

A C E D B

SInt tres lineæ in continua analogia AB, BC, CD: & diuidatur CD bifariam in E.

Dico quadratum AE æquari quadratis AC, EB.

APPLICATIO.



b 67. paral. REctangulis FC cuius diagonalis GG inſcribatur parabola AA cuius ſit axis HK. ductis igitur parallelis FC, erunt tres lineæ CA, CG, [b] CF proportionales. fiant autem CE, EI æquales rectis CG, CF, erunt itaque AC, CE, EI, proportionales. fiant inſuper rectæ IB æquales CE. Igitur per propoſitionem decimamtertiam libri de progreſſionibus Geometricis erunt proportionales AB, BE, EI. quod ſi verò diuidantur bifariam rectæ EI, erunt DD ad lineam rectam, vt patet ex elementis. Itaque per 64. progreſſ. omnia quadrata AD æquantur quadratis AE, DB ſimul ſumptis.

c 45. huius. Dico ſolidum ergo ex ductu ſuperficiei AD in ſeipſam æquari [c] magnitudini-

gnitudinibus ſolidis quæ reſultant ex ductu plani AE in ſeipſum ſimul cum eo quod fit ex ductu ſuperficiei DB, in ſeipſam.

PROPOSITIO CXCVIII.

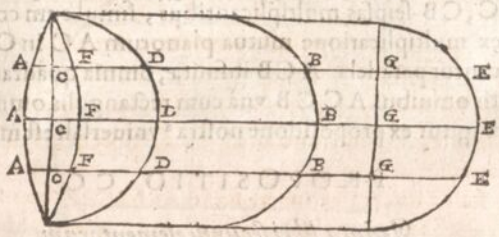
Sexageſima tertia eiuſdem libri.

A C D B E

DAtæ ſint tres continuæ proportionales AC, CD, DE: & DE biſecta ſit in B.

Dico quadratum AB æquale eſſe quadratis AD, CB.

APPLICATIO.



REctangulo CG, ſuper eius CC latere tamquam diametro inſcribatur ſemicirculus CD, ductiſque parallelis, fiant proportionales GC, CD, CF, erit FF parabola, vt ſuo loco demonſtratum[a] eſt; igitur ſi fiant rectis CF æquales CA, lineis verò CG æquales DE, erit AA parabola & EE ſemicirculus. vnde etiam proportionales AE, CD, DE. diuiſis denique rectis DE bifariam in BB, erit BB ſemicirculus. Quoniam igitur omnes AC, CD, DE ſunt continuæ & DE biſecantur in B per 63. progreſſ. omnia quadrata AD, æquantur quadratis omnibus AD, CB ſimul ſumptis. Quare per propoſitionem vniuerſalem ſæpiùs citatam, ſolida magnitudo producta ex ductu AB plani in ſeipſum, æquatur ſolidis quę emergunt ex ſuperficie AD in ſe ducta, ſimul cum eo quod fit à plano CB in ſeipſum ducto.

[a] 399. parab.

PROPOSITIO CXCIX.

Quarta ſecundi elementorum.

A C B

SI recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum quod à tota deſcribitur æquale eſt quadratis quę à partibus deſcribuntur, & ei quod bis ſub partibus comprehenditur rectangulo.

APPLI-

APPLICATIO.



PONatur parallelogrammum AB, cui inſcripta ſit quæuis linea CC.

Dico parallelogrammum AB multiplicans ſeipſum, conficere ſolidam magnitudinem parallelepipedam æqualē ſolidis quæ fiunt ex ſuperficiebus AC, CB ſeipſas multiplicantibus, ſimul cum corporibus quæ exſurgunt ex multiplicatione mutua planorum AC in CB bis ſumpta. Nam ſi ducantur parallelæ ACB infinitæ, omnia quadrata AB, æquantur quadratis omnibus AC, CB vnà cum rectangulis omnibus ACB bis ſumptis. res igitur ex propoſitione noſtra [a] vniuerſali eſt manifeſta.

[a] 45. huius.

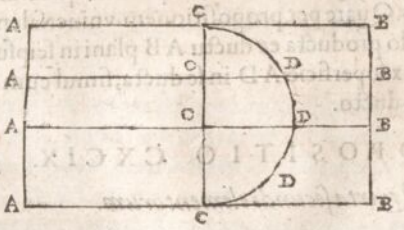
PROPOSITIO CC.

Quinta libri ſecundi elementorum.

A C D B

SI recta ſecetur in æqualia & non æqualia, rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quod à dimidia deſcribitur quadrato.

APPLICATIO.



REctangulum AB diuidat recta CC bifariam æquidiſtans AA & ſemicirculus ponatur CD.

Dico planum AD multiplicans, DB formare ſolidam magnitudinem vnà cum corpore quod gignit CD ſeipſum multiplicans, æqualem quantitati

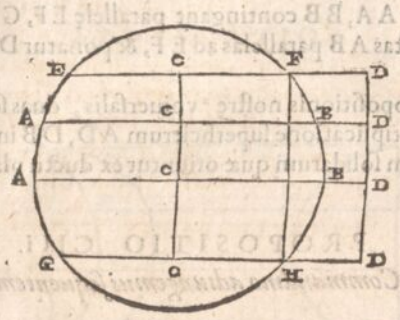
titati quæ fit ex C B ſuperficie ducta in ſeipſam. Ductis enim A C D B parallelis more ſolito, erunt omnia rectangula A D B vnà cum quadratis C D æqualia quadratis C B. Ergo ex prop. 46. vniuerſali liquet propoſitum.

PROPOSITIO CCI.

Sexta ſecundi elementorum.

SI recta linea bifariam ſecetur & illi recta quædam linea in rectum adijciatur. Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, vnà cum quadrato quod fit à dimidia æquale eſt quadrato à linea quæ tum ex dimidia tum ex adiecta componitur tanquam ab vna deſcripto.

APPLICATIO.



CIrculum A B ſecent duæ æquidiſtantes E F, G H, ad quas per centrum agatur orthogona C C, cui ſtatuatur quæuis æquidiſtans D D. Dico ſolidæ magnitudini quæ fit ex multiplicatione ſuperficiei A D in in planum D B, vnà cum quantitate quam producit C B ſeipſum multiplicans, æquari corpori orto ex ductu C D in ſeipſum. Ducantur enim parallelæ quotcunque A C B D: liquet omnes A B biſecari in C, adiectaſque ſingulis eſſe rectas B D. Omnia igitur rectangula A D B cum quadratis C B æquantur quadratis C D. Quare ex propoſ. [a] vniuerſali patet propoſitum. [a] 46. huius.

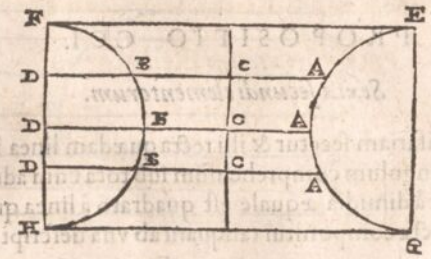
PROPOSITIO CCII.

Decima libri ſecundi elementorum.

A C B D

SI recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectam quępiam linea recta: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata duplicia ſunt eius, quod à dimidia & eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta tanquam ab vna deſcriptum ſit quadrati.

APPLICATIO.



SEmicirculos A A, B B contingant parallelę E F, G H; & C C diuidat bifariam rectas A B parallelas ad E F, & ponatur D D diameter ſemicirculi B B.

Dico ex vi propoſitionis noſtrę [a] vniuerſalis, duas ſolidas magnitudines factas ex multiplicatione ſuperficierum A D, D B in ſeipſas duplas eſſe magnitudinum ſolidarum quæ oriuntur ex ductu planorum A C, C D in ſeipſa.

[a] 46. huius.

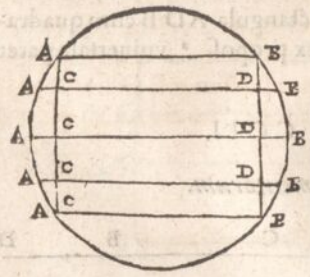
PROPOSITIO CIII.

Ex Federico Commandino adiungemus ſequentem propoſitionem.

A C B

SI recta linea in partes inæquales ſecetur: earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ qua maior pars ſuperat minorem.

APPLICATIO.



CIrculo A B inſcribatur rectangulum C D.

Dico ſolidas magnitudines, quæ reſultant ex ductu ſuperficierum A C, B C in ſeipſas, æquari magnitudinibus quæ proferuntur ex multiplicatione planorum A C in C B bis ſumpta, vnà cum parallelepipedo quod fit ex multiplicatione C D parallelogrammi in ſeipſum. Ducantur enim quotcunque A C D B parallelę; patet A C æquales eſſe D B, adeoq; C D differentias eſſe partium A C, C B; ſemper igitur quadrata A C, C B æquantur rectangulis A C B bis ſumptis vnà cum quadratis C D iuxta Commandini propoſ. iam allatam. Vnde per [b] vniuerſalem noſtrã patet propoſitũ.

[b] 46. huius.

Quia

Quia verò propoſitiones multæ ex ijs quas Pappus Alexandrinus poſteris reliquit, noſtro inſtituto non parum inſeruiunt, hinc etiam nonnullas ex illis ſecernere placuit, quas libro ſeptimo collectionum ſuarum inſeruit, vt doctrinæ ductuum Geometricorum eas aptaremus.

PROPOSITIO CCIV.

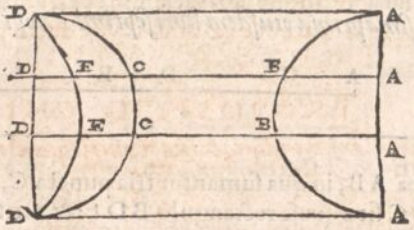
Vigeſimatertia libri ſeptimi Pappi Alexandrini.

A B C E D

SIt recta linea AB æqualis CD, & in ipſa CD ſumatur quoduis punctum E.

Dico rectangulum ACD æquale eſſe rectangulo AED & rectangulo BEC.

APPLICATIO.



POnatur rectangulum AB, ſuperq; eius lateribus AA, DD ſemicirculi deſcribantur AB, CD: & ſemicirculum DC ſecet EE.

Dico quantitatem ſolidam quæ fit ex ſuperficie AC in CD ducta, æquari ſolidæ magnitudini ex plano quæ emergit ex planis AE, ED ſe mutuo multiplicantibus & ſolido quod naſcitur ex ductu plani BE in EC. Ductis enim parallelis infinitis ADCED, erunt omnes AB, CD æquales. Ergo iuxta Pappi demonſtrationem omnia rectangula ACD æquantur rectangulis AED, BEC. Ergo ex vniuerſali[a] noſtra liquet propoſitum.

[a] 45. huius.

PROPOSITIO CCV.

Vigeſima quarta libri ſeptimi Pappi Alexandrini.

A B C D E

IIſdem poſitis: ſit punctum E extra lineam AD.

Dico rectangulum BEC rectangulo AED & rectangulo BDC æquale eſſe.

APPLICATIO.

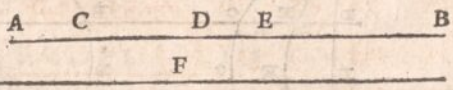


MAnente itaque rectangulo AD & circulis AB, CD, linea EEE ponatur extra circulum CD.

Dico rursus solidam magnitudinem quam exhibent superficies BE, EC inuicem multiplicantes, æqualem esse solidis quę resultant ex planis AE, ED in se mutuo ductis, vnà cum BD multiplicante DC.

PROPOSITIO CCVI.

Quadragesimaprima eiusdem libri septimi Pappi Alexandrini.



SIt recta linea AB, in qua sumantur tria puncta C, D, E, ita vt rectangulum ADC sit æquale rectangulo BDE: & vtrisque AEC B æqualis ponatur recta linea F.

Dico rectangulum quidem FAD rectangulo BAE æquale esse: rectangulum autem FCD æquale rectangulo BCE: rectangulum verò FBD rectangulo ABC, & rectangulum FED rectangulo AEC æquale.

APPLICATIO.

REctangulo AD inscribatur parabola DC, ad cuius axem recta DD sit ordinatim posita, assumatur deinde circulus BB, cuius aliquem arcum KK id est EE subtendat DD recta; erunt igitur rectangulis HDG æqualia rectangula EDB.

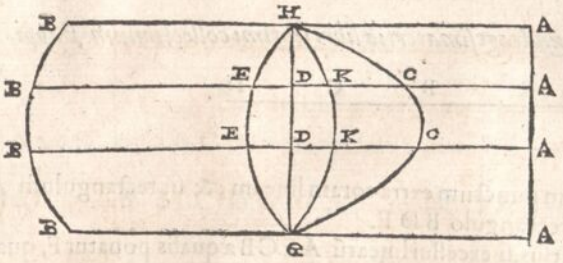
Dico ex mente propositionis vniuersalis, sequentes æquationes contingere.

Primò corpus ex basi AD in altitudinem F, hoc est in plana AE, CB ducta resultans, æquari magnitudini ex plano BA multiplicante AE:

Secundò solidum ex basi CD, & altitudine F, hoc est planis AE, CB, æquari solidum ex BC, CE planis se mutuo multiplicantibus.

Tertiò magnitudinem ortam ex basi BD in altitudinem F, hoc est in plana AE, CB, æqualem esse solido quod conflatur ex ductu mutuo superficierum AB & BC.

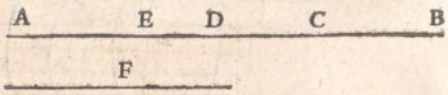
Tertiò



Quartò tandem quantitatem ſolidam conſtantem baſi E D, & F altitudine, hoc eſt planis A E, C B æquari magnitudini quę fit ex duabus ſuperficiebus A E, E C ſeſe mutuo multiplicantibus.

PROPOSITIO CCVII.

Quadrageſima ſecunda libri ſeptimi collectionum Pappi Alexandrini.



SIt rectangulum A D C æquale rectangulo B D E, & vtriſque A E, C B æqualis ponatur recta linea F.

Dico rurſus quatuor fieri æquationes: videlicet rectangulum quidem F A D æquale rectangulo B A E; rectangulum verò F C D rectangulo B C E æquale; rectangulumque F B D rectangulo A B C; & rectangulum F E D rectangulo A E C.

APPLICATIO.

POnantur eædem ſuperficies quæ priùs: ſed ita vt rectangulo A D C æquale ſit E D B rectangulum.

Dico iterum quatuor æquationes contingere.

Primò inter corpus ex baſi A D & planis A E, C B cum eo quod fit ex ductu mutuo planorum B A, A E.

Secundò inter magnitudinem ſub baſi C D & A E, C B ſuperficiebus cum corpore genito ex plano B C multiplicante C E.

Tertiò inter ſolidum baſeos B D & planorum A E, C B, cum magnitudine quam exhibet multiplicatio planorum A B & B C in ſe inuicem.

Quartò inter quantitatem ſub baſi E D & planis A E, C B cum magnitudine ſolida ex A E plano multiplicante E C.

PROPOSITIO CCVIII.

Quadrageſimatertia libri ſeptimi collectionum Pappi.

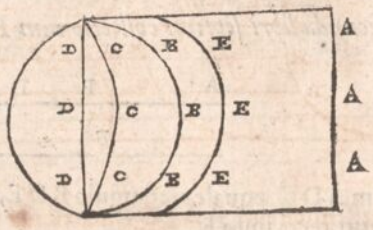
A E B C D

F

Sit autem punctum extra totam lineam, & ſit rectangulum A D C æquale rectangulo B D E.

Dico rurſus, ſi exceſſui linearũ A E C B æqualis ponatur F, quatuor fieri: videlicet rectangulum quidem F A D æquale rectangulo B A E; rectangulum verò F C D æquale rectangulo B C E; rectangulumq; F B D rectangulo A B C; & rectangulum F D E rectangulo A E C.

APPLICATIO.



Diſponantur ſuperficies præcedentis figuræ vt rectangulis A D C æqualia ſint E D B rectangula.

Dico iterum quatuor formandas æquationes.

Primò, magnitudinem ex plano A D in F, hoc eſt in A E, C B quæ ſunt differentiæ ſuperficierum, æqualem exiſtere corpori quod reſultat ex B A multiplicante A E.

Secundò, ſolidum ex C D in A E, C B quæ ſunt differentiæ planorum, emergens, æquari quantitati quæ oritur ex ductu mutuo planorum B C, C E.

Tertiò, quantitatem ſolidam ex B D ducto in A E, C B, quæ ſunt differentiæ, æqualem eſſe illi magnitudini quæ fit ex multiplicatione mutua planorum A B, B C.

Quartò tandem quod gignitur ex plano D E in A E, C B differentiam ſuperficierum æquari ſolidæ magnitudini quę reſultat ex A E plano multiplicante planum E C.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [891] - 834
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CCIX.

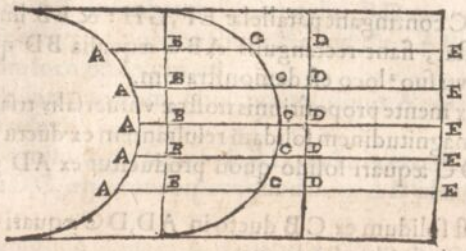
Sexageſimatertia libri ſeptimi collectionum Pappi.

A B C D E

SIt A B quidem æqualis C D: rectangulum autem B E C rectangulo A B D maius.

Dico rectangulum B E C ſuperare rectangulum A E D ipſo B D C rectangulo.

APPLICATIO.



CONſtituantur ſemicirculi A A, C C paralleli, & ſint A B æquales C D, & rectangulum B E C maius A B D rectangulo.

Dico per propoſitionem noſtram vniuerſalem a ſolidam magnitudinẽ ex plano B E multiplicante E C, æquari ſolidis quæ fiunt ex ductu A E plani in E D, & illi quod oritur ex A B multiplicante B D. a 46. huius.

PROPOSITIO CCX.

Centeſima quadrageſima nona eiuſdem libri.

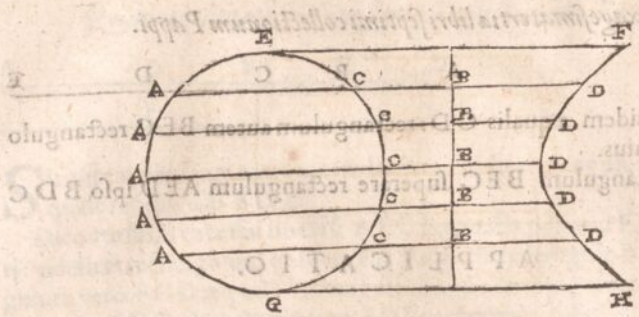
A C B D

SIt rectangulum A B C æquale quadrato B D.

Dico tria contingere; videlicet rectangulum quidem quod vtraque A D, D C & B D continetur, æquale eſſe rectangulo A D C, rectangulum verò contentum vtraque A D, D C & C B æquale eſſe quadrato D C; & rectangulum contentum vtraque A D, D C & A B, quadrato A D æquale.

A P-

APPLICATIO.



CIrculum AC contingant parallelæ EF, GH: & BB linea normaliter illis insistat, fiant rectangulis ABC æqualia BD quadrata, erit DD hyperbola vti suo [a] loco est demonstratum. a 214. Hyperbol.

Dico igitur ex mente propositionis nostræ vniuersalis tria contingere.

Primum est magnitudinem solidam resultantem ex ductu plani BD in plana AD & DC æquari solido quod producitur ex AD plano ducto in DC.

Secundum est solidum ex CB ducto in AD, DC æquari magnitudini quæ fit ex DC seipsum multiplicante.

Tertium denique quod fit ex AB in AD, DC superficies, æquari quantitati solidæ ex AD se multiplicante.

PROPOSITIO CCXI.

Centesima quinquagesima prima eiusdem libri septimi collectionum.

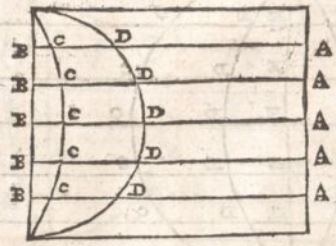
A D C B

SIt rectangulum ABC æquale quadrato ex BD.

Dico tria contingere, videlicet rectangulum quod excessu ipsarum AD, DC & BD continetur æquale esse rectangulo ADC; rectangulum verò contentum excessu ipsarum AD, DC & CB, æquale esse quadrato ex DC: & rectangulum contentum excessu AD, DC, & BA æquale esse quadrato ex AD.

AP-

APPLICATIO.



REctangulo AB inſcribatur ſemicirculus BD cuius diameter BB, poſitiſque tertijs proportionalibus BC ad duas AB, BD; erit CC parabola, vt ſuo loco oſtenſum eſt.

Dico igitur iuxta ſenſum huius propoſitionis & noſtræ vniuerſalis, tres æquationes fieri.

Prima, magnitudo ex ſuperficie BD ducta in exceſſum quo AD ſuperat planum DC, æquatur corpori, quod fit ex AD plano multiplicante DC.

Altera, magnitudo ſolida ex CB plano ducta in differentiam ſuperficierum AD, DC, æqualis eſt ſolido, quod emergit ex ductu DC in ſeipſum.

Tertia denique, ſolidum ex plano BA multiplicante exceſſum planorum AD, DC æquatur corpori, quod reſultat ex AD ſuperficie ſeipſam multiplicante.

PROPOSITIO CCXII.

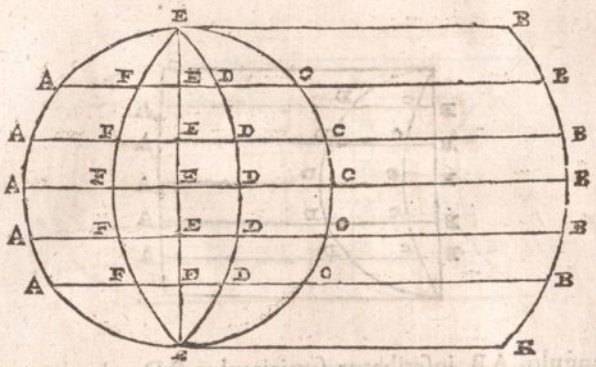
Centeſima ſexageſima libri ſeptimi collectionum Pappi.

A E D C B

SIt vt AB ad BC ita AD ad DC, & AC bifariam in puncto E ſecetur.

Dico tria contingere, videlicet rectangulum quidem BED æquale eſſe quadrato ex EC; rectangulum verò BDE rectangulo ADC; & rectangulum ABC rectangulo EBD æquale eſſe.

APPLICATIO.



Circuli FB arcum FF ſubtendat recta EE, factis deinde ED æqualibus FE, deſcribatur circulus CA ſuper EF diametro. itaque ſunt in continuata proportione ED, EC, EB: & quia EC æquales ſunt EA, erunt a AB rectę diuiſę in A, D, C ſecundùm extremam & mediam rationem proportionalem: vnde erit AB ad BC vt AD ad DC.

a 4. Delineic.

Dico igitur tres rurſus æquationes exſurgere.

Prima eſt, magnitudo ex plano BE multiplicante ED, æquale corpus efficit illi, quod fit ex EC ſeipſum multiplicante.

Secunda, magnitudo ex DE baſi, in altitudinem DB, æqualis eſt ſolido, quod oritur ex AD plano ducto in DC ſuperficiem.

Tertia verò, corpus ex AB, BC planis in ſe mutuo multiplicatis, æquatur magnitudini, quę reſultat ex ſuperficie EB multiplicante planum DB.

PROPOSITIO CCXIII.

Centeſima ſeptuageſima octaua libri ſeptimi collectionum Pappi Alexandrini.

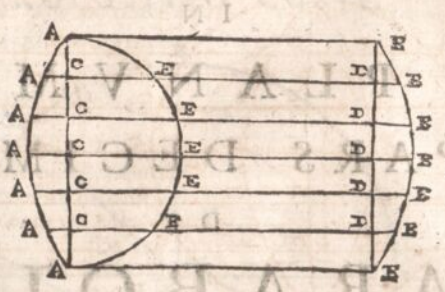
A C E D B

Sit recta linea AB, & æquales ſint ACDB, & inter CD ſumatur quoduis punctum E.

Dico rectangulum ADB vnà cum rectangulo CED æquale eſſe rectangulo AEB.

APPLI-

APPLICATIO.



CIrculo AB inſcriptum ſit rectangulum CD, & ſuper diametro CC circulus EE deſcribatur.

Dico magnitudinem ſolidam ex ductu plani AD in planum DB, vnà cum ſolida magnitudine ex plano CE in ED, æquari ſolidæ quantitati quæ gignitur ex AE, plano multiplicante EB, ſecundùm mentem propoſitionis noſtræ vniuerſalis.

PROPOSITIO CCXIII.

Centeſima ſeptuageſimanona eiuſdem libri Pappi.

A C E D B

SIt recta linea AB, & æquales ſint ACDB: & inter CD quoduis punctum E ſumatur.

Dico rectangulum AEB æquale eſſe rectangulo CED & rectangulo DAC.

APPLICATIO.

EAdem remanente figurâ:

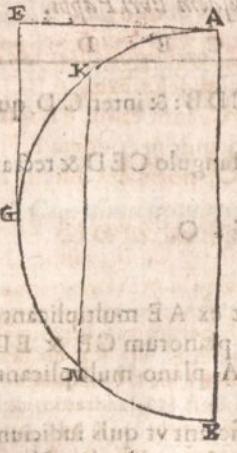
Dico ſolidam magnitudinem quę fit ex AE multiplicante EB, æquari corporibus quæ formantur ex ductu planorum CE & ED in ſe mutuo, ſimul cum corpore quod fit ex DA plano multiplicante planum AC.

Pluribus ſuperſedeo, cùm hæc abundè ſufficiant vt quis iudicium formet quam methodum obſeruare debeat vt doctrina, quæ hoc libro expoſita eſt, vtatur. minutulus nonnihil etiam contra mentem fui, in gratiam maximè eorum qui hæc fieri requirebant.

DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS DECIMA DE PARABOLIS VIRTVALIBVS.

ARGVMENTVM.

QVoniam libro in sequenti cubaturas Cylindri eiusque variarum partium aggredi intendimus, tempus exigit vt eas præparationes præmittamus quæ inseruiant ad id præstandum quod instituti talis ratio postulat. & quia Cylindrus sub altitudine A B, *& basi semicirculari* A G B *iam ad corpus reductus est ipsi æquale, quod gignitur ex parabola in se subalternè ducta, restat vt idipsum conemur præstare de Cylindri parte quæ basi constet* K G N, *& altitudine* A B, *exhibendo scilicet aliquod solidum quod ipsi æquetur. Deinde idipsum quoque perficiamus de corpore quod basim quidem complectatur figuram* A E G *quæ constat quadrante circuli* A G *& duabus contingentibus* A E, E G, *altitudinem verò* A B, *& nonnullis alijs his similibus; quorum problematum solutionem per parabolas quoque expedire conati sumus: quæ licet ex vi suæ constructionis non videantur sectionis parabolicæ figuram exprimere, nihilominus certa ratione reductæ perhibentur partes esse verissimarũ parabolarum, quæ proinde virtuales appellamus, eò quod virtute contineant proprietates omnes quæ in veris parabolis demonstrantur.*

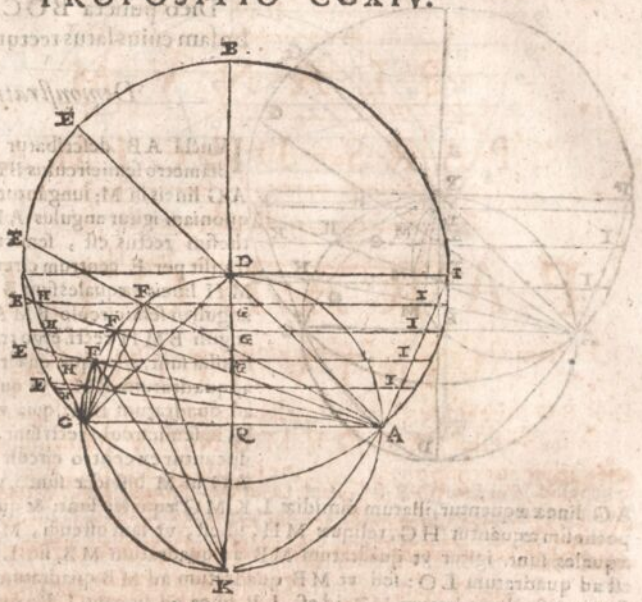


DEFINITIO.

PArabolam virtualem voco, cuius ordinatim applicatæ, si ad rectam lineam ponantur, aut à rectâ lineâ diuidantur bifariam veram producunt parabolam. Porrò illam pleræq; virtuales primariam habẽt proprietatem

tatem, vt linea biſecans ordinatim in illis applicatas, vera ſit parabola, ſed inuerſa.

PROPOSITIO CCXIV.



REctæ AC, DK, diametri circuli ADC, orthogonaliter ſeſe decuſſent: centroq; D, interuallo DA, circulus deſcribatur ABC, & ex A rectæ ponantur quotuis AFE ſiue AF, FC, ſunt enim FE ipſis FC, æquales, vt demonſtrat Serenus l. 2. prop. 43. deinde per puncta F, F, rectæ ponantur IH, æquales lineis AE ſiue AFC, normales autem ad diametrum DK, à qua bifariam ſecentur in G.

Dico puncta HIK eſſe ad parabolam, cuius axis eſt DK.

Demonſtratio.

DVcantur lineæ FK, quoniam circulus ABC habet centrum in perimetro circuli ADC, quadratum AE eſt ad quadratum AE, vt[a] FK quadratum ad quadratum FK, ſed vt FK quadratum ad quadratum FK, ſic KG linea eſt ad lineam KG; quadratum igitur AE eſt ad quadratum AE, id eſt HI quadratum eſt ad quadratum HI vt KG linea eſt ad lineam KG: puncta igitur HIK ad[b] parabolam ſunt: & quia KD ad rectos decuſſat lineas HI, recta KD axis eſt parabolæ HIK. Quod erat demonſtrandum.

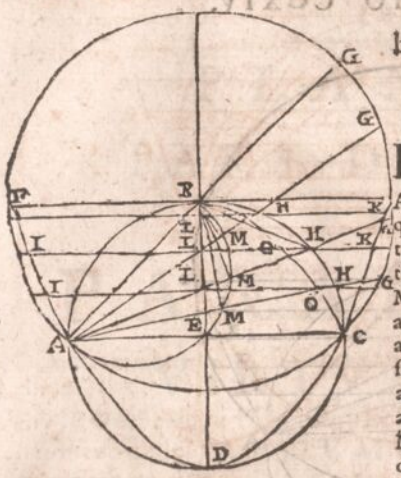
[a] 23. *circul.*

[b] 1. *parab.*

PROPOSITIO CCXV.

INſiſtant denuo ſibi inuicem ad rectos, diametri AC, BD circuli ABC: cuius centrum E, centroque B, interuallo BA circulus deſcribatur AFG; & ex A rectæ ponantur AHG, ſiue AH, HC, ſunt enim HC ipſis HG æquales, vt demonſtrat Serenus l. 2. prop. 43. Deinde per puncta

H, rectæ ponantur IK æquales AG siue AHC, normales autem ad BD, à qua bifariam secentur in LL : fiant deinde lineæ KO æquales lineis GH, siue HC.



Dico puncta BOC esse ad parabolam cuius latus rectum est EC.

Demonstratio.

IVncta AB describatur super AB vt diametro semicirculus BMA, occurrens AG lineis in M; iunganturque MB, BH: quoniam igitur angulus AEB per hypothesim rectus est, semicirculus BMA transit per E centrum circuli ABC, & MH lineis[a] æquales sunt BM: sunt autem anguli in semicirculo BMA, adeoque & anguli BMH recti. ergo triangula BMH similia sunt, adeoque quadratum BM est ad quadratum BM, vt quadratum BH ad quadratum BH. quia verò anguli ad M, in semicirculo recti sunt, & MB rectæ ducuntur ex centro circuli AFG, rectæ AG in M bisectæ sunt : vnde cùm IK, AG lineæ æquentur, illarum dimidiæ LK, MG æquales sunt: & quia OK per hypothesim æquantur HG, reliquæ MH, id est, vt iam ostendi, MB reliquis LO æquales sunt. igitur vt quadratum MB ad quadratum MB, sic LO quadratum est ad quadratum LO: sed vt MB quadratum ad MB quadratum, sic HB quadratum est ad quadratum HB, id est LB linea ad lineam LB: quadratum igitur LO est ad quadratum LO vt BL linea ad lineam BL, parabola igitur est BOC, axem habens BE, ad quem ordinatim positæ sunt LO, EC. quia autem EC, æquatur BE, etiam EC lateri recto æqualis est. Quod erat demonstrandum.

a *Serm. l. 2. prop. 43.*

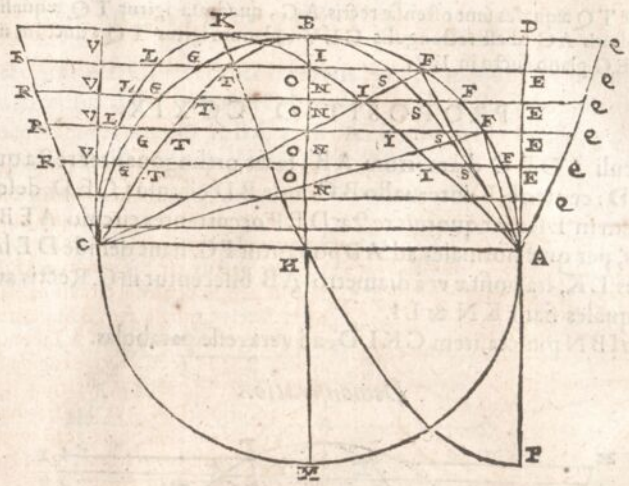
PROPOSITIO CCXVI.

REctæ AG, BM diametri circuli ABC decussent sese ad rectos in H; ponantur autem per A, B, C contingentes, & rectæ ducantur AG: occurrentes circuli perimetro in G punctis, per quę ponantur EI parallelæ AC & æquales lineis GC: lineæ verò EL æquales fiant rectis AG, EL.

Dico puncta IL ad parabolam esse virtualem.

Demon-

Demonſtratio.



PRoducantur vtrimque F G, æqualiter in Q & R, vt R Q totæ in N biſſecentur, & æquales ſint rectis A G, G C: erunt igitur puncta R Q ad veram [a] parabolam. auferantur deinde vtrimque lineæ R T, Q S, æquales G C vel A F; etiam puncta S, B, T per præcedentem, ad veram ſunt parabolam: deinde quia tota R Q æqualis eſt lineis A G, G C, & Q S æqualis G C, reliqua S R id eſt Q T, (quia S Q, T R æquales ſunt) reliquæ A G id eſt per hypotheſim E L æqualis eſt: ſed & E I, Q S æquales ſunt G C, adeoque & inter ſe; illis igitur ablatis, reliquæ I L, S T æquales ſunt, ſed S T, ad veram ſunt parabolam, igitur per definitionem huic parti præfixam, & I L ſunt ad vittualem: quod autem illius axis, vera ſit parabola ſic oſtendo: ſecentur L I lineę bifariam per lineam P H K, dico P H K veram eſſe parabolam cuius axis eſt E P. quoniam enim L I, S T lineę æquales ſunt, rectæ quoque I O, S N, æqualium dimidiæ æquantur. Quare ſi his addantur E I, Q S ſuprà oſtenſæ æquales, erunt totę E O, N Q æquales. cùm igitur rectę E O, poſitæ ſint ad rectam lineam D P, ſintque puncta Q ad veram parabolam, etiam puncta O O erunt ad veram parabolam. [a] 120. huius.

PROPOSITIO CCXVII.

IIſdem poſitis:

Dico planum Q S ductum in ſe, æquari plano E F, ducto in altitudinem A C.

Demonſtratio.

QVoniam S Q lineæ per conſtructionẽ æquantur lineis G C, id eſt lineæ A F, quadrata S Q æqualia ſunt quadratis A F, id eſt rectangulis F E V; planũ igitur S Q ductum in ſe [b] æquale eſt E F ducto in E V, ſiue in altitudinem A C. Quod erat demonſtrandum. [b] 45. huius.

PROPOSITIO CCXVIII.

IIſdem poſitis:

Dico E G planum ductum in E V, æquari plano T Q ducto in ſe.

Demon-

Demonſtratio.

REctæ T Q æquales ſunt oſtenſæ rectis A G, quadrata igitur T Q æqualia ſunt quadratis A G id eſt rectangulis G E V. planum igitur T Q a ductum in ſe æquatur E G plano ducto in E V.

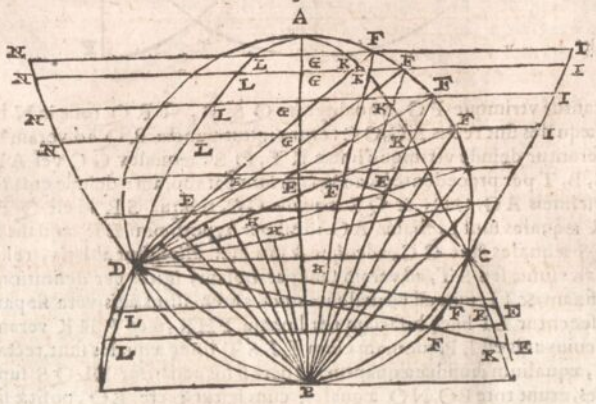
a 45. huius.

PROPOSITIO CCXIX.

CIrculi A D B C diametrum A B, ſecet orthogonaliter recta quæuis C D: centroq; B, interuallo B C, ſiue B D circulus C E D deſcribatur, quem in E ſecent quotuis rectæ D E F occurrentes circulo A E B in F punctis, per quæ normales ad A B ponantur F G. fiant deinde D E lineis, æquales L K, ita poſitæ vt à diametro A B biſecentur in G. Rectis autem D F, æquales fiant K N & L I.

Dico I B N puncta, item C K L D, ad veras eſſe parabolas.

Demonſtratio.



DVcantur rectæ B D, D A, A F. Quoniam angulus B D A rectus eſt, vtpote in ſemicirculo conſtitutus, eſtque B D ſemidiameter circuli C E D, linea D A tanget circulũ C E D, in D. Quare anguli inſiſtẽtes arcubus D E, æquantur b angulis A D F. arcus igitur D E ſimiles ſunt arcubus A F. Ergo ſubtenſæ D E ſubtenſis A F, adeoq; & quadrata D E quadratis A F proportionalia ſunt: ſed quadratum A F eſt ad quadratum A F vt c rectangulum B A G ad B A G, id eſt vt recta A G ad rectam A G. Ergo quadratum D E eſt ad quadratum D E, hoc eſt ex hypotheſi quadratum K L ad K L, hoc eſt K G eſt ad quadratum K G, vt A G ad A G; puncta igitur K ad veram ſunt parabolam. Idem eodem diſcurſu oſtendemus de punctis L.

b 32. tertij.

c Per elementa.

Quod autem puncta I I, N N etiam ad veram ſint parabolam, ſic demonſtro. Super B D deſcripto ſemicirculo ſecante B F in H, iungantur B H. Quoniam anguli B H D poſiti in ſemicirculo ſunt recti, etiam anguli B H F recti erunt, adeoque æquales. ſunt autem & anguli B F D in eodem facti ſegmento æquales. ergo triangula B F H ſimilia ſunt; ergo B F ad B F, vt H F ad H F. Deinde, quoniam rectę B H ex centro B circuli E E, normales ſunt ad D E, (anguli enim B H D ſunt in ſemicirculo) erunt D E biſectę in H. Quare cùm etiam K L ex hyp. biſectę ſint in G, ſintque æquales ipſis D E, erunt D H æquales L G. Atqui ex hyp. totæ D F æquantur totis L I. ergo reliquæ H F reliquis G I æquales. quia igitur iam oſtendi eſſe H F ad H F, vt B F ad B F, etiam G I eſt ad G I, vt B F ad B F, adeoque quadratum G I ad quadra-

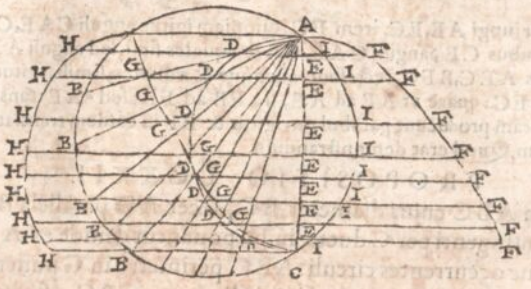
quadratum GI vt quadratum BF ad quadratum BF, hoc est vt recta BG ad rectam BG. Puncta igitur II sunt ad parabolam. idem eodem discursu ostendam de punctis NN; habemus ergo propositum.

PROPOSITIO CCXX.

CIrculum ABC, secet recta quæuis AC, super qua vt diametro semicirculus describatur ADC: dein ex A rectæ ponantur quæuis AB, occurrentes circulo ABC in B, & circulo ADC in D, per D normales ponantur EH, æquales rectis ADB.

Dico puncta HH ad parabolam esse virtualem.

Demonstratio.



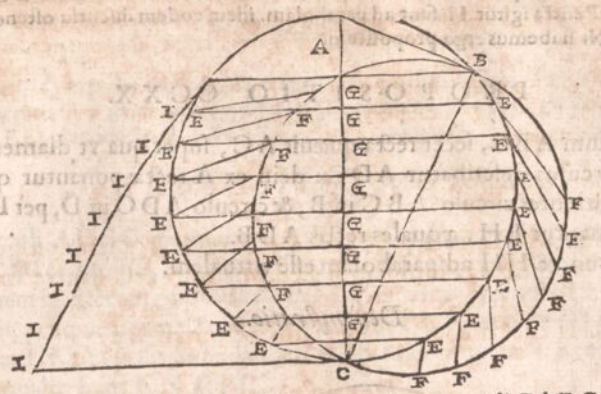
REctæ HE producantur in F, vt EF æquales sint AD, erunt per 300. libri de parabola, puncta FF, ad parabolam. Deinde rectis DB æquales sumantur EG: per 305. libri de parabol. puncta quoque G,G ad parabolam erunt. cùm igitur lineę AD, DB, id est ex hypothesi EH, veras producant parabolas, ex definitione patet H,H virtualem esse parabolam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCXXI.

CIrculum ABC secet recta quæuis BC, super qua descripto circulo BFC, ponantur ex B lineæ quotcunque BFE, occurrentes quidem circulo BFC in F, & ABC in E punctis; per quæ rectæ ponantur EGI normales ad AC diametrum circuli ABC, occurrentes eidem in G: fiant autem lineæ GI æquales lineis BF.

Dico puncta II ad veram esse parabolam.

Demonſtratio.



INtelligantur iungi AE, EC, item FC: quoniam igitur anguli CAE, CBE ijſdem inſiſtunt arcubus CE, anguli CAE, CBE æquales ſunt. ſed anguli AEC, BFC, in ſemicirculis AEC, BFC, recti ſunt, adeoque & æquales; ſimilia igitur ſunt triangula AEC, BFC: quare vt AE ad AE, ſic FB ad FB; ſed [a] AE translatę in normales GI, veram producunt parabolam; igitur & BF in eaſdem translatæ ad veram ſunt parabolam. Quod erat demonſtrandum.

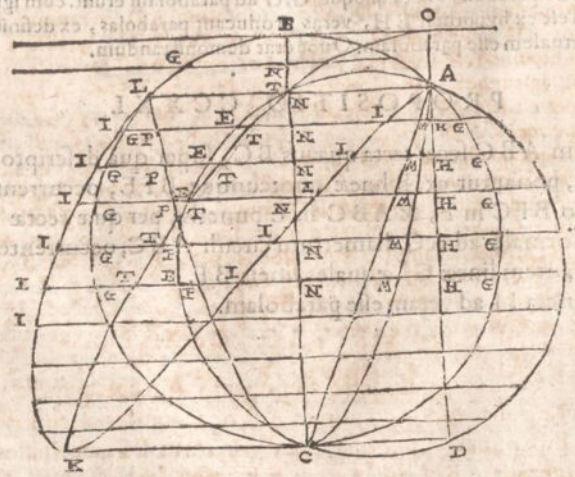
a *Per 300. lib. depar.*

PROPOSITIO CCXXII.

CIrculum ABC cuius diameter BC, ſecet AD parallela BC, occurrens contingenti per C ductæ in D: ponantur deinde ex A lineæ AG quotcumque occurrentes circuli ABC perimetro in G punctis, per quæ rectæ ponantur HGI, normales ad diametrum BC: fiantque HI lineæ æquales lineis AG.

Dico puncta II ad virtualem eſſe parabolam.

Demonſtratio.



IVncta AC deſcribatur ſuper AC vt diametro, circulus AEC, occurrens lineis AG in punctis E, E. quoniam igitur AD, parallela eſt diametro BC, & CD in C, circulum ABC contingit, recta AD normalis eſt ad CD, adeoque; circulus AEC tranſit [b] per D. Fiant deinde AE lineis, æquales HT, erunt puncta TT ad parabolam.

b *31. tertij.*

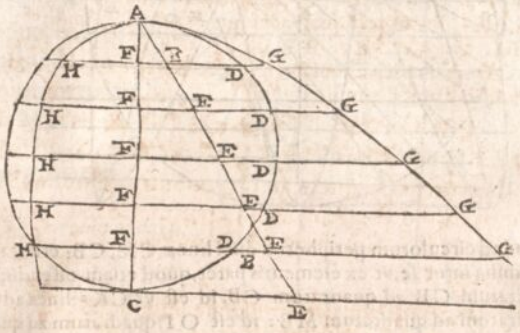
bolam. Fiant insuper lineis A, EG (id est lineis EG quę sunt partes linearum AG) æquales NM, NP. erunt rursum puncta MM, è PP ad parabolam. quia verò HI lineę æquales sunt AG; & HT ipsis AE æquales, rectæ TI æquales sunt rectis A, GE, id est ex constr. NM; ac proinde II rectæ, duplę ipsarum IT æquales sunt rectis MP, duplis MN: igitur cùm II lineæ translatę in MP, veram producant parabolam MP; erit II, parabola virtualis, cuius axis est linea TT, quam ostendimus supra veram esse parabolam.

PROPOSITIO CCXXIII.

Circulum ABC secet recta per centrum AC, & altera non per illud AE, & positis DF ordinatim ad diametrum AC fiant rectis AD, æquales lineæ D, EG, & D, EH.

Dico GH esse parabolam cuius latus rectum est AB.

Demonstratio.



QVandoquidem quadratum AD, est ad quadratum AD, in ratione AF lineæ ad lineam AP. Cùm sit FAC, rectangulum æquale AD, quadrato. quia verò ex elementis constat AF ad AP, eandem habere proportionem, quam habet linea AE ad AE. Igitur quam rationem habebit quadratum AD ad AD quadratum, eandem quoque recta AE habebit ad rectam AE: sunt autem EG æquales ex constructione rectis AD. Igitur quam proportionem habet recta AE ad AE, rectam, eandem quoque habebit EG quadratum, ad quadratum EG; est igitur GG, vel HH, parabola, quod verò recta AB, æqualis sit lateri recto eiusdem, sic cõstabit: recta AB est ex constructione lineæ BG, æqualis; igitur BG quadratum ad EG, quadratum talem habet rationem quam habet linea BA ad EA lineam: hoc est quam habet BG, linea ad lineam EA. quocirca patet BG, hoc est BA, esse latus rectum parabolę GH. Quod erat demonstrandum.

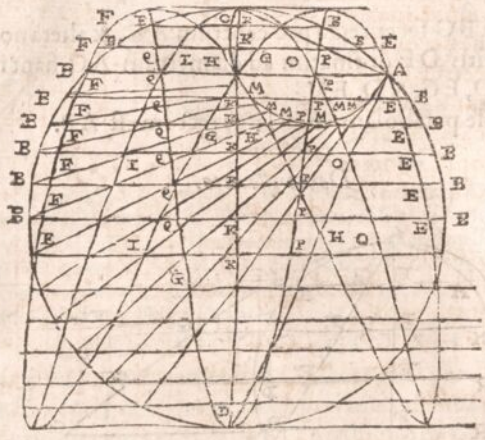
PROPOSITIO CCXXIV.

Sit in ABC circuli perimetro assumptum quoduis punctum A, ex quo rectæ ponantur quotcunque AB occurrentes circuli ABC perimetro in BB punctis, per quæ rectæ ponantur EF, normales ad CD diametrum circuli ABC: sint autem EF, æquales ipsis AB, & in Kà diametro DC bifariam diuisæ: iunctâ deinde AC, describatur super AC vt diametro semicirculus AMC, occurrens AB lineis in MM:

fiant autem dimidijs rectarum MB æquales, KI, KO; & EO lineis æquales OH, denique FI æquales fiant IG: & EH transferantur in K, PQ: vt PQ in K diuisæ sint bifariam.

Dico EH, GF, item EG, HF parabolas esse virtuales: deinde OI, PQ veras esse parabolas.

Demonstratio.



INtelligantur ad circulorum peripherias duci lineæ CM, CB; erunt igitur *triangula* CMB similia inter se, vt ex elementis patet, quod etiam ostendimus 219. huius. quare vt quadratum CB ad quadratum CB, id est vt CK [a] linea ad lineam CK, sic MB quadratum ad quadratum MB: id est OI quadratum ad quadratum OI, quia MB, OI lineæ per hypothesim æquales sunt; parabola est igitur vera, OCI cuius axis CD.

[a] *Per elementa.*

Rursum cùm EF lineæ æquales sint AB, & OI æquales MB; sint autem & EF, OI in K diuisæ bifariam, reliquæ EO, FI æquales sunt, & simul sumptæ æquales lineis AM: sunt verò EO lineis æquales OH, & FI æquales IG, singulæ igitur EH, GF æquales sunt ipsis AM. sed AM, translatæ in PQ normales ad CD, veram producunt [b] parabolam; igitur & EH, GF translatæ in PQ ad veram sunt parabolam. ergo EH, FG sunt virtuales parabolę. cum autem lineæ OO, II, rectas EH, EH & FG, FG bifariam diuidant ex hypothesi, parabolarum virtualium axes erunt *lineæ* O, O, I, I, quas ostendi veras esse parabolas.

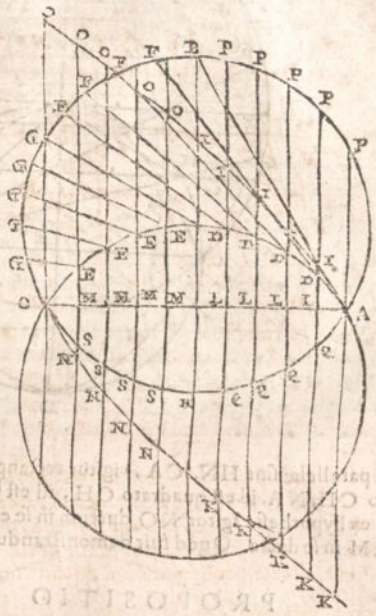
[b] 300. *parabol.*

Iterùm cùm EF lineę æquales sint AB, & FG ostensæ æquales AM, reliquæ EG æquales sunt MB, id est O, I, ex hypothesi. similiter HF rectæ æquales ostenduntur rectis OI; igitur cùm OI vera sit parabola, puncta EG, HF ad virtuales sunt parabolas: quod verò PP, QQ; quas veras ostendi esse parabolas, rectas EG, HF bisecent, sic ostendo. quoniam EO ex hypothesi æquales sunt PK, addito vel demptо communi OP, rectæ EP æquales sunt OK, totę autem EG ostensæ sunt æquales OI; igitur PG reliquę æquales sunt KI: vnde EG in PP diuisæ sunt bifariam. Similiter lineæ HF in QQ bifariam sectæ sunt in Q; igitur, &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCXXV.

INterſecent ſeſe circuli duo ABC, ADC in A & C punctis: quibus iunctis, ponatur per vtriuſque circuli centrum recta BH, cui parallelæ ponantur DQ, ES: & DQ quidem verſus A; SE verò verſus C, occurrantque lineę AC in L & M: per puncta verò D, E ex A rectæ ponantur ADF, AEG. lineis deinde AD fiant æquales D, LI; & DF lineis æquales Q, LK. deinde & AE lineis æquales ponantur E, MO, & ipſis EG æquales SMN: [a] oſtendimus ſuprà puncta IO, & NK ad parabolas eſſe virtuales.



[a] 216. huius.

Dico autem corpus ortũ ex ductu plani IL in LK, æquari corpori orto ex ductu OM in MN.

Demonſtratio.

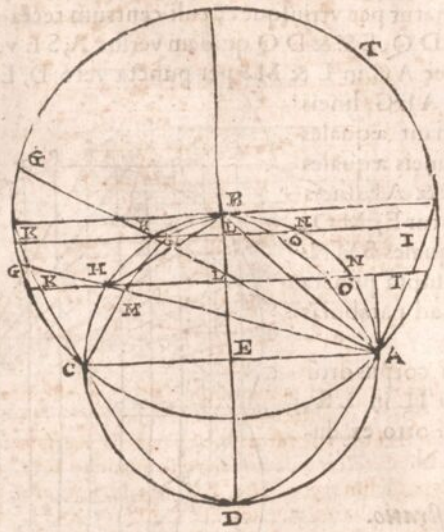
PRoductæ LI, circulo occurrant in P, & ME rectæ eidem occurrant in F, rectãgulis ADF æqualia ſunt rectangula KLI per hypotheſim; ſimiliter AEG rectangulis æqualia ſunt rectangula NMO: ſed ADF rectangulis æqualia ſunt rectangula PDQ, & AEG rectangulis æquantur FES, rectangulis igitur PDQ, FES æqualia ſunt rectangula ILK, OMN; ſed PDQ rectangula æqualia ſunt rectangulis FES, (modò diſtantiæ à diametro BH ſumantur æquales) rectangulis igitur ILK æqualia ſunt rectangula OMN: quare IL ductum in LK [b] æquale eſt OM ducto in MN. Quod erat demonſtrandum. [b] 46. huius.

PROPOSITIO CCXXVI.

INterſecent ſeſe circuli duo ABC, ACG in A & C, ſit autem B centrum circuli ACG, iunctiſq; AC ducantur ex A lineæ AG occurrentes circulo ABC in H: dein rectæ AG transferantur in H, KI normales ad diametrum BD, à qua bifariam diuidantur in LL: ipſę autem AH transferantur in H, KO, & in N, IO, erunt KK, MM, II, OO, veræ ac formales [c] parabolæ. [c] 219. huius.

Dico HN ſuperficiem ductam in altitudinem CA, corpus exhibere æquale illi quod oritur ex ductu MI in ſe ipſum, minus KM ducto in ſe.

Demonſtratio.



a *Ptolemæus lib. 1. propoſ. 24.* b *Soren. lib. 2. p. 44.*

CVm parallelæ ſint HN, CA, a igitur rectangulum HN, CA; vnà cum rectangulo CH, NA, id eſt quadrato CH, id eſt b HG, æquatur quadrato AH, id eſt KO ex hypotheſi. Igitur KO ductum in ſe excedit ABC ductum in AC quantitate KM in ſe ducta. Quod fuit demonſtrandum.

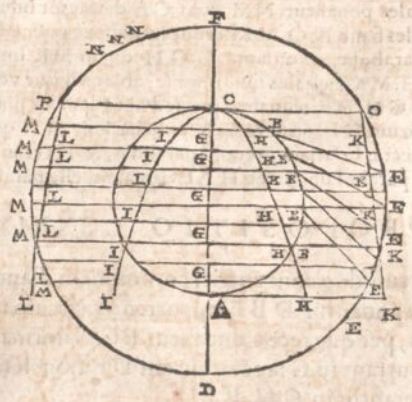
PROPOSITIO CXXXVII.

HAbeant ABC, DEF circuli duo concentrici communem diametralem DF, ductiſque ex C extremitate diametri circuli minoris, ſecantibus CBE, agantur per B lineæ orthogonæ BGI ad diametrum AC occurrentes illi in G; dein CB lineis translatis in normales HI, ad diametrum AC, à qua bifariam ſecentur in G; fiant BE lineis æquales B, HK, item IL.

Dico tam puncta HI, quàm KL ad veras eſſe parabolas.

Demon-

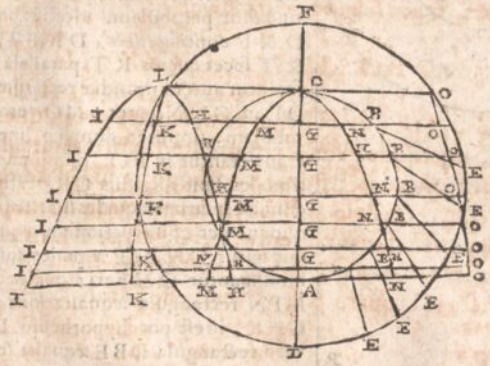
Demonſtratio.



QVoniam HI lineæ æquales ponuntur lineis BC, quadratum HI ad quadratum HI, eſt, vt BC quadratum ad quadratum BC, id eſt vt CG recta ad rectam CG; igitur HI vera ac formalis eſt parabola. Rurſum actâ per C contingente OP, patet BEC, rectangula æqualia eſſe quadrato CO, adeoque & inter ſe: ſed cùm per hypotheſim rectis EB, EC æquales ſint rectæ KH, HL, erunt KHL rectangula, æqualia rectangulis BEC; igitur KHL rectangula æqualia ſunt quadrato CO, adeoque & inter ſe. vnde [a] KL ad veram & formalem ſunt parabolam. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Per 346. parabol.*

PROPOSITIO CCXXVIII.



HAbeant ABC, DEF circuli paralleli communem diametralem DF, actaq; per C extremitatem diametri circuli minoris, tangente CL, ducantur ex C ſecantes quotuis CE occurrentes circulo ABC in B punctis, per quæ orthogonæ ducantur ad diametrum AC. fiant autem rectis BE æquales GH; rectis verò CB æquales HI.

Dico HLI parabolam eſſe virtualem.

Demon-

Demonſtratio.

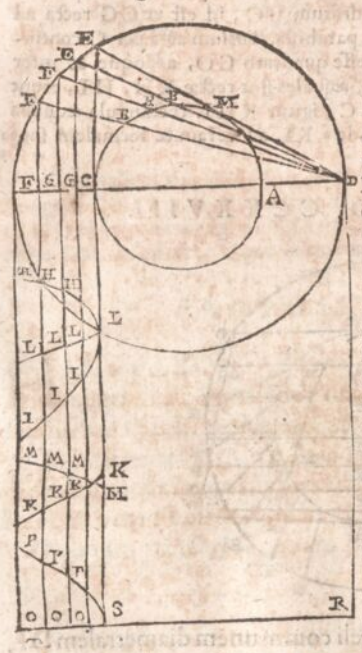
REctis CB æquales ponantur NM, quas CA diameter biſecet in G, rectis autem BE æquales fiant NO, MK; erunt igitur per præcedentem NCM, OK veræ ac formales parabolæ. quoniam tam GH quam MK lineæ æquales ſunt rectis BE, rectæ GH, MK æquales ſunt inter ſe; ablatis igitur vel additis communibus MH, reliquę GM, HK æquales ſunt. ſed MG dimidiæ ponuntur ipſarum CB, id eſt ex conſtr. ipſarum HI; igitur & HK dimidiæ ſunt HI: quare cùm LKK linea diuidens HI rectas bifariam, vera ſit parabola, & HI tranſlatæ in NM veram quoque producant parabolam, patet HLI virtualem eſſe parabolam.

PROPOSITIO CCXXIX.

HAbeant circuli duo concentrici communem diametralem DF: & ex D rectæ ponantur DBE occurrentes circulo minori in B, maiori in E punctis, per quę rectæ ducantur EGN normales ad DF diametrum, cui occurrant in G: rectæ autem DE transferantur in E, GK, & D, BE transferantur in GH, KI.

Dico HI parabolam eſſe virtualem.

Demonſtratio.



a *Patet ex 300. parab.*

b *Per 319. lib. de parab.*

c *Per 346. parabol.*

SEcentur HI bifariam in LL. quoniam igitur DE lineis æquales ſunt GK normales ad DF, puncta DKK ad [a] veram ſunt parabolam. quia verò tam GH, KI, quàm HL, LI rectæ æquales ſunt, totę GK in L biſectæ ſunt; adeoque vt GK ad GK, ſic GL eſt ad GL: quare LL puncta ad veram quoque ſunt parabolam. vlteriùs ponantur per D & F contingentes, DR, FT, quas in R & T ſecet quęuis RT parallela DF, transferantur autem dimidiæ rectarum GK ſiue DE in G, MN, patet [b] MO veram eſſe parabolam. ſimiliter dimidiæ linearum HI transferantur in PO. quoniam igitur MO æquales ſunt dimidiis GK, rectę MO, GL dimidiæ ipſarum æquales ſunt. ſed & OP, LH quoque per conſtructionem æquantur; reliquę igitur GH, MP æquales ſunt; vnde ſi intelligantur ON fieri æquales MO rectis, MPN rectangula æqualia ſunt rectangulis GHK, id eſt per hypotheſim DBE. quia verò rectangula DBE æqualia ſunt quadrato contingentis DM, rectangula DBE adeoque & MPN, æqualia ſunt; vnde cùm MM ad veram ſint parabolam, puncta quoque PP veram [c] producunt parabolam. igitur cùm dimidię linearum HI tranſlatę in PO formalem conſtituant parabolam, & linea LL biſecans lineas HI, vera quoque oſtenſa ſit parabola, conſtat HI puncta ad virtualem eſſe parabolam.

PRO-

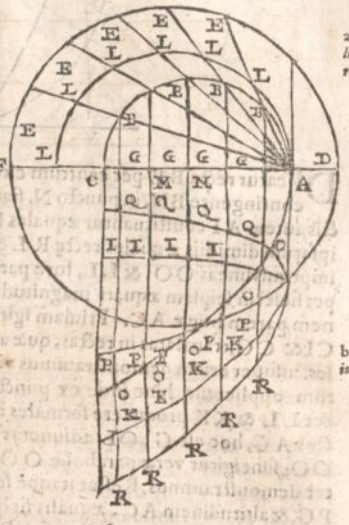
PROPOSITIO CCXXX.

HAbeant circuli duo excentrici communem diametralem D A C F: & ex A (extremitate diametri minoris circuli) rectę ponantur A B occurrentes minori circulo in B, maiori in E: per B verò ducantur B I normales ad A C diametrum, cui occurrant in G. fiant autem A, B E lineis æquales G I, & A B rectæ transferantur in I K.

Dico I K parabolam esse virtualem.

Demonstratio.

SEcentur I K bifariam in P P, & A B lineæ transferantur in G O: [a] erit igitur G O vera ac formalis parabola, describatur insuper circulus A L L contingens A B C in A, concentricus autem circulo D E F, occurratque A B lineis in L L, tum A, B L transferantur in I Q. K R. reliquis igitur L E æquales sunt G Q; & A L lineis, æquales Q R: rectæ denique P Q, P R æquales sunt. quia verò circuli A B B, A L L sese contingunt in A, rectæ A B, proportionales sunt A L; sed A B lineis æquatur I K, & A L æquales sunt R Q, igitur I K, R Q lineæ quoque sunt proportionales; ostensum est autem [b] R Q parabolam esse virtualem, & P P formalem; igitur cùm I K translatæ in G O formalem producant, & P P linea, bisecans lineas I K, vera quoque sit parabola, constat I K virtualem esse. Quod erat demonstrandum.



a Per 300. libri de parabola.

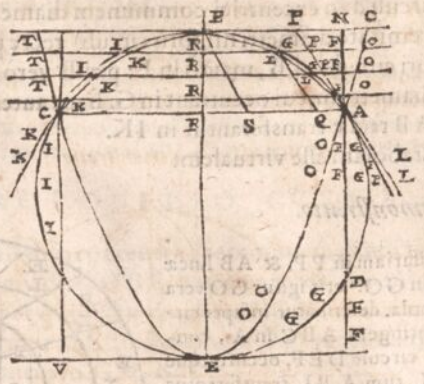
b 229. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

SVbtendat recta A C segmentum circuli A B C, erecta quoque contingente circulum in puncto A, scilicet A P, conueniente cum altera tangente B N, quæ æquidistat A C.

Oporteat magnitudinem exhibere ex ductu mutuo parabolarum quæ æquetur corpori habenti basim P G. superficiem, & altitudinem A C, subtensam segmenti A B C.

Conſtructio & demonſtratio.



DVcatur recta B E per centrum circuli cui ſit æquidiſtans A D, conueniens cum contingente B N, in puncto N. fiant autem rectis A G, æquales rectę G F M, rectis autem A I conſtituantur æquales I F H. diuiſis denique bifariam rectis M H, fiant ipſarum dimidijs æquales rectę R L & K R, tandem F M fiant æquales L O. Dico imprimis lineas O O, & L L, fore parabolas. Dico inſuper corpus ex ductu O L ſuperficiei in ſeipſam æquari magnitudini ſuper baſi P G conſtitutæ, habenti altitudinem parem lineæ A C. Primam igitur partem ſic demonſtro. Oſtenſum eſt lineas C I & C G, translatas in rectas, quæ à linea C V incipiunt exhibere parabolas virtuales: inſuper etiam demonſtrauimus virtuales illas parabolas, ſi medietas illarū linearum applicetur hinc inde ex punctis R R, earum medietates in punctis ſcilicet L L & K K producere formales ac veras parabolas L K. oſtendimus prętereà rectas A G, hoc eſt G, O L adiunctas rectis R L, formare etiam veram parabolam O O; ſunt igitur veræ parabolæ O O, & L K, lineæ: primam igitur partem ſufficienter demonſtrauimus. Reſtat itaquè ſecunda, ſcilicet quod magnitudo habens baſim P G, & altitudinem A C, æqualis ſit quantitati quæ reſultat ex ductu plani O L in ſe ducti: hoc autem manifeſtum fiet hac ratione. Ducatur ex quouis puncto G, recta G Q æquidiſtans A P, contingenti, & ſimul ponatur recta A G, erit itaque, vt oſtendimus [a] quadratum A G æquale rectangulo Q A C, hoc eſt rectangulo ſub P G, & A C, poſita eſt autem ex conſtructione linea F M, hoc eſt O L æqualis lineę A G. Igitur ſi fiat C T parallela A P, O L quadratum ęquale eſt G P T, rectangulo. quamobrem per propoſitionem quadrageſimam quintam huius libri erit O L planum in ſe ductum producens molem illi parem quam exhibet baſis P G, ducta in altitudinem A C. Quod erit faciendum.

[a] *Per demonſtrata prop. 93. de cire.*

Corollarium.

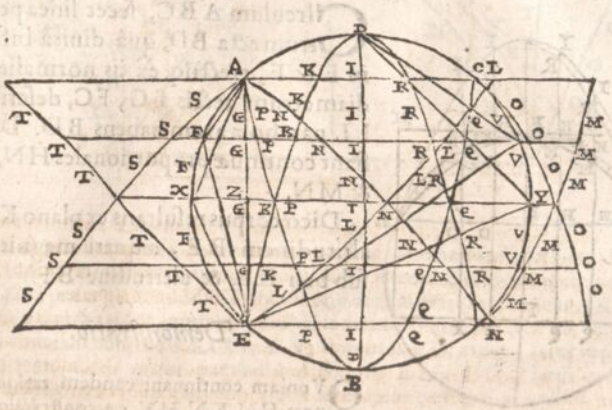
QVoniam demonſtratio communis eſt non ſolum ſegmento A B C, verùm etiam A E C, ſegmento. Hinc totam ſuperficiem P G, ductam in altitudinem A C, producere manifeſtum eſt quantitatem æqualem illi quę emergit ex plano L O ducto in ſe, partem ſcilicet L O, quæ ſegmento A B C conuenit, in ſe multiplicatam æquari magnitudini quæ habet baſim P G, interceptam parallelis, inter N B, A C, conſtitutis, partem ſimiliter L O, quæ ſegmento A D C conuenit in ſeipſam ductam, ęqualem eſſe moli productæ ex baſi P G, collocata inter parallelas A C, & E V, modò æqualis vtrique detur altitudo A C.

PRO-

PROPOSITIO CCXXXII.

Circulum ABC secet per centrum acta recta BD, cui statuatur æquidistans AE. Oportet autem parti cylindri habenti basim segmentum AFE, & altitudinem BD solidum aliud æquale exhibere, quod gignatur ex ductu parabolicarum partium in se inuicem.

Constructio & demonstratio.

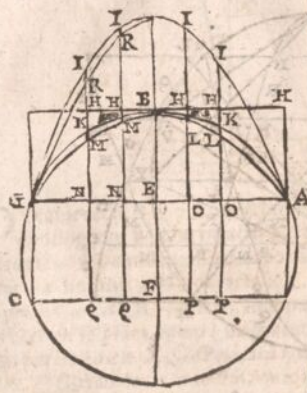


Rectis AF fiant æquales lineæ F,GN, in parallelis FV, secantibus AE, ad rectos angulos; rectis quoque EF ponantur æquales F,GL, lineæ; similiter lineis AV, æquales statuantur V,GO, vti etiam rectis EV, æquales V,GM, collocentur. Denique quoniam ostendimus lineas NO & LM virtuales esse parabolas, reducantur hæ ad formales ac veras KR, PQ, & SS, TT, prout superiùs explicatum est; ostendendum igitur superficiem TK, ductam in SP, quæ ambæ sunt parabolicis lineis concluſæ, exhibere magnitudinem quantitati parem illi, quæ resultat ex basi segmenti AFE, & altitudine BD. quod sic constabit. agatur XY, æquidistans AC, sed per circuli centrum: iungantur quoque XA & XE, vti etiam AF & FE, triangulum AXE eam rationem habet ad AFE, triangulum, quam habet linea XZ ad FG, perpendicularem ad AE, sed etiam triangulum AXE ad AFE, triangulum habet rationem compositam ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE; igitur ratio XZ ad FG, composita est ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE: sed etiam rectangulum AXE ad rectangulum AFE, habet rationem compositam ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE; igitur etiam ratio rectanguli AXE ad rectangulum AFE, eadem est cum ratione XZ ad FG: rectangulo autem AXE æquale est rectangulum XY, XZ; igitur ZXY, rectangulum ad rectangulum AFE, eam habet rationem quam linea XZ ad FG, lineam; ergo rectangulo FG, XY vel BD, æquale est rectangulo AFE, sed lineæ AF æquales sunt ex constructione rectis GN, & lineæ FE, æquales sunt ex eodem capite rectis GL. Rectæ verò GN, & GL æquales sunt quoque lineis SP, TK; igitur rectangulum SP, TK, æquale est rectangulo FG, BD. quare per propositionem quadragesimam quintam huius, superficies SP, quam ostendimus parabolis interceptam, ducta in planum TK, (quod idem est cum SP, si inuertatur) exhibebit corpus æquale magnitudini super basi segmenti AFE, constitutę habenti altitudinem æqualem diametro circuli BD. Quod erat exhibendum.

Corollarium.

EOdem prorsus discursu patebit basim GV, ductam in altitudinem diametri BD, æqualem magnitudinem subministrare illi quantitati quæ exsurgit ex ductu plani SQ in superficiem TR. sunt enim SQ. & TR, lineæ æquales rectis AV, & EV, vt ex ipsa constructione, & præcedentium tenore satis manifestum est.

PROPOSITIO CCXXXIII.



CIrculum ABC, secet linea per centrum acta BD, quâ diuisâ bifariam in E & F, erectisq; ex ijs normaliter ad diametrum rectis EG, FC, describatur LL parabola axem habens BD. Deinde fiant continuæ proportionales HN, KN, & MN.

Dico corpus resultans ex plano KM, in altitudinem BE, æquari magnitudini sub basi KL, & altitudine BF.

Demonstratio.

QVoniam continuant eandem rationem lineæ HN, KN, MN, ex constructione igitur quam habebit rationem HN ad KN, eandem habebit HK ad KM. rectangulum ergo HN, KM æquatur HKN rectangulo. demonstratum est autem rectangulum HKO, hoc est HKN, æquale esse HP, KL rectangulo, propositione scilicet nonagesimasecunda huius libri; igitur rectangulo HP, HL æquale est rectangulum HN, KM. Igitur per quadragesimam quintam huius constat propositum.

Corollarium.

HInc manifestum est lineam MM, non esse parabolam, nisi fortè quis eam etiam virtualis nomenclatura dignari velit, eò quod ad formalem aut veram facile possit reduci. si enim fuerint IN, rectæ constitutæ duplæ rectarum KN, erit RR ellipsis, vt ex lib. de Ellipsi constat. positis autem tunc rectis IR, æqualibus KM, erit RR, vera parabola, cùm eandem rationem sint habituræ rectæ IN, ad NR, lineas quam habent KO ad OL, rectas, quare patet RR, non minùs fore parabolam quàm sit ex constructione facta LL parabola.

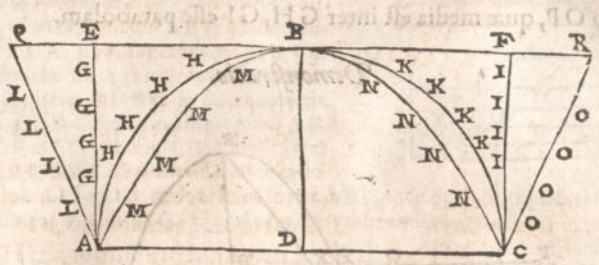
PROPOSITIO CCXXXIV.

CIrculum ABC cuius centrum D, contingant AE, CF eductæ è terminis diametri AC, occurrentes EF, contingenti quæ æquidistet diametro AC, & per puncta ABC descripta sit parabola cuius apex B: & per puncta AC describatur parabola habens verticem in concursu lineæ BD cum circulo ABC, quæ producta occurrat contingenti EF in punctis Q & R.

Dico

Dico ſuperficiem L M, ductam in ſeipſam exhibere corpus æquale magnitudini quæ baſim habet G H, planum, & altitudinem G I.

Demonſtratio.



OStenſum eſt ſecunda propoſitione de hac materia parabolæ virtualis, rectas AK, KC diſpoſitas vt diuidantur bifariam à recta BD, producere parabolam. LL, OO. præcedenti quoque propoſitione demonſtratum eſt lineas AK, KC collocatas ex punctis GG, proferre parabolas virtuales quæ reductæ ad veras ac formales exhibeant parabolas LO. & MN, habentes PD, axem, latus verò rectum æquale BD. Cùm *igitur* parabolæ ABC & LL, OO, *latus* rectum habeant æquale BD, neceſſarium eſt vt illæ *ipſæ* exiſtant de quibus præcedentibus propoſitionibus mentio facta eſt. quocirca LM, ſunt æquales AH, vel KC, ſed quadrato AH, æquale eſt HGI, rectangulum; igitur etiam quadratum LM, æquatur HGI rectangulo: quamobrem per propoſitionem quadrageſimam quintam huius lib. manifeſtum eſt magnitudinem quę fit ex ductu ſuperficiei LM, in ſeipſam, æquari corpori ſuper baſi GH, conſtituto, & altitudinem habenti GI, lineam rectam. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXXXV.

POnantur eadem quæ in ſuperiore ſcemate ſunt poſita.

Dico baſim GK, ductam in altitudinem GL, dare molem illi magnitudini parem, quę emerget ex ductu plani LN, in ſeipſum.

Demonſtratio.

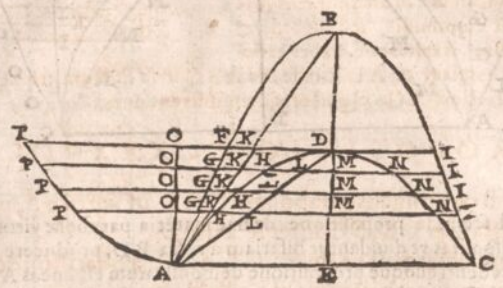
SVnt etenim oſtenſæ lineæ AK, æquales rectis K, LN, ſed quadratum AK æquatur KGI rectangulo; igitur quoque quadratum LN, eidem KGI, rectangulo erit æquale. Quocirca per propoſitionem quadrageſimam quintam huius, patet huius propoſitionis veritas.

PROPOSITIO CCXXXVI.

SInt duæ parabolæ ABC, ADC conſtitutæ ad communem axem DE, ductaque ſit tangens FD, & lineæ AB, AD, denique AO, æquidiſtans axi DE.

Dico OP, quæ media eſt inter GH, GI eſſe parabolam.

Demonſtratio.



QVadratum GM, æquale eſt rectangulo GHI, ſimul cum quadrato HM & idem GM quadratum æquatur OMK rectangulo, hoc eſt OML ſimul cum OM,KL: ſed quadrato HM, æquale eſt OML, rectangulum, [a] vt oſtenſum eſt libro de parabola; igitur rectangulo GHI, rectangulum OM,KL, æquale erit: ſed ſi ponantur inter OM, KL mediæ OP, erit OP, parabola ſecundùm [b] ea quæ libro de parabola diximus; igitur etiam mediæ inter GH, HI, hoc eſt OP, erit vera parabola. Quod erat demonſtrandum.

a *Prop. 42. de parab.*

b *193. de parab.*

Corollarium.

HInc eſt manifeſtum corpus ex ductu plani GH, in HI planum æquale eſſe magnitudini quæ habet baſim KL, & altitudinem OM, vel illi quæ exſurgit ex ductu plani OP, in ſeipſum per propoſitionem quadrageſimam quintam huius libri.

PROPOSITIO CCXXXVII.

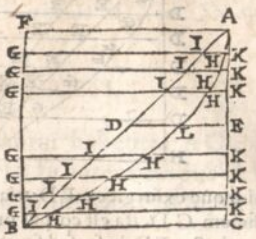
TRiangulum rectangulum ABC diuiſum ſit vtcunque recta DE, quæ æquidiſtet BC.

Dico ADE ductum in ſe ad ABC ductum in ſe, triplicatam habere rationem eius, quam habet linea AE ad AC.

Demon-

Demonſtratio.

PErfecto rectangulo AFB, factiſque tertiis lineis quæ ſint in continuâ ratione, hoc eſt lineis GK, IK, HK, erit HH [a] parabola: eritque ADE in ſe ductum, ad ABC ductum in ſe, vt eſt ſuperficies AEL ad ſuperficiem ACBLA, cùm ſuperficies ADE [b] in ſe ducta æqualis ſit AHLE ducto in altitudinem AF, item ADBC in ſe, æquale ſit ſuperficiei ALBC ductæ in altitudinem AF, altitudo autem ſit communis. ſed ſuperficies AEL ad ACBL [c] triplicatam habet rationem AE ad AC; igitur & ADE in ſe, ad ABC in ſe ductum, triplicatam habet rationem lineæ AE ad AC. Quod erat demonſtrandum.



[a] Per 23. parab.

[b] Per 45. huius.

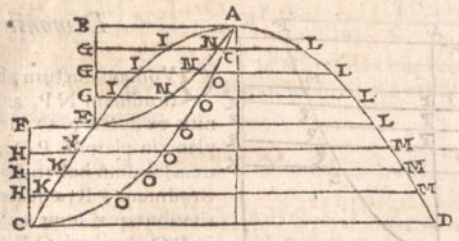
[c] Colligitur ex corr. 23. & 24. parab.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

SIt linea AB contingens parabolam CAD in vertice A, ponanturq; axi æquidiſtantes BE, FC inter ſe æquales.

Dico ſolidum emergens ex ductu GI, in GL, æquari ſolido reſultanti ex mutuo ductu ſuperficierum HK, KM.

Demonſtratio.



DEmonſtratum [d] eſt medias inter GI, GL ſcilicet GN eſſe ad eandem parabolam quæ eſt ſimilis CAD parabolę; item lineas quæ terminantur in parabolâ COA, quæ eſt ſimilis CAD, medias eſſe inter HK & HM; igitur cùm GI æquales ſint HO, illæ nempè quæ æqualiter ab E, & C, diſtant, quadrata quoque GI, HO, & conſequenter rectangula etiam IGL æqualia ſunt rectangulis KHM; ac propterea [e] corpora etiam inter ſe æqualia ſunt quæ oriuntur ex ductu ſuperficierum GI in GL, & HK in HM. Quod erat demonſtrandum.

[d] Per 167. de parab.

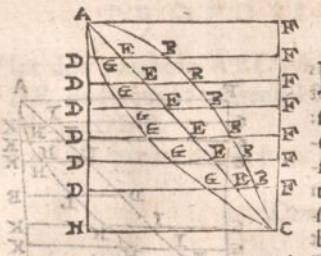
[e] Per 45. huius.

PROPOSITIO CCXXXIX.

SIt parabola ABC, cuius axis AD, & recta AC occurrens parabolæ in C.

Dico BD ductum in ſe, proferre ſolidum quod ad corpus reſultans ex ductu ED plani in ſeipſum, habeat rationem quam tria ad duo.

Demon-



Demonſtratio.

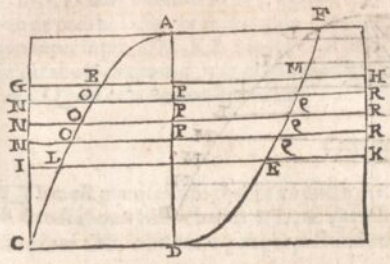
DVcta FC quæ æquidiſtet AD, erunt tres continuæ [a] FD, BD, ED, ſimiliter ſi fiant tres continuæ FD, ED, GD, [b] erit GG parabola. igitur [c] corpus emergens ex ſuperficie ED in altitudinem FD æquatur illi quod fit ex ductu ſuperficiei BD in ſeipſam. pari pacto corpus quod eruitur ex baſi GD in altitudinem FD, æquale eſt pyramidi quę exſurgit ex ED triangulo in ſe ducto. Igitur vt eſt ſuperficies BD ad ſuperficiem GD. ita eſt corpus ortum ex ductu BD plani in ſe, ad ſolidum quod oritur ex ductu ED in ſe: ſed ſuperficies CD eſt ad ſuperficiem GD, ſiue BE, vt tria ad duo, cum [d] BF duplum ſit BE, & conſequenter ED triplum eiuſdem; igitur etiam BD in ſe ad ED in ſe ductum, rationem eandem obtinet quam tria ad duo. Quod erat demonſtrandum.

a 42. parab.
b 167. parab.
c Per 45. huius.
d Ex demonſt. 243. parab.

PROPOSITIO CCXL.

PArabolę ABC ſit axis AD, apex autem A punctum, cui ſubalternè collocetur parabola DEF ad axem DA, & poſitis duabus æquidiſtantibus ordinatim ad axem ſcilicet GH, IK, fiant rectangula OPN æqualia rectangulis QPR; ſit autem GNI, linea recta, vti & HRK.

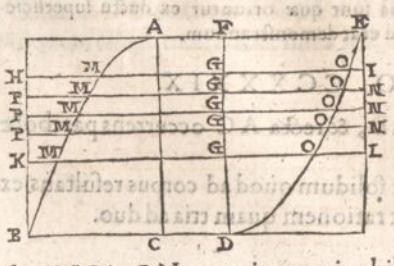
Dico corpus ex ductu ſuperficierum NO, PQ, æquale eſſe corpori quod generatur ex planis inuicem ductis OP, QR.



Demonſtratio.

QVoniam ductum planum PQ in altitudinem NP, æquatur ſolidis genitis ex ductu NO in PQ, & ex OP plano in planum PQ, & quandoquidem ſolidum habens baſim OP, & altitudinem PR, æquale eſt duabus quãtitatibus quæ fiunt ex ductu plani OP in PQ, & plani OP in QR planum, eſt autem ſolidum ortum ex ductu OP in PQ, commune vtriquę; igitur ſi hoc ipſum OP in PQ, ab vtroque auferatur, remanebunt æqualia corpora, ſcilicet corpus ex ductu NO, in PQ æquale ſolido quod exhibet ductus plani OP, in QR. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXLI.



POnantur iterũ parabolę ſubalternè ABC, DEF habentes axes paralleles AC, DF: & ducta axibus parallela BK, fiat corpus habens baſim MG, & altitudinem GN æquale ſolido quod fit ſub baſi GO & altitudine GP.

Dico ſolidum factum ex ductu plani MG in ON, æquari corpori exhibito, per ductum GO in PM planũ.

Demon-

Demonſtratio.

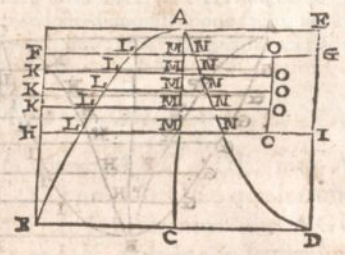
ESt denuo commune corpus ex ſuperficie MG, in GO. Igitur reſidua communi dempto ſunt inter ſe æqualia hoc eſt PM in GO, æquale MG, in ON, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLII.

PArabolæ ABC, DAE ſubalternæ ſtatuantur habentes AC, DE axes, quos ſecent ordinatim poſitæ FG, HI; ſit autem corpus ex baſi LM in altitudinem MO, æquale ſolido quod baſim habet MN, & altitudinem KM.

Dico corpus emergens ex ductu planorum LM, NO, æquari ſolido quod fit ex multiplicatione ſuperficierum KL & MN.

Demonſtratio.



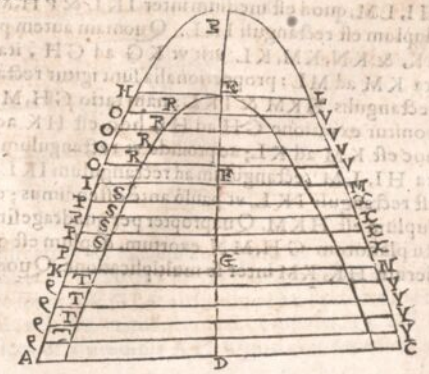
QVoniam corpus ex MN, in altitudinem KM, æquatur ſolidis duobus, vni quod generatur ex ductu MN in ML, & alteri quod reſultat ex ductu MN, & LK. Deinde cùm ſolidum baſeos LM, & altitudinis MO, æquetur duabus quantitatibus quarum vna eſt orta ex ductu ſuperficierum LM, MN, & altera producta ex ductu planorum LM, NO. Igitur ſi commune tollatur corpus vtrimque ſcilicet quod fit ex ductu LM in MN, reſidua quę remanent inter ſe erunt æqualia, hoc eſt LM in MO, æquabitur ſolido, quod oritur ex ductu KL in MN. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLIII.

POnantur duæ parabolæ parallelę ABC, & TEZ, diuiſus ſit communis axis in partes æquales in punctis EFGD, &c. & ductæ ſint ordinatim ad axem HE, IF, KG, AD.

Dico corpora quæ generantur ex ductu OR in RV, PS in SX, & QT in TY, inter ſeſe eſſe æqualia.

Demonſtratio.



LIbro de parabola demonſtratum inuenies[a] quadratum cõtingentis HE, æquale eſſe cuiuis rectangulo quod fit ſub partibus cuiuſcunque lineæ quæ æquidiſtet HE, videlicet ORV, PSX, vel QTY. quare rectangula ORV, æqualia ſunt rectangulis PSX, vel QTY. ergo cùm altitudines ponantur

[a] *Prop. 351. parab.*

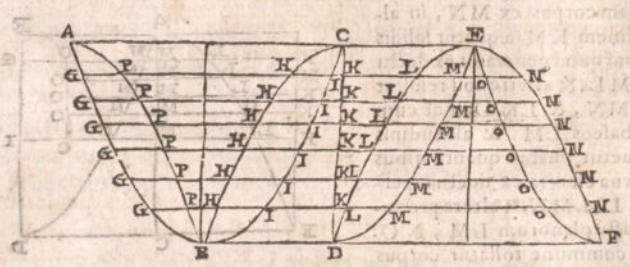
æquales EF,FG, GD patet per propositionem quadrageſimam quintam huius libri corpora ORV,PSX,& QTY,eſſe inter ſe æqualia.quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXLIV.

PArabolæ ABC, DEF habeant æquale latus rectum ad axem conſtitutum, ſintque ſubalternè poſitæ, quas ſecent AE,BF ordinatim ad axes conſtitutę:ſit autem CD linea æqualiter ab axibus diſtans;ad quam collocentur ſitu ſubalterno HK & KM parabolæ.

Dico ſolidum ex ductu plani GH in planum MN emergens, duplum eſſe quantitatis quæ producitur ex ſuperficierum HK, KM mutua multiplicatione reſultantis;ſiue dico GH ductum in ſe ſubalternè producere duplum eius quod producit HK in KM.

Demonſtratio.



a *Prop.167. parab.*
b *Prop.9. de progr.*

DVctis GN quæ æquidiſtent AE, fiant rectis HI, æquales GP, & ſimiliter lineis LM, fiant æquales ON, libro de parabola [a] oſtenſum eſt KI,KH, KG, & KL, KM,KN eſſe proportionales lineas. Inſuper oſtenſum [b] eſt,ſi rectis GP, fiant æquales HI, & rectis NO, fiant æquales LM, denuo lineas KI,IH, HP; & KL, LM, MO eſſe proportionales, ac proinde rectangula IKL,HLM, & PH,MO proportionalia eſſe: eſt autem rectangulum PH, MO quadruplum rectanguli IKL, cùm lineæ PH, duplę ſint KL, & lineę MO, duplæ linearum IK; igitur rectangulum HI, LM, quod eſt medium inter IKL & PH,MO, ſcilicet inter vnum & quatuor, duplum eſt rectanguli IKL. Quoniam autem proportionales ſunt lineæ GK,HK, IK, & KN, KM, KL erit vt KG ad GH, ita KH ad HI, & vt KN ad NM, ita KM ad ML: proportionalia ſunt igitur rectangula GH, MN & HI, LM cum rectangulis HKM & IKL: nam ratio GH, MN ad rectangulum HI, LM componitur ex ratione GH ad HI, hoc eſt HK ad IK, & ex ratione MN ad LM, hoc eſt KM ad KL; ac proinde vt rectangulum GHMN ad rectangulum HKM, ita HI, LM rectangulum ad rectangulum IKL: ſed rectangulum HILM duplum eſt rectanguli IKL, vt paulò antè oſtendimus; ergo etiam rectangulum GHMN duplum eſt HKM. Quapropter per quadrageſimam quintam huius,ſolidum ex ductu planorum GH,MN exortum, duplum eſt quantitatis quę fit ex mutua ſuperficierum HK, KM inter ſe multiplicatione. Quod demonſtrandum fuit.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [919] - 862
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CCXLV.

IIsdem positis:
Dico rectangula M O, P H, & M N G H cum N K G, rectangulis esse in continua ratione.

Demonstratio.

OStensum est continuare eandem rationem lineas K L, L M, M O. Igitur si addatur L M media tertiæ M O, orietur K N, quæ cum M O, O L [a] exhibebit tres proportionales. similiter ob eandem causam continuabunt eandem rationem P H, H I, G K; ergo rectangula P H, M O, & H G, M N cum rectangulis G K N, erunt in continua analogia. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 8. lib. de prog.

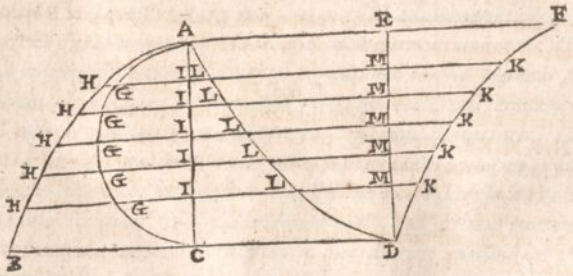
Corollarium.

HInc colligi poterit M N in G H, planum multiplicatum solidum exhibere quod sit duplum corporis orti ex ductu superficierum mutuo M K, K H: nam I K L, H K M & G K N, sunt proportionalia. Deinde M O, P H & M N, G H cum N K G sunt proportionalia; igitur I K L ad P H in M O, habet duplicatam rationem eius quam habet H K M ad G H, ductum in M N, cùm primus terminus sit communis in duabus illis seriebus trium continuarum. sed ratio I K L ad P H, ducti in M O, est vnius ad quatuor, vt constat ex discursu præcedenti demonstratione facto; igitur ratio H K M ad H G, in M N, est ratio vnius ad duo, cùm ratio quadrupla sit duplæ rationis duplicata.

PROPOSITIO CCXLVI.

SInt parabolæ vt priùs constitutæ subalternè A B C, A D E, sintq; A C, C B æquales inter se, vti & A E, E D ac proinde C E, quadratum; & A C D, subalternè adijciatur in E F D. Deinde fiat semicirculus A G C.
Dico corpus exortum ex ductu H L in L K, æquale esse semicylindro super basi G I & altitudine A F.

Demonstratio.



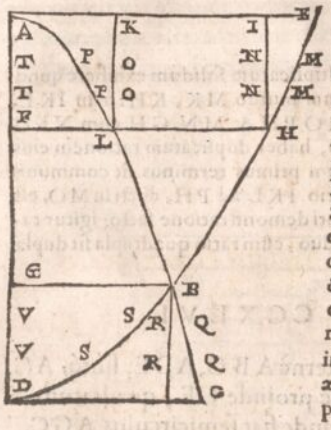
PRæcedenti propositione demonstratum est solidum emergens ex ductu H L in L K, duplum esse solidi quod gignitur ex ductu H I in L M, [b] sed solidum ex ductu H I in L M, æquale est semicylindro super basi G I, & altitudine I M. Igitur cùm H K sit æqualis A F, quæ dupla est A E, vel I M, manifestum est corpus ex H L in L K, æquale esse semicylindro G I; baseos, & altitudinis A F. Quod erat demonstrandum.

[b] Per 160. huius.

PROPOSITIO CCXLVII.

SVbalternè conſtituantur parabolæ A B C, D B E ad axem communem AD, interſecantes ſe in puncto quodam B, à quo demittatur B R æquidiſtans axi A D, facta autem B R, æquali F A, ductaq; ordinatim F H, ponantur H I, L K quæ æquidiſtent A D.

Dico ſolidum productum ex ductu ſuperficierum E N, O P æquari cor-pori quod reſultat ex ductu planorum Q R, R S.



Demonſtratio.

QVoniam æquales ſunt D G & A F, igitur vt A G ad A V, ita eſt D F ad D T, igitur vt linea B G ad V Q, ita eſt F H ad T M, & quia vt A F ad A T, ita eſt D G ad D V, igitur vt eſt F L ad T P, ita eſt G B ad V S, hoc eſt vt O T ad P T, ita eſt R V ad S V. ergo vt O P ad P T, ita eſt R S ad S V. quare cùm ſit H F ad T M, vt B G ad Q V, erit quoque N T ad M T, vt eſt R V ad Q V, & conſequenter vt M N ad N T, ita Q R ad R V, & quia eſt M T ad S T, ita quoque Q V ad P T. ergo vt eſt M N ad Q R, ita eſt R S ad O P; igitur rectangula M N, O P, & Q R S æqualia ſunt. pro-inde per 45. huius ſolidum ex ductu M N in O P, æquatur corpori ex ductu Q R, in planum R S, producto. Quod erat demonſtrandum.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

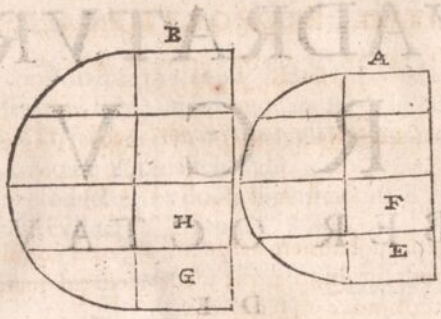
LIBER OCTAVVS

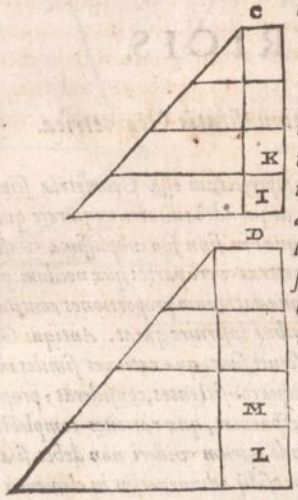
DE

PROPORTIONALITATIBVS GEOMETRICIS.

Necessitas & vtilitas proportionalitatis Geometricæ.

MVtilam in hodiernam diem, & imperfectam esse Geometriæ scientiam multis argumentis ostendi posset, atque adeò cultores exquirere qui notitiam rerum suo labore excludant, quas in sinu suo amplissimæ vastitatis & abyssi reconditas tenet: inter ceteras verò partes quæ necdum prodierunt adnumerari meritò potest pars ea omnis quæ rationum proportiones continet, & vsum explicat quo Geometricis contemplationibus inseruire queat. Antiqui Geometriæ cultores proportionum eam particulam prosecuti sunt, quæ rationes similes in quatuor maximè terminis, in duabus scilicet rationibus consistentes, considerat; proportionem scilicet omnem tamquam minùs vtilem respuentes, quæ rationes complecteretur quæ similitudine rationis non conuenirent. Vnde mirum videri non debet si ad soluendas extraordinarias difficultates non satis præsidij adinuenerint in elementis communi Geometriæ studio adaptatis. Hæc consideratio diu multumque me suspensum tenuit, & de requirendis nouis adiumentis cogitationes iniecit. Mirabar primò tanta obstinatione inter se dissidere eas Geometriæ partes quæ rectilineis terminantur, & quæ curuis vel inflexis clauduntur, vt imperuium communicationis inter se commercium reddiderint tot tamque præstantibus ingeniis quæ circa tales materias tot sæculis versata sunt summo labore, nec minore industria, sed quæ optato successu fere caruerit. huius rei varias causas excutiens vix vllam reperire potui quæ vel leue momentum haberet. Tandem incidi in quandam speculationem qua duorum quorundam incuruorum partes conferebam cum partibus duorum rectilineorum, & animaduerti rationibus conuenire partes vnius curui cum partibus alterius curui; similiter partes vnius rectilinei conuenire cum partibus alterius rectilinei, & quidem rationes communes esse curuilineorum inter se & rectilineorum inter se. sed quia discursus ex tot terminis copulatis formandi exemplum neque in Geometricis, neque in vlla alia scientia exstabat; magno studio & conamine intendere debui vt ita mihi ea in re satisfacerem, vt à ceteris qui mea lecturi essent intelligi possent. vnde librum præsentem conscribere necessarium





sarium fuit, vt idipsum præstarem. conabor rudem huius rei conceptum his scematibus exprimere. Sint duo curua A *&* B, *comparanda cum duobus rectilineis* C *&* D, *sintque partes curuorum* E, F *&* GH *proportionales partibus rectilineorum* I, K, L, M, *hac lege vt ratio* F *ad* E, *eadem sit cum ratione* K *ad* I: *ratio similiter* H *ad* G, *eadem cum ratione* M *ad* L, *sic tamen vt ratio* F *ad* E, *non sit similis rationi* H *ad* G, *& consequenter ratio* K *ad* I *sit dissimilis rationi* M *ad* L, *atque talis ratio comparandi reperiatur in omni subdiuisione partium curuarum quantitatum cum partibus subdiuisis quantitatum rectilinearum: hinc liquidò apparet necessarium fuisse rationem excogitare, qua formari posset discursus qui loco quatuor terminorum proportionalium vteretur octo terminis, ita vt legitimè inferri posset, sicut se habet ratio* F *ad* E, *ad rationem* H *ad* G, *ita se habet ratio* K *ad* I, *ad rationem* M *ad* L. *atque hæc ratio discursus complectitur diuersissimas rationum combinationes, modò diuersitas assumpta in antecedentibus, assignetur etiam in consequentibus: vnde diuersissimæ etiam quantitates inter se comparatæ, ostenduntur certam obtinere rationem, cum quibusuis duabus quantitatibus, modò leges seruentur ad talem discursum concinnandum necessariæ. Quemadmodum ex huius lectione libri studiosus lector abundè intelliget.*

DEFI-

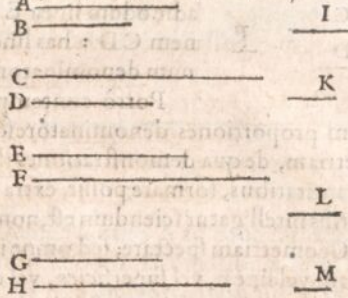
DEFINITIO PROPORTIONALITATIS PRIMA.

Proportionalitatem voco proportionum rationem.

EXPLICATIO.

EVclides proportionem definiens, ait, eam consistere in duabus rationibus similibus, atque adeò necessariò quatuor saltem virtuales terminos eam requirere.

Proportionalitas igitur cùm sit ratio proportionum, duas minimùm complectitur proportiones, quocirca octo terminos postulat: nam ratio inter duas consistit quantitates, proportio inter duas rationes versatur, quare quatuor membra requirit. Proportionalitas igitur duas proportiones complexa, octo membra seu terminos exigit: quatuor scilicet rationes, quarum singulæ inter duos terminos constitutæ sunt; vel duas proportiones, quarum singulæ quatuor terminos saltem virtuales complectuntur. Exemplo faciliùs res innotescet. Sint rationes quatuor AB, CD, EF, GH, duo termini AB, rationem constituunt: sed AB, & CD similes si fuerint rationes, proportionē constituent: ita vt dici queat vt A ad B, ita C ad D, vel vt E ad F, ita G ad H. verū quatuor rationes AB, CD, EF, GH, proportionalitatem constituunt; quę sic efferri debet: quemadmodum est ratio AB, ad CD rationem, sic est ratio EF ad rationem GH; non tamen hoc ita est intelligendum vt casu quo dissimiles sint rationes AB, CD, & EF, GH proportionalitas non existat, plurimæ enim rationes, inter se dissimiles, sunt proportionales, vt patebit ex 3. parte huius libri, & quibuscumque quatuor rationibus expositis, formari potest proportionalitas. Posito enim I, denominatore rationis AB; & rationis CD, ipso K; & reliquarum EF, GH, ipsis L & M: poterit dici proportio rationum AB, CD ad proportionem rationum EF, GH, est vt ratio IK ad rationem LM. quæ consideratio non parui ponderis existimanda est, scopus enim in quem collimat totus huius libri decursus, in eo maximè consistit, vt rationes dissimiles, ad vsum Geometricum reuocari possint: nam in Geometricis proportionibus ab antiquis auctoribus, similitudo rationum sola fuit adhibita; ita vt argumentum à proportione nullum posset proferri, quod similes rationes non contineret: iuxta definitionem ipsam proportionis, à veteribus nobis relictam; quæ



quæ rationum ſimilitudo appellatur. ex quo ſatis apparet, Geometriam huc vſque, quemadmodum circa varias materias, ita quoque in ea quæ proportiones conſiderat, mutilam remanſiſſe; tanquam ſi rationum diſſimilium proportio, ad Geometram non ſpectaret. Conabimur itaque hoc libro diſſimillimas etiam rationum proportiones ad Geometriam reuocare: qui vſus maximè ad ſolidæ magnitudinis conſiderationes conducit; vtinam Geometriæ ſtudioſi vaſtitatem Oceani Geometrici perſpectam haberent, non hærerent in elementis ſulque deque inuertendis, &, vt dici ſolet, de charta in papyrum transferendis.

DEFINITIO II.

Rationum denominatores voco, quantitates quæ mutua habitudine ſua exponunt qualis ipſas inter rationes proportio intercedat.

EXPLICATIO.

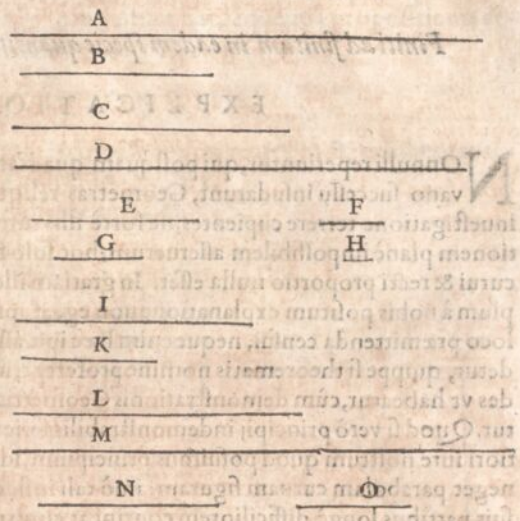
A / B — E

C / D — F

DAtæ ſint rationes A ad B, C ad D, & ſint totidem lineæ, E, & F, quarum ratio exprimat proportionem rationis A B, ad rationem C D; hoc eſt, ſit quemadmodum linea E ad lineam F, ita ratio A B ad rationem C D: has lineas, E nimirum & F, datarum rationum denominatores appellabimus.

Porrò contemplationem eam omnemq; circa rationum proportiones denominatoreſq; verſatur, ad veram pertinere Geometriam, de qua demonſtrationes illa ſuas non ſecus ac de ſimplicibus quantitatibus, formare poſſit, extra controuerſiam eſſe debet: quæ res vt clarius intelligatur ſciendum eſt, non ſolùm lineas, ſuperficies, & corpora, ad Geometriam ſpectare; ſed omne id cui conuenit eadem ratio propter quam vel lineæ, vel ſuperficies, vel corpora à Geometra tractari poſſint: lineæ enim, ſuperficies, & ſolida, non minùs ad phyſicam contemplationem, imò Metaphyſicam pertinent, ſecundùm conſiderationes ſingulis proprias, quàm ad Geometriam, quæ in lineis, ſuperficiebus & ſolidis nihil aliud contemplatur, quàm diductionem quantitatis, ſecundùm quá, lineæ inter ſe comparantur, aut ſuperficies, aut ſolida, quatenus vna maior vel minor altera, aut alteri eſt æqualis, aut vna per alteram multiplicari, vel inuicem vna alteri addi, aut ab alia demi poteſt. quæ omnia circa æqualitatem aut inæqualitatem verſantur. vnde omnes res phyſicæ, prout huic conſiderationi ſunt ſubiectę, ad Geometriam non minùs ſpectant, quàm tres primariæ ſpecies quantitatis: nam temporis duratio, motus affectiones, ponderum momenta, & ſexcenta alia, ſecundùm eaſdem conſiderationes, Geometricis Theorematibus ſubiecta ſunt. Quare cùm rationes quantitatum inter ſe partim ſint æquales, partim inæquales, ac proinde vna alteri æqualis, alia verò maior, aut minor altera; cumq; ratio minor à maiore tolli queat, & ratio per rationem multiplicari, & ratio rationi adiungi, &c. neceſſariò concluditur etiam rationum notitiam, ad Geome-

Geometriæ ſcientiam planè ſpectare. Difficultas tamen quam Geometræ huc vſque inuenerunt in aſſignandis denominatoribus rationum, ita eos terruit, vt neminem huc vſque reperire potuerim, qui huius mentionem faceret; nonnullos, eoſque paucos reperies, qui tractarint de denominatoribus rationum rationalium, quæ exiſtunt inter terminos, qui Arithmeticè exprimi poſſunt, qui tamen vlteriùs materiam hanc proſequi abſtinuerunt: neque ſanè immeritò. quis enim non hæreat, ſi ab eo poſtuletur, denominatorẽ rationis cuiuſuis, ſcilicet quæ inter datas quantitates A & B conſiſtit, exhiberi? nam iure merito reſponſi loco ſubiunget, rationis denominatorem non cadere ſub cognitionem, niſi ſecunda ratio, verbi gratiâ C ad D, adferatur, cum qua prima A ad B, conferri queat, vt verè inquiri poſſit, qualis ratio exſurgat inter denominatores rationum AB & CD, ac proinde & inter rationes ipſas datas AB & CD, quo facto apparebit non rectè poſtulatum fuiſſe, exhiberi denominatorem rationis A ad B. Deinde ſi ratio A ad B, ad rationem C ad D, perhibeatur eſſe vt E ad F, ita vt denominator rationis A ad B, ſit E, & denominator rationis C ad D, ſit F, ſi quis producat alijs terminis rationem G ad H, ſimilem rationi E ad F, tunc denominatores rationum A ad B, & C ad D, erunt G, & H, non minùs quàm E & F. quare poſtulanti ſibi exhiberi denominatorem rationis AB, non minùs ſatisfiet, proferendo quantitatem G, quàm E. Vnde meritò talis quæſtio quemuis Geometram percellere nata eſt. Conabimur itaque præſenti libro aliquid lucis adferre, pro tenuitate noſtra, huic materiæ, in qua ſi quid fortaſſe Lector adhuc deſideret, dignabitur meminiſſe nullas ſcientias à primo inuentore perfectè traditas fuiſſe.



Ne tamen difficultates iam propoſitas inſolutas præteream, reſpondeo verum eſſe, ſi ratio, quę in numeris exprimi nequeat, ſolitariè ſumatur, denominatorem eius exhiberi Geometricè non poſſe. Quod ſi binæ vel plures fuerint datæ rationes, aſſignari poterunt iuxta ſenſum definitionis noſtræ ſingularum denominatores, qui nimirum demonſtrent quales inter rationes ipſas proportio intercedat. Atque hoc non tantùm à duabus certis lineis præſtabitur, ſed à quibuſcunque alijs, quę prioribus proportionales

tionales existunt. Nihil igitur est cur Geometra percellatur, quod eiusdem rationis cum altera ratione comparatæ, plures denominatores exhibeantur, si iuxta definitionem à nobis positam, probè intelligat denominatorum officium non aliud esse, quàm ostendere qualis inter rationes datas proportio intercedat: id quod non magis per certas lineas E & F, quàm per quascunque alias eandem cum ipsis E, & F, rationem obtinentibus efficietur.

PRINCIPIVM PRIMVM.

Finiti ad finitum in eadem specie quantitatis est proportio.

EXPLICATIO.

NOnnulli reperiuntur, qui postquam quadraturæ circuli multùm, sed vano successu insudarunt, Geometras reliquos à problematis illius inuestigatione terrere cupientes, ne fortè illis inferiores haberentur, solutionem planè impossibilem asseruerunt; hoc solo fundamẽto innixi, quòd curui & recti proportio nulla esset. In gratiam illorum, quamuis principium à nobis positum explanatione non egeat, paucula nihilominùs hoc loco præmittenda censui; neque enim hæc ipsa assertio vanitate carere videtur, quippe si theorematis nomine profertur, immeritò postulant ei fides vt habeatur, cùm demonstrationis Geometricæ nucleo non excludatur. Quod si verò principij indemonstrabilis serie contineri postulent, potiori iure nostrum quod posuimus principium, id sibi vendicat. quis enim neget parabolam curuam figuram? imò tali inflexione inclinatam quæ in suis partibus longè difficiliorem contineat curui rationem quàm circulares; quæ ita inter se sunt vniformes vt qui vnã norit, omnes penè reliquas perspectas habeat, atque inter se comparare queat, non minùs ac Geometræ linearum rectarum inter se rationes contemplantur: parabolæ autem ambitus seu perimeter in suis partibus vsque adeò multiformem complectitur varietatem, vt nullum hactenùs authorem repererim qui de comparatione illarum partium inter se ausus fuerit vel mentionem facere. Nihilominùs nemo inficias ibit rectè ac Geometrico discursu ab Archimede parabolæ cum quadrato assignatam esse rationem; vana igitur prorsus est hæc assertio, quocunque tandem modo intelligatur. quia verò tantùm sunt tres species quantitatis, linea, superficies & corpus; hinc principium nostrum de tribus illis hoc sensu volumus intelligi, vt omnes lineæ siue rectæ fuerint, siue inflexæ; similiter & superficies seu curuis clausæ fuerint terminis, siue rectis; quemadmodum & corpora seu planis superficiebus terminentur, seu non planis, inter se comparari queant secundùm rationes quæ quantitatibus conueniant.

Quod si quis disputationem in medium proferat qua nonnulli non infimæ sortis Geometræ disceptarunt de angulo contingentiæ, an ille scilicet secundùm quantitatem cum angulis rectilineis secundùm aliquam proportionem cõferri possit, responsi loco repono quod anguli siue rectilinei

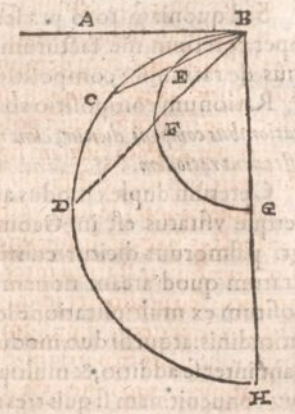
linei fuerint, ſiue curui, ſiue mixti, non alia ratione ad quantitatem ſpectent quàm ſecundùm ſpatium quod continent, ſiue illud planum fuerit, ſiue ſolidum, ſecundùm quod inter ſe non minùs comparari poſſunt quã alia quæuis ſuperficies cum ſuperficie, aut corpus cum quauis ſolida magnitudine: angulus enim in recto (vt cum Philoſophis loquar) non eſt quantitas, ſed quantitatis in obliquo; ſiue aliquid eſt ad quantitatem pertinens. vnde ſecundùm naturam ſuam excludi debet à veris ſpeciebus quantitatis. Quod ſi enim inter veras quantitatis ſpecies angulos admiſerimus, incidemus in labyrinthos, quibus Geometriæ principia ſe deſtruant neceſſe eſt. quod vt manifeſtum fiat, ſequentis propoſitionis demonſtrationem conſiderandam pono.

THEOREMA.

COntingat AB, duos circulos ſe contingentes in B, exhibentes angulos contingentiæ ABCD, ABEF.
Dico hos angulos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

ILlæ enim ſunt dicendæ æquales quantitates, à quibus in infinitum partes demi poſſunt inter ſe æquales: ſed hoc fieri poteſt in angulis dictis. quod ſic oſtẽdo, Diuidatur ſemicirculi perimeter BDH bifariam in D, & ducta BD occurrat circulo BFG, in F: igitur angulus DBH æqualis eſt angulo FBG. eadem operatio fiat de arcu BCD: biſecetur ſcilicet in C, & ponatur recta BG, itaque etiam angulus CBD, æqualis eſt angulo EBF: ſed hoc in infinitum fieri poteſt; igitur quantitas anguli HBCD ſemiperimetri cum diametro æqualis eſt quantitati anguli GBEF ſemiperimetri BFG, cum diametro BG. Quare etiam reſidui anguli contingentiæ qui complent rectum angulum ſunt inter ſe æquales.



Hinc conſequitur doctrina quæ planè deſtruit Geometriæ principia, quod ſcilicet totum ſit parti ſuæ æquale. nam angulus GBEF pars eſt anguli HBCD. Pluribus rem hanc proſequi abſtineo, quod inſtituto noſtro parum conueniat.

Priuſquam nihilominùs concludam, memineris velim non fruſtra additam in principio poſito particulam, *in eadem ſpecie quantitatis*; lineæ etenim cum ſuperficiebus aut ſolidis nec comparantur, nec comparari poſſunt à Geometra; vti nec ſuperficies cum vlla ſolida magnitudine.

PRINCIPIVM SECVNDVM.

Datis tribus vel pluribus quantitatibus, ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus mediarum, siue prima quantitas ad vltimam habet rationem quæ oritur ex denominatoribus mediarum rationum inter se multiplicatis.

EXPLICATIO.

QVod principium etsi verissimum sit, & à magnis Geometris, non semel vsurpatum, non tamen vsque adeò omnibus arridet, vt eius demonstrationem non requirant. ego verò censeo cum omnibus Geometris tamdiu inter principia esse censendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipsum Geometrica demonstratione inter Theoremata reducendi. nec mirum cuipiam videri debet principium hoc communi gregarioque Geometrarum vulgo non ita cognitum, vt requirere videtur principiorum natura; pauci etenim sunt ex ijs qui rationum compositiones, diuisiones, multiplicationesque considerant, eâ scilicet Geometriæ parte contenti quæ elementis vulgaribus continetur.

Sed quoniam toto præsenti libro de rationibus sermo habendus est, operæpretium me facturum existimaui si aliquanto diffusiùs atque veriùs de rationum compositione disputarem.

Rationum compositio ab Euclide hunc in modum definitur: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Cæterùm duplex modus assignari potest componendi rationes, qui vterque vsitatus est in Geometricis. Primus, quo linea trium exempli gr. palmorum dicitur composita ex tribus palmis. Secundus, quo quadratum quod aream nouem palmorum complectitur perhibetur compositum ex multiplicatione longitudinis trium palmorum in tres palmos latitudinis: atqui hi duo modi ita inter se differunt quemadmodum discrepant inter se additio, & multiplicatio. Vterq; horũ modorũ etiam rationibus conuenit: nam si quis tres rationes in medium adducat, duplã nimirũ, triplã & quadruplã, & aliam requirat quæ his tribus æqualis existat ortam ex sola additione inter se datarũ rationum, illi satisfiet, si trium harum rationum denominatores in vnam summã addantur; quo pacto ratio noncupla emerget. Quòd si autem rationem requirat resultantem ex multiplicatione harum rationum, inueniet longè diuersam ab ea quæ per additionem producitur. denominator enim primæ rationis harum trium qui est duo, ductus in denominatorem secundæ, scilicet tria, producet sextuplam rationem; cuius denuo denominator sex ductus in denominatorem quatuor tertiæ rationis harum trium exhibebit rationem vigesies quadruplam, quæ longè alia est ab ea quæ per solam additionem earundem trium rationum est producta. Verùm definitio præsens quam ex elementis

tis Euclidis attulimus, de additione intelligenda non est, sed de sola multiplicatione. quod manifestè patet ex ipsis verbis quibus auctor vtitur, asserens quantitates rationum inter se debere multiplicari, & rationem ex hac multiplicatione resultantem appellat compositam ex rationibus ijs scilicet secundùm quas multiplicatio facta est.

Rationes autem quæ assumuntur, vt inter se multiplicatæ aliquam generent, vel similes inter se sunt, ac proinde eædem (nam ratio sex ad duo tripla est, non minùs quàm ratio nouem ad tria, vnde consequenter similes & eædem dicuntur:) vel sunt diuersæ inter se, quemadmodum est dupla, tripla, quadrupla, &c. Quod si rationes similes sunt quæ inter se multiplicantur, verbi gratiâ, dupla in duplam, tunc ratio quæ ex duabus illis composita est, duplicata dicitur illius rationis quæ fuit inter terminos primæ rationis.

Ponantur verbi gratiâ quotuis rationes similes nouem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decem, trium ad vnum, &c.

			81.					
		27.						
	9							
3		3.		3.		3.		
9.	3.	12.	4.	30.	10.	3.	1.	

Quoniam hæ rationes similes sunt, igitur eundem habent denominatorem siue æqualem, nimirum tria. superponatur itaque denominator tria cuique rationi, quoniam quatuor rationes assumptæ sunt, quatuor quoque erunt denominatores. quod si ducatur primus denominator in secundum, hoc est si fiat multiplicatio 3. per 3. exsurget ratio noncupla, quæ superposita rationi quæ fit ex 3. in 3. ostendet 9. esse denominatorem rationis quæ composita est ex multiplicatione trium in tria, siue denominatore primæ rationis in denominatorem secundæ, diceturq; ratio noncupla esse duplicata eius quam habet ratio nouem ad tria, vel 12. ad 4. Quod si denominator 9. multiplicetur vlteriùs per denominatorem rationis 30. ad 10. qui similiter est tria, resultabit ratio cuius denominator erit 27. diceturq; ratio viginti septupla triplicata rationis eius quam habet ratio nouem ad tria, vel 30. ad 10. Quod si denuo denominator 27. multiplicetur per denominatorem rationis trium ad vnitatem qui est 3. resultabit ex hac multiplicatione ratio 81. quæ dicetur esse quadruplicata rationis eius quam habet 9. ad 3. vel 3. ad 1. Eodem pacto procedendo vlteriùs incides in quintuplicatam sextuplicatam rationem. significant autem hæ formulæ loquendi, vt ex ipsis nominibus manifestum est, rationes has scilicet nouem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decē, & trium ad vnum per se mutuo multiplicari; non autem ad se inuicem addi vt mera fiat aggregatio rationum; duplicata igitur ratio non est ratio simpliciter tripla, sed multiplicata per triplam, & ratio triplicata significat rationem quæ nascitur ex denominatorum multiplicatione bis factâ, atque ita deinceps.

Porrò si assumantur tres vel plures rationes quæ inter se dissimiles sint, quales sunt rationes duorum ad vnum, quatuor ad vnum, & sex ad duo, si harum rationum denominatores superponantur singulis rationibus,

24.
8.
2. 4. 3.
2. 1. 4. 1. 6. 2.

reperiemus duplam, quadruplam, & triplam, & ratio duorum ad vnum ducta in rationẽ quatuor ad vnum, quod fiet per multiplicationem denominatoris 2. in denominatorem 4. exhibebit rationem cuius denominator erit 8. ac proinde octuplam: ratio verò duorum ad vnum, ducta in rationem quatuor ad vnum, hoc est ratio octupla, si ducatur in rationem sex ad duo, quod continget quando multiplicaueris denominatorem 8. per denominatorem 3. prodibit ratio 24. Nullo modo tamen dici debebit ratio 24. ad 3 triplicata, rationis 6. ad 2. neque ratio 8. ad 4. duplicata rationis 2. ad 1. vel 4. ad 1. quamuis per accidens nonnumquam id fieri contigerit; illa etenim nomenclatura solùm conuenit casibus per similes rationes multiplicatis. Quod si quis inter duas

18.
9.
3. 3. 2.
36. 12. 4. 2.

quantitates alias, verbi gratiâ, inter quantitates 36. & 2. interposuerit 12. & 4. vel plures quotcunque; ratio 36. ad 2. dicetur cõponi ex ratione 36. ad 12. & ex ratione 12. ad 4. & tandem ex ratione 4. ad 2. constituantur enim denominatores vti priùs factum est, & superponantur singulis rationibus, scilicet rationi 36. ad 12. quæ est tripla, superponatur denominator 3. & rationi similiter 12. ad 4. quæ etiam tripla est, superponatur denominator idem tria: tandem rationi 4. ad 2. denominator 2. denominator 3. ductus in denominatorem sequentem 3. producat 9. denominatorem rationis noncuplæ, qui multiplicatus per denominatorem 2. rationis 4. ad 2. exhibeat 18. denominatorem rationis octodecuplæ, tunc apparebit qualis ratio resultet ex tribus hisce rationibus, per se inuicem multiplicatis. nam denominator 18. ostendit rationem 36. ad 12. & 12. ad 4. & 4. ad 2. inter se multiplicatas proferre rationem eandem quæ est in 36. & 2. 18. enim ad 1. eandem habet proportionem quam 36. ad 2. Quod autem per numeros hucvsque est explicatum, prorsus vniuersale est in omni genere quantitatum: nam si inter duas lineas A & B, quotuis

A C D E B
F D C E G

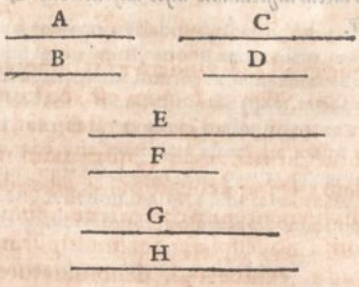
lineæ interponantur CDE, ratio A ad B, dicitur composita ex rationibus A ad C, ducta in rationem C ad D (hoc est ex ratione A ad D,) & ex ratione A ad D, ducta in rationem D ad E, (hoc est ex ratione A ad E.) tandem ex ratione AE, ducta in rationem E ad B, hoc est ex ratione A ad B. nam si semel admittatur quòd ratio A ad C, ducta in rationem C ad D, producat rationem A ad D, debebit quoque admitti quod ratio A ad D, ducta in rationem D ad E, producat rationem A ad E, & consequenter quòd ratio A ad E, ducta in rationem E ad B, proferat rationem A ad B, & sic quòd omnes rationes AC, CD, DE, EB, per

EB, per ſe inuicém multiplicatæ exhibeant rationem primæ A ad vltimam B, atque hoc intelligendum eſt etiam in quauis tranſpoſitione intermediorum. nam ſi ſint æquales F & G, rectis A & B, & eædem lineæ CDE interpoſitæ ſint inter F & G, quæ fuerant inter A & B, ſed ordine prorſus immutato, nihilominùs dicetur ratio F ad G, compoſita ex rationibus intermedijs eodē pacto quo priùs, vt rem conſideranti ſatis perſpicuum eſt. & licet hæc omnia ex elementis nota eſſe Geometris debuerant ſuppoſuiſſe, paucis ea nihilominùs ad memoriam refricandam, præſertim ijs qui ſæpè hæc ſtudia coguntur intermittere, adiungere operæpretium duxi.

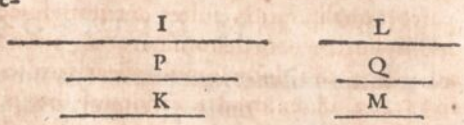
PRINCIPIVM TERTIVM.

Rationes quæ ex ijſdem rationibus componuntur ſiue producuntur, ſunt eædem.

EXPLICATIO.



PRopoſitæ ſint binę rationes AB, CD, & binæ aliæ EF, GH. Si ratio AB compoſita ſit, ſiue producatur ex rationibus EF, GH; itemque ratio CD, ex ijſdem componatur rationibus EF, GH: rationes datæ AB, & CD eædem ſiue æquales erunt.



Quod ſi rationes datæ fuerint IK, LM, quæ ita ex ijſdem rationibus componantur, vt ratio IP, ſit eadem cum ratione LQ, & ratio PK, eadem cum ratione QM, tunc res coincidit cum prop. 22. libri 5. elementorum; erit enim ex æquali vt I ad K, ſic L ad M.

PRINCIPIVM QVARTVM.

Quantitas rationis ſiue denominator ductus in conſequentem terminum rationis producit antecedentem.

EXPLICATIO.

DAta ſit exempli gratiâ ratio A ad B, nempè 12. ad 3. huius rationis denominator eſt 4. qui ductus in 3. conſequentem terminum rationis producit antecedentem, nimirum 12. Idem in quouis caſu eueniet. hoc principium per ſe manifeſtum à varijs aſſumptum fuit, maximè ab Eutocio, Theone, Vitellone.

C 4.
A 12. B 3.

ARGV-

ARGVMENTVM TOTIVS LIBRI.

IN *sex partes librum hunc diuisimus.*

Primâ quidem quæ denominatores rationum concernunt exponemus.

Secundâ verò de similitudine rationum, quæ est inter proportiones, fusè satis disseruimus, ostendimusque omnia quæ rationibus quatuor terminorum competunt, etiam rationibus proportionum accommodari.

In tertiâ multiplicationem rationum complectimur.

In quartâ de proportionibus rectangulorum quæ ex varia compositione rationum oriuntur, agimus.

Quintâ verò parte ea quæ proportionalitatibus Geometricis cum Arithmeticis operationibus communia sunt, explicamus.

Sextâ denique affectiones terminorum proportionalium, ac rationum continuationem, varias denique rationum multiplicationes, complectimur, per quæ aliquam saltem lucem difficillimis hisce anfractibus Geometriæ studiosis prætulisse nobis videbimur.

PRO-

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS PRIMA

Fundamentales propoſitiones complectitur, naturam denominatorum concernentes.

PROPOSITIO PRIMA.

QVarumuis rationum poſſibile eſt denominatores exhibere.

Demonſtratio.

RAtio eſt mutua quædam antecedentis ad conſequens habitudo ſecundùm exceſſum, & defectum vel æqualitatem. Cùm igitur vnius rationis antecedens magis excedat conſequens, vel ab eodem magis deficiat, quàm alterius rationis antecedens ſuum excedat conſequens, vel deficiat ab eodem, manifeſtum eſt vnam rationem maiorem minorémue eſſe alterâ, planè vt vna quantitas alterâ *maior minorue* eſt. Quare ſicuti poteſt exprimi rectis lineis quantò vna quantitas alterâ ſit maior vel minor, ita etiam rectæ lineę exhiberi poſſunt, quæ oſtendant quantò vna proportio maior ſit vel minor quàm altera. Atqui rationum denominatores ſunt tales rectę lineæ, vt patet ex 2. definitione. Quarumuis igitur rationum poſſibile eſt denominatores exhibere. Quod erat demonſtrandum.

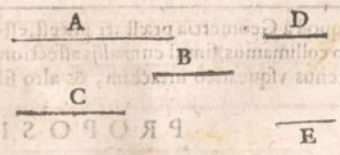
Problematicè autem exhibebimus denominatores propoſ. 13. huius libri.

PROPOSITIO II.

DVæ rationes habentes commune conſequens, eam ſortiuntur rationem quę inter antecedentes terminos reperitur.

Demonſtratio.

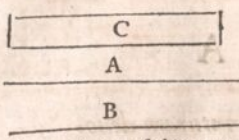
SIt ratio A ad B, & C ad B: illarum autem denominatores ſint D, & E: per quartum principium huius libri, D ductum in B, exhibet A, ſimiliter E ductum in B exhibet C. igitur vt D, ductũ in B, ad E, ductum in B, ita eſt A ad C: ſed D in B ad E in B, eam habet rationem quam D ad E. igitur A ad C, eam obtinet rationem, quam D ad E: ſed vt D ad E,[a] ita eſt ratio A, B, ad rationem C B. igitur vt eſt A ad C, ita eſt ratio A B ad C B: quare duæ rationes commune conſequens habentes, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *Patet ex defin. 2. huius.*

Corollarium primum.

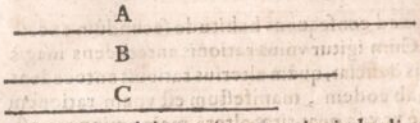
HInc optimo iure inferre licet in rationibus, quæ rectis lineis exprimuntur ita crescere vel minui rationem inter duas quantitates, qualiter augetur vel decrescit altera linearum quantitates expositas exprimens ; hoc est, posito quod rectæ A & B, denotent rationem inter duas quantitates C & D, si adiungatur rectæ lineæ A, recta E,



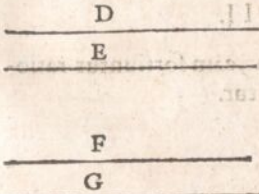
a 28. quin. a erit A cum E, maiorem habens rationem ad B, quàm priùs habebat A ad eandem B : neque solùm maiorem, sed in ea ratione maiorem in qua ratione illi incrementum accedit.

b 29. quin. b idem intellige de mutilatione lineę A per ablationem cuiuscunque tandem particulæ ; omnis enim linearum variatio præiudicium natum est adducere cuicumque proportioni aut rationi. vnde meritò dicere possumus rationes omnes habentes idem consequens ita crescere aut minui, vt augentur vel mutilantur antecedentes rationum termini.

Corollarium secundum.



HInc præterea etiam constat quòd positis tribus quantitatibus quæ sint in continua analogia, nimirum A,B,C, ex eo quod ratio A ad C, ad rationem B ad C, sit vt A ad B, optimè sequi, quod denominator rationis duplicatæ, & denominator rationis simplicis eiusdem seriei habeant rationem inter se, quam duæ primæ quantitates continent inter se : nihil autem aliud intendimus toto proportionalitatum libro, quàm proprietates inuestigare quas habent inter se rationum denominatores. Quamuis autem ipsi denominatores in Geometricis exhiberi non possint secundùm se ; tamen secundùm comparationẽ seu proportionem cum denominatore alterius rationis facilè innotescunt. Datis enim duabus lineis D & E, si quis requirat denominatorem rationis



D ad E, frustra quærit, cùm vel exhiberi non possit, vel quæuis linea ad eundem denotandum assumi possit. Quod si verò alia ratio addatur, & inquiratur proportio quæ intercedit inter denominatorem rationis D ad E, & denominatorem rationis

F ad G, tunc aliquid postulatur quod à Geometria præstari potest, estque ille maximè scopus in quem præsenti libro collimamus, simul cum alijs affectionibus quæ materiam hãc dilucidare queant hactenus vsqueadeò intactam, & alto silentio obuolutam.

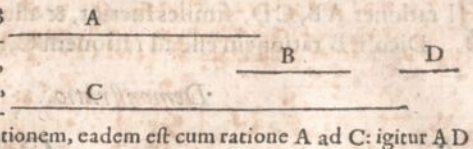
PROPOSITIO III.

DAtis tribus A,B,C iungatur quæuis D.
Dico rationem AD ad CD rationem, eandem habere proportionem, quam ratio AB obtinet ad CB rationem.

Demon-

Demonſtratio.

PEr præcedentem ratio AB ad CB, eandem proportionem habet, quam A ad C, antecedens ad antecedens, inſuper per eandem propoſitionem ratio AD, ad CD rationem, eadem eſt cum ratione A ad C: igitur AD ratio, ad rationem CD, eandem continet proportionem, quam ratio AB ad rationem CB. Quod fuit demonſtrandum.

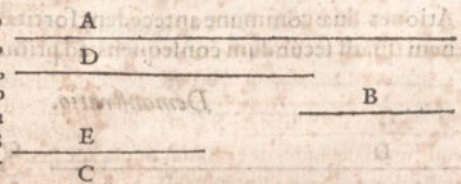


PROPOSITIO IV.

SIt ratio AB ad rationem CB, vt ratio DB ad rationem EB. Dico quantitates A, C, & D, E proportionales eſſe.

Demonſtratio.

QVemadmodum eſt ratio AB ad CB rationem, ita eſt per ſecundam huius, A ad C: ſimiliter vt ratio DB ad EB rationem, ita eſt D ad E: ſed vt ratio AB ad CB rationem, ita ponitur ratio DB, ad EB rationem: ergo vt A ad C, ita eſt D ad E: quare proportionales ſunt A, C & D, E. Quod demonſtrare oportuit.



PROPOSITIO V.

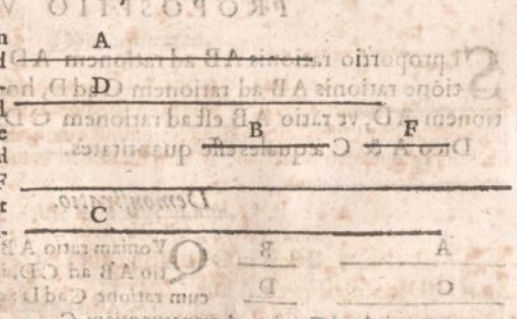
SIt ratio AB ad rationem CB, vt ratio DF ad rationem EF. Dico iterum A, C & D, E proportionales eſſe.

Demonſtratio.

RAtio AB ad CB, eadem eſt cum [a] ratione A ad C, antecedentis ad antecedens. ſimiliter ratio DF ad EF, eadem eſt cum [b] ratione D ad E: ſed vt ratio AB ad CB, ita ponitur ratio DF ad EF. ergo A eſt ad C, vt D ad E. Quod erat demonſtrandum.

a 2. *huius.*

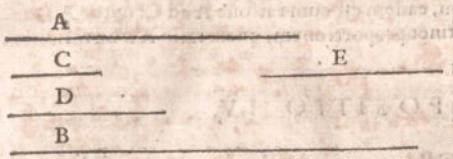
b *Ibid.*



PROPOSITIO VI.

SI rationes AB, CD, similes fuerint, & assumatur quæuis linea E. Dico EB rationem esse ad rationem C,D, vt E est ad A.

Demonstratio.

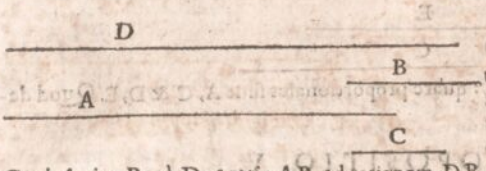


QVoniam similes ponuntur rationes CD, & AB. Vt EB ratio ad CD rationem, ita est eadem ratio EB ad rationem AB: sed per secundam huius, ratio EB ad AB rationem, est vt E ad A, ergo vt E ad A, ita quoque est ratio EB ad CD rationem. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

RAtiones duæ commune antecedens sortitæ, eandem obtinent rationem quam secundum consequens ad primum.

Demonstratio.



SInt duæ rationes AB, & AC, quarũ commune existat antecedens A. Dico illas rationes, inter se eandem habere proportionem, quã C secundum cõsequens, ad B primũ: fiat enim vt

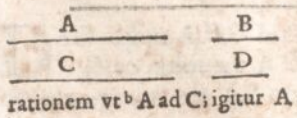
a 2. huius. C ad A, ita B ad D, [a] ratio AB, ad rationem DB, est vt A ad D, sed ex hyp. ratio DB, est ratio AC, ergo ratio AB ad rationem AC, est vt A ad D, sed ex hyp. vt A est ad D, sic C est ad B; patet igitur rationes duas AB & CB, habentes commune antecedens, eam inter se rationem obtinere quam habet C ad B, secundum consequens ad primum. Quod demonstrandum fuerat.

PROPOSITIO VIII.

SI proportio rationis AB ad rationem AD eadem sit cum proportione rationis AB ad rationem C ad D, hoc est si ratio AB sit ad rationem AD, vt ratio AB est ad rationem CD.

Dico A & C æquales esse quantitates.

Demonstratio.



QVoniam ratio AB ad AD rationem, est vt ratio AB ad CD, igitur ratio AD, eadem est cum ratione C ad D: est autem ratio AD ad CD

b 2. huius. rationem vt [b] A ad C; igitur A æquatur etiam C.

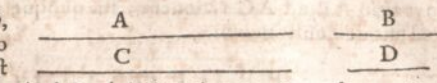
PRO-

PROPOSITIO IX.

SI ratio AB ad CD, fuerit vt D ad B.
Dico A & C æquales esse.

Demonstratio.

RAtio AB ad rationem AD, est vt [a] linea D ad B: ratio autem AB, ad rationem CD, est ex hypothesi vt D ad B: ergo vt ratio AB ad AD rationem, ita eadem ratio AB ad CD rationem, sunt igitur [b] quantitates inter se æquales A & C. Quod fuit demonstrandum.



a 7. huius.

b 8. huius.

PROPOSITIO X.

SI ratio AB ad AC rationem, sit vt ratio AD ad AE rationem.
Dico B, C & D, E quantitates esse proportionales.

Demonstratio.

VT est ratio AB ad AC rationem, [c] ita est C ad B, similiter vt ratio AD ad AE rationem, ita est E ad D, sed vt ratio AB ad AC, ita est ex hypothesi ratio AD ad AE rationem, ergo vt C est ad B, ita E ad D. quare inuertendo vt B ad C, ita D ad E; sunt igitur proportionales BC & DE. Quod demonstrandum fuit.



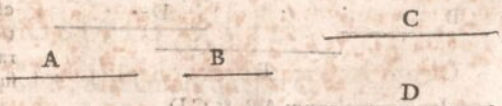
c 7. huius.

PROPOSITIO XI.

EXponantur quæuis quantitates A & B, & duæ aliæ CD.
Dico rationem AC esse ad AD rationem, vt ratio BC ad BD rationem.

Demonstratio.

RAtio AC ad AD, est vt D ad [d] C, & ratio BC ad BD rationem, quoque est vt D ad C, igitur vt ratio AC ad rationem AD, ita est BC ratio ad BD rationem. Quod fuit demonstrandum.

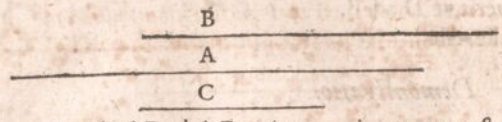


d 7. huius.

PROPOSITIO XII.

DAtæ sint tres quantitates A, B, C.
Dico rationem AB esse ad AC rationem, vt ratio CA ad BA.

Demonſtratio.



a 7. huius. b 2. huius.

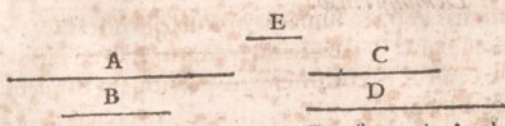
RAtio AB ad AC rationem, eam habet[a] proportionem quam C ad B, ratio autem CA ad BA rationem eſt[b] vt C ad B; ergo vt ratio AB ad AC rationem, ita quoque eſt ratio CA ad BA rationem. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

DAtæ ſint qualeſcunque rationes AB, CD: fiat autem vt D, conſequens ſecundæ rationis ad C antecedens ſecundæ, ita B conſequens primæ rationis ad aliud E.

Dico A & E eſſe denominatores rationum datarum.

Demonſtratio.



c 2. huius. d Defin. 2. huius.

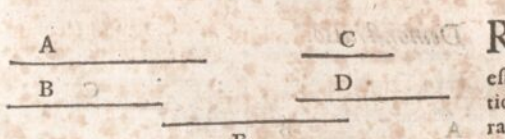
QVoniam ex hypotheſi D eſt ad C, vt B ad E, erit inuertendo ratio E ad B, eadem cum ratione C ad D: ratio igitur AB, ad rationem CD, eſt vt ratio A ad B, ad rationem E ad B; ſed ratio A ad B, ad rationem E ad B, eſt vt[c] A ad E, igitur ratio A ad B, ad rationem C ad D, eſt vt A ad E: ſunt igitur[d] A & E denominatores rationum AB, & CD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

DAtis quibuſcunque rationibus AB, CD, fiat vt C ad D, ita A ad E.

Dico rationum AB, CD denominatores eſſe E, & B.

Demonſtratio.



c 7. huius.

RAtio AB ad AE rationem, eſt vt[c] E ad B, ſed ratio AB eſt ex hypotheſi eadem cum ratione CD. ergo vt E ad B, ita ratio AB ad CD rationem; ſunt igitur E & B, denominatores datarum rationum AB, & CD.

PROPOSITIO XV.

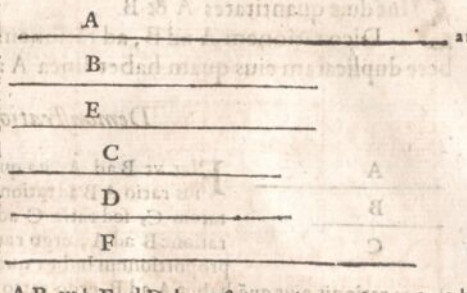
POnatur ratio inæqualitatis AB & altera æqualitatis CD.

Dico rationem AB ad CD rationem, habere proportionem A ad B, rationem verò CD ad AB rationem, habere proportionem quam B ad A.

Demon-

Demonſtratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E, erit [a] vt A ad E, ita ratio AB ad CD rationem: quia autem ex hypotheſi æquales ſunt CD, eſtque vt D ad C, ita B ad E, etiam B & E æquales erunt; cùm igitur ratio AB ſit ad CD rationem, vt A ad E; erit quoque ratio AB ad rationem CD, vt A ad B. Quod erat primum.



[a] 13. *huius.*

Secundam quoque partem ſic demonſtro. fiat vt A ad B, ſic C, ad F. ergo ratio CD eſt ad rationem AB, vt [b] F ad D, hoc eſt (quoniam ex hypotheſi C & D æquantur,) vt F ad C, ſed ex conſtr. F eſt ad C, vt B ad A. Ergo ratio CD eſt ad rationem AB, vt B ad A. Quod erat alterum.

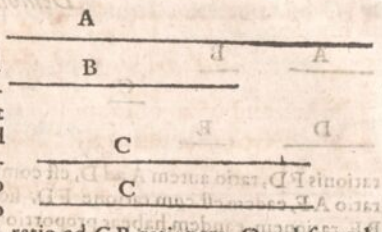
[b] 14. *huius.*

PROPOSITIO XVI.

SIt denuo ratio inæqualitatis AB, & ſumatur quæuis quantitas C. Dico rationem AB eſſe ad CC rationem, vt ratio AC ad rationem BC: rationem verò CC ad AB, continere proportionem eandem cum ratione CA ad CB rationem.

Demonſtratio.

PEr præcedentem ratio AB ad CC rationem, eſt vt A ad B, ſed per ſecundam huius, eſt vt A ad B, ita ratio AC ad rationem BC. ergo ratio AB [c] ad CC, rationem eſt vt ratio AC ad BC. quod erat primò propoſitum. Deinde ratio CC ad AB, rationem eſt vt B ad A, per præcedentem: per ſeptimam verò huius eſt ratio CA ad CB rationem, vt B ad A; ergo vt ratio CC ad rationem AB, ita eſt CA ratio ad CB rationem. Quod ſecundo loco erat demonſtrandum.



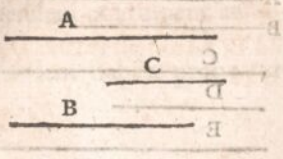
[c] 11. *quinti.*

PROPOSITIO XVII.

SIt ratio quæcunque A ad B, & aſſumpta quæuis C. Dico rationem CA eſſe ad CB rationem, vt ratio BC eſt ad AC rationem.

Demonſtratio.

RAtio CA ad CB, [d] eſt vt B ad A, ratio quoque BC ad AC, eſt [e] vt B ad A; igitur ratio CA eſt ad CB rationem, vt ratio BC ad AC. Quodf uit demonſtrandum.



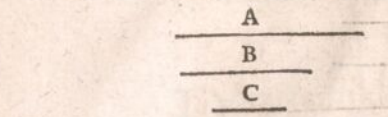
[d] *Per 7. huius.*
[e] *Per 2. huius.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SInt duæ quantitates A & B.
Dico rationem A ad B, ad rationem B ad A, proportionem habere duplicatam eius quam habet linea A ad B.

Demonstratio.



Fiat vt B ad A, ita quædam C ad B, erit igitur per 2. huius ratio A B ad rationem C B, vt quantitas A ad quantitatem C, sed ratio C ad B, ex constructionem eadem est cum ratione B ad A, ergo ratio AB ad rationem B A, eandem proportionem habet quam A ad C: sed ratio A ad C, est duplicata rationis eius quã habet A ad B, ergo ratio A, B, ad rationem B, A, duplicatam habet rationem eius quam habet A ad B. Quod fuit demonstrandum.

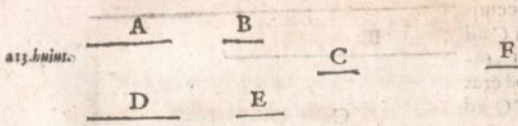
Corollarium.

HInc sequitur si A B C tres fuerint proportionales, A ad C, eandem rationem habere cum eâ quam A B, ratio habet ad rationem B A.

PROPOSITIO XIX.

SInt in continua analogia A B C, D E C.
Dico rationem A D esse ad B E rationem vt B ad E.

Demonstratio.



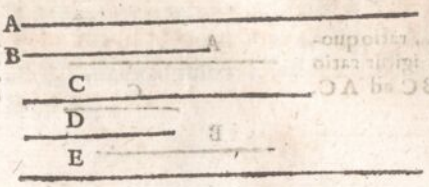
a 13. huius.

Fiat vt E ad B, ita D ad F: erit a vt A ad F, sic ratio A D ad rationem B E, & quia ratio A D est duplicata rationis B E; erit quoque ratio A D, duplicata rationis F D, ratio autem A ad D, est composita ex ratione A ad F, & F ad D: igitur ratio A F, eadem est cum ratione F D, hoc est B ad E. Quare cùm ratio A D ad B E rationem, eandem habeat proportionem quam A ad F, habebit eandem quoque quam B ad E. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

SIt ratio AB eadem cum ratione C D, deinde fiat vt D ad C, ita B ad E.
Dico A & E æquales esse quantitates.

Demonstratio.



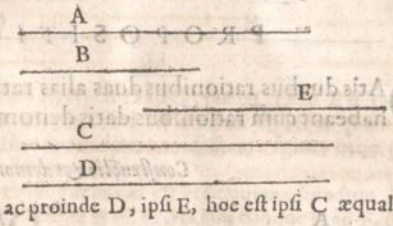
QVoniam similes ponuntur rationes A B & C D, erit vt A ad B, ita C ad D, & inuertendo vt D ad C, ita B ad A; sed ex constructione factum est D ad C, vt B ad E, ergo vt B ad A, ita B ad E; sunt igitur A & E, quantitates æquales. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

SInt rationes AB, CD vt A ad B.
Dico quantitates CD, æquales esse inter se. Quod si ratio CD, sit ad AB rationem, vt B ad A.
Dico rursum D & C, quantitates æquales esse.

Demonstratio.



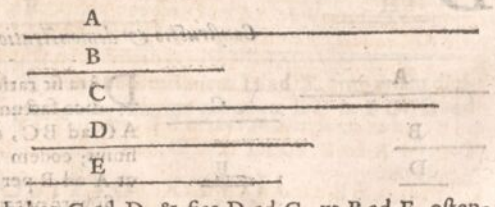
SIt igitur primò ratio AB ad CD, vt A ad B. fiatque ipsi C æqualis E: erit [a] vt A ad B, ita ratio AB ad CE rationem: sed vt A ad B, ita est ratio AB ad CD ex suppositione, ergo vt ratio AB ad rationem CE, ita est eadem ratio AB ad CD: quare eædem sunt rationes CE & CD; ac proinde D, ipsi E, hoc est ipsi C æqualis est: quod erat primum. [a] 15. *huius*

Sit deinde ratio CD ad rationem AB, vt B ad A. Dico similiter C & D æquales esse quantitates. fiat enim vt priùs E ipsi C æqualis, erit vt B ad A, ita ratio CE ad AB rationem, quare iterum vt priùs ostenderur C & D, æquales esse. Quod fuit demonstrandum. Hæc est conuersa 15. huius.

PROPOSITIO XXII.

SIt ratio A ad B maior ea, quam habet C ad D, & fiat D ad C, vt B ad E.
Dico A maiorem esse quàm vt sit æqualis E.

Demonstratio.

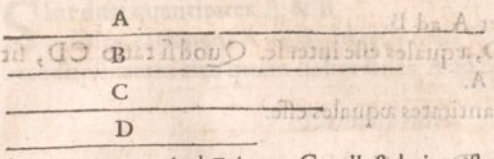


QVoniam est vt D ad C, ita B ad E, ergo ratio AB ad CD rationem, est [b] vt A ad E, sed ex suppositione ratio A ad B, maior est ratione, quam habet C ad D. ergo A maior est quàm E, pari quoque modo quod si ratio A ad B, minor sit ratione quam habet C ad D, & fiat D ad C, vt B ad E, ostenderur A, minor esse quàm sit E. [b] 13. *huiusd.*

PROPOSITIO XXIII.

QVod si quatuor quantitates A, B, C, D eandem continuent analogiam:
Dico rationem AB ad DC rationem, eandem habere proportionem, cum ea quæ intercedit inter A & C.

Demonſtratio.

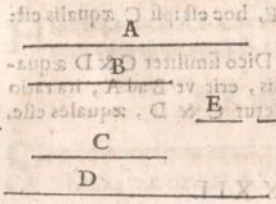


QVoniam proportionales ſunt A,B,C,D in continuata ratione conſtituræ, erit quoque A ad B, vt C ad D,& inuertẽdo vt D ad C,ita B ad A. Sed quoniam A,B,C ſunt continuæ vt A ad C, ita per Coroll 18. huius, eſt ratio A B ad B A, rationẽ, ergo vt A ad C, ita quoque eſt ratio A B ad D C rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

DAtis duabus rationibus duas alias rationes exhibere quæ communes habeant cum rationibus datis denominatores.

Conſtructio & demonſtratio.



a 23. *huius.*

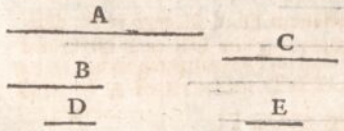
b 2. *huius.*

DAtæ ſint duæ quæuis rationes AB, CD, oporteat exhibere duas rationes illis proportionales quæ denominatores habeant eoſdem. fiat vt D ad C, ita B ad E. erit ergo [a] ratio A B ad C D rationem, vt A ad E. ponatur deinde quæuis F. Dico quod rationes AF,EF erunt, quæ requiruntur. nam [b] ratio AF eſt ad EF rationem vt A ad E; ſed ratio quoque AB ad CD rationem eſt vt A ad E, rationes igitur AB ad CD, reductæ ſunt ad rationes quę communes ſortiantur denominatores. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXV.

DVas rationes exhibere quæ datam inter ſe rationem contineant.

Conſtructio & demonſtratio.



DAta ſit ratio AB, & quæuis ponatur C. dico factum eſſe quod petitur, nam ratio AC ad BC, eſt vt A ad B, per ſecundam huius; eodem modo ratio CB ad CA, eſt vt A ad B per ſeptimam huius.

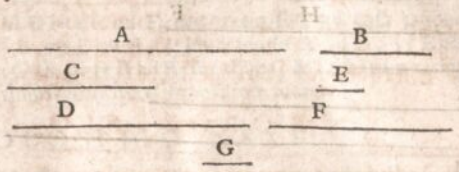
Si verò petantur rationes quarum antecedens vel conſequens commune non ſit, in data ratione exhiberi: fiat vt B ad C, ita D ad E. erit ergo ex conſtr. ratio AC ad DE rationem, vt ratio AC ad BC. ſed ratio AC ad BC, eſt vt A ad B. igitur & ratio AC ad DE, eſt vt A ad B: exhibuimus igitur duas rationes, quæ datam continent rationem. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

DAta ratione A ad B, & duabus quantitatibus C, D: oportet exhibere duas alias E & F, vt ratio CD sit ad rationem EF, vt A ad B.

Constructio & demonstratio.



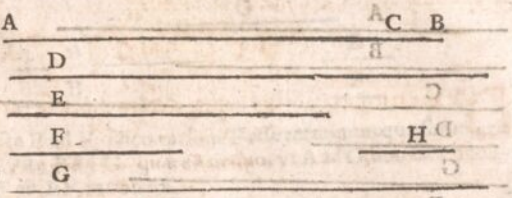
Fiat vt A ad B, ita C ad G, & vt D ad G, ita quæuis F ad E. Dico rationem CD ad EF rationem, eam habere proportionem quam continet ratio A ad B, quia enim facta est F ad E, vti est D ad G, ratio CD ad EF rationem, eam[a] proportionem habet quam C ad G, sed ratio C ad G, est ea quam habent datæ quantitates A & B, secundùm constructionem factam. Igitur ratio CD est ad rationem EF, vt A ad B. Quod erat postulatum. [a] 13. huius.

Quod si C ad D ratio debeat esse consequens, id est vt sit quemadmodum A ad B, ita alia ratio GE ad CD rationem; fiat vt B ad C, ita quæcunque E ad F, & vt B ad A, ita F ad G, tunc erit vt A ad B; ita ratio GE ad CD rationem.

PROPOSITIO XXVII.

DAtam rectam AB ita secare in C, vt sit AC linea ad CB, vt est ratio data DE ad FG rationem.

Constructio & demonstratio.



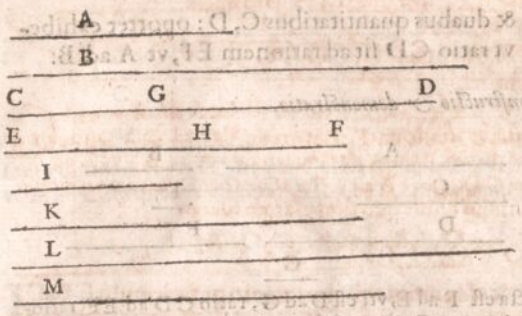
Fiat vt G ad F, ita E ad H, deinde diuidatur AB in C, vt sit quemadmodum D ad H, ita pars lineę AC ad CB residuum. Dico factum quod postulatur, est enim per 17. huius libri ratio DE ad FG rationem vt D ad H. est autem diuisa recta AB in C secundùm rationem D ad H. ergo etiam diuisa est AB, in C, secundùm proportionem datarum rationum DE & FG. Quod erat postulatum.

PROPOSITIO XXVIII.

DAta ratione A ad B, lineisque CD, EF.

Oporteat rectas CD, EF ita diuidere in G & H, vt ratio CG, GD ad rationem EH, HF eandem proportionem contineat quam habet A ad B.

Constructio & demonstratio.



a 25. huius.

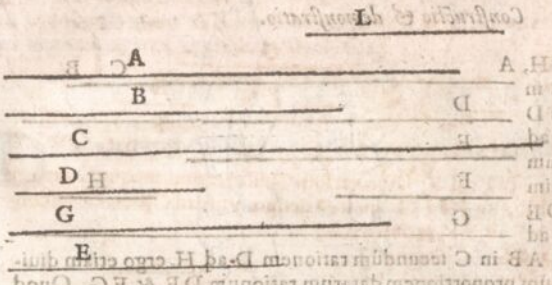
b 10. sexti.

Platæ vt A ad B, ita ratio IK ad LM, diuidaturq; b CD in G, vt ratio CG ad GD, eadem sit cum ratione I ad K, secta quoque EF in H, vt ratio EH ad HF, sit eadem cum ratione L ad M. Dico factum quod postulatur. nã A est ad B, vt ratio IK ad rationem LM ex constructione. sed ratio I ad K, est eadem cum ratione CG ad GD; & ratio L ad M, eadem cum ratione EH ad HF. ergo vt A ad B, ita est ratio CG, GD ad rationem EH, HF. igitur diuisimus lineas CD & EF, prout exigebatur.

PROPOSITIO XXIX.

DAta ratione A ad B, & quantitatibus C & D, oporteat duas exhibere rationes, quarum antecedentes sint C & D, proportionem autem habeant eandem cum ratione A ad B.

Constructio & demonstratio.



c 2. huius.

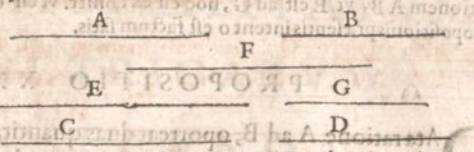
SVmatur quæuis L & fiat vt A ad L, ita C ad G, & vt B ad L, ita D ad E. Dico rationes CG, DE eas esse quæ postulantur. quoniam e ratio A ad L, ad rationem B ad L, est vt A ad B, etiam ratio CG (vtpote eadem per constr. rationi A L) erit ad rationem BL, vt A ad B: sed ex constructione ratio BL, est ratio DE. ergo ratio CG, est ad rationem DE, vt A ad B: & sunt C ac D, termini antecedentes. Factum igitur est quod petebatur.

PROPOSITIO XXX.

DAta iterum ratione A ad B, alijsq; duabus quantitatibus C & D. Oporteat assignare duas rationes quæ talem sortiantur rationem inter se, qualem habent A & B, ita tamen vt C & D, sint consequentes termini earum rationum.

Cau-

Constructio & demonstratio.



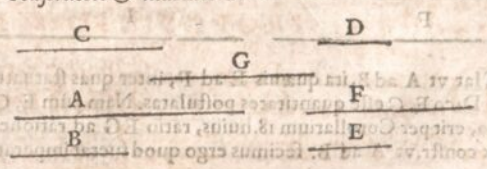
SVmatur quæ uis G, & fiat vt D ad G, ita C ad F, deinde vt B ad A, ita fiat F ad E. Dico rationem EC ad GD rationem, eam continere proportionem quam A ad B: Quoniam est vt D ad G, ita C ad F, erit ratio EC ad GD rationem, [a] vt est E ad F: sed est vt F ad E, ita B ad A, & inuertendo A ad B, vt E ad F. igitur ratio EC ad rationem GD, est vt A ad B: suntque C & D, harum rationum termini consequentes. præstitimus igitur quod imperatum fuerat.

[a] 13. huius.

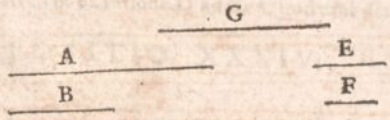
PROPOSITIO XXXI.

DAta ratione A ad B, & denominatoribus duarum rationum C & D; denique termino E assignare quartum F, ita vt ratio data AB ad EF rationem sit vt C ad D.

Constructio & demonstratio.

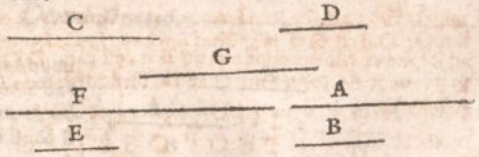


OPorteat primò terminum E esse consequentem rationis eius, cuius denominator esse debet D, fiat vt C ad D, ita A ad G: deinde vt B ad G, ita E ad F. Dico F terminū esse quæsitū: cū enim sit vt E ad F, ita B ad G, erit per 13. huius, vt A ad G, hoc est ex construct. vt C ad D, ita ratio AB ad rationē FE.



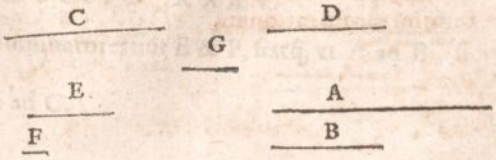
Quod si quæratur vt quantitas E sit antecedens in ratione cuius denominator est D. Fiat A ad G, vt C ad D; & vt G ad B, ita E ad F. Diço rursum F esse terminum quæsitum, erit enim inuertendo vt F ad E, ita B ad G. quare [b] denuo, vt A ad G, hoc est ex construct. C ad D, ita ratio AB ad EF, rationem.

[b] 13. huius.



Oporteat vlteriùs ita disponere terminos rationum vt quantitas E terminus sit consequens illius rationis cuius denominator est C. fiat vt B ad A, ita E ad G, & vt D ad C, ita G ad F. Dico F esse terminum quæsitum. cùm enim sit B ad A, vt est E ad G, iterum ratio FE, ad rationem AB, [c] eam continet proportionem quæ inuenitur inter F & G: sed quia vt D ad C, ita facta est G ad F, erit inuertendo C ad D, vt F ad G. ergo ratio FE ad rationem AB est vt C ad D.

[c] Ibid.



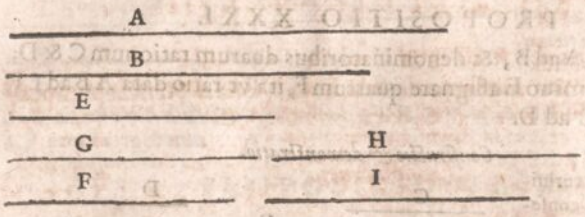
Denique subiungemus etiam methodum quâ quantitas E fiat antecedens illius rationis quę denominatorem habet C. Fiat enim vt C ad D, ita E ad G, & vt A ad B, ita G ad F. dico factum. nam

a 13 huius. inuertendo erit vt B ad A, ita F ad G, proindeque vt priùs a erit ratio EF, ad rationem AB, vt E est ad G, hoc est ex constr. vt est C ad D. Igitur omni ex parte propositionis præsentis intento est factum satis.

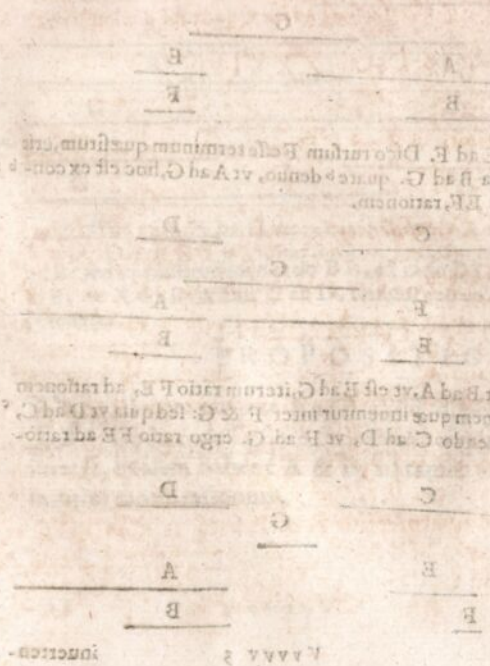
PROPOSITIO XXXII.

DAta ratione A ad B, oporteat duas quantitates exhibere E & G, vt ratio EG ad GE, eam proportionem obtineat quam A ad B.

Constructio & demonstratio.



FIat vt A ad B, ita quæuis E ad F, inter quas statuatur media proportionalis G. Dico E, G esse quantitates postulatas. Nam cùm E, G, F sint in continua analogia, erit per Corollarium 18. huius, ratio EG ad rationem GE, vt E ad F, hoc est ex constr. vt A ad B. fecimus ergo quod fuerat imperatum.



PRO.

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS SECVNDA.

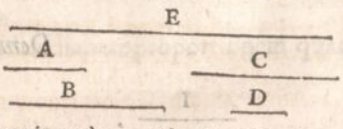
De similitudine proportionum inter rationes existentium.

PROPOSITIO XXXIII.

DAtæ sint rationes A ad B, & C ad D.
Dico proportionem rationis AB ad CD rationem, compositam esse, ex ratione A ad C, & ratione D ad B.

Demonstratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E. erit igitur [a] ratio AB ad CD rationem, vt A ad E: sed ratio A ad E, componitur ex ratione A ad C, & C ad E, igitur & proportio rationis AB ad CD rationem componitur ex ratione A ad C, & C ad E: quia verò ex construct. est D ad C, vt B ad E, erit quoque D ad B, vt C ad E. igitur ratio A ad E, composita est ex ratione A ad C, & ex D ad B. quare & AB, ratio ad rationem CD, proportionem habet compositam ex ratione A ad C, & ex ratione D ad B. Quod erat demonstrandũ.



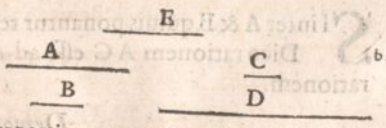
[a] 13. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

IIsdem positis:
Dico proportionem rationis AB ad CD rationem, compositam esse ex ratione A ad B, & ex D ad C.

Demonstratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E, erit itaque [b] ratio A ad E, illa quam inter se habent rationes AB, CD. sed ratio A ad E composita est ex ratione A ad B, & B ad E, hoc est D ad C, igitur & ratio AB, ad rationem CD, compositam habet proportionem ex ratione A ad B, & D ad C. Quod erat demonstrandum.



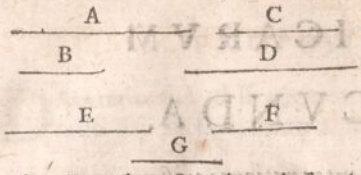
[b] Ibid.

PROPOSITIO XXXV.

RAtionum AB, CD denominatores sint E & F, fiatq; vt A ad B, sic E ad G.
Dico G esse ad F, vt D est ad C.

Demon-

Demonſtratio.



a *Definit. 2. huius.*
b *34. huius.*

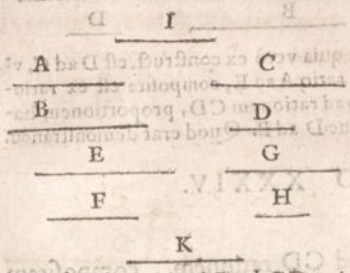
QVoniam E & F, ponuntur denominatores rationum AB, CD: ergo ratio E ad F, eſt[a] proportio rationum AB, CD: ſed proportio rationum AB, CD[b] compoſita eſt ex rationibus AB, & DC. ergo ratio E ad F ex rationibus AB, & CD compoſita eſt, ſed ratio EF componitur etiam ex rationibus EG, (hoc eſt per hypotheſim AB) & GF. ratio igitur AB cum ratione DC eandem rationem componit quàm ratio AB cum ratione GF; rationes igitur DC & GF, cædem ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SI proportio rationis AB ad rationem CD, compoſita ſit ex ijſdem rationibus ex quibus componitur proportio rationis EF ad GH, rationem:

Dico rationem AB eſſe ad CD, vt ratio EF ad GH rationem.

Demonſtratio.



c *13. huius.*

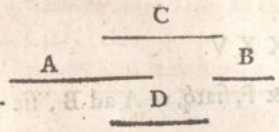
FIat vt D ad C, ita B ad I: & vt H ad G, ita F ad K, erit itaque[c] ratio AB ad CD rationem, vt A ad I; & ratio EF ad GH rationem, vt E ad K, ſed ratio AB ad rationem CD, proportionem habet cõpoſitam ex hypotheſi ex ijſdem rationibus ex quibus cõpoſitam habet ratio EF ad GH rationem; igitur etiam ratio denominatoris A ad I, denominatorem ex ijſdem rationibus ex quibus ratio denominatoris E ad denominatorem K eſt compoſita. quare A eſt ad I, ſicut E eſt ad K. vnde etiam ratio AB ad CD rationem, eſt vt ratio EF ad GH rationem. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XXXVII.

SI inter A & B quiuis ponantur termini C, D.

Dico rationem AC eſſe ad AD rationem, vt ratio DB eſt ad CB rationem.

Demonſtratio.



d *Per 7. huius.*
e *Per 2. huius.*

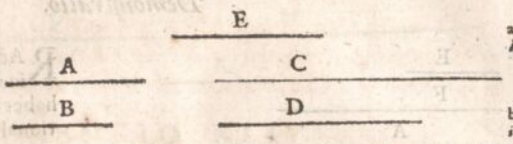
RAtio AC ad AD, eſt vt D ad C, d ratio autem DB ad CB[e] rationem, rurſum eſt, vt D ad C, igitur eſt ratio AC ad AD rationem, vt eſt ratio DB ad CB rationem. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SInt duæ rationes AB, CD, quæcunque.
Dico rationem AB ad CD rationem, eandem habere proportionem quam DC ratio ad BA rationem.

Demonſtratio.



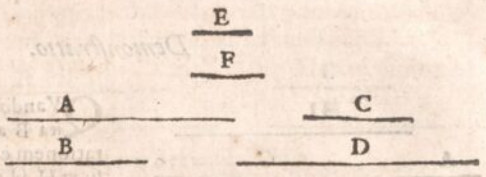
FIat vt D ad C, ita B ad E: erit [a] vt A ad E, ita ratio AB ad CD rationem. Deinde ratio BE ad BA, eſt vt A ad E: [b] ſed ratio B ad E, eadem eſt cum ratione D ad C ex conſtructione, ergo ratio DC ad BA, etiam eſt vt A ad E. quare ratio AB ad CD rationem, eſt vt ratio DC ad rationem BA. Quod erat demonſtrandum.

[a] Per 13. huius.
[b] Per 7. huius.

PROPOSITIO XXXIX.

POnantur denuo rationes AB, CD.
Dico rationem AB ad CD, eandem habere proportionem quam ratio AC ad BD rationem.

Demonſtratio.



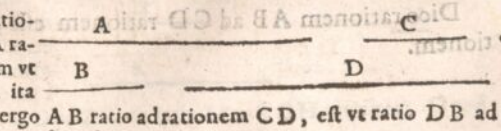
FIat vt D ad C, ita B ad E, erit vt A [c] ad E, ita AB ad CD rationem: ſimiliter poſitis rationibus AC & BD, fiat vt D ad B, ita C ad F, erit vt A ad F, ita ratio AC ad BD rationem: quia verò ex conſtructione eſt vt D ad C, ita B ad E, erit permutando vt D ad B, ita C ad E; ſed vt D ad B, ita facta eſt C ad F, ergo vt C ad E, ita C ad F. ſunt igitur æquales quantitates E & F, adeoque eſt A ad E, vt A ad F; ſed vt A ad E, ita erat ratio AB ad CD rationem, & vt A ad F, ita ratio erat AC ad BD. ergo vt ratio AB ad CD rationem, ita eſt ratio AC ad rationem BD. Quod erat demonſtrandum.

[c] 23. huius.

PROPOSITIO XL.

POſitis iterum duabus rationibus AB, CD.
Dico AB eſſe ad CD rationem, vt ratio DB ad CA rationem.

Demonſtratio.



RAtio AB eſt ad CD rationem, vt [d] ratio DC ad BA rationem: ſed per præcedentem vt ratio DC ad BA rationem, ita ratio DB ad CA rationem, ergo AB ratio ad rationem CD, eſt vt ratio DB ad rationem CA. Quod fuit demonſtrandum.

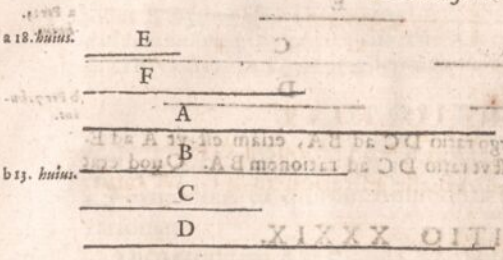
[d] 38. huius.

PROPOSITIO XLI.

POsitis rationibus AB, CD fiat vt D ad C, ita B ad E, statuatur quoque F media proportionalis inter quantitates A & E.

Dico rationem AF ad rationem FA, eandem habere proportionem quam habet ratio AB ad CD.

Demonstratio.



a 18. huius.

b 13. huius.

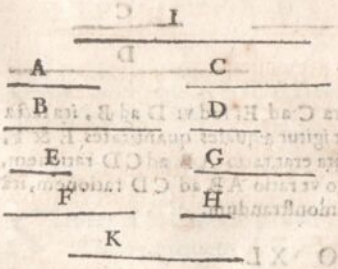
RAtio AF ad FA rationem a est in duplicata ratione eius quam habet A ad F: cùm igitur proportionales ex constructione sint quantitates A, F, E erit vt A ad E, ita ratio AF ad FA rationem: est verò b ratio AB ad rationem CD, vt A ad E, ergò vt ratio AF, ad FA rationem, ita est ratio AB ad rationem CD. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

RAtio AB ad CD rationem, sit vt ratio EF ad GH rationem; fiat verò vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K.

Dico A ad I, eandem obtinere rationem quam E ad K.

Demonstratio.



c Ibid.

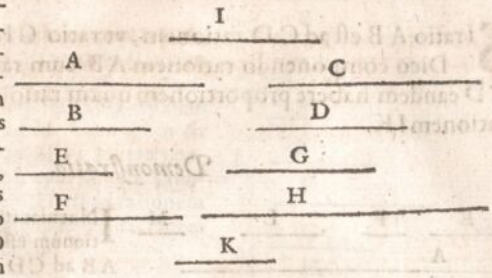
QVandoquidem ponatur vt D ad C, ita B ad I, ergo c ratio AB ad CD rationem est vt A ad I. pari modo cùm sit vt H ad G, ita F ad K, erit etiam vt E ad K, ita ratio EF ad GH rationem. ponitur autem ratio AB ad CD, eandem habere proportionem quam ratio EF ad GH. ergo etiam A ad I, eandem rationem habebit quam denominator E ad K denominatorem. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

SInt rationes AB, CD similes inter se quemadmodum & rationes EF, GH.

Dico rationem AB ad CD rationem esse, vt ratio EF ad GH rationem.

Demonſtratio.



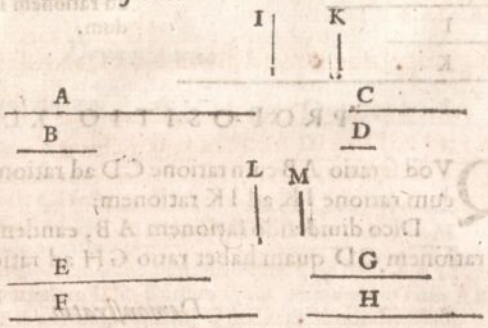
REs tam clara eſt vt demonſtratione vix indigeat, rationes enim eſſe ſimiles, nihil aliud eſt quàm rationes æquales eſſe aut eaſdem inter ſe. Quare cùm rationes AB & CD, ſimiles ponantur, ſibi mutuo æquales erunt, ob eandem cauſam æquales erunt rationes EF, GH. ergo ratio AB ad rationem CD eſt, vt ratio EF ad rationem GH.

PROPOSITIO XLIV.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH.

Dico permutando rationem AB eſſe ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH.

Demonſtratio.



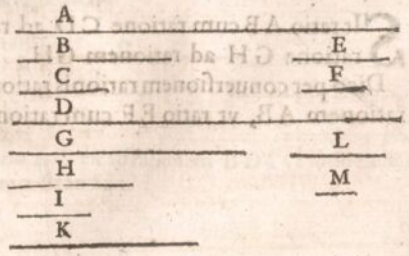
PEr 13. huius inueniantur datarum rationum denominatores I; K; L, M. erit ergo denominator I ad denominatorem K, vt ratio AB ad rationem CD, hoc eſt per hypotheſim vt ratio EF ad rationem GH, hoc eſt vt denominator L ad denominatorem M. Cùm igitur ſit, vt I ad K, ſic L ad M, erit permutando I ad L, vt K ad M. Quare & ratio AB ad rationem EF, eſt vt ratio CD ad rationem GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLV.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio GH ad IK rationem.

Dico inuertendo rationem CD ad AB, eandem eſſe cum ratione IK ad GH.

Demonſtratio.

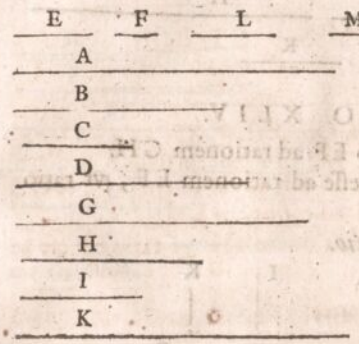


INueniantur a denominatores rationum E, F, L, M. igitur ratio AB ad CD rationem eſt, vt E ad F, & ratio GH eſt, ad IK rationem, vt L ad M, ſed ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio GH ad IK rationem. ergo ratio E ad F, eadem eſt cum ratione L ad M. igitur inuertendo eſt F ad E, vt M ad L, ergo & ratio CD ad AB, vt ratio IK ad GH rationem. Quod erat demonſtrandum. a 13. *huius.*

PROPOSITIO XLVI.

SI ratio AB est ad CD rationem, vt ratio GH ad rationem IK.
Dico componendo rationem AB cum ratione CD ad rationem CD eandem habere proportionem quam ratio GH cum ratione IK ad rationem IK.

Demonstratio.



a *Per 13. huius.*

INueniantur[a] denominatores harum rationum esse E, F, L, M, igitur vt ratio AB ad CD rationem, ita E ad F; & vt GH ratio ad rationem IK, ita L ad M. quia verò ratio AB ad CD rationem ponitur esse vt ratio GH ad IK rationem, ergo est E ad F, vt L ad M. Deinde cùm sit E cum F ad F, vt L cum M ad M. hinc etiam ratio AB, cum CD ad rationem CD, est vt ratio GH cum IK ad rationem IK. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.

QVod si ratio AB cum ratione CD ad rationem CD, sit vt ratio GH cum ratione IK ad IK rationem:
Dico diuidendo rationem AB, eandem habere proportionem ad rationem CD quam habet ratio GH ad rationem IK.

Demonstratio.

b *Ibid.*

COnstituantur[b] singularum rationum denominatores E, F, L, M. Quoniam ratio AB cum CD ad CD, est vt ratio GH cum IK ad IK, igitur denominator E cum F ad F, erit vt denominator L cum M ad M. igitur diuidendo est E ad F, vt L ad M. adeoque etiam est ratio AB ad CD, vt est GH ad IK rationem. Quod erat demonst.

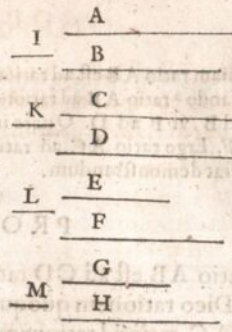
PROPOSITIO XLVIII.

SIt ratio AB cum ratione CD ad rationem CD, vt ratio EF cum ratione GH ad rationem GH.
Dico per conuersionem rationis rationem AB cum ratione CD esse ad rationem AB, vt ratio EF cum ratione GH ad rationem EF.

Demon-

Demonſtratio.

EXhibeantur [a] rationum denominatores I, K, L, M. Erit ergo I cum K ad K, vt ratio AB, cum ratione CD ad rationem CD, hoc eſt ex hypotheſi, vt ratio EF cum ratione GH ad rationem GH, hoc eſt vt L cum M ad M. Cùm igitur ſit vt I cum K ad K, ſic L cum M ad M, erit conuertendo, I cum K ad I, vt L cum M ad L. Quare & ratio AB cum ratione CD eſt ad rationem AB, vt ratio EF cum ratione GH ad rationem EF. Quod fuit demonſtrandum.



[a] *Per 13. huius.*

PROPOSITIO XLIX.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH, & CD ratio ad rationem IK, vt ratio GH ad rationem LM.

Dico ex æquali rationem AB eſſe ad rationem IK, vt ratio EF eſt ad rationem LM.

Demonſtratio.

QVoniam ratio AB eſt ad rationem CD, vt ratio EF eſt ad rationem GH, erit [b] permutando ratio AB ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH. Similiter quia ratio CD eſt ad rationem IK, vt ratio GH ad rationem LM, erit permutando vt ratio CD ad rationem GH, hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt ratio AB ad rationem EF, ita ratio IK ad rationem LM. Rurſum igitur permutando ratio AB eſt ad rationem IK, vt ratio EF ad rationem LM. Quod erat demonſtrandum.



[b] *44. huius.*

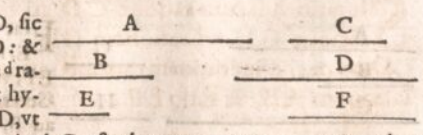
PROPOSITIO L.

SI ratio AB eſt ad rationem CD, vt ratio AE eſt ad rationem CF.

Dico rationem AC ad rationes BD & EF eandem habere proportionem.

Demonſtratio.

VT ratio AB eſt ad rationem CD, ſic [c] ratio AC eſt ad rationem BD: & vt ratio AE eſt ad rationem CF, ſic [d] ratio AC eſt ad rationem EF. ſed ex hypotheſi ratio AB eſt ad rationem CD, vt ratio AE ad rationem CF. Ergo ratio AC eſt ad rationem BD, vt ratio eadem AC ad rationem EF. Quod fuit demonſtrandum.



[c] *59. huius.*
[d] *Ibid.*

Aliter.

a 44. *huius.* b 7. *huius.* QVoniam ratio AB eſt ad rationem CD, vt ratio AE ad rationem CF, erit permutando [a] ratio AB ad rationem AE, vt ratio CD ad rationem CF, hoc [b] eſt E erit ad B, vt F ad D. Quare inuertendo & permutando ratio BD æquatur rationi EF. Ergo ratio AC ad rationes BD, & EF eandem habet proportionem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

SI ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio EB ad FD rationem: Dico rationem quoque EF ad BD, eam habere proportionem quàm AC ratio ad rationem BD.

Demonſtratio.

QVoniam ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio EB ad rationem FD. igitur permutando ratio AB ad EB [c] rationem eſt vt ratio CD ad rationem FD: ſed ratio [d] AB ad EB, eſt vt A ad E. igitur ratio quoque CD ad FD, eſt vt ratio A ad E, ſed ratio CD ad FD, eſt ratio C ad F, igitur ratio A ad E, eadem eſt cum ratione C ad F. vnde A ad C eſt, vt E ad F. ergo ratio AC ad BD, eadem eſt cum ratione EF ad BD.

A / E / B — C / F / D

c *Per* 44. *huius.* d 2. *huius.*

Aliter.

e 39. *huius.* RAtio AB eſt ad rationem CD, vt [e] ratio AC ad rationem BD: & ratio EB eſt ad rationem FD, vt ratio EF ad rationem BD. ſed ratio AB ex hypotheſi eſt ad rationem CD, vt ratio EB eſt ad rationem FD. ergo & ratio AC eſt ad rationem BD, vt ratio EF ad rationem BD. Quod fuit demonſtrandum.

Propoſitio ſequens ita per ſe clara eſt vt potuerit abſque demonſtratione aſſumi, conabimur eam nihilominus hoc loco demonſtrare.

PROPOSITIO LII.

POnantur AB, CD ſimiles rationes, & quæuis ratio EF. Dico quod ratio AB ad rationem EF, eandem rationem obtineat quam ratio CD ad illam ipſam rationem EF.

Demonſtratio.

A / B — C / D — G / H — E / F

f *Per* 13. *huius.* FIat vt F ad E, ita B ad G; item vt F ad E, ita D ad H. erit itaque ratio AB ad EF, vt A ad G, item CD ad EF, vt C ad H. [f] Sed ratio A ad G componitur ex ratione A ad B, hoc eſt C ad D, & ex ratione B ad G, hoc eſt F ad E: item ratio C ad H, componitur ex ratione C ad D, & ex ratione D ad H, hoc eſt F ad E; igitur ratio A ad G, ex iiſdem rationibus componitur ex quibus componitur ratio C ad H. ergo eſt vt [g] A ad G, ſic C ad H, ſed vt A ad G, ſic ratio AB ad rationem EF, & vt C ad H, ſic ratio CD ad rationem EF. ergo vt ratio AB ad rationem EF, ſic ratio CD ad rationem EF. Quod erat demonſtrandum.

g *Princip.* 3. *huius.*

PRO-

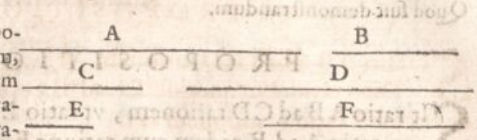
PROPOSITIO LIII.

DAtis duabus rationibus AB, CD, ponatur & tertia EF similis rationi CD.

Dico rationem AE esse ad BF, vt ratio AC ad BD.

Demonstratio.

QVoniam rationes CD, EF ponuntur similes siue eadem, ratio AB ad vtramque, eandem habebit proportionem: sed vt ratio AB ad rationem EF ita [a] ratio AE ad rationem BF: & vt ratio AB ad rationem CD, ita ratio AC ad rationem BD. Ergo ratio AE ad rationem BF, est vt ratio AC ad rationem BD. Quod erat demonstrandum.



a 39. *huius.*

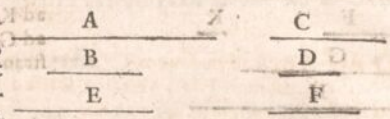
PROPOSITIO LIV.

SI est ratio AB ad CD, vt AE ratio, est ad rationem CF.

Dico quod B sit ad D vt est E ad F.

Demonstratio.

QVoniam ratio AB est ad CD rationem vt ratio AE ad CF rationem, ergo [b] ratio AB est ad AE rationem, vt ratio CD ad CF rationem: ratio autem AB ad AE rationem, est vt E ad B, [c] ergo ratio CD ad CF, est vt ratio E ad B: sed ratio quoque CD ad CF, est vt F ad D, [d] igitur ratio E ad B, est vt F ad D. vnde vt E ad F, ita B ad D, & consequenter B ad D, vt E ad F. Quod fuit demonstrandum.



b *Per* 44. *huius.*

c *Per* 7. *huius.*

d *Per eandem.*

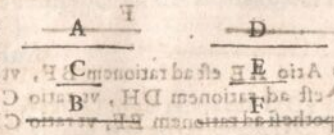
PROPOSITIO LV.

SI ratio AB est ad CB rationem, vt ratio DE ad rationem DF.

Dico A ad C eandem habere rationem quam F ad E.

Demonstratio.

RAtio AB ad CB, est [c] vt A ad C, & vt ratio DE ad DF rationem, sic F est ad E: ponitur autem ratio DE ad DF, eandem habere proportionem quæ est inter AB & CB rationes: igitur vt A ad C, sic F ad E.



c 2. *huius.*

PROPOSITIO LVI.

SIt ratio AB ad CB rationem, vt ratio DE ad FG rationem. Deinde fiat vt G ad F, ita E ad H.

Dico A C, & D, H quantitates esse proportionales.

Demon-

Demonſtratio.

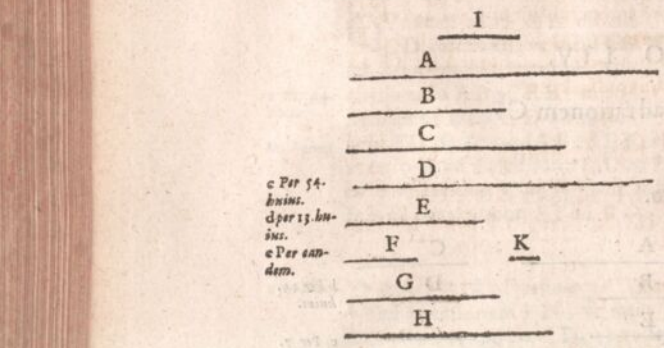


QVoniam eadem eſt ratio AB ad CB, cum ratione DE ad FG, & [a] cùm ratio AB ad CB, ſit vt A ad C, erit pariter ratio DE ad FG, vt A eſt ad C. ſed [b] ratio DE ad FG, eſt vt D ad H; ergo vt A ad C, ita eſt D ad H, proportionales itaque ſunt AC & D,H. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Per 2. huius.
[b] Per 13. huius.

PROPOSITIO LVII.

SIt ratio AB ad CD rationem, vt ratio EF ad rationem GH: ſit autem ratio A ad B eadem cum ratione E ad F.
Dico etiam rationem C ad D, eandem eſſe cum ratione G ad H.



Demonſtratio.

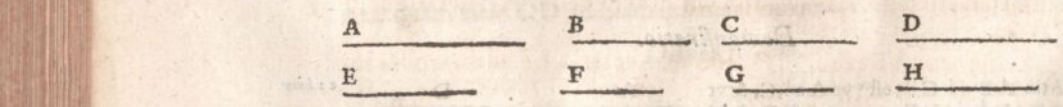
INuentis denominatoribus rationum AB, CD ſcilicet A & I, item rationum EF, GH denominatoribus E & K, quoniam rationes ſunt proportionales, erit vt A ad I, ita E ad K. itaque cùm A ad B, etiam ſit ad B, vt E ad F, erit [c] etiam B ad I, vt F ad K. ſed vt D ad C, ita eſt [d] B ad I, ergo vt D ad C, ita eſt F ad K. ſed H ad G eſt [e] vt F ad K. ergo vt H ad G, ita D eſt ad C. Quod erat demonſtrandum.

[c] Per 54. huius.
[d] per 13. huius.
[e] Per eandem.

PROPOSITIO LVIII.

SIt ratio AB ad EF rationem vt CD ratio ad GH rationem.
Dico rationem AE ad rationem BF, eandem habere proportionem quam ratio CG ad DH rationem.

Demonſtratio.



RAtio AE eſt ad rationem BF, vt [f] ratio AB ad rationem EF; & ratio CG eſt ad rationem DH, vt ratio CD ad rationem GH. ſed ratio AB eſt ex hypotheſi ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH. ergo ratio AE eſt ad rationem BF, vt ratio CG ad rationem DH. Quod erat demonſtrandum.

[f] 39. huius.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

DAtæ sint 8. quantitates A, B, C, D, E, F, G, H.
Dico proportionem rationum AE, BF esse ad proportionem rationum CG, DH, vt proportio rationum AB, EF, est ad proportionem rationum CD, GH.

Demonstratio.

QVoniam [a] ratio AE est ad rationem BF, vt ratio AB ad rationem EF, erit proportio rationum AE, BF eadem cum proportione rationum AB, EF. similiter quoniam ratio CG est ad rationem DH, vt ratio CD ad rationem GH, erit proportio rationum CG, DH eadem cum proportione rationum CD, GH. Ergo proportio rationum AE, BF est ad proportionem rationum AB, EF, vt proportio rationum CG, DH est ad proportionem rationum CD, GH. ergo [b] permutando proportio rationum AE, BF, est ad proportionem rationum CG, DH vt proportio rationum AB, EF ad proportionem rationum CD, GH. Quod erat demonstrandum.

59. $\frac{A}{E}$ $\frac{B}{F}$ $\frac{C}{G}$ $\frac{D}{H}$

[a] 59. huius.

[b] 44. huius.

PROPOSITIO LX.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad GH rationem.
Dico quod ratio AB ad rationem HG, sit vt ratio EF ad DC rationem.

Demonstratio.

CVm ratio AB sit ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH, erit [c] permutando ratio AB ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH; hoc est vt ratio [d] HG ad rationem DC. Rursum igitur permutando ratio AB est ad rationem HG, vt ratio EF ad rationem DC. Quod erat demonstrandum.

24, 5, 10, 2, 4, 5, 10. $\frac{A}{B}$ $\frac{E}{F}$ $\frac{C}{D}$ $\frac{G}{H}$

[c] 44. huius.

[d] 38. huius.

QVod si fuerit ratio AB ad rationem HG, vt ratio EF ad rationem DC.
Dico rationem AB esse ad CD rationem, vt ratio EF ad rationē GH.

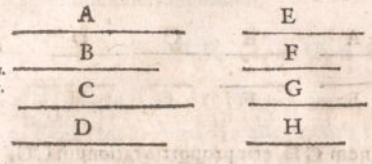
Demonstratio.

QVoniam est ratio AB ad HG rationem, vt ratio EF ad rationem DC; erit permutando ratio AB, ad rationem EF, vt ratio HG ad rationem DC, hoc est per 38. huius, vt ratio CD ad rationem GH; permutando igitur patet propositum.

PROPOSITIO LXI.

SIt denuo ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH. Dico rationem AE esse ad rationem HD, vt ratio BF est ad rationem GC.

Demonstratio.



a 44. huius. b 58. huius. c 38. huius.

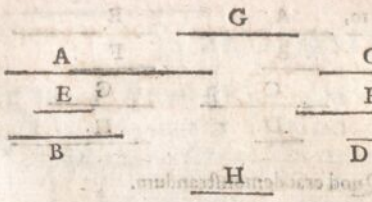
QVoniam ratio AB est ad rationem CD, vt ratio EF est ad rationem GH, erit a permutando ratio AB ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH. ergo & b ratio AE est ad rationem BF, vt ratio CG ad rationem DH. sed ratio CG est ad rationem DH vt c ratio HD ad rationem GC. ergo ratio AE est ad rationem BF, vt ratio HD ad rationem GC: vnde permutando ratio AE est ad rationem HD, vt ratio BF ad rationem GC. Quod erat demonstrandum. Hanc quoque per præcedentem conuertes.

PROPOSITIO LXII.

SImiles ponantur rationes AB, & CD, & inter AB, CD ponantur E & F.

Dico rationem AE esse ad CF rationem, vt ratio FD ad rationem EB.

Demonstratio.



d 13. huius.

FIat vt F ad C, sic E ad G, erit d vt A ad G, sic ratio AE ad rationem CF. Rursum fiat vt B ad E, sic D ad H: erit vt F ad H, sic ratio FD ad rationem EB. Deinde quoniam est vt F ad C, sic E ad G, erit permut. vt F ad E, sic C ad G: item quoniam est vt B ad E, sic D ad H, erit permut. B ad D, vt E ad H: sed ex hypothesi vt A, est ad C, sic B ad D. ergo A, est ad C vt E est ad H. Quoniam igitur est vt A ad C, sic E ad H, & sicut paulò antè ostendi, vt C ad G, sic F ad E, erit ex æqua, sed ratione perturbata vt A ad G sic F ad H, hoc est quemadmodum anteà demonstraui, vt ratio AE est ad rationem CF, sic erit ratio FD ad rationem EB. Quod erat demonstrandum.

FE
EH
AC, E
CG

PROPOSITIO LXIII.

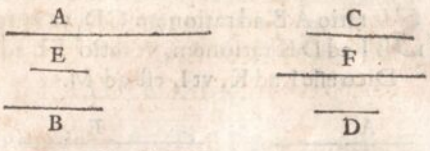
SInt rursum similes rationes AB, CD, & sumantur quæuis E, & F.

Dico rationem EA esse ad rationem FC, vt ratio EB est ad rationem FD.

Demon-

Demonſtratio.

RAtio EA eſt ad rationem EB, vt[a] B ad A, hoc eſt ex hypotheſi vt D ad C, hoc eſt vt ratio FC ad rationem FD. igitur permutando[b] ratio EA eſt ad rationem FC, vt ratio EB ad rationem FD. Quod erat demonſtrandum.



a 7. huius.

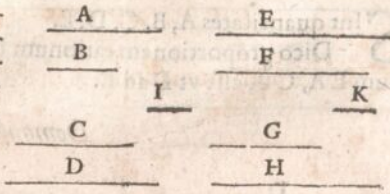
b 44. huius.

PROPOSITIO LXIV.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH. fiat deinde vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K.
Dico rationem AB eſſe ad EF rationem, vt ratio FK ad BI.

Demonſtratio.

QVoniam ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio EF ad GH, igitur[c] ratio A ad I, eadem eſt cum ratione E ad K: ergo per 62. huius, vt ratio AB ad rationem EF, ſic ratio FK ad rationem BI. Quod erat demonſtrandum.



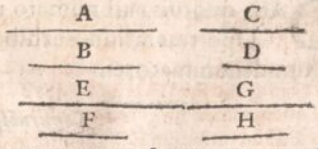
c Per 42. huius.

PROPOSITIO LXV.

SIt ratio AB ad rationem EF, vt ratio CD ad GH rationem, ſitque A ad B, vt C ad D.
Dico eſſe E ad F, vt G ad H. ſi verò ſit A ad E, vt C ad G.
Dico B ad F eandem habere rationem quam D ad H.

Demonſtratio.

QVoniam ratio AB ad EF ponitur eſſe vt ratio CD ad GH rationem, erit igitur ratio AB ad rationē CD, vt ratio EF[d] ad GH rationem. ergo cùm ſit ratio A ad B eadem quæ C ad D, erit & ratio E ad F, eadem cum ratione G ad H. Quod erat demonſtrandum.

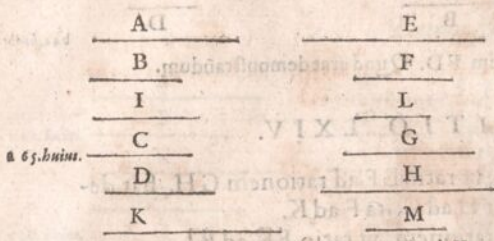


d 44. huius.

Secundam quoque partem ſic demonſtrabimus. quoniam eſt ratio AB ad rationem CD vt ratio EF ad rationem GH; erit etiam per 58. huius ratio AC ad rationem BD, vt ratio EG ad rationem FH: & permutando ratio AC eſt ad rationem EG, vt ratio BD ad rationem FH. ſed ratio AC eadem eſt rationi EG, cùm ex hypotheſi A ſit ad E, vt C ad G. Ergo & ratio BD eadem eſt rationi FH, adeoque & ratio BF, eadem rationi DH, hoc eſt B eſt ad F, vt D ad H. Quod erat ſecundo loco probandum.

PROPOSITIO LXVI.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH, & ratio BI ad DK rationem, vt ratio FL ad rationem HM.
Dico esse I ad K, vt L est ad M.



Demonstratio.

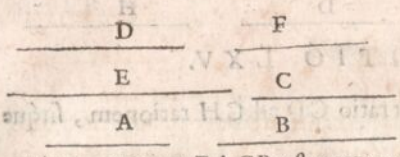
QVoniam est ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad GH rationem, & ratio A ad C, eadem rationi E ad G, igitur [a] B est ad D, vt F ad H: est autem ratio BI ad DK rationem, vt ratio FL ad HM rationem, & est ostensum B esse ad D, vt F ad H, igitur ratio I ad K, eadem est cum ratione L ad M.

a 65. huius.

PROPOSITIO LXVII.

SInt quantitates A, B, C, D, E.
Dico proportionem rationum DA, CB, ad proportionem rationum EA, CB, esse vt D ad E.

Demonstratio.



FIat vt B ad C, ita A ad F, ratio igitur DA, [b] ad rationem CB, est vt D ad F, ratio quoque EA ad rationem CB, est vt E ad F. ergo vt ratio DF, ad EF rationem, ita proportio rationum DA, CB ad proportionem rationum EA, CB: est autem [c] ratio DF ad EF, vt D ad E. igitur proportio rationum DA, CB ad proportionem rationum EA, CB, est vt D ad E. Quod fuit demonstrandum.

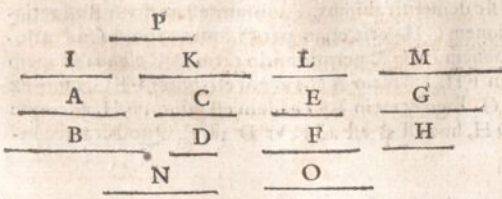
b Per 13. huius.

c Per 2. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

DAtis quotuis pari numero rationibus.
Oporteat rationes exhibere quæ continentur inter rationum datarum denominatores.

Constructio & demonstratio.



DAtæ sint rationes AB, CD, EF, GH quarum denominatores sint I, K, L, M. fiat vt M ad L, ita K ad P. Dico I ad P, rationem esse eam quæ postulatur. ratio enim I ad P exhibet [d] proportionē quam rationes continent IK & LM, qui termini ex constructione sunt denominatores rationum datarum AB, CD, EF, GH. Igitur manifestum est rationem I ad

d 13. huius.

ad P eam esse quæ doceat proportionem quam continent inter se denominatores rationum datarum.

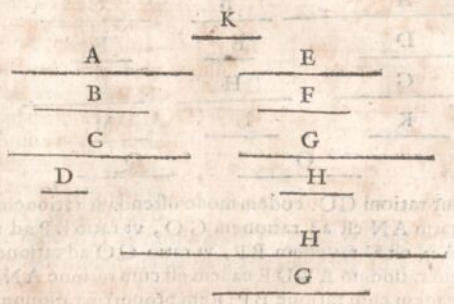
Quod quatuor assumpserim rationes, eo feci consilio quòd ex eo numero sufficienter praxis colligi possit de quouis numero rationum qui par sit. nam si numerus rationū impar fuerit, antecedens remanebit sine consequente: quod per se est manifestū.

PROPOSITIO LXIX.

DAtis tribus rationibus quibuscunque AB, CD, EF & quantitate G. Oporteat inuenire quantitatem H, vt sit quemadmodum ratio AB, ad rationem CD, ita EF ratio ad rationem GH.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad C, ita B ad K: & per 31. huius, inueniatur quantitas H, vt sit quemadmodum A ad K, sic ratio EF ad rationem GH. Dico factum: nam ratio AB est ad rationem CD, vt [a] A ad K, hoc est ex constructione vt ratio EF ad rationem GH.



a 13. huius.

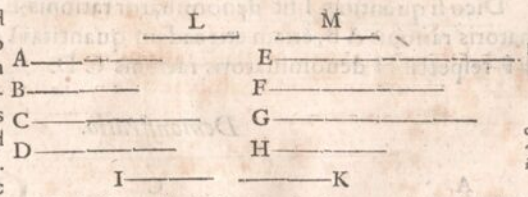
Si volueris quantitatem datam G esse consequens rationis quæsitę, simili discursu per 31. huius habebitur intentum.

PROPOSITIO LXX.

DAtæ sint tres rationes AB, CD, EF; & alia quantitas G. Oporteat autem determinare quantitatem vt proportio rationum AB, CD, ad proportionem rationum EF, GH, datam rationem obtineat I ad K.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad C, sic B ad L. erit ergo [b] proportio rationum AB, CD eadem cum ratione AL. Inueniatur [c] deinde quantitas M, sic vt ratio AL sit ad rationem EM, vt I ad K. Demum fiat vt M ad F, sic G ad H: eritque inuertendo H ad G, vt F ad M: ac proinde proportio rationum EF, GH eadem est cum ratione EM. Quoniam igitur proportio rationum AB, CD eadem est cum ratione AL, & proportio rationum EF, GH, eadem est cum ratione EM, estque per constructionem ratio AL ad rationem EM, vt I ad K: etiam proportio rationum AB, CD, erit ad proportionem rationum EF, GH, vt I ad K. Factum igitur est quod petebatur.



b *Ibid.*

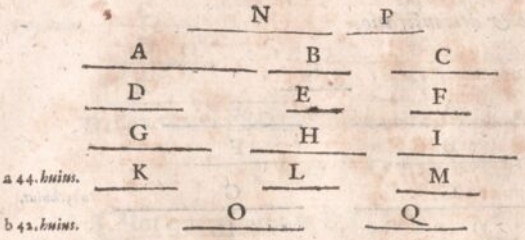
c 25. *huius vel* 31. *huius.*

PROPOSITIO LXXI.

SIt ratio AB ad GH, vt est ratio DE ad KL rationem. sit insuper ratio BC ad HI, vt est EF ratio ad rationem L ad M.

Dico proportionem rationum AB, DE, esse ad proportionem rationum BC, EF, vt proportio rationum GH, KL ad proportionem rationum HI, LM.

Demonstratio.



a 44. huius.

b 42. huius.

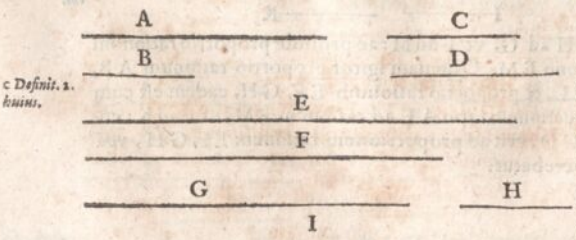
FIat vt E ad D, sic B ad N, & vt F ad E, sic C ad P, vt verò L ad K, sic H ad O, vt demum M ad L, sic I ad Q. Quoniam ex hypothesi ratio AB est ad rationem GH, vt ratio DE ad rationem KL, erit permutando[a] ratio AB ad rationem DE, vt ratio GH ad rationem KL. ergo[b] A est ad N, vt K ad O, hoc est ratio AN æquatur rationi GO. eodem modo ostendam rationem BP æquari rationi HQ. ergo ratio AN est ad rationem GO, vt ratio BP ad rationem HQ. & permut. ratio AN est ad rationem BP, vt ratio GO ad rationem HQ. sed per 13. huius proportio rationum AB, DE eadem est cum ratione AN, & proportio rationum BC, EF eadem cum ratione BP: item proportio rationum GH, KL, eadem est cum ratione GO, proportio denique rationum HI, LM eadem cum ratione HQ. ergo proportio rationum AB, DE est ad proportionem rationum BC, EF, vt proportio rationum GH, KL, ad proportionem rationum HI, LM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXII.

DAtæ sint tres rationes AB, CD, EF, denominatores autem AB, CD rationum, quantitates G & H.

Dico si quantitas I sit denominator rationis EF respectu G denominatoris rationis AB, etiam erit eadem quantitas I denominator rationis EF respectu H denominatoris rationis CD.

Demonstratio.



c Definit. 2. huius.

QVoniam ponitur G denominator rationis AB respectu H denominatoris CD rationis, igitur vt[c] CD ratio ad rationem AB, ita denominator H ad denominatorem G; cumque statuatur rationis AB denominator G, respectu quantitatis I quæ est denominator rationis EF, erit quoque vt ratio AB ad rationem EF, ita denominator G ad I denominatorem. ergo ex æquo erit vt ratio

ratio C D ad rationem E F, ita denominator H ad I denominatorem. Quare & I denominator erit rationis E F respectu H denominatoris rationis eius quam habet C ad D. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIII.

SIt ratio A ad B maior ratione C ad D; & sumatur quæuis alia ratio E ad F.

Dico rationem A B ad rationem E F, maiorem habere proportionem quàm ratio C D.

Demonstratio.



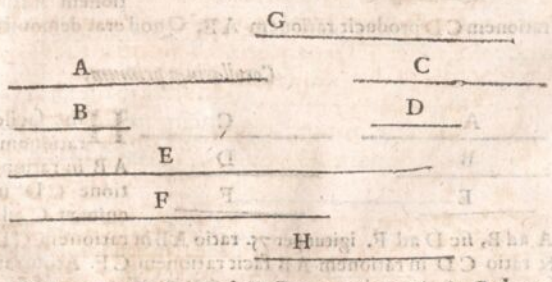
FIat vt D ad C, sic B ad G, & vt F ad E, sic B ad H. erunt per 13. huius A & G, denominatores rationum A B, C D, itemque A & H, denominatores rationum A B, E F. ergo per præcedentem G & H, sunt etiam denominatores rationum C D, E F. Iam verò quia vt ratio A B est ad rationem C D, ita est A ad G, per definitionem 2. huius, estque ratio A B maior ratione C D, ex hypothesi, etiam A maior est quàm G. ergo A maiorem rationem habet ad H, quàm G ad H. sed vt A ad H, sic ratio A B ad rationem E F, & vt G ad H, sic ratio C D ad rationem E F. Ergo & ratio A B ad rationem E F maiorem habet proportionem quàm habeat ratio C D ad rationem E F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

QVod si ratio A B ad C D rationem, proportionem habeat maiorem quàm ratio E F ad C D rationem:

Dico rationem A B maiorem esse quàm sit ratio E F.

Demonstratio.



FIat vt D ad C, sic B ad G, & vt F ad E, sic B ad H. Erunt, itaque A & G denominatores rationum A B, C D, item A & H denominatores rationum A B, E F. ergo [b] G & H sunt denominatores rationum C D, E F. Iam verò quoniam est vt ratio A B ad rationem C D, ita A ad G, & vt ratio E F ad rationem C D, ita H ad G, estque ratio A B ad C D rationem in maiori, quam E F ratio ad rationem C D; erit quoque A ad G, in maiori quàm H ad G. ergo A denominator rationis A B maior est quàm H denominator rationis E F. ergo ratio [d] A B maior est ratione E F. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. *huius.*
[b] 72. *huius.*
[c] *Defin.* 2. *huius.*
[d] *Ibid.*

PRO-

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione seu compositione.

RAtionum multiplicationem à compositione non differre satis arbitror, is intelliget, qui non ignoret definitiones 5. libri sexti elementorum, eaque legerit quæ in secundo principio huius libri exposuimus. Iuuat tamen, quando sæpiùs deinceps id à me assumi debet, Lectori verbo vno memoriam refricare. Datæ sint tres quantitates A, B, C, aut plures: Dicimus ergo, rationem A C & componi ex rationibus A B, B C, & produci ex ijsdem rationibus inter se multiplicatis, ac proinde rationem omnem produci ex multiplicatione earum rationum, quæ ipsam componunt.

A
B
C

PROPOSITIO LXXV.

DAtæ sint rationes A B, & C D. Fiat vt C ad D, ita B ad E.
Dico rationem A B ductam in rationem C D producere rationem A E.

Demonstratio.

A
B
E

C
D

RAtiones A B, B E componunt rationem A E. sed ratio B E est ratio C D ex constructione. Ergo ratio A B cum ratione C D componit rationem A E. ergo ratio A B ducta in rationem C D producit rationem A E. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.

A
B
E

C
D
F

HInc facilè deducemus eandem rationem produci ex ratione A B in rationem C D, quæ fit ex ratione C D in rationem A B. fiat enim vt C ad D, sic B ad E; & vt A ad B, sic D ad F. igitur per 75. ratio A B in rationem C D, facit rationem A E, & ratio C D in rationem A B facit rationem C F. Atqui rationes A E, C F eædem sunt. Ergo, &c. quod autem rationes A E, C F sint eædem, sic ostenditur. per constr. D est ad F, vt A ad B; & C est ad D, vt B ad E. ergo 23. quinti, C est ad F, vt A ad E.

Corollarium secundum.

DAtis duabus rationibus A B, C D, exhibebimus rationem quæ producitur ex ratione A E ducta in rationem C D.

Fiat

Fiat enim vt C ad D, sic A ad E, Dico rationem AB ductam in rationem CD producere rationem AE. Demonstratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO LXXVI.

DAta sit quæuis ratio A ad B.

Dico rationem AB ductam in rationem BA producere rationem æqualitatis.

Demonstratio.

QVantitati A æqualis assumatur quantitas C: ratio A ad C componitur ex ratione AB, & ratione BC, [a] hoc est ratio A ad C, producitur ex multiplicatione rationum AB, & BC. sed ratio BC est ratio BA, est enim C æqualis A. Ergo ratio A ad C etiam producitur ex multiplicatione rationum AB, & BA. sed ratio AC est ratio æqualitatis; liquet ergo propositum.

[a] *Princip. 2. huius.*

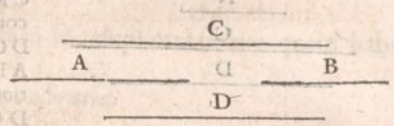
PROPOSITIO LXXVII.

SI inter A & B quiuis ponantur termini C, D.

Dico AC rationem ductam in CB eandem producere quam ratio AD ducta in DB rationem.

Demonstratio.

RAtio A ad B, componitur ex rationibus AC & CB, hoc est [b] producitur ex rationum AC & CB multiplicatione. Eadem quoque ratio A ad B, componitur ex rationibus AD, & DB; hoc est producitur ex ductu rationum AD, DB. Ergo ratio AC ducta in rationem CB, eandem producit rationem quam ratio AD ducta in rationem DB. Quod erat demonstrandum.

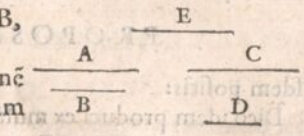


[b] *Ibid.*

PROPOSITIO LXXVIII.

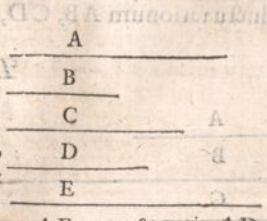
DAtæ sint quatuor quantitates A, B, C, D.

Dico rationem AC ductam in rationẽ BD eandem producere rationem quam ratio AD, ducta in rationem BC.



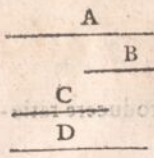
Demonstratio.

FIat vt B ad D, sic C ad E. Ergo per 75. huius A ad E, producitur ex multiplicatione rationum AC, & BD. Deinde quia est vt B ad D, sic C ad E, erit permutando B ad C, vt D ad E. ergo ratio AD ducta in rationem DE idem producit quod ratio AD ducta in rationem BC. sed ratio [c] AD ducta in rationem DE producit rationem AE. ergo & ratio AD ducta in rationem BC producit rationem AE, sed hanc etiam producit ratio AC, ducta in rationem BD, vt ostendi suprà. Ratio igitur AC ducta in rationem BD, idem producit quod ratio AD ducta in rationem BC. Quod erat demonstrandum.



[c] *Ibid.*

Corollarium.



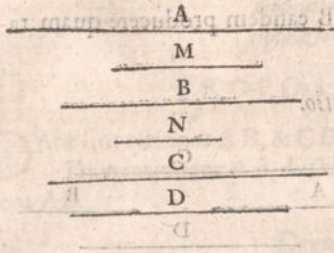
HInc ſequitur datis tribus quantitatibus A, C, D. quod ratio AC ducta in rationem CD, producat idem quod ratio AD ducta in rationem æqualitatis. Sumatur enim B, æqualis C, per 78. ductus rationum AC, BD producit idem quod ductus rationum AD, BC. Atqui rationes AC, BD, ſunt rationes AC, CD (eſt enim B æqualis C:) ergo ductus rationum AC, CD idem producit quod ductus rationum AD, BC, hoc eſt ratio AD ducta in rationem æqualitatis.

PROPOSITIO LXXIX.

IIſdem poſitis:

Dico rationem AB ductam in rationem CD, idem producere quod ratio AD ducta in rationem CB.

Demonſtratio.



a 75. huius.

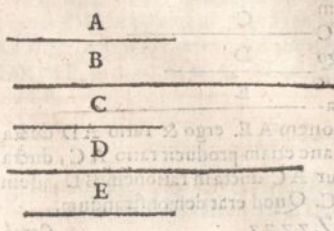
Fiat vt C ad D, ita B ad N; ergo ratio AB ducta in rationem CD, producit rationem AN. rurſum fiat vt A ad D, ſic B ad M. igitur a rationes AD, CB inter ſe multiplicatæ producunt rationem CM. Iam verò quoniam rationem AC componunt tã rationes AB, BC, quã AD, DC rationes; idem producent rationes AD, DC inter ſe multiplicatæ quod rationes AB, BC. ſed per conſtruction. ratio DC eſt ratio NB, & ratio AD eſt ratio BM. ergo etiam rationes NB, BM idẽ producunt quod rationes AB, BC. ſed rationes AB, BC producunt rationem AC, & rationes NB, BM producunt rationem NM. rationes igitur AC, NM ſunt eædem. Igitur permutando etiam rationes AN, CM eædem ſunt. Atqui ſuprà oſtendi rationes AB, CD producere rationem AN, rationes verò AD, CB producere rationem CM. ergo rationes AB, CD idem producunt quod rationes AD, CB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

IIſdem poſitis:

Dico idem produci ex multiplicatione rationum AC, BD, quod fit ex ductu rationum AB, CD, & BC bis ſumptæ.

Demonſtratio.



b Prine. 2. huius.

Fiat vt B ad C, ſic D ad E, ratio A ad E, componitur ex rationibus AB, BC, CD, DE, hoc eſt, quoniam rationes BC, DE, ex conſtruct. ſunt eędem, ex rationibus AB, CD, & BC bis ſumptæ. ergo ratio b A ad E producitur ex ductu rationum AB, CD, & BC bis ſumptæ. ſed ratio A ad

A ad E, etiam cõponitur ex rationibus A D & D E, hoc est ex rationibus A D, B C, ac proinde ratio A ad E, producitur ex ductu rationum A D, B C. Idem ergo producit ductus rationum A B, C D, & B C bis sumptæ quod producit ductus rationum A D, B C. sed per 78. huius ductus rationum A D, B C idem producit, quod ductus rationum A C, B D. ergo ductus rationum A B, C D, & B C bis sumptæ idem producit quod ductus rationum A C, B D. Quod erat demonstrandum.

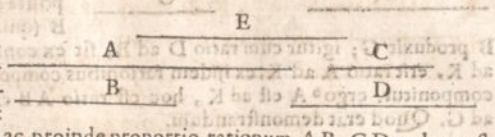
PROPOSITIO LXXXI.

SInt duæ quæuis rationes A B, C D.

Dico proportionem rationum A B, C D esse eandem cum ea quæ oritur ex multiplicatione rationum A B, D C.

Demonstratio.

FIat vt D ad C, sic B ad E. patet ex 75. huius rationem A E produci ex multiplicatione rationum A B, D C. Deinde per 13. huius ratio A B est ad rationem C D, vt A ad E, ac proinde proportio rationum A B, C D eadem est cum ratione A E. ergo proportio rationum A B, C D eadem est cum ea quæ fit ex multiplicatione rationum A B, D C. Quod fuerat demonstrandum.



PROPOSITIO LXXXII.

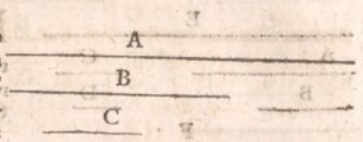
DAta sit quæuis ratio A ad B.

Dico quod ratio A B ducta in se, duplicata sit eius quam habet A ad B.

Demonstratio.

FIant proportionales A, B, C. erit [a] ergo ratio A ad C, illa quæ fit ex A B ducta in B C, hoc est in seipsam. sed ratio A ad C duplicata est eius quam habet A ad B, igitur ratio A ad B, ducta in se ipsam duplicata est rationis A ad B. Quod erat demonstrandum.

[a] *Princ. 2. huius.*



PROPOSITIO LXXXIII.

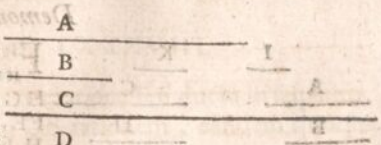
RAtio A ad B similis sit rationi C ad D.

Dico rationem A B ductam in D C, producere rationem æqualitatis.

Demonstratio.

QVoniam ratio A B similis est rationi C D, erit inuertendo ratio B A similis rationi D C. quod ergo fit ex multiplicatione rationis A B in rationem B A; fit etiam ex ductu rationis A B in rationem D C. sed ex ductu rationis A B in rationẽ B A [b] producitur ratio æqualitatis; ergo & ex ductu rationis A B in rationem D C, producitur ratio æqualitatis. Quod erat demonstrandum.

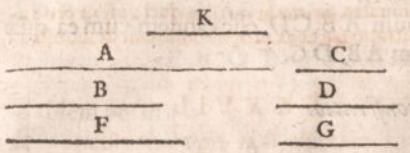
[b] *76. huius.*



PROPOSITIO LXXXIV.

DEntur quatuor quantitates AB, CD; & A ductum in D producat F, & C ductum in B, producat G.
Dico rationem AB ad CD rationem, esse vt F est ad G.

Demonstratio.



a *Per 13. huius.*

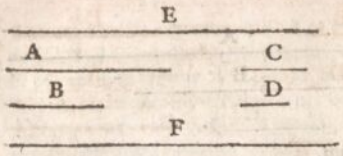
FIat vt D ad B, ita C ad K, erit itaque [a] ratio AB ad CD rationem, vt A ad K, ratio verò A ad K, composita est ex ratione A ad C, & C ad K: ratio quoque F ad G, composita est ex ratione A ad C, & D ad B (quia A in D produxit F, & C in B produxit G; igitur cùm ratio D ad B, sit ex constructione eadem cum ratione C ad K, erit ratio A ad K, ex ijsdem rationibus composita, ex quibus ratio F ad G, componitur. ergo [b] A est ad K, hoc est ratio AB est ad rationem CD, vt F est ad G. Quod erat demonstrandum.

b *Princip. 3. huius.*

PROPOSITIO LXXXV.

POsitis quatuor terminis AB, CD. Si A ductum in D producat E quantitatem æqualem F, quę fit ex ductu C in B.
Dico rationes AB & CD æquales esse seu similes.

Demonstratio.



PEr præced. ratio AB ad rationem CD, est vt E ad F, sed E ad F ratio æqualitatis est, cùm æquales sint ex hypothesi; igitur ratio AB æqualis est seu similis rationi CD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc si AB, CD similes fuerint rationes, A in D producet idem quod C in B.

PROPOSITIO LXXXVI.

DAtæ sint quatuor rationes proportionales AB, CD, EF, GH.
Dico ex prima AB ducta in quartam GH, idem produci quod ex ductu secundæ CD, & tertiæ EF.

Demonstratio.



c *23. huius.*
d *15. huius.*

FIat vt G ad H, sic B ad I; & vt E ad F, ita D ad K. erit [c] ratio AB ad rationem HG vt A ad I, & ratio CD ad rationem FE, vt C ad K. Rursum quoniam est vt G ad H, sic B ad I, ratio [d] AI producitur ex multiplicatione rationum AB, GH. Et quia est vt E ad F, sic D ad K, ratio CK producitur ex ductu rationum EF, CD. Deinde quia ratio AB est

AB est ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH, etiam [a] ratio AB est ad rationem GH, vt ratio CD ad rationem FE. sed antè ostendi A esse ad I, vt ratio AB est ad rationem GH, & C esse ad K, vt ratio CD est ad rationem FE. ergo A est ad I, vt C ad K, hoc est ratio AI producta, vt suprà demonstraui, ex multiplicatione rationum AB, GH, primæ & quartæ eadem est cum ratione CK producta ex multiplicatione rationum CD, EF, secundæ ac tertiæ. Quod erat demonstrandum. [a] 60. huius.

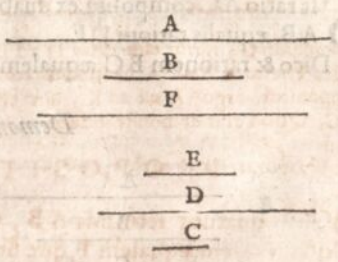
Corollarium.

QVod si tres fuerint rationes proportionales, prima in tertiam ducta idem producet quod media in seipsam. Demonstratio patet ex propositione iam demonstratâ si media ratio bis sumatur.

PROPOSITIO LXXXVII.

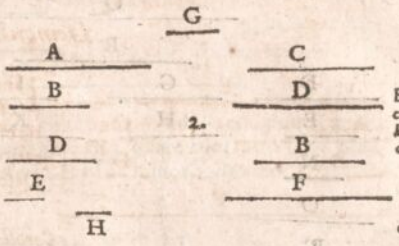
SI ratio AB ad CD rationem, eandem habeat rationem quam DE ratio ad rationem BF.

Dico A esse ad F, vt C ad E.



Demonstratio.

SInt primò harum rationum termini sex numero, virtualiter octo continentes, vt in primo schemate, cùm ratio AB sit ad CD rationem, vt ratio DE ad BF rationem. igitur ratio AB ducta in BF rationem, æquatur [b] rationi CD in DE. sed ratio AB in BF rationem, est [c] ratio A ad F, & ratio CD in DE, est [d] ratio C ad E. igitur ratio A ad F, eadem est cum ratione C ad E.



[b] 86. huius.
[c] Prim. 2. huius.
[d] 86. huius.

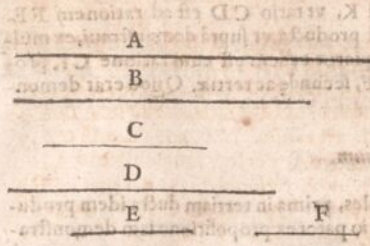
Sint deinde vt in secundo schemate octo terminis inueniantur [e] rationum AB, CD denominatores A & G. item DE, BF rationum denominatores D & H. Quoniam igitur ratio AB ad CD rationem, ponitur esse vt ratio DE ad BF rationem; igitur [f] A ad G, habet eandem proportionem quam D ad H. quare quod oritur ex ductu A in H, æquale erit [g] illi quod generatur ex ductu G in D. ergo etiam ratio A ad B, ducta in rationem B ad F, producet æqualem rationem cum ED ducto in DC. componitur autem ratio AF ex ratione AB ductâ in BF, & ratio E ad C, composita est ex ratione ED in DC; igitur cùm æquales sint rationes AF & EC, erit A ad F, vt E ad C. Quod fuit demonstrandum. [e] 13. huius. [f] 42. huius. [g] Per corr. 85.

PROPOSITIO LXXXVIII.

SIt ratio AB ducta in CD eadem cum ratione EF ducta in seipsam.

Dico rationem AD ductam in CB rationem, eandem quoque esse cum ratione EF ducta in se.

Demonſtratio.



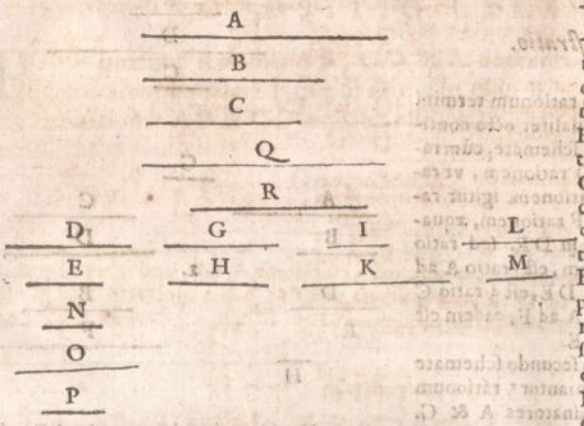
RAtio AB ducta in CD, eadem eſt cum ratione AD ducta in CB: atqui ratio AB ducta in CD, eadem ponitur cum ratione EF in ſe multiplicata; igitur etiam ratio AD ducta in CB, eadem erit cum ratione EF ducta in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

SIt ratio AC compoſita ex duabus rationibus DE, GH, ſitque ratio AB æqualis rationi DE.

Dico & rationem BC æqualem eſſe rationi GH.

Demonſtratio.



Fiat vt G ad H, ſic E ad N. erit igitur ratio D ad N, compoſita ex rationibus DE, & EN, hoc eſt ex rationibus DE, & GH, hoc eſt ex ijſdem rationibus, ex quibus componitur ratio data AC. Ergo per principium 3. huius libri rationes AC, DN ſunt eædem, ſiue A eſt ad C, vt D ad N. Quoniam verò ex hypotheſi eſt vt D ad E, ſic A ad B; erit & B ad A, vt E ad D: & iam oſtendi vt D eſt ad N, ſic A eſſe ad C. ergo ex æquo vt E eſt ad N, hoc eſt vt G ad H, ſic B eſt ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XC.

DAta iam ſit ratio A ad R, compoſita ex quotuis rationibus, DE, GH, IK, LM, ſint autem rationes AB, BC, CQ æquales rationibus DE, GH, IK.

Dico rationem QR æquari etiam rationi LM.

Demon-

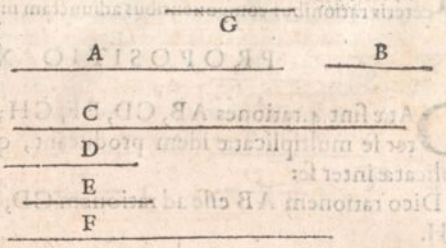
Demonſtratio.

RAtionibus DE, GH, IK, LM æquales fiant rationes DE, EN, NO, OP. Ratio DO componitur ex rationibus DE, EN, NO, hoc eſt per conſtr. ex rationibus DE, GH, IK, hoc eſt per hypotheſim ex ijſdem, quibus componitur ratio AQ. Ergo per principium 3. huius libri, rationes AQ & DO, ſunt æquales. Deinde quoniam ex conſtr. ratio quoque OP æqualis eſt rationi LM, erit ratio DP compoſita ex rationibus DE, GH, IK, LM. ſed ex ijſdem ponitur componi ratio AR. ſi igitur rationes DP, AR æquantur. Quare cùm & rationes DO, AQ iam oſtenderim eſſe æquales, per precedentem ratio quoque QR rationi OP, hoc eſt rationi LM æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCI.

SIt A ad B, ratio maioris inæqualitatis compoſita ex rationibus CD & EF: ſit autem ratio CD maior ratione AB.
Dico rationem E ad F eſſe minoris ad maius.

Demonſtratio.

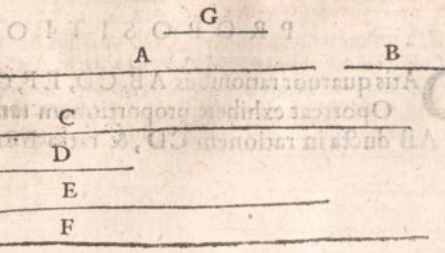


FIat vt C ad D, ita A ad G. Quoniam ex hypotheſi AB ratio componitur ex ratione CD & EF, ratio item AB componitur ex rationibus AG & GB. Quare cùm ratio CD eadem ſit ex conſtructione cũ ratione A ad G. Igitur ratio G ad B, eadem eſt cum ratione quam habet E ad F: ratio verò C ad D, ponitur maior ratione A ad B, igitur ratio A ad G, maior eſt ratione A ad B; eſt igitur G minor quàm ſit B. Vnde ratio G ad B, eſt minoris ad maius. quare cùm ratio G ad B, eadem ſit cum ratione E ad F, erit quoque ratio E ad F, minoris ad maius. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XCII.

SIt iterum ratio AB, maioris inæqualitatis compoſita ex rationibus CD, & EF; ſit autem ratio CD, maior ratione AB.
Dico rationem EF minorem eſſe ratione CD.

Demonſtratio.



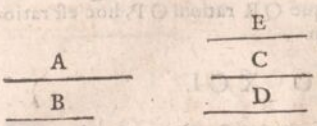
FIat vt C ad D, ſic A ad G, ratio AB componitur ex rationibus AG, GB. eadem quoque ratio AB per hypotheſim componitur ex rationibus CD, EF. Atqui ratio CD ex conſtr. æquatur rationi AG. ergo & ratio EF per 89. rationi GB æqualis eſt. Deinde cùm

cùm ex hypotheſi ratio AB ſit maioris inæqualitatis, ponaturque ratio CD maior ratione AB, etiam ratio CD, erit maioris inæqualitatis. Atqui per præcedentem ratio GB, id eſt EF, tunc eſt maioris inæqual. ergo ratio EF minor eſt ratione CD.

PROPOSITIO XCIII.

RAtio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit ſeipſam.

Demonſtratio.



DAta ſit ratio æqualitatis CD, & alia quæuis A ad B. fiat vt A ad B, ſic D ad E, per 75. huius ratio CE producitur ex ratione AB ducta in rationem CD. ſed ratio CE eadem eſt cum ratione DE (ſunt enim D & C æquales) hoc eſt cum ratione AB ex conſtr. ergo ratio AB ducta in rationem æqualitatis producit ſeipſam. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

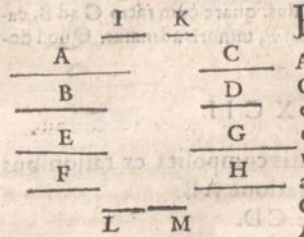
HInc patet rationem æqualitatis in rationum compoſitione ſeu multiplicatione ceteris rationibus componentibus adiunctam nihil addere.

PROPOSITIO XCIV.

DAtæ ſint 4. rationes AB, CD, EF, GH; ſi rationes AB, & GH inter ſe multiplicatæ idem producant, quod rationes CD, EF multiplicatæ inter ſe:

Dico rationem AB eſſe ad rationem CD, vt ratio EF eſt ad rationem GH.

Demonſtratio.



FIat vt G ad H, ſic B ad I: per 75. huius AB, GH rationes inter ſe multiplicatæ facient rationem AI. Rurſum fiat vt E ad F, ſic D ad K. erit ratio CK productum CD, & EF rationum: adeoque ex hypotheſi rationes AI, CK æquales erunt, hoc eſt A erit ad I, vt C ad K. Deinde quoniam eſt vt G ad H, ſic B ad I, erit per 13. huius ratio AB ad rationem HG, vt A ad I. ſimiliter erit ratio CD ad rationem FE, vt C ad K. quoniam ergo A eſt ad I, vt C ad K; erit ratio AB ad rationem HG, vt ratio CD ad rationem FE. ergo & ratio AB eſt ad rationem CD, vt a 60. huius. a ratio EF ad rationem GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCV.

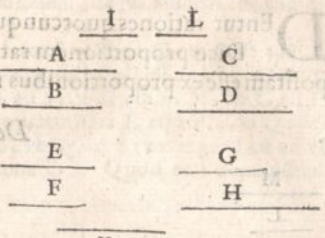
DAtis quatuor rationibus AB, CD, EF, GH.

Oporteat exhibere proportionem rationum quas producunt ratio AB ducta in rationem CD, & ratio EF in rationem GH.

Con-

Constructio & demonstratio.

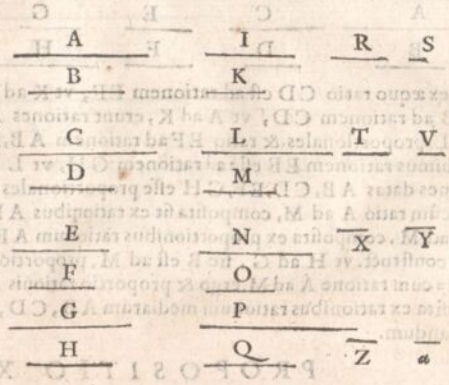
FIat vt C ad D, sic B ad I, & vt G ad H, sic E ad K. per 75. huius erunt rationes AI, EK, illæ, quas producet ductus rationum AB, CD & ductus rationum EF, GH. rationum autem productarum AI, & EK, proportio habebitur si fiat vt K ad E, sic I ad L, vti patet ex 13. huius. Factum est igitur quod petebatur.



PROPOSITIO XCVI.

SIt proportio rationum AB, IK, ad proportionem rationum CD, LM, vt proportio rationū EF, NO, ad proportionem rationum GH, PQ.

Dico proportionem rationum GH, CD, ductam in proportionem rationū NO, PQ idem producere quod proportio rationum IK, LM ducta in proportionem rationū EF, GH.



Demonstratio.

PEr 13. huius inueniantur rationum datarum denominatores R, S : T, V : X, Y : Z, a. Erit ergo proportio rationum AB, IK eadem cum ratione R S, & proportio rationum CD, LM eadem cum ratione T V, & proportio rationum EF, NO, eadem cum ratione X Y, proportio denique rationum GH, PQ eadem cum ratione Z a. Cùm igitur quatuor illæ proportiones rationum sint ex hypothesi proportionales, etiam rationes R S, T V : X Y, Z a proportionales erunt. ergo per 86. huius, ratio R S in rationem Z a, idem facit quod ratio T V in rationem X Y. ergo etiam proportio rationum A B, I K ducta in proportionem rationum G H, P Q, idem producit quod proportio rationum C D, LM ducta in proportionem rationum EF, NO. Quod erat propositum.

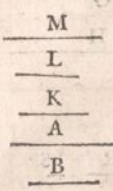
Corollarium.

QVod si proportio rationum AB, IK fuerit ad proportionem rationum CD, LM, vt proportio rationum CD, LM est ad proportionem rationum EF, NO. Dico proportionem rationum CD, LM ductam in seipsam idem producere quod proportiones rationum AB, IK & EF, NO inter se multiplicatæ. Demonstratio patet ex propositione iam demonstrata si bis sumatur media proportio rationum CD, LM.

PROPOSITIO XCVII.

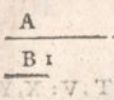
DEntur rationes quotcunque AB, CD, EF, GH.
Dico proportionem rationis primæ AB ad vltimam GH compositam esse ex proportionibus rationum mediarum.

Demonstratio.



Fiat vt D ad C, sic B ad K, & vt F ad E, sic B ad L: vt verò H ad G, sic B ad M. per 13. huius, ratio CD est ad rationem AB, vt K ad A; & per eandem ratio AB est ad rationem EF, vt A ad L. ergo ex æquo ratio CD est ad rationem EF, vt K ad L. Cùm igitur etiam sit ratio AB ad rationem CD, vt A ad K, erunt rationes AB, CD, EF quantitatibus A, K, L, proportionales, & ratio EF ad rationem AB, vt L ad A: eodem discursu probabimus rationem EF esse ad rationem GH, vt L est ad M; adeoque omnes rationes datas AB, CD, EF, GH esse proportionales quantitatibus A, K, L, M. Quare cùm ratio A ad M, composita sit ex rationibus AK, KL, LM, erit quoque ratio A ad M, composita ex proportionibus rationum AB, CD, EF, GH. sed, quoniam ex *construct.* vt H ad G, sic B est ad M, proportio rationis AB ad GH, eadem
a *13. huius.* est a cum ratione A ad M. ergo & proportio rationis AB ad rationem GH est composita ex rationibus rationum mediarum AB, CD, EF, GH. Quod erat demonstrandum.

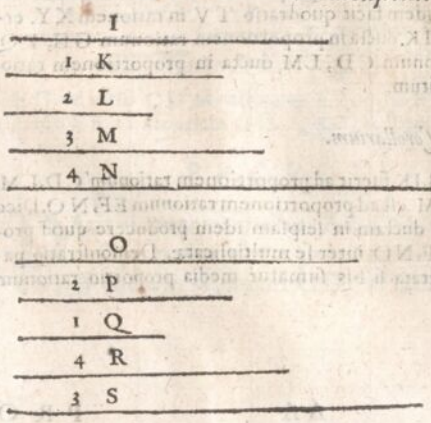
PROPOSITIO XCVIII.



DAtæ sint rationes quotcunq; AB, CD, EF, GH.

Dico ex illis quomodocunque dispositis eandem semper produci siue componi rationem.

Demonstratio.



COntinuentur primò in lineis I, K, L, M, N rationes datæ eo ordine quo dantur, vt ratio prima IK sit eadem primæ AB, & secunda KL, secundæ CD, & sic deinceps. Erit ergo ratio I ad N, producta siue composita ex rationibus AB, CD, EF, GH eo dispositis ordine quo dantur.

Continuentur deinde rationes datæ in lineis O, P, Q, R, S, sed ordine perturbato, vt ratio quidem OP sit æqualis rationi CD, & ratio PQ rationi AB, & ratio QR rationi GH, ratio

ratio demum RS rationi EF. Erit ergo ratio O ad S, producta siue composita ex rationibus OP, PQ, QR, RS, hoc est ex rationibus datis, sed alio ordine dispositis quàm quo sunt datæ. Dico nihilominus rationem I ad N, eandem esse cum ratione O ad S.

Ex constructione enim I est ad K, vt A ad B, hoc est vt P ad Q: & K est ad L, vt C ad D, hoc est, vt O ad P. Ergo ex æqualitate perturbata, I est ad L, vt O ad Q. [a] 23. quinti. Deinde L est ad M, vt E ad F, hoc est, vt R ad S: & M est ad N, vt G ad H, hoc est vt Q ad R. Rursum igitur ex æqualitate perturbata L est ad N, vt Q ad S. Quare cùm I sit ad L vt O ad Q, & L ad N, vt Q ad S, ex æquo I est ad N, vt O ad S, siue ratio IN eadem est cum ratione OS. Quod erat demonstrandum.

T
4 V
1 X
3 Y
2 Z

Quod si alioquouis ordine fiat compositio, simili nihilominus discursu propositum concludetur.

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS QVARTA

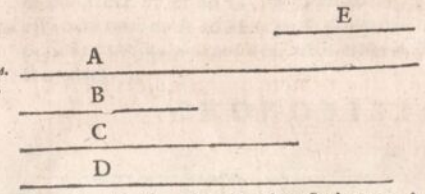
Rationum proportiones considerat: maximè secundùm rectangulorum comparationem quæ fiunt ex terminis rationum, termini autem statuuntur iam lineæ.

PROPOSITIO XCIX.

SInt datæ rationes AB, CD.

Dico rectangulum AD ad rectangulum BC eandem habere proportionem quam ratio AB ad CD.

Demonstratio.



a 13. huius.
b 23. sexti.

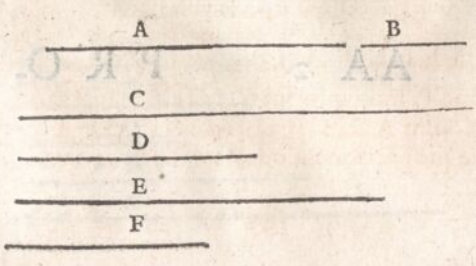
FIat vt D ad C, ita B ad E. erit igitur ratio AB ad CD, vt A ad [a] E: rectangulũ [b] autem AD, ad BC rectangulum habet compositam rationem ex ratione A ad B, & D ad C: est autem D ad C, vt B ad E. quare rectangulum AD ad BC, habet rationem compositam ex ratione A ad B, & ratione B ad E. Sed etiam A ad E, habet rationem compositam ex ijsdem rationibus; igitur rectangulum AD ad BC, est vt A ad E. sed etiam ratio AB ad CD, est vt A ad E: igitur ratio AB ad CD, eadem est cum ratione rectanguli AD ad BC. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO C.

SIt quæuis ratio AB, & aliæ quæuis duæ similes inter se, nimirum CD, EF.

Dico rectangulum AC ad BE rectangulum eandem habere proportionem quam rectangulum AD ad BF rectangulum.

Demonstratio.



RAtio rectanguli AC ad BE, cõposita est ex ratione A ad B, & C ad E: ratio quoque rectanguli AD ad rectangulum BF ex ijsdem componitur: nam ratio A ad B, communis est, ratio verò C ad E, eadem ex hypothesi est cum ratione D ad F; quare patet rectangulum AC

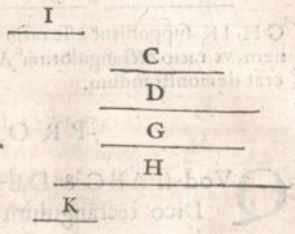
AC ad BE, eam rationem habere quam AD rectangulum ad rectangulum BF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CI.

SIt AB ratio, ad rationem CD, vt est ratio E F ad G H rationem. Dico rectangulum AD ad BC rectangulum, eandem habere proportionem quam E H rectangulum ad rectangulum F G.

Demonstratio.

FIat vt D ad C, sic B ad I. erit ergo vt A ad I, sic [a] rectangulum AD ad rectangulum C B. Rursum fiat vt H ad G, sic F ad K, erit vt E ad K, sic rectangulũ E H ad rectangulum GF. Atqui vt A ad I, sic [b] E ad K. ergo vt rectangulum AD ad rectangulum CB, sic rectangulum E H ad rectangulum GF. Quod erat demonstrandum.



a *Patet ex demonstratu in 99. huius.*

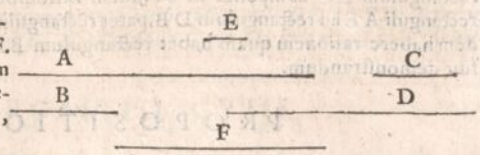
b *42 huius.*

PROPOSITIO CII.

DAtis rationibus AB, CD. Oporteat exhibere quomodo se habeat proportio rationum AB, CD ad rationem rectangulorum AB, CD.

Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad C, ita B ad E. Deinde vt B ad D, ita fiat C ad F. Dico proportionem rationum AB, CD esse ad rationem rectangulorum AB & CD, vt F, est ad E.



Demonstratio.

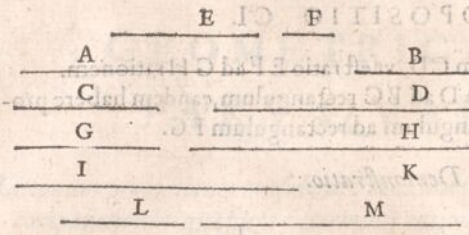
NAm proportio rationum AB, CD per 13. huius est eadem cum ratione AE. Ratio verò quæ est inter rectangula AB, CD componitur ex ratione A ad C, & ex ratione quam habet B ad D, hoc est quam habet ex constructione C ad F, igitur cùm ratio A ad F, etiam componatur ex rationibus AC & CF, ratio rectangulorum AB, CD, eadem est cum ratione AF. sed ratio AE est ad rationem AF, vt F est ad E per 7. huius. ergo proportio rationum AB, CD est ad rationem rectangulorum AB, CD, vt F est ad E. Factum igitur est quod petebatur.

PROPOSITIO CIII.

SI ratio AB ad CD, est vt E ad F, ratio quoque G H ad I K, vt L ad M. Dico rationem rectangulorum AD, CB ad rationem rectangulorum GK, IH eandem habere proportionem quam ratio EF ad LM rationem.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [978] - 921
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

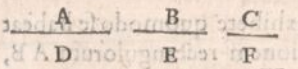


a 99. huius. REctangulum a AD ad CB, eandem habet proportionem quæ eſt inter rationes AB & CD, ſimiliter rectangulum GK ad IH rectangulum eſt, vt ratio GH ad IK rationem. ſed proportio rationum AB, CD ponitur eſſe ratio EF; deinde proportio rationum GH, IK ſupponitur eſſe ratio L M. igitur patet rationem EF eſſe ad LM rationem, vt ratio rectangulorum AD, CB ad rationem rectangulorum GK, IH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CIV.

QVod ſi ABC & DEF proportionales ſint:
Dico rectangulum AE ad rectangulum DB, eandem habere proportionem quam rectangulum BF ad rectangulum EC.

Demonſtratio.

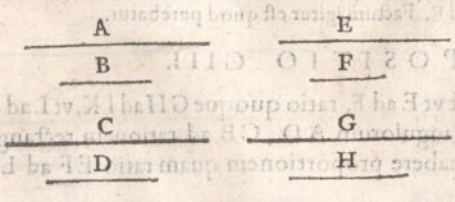


COmponitur enim ratio rectanguli AE ad rectangulum DB ex ratione A ad B, & E ad D. ſimiliter ratio rectanguli BF ad EC rectangulum, ex ijſdem eſt compoſita, nam ratio B ad C, eſt eadem cum ratione A ad B, & ratio F ad E, eadem cum ratione E ad D, ex hypotheſi. ergo cùm ratio BF rectanguli ad rectangulum EC compoſita ſit ex ijſdem rationibus ex quibus componitur ratio rectanguli AE ad rectangulum DB, patet rectangulum AE ad DB, rectangulũ eandem habere rationem quam habet rectangulum BF ad rectangulum EC: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

SInt AB, EF rationes ſimiles ſicut & rationes CD, GH.
Dico primò rectangulum AD ad CB rectangulum, eandem habere rationem quam rectangulum EH ad GF rectangulum.
Secundò rectangulum AC ad BD rectangulum, eandem proportionem habere quam EG rectangulum ad FH rectangulum.

Demonſtratio.



b Per 101. huius. QVoniam ſimiles ponuntur rationes AB, EF, & rationes CD, GH. Igitur ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio EF ad rationẽ GH: igitur b rectangulum AD ad CB, eſt vt rectangulum EH ad GF.

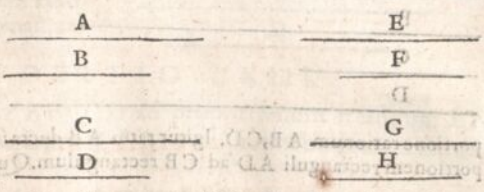
Secundò rectangulum AC ad BD, rationem habet compoſitam ex rationibus A ad B,

A ad B, & C ad D, sed ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli EG ad FH, cùm sint similes rationes AB, EF & similes quoque sint rationes CD & GH. igitur etiam secundæ partis demonstratio constat.

PROPOSITIO CVI.

Ilsdem positis:
Dico rectangulum AH esse ad rectangulum GB, vt ED rectangulum ad FC rectangulum.

Demonstratio.



Rectangulum AH ad rectangulum GB, rationem habet compositam ex ratione A ad B, hoc est E ad F, & ex ratione H ad G, hoc est D ad C; ex quibus etiam componitur ratio rectangulorum ED, FC. ergo rectangulum AH est ad rectangulum GB vt ED rectangulum ad GB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVII.

Ilsdem positis:
Dico rectangulum AG ad BH rectangulum, eandem habere rationem, quam rectangulum EC ad rectangulum FD.

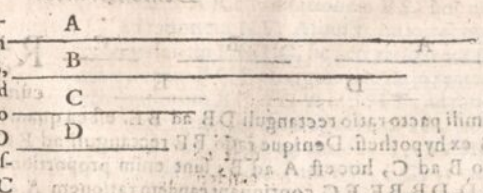
Demonstratio.

Rectanguli AG ad BH, ratio est composita ex ratione A ad B, & G ad H; ex illis ipsis autem rationibus componitur ratio rectanguli EC ad FD, scilicet ex ratione E ad F, hoc est A ad B, & ex ratione C ad D, hoc est G ad H. Patet itaque veritas propositionis.

PROPOSITIO CVIII.

Sint AB, CD similes rationes:
Dico quadratum A, rectangulum BC, quadratum D eandem rationem continuare.

Demonstratio.



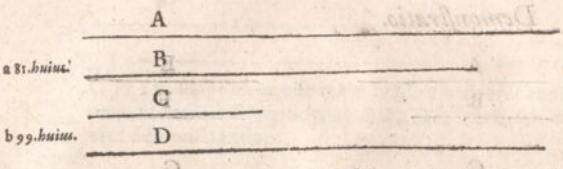
Quadratum A ad BC rectangulum compositam habet rationem ex A ad B, hoc est C ad D, & ex A ad C, hoc est B ad D: ratio autem rectanguli BC ad D quadratum, composita ex ijsdem est rationibus, scilicet C ad D, & B ad D, manifestum igitur est rationes trium harum quantitatum esse similes, ac proinde continuari rationem earundem quantitatum.

PRO-

PROPOSITIO CIX.

SInt quæuis rationes AB, CD.
Dico quod ratio AB ducta in DC, æquetur rationi quam habet rectangulum AD ad CB rectangulum.

Demonſtratio.



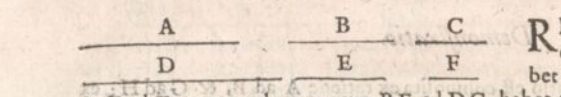
a 81. *huius.*
b 99. *huius.*

RAtio etenim AB ducta in DC rationem [a] eadem eſt cum proportione quam habet ratio AB ad CD rationem. Atqui [b] ratio rectanguli, AD ad CB rectangulum eadem quoque eſt cum proportione rationum AB, CD. Igitur ratio AB ducta in rationem DC producit proportionem rectanguli AD ad CB rectangulum. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CX.

SInt proportionales ABC, item D, E, F.
Dico rectangula AF, BE, DC eandem quoque rationem continuare.

Demonſtratio.

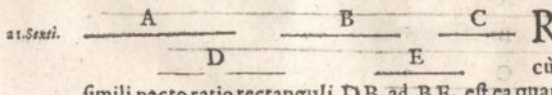


REctangulum AF ad BE rectangulum, compoſitam habet rationem ex ratione A ad B, & F ad E, rectangulum quoque BE ad DC, habet rationem ex iiſdem compoſitam, nempe ex ratione BC, quæ eadem eſt cum ratione A ad B, ex ſuppoſitione, & ex ratione E ad D, eadem cum ratione F ad E. patet igitur rectangula AF, BE, CD proportionales eſſe quantitates, quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CXI.

SInt ABC quantitates proportionales. deinde vt A ad B fiat quæuis D ad E.
Dico rectangula AD, DB, BE, EC, eſſe in continuata proportione.

Demonſtratio.



a 1. *Sexti.*

RAtio rectanguli AD ad DB rectangulum eſt vt [a] A ad B, cùm habeat communẽ baſim D. ſimili pacto ratio rectanguli DB ad BE, eſt ea quam habet D ad E, hoc eſt A ad B ex hypotheſi. Denique ratio BE rectanguli ad EC rectangulum, etiam eſt ratio B ad C, hoc eſt A ad B: ſunt enim proportionales A, B, C. igitur rectangula AD, DB, BE, EC continuant eandem rationem A ad B. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

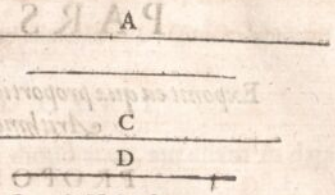
PROPOSITIO CXII.

SI ratio AB duplicata est rationis CD.

Dico rectanguli AC ad BD rationem triplicatam eius esse quam habet C ad D.

Demonstratio.

RAtio quippe rectanguli AC ad BD rectangulum, composita est ex ratione A ad B, hoc est duplicata C ad D, ex hypothesi insuper ex ratione C ad D. ergo ratio rectanguli AC ad BC rectangulum, est triplicata rationis C ad D. Quod erat demonstrandum.



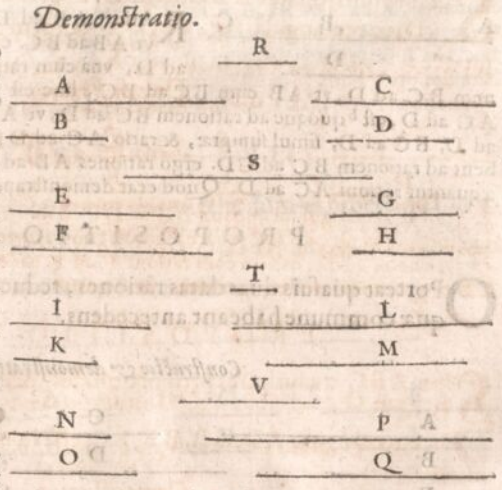
PROPOSITIO CXIII.

SIt proportio rationum AB, CD ad proportionem rationum EF, GH, vt proportio rationum IK, LM, ad proportionem rationum NO, PQ.

Dico rationem rectangulorum AD, EH esse ad rationem rectangulorum IM, NQ, vt ratio rectangulorum BC, FG ad rationem rectangulorum KL, OP.

Demonstratio.

FIat vt D ad C, sic B ad R, & vt H ad G, sic F ad S, vt verò M ad L, sic K fiat ad T: demum vt Q ad P, sic fiat O ad V. Itaque ratio AR est [a] proportio rationum AB, CD; & ratio ES est proportio rationum EF, GH: ratio autem IT est rationum IK, LM proportio: denique ratio NV est proportio rationum NO, PQ. Atqui datæ rationum proportiones ex hypothesi sunt proportionales sibi mutuo. ergo etiam rationes AR, ES rationibus IT, NV sunt proportionales. Iam verò ratio rectangulorum AD, BC est ad rationem rectangulorum EH, FG vt [b] ratio AR est ad rationem ES, hoc est, quemadmodum iam ostendi, vt ratio IT ad rationem NV. Atqui vt ratio rectangulorum AD, BC, est ad rationem rectangulorum EH, FG, sic [c] est ratio rectangulorum AD, EH, ad rationem rectangulorum BC, FG. ergo etiam ratio rectangulorum AD, EH, est ad rationem rectangulorum BC, FG vt ratio IT, ad rationem NV. Eodem planè discursu probabimus rationem rectangulorum IM, NQ esse ad rationem rectangulorum KL, OP, vt ratio IT est ad rationem NV. ergo ratio rectangulorum AD, EH, est ad rationem rectangulorum BC, FG, vt ratio rectangulorum IM, NQ est ad rationem rectangulorum KL, OP. Igitur permutando [d] ratio rectangulorum AD, EH est ad rationem rectangulorum IM, NQ, vt ratio rectangulorum BC, FG est ad rationem rectangulorum KL, OP. Quod erat demonstrandum.



a 13. huius.

b 103. huius.

c 39 huius.

d ibid.

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS QVINTA

Exponit ea quæ proportionalitatibus communia ſunt cum Arithmeticis operationibus.

PROPOSITIO CXIV.

DAta ſit quæuis quantitas AC, vtcunque diuiſa in B, & alia quantitas D.

Dico rationem AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, æqualem eſſe rationi AC ad D.

Demonſtratio.



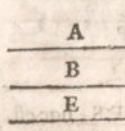
a 2. huius. b 46. huius.

RAtio [a] AB ad D, eſt ad rationem BC ad D, vt AB ad BC. ergo [b] componendo, ratio AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, eſt ad rationem BC ad D, vt AB cum BC ad BC, hoc eſt vt AC ad BC. Atqui ratio AC ad D, eſt [b] quoque ad rationem BC ad D, vt AC ad BC. Ergo rationes AB ad D, BC ad D, ſimul ſumptæ, & ratio AC ad D, eandem proportionem habent ad rationem BC ad CD. ergo rationes AB ad D, BC ad D, ſimul ſumptæ æquantur rationi AC ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXV.

OPorteat quaſuis duas datas rationes, reducere ad duas ipſis æquales, quæ commune habeant antecedens.

Conſtructio & demonſtratio.



SInt datæ duæ rationes AB, CD, quarum antecedentes termini ſint inæquales, A ſcilicet & C; & ſimiliter conſequentes B & D. oporteat autem exhibere duas alias rationes illis æquales, quæ communem habeant terminum antecedentem; fiat vt C ad D, ita A ad E, ratio AE ſimilis erit rationi CD, ac proinde æqualis. ergo rationes AB & AE, æquales ſunt datis rationibus AB, CD, & antecedens commune habent. Quod fieri poſtulabatur.

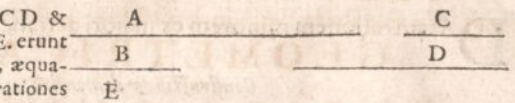
PROPOSITIO CXVI.

OPorteat datas duas rationes ad duas ipſis æquales reducere quę conſequens commune habeant.

Con-

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint rationes AB, CD & fiat vt D ad C, ita B ad E. erunt igitur rationes CD & EB, æquales inter se : ac proinde rationes AB, EB, æquales rationibus AB, CD: habent autem rationes AB, EB, commune consequens B ; igitur exhibuimus quod petebatur.

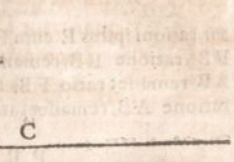


PROPOSITIO CXVII.

DAtæ rationis duplam assignare aut dimidiatam, aut aliam in data proportione.

Constructio & demonstratio.

DAta sit ratio AB; cuius duplam aut dimidiatam oporteat exhibere: fiat C dupla quantitatis A. Dico rationem C ad B, duplam esse rationis eius quam habet A ad B : & rationem B C , dimidiam esse eius rationis quam habet B ad A : nam ratio C B, ad A B, est vt C ad A, est autem C dupla rectæ A, igitur ratio C ad B, dupla est rationis A ad B. Ratio autem B ad C, & B ad A, est vt A ad C. sed A est dimidia ipsius C; igitur ratio B ad C, est dimidia eius rationis, quam habet B ad A. Igitur præstitimus quod requirebatur. eâdem praxi dabitur ratio quæ ad rationem datam, habeat datam proportionem.



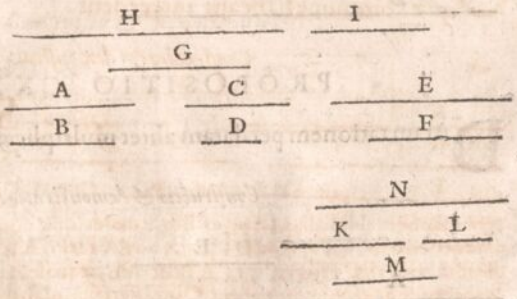
PROPOSITIO CXVIII.

DAtis quibusuis rationibus oporteat methodum exhibere quâ in vnam illis æqualem aggregentur.

Constructio & demonstratio.

SInt rationes AB, CD in vnam aggregandę; fiat vt D ad C, ita B ad G. Deinde fiat H æqualis A & G, simul sumptis. Dico rationem H ad B, æqualem esse aggregato duarũ rationum AB, CD : est enim ratio AB, cum GB ex constr. æqualis duabus rationibus AB, CD. sed ratio H ad B, æqualis est rationibus [a] AB & GB. Igitur etiam ratio H ad B, æqualis est aggregato rationum AB, & CD.

a 114. huius.

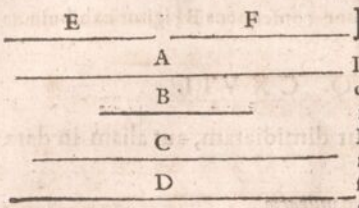


Eodem modo si fiat vt F ad E, ita B ad I, & quantitas alia fiat quæ æqualis sit duabus H & I, tunc ratio ipsius H cum I, ad B, æqualis erit aggregato trium rationum AB, CD, EF, & sic pergi poterit in aceruando quouis numero rationũ. Quod si rationes datę commune habeant consequens, cuiusmodi sunt rationes KM, LM, collige antecedentia in quantitatem vnam N. erit ratio N ad M, æqualis rationibus KM, LM.

PROPOSITIO CXIX.

DAtam rationem minorem ex maiori detrahere.

Constructio & demonstratio.



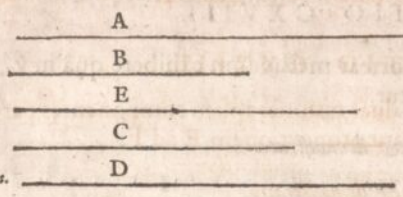
DAta sit ratio minor CD, quam ex maiori ratione AB oporteat subtrahere. Fiat vt D ad C, sic B ad E. erit ergo ratio EB eadem cum ratione CD; & quia ex hypothesi ratio CD minor est quàm ratio AB, erit & EB ratio minor ratione AB; adeoque E minor est quàm A. subtrahe igitur E ex A, & residuum sit F. Dico rationem FB, esse residuum rationis AB, post subtractam ex ipsa rationem CD. Nam rationes EB, FB [a] æquantur rationi ipsius E cum F, (hoc est ipsius A) ad B. Atqui demptâ ex rationibus EB, FB, ratione EB, remanet ratio FB. Ergo etiam demptâ ratione EB, ex ratione AB, remanet ratio FB. sed ratio EB est ratio CD. Demptâ igitur ratione CD ex ratione AB, remanet ratio FA. Factum igitur est quod petebatur.

a 11 4. huius.

PROPOSITIO CXX.

DAtam rationem per datam multiplicare.

Constructio & demonstratio.



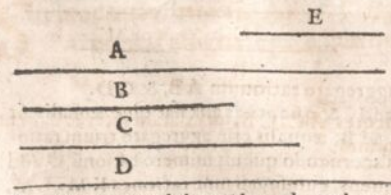
DAtas rationes AB, CD inter se multiplicabimus si fiat vt C ad D, ita B ad E, tunc enim ratio A ad E, erit productum duarum rationum AB, CD inter se multiplicatarum, quemadmodum proposit. 75. demonstrauimus.

b 75. huius.

PROPOSITIO CXXI.

DAtam rationem per datam aliter multiplicare.

Constructio & demonstratio.



DAtis rationibus AB, CD per se mutuo multiplicandis fiat vt D ad C, ita B ad E. Dico A ductum in E exhibere quæsitum. Nam rationum AB, CD denominatores sunt A & E, per 13. huius. quare hi inter se multiplicati exhibent id quod producunt rationes ductæ in se mutuo.

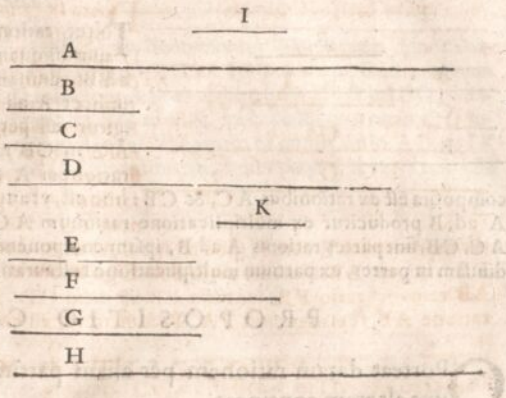
PRO-

PROPOSITIO CXXII.

DAtam proportionem rationum per alteram rationum proportionem multiplicare.

Conſtructio & demonſtratio.

DAtæ ſint binæ rationes AB, CD, item binæ aliæ EF, GH, fiat vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K. erit itaque [a] ratio A ad I, proportio rationum AB, CD; & ratio E ad K proportio rationum EF, GH: per præcedentem verò nota eſt methodus multiplicandi rationem AI per EK rationem. ergo per eandem exhibebitur proportio AB, CD ducta in proportionem EF, GH. Quod erat poſtulatum.



[a] 13. huius.

Corollarium.

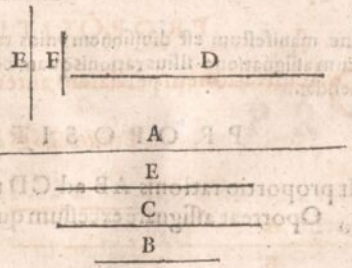
NOn pergo vlteriùs ad multiplicandas proportiones proportionum: nam illæ cùm in infinitum poſſint excreſcere, exhauriri nequeunt. ſufficit igitur praxim inſinuaſſe quam quis adhibere poterit ſi vlteriores multiplicationes proſequi in animum induxerit.

PROPOSITIO CXXIII.

DAtam rationem A ad B, in duas rationes ipſam componentes partiri, quæ datam inter ſe habeant proportionem E ad F.

Conſtructio & demonſtratio.

FIat vt E ad F, ſic A ad D; & inter B ac D, media proportionalis ſtatuatur C. Dico factum. fiat E æqualis ipſi C. Quoniam B eſt ad C, vt C ad D per conſtructionem, eſtque E par ipſi C; erit B ad C, vt E ad D. Ergo [b] ratio AE, hoc eſt ratio AC, eſt ad rationem CB, vt A ad D, hoc eſt ex conſtructione, vt E ad F. ſed ratio AB componitur ex rationibus AC, & CB. Ergo ratio AB diuiſa eſt in duas rationes ipſam componentes AC, CB, quæ datam inter ſe habent proportionem E ad F. Quod erat faciendum.

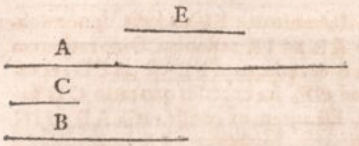


[b] Ibid.

PROPOSITIO CXXIV.

OMnis ratio in duas ipſam componentes diuiſa denuo coaleſcit per partium ex diuiſione ortarum in ſe mutuò multiplicationem.

Demonſtratio.

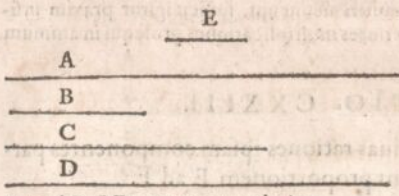


INter rationem A ad B, interponatur quæuis quantitas C: erit itaque ratio A ad B, diuiſa in duas ipſam componentes, ſcilicet A ad C, & C ad B; oſtendendum igitur eſt per multiplicationem rationis AC in CB rationem, coaleſcere denuo rationem A ad B. Nam ratio A ad B, compoſita eſt ex rationibus AC, & CB: hoc eſt, vt antè propoſ. 75. docuimus, ratio A ad B producitur ex multiplicatione rationum AC, CB. Quare cùm rationes AC, CB, ſint partes rationis A ad B, ipſam componentes, patet rationem A ad B, diuiſam in partes, ex partium multiplicatione reſtaurari. Quod erat demõſtrandum.

PROPOSITIO CXXV.

OPorteat datam rationem per aliam partiri ſiue oſtendere quoties vna alteram contineat.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt AB ratio diuidenda per CD rationem: fiat vt D ad C ita B ad E. Dico rationem AB diuiſam eſſe per rationem CD. nam toties AB, continet CD rationem, quoties A continet E, cùm A & E, ſint dẽnominatores earundem rationum AB, CD, vt patet ex 13. huius.

Corollarium.

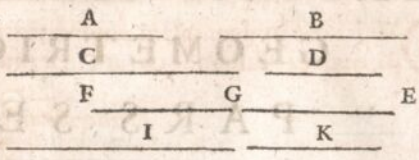
HInc manifeſtum eſt diuiſionem vnius rationis per alteram rationem coincidere cum aſſignatione illius rationis quam continent inter ſe datæ rationes, inuicem diuidendæ.

PROPOSITIO CXXVI.

SIt proportio rationis AB ad CD rationem inæqualitatis. Oporteat aſſignare exceſſum quo maior minorem exſuperat.

Con-

Constructio & demonstratio.



a 13 huius.

Sit igitur datarum rationum maior C ad D, fiatque vt D ad C, ita B ad FE: igitur vt est A ad FE, ita ratio AB ad CD a rationem: ponitur autem ratio CD maior ratione AB. Igitur maior est quantitas FE quantitate A. ergo factâ FG æquali A remanebit GE excessus quo denominator FE excedit denominatorem A. Fiat igitur vt FG ad GE, ita ratio AB ad IK rationem. Dico rationem IK esse excessum quo ratio CD rationem AB excedit. nam FE est ad FG, vt ratio CD est ad rationem AB. Igitur vt FG ad GE, ita excessus quo ratio CD superat AB rationem ad ipsam AB rationem. Est autem ex constr. ratio AB ad IK rationem, vt est quantitas FG ad GE quantitatem. Igitur patet IK rationem esse postulatam.

PRO-

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS SEXTA

Varias proportionalitatum proprietates complectitur.

PROPOSITIO CXXVII.

DAtis tribus terminis in continua ratione ſcilicet A B C.
Dico rationem A B ductam in B C, ad rationem C B ductã in B A rationẽ, eandem eſſe cum ratione quæ eſt inter A & A.

Demonſtratio.

A B C

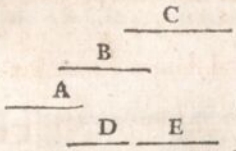
RAtio A B ducta in B C, eſt vt A ad C. Deinde ratio C B, ducta in B A, eſt ratio C ad A. Igitur vt ratio A ad C, ad rationem C ad A, ita eſt ratio A B, ducta in B C, ad rationem C B, ductam in B A rationem: ſed ratio A ad C, ad C ad A rationem, eſt eadem [a] cum ratione A ad A. igitur manifeſta eſt veritas propoſitionis.

[a] *Per 77. huius.*

PROPOSITIO CXXVIII.

SInt iterum in continuata proportione A B C, A D E.
Dico rationem B D in ſe ductam producere rationem C ad E.

Demonſtratio.



FIat F, tertia proportionalis ad rectas B, D: erit igitur ratio B ad F, orta ex ductu rationis B D, [b] in ſe, ſed ratio C ad E, eadem [c] eſt cum ratione B ad F, cùm habeant A, communem primum terminum hæ duę ſeries, igitur ratio B D ducta in ſe æqualis eſt rationi C ad E. Quod fuit demonſtrandum.

[b] *75. huius.*
[c] *27. progreſſ.*

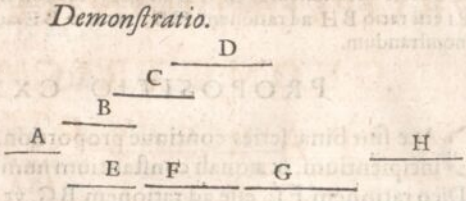
PROPOSITIO CXXIX.

SInt autem A B C D, & A E F G, continuantes eandem proportionem.
Dico rationem B E, ductam in C F rationem, exhibere D ad G.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [989] - 932
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



Flat vt C ad F, ita E ad H. igitur ratio BE ducta in CF rationem, efficit [a] rationem B ad H, eſt autem CF ratio duplicata [b] rationis BE: igitur ratio B, ad H eſt triplicata rationis B ad E. ſed ratio D ad G, ſimiliter eſt triplicata rationis BE. igitur patet rationem BE ductam in rationem CF, exhibere rationem D ad G. Quod erat demonſtrandum.

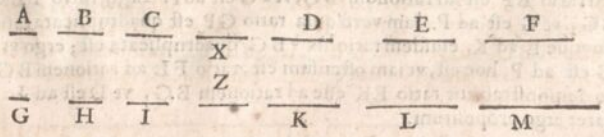
[a] 25. huius.
[b] 27. progreſſ.

PROPOSITIO CXXX.

SInt binæ continuè proportionalium ſeries A, B, C, X, D, E, F & G, H, I, Z, K, L, M: ſint autem X & Z æquales.

Dico ſi C, I, K, D ſunt in continua, etiam B, H, L, E & A, G, M, F eſſe in continua.

Demonſtratio.



RAtio BH, [c] duplicata eſt rationis CI, hoc eſt per hypotheſim rationis IK. ſed eiuſdem rationis IK duplicata eſt ratio HL, quòd H, I, Z, K, L, ſint in continua. Ergo B eſt ad H, vt H ad L. ſed [d] etiam L eſt ad E, vt B ad H. ergo B, H, L, E ſunt in continua. Quod erat demonſt. eodem diſcurſu ex ijſdem illis propoſitionibus 26. & 27. progreſſionum demonſtrabimus eſſe continuè proportionales A, G, M, F, & ſic in infinitum.

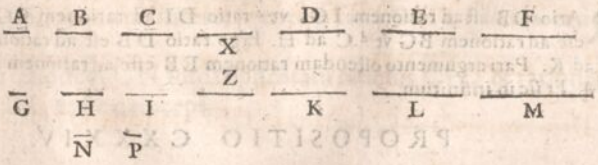
[c] 27. Prógreſſ.
[d] 26. Prógreſſ.

PROPOSITIO CXXXI.

IIſdem poſitis: ſumantur B, H, & E, L æqualiter diſtantes à mediis æqualibus X, Z.

Dico rationem BH eſſe ad rationem HB, vt ratio BE, eſt ad rationem HL.

Demonſtratio.



Flat vt B ad H, ſic H ad N, erit [e] ratio BH ad rationem HB, vt B ad N. fiat deinde vt L ad H, ſic E ad P, erit [f] ratio BE ad rationem HL, vt B ad P. Quia autem ex conſtr. L eſt ad H, vt E ad P, erit permutando L ad E, vt H ad P, ſed [g] vt L ad E, ſic B eſt ad H. ergo H eſt ad P, vt B ad H, hoc eſt ex conſtr. vt H eſt ad N: æquantur igitur N, & P. ergo B eſt ad N, vt B eſt ad P. Quare cùm

[e] Coroll. 18. huius.
[f] 13. huius.
[g] 16. Progreſſ.

ratio BH sit ad rationem HB, vt B est ad N, & ratio BE ad rationem HL, vt B est ad P; erit ratio BH ad rationem HB, vt ratio BE ad rationem HL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXXII.

DAtæ sint binæ series continuè proportionalium ab vno termino A incipientium, & æquali constantium numero terminorum.

Dico rationem FL, esse ad rationem BG, vt E est ad K, & rationem EK esse ad rationem BG, vt D est ad I. Et sic deinceps.

Demonstratio.



PEr 27. libri nostri progressionum, ratio FL, est quintuplicata rationis BG. Continuetur autem ratio BG per sex terminos, B, G, M, N, O, P: eritque ratio BP etiam quintuplicata rationis BG; ac proinde eadem cum ratione FL, sed ratio BP est ad rationem BG, vt [a] G est ad P. Ergo ratio FL est ad rationem BG, vt G est ad P. Iam verò quia ratio GP est quadruplicata rationis BG: ratio quoque E ad K, eiusdem rationis [b] BG quadruplicata est; ergo vt E est ad K, sic G est ad P, hoc est, vt iam ostensum est, ratio FL ad rationem BG. pari argumento demonstrabitur ratio EK esse ad rationem BG, vt D est ad I: & sic deinceps. patet ergo propositum.

a 7. *huius.*

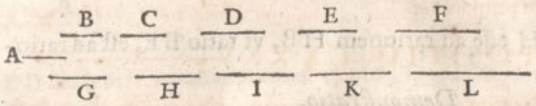
b 27. *Progress.*

PROPOSITIO CXXXIII.

DAtæ sint binæ series continuè proportionalium quæ primum terminum communem habeant A.

Dico rationem DB esse ad rationem IG, vt C est ad H; & rationem EB esse ad rationem KG, vt D est ad I, & sic in infinitum.

Demonstratio.



RAtio DB est ad rationem IG, vt [c] ratio DI ad rationem BG. sed ratio D, est ad rationem BG vt [d] C ad H. Ergo ratio DB est ad rationem IG, vt C est ad K. Pari argumento ostendam rationem EB esse ad rationem KG, vt D est ad I. Et sic in infinitum.

c 39. *huius.*

d 132. *huius*

PROPOSITIO CXXXIV.

SInt duæ rationes similes AB, CD. ponantur autem quatuor A, E, F, G, continuare eandem rationem. Deinde sint etiam continuè proportionales CKLM, cuiuscumque tandem rationis; sint autem inter B & G, duæ mediæ H & I: pari pacto sint inter D & M, mediæ N & O.

Dico

Dico F ad I, eandem habere rationem quam habet L ad O, & E ad H, eandem quam habet K ad N.

Demonſtratio.

QVoniam ponuntur AEFG, & BHIG, continuare eandem rationem in ſua ſerie, igitur ratio AB, triplicata eſt rationis eius quam habet F ad I, & pari pacto ratio CD, [a] triplicata eſt rationis L ad O. ſed ratio AB, eadem eſt cum ratione CD, ex hypotheſi, igitur etiam ratio AB, triplicata eſt rationis LO. quare F ad I, ratio eadem eſt cum ratione L ad O: ſimili ferè diſcurſu oſtendam rationes EH & KN eſſe eaſdem.

A	E	F		
B	H	I	G	
C	K	L		
D	N	O	M	

[a] 27. Progreſſ.

PROPOSITIO CXXXV.

DAtæ ſint tres ſeries continuè proportionalium, quæ communem habeant principium A.

Dico ſi B, G, M ſint in continua, etiam C, H, N, & D, I, O, & E, K, P & ſic deinceps eſſe in continua.

Demonſtratio.

B	C	D	E	F
A G	H	I	K	L
M	N	O	P	Q

RAtio CH eſt duplicata [b] rationis BG, hoc eſt ex hypotheſi rationis GM. Atqui etiam ratio HN eſt duplicata rationis GM, rationes igitur CH, & HN ſunt eædem, adeoque C, H, N ſunt in continua. Similiter ratio DI eſt triplicata rationis BG, hoc eſt ex hypotheſi rationis GM: ſed eiuſdem rationis GM etiam triplicata eſt ratio IO. Ergo rationes DI & IO ſunt eædem. ergo D, I, O ſunt in continua. Pari argumento demonſtrabo E, K, P, & F, L, Q & ſic in infinitum eſſe in continua. Liquet ergo propoſitum.

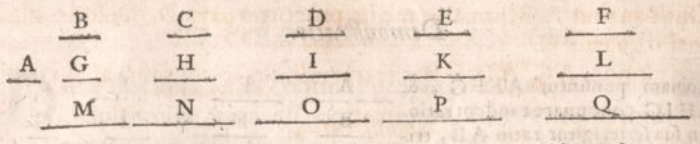
[b] Ibid.

PROPOSITIO CXXXVI.

STatuantur rurſum tres ordines continuè proportionalium ab eodem termino A principium ducere; ſit autem ratio BM triplicata rationis BG.

Dico etiam rationem CN fore triplicatam rationis CH, & rationem DO, rationis DI, & ſic deinceps.

Demonſtratio.



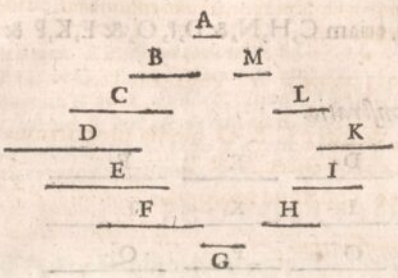
SVmatur quæuis trias exempli gratiâ E, K, P. Patet ex 27. libri noſtri progreſſionum, quoties ratio EK multiplicat rationem BG, toties rationem EP multiplicare rationem BM. Quare cùm ratio BM ponatur triplicata rationis BG, erit & ratio EP triplicata rationis EC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVII.

SInt continuè proportionales A, B, C, D, & A, M, L, K, item totidem D, E, F, G, & K, I, H, G.

Dico B eſſe ad M, vt F ad H; & C ad L, vt E ad I.

Demonſtratio.



a 27. Progreſſ.

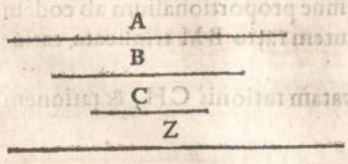
RAtio D ad K, eſt [a] triplicata tam rationis B ad M, quàm rationis F ad H. Ergo B eſt ad M, vt F ad H. Deinde rationes CL, EI ſunt duplicatæ rationum BM, FH, quas iam oſtendimus eſſe eaſdem. Ergo & ipſæ ſunt eædem, ſiue C ad L, vt E ad I. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO CXXXVIII.

SI fuerint quotuis quantitates A, B, C in continua, & aſſumatur quæuis alia quantitas Z:

Dico rationes AZ, BZ, CZ, item rationes ZC, ZB, ZA, eandem continuare analogiam.

Demonſtratio.



b 2. huius. c 7. huius. d Ibid.

RAtio AZ eſt ad rationem BZ, [b] vt A ad B. ſimiliter ratio BZ eſt ad rationem CZ, vt B ad C, hoc eſt vt A ad B; rationes igitur AZ, BZ, CZ continuant eandem rationem A ad B. Deinde ratio ZC eſt ad rationem ZB, vt [c] B ad C, & ratio ZB, eſt ad rationẽ ZA, vt [d] A ad B, hoc eſt vt B ad C. Ergo rationes ZC, ZB, ZA continuant eandem rationem B ad C. Conſtat ergo propoſitum.

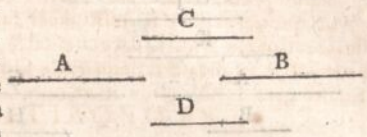
PRO-

PROPOSITIO CXXXIX.

POsitis duabus A, B, ſumatur media proportionalis D. Deinde aſſumatur quæuis C.

Dico rationes AC, AD, CB, eſſe tres rationes in continua analogia.

Demonſtratio.



RAtio AC ducta in CB rationem producit [a] æqualem rationem illi quæ oritur ex ductu AD, in DB, hoc eſt ex ductu rationis AD in ſeipſam: igitur ſicut ſe habet ratio AC ad AD rationem, ita [b] quoque ſe habet ratio AD, ad rationem CB. ſunt igitur tres rationes in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

[a] 77. huius.

[b] Colligitur ex 94. huius.

Aliter.

RAtio AC ad AD rationem, eſt [c] vt D ad C. ratio quoque DB hoc eſt ratio AD, ad CB rationem, eſt vt D ad C; eandem ergo proportionem continuant rationes AC, AD, CB. Quod erat demonſtrandum.

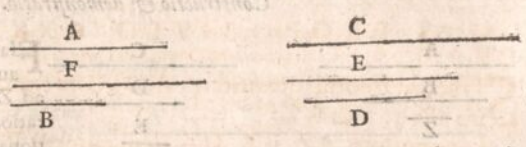
[c] 7. huius.

PROPOSITIO CXL.

SInt ſimiles rationes AB, CD, & inter C & D media proportionalis ſit E. Denique ponatur quæuis F inter A & B.

Dico rationes AF, CE, FB eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.



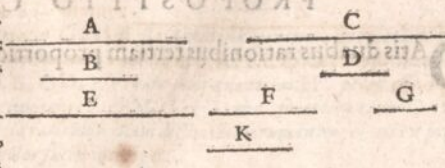
QVoniam inter ſimiles rationes AB, CD poſitæ ſunt F & E quantitates; igitur ratio AF eſt [d] ad CE, vt eſt ED ad FB, ſed ratio ED ex conſtructione eſt eadem cum ratione CE, igitur vt eſt ratio AF ad CE, ita eadem ratio CE eſt ad rationem FB; continuant igitur eandem rationem AF, CE, FB. Quod fuit demonſtrandum.

[d] 62. huius.

PROPOSITIO CXLI.

INter duas rationes datas AB, CD, mediam proportionalem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



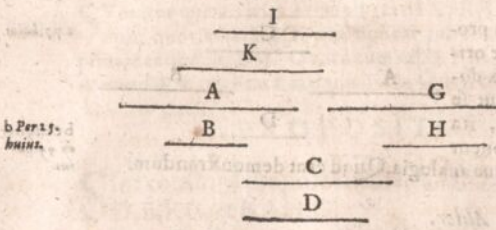
FIat vt A ad B, ſic E ad F, vtque C ad D, ſic F ad G: tum inter E, G media proportionalis ſit K.

Dico rationem EK eſſe mediam inter rationes datas AB, CD. Quod ſic demonſtro. Rationes EF, FG componunt

rationem EG, hoc est rationes EF, FG inter se multiplicatæ producunt rationem EG. similiter ratio EK cum ratione KG componit rationem EG, siue ratio EK ducta in rationem KG producit rationem KG. sed ratio KG ex constructione est eadem cum ratione EK. Ergo ratio EK in seipsam ducta producit rationem EG, eandem scilicet quam producebant rationes EF, FG, hoc est ex constructione rationes datæ AB, CD. Ergo [a] ratio EK media est inter rationes datas AB, CD. Fecimus ergo quod petebatur.

[a] *Colligitur ex 94. huius.*

Aliter.



DAtæ sint rationes binæ AB, GH, inter quas media sit exhibenda. Fiat vt H ad G, sic B ad I, & inter A ac I mediam fac proportionalem K: tum vt A est ad K, sic [b] fiat ratio AB ad rationem CD. Dico hanc satisfacere postulato. Nam vt A ad K, sic per constructionem ratio AB est ad rationem CD. quare cùm ex constructione ratio A ad I, sit duplicata rationis A ad K: erit quoque ratio A ad I duplicata proportionis rationum AB, CD. sed vt A ad I, sic [c] ratio AB ad rationem GH. ergo proportio rationis AB ad GH rationem, etiam duplicata est proportionis quam habet ratio AB ad rationem CD. Ergo rationes AB, CD, GH sunt proportionales. factum igitur est quod petebatur.

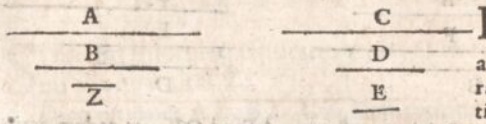
[b] *Per 23. huius.*

[c] *13. huius.*

PROPOSITIO CXLII.

DAtis duabus rationibus AB, CD, tertiam rationem proportionalem exhibere.

Constructio & demonstratio.



Fiat vt C ad D, sic D ad E: vt autem C ad E, sic A fiat ad Z. Dico rationem BZ datis rationibus esse tertiam proportionalem. Nam ratio CD ducta in rationem DE, hoc est ex constructione in seipsam, producit rationem CE, hoc est ex constructione rationem AZ. sed etiam ratio AB ducta in rationem BZ producit rationem eandem AZ. ergo [d] rationes AB, CD, BZ sunt in continua analogia. Fecimus ergo quod petebatur. Alio etiam modo licebit demonstrare rationem BZ tertiam esse proportionalem rationibus datis AB, CD. Quoniam enim per constructionem rationes AZ, CE similes sunt, erit [e] ratio AB ad rationem CD, vt ratio DE, hoc est ex constructione vt ratio CD, ad rationem BZ.

[d] *Colligitur ex 94. huius.*

[e] *62. huius.*

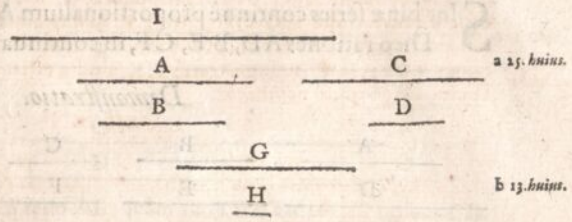
PROPOSITIO CXLIII.

DAtis duabus rationibus tertiam proportionalem aliter exhibere.

Con-

Constructio & demonstratio.

DAtæ sint rationes binæ AB, C, D. fiat vt D ad C, sic B ad I, vt autem A est ad I, sic [a] fiat ratio CD ad rationem GH. Dico rationem GH rationibus AB, CD, tertiam esse proportionalem. Nam ratio AB est ad rationem CD, [b] vt A ad I, hoc est per constructionem vt ratio CD est ad rationem GH.

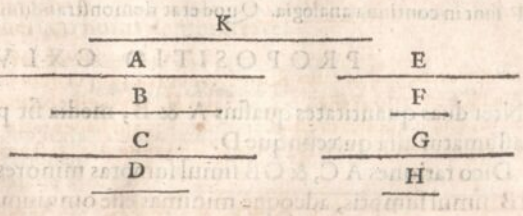


a 25. huius.

b 13. huius.

PROPOSITIO CXLIV.

DAtis tribus rationibus AB, CD, EF, quartam proportionalem rationem inuenire.



Constructio & demonstratio.

FIat vt D ad C, sic B ad K; & inueniatur [c] ratio GH, ad quam ratio EF eam habeat proportionem quam A habet ad K.

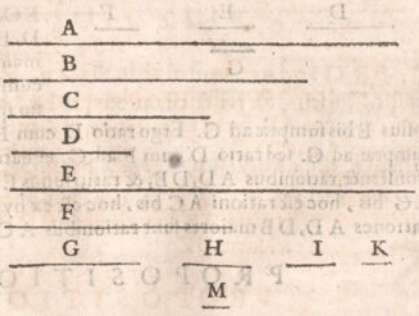
Dico factum. Nam [d] ratio AB est ad rationem CD, vt A est ad K, hoc est per constructionem, vt ratio EF est ad rationem GH.

c 25. huius.

d 13. huius.

Scholion.

COgor hic tantisper subsistere, ne quis fortasse in animum inducat, continuationem rationum non differre à continuatione illa de qua tractatur in Geometricis elementis, cùm tres vel plures quantitates eandem rationem perhibentur continuare, ac proinde existimet, rationes debere esse similes, vt eandem inter se continuent analogiam: ita vt datis tribus rationibus quæ sint in continuata analogia AB, CD, EF, ratio A ad B, debeat intelligi esse similis vel eadem cum rationibus C ad D, & E ad F, quemadmodum contingit, si quatuor quantitates GHIK statuantur in continua proportione, tum enim ratio G ad H, similis est rationibus H ad I, & I ad K. Verùm nullo modo hoc conuenit continuationi rationum AB, CD, EF. nam sicut quantitas H, potest esse media proportionalis inter infinita binaria linearum L & M, G & I, &c. sic etiam ratio C ad D, potest esse media inter infinita binaria rationum etiam dissimillimarum inter se, vti ex propositionibus præcedentibus studiosus Lector facilè intelliget.

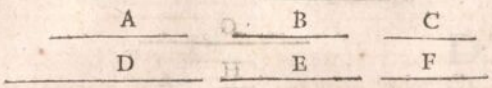


PRO-

PROPOSITIO CXLV.

SInt binæ ſeries continuè proportionalium A, B, C, &c. D, E, F, &c. Dico rationes AD, BE, CF, in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



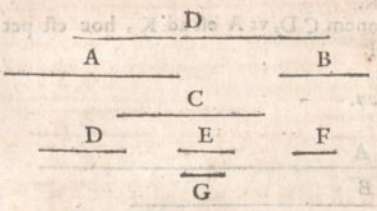
CVm ex hypotheſi rationes AB, BC ſint eædem, item eædem ſint rationes DE, EF, erit ratio AB, ad rationem BC, vt ratio DE ad rationem EF. igitur a 44. huius. a permutando ratio AB eſt ad rationem DE, vt ratio BC eſt ad rationem EF. ſed vt ratio AB ad rationem DE, ſic eſt ratio AD ad rationem BE; & vt ratio b 39. huius. BC ad rationem EF, b ita ratio BE ad rationem CF. Rationes igitur AD, BE, CF ſunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVI.

INter duas quantitates quaſuis A & B, media ſit proportionalis C, & aſſumatur alia quæcunque D.

Dico rationes AC, & CB ſimul ſumptas minores eſſe rationibus AD, DB ſimul ſumptis, adeoque minimas eſſe omnium rationum, datam rationem AB componentium.

Demonſtratio.



c 161. huius. d 139. huius e 2. huius. f Patet ex 25. quinti. g 2. huius.

RAtiones AD, AC, DB, c reducantur ad rationes DG, EG, FG ipſis æquales, quæ commune habeant conſequens G. Quoniam igitur rationes AD, AC, DB d ſunt in cõtinuâ, etiam rationes DG, EG, FG ſunt in continua. ergo e etiam D, E, F, ſunt in continua. Ergo f D cum F maior eſt quàm E bis ſumpta. ſed vt D cum F ad E, bis ſumptam, ſic eſt g ratio ipſius D cum F ad G, ad rationem ipſius E bis ſumptæ ad G. Ergo ratio D cum F ad G, maior eſt quàm ratio E bis ſumptæ ad G. ſed ratio D cum F ad G, æquatur rationibus h DG, FG, hoc eſt ex conſtruct. rationibus AD, DB, & ratio ipſius E bis ſumptæ ad G æquatur i rationi EG bis, hoc eſt rationi AC bis, hoc eſt ex hypotheſi rationibus AC, & CB. Ergo rationes AD, DB maiores ſunt rationibus AC, CB. Quod erat demonſtrandum.

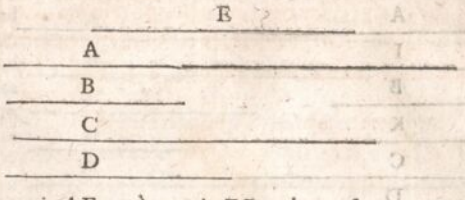
h 114. huius. i Ibid.

PROPOSITIO CXLVII.

SIt ratio AB, ad rationem CD, vt C eſt ad D.
Dico rationem AB duplicatam eſſe rationis CD.

Demon-

Demonſtratio.



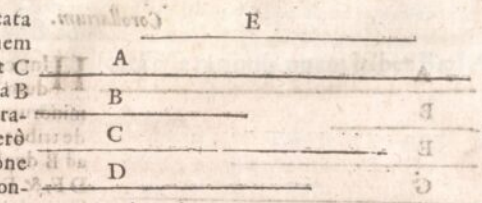
FIat vt D ad C, ſic B ad E; igitur ratio [a] AB eſt ad rationem CD vt A ad E. ſed ex hypotheſi etiam ratio AB eſt ad rationem CD vt E ad D. Ergo A eſt ad E vt C ad D, deinde cùm ex conſtruct. B ſit ad E, vt D ad C, erit inuertendo E ad B, vt C ad D. igitur tam ratio AE, quàm ratio EB eadem eſt rationi CD. Sed ratio AB compoſita eſt ex rationibus AE, EB. ergo ratio AB componitur ex ratione CD bis ſumpta. ergo ratio AB eſt duplicata rationis CD. Quod erat demonſtrandum.

[a] 13. *huius.*

PROPOSITIO CXLVIII.

LVbet etiam conuerſam huius demonſtrare.

Demonſtratio.



POnatur ratio A ad B duplicata rationis C ad D. Dico rationem AB ad CD rationem, eſſe vt C ad D. Fiat iterum vt D ad C, ita B ad E, erit [b] ratio AB ad CD rationem, vt A eſt ad E. ratio verò A ad B compoſita eſt ex ratione A ad E, & E ad B, hoc eſt ex conſtruct. C ad D; igitur cùm ponatur ratio A ad B, duplicata rationis C ad D, patet rationem quoque A ad E, eandem eſſe cum ratione E ad B, hoc eſt C ad D. ergo cùm vt A ad E, ita ratio AB ſit ad CD rationem, patet quod ratio AB ad rationem CD, ſit vt C eſt ad D. Quod fuit demonſtrandum.

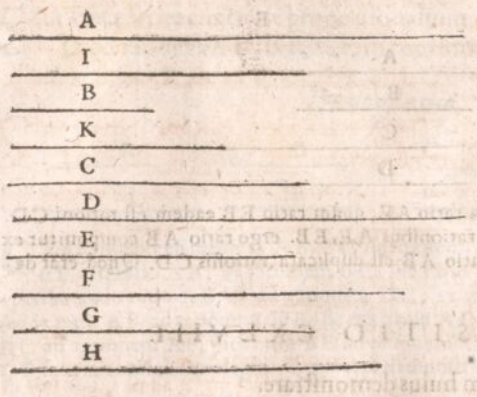
[b] *Ibid.*

PROPOSITIO CXLIX.

POſitis tribus quantitatibus A, B, C, & alijs inſuper tribus D, E, F: ſi ratio A ad B duplicata eſt D ad E, & ratio B ad C, duplicata E ad F.

Dico rationem quoque A ad C duplicatam eſſe rationis illius, quam habet D ad F.

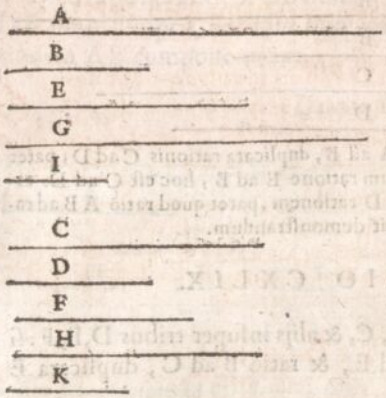
Demonſtratio.



POnatur inter A ad B, media I, & ſimiliter inter B, C, media ponatur K. Deinde fiat vt D ad E, ita F ad G, & vt E ad F, ita G ad H. Quoniam igitur ratio A B duplicata eſt tam rationum A I, I B, quàm rationum D E, F G; erunt rationes A I, I B, eædem cum rationibus D E, F G. pari argumento rationes B K, K C cum rationibus E F, G H eædem ſunt. rationes igitur A C, D H ex ijſdem rationibus (quamuis diuerſimodè diſpoſitis) componuntur, ac proinde æquales ſunt. ſed ratio D H eſt duplicata rationis D F, vti facilè deducitur ex conſtructione. ergo & ratio A C eſt duplicata rationis D F. Quod erat demonſtrandum.

ã 98. huius.

Corollarium.



HInc colligitur idem eſſe pronuntiandum de quauis continuatione terminorum quod præcedenti propoſitione de tribus eſt dictum: nam ſi fiat ratio A ad B duplicata C D, & B ad E duplicata D F, & E G, G I duplicatę F H, H K: inferri etiam legitimè poteſt, quod ratio A ad I ſit duplicata eius rationis quam habet C ad K quocunque tandem numero termini conſtituantur.

Imò quod de duplicata ratione præſens propoſitio enuntiat, etiam eſt intelligendum de triplicata, quadruplicata, quintuplicata, & ſic de quauis alia multiplicata ratione reſpectu ſimplicis rationis C ad D, D ad F, &c. quod manifeſtè colligetur ſi diſcurſus demonſtrationis terminis illius multiplicationis aptetur.

PROPOSITIO CL.

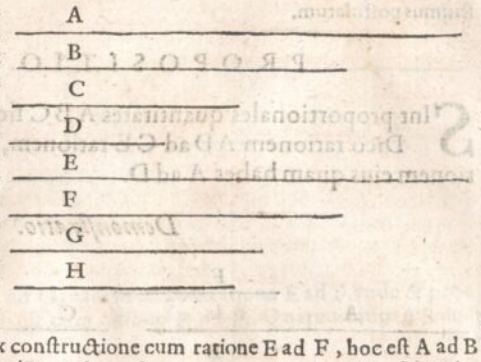
SInt quatuor numero quantitates A, B, C, D, & ratio A ad D, ſupponatur compoſita eſſe ex ratione duplicata A ad B, & ex ratione B ad C.

Dico rationem A ad B, eandem eſſe cum ratione C ad D.

Demon-

Demonſtratio.

VT A ad B, ita E fiat ad F, & F ad G; & vt B ad C, ita G fiat ad H. Igitur ratio E ad H, erit compoſita ex duplicata ratione A ad B, & ex ratione B ad C: ex quibus etiam cùm compoſita ſupponatur ratio A ad D, erit ratio A ad D, eadem cum ratione E ad H: & ratio B ad D, eadem cum ratione F ad H. ſed ratio G ad H, eadem eſt cum ratione B ad C, ex conſtructione; igitur ratio[a] F ad G, eadem eſt cum ratione C ad D.



[a] *Patet ex 23. ſexti.*

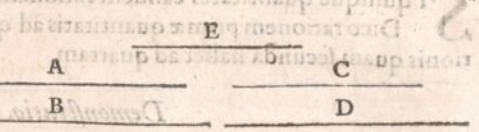
ſed ratio F ad G, eadem eſt ex conſtructione cum ratione E ad F, hoc eſt A ad B ex conſtructione: igitur ratio C ad D, eadem eſt cum ratione A ad B. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLI.

SIt ratio AB ad CD, vt B ad A.
Dico rationem D ad C duplicatã eſſe rationis quam habet B ad A.

Demonſtratio.

FIat vt D ad B, ita C ad E, igitur permutando D eſt ad C, vt B ad E. ergo per 13. huius libri, ratio A B ad C D, eſt vt A ad E: ſed ratio A B ad C D, ex hypotheſi eſt vt B ad A; igitur vt B ad A, ita A ad E, adeoque ratio B E eſt duplicata rationis B A: eſt autem ex conſtructione B ad E, vt D ad C; igitur cùm ratio B ad E, ſit duplicata B ad A, patet rationem D ad C, etiam eſſe duplicatam B ad A. Quod fuit demonſtrandum.

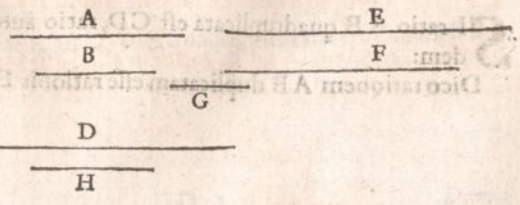


PROPOSITIO CLII.

DAtis rationibus AB & CD.
Oporteat duas exhibere quantitates E & F, vt ratio A E duplicata ſit rationis B F, ratio verò E F ſimilis ſit rationi datæ D C.

Conſtructio & demonſtratio.

FIant proportionales A B G & C D H. Deinde cõſtituantur E F G in eadem ratione in qua ſunt quantitates H D C. Dico factum quod requiritur, ſcilicet E F rationem eandem eſſe cũ ratione D C, rationem



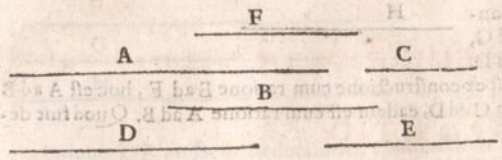
quoque AE duplicatam esse rationis BF. Quoniam ABG & EFG, sunt quantitates continuè proportionales, habentes G communem primam; igitur [a] ratio A ad E, duplicata est rationis B ad F, estque ex constructione D ad C, vt E ad F. Quare præstitimus postulatum.

[a] 17. Progress.

PROPOSITIO CLIII.

SInt proportionales quantitates ABC sicut & DBE.
Dico rationem AD ad CE rationem, duplicatam habere proportionem eius quam habet A ad D.

Demonstratio.



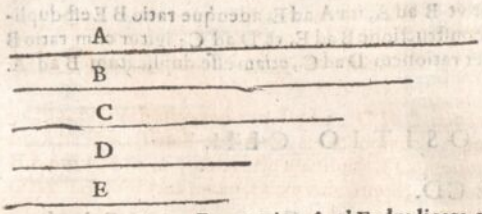
FIat vt E ad C, ita D ad F, erit itaque [b] ratio AD ad rationem CE, vt A ad F, deinde quia AC, DE rectangula [c] æqualia sunt, vtpote æqualia eidem quadrato B, est vt E ad C, ita A ad D. sed vt E ad C, ita quoque est D ad F, ex constructione. Igitur ratio A ad F duplicata est rationis A ad D, hoc est proportio rationis AD ad CE rationem, duplicata est rationis A ad D. Quod fuit demonstrandum.

[b] 13. huius.
[c] 17 sexti.

PROPOSITIO CLIV.

SI quinquè quantitates eandem rationem continuauerint:
Dico rationem primæ quantitatis ad quintam, duplicatam esse rationis quam secunda habet ad quartam.

Demonstratio.



POnantur quinque quantitates A,B,C,D,E esse in cõtinuata analogia. Dico rationem A ad E, esse duplicatam rationis B ad D. cùm enim omnes quinque sint proportionales continuæ, igitur etiam CBA & CDE, sunt proportionales quantitates. Ergo ratio [d] A ad E duplicata est rationis B ad D. Quod erat demonstrandum.

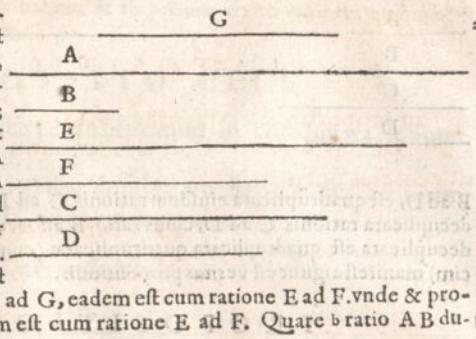
[d] 17. Progress.

PROPOSITIO CLV.

SI ratio AB quadruplicata est CD, ratio autem EF, duplicata eiusdem:
Dico rationem AB duplicatam esse rationis E ad F.

Demon-

Demonſtratio.



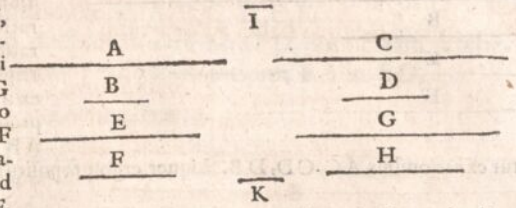
Flat vt F ad E, ita B ad G. Igitur [a] ratio A ad G, eadem eſt cum proportione rationum AB, EF: ſed ratio A ad B, componitur ex ratione A ad G, G ad B; hoc eſt E ad F, duplicata ſcilicet rationis C ad D; igitur ratio A ad B, eſt compoſita ex ratione A ad G, & duplicata ratione C ad D; ſed ratio A ad B, ponitur quadruplicata rationis C ad D. Igitur ratio A ad G, duplicata eſt rationis C ad D. quare ratio A ad G, eadem eſt cum ratione E ad F. vnde & proportio rationum AB, EF eadem eſt cum ratione E ad F. Quare [b] ratio AB duplicata eſt rationis EF. [a] 13. huius. [b] 147. huius.

PROPOSITIO CLVI.

SI ratio AB ſit duplicata rationis EF, ratio quoque CD duplicata eius quam habet G ad H.

Dico rationem AB ductam in CD rationem, exhibere duplicatam eius rationem quæ oritur ex multiplicatione rationis EF in rationē GH.

Demonſtratio.



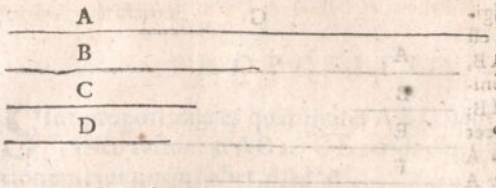
Flat vt C ad D, ita B ad I, erit [c] igitur ratio AB ducta in CD, æqualis rationi A ad I. ſimiliter ſi fiat vt G ad H, ita F ad K: erit ratio E ad K, eadem cum EF ducta in GH. ſed AI ratio compoſita eſt ex A ad B, id eſt duplicata E ad F, & ex B ad I, id eſt per conſtruct. C ad D, id eſt per hypotheſim, duplicata G ad H, & ſimiliter ratio E ad K, compoſita eſt ex ratione E ad F, & F ad K, id eſt per conſtruct. G ad H. igitur ratio A ad I, duplicata eſt rationis E ad K. ergo AB ratio ducta in CD, duplicatam habet proportionem eius, quam continet EF ratio ducta in GH. Quod erat demonſtrandum. [c] 75. huius.

PROPOSITIO CLVII.

SI ratio AB quadruplicata fuerit rationis B ad C, & BD ratio quadruplicata rationis C ad D.

Dico rationem quoque A ad D, fore quadruplicatam eius quam habet B ad D.

Demonſtratio.

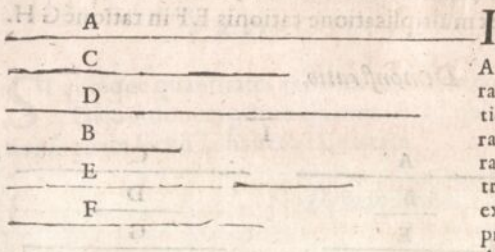


QVoniam ratio B ad D, ponitur quadruplicata rationis C ad D, igitur ratio B ad C eſt triplicata rationis C ad D. ſed ratio A ad B eſt quadruplicata B ad C; igitur ratio A ad B, eſt duodecuplicata rationis C ad D. ſed ratio B ad D, eſt quadruplicata eiuſdem rationis C ad D. Igitur ratio A ad D, eſt ſexdecuplicata rationis C ad D, cuius ratio B ad D, eſt quadruplicata: ratio verò ſexdecuplicata eſt quadruplicata quadruplicatæ (cùm quater quatuor proferant ſedecim) manifeſta igitur eſt veritas propoſitionis.

PROPOSITIO CLVIII.

QVod ſi inter A ad B quæuis duæ aſſumptæ fuerint C & D. Dico rationes AC in CD, CD in DB, idem producere quod ratio bis ducta in ſe exhibet cuius A ad B triplicata eſt.

Demonſtratio.



INter A & B, ponantur duæ mediæ E, & F. igitur rationes AE, EF, FB ſunt eædem. ſed ratio AB, componitur ex rationibus AE, EF, FB. ergo ratio AB ex tribus æqualibus rationibus, quarum vnius eſt triplicata, componitur, hoc eſt ex iiſdem inter ſe multiplicatis producitur. Atqui etiam ratio AB componitur ſiue producitur ex rationibus AC, CD, DB. Liquet ergo propoſitum.

Corollarium.

OCcurrit hinc reflexio notatu digna, cur ſcilicet hucvſque in vanum laborent Geometræ in mezolabiis adinueniendis, & in quo difficultatis cardo verſetur. Ego ſanè ex propoſitione iam allata obſeruo inter duas quãtitates datas A, & B, duas medias exhibere, non aliud eſſe quàm rationem inuenire quæ bis in ſe ducta producat rationem datam A ad B, ſiue rationem A ad B diuidere in tres rationes æquales, quæ inter ſe multiplicatæ producant rationem ipſam A ad B. Iam verò cùm quæuis ratio diuidi poſſit in quaſcunque & quotcunque rationes, ex quarũ multiplicatione queat produci copia nimirum & varietas rationũ datam rationem cõponentium ſeu producentium, difficultatẽ in preſenti negotio eam parit quam ſuperare hactenus Geometræ non potuere: quemadmodum autem arcum datum circuli non eſt difficile in tres partes partiri ſine vlla alia determinatione, ita neque rationem in tres aliquas rationes quæ generent rationem datam nullius negocij eſt: ſed ſi hucvſque Geometrarum induſtria vano labore tentauit in partes æquales datum arcum circuli diuidere; mirum videri non debet quod partitio alicuius rationis in tres rationes, quæ æquales ſint inter ſe, & multiplicatæ inter ſe rationem datam producant, difficultatem contineat. Oſtendimus quidem facilem Methodum diuidendi rationem in partes æquales ſi diuiſio illa partes conſideret quæ per additionem generant ratio-

rationem datam, sed postularet etiam præsentis libri materia partiri rationem datam in partes æquales, quę facta multiplicatione inter se exhibeant rationem quam componunt. Sed cogor materiam illam in aliud tempus differre; cùm & valetudo præcipitare cogat quod præ manibus habeo, & imperium vrgeat illorum quibus obnoxium me fecit religiosa Professio.

PROPOSITIO CLIX.

PÓnantur duæ series quinque quantitatum in continuata ratione A, B, C, D, E; F, G, H, I, K.

Dico rectangulum AF ad EK, duplicatam habere eius rationem quam habet rectangulum BG, ad DI rectangulum.

Demonstratio.

A B C D E

F G H I K

REctangulum AF ad EK rectangulum compositam habet rationem ex ratione A ad E, hoc est [a] duplicata ratione B ad D, & ex ratione F ad K, hoc est duplicata ratione G ad I. igitur cùm rectanguli BG ad DI ratio ex ijsdem rationibus cõponatur; rectanguli AF ad EK ratio, est duplicata rationis BG rectanguli ad rectangulum DI. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per 154. huius.*

PROPOSITIO CLX.

SInt duæ series trium continuarum A, B, C, D, E, F.

Dico rationem CA ductam in rationem FD, duplicatam exhibere rationem eius quæ profertur per ductum rationis BA in ED.

Demonstratio.

FIat vt F ad D, ita A ad H: & vt E ad D, ita A ad G. Igitur ratio C ad H est æqualis [b] rationi CA, ductæ in FD: & ratio BG, æqualis est rationi BA, ductæ in rationem ED. sed ratio CH, duplicata est rationis BG, nam ratio CH componitur ex rationibus CA, AH (hoc est ex constructione FD) quæ duplicatę sunt rationum CB, BG, hoc est FE, ex quibus componitur ratio CG. Igitur ratio CA ducta in FE duplicata est rationis BA ductæ in ED. Quod erat demonstrandum.

H G

A B C

D E F

[b] *75. huius.*

PROPOSITIO CLXI.

SInt duæ series continuè proportionalium eandem seu æqualem habentium primam A.

Dico rationem CA ad rationem GA habere triplicatam proportionem eius, quam habet ratio BA ad rationem FA: & rationem DA ad rationem HA triplicatam habere proportionem eius quam habet ratio BA ad rationem FA. Atque ita deinceps in infinitum.

Demon-

Demonſtratio.

A B C D E

A F G H I

a 1. huius. b 27. Progreſſ. RAtio CA eſt ad rationem [a] GA, vt C ad G, & ratio BA eſt ad rationem FA, vt B ad F. ſed ratio [b] C ad G, eſt duplicata rationis B ad F. ergo & ratio CA ad rationem GA duplicatam habet proportionem eius quam ratio BA, habet ad rationem FA. pari argumento demonſtrabimus ex iam citatis propoſitionibus reliquas aſſertionis partes.

PROPOSITIO CLXII.

SInt binę ſeries continuè proportionalium A,B,C,D,P,&c.E,F,G,H,I, &c. ſiue æquales habeant primas, ſiue non.

Dico nihilominus proportionem rationis CA ad rationem GE, duplicatam eſſe eius quam habet ratio BA ad rationem FE : & proportionem rationis DA ad rationem HE triplicatam eſſe eius quam habet ratio BA ad FE. Atque ita deinceps in infinitum.

Demonſtratio.

A B C D P

E F G H I

K L M N O

ASſumatur quantitas K æqualis A, & fiat vt B ad F, ſic K ad L, continuetur-que ratio KL per terminos KLMNO. Igitur proportio rationis CA ad rationem MK [c] eſt duplicata eius quam habet ratio BA ad rationem LK. ſed ratio MK ex conſtruct. eſt ratio GE, & ratio LK eſt ratio FE. ergo proportio rationis CA ad rationem GE, eſt duplicata eius quam habet ratio BA ad rationem FE. pari modo reliquas aſſertionis partes demonſtrabimus.

c 161. huius.

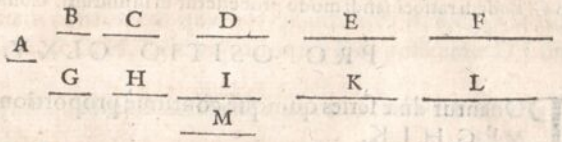
PROPOSITIO CLXIII.

DAtæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium communem habentium primam A.

Dico rationem quartarum DI ad rationem ſecundarum BG, duplicatam habere proportionem rationis B ad G: & rationem quintarum EK, ad rationem ſecundarum BG, triplicatam habere proportionem rationis B ad G: atque ita deinceps in infinitum.

Demon-

Demonſtratio.



Flat vt G ad B, ſic I ad M. erit ergo [a] ratio D I ad rationem B G, vt D ad M. Iam verò ratio D ad M, componitur ex ratione D I, hoc eſt [b] triplicata rationis B G, & ex ratione I M, hoc eſt per conſtructionem ratione G B. Atqui rationes B G, G B, componunt ſiue producunt [c] rationem æqualitatis. Ergo ratio D M componitur ex ratione duplicata rationis B G, & ratione æqualitatis. ſed [d] ratio æqualitatis in rationum compoſitione nihil addit. ergo ratio D M eſt duplicata rationis B G. ſed vt D ad M, ita ratio D I ad rationem B G. ergo ratio D I ad rationem B G, duplicatam habet proportionem rationis B G. Pari modo reliquas Theorematis partes demonſtrabimus.

[a] 13. huius.
[b] 27. Progreſſ.
[c] 76. huius.
[d] Coroll. 3. huius.

Scholion.

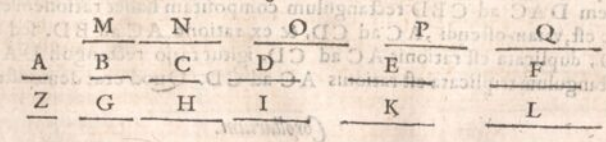
Relucet in præſenti Theoremate digna obſeruatione diuerſitas inter rationes ſimplices, & rationum proportiones. Nam per 27 libri progreſſionum Geometricarum ratio D I *triplicata eſt rationis* B G, *vbi proportio rationum* D I, B G, *vt iam demonſtrauimus, ſolùm rationis* B G *eſt duplicata. ſimiliter ratio* E K *per 27. progreſſ. eſt quadruplicata rationis* B G; *proportio autem rationum* E K, B G *tantùm triplicata eſt rationis* B G. *Atque ita deinceps in infinitum proportiones rationum ſemper vnitate minùs rationum* B G *multiplicant quàm rationes ſimplices.*

PROPOSITIO CLXIV.

Sint duæ ſeries continuè proportionalium, quæ æquales habeant primas A & Z.

Dico proportionem rationis C H ad rationem G B triplicatam eſſe proportionis quam habet ratio B G ad rationem Z A; & proportionem rationum D I, H C, quintuplicatam eſſe proportionis rationum C H, G B: proportionem verò rationum E K, I D, eſſe ſeptuplicatam proportionis rationum D I, H C, atque ita in infinitum.

Demonſtratio.



Flat vt A ad Z, ſic G ad M, & vt B ad G, ſic H ad N; & vt C ad H, ſic I ad O, & ſic deinceps. ratio igitur B M eſt [e] proportio rationum B G, A Z; & ratio C N eſt proportio rationum C H, G B; & ratio D I eſt proportio rationum D I, H C, & ſic deinceps. Iam verò quia A eſt æqualis Z, eſtque vt A ad Z ſic G ad M, erit G æqualis ipſi M, ac proinde ratio B M æqualis rationi B G. Deinde ratio C N compoſita eſt ex ratione C H, (hoc eſt duplicata [f] rationis B G) & ex ratione H N, hoc eſt per conſtructionem iterum ratione B G. ergo ratio C N, hoc eſt, vt iam oſtendi, proportio rationum C H, G B triplicata eſt rationis B G, hoc eſt rationis B M, hoc eſt, vt oſtenſum ſuprà, proportionis rationũ B G, Z A. Præterea ratio D O, componitur ex ratione D I, quæ triplicata [g] eſt rationis C H, & ex ratione I O, hoc

[e] 13. huius.
[f] 27. Progreſſ.
[g] 27. Progreſſ.

a *Ibid.* est per constructionem ex ratione C H, quæ duplicata est rationis a B G. Ergo ratio D O, hoc est, vt ostensum suprà, proportio rationum D I, H C, quintuplicata est rationis B G. Eodem ratiocinandi modo procedetur in infinitum. Constat ergo propositum.

PROPOSITIO CLXV.

PONantur duæ series quinque continuè proportionalium A, B, C, D, E & F, G, H, I, K.

Dico proportionem rationum A F & E K duplicatam esse proportionis rationum B G, D I.

Demonstratio.

A B C D E

F G H I K

QVoniam rationes A F, B G, C H, D I, E K sunt in continua analogia, etiam rationes A F, C H, E K erunt in continua, vti facilè ex hypothesi & 49. huius demonstrabitur. Proportio igitur rationum A B, E K duplicata est proportionis rationum A F, C H. sed ex hypothesi & permutando, vt A F ratio est ad rationem C H, sic ratio B G est ad rationem D I. ergo proportio rationum A F, E K, duplicata etiam est proportionis rationum B G, D I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

DIuisa sit A B in punctis C & D, vt sint proportionales A C, C D, D B.

Dico rectangulum D A C ad C B D rectangulum, triplicatam habere rationem eius quam habet A C ad C D.

Demonstratio.

A C D B

QVoniam igitur proportionales sunt lineæ A C, C D, D B; erit componendo & permutando A D ad C B, vt C D ad D B, hoc est A C ad C D, rectangulum autem D A C ad C B D rectangulum compositam habet rationem ex D A ad C B, hoc est, vt iam ostendi, A C ad C D, & ex ratione A C ad B D. sed ratio A C ad B D, duplicata est rationis A C ad C D. igitur ratio rectanguli D A C ad C B D, rectangulum triplicata est rationis A C ad C D. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

VNde si quis postularet datam lineam A B diuidi in C & D, vt rectangulum D A C ad C B D rectangulum datam obtineat rationem, vix aliud ab eo diuersum exigeret qui duas medias requireret assignari inter duas datas.

PRO-

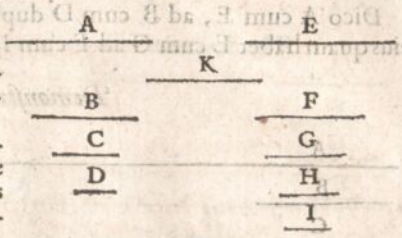
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1007] - 950
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CLXVII.

SI eandem rationem continuent quatuor quantitates A,B,C,D,& aliæ rursum quinque E, F, G, H, I, sic vt primæ A, E & postremæ D,I sint æquales:

Dico rationem AB quadruplicatam esse eius cuius ratio EF est triplicata.

Demonstratio.



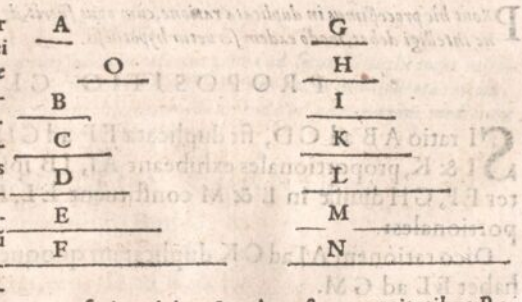
INter terminos singulos seriei A interponantur tres mediæ, & inter terminos seriei E duæ mediæ: & constabit vtraque series tredecim terminis cõtinuè proportionalibus, eritque B quinta in sua serie & F quarta in suà. Præterea quoniam primæ A, E, & vltimæ D, I sunt pares, erunt necessariò omnes termini vtriusque seriei alter alteri æquales. Ex quo manifestum est rationem A ad B, hoc est primæ ad quintam, quadruplicatam esse eius cuius ratio E ad F, id est primæ ad quartam est triplicata. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

SI eandem rationem continuent sex quantitates A,B,C,D,E,F, & aliæ septem quantitates G,H,I,K,L,M,N, ita tamen vt A & G, æquales sint, quemadmodum & F N.

Dico rationem A ad B sextuplicatam eiusdem esse rationis, cuius ratio G ad H est quintuplicata.

Demonstratio.



INterpositis enim inter terminos primæ seriei quinque quantitatibus, quæ cum prioribus eandem rationem continuent, & similiter inter terminos singulos secundæ seriei interiectis quatuor quantitatibus, continuè proportionalibus, exsurget numerus quantitatũ primæ seriei æqualis numero quantitatum quæ in secunda constitutæ sunt; cùm vtraque series triginta & vnâ constet quantitatibus: Ratio autem A ad B sextuplicata est rationis eius, cuius ratio A ad O (quantitatem ipsi B proximam) habet quintuplicatam. Igitur cùm O quantitas magnitudini H, sit æqualis, ex eo quod primæ A & G ponantur æquales & similiter vltimę, F, N, sintque tam O, quàm H sextæ in sua serie, manifestum quoque est rationem AB sextuplicatam esse eius rationis cuius G ad H, est quintuplicata. Quod fuit demonstrandum.

Scholion.

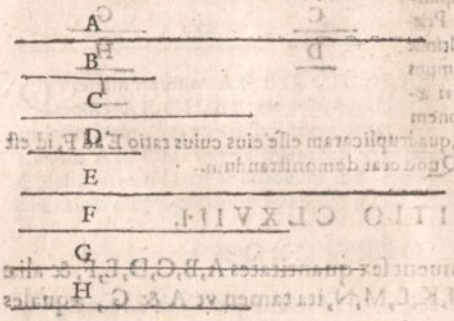
HAnc materiam vlteriùs non prosequor, cùm ex ijs quæ iam diximus, sufficienter iudicium formari queat qua ratione in vlteriore terminorum numero sit procedendum.

PROPOSITIO CLXIX.

SI A ad B eandem rationem habuerit quam C ad D, & E ad F, quam G ad H; sit autem ratio A ad B, duplicata rationis E ad F.

Dico A cum E, ad B cum D duplicatam quoque habere rationem eius quam habet E cum G ad F cum H.

Demonstratio.



QVoniam A ad B, ratio duplicata ponitur eius rationis quam habet E ad F, & quia C ad D, ratio eadem est cum ratione A ad B, erit & C ad D, ratio duplicata ipsius E ad F, vel G ad H: quia verò est vt E ad F, ita G ad H, & permutando, vt E ad G, sic F ad H, erit vt E cum G, ad E, sic F cum H ad F, & permutando vt E ad F, sic E cum G, ad F cum H. similiter est vt A ad B, sic A cum C, ad B cum D: est autem A ad B, ratio duplicata ex hypothesi rationis E ad F, quare etiam duplicata erit ratio A cum C, ad B cum D eius quam habet E cum G ad F cum H. Quod fuit demonstrandum.

Scholion.

PRout hic processimus in duplicata ratione, cùm opus fuerit, de quauis alia multiplicata ratione intelligi debet, modò eadem seruetur hypothesis.

PROPOSITIO CLXX.

SI ratio AB ad CD, sit duplicata EF ad GH, & diuisæ AB, CD in I & K, proportionales exhibeant AI, IB ipsis CK, KD, & similiter EF, GH diuisæ in L & M constituant EL, LF ipsis GM, MH proportionales:

Dico rationem AI ad CK duplicatam quoque esse eius rationis quam habet EL ad GM.

Demonstratio.

A I B C K D

E L F G M H

QVoniam ponuntur proportionales tam AI, IB ipsis CK, KD quàm EL, LF ipsis GM, MH: igitur vt AI cum IB ad AI, ita est CK cum KD ad CK, vnde

vnde vt AI ad CK, ita AB ad CD. Eodem modo infertur esse EL ad GM, vt est EF ad GH: est autem ratio AB ad CD, duplicata rationis EF ad GH: igitur etiam ratio AI ad CK, duplicata est rationis EL ad GM. Quod fuit demonstrandum.

Quod in scholio præcedenti dictum est de 169. intelligi etiam voluimus de præsenti theoremate.

PROPOSITIO CLXXI.

SI ratio A ad B, duplicata sit C ad D, ratio quoque C ad D duplicata rationis quam habet E ad F.

Dico rationem A ad B, quadruplicatam esse rationis E ad F.

Demonstratio.

INterponantur inter A & B tres quantitates, quæ cũ A & B, sint in continua proportione, scilicet G, H, & I. igitur ratio A ad B, duplicata est rationis A ad H. sed ratio A ad B, ponitur duplicata rationis C ad D; igitur ratio C ad D, est eadem cum ratione A ad H. Cùm ergo ratio A ad H, duplicata sit rationis A ad G, etiam ratio C ad D, est duplicata rationis A ad G. sed ratio C ad D, ex hypothesi etiam duplicata est rationis E ad F. igitur ratio A ad G, eadem est cum ratione E ad F: est autem ratio A ad B, quadruplicata rationis A ad G. Igitur etiam ratio A ad B, quadruplicata est rationis E ad F. Quod fuit demonstrandum.

A
G
H
I
B
C
D
E
F

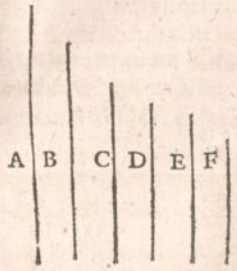
Scholion.

HAec ratiocinatio habet locum non solùm in casu quo prima ad secundã duplicatam rationem habet tertiæ ad quartam, &c. sed vniuersalissima est in quauis multiplicata ratione. nam demonstrandi ratio omnibus casibus inseruit, modo attendatur ad numerum mediarum qui interserendus est inter terminos datos primæ rationis.

PROPOSITIO CLXXII.

SIt ratio A ad B, duplicata rationis B ad C, & ratio B ad C, duplicata rationis C ad D, & ratio C ad D, duplicata rationis D ad E, & sic consequenter in infinitum.

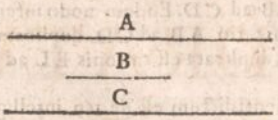
Oporteat vltimum siue minimum terminum exhibere scilicet F, huius progressionis in infinitum protensæ.



Constructio & demonstratio.

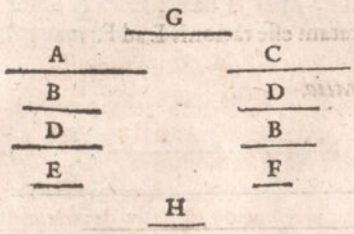
HOc problema solutum reperies libro quem præmisimus de hyperbola propositione 133. vti & alia plura huic similia.

Pagina 909. propoſ. 76. ponatur hæc figura.



Pagina 913. propoſ. 87.

In ſecunda figura quantitates D,D æquales eſſe debent, vti & quantitates B,B; id enim poſcit hypotheſis: in contextu quoque addenda quædam verba & errores litterarum corrigendi. Sic ergo legatur:



Sumantur deinde claritatis cauſa in ſecundo ſchemate quantitates D,D & B,B, æquales, ita vt oriantur octo termini, licet demonſtratio iam poſita etiam hîc valeat, cùm hypotheſis quoad rem eadem ſit, placet tamẽ aliam ſubiungere quæ vtrique caſui inſeruiat. Inueniantur [a] rationum AB, CD denominatores A & G; item DE, BF rationum denominatores D & H; quoniam igitur ratio AB ad CD rationem, ponitur eſſe, vt ratio DE ad BF rationem; igitur A ad G habet [b] eandem proportionem quam D ad H. quare quod oritur ex ductu A in H, æquale erit illi [c] quod generatur ex ductu G in D. ergo etiam ratio A ad B, ducta in rationem B ad F, producet æqualem rationem ei, quam producit ratio CD ducta in rationem DE: componitur autem ſiue producitur ratio AF ex ratione AB ductâ in BF rationem, & ratio C ad E, compoſita ſiue producta eſt ex ratione CD ductâ in rationem DE. igitur cùm ſint rationes AB, BF eædem cum rationibus CD, DE, erit [d] A ad F, vt E ad C. Quod fuit demonſtrandum.

[a] 23. huius.
[b] 42. huius.
[c] Per Coroll. 25.
[d] Princip. 3. huius.

QVA.

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER NONVS.

De Cylindro, Cono, Sphæra, Sphæroide, & vtroque Conoide Parabolico & Hyperbolico.

ARGVMENTVM.

PRæsenti libro viam tandem magis propinquam sterno ad quadraturas: cùm enim per reductionem Cylindri circulariꝭ ad aliud corpus illi æquale conemur quadraturas assequi; eundem priùs Cylindrum oportuit diuidere in quasdam partes, quarum præcipua illa est, quæ generatur sectione factâ per diametrum baseos Cylindricæ, axi non parallelâ: & frustum quidem tali sectione ablatum vngulam appellabimus, quod vngularem formam non vsque adeò respuat. Porrò & ipsam vngulam, & eius partes sectionibus ad axem cylindri æquidistantibus decussas ad parallelepipeda reducemus: cylindricam præterea vngulæ superficiem ad quadratum aut rectangulum illi æquale reuocabimus: reliqua ex partitionum argumentis pleniùs intelligi poterunt.

DEFINITIO PRIMA.

VNgula cylindrica est cylindri portio, abscissa plano per aliquam basis cylindricæ diametrum transeunte, semicirculo, semiellipsi, & parte superficiei curuę cylindricæ contenta.

Eius imaginem habes passim in figuris huius libri expressam; & proximè quidem in figura propositionis 6. in qua portio cylindri, quæ continetur semicirculo FCG, semiellipsi FDKG, & superficie curua cylindrica DFCG, vngula est.

DEFINITIO SECVNDA.

INuolucrum vngulæ est prisma vngulam sibi inscriptam ambiens. Vide figuram scholij propositionis 28. quæ huiusmodi solidum exhibet, prisma enim AFEDHCG est inuolucrum vngulæ ABCD. cetera in decursu operis suis quęque locis definientur.

ARGV-

PARTITIO LIBRI.

IN octo partes hunc librum distinguimus.

Prima vngulam cylindricam, eiusque partes, planis ad cylindri axem parallelis rescissas ad cubum reducit.

Secunda idem præstat de inuolucro vngulari eiusque partibus, quas plana ad axem cylindri parallela abscindunt.

Tertia cylindricam vngulæ cylindricæ superficiem ad quadratum reducit, aliasque eius affectiones notas facit.

Quarta miram vngulæ cylindricæ cum sphæra similitudinem continet.

Quinta vngulam cylindricam & sphæram cum cylindro parabolico comparat.

Sexta sphæroideos proprietates tractat.

Septima contemplationem instituit de Conoide Parabolico.

Octaua de Hyperbolico.

PARS

PARS PRIMA

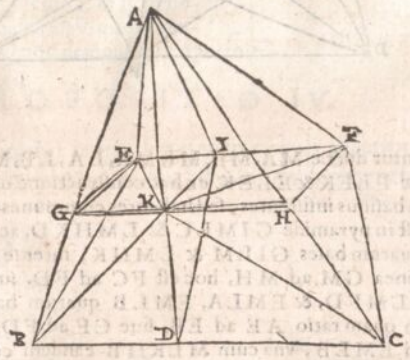
Vngulam cylindricam, eiusq; partes, planis ad cylindri axem parallelis resciſsas ad cubum reducit.

PROPOSITIO PRIMA.

TRiangulum ABC diuiſum ſit vtcunque recta AD, quam ſecet GH parallela BC, ducto per GH plano EGH, ponatur in eo EF, quæ æquidiſtet GH, iunctis deinde AE, EB, & AF, FC, diuisâque EF in I, ſecundùm rationem BD ad DC, agatur planum per AD & punctum I.

Dico corpus AFCBE diuidi plano AID ſecundùm proportionem BD ad DC.

Demonſtratio.



EX puncto K linearum GH, AD communi interſectione, ponantur rectæ KB, KC. Eſt GK ad KH, vt BD ad DC, hoc eſt ex hypotheſi vt EI ad IF. ergo figura GKIE eſt ad figuram KIFH, vt GK ad KH, (ductis enim EK, KF, eſt triangulum EKI ad IKF, vt eſt EI ad IF: triangulum quoque GEK ad KFH vt GK ad KH, hoc eſt EI ad IF.) quare cùm [a] pyramis AEGKI ad pyramidem AIKHF eam obtineat rationem, quã figura GEIK ad figuram FIKH, etiam pyramis ad pyramidem eſt, vt GK ad KH. ſed etiam [b] pyramis GEKB eſt ad pyramidem FKHC, vt GEK baſis ad baſim KFH, hoc eſt, vt GK ad KH, veluti etiam pyramis EKIB ad IKFC pyramidem. quare tota pyramis GEIKB ad totam IKHFC, rationem habet eandem cum GK ad KH, hoc eſt BD ad DC. Ergo [c] AIKEB corpus ad corpus AIKCF, eſt vt BD ad DC. ſed etiam pyramis IKDB ad IKDC pyramidem rationem obtinet quã baſis BKD ad baſim DKC, hoc eſt quam BD ad DC. Igitur totum ſolidum AIDB ad ſolidum AIDC, proportionem habet quam BD linea ad DC lineam. Quod fuit demonſtrandum.

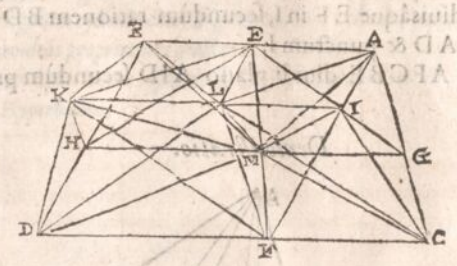
[a] 6. *duodec.*
[b] 5. *duodec.*
[c] 24. *quinti.*

PROPOSITIO II.

PONatur figura quadrilatera A B C D, cuius oppoſita latera A B, C D proportionaliter diuidat recta E F: ſit autem G H parallela C D ſecans E F in M, & in plano per G H ducto collocetur I K parallela G H, quæ ſecetur in L ſecundùm rationem C F ad F D. Iunctis denique A I, I C, B K, K D planum ponatur per E F & punctum L.

Dico corpus A I C D K B diuiſum eſſe plano E L F ſecundùm rationem C F ad F D.

Demonſtratio.



COncipiantur ductæ M A, M B, M I, M K, L A, L B, M C, M D, L C, L D, nec non lineæ F I, F K & E I, E K. ex hac conſtructione orientur pyramides variæ, variis quidem baſibus inſiſtentes, ſed habentes communes altitudines, quemadmodum videre eſt in pyramide G I M L C & L M H K D, ac pyramidibus A I G M L, B L M H K, quarum baſes G I L M & L M H K, inter ſe eam ſortiuntur rationem, quam habet linea G M ad M H, hoc eſt F C ad F D. ſuperſunt præterea pyramides L M F C, L M F D, & E M L A, E M L B quarum baſes etiam ſortiuntur eandem rationem quam ratio A E ad E B, ſiue C F ad F D. quare E L M A vnà cum L M G I A ad E M L B, vna cum M L K H B eandem continent rationem quam F L M C vnà cum G I L M C ad L M F D, vnà cum L M K H D. ergo totum A I C F L E ad totum E L F D K B, eſt vt C F ad F D. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

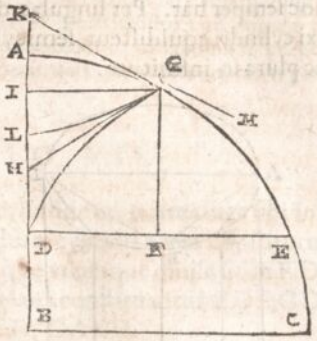
QVartæ parti ſuperficiei circularis A B C inſcribatur D E ſemidiametro B C æquidiſtans: quâ bifariam in F diuiſa, erigatur normaliter F G ad rectam D E, ponaturq; G I parallela B C.

Dico parallelogrammum I G F maius eſſe dimidio ſegmenti A D E.

Demon-

Demonſtratio.

DVcâ GK quæ contingat circulum in G, occurratque AB productæ in K. fiat angulo KGI, æqualis angulus IGH, factâ deinde rectâ IL æquali AI, deſcribantur circulorum arcus LG, DG ſemidiametro AB. Quoniam IGF angulus rectus eſt, reliqui duo KGI & MGF, recto ſunt æquales. ſed angulus HGI æquatur angulo KGI. ergo etiam HGI cum MGF, facit rectum. ſed etiam HGI cum HGF, facit rectum. Igitur HGF angulus angulo FGM eſt æqualis. quare cùm MG tangat CG in G, etiam HG tanget arcum DG in G. ſimiliter demonſtrabo etiam arcum LG in eodem puncto tangi ab HG. Quare æquales ſunt figuræ IGL & GDF, quantitatibus AGI & GFE. ſed rectangulum IF, excedit figuras GIL, DGF quantitate miſtilinea LGD. eâdem ergo quantitate rectangulum IF, ſuperat figuras AGI, GFE. ſunt igitur illæ dimidio ſegmenti ADE minores, & conſequenter IF maius eſt dimidio eiuſdem ſegmenti AGED. Quod demonſtrare oportuit.

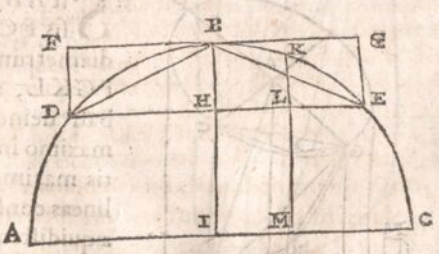


PROPOSITIO IV.

TRiangulum maximum cuiuis ſegmento circuli inſcriptum, quod ſemicirculum non excedit, maius eſt eiuſdem ſegmenti dimidio.

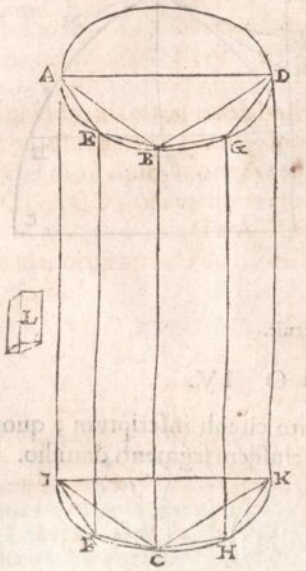
Demonſtratio.

POnatur ſemicirculus ABC, ex quo ſegmentum quoduis dematur DBE, habens DE parallelam AC diametro; erigatur deinde ex I, centro circuli normaliter IB, quæ diuidet DE bifariam; perfecto deinde rectangulo latitudinis DE, altitudinis verò HB, erit FG circulum contingens, æquidiſtat enim DE rectæ FG, & diameter IB orthogona eſt parallelis FG, DE; poſitâ igitur quauis KLM, quæ æquidiſtet BH, erit KM minor BI. ablatis ergo HI, LM æqualibus lineis, remanebit BH maior KL. quare triangulum DBE maius erit DKE triangulo, ac proinde maximum eſt eorum quæ ſegmento DBE inſcribi queunt; eſt autem DBE triangulum dimidio ſegmenti maius, cùm triangulum DBE, rectanguli FG ſit dimidium. triangulum igitur maximum dimidio ſegmenti eſt maius. Quod fuit demonſtrandum.



PROPOSITIO V.

INſcribatur ſemibaſi cylindricæ triangulum maximum ABD, reſiduis quoque ſegmentis maxima triangula inſcribantur AEB, DGB: & hoc ſemper fiat. Per ſingulas deinde harum linearum ductis planis quæ axi cylindri æquidiſtent, ſemicylindro inſcribantur priſmata plura ſemper ac plura in infinitum.



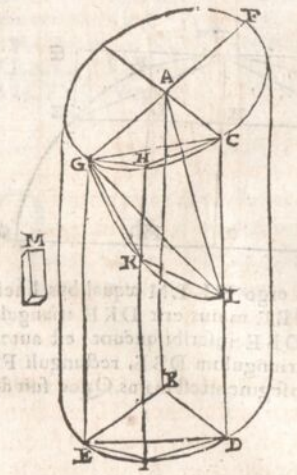
Dico tandē ex ſemicylindro ABCD, relinquendam quantitatem ſolidam quauis datâ L, minorem ex continuata ſine termino priſmatum ablatione.

Demonſtratio.

OStenſum præcedenti propoſitione triangula illa ſegmentis inſcripta maiora eſſe dimidiis ſegmentorum, quibus inſcribuntur: eſt autem ratio priſmatum ad ſegmenta cylindrica eadem cum ratione baſium triangulorū nempe ABD, AEB, BDG ad ſegmenta circularia, quæ ſunt baſes ſegmentorum cylindricorū, cùm altitudinibus non differant. Igitur & priſmata inſcripta maiora ſunt dimidijs corporum quibus ſunt inſcripta. quare per primam decimi elementorum perpetuâ priſmatum ablatione tandem è cylindro reſidua fiet quantitas datâ L magnitudine minor. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

SIt AB axis cylindri CDE, cuius baſis FCG, diuiſa ſit bifariam per FG diametrum, ſecundùm quam ſi fiat ſectio FGKL, abſcindetur vngula FCGL, baſi deinde FCG, inſcripto triangulo maximo inſcribantur & reſiduis ſegmentis maxima triangula; & ſecundùm has lineas conſtitutis planis quæ axi cylindri æquidiſtent, vngulæ priſmata inſcribantur plura ſemper ac plura in infinitum.



Dico ex continuata ſine termino priſmatum ablatione relinquendam tandem quantitatem dato ſolido M, minorem ab vngulari magnitudine.

Demonſtratio.

PEr præcedentem propoſitionem eouſque continuetur ablatio priſmatum à cylindro donec reſidua fiat quantitas ſolido M minor, hoc igitur reſiduum maius erit reſiduo

residuo quod relinquetur ex vngulari quantitate, cùm sit pars alterius residui quod à cylindro relictum est, multo igitur minus erit residuum vngulæ quantitate M. Quod oportuit demonstrare.

Corollarium.

NE repetere cogamur demonstrationes præcedentes, includere illis quoque intendo casum qui spectat corpus quod resultat ex semicylindro post vngulæ decussationem, hoc est si contingat fieri similes ablationes prismatum à corpore LDIEGKL remanebit quoque solidum quauis data quantitate minus, vt patet demonstrationis iam positę vim consideranti.

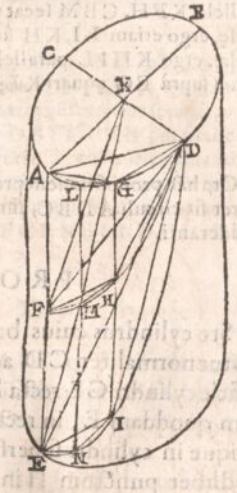
PROPOSITIO VII.

DIuidant AB, CD diametri basim cylindricam normaliter sibi insistentes, & per AB planum secundùm cylindri axem constitutum signet in cylindri superficie rectam AE, quę vtcunque diuisa sit in F. Deinde per rectam CD & puncta F & E, plana constituantur CDF, CDE vt resultent vngulares quantitates CAFD, CAED.

Dico inter vngulam CAED & vngulam CAFD, eam rationem intercedere quæ est inter rectas AE & AF.

Demonstratio.

DIuiso arcu AGD bifariam in G, ponantur rectæ AG, DG. Idem fiat de arcubus residuis & sectiones fiant secundùm has lineas quæ axi cylindri æquidistent exhibentes in cylindri superficie rectas LN, GI, &c. erit itaque AEIGD corpus vngulę AED inscriptum, ad corpus AFHGD, suæ vngulæ inscriptum vt [a] linea AE ad AF. similiter corpus AENIG inscriptum ad corpus AFMHG inscriptum habebit [b] rationem eandem quam AE ad AF. Corpora autem illa inscripta, ablata ex quantitatibus quibus inscribuntur; relinquunt [c] tandem dato solido minorem. Cùm igitur per tales inscriptiones sine fine continuatas semper resultet ratio AE ad AF, per ea, quæ libro de progressionibus [d] præmisimus; manifestum est etiam vngulas ipsas ADIE & ADHF, eam rationem continere quam AE linea ad lineam AF. Quod fuit demonstrandum.



a 1. huius.

b 2. huius.

c 6. huius.

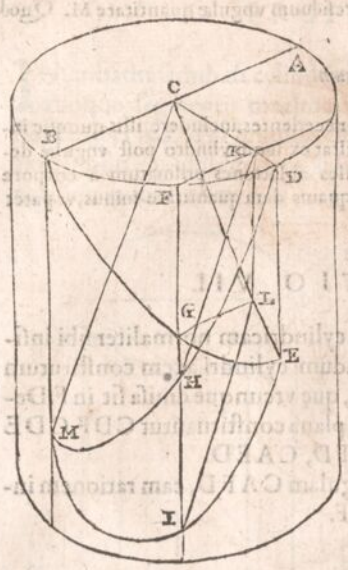
d 116. Progress.

PROPOSITIO VIII.

SEcetur cylindrus sectione per diametrum basis AB decussante vngulam ADEB, erectâ deinde ex C centro normaliter CD ad diametrum AB, ducantur latera cylindri DE, BM, ad latus autem DE ductâ CE: fiant sectiones, vna per lineam CD, & punctum M in latere BM, altera per rectam CE, & idem punctum M. Ponatur denique linea recta

quæuis FI in cylindri ſuperficie exhibens communes interſectiones cum planis poſitis puncta G, H, I.

Dico FG æqualem eſſe lineæ HI.



a 16. vndecimi.

b 9. vndecimi.

Demonſtratio.

PEr rectam IF age planum parallelum plano CBM, faciens cum plano CDB ſectionem FK, cum plano CDE ſectionem KL, cum plano CEGB ſectionem LG. Quoniam igitur planum CDB, ſecat duo plana parallela KFI, CBM, erunt[a] ſectiones KF, CB parallelæ. Rurſum quia planum CEGB ſecat duo plana parallela KFI, CBM, erunt ſectiones LG, CB etiam parallelæ. parallelæ igitur[b] ſunt KF, LG. Deinde quia plana parallela KFI, CBM ſecat planum EDC, erunt ſectiones communes, nimirum KL, & axis cylindri, æquidiſtantes. ſed etiam latus FG axi æquidiſtat. ergo KL, FG æquidiſtant. ergo GFKL parallelogrammum eſt. ergo FG æquatur KL. iungantur deinde CM, KH. Quoniam plana parallela LKHI, CBM ſecat planum CLEIM. erunt communes ſectiones LI, CM parallelæ. Rurſum quoniam plana parallela KFH, CBM ſecat planum CKDHM, erunt ſectiones KH, CM parallelę. ergo etiam LI, KH ſunt parallelæ: ſunt autem & HI, KL ſuprà oſtenſæ parallelæ. ergo KHIL parallelogrammum eſt. ergo HI æqualis eſt, KL. ſed etiam oſtendi ſuprà FG æquari KL; æquatur igitur FG, HI. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

NOta hãc propoſitionem prorſus eſſe vniuerſalem; vera eſt enim, ſiue AB, diameter ſit circuli ADBC, ſiue quædam ei æquidiſtans, vt patet demonſtrationem conſideranti.

PROPOSITIO IX.

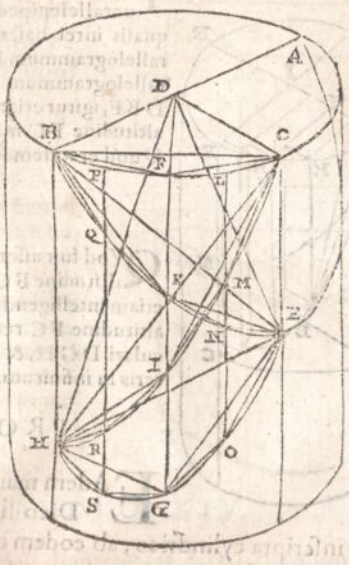
ESto cylindrus cuius baſim diuidat diameter AB: ex centro D erigatur normaliter CD ad diametrum AB: per C verò ponatur in ſuperficie cylindri CE recta linea: deinde agatur planum per AB, & punctum quoddam E, in recta CE, exhibens ſectionem ABKE. poſitâ denique in cylindri ſuperficie recta BH, ducatur planum per CD, & quodlibet punctum H in recta BH, tandem per DE rectam & idem punctum H ſectio fiat DEGH.

Dico vngulam cylindricam DBFCEKB æqualem eſſe ſolidæ magnitudini DHICEGH.

Demon-

Demonſtratio.

IVngantur C B, E B, C H, E H, igitur pyramis D C E B pyramidi D C E H, æqualis eſt, cùm ſint ſuper eadem baſi & altitudine, diuidatur deinde arcus B C bifariam in F, & per punctum F axi cylindrico æquidiſtet F K I G; iungantur deinde C F, F B, E K, K B, C I, I H, E G, G H. quoniam ergo [a] F K ipſi I G æqualis eſt, ſitque F G rectæ C E parallela, perſpicuum eſt, trapezium C F K E trapezio C I G E æquale eſſe; proindeque cùm & altitudines ſint æquales, quod B H ſit parallela ad C E, pyramidem C F K E B, pyramidi C I G E H parem eſſe. Rurſus ſubdiuidatur bifariam arcus C F in L, & per L ponatur axi æquidiſtans L M N O; iungantur quoque C L, L F, E N, N K, C M, M I, E O, O G. Quoniam igitur L M ipſi N O eſt æqualis, & L O parallela C E, erit trapezium C L M E trapezio C N O E æquale. vnde, cùm ſit F G ipſis L O, C E æquidiſtans, manifeſtum eſt ſolidum C L N E K F ſolido C N O E I G æquale exiſtere. hac conſtructione ſemper continuatâ ex omni parte auferentur ſemper æqualia, atque adeò quantacunque pars tandem à corpore D B F C E K B per ſimiles inſcriptiones auferatur, poterit æquale quoque auferri à cylindrica quantitate D H I C E G H. Per tales autem ablationes ſine fine continuatas relinquetur tandem ex vtraque quantitate ſolidum dato minus. Quare per ea quæ libro de progreſſionibus Geometricis præmiſimus, [b] neceſſe eſt totũ D B F C E K B toti D H I C E G H æquale exiſtere. Quod fuit demonſtrandum.



[a] 8. huius.

[b] Coroll. 16. progreſſ.

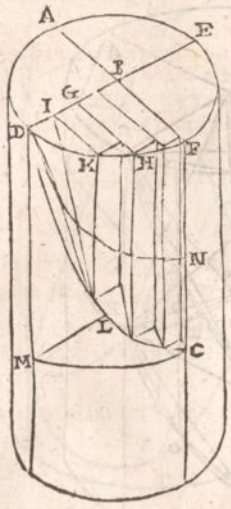
PROPOSITIO X.

DIuiſa ſit A B F diameter baſeos cylindri A D C in B bifariam, & ex B ad ipſam normaliter erigatur D B, diuiſa denique B D bifariam in puncto G, erigatur G H quæ æquidiſtet A F, perficiaturque rectangulum parallelogrammum B G H.

Dico parallelepipedum ſub baſi rectangula B G H & altitudine F C, maius eſſe dimidio quartæ partis cylindri F B D M C.

Demon-

Demonſtratio.



a *Colligitur ex elementar.*
b *3. huius.*

TAlem enim habet rationem quadrans cylindri ad parallelepipedum ſub baſi BH & altitudine FC, qualis inter baſes, quadrantem ſcilicet BDF, & parallelogrammum BH [a] reperitur: ſed oſtenſum eſt [b] parallelogrammum BH maius eſſe dimidio quadrantis DBF, igitur etiam parallelepipedum ſub baſi BH, & altitudine FC maius eſt dimidio quadrantis cylindrici. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

QVod fuit aſſertum de parallelepipedo ſub BGH, & altitudine FC reſpectu quartæ partis cylindri DBF etiam intelligendum de parallelepipedo ſub baſi GK, & altitudine FC reſpectu ſolidi quod fit ſub ſegmento circulari DGH, & altitudine eâdem FC, atque ita de cęteris in infinitum.

PROPOSITIO XI.

EAdem manente figurâ:
Dico ſi parallelepipeda hoc modo quadranti inſcripta cylindrico, ab eodem quadrante ſemper demantur, reſiduam tandem fore quantitatem omni ſolidâ magnitudine datâ minorem.

Demonſtratio.

IN præcedenti, eiuſque Corollario demonſtratum eſt parallelepipeda illa maiora exiſtere dimidijs quantitatum cylindricarum, quibus inſcribuntur. Quare ſi ab his illæ tollantur, ſemper plus auferetur quàm dimidium. Ergo per 1. decimi relinquetur tandem ex quadrante cylindrico quantitas datâ minor. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

QVadrantis cylindrici baſis ADF diuiſa ſit vt priùs; ſectâ nimirum BD in partes æquales G, I, &c. perficiantur parallelogramma BH, GK, &c. cylindro deinde inſcripta ſint parallelepipeda vt priùs ſub ijſdem baſibus. Denique ſecundùm rectam DB, & quoduis punctum N in linea FC, quæ eſt in cylindri ſuperficie, planum agatur exhibens vngulam END.

Dico etiam ex ipſa tandem vngula relinquendam quantitatem quauis datâ minorem ſi eadem operatio in baſi cylindri continuetur quæ ſuperiore propoſitione imperata fuit.

Demonſtratio.

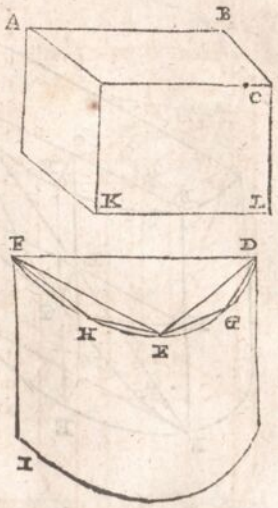
OStenſum eſt ex ipſo cylindro reſiduam fore quantitatem quauis data minorem: ſed hęc pars reſidua maior eſt reſiduo quod remanet ex ipſa vngula. igitur cùm vngulæ reſiduum pars ſit eius reſidui quod remanet ex ipſo cylindro, patet veritas propoſitionis.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1021] - 964
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XIII.

SOlidæ magnitudines habẽtes vtramque basim parallelam similem similiterq; positam, eam inter se sortiuntur rationem quæ ex basibus & altitudinibus composita est.



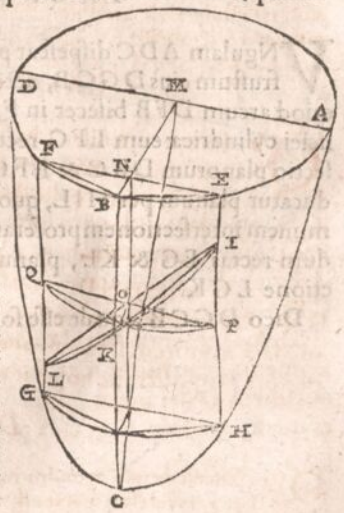
Demonstratio.

SI magnitudines parallelepipedales fuerint vel prismata, iam per elementa constat huius propositionis veritas, quod si altera sit parallelepipedum vel prisma, vt AL: altera verò curuilinea DHI; vel si vtraque sit curuilinea, per inscriptiones prismatum semper continuatas concludetur propositum eâ discurrendi formâ, qua Euclides vtitur in elemento duodecimo. Quem discursum ego ad alia properans formandum relinquo Lectori.

PROPOSITIO XIV.

VNgulam AB, CD, cuius in basi diameter est AD, secet aliquod planum axi æquidistans EFGH faciens in plano ABD, sectionem EF parallelam AD; quod deinde secetur plano IKL recto ad planum EFG, diuisâ denique bifariam rectâ EF in N, agatur planum per N & axem cylindri, ad quem vngula pertinet, occurrens plano IKL secundũ communem intersectionem OK, per quam fiat sectio PKQ parallela plano ABD.

Dico frustum cylindricum EIKLF æquale esse frusto EPKQF.



Demonstratio.

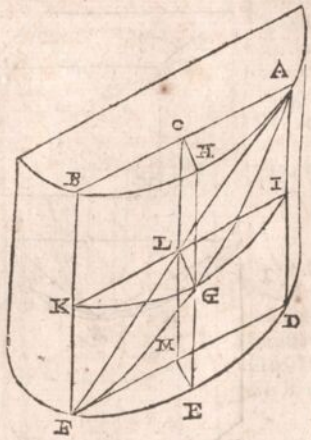
DVcantur PK, KQ rectæ subtendentes arcus PK, KQ, qui quoniam sunt æquales inter se, vtpote æquales arcubus EB, BF, erunt quoque lineæ PK, KQ æquales. sunt quoque triangula æqualia & similia IPO, QOL, cùm lineæ EN, NF, hoc est PO, OQ, adeoque & IO, OL, æquales sint. Igitur pyramides IOKP, QOKL æquales sunt. Rursus segmentis PK, KQ inscribi possunt triangula maxima vt priùs: erunt hęc æqualia inter se, & per ea quę paulò ante præmisimus, inscripta vni prismata, alteri inscriptis erunt æqualia quod cùm semper fieri possit, constat segmentũ IPKO [a] segmento OKLQ esse æquale. adiecto igitur cõmuni solido EIKQF, erit totum EPKQF, toti EIKLF æquale. Quod fuit demonstrandum.

a *Ex Coroll. 116. progres.*

PROPOSITIO XV.

SEcetur cylindrus sectione ABFD, quæ æquidistet axi: diuisâ deinde bifariam rectâ AB in C, ducatur per C & axem cylindri planum EHCM, ductâ deinde AF quæ occurrat ipsi CM in L, per L agatur planum IGK faciens cum plano EHCM sectionem communem LG, tum per rectas ALF, LG planum ducatur AGFL.

Dico segmentum cylindricum ADFB plano ALFG diuisum esse bifariam.



Demonstratio.

a 14. huius.

FRustum ALGI,[a] frusto KLGF æquale est. Eodemque discursu quo probata fuit horum frustorum æqualitas, concludetur etiam æqualitas frustorum GLCHA, EGLMF. Igitur frustum ALGI cum frusto EGLMF, æquatur frusto KLGF, vnà cum frusto GLCHA. Quare si vtrisque addantur æquales cylindri portiones IGLMED, BCHGLK, erunt tria frusta ALGI, EGLMF, IGLMED, tribus KLGF, GLCHA, BCHGLK æqualia. Atqui hæc tria vltima constituunt segmentum AGFB; tria verò priora conficiunt segmentum ADFGA. ergo illa quoque segmenta sunt æqualia. segmentum igitur cylindricum ADFB, plano AGFL bifariam est diuisum. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

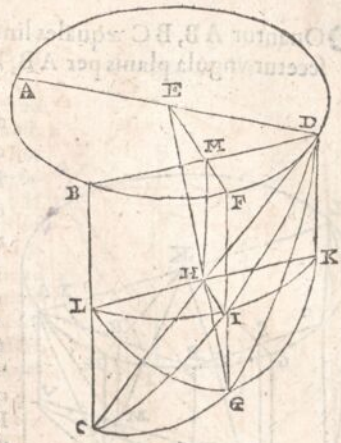
VNgulam ADC dispescat planum DBC axi æquidistans, exhibens frustum eius DGCB, acto deinde per axem cylindri plano EFG, quod arcum DFB bisecet in F, assignetur communis intersectio superficiei cylindricæ cum EFG recta FG, & recta MH communis intersectio planorum DBC & EFG, positaque HI, quæ sit parallela EF, ducatur planum per HIL, quod sit æquidistans basi ABD, quod communem intersectionem proferat KL cum plano DBC. tandem secundùm rectas EG & KL, planum ponatur terminatum in cylindro sectione LGK.

Dico DGCB æquale esse solido DKGLB.

Demon-

Demonſtratio.

SI fruſtis DHIG & KHIG, inſcribantur pyramides ſuper eadem baſi HIG, erunt hæ pyramides inter ſe æquales, cùm altitudines ſint æquales; ſimiliter æquabantur & pyramides, quæ in fruſtis HIGC & HIGL, ſuper eadem baſi conſtituentur, cùm altitudines earum etiam ſint æquales, & quia omnes ſimiliter figuræ inſcribendæ fruſto HGID, æquales erunt figuris quę eadem conſtructione inſcribentur fruſto HIGK, erunt fruſta illa ęqualia. [a] pari modo quia omnes quoque figuræ fruſtis HIGC, HIGL inſcribendę futuræ ſint æquales perpetuo, etiam hæc fruſta æqualia erunt; ſunt igitur quatuor illæ partes ſolidę æquales inter ſe, ac proinde ſolidum KGL æquatur ſolido DGCIDHC: oſtenſum quoque eſt [b] IHLC æquari DHIK. Igitur communi addito DFBLID, erit DKILB æquale DICB: additis ergo KGL, DGCIDH, quæ ante oſtendi eſſe æqualia, totum DGCB æquale erit toti DKGLB. Quod fuit demonſtrandum.



a *Coroll. 116. progreſſ.*

b 14. *huius.*

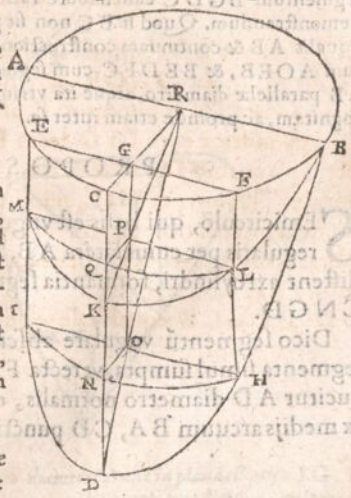
PROPOSITIO XVII.

DAta ſit vngula BDAC, in cuius baſi ad baſeos diametrum AB, æquidiſtet EF, quâ biſectâ in G, per G & axem cylindri ducatur planum faciens in cylindri ſuperficie ſectionem CD. ſumpto deinde in CD puncto aliquo K, per illud ſecundum AB diametrum fiat vngularis ſectio BLKMA. Denique per rectam FE age planum axi æquidiſtans FLHIME,

Dico partem vngularem FLKME, ad vngularem partem FHDIE, eam habere rationem quam habet recta CK ad rectam CD.

Demonſtratio.

ESt enim oſtenſum [c] ſolidam magnitudinem vngularem BDAC ad vngulam BKAC, eam habere rationem quam habet CD ad CK: eodem autem diſcurſu oſtendi poteſt vngulæ BDA, partem BFHIEA, ad partem BFLMEA vngulæ BKA, eandem [c] habere rationem quam FH ad FL, hoc eſt CD ad CK. igitur reſidua duo FHDIE, FLKME eandem habent rationem quam CD ad CK. Quod fuit demonſtrandum.



c 7. *huius.*

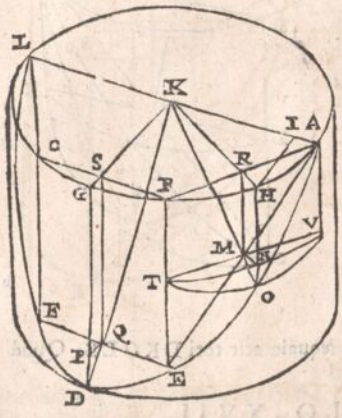
Corollarium.

CVm igitur per 7. huius etiam totæ vngulæ BKA, BDA rationem eandem habeant quam rectę CK, CD, ſequitur vngulas totas ſegmentis eſſe proportionales.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur AB, BC æquales lineę obtendentes arcus AHB, BGC, & ſecetur vngula planis per AB, BC, quæ axi ſint parallela.

Dico ſegmentũ vngulæ ARBEOA ad ſegmentum vngulæ BSCDE, eam obtinere rationem quam habet linea HI ad lineam GK, quæ normaliter ducuntur ad diametrum AL diuidentes arcus AB, BC bifariam.



Demonſtratio.

SIt primò BC parallela diametro AL, & planum ponatur per K centrum baſeos quod biſecet arcum AB in H, & rectam HO producat in cylindri ſuperficie; in plano autem elliptico ADL, rectam KO, denique in plano ABE rectam RM: ex cuius termino M poſita MN, quæ æquidiſtet RH, ſectio fiat per lineam NM parallela AB, & planum tandem ducatur TOV per KO, & rectam VT parallelam ad AB, oſtenſum eſt [a] ſegmentum vngulæ AVOTB æquari ſegmento AOEB; oſtenſum quoque eſt AVNOTB, ſegmentum ad ſegmentum BGDC eam rationem habere quam habet HO linea ad lineam GD: eſt autem HI ad GK, vt HO ad GD, cùm IO, & KD ſint in eodem plano: ſintq; triangula IHO, KGD ſimilia. Igitur manifeſtum eſt ſegmentum AOEB vngulare ad vngulare ſegmentum BGDC eam habere rationem quam linea HI ad GK. Quod fuit demonſtrandum. Quod ſi BC non ſit parallela AL. fiat parallela quędam quæ ſit æqualis AB & continuata conſtructione præcedenti comparetur vtrumque ſegmẽtum AOEB, & BEDFC cum ſegmento illo quod habet rectam æqualem ipſi AB parallelæ diametro, atque ita vtriuſque rationem inueniet ad illud ſegmentum cognitam, ac proinde etiam inter ſe.

[a] 16. huius.

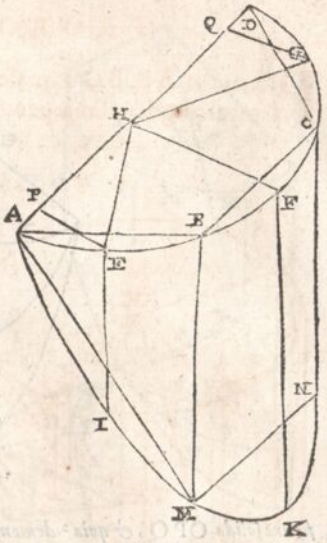
PROPOSITIO XIX.

SEmicirculo, qui baſis eſt vngulæ, inſcribatur dimidium hexagoni regularis per cuius latera AB, BC, CD plana ponantur, quæ æquidiſtent axi cylindri, formantia ſegmenta vngularia AIBM, BMKNC, CNGD.

Dico ſegmentũ vngulare abſciſſum plano CBM eſſe ad reliqua duo ſegmenta ſimul ſumpta, vt recta FH, quę ex medio arcus CB puncto G, ducitur AD diametro normalis, eſt ad duas ſimul lineas HI, GQ, quæ ex medijs arcuum BA, CD punctis ſunt normales eidem diametro AD.

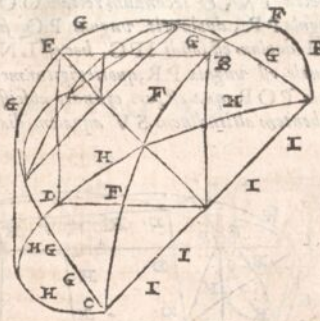
Demon-

Demonſtratio.

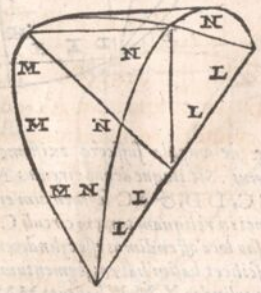


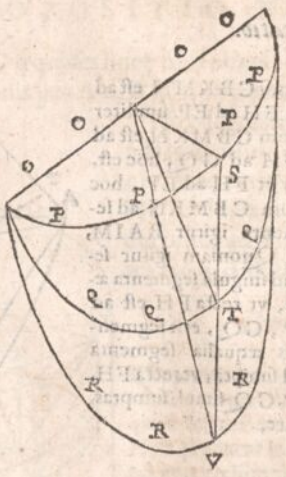
PEr præcedentem ſegmentũ CBKMN eſt ad ſegmentum BAIM, vt FH ad EP. ſimiliter per præcedentem ſegmentum CBMKN eſt ad ſegmentum NCDL, vt FH ad GQ, hoc eſt, (quia GQ, EP æquantur) vt FH ad EP, hoc eſt vt idem rurſus ſegmentum CBMKN ad ſegmentum BAIM; ſegmenta igitur BAIM, NCDGL æqualia ſunt. Quoniam igitur ſegmentum CBMKN eſt ad ſingula ſegmenta æqualia BAIM, NCDL, vt recta FH eſt ad ſingulas æquales lineas EP, GQ, erit ſegmentum CBMKN ad duo æqualia ſegmenta BAIM, NCDGL ſimul ſumpta, vt recta FH, ad duas æquales rectas EP, GQ ſimul ſumptas. Quod oportuit demonſtrare.

Scholion.

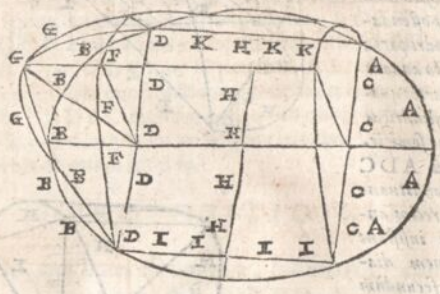


Oſtenſum eſt propoſitione 16. libri de ductu plani in planum, quid intelligamus per ſemicirculum in ſe ductum, & ſimul demonſtrauimus ſolidum inde productum eſſe veram cylindri partem. Verùm poſtulat huius loci ratio & ſequentium propoſitionum clarior explicatio, vt oſtendamus qualis ſit ea cylindri pars, quæ circulo in ſe ducto æqualis ſit, & quæ eiuſdem partes quaue ratione ad partes cylindricas reducantur. Sit itaque ſemicirculus ABC *æqualis* ADC *ſemicirculo, qui ita conſtituantur inter ſe, vt ad rectos angulos eorum plana inſiſtant habentes communem diametrum* AC, *& ſecundùm modum in libro de ductibus explicatum in ſe inuicem ducantur, ita vt producant cylindricas ſuperficies, ſcilicet* FG, *&* GH, *ſitq;* IG *planum ellipticum, quod hoc corpus diuidit. quoniam omnes lineæ* IF *æquales ſunt rectis* IH: *producent lineæ,* IF, IG *ductæ in lineas* IH, *quadrata infinita* IFGH, *quorum diametri erunt in plano elliptico* IG, *itaque ſolidum* ABEDC *elliptico plano* IG, *in duas æquales partes erit diuiſum; quarum vna erit* FG, *ſiue* LMN, *in cylindro* OP *habente baſim* OP, *æqualem ſemicirculo* ABC,





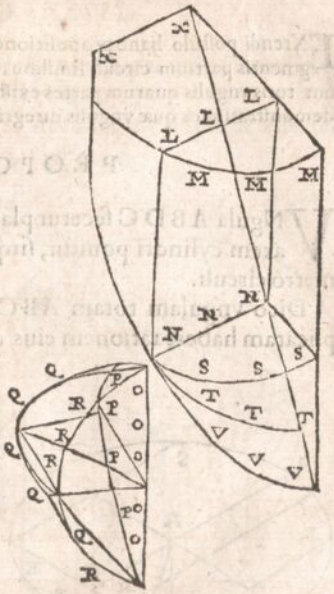
a Per 7. huius. *figura ſolida* OPQ, *& quia* a *demonſtratum eſt vnam vngulam ad vngulam alteram eam proportionem ſeruare quæ inter earum altitudines, nempe lineas* ST, SV *exiſtit; ſi lineæ* ST *æqualis ſit recta* TV, *& ſecundùm rectam* OO, *& VK punctum ſectionem contingat fieri, tunc vngula* PR, *dupla erit vngulæ* PQ *ſiue* LNM, *ſiue* IFG, *ſed etiam* FI *ductum in* HI, *duplum eſt ſolidi* IFG, *hoc eſt* LNM, *hoc eſt* OPQ: *igitur* FI *ductum in* IH, *æquale eſt vngulæ* PR, *quoties igitur mentio fiet ſemicirculi in ſe ducti, ſubeat in mentem vngulæ* POR, *quæ eſt pars cylindri abſciſſa plano quæ ſit per aliquam diametrum* OO, *habentem altitudinem* SV *æqualem diametro baſeos* OO.



Atque hæc de vngula ſufficere exiſtimo. reliquum eſt, vt eius quoque partes nonnihil explanemus. Sit itaque denuo circulus AB, *cuius diametro* HH, *æquidiſtent duæ lineæ æquales* CC, DD, *& AC ſegmentum erectum ſit normaliter ad planum circuli* AB, *& intelligatur duci in reliquam partem circuli* CB *interceptam parallelis* II, KK: *orietur hinc ſolidum quod ſuo loco oſtendimus eſſe cylindricum; habens duas partes, quarum vna eſt cylindrica prorſus, ſcilicet baſim habens ſegmentum* CE, *quæ eſt æqualis* AC, *& altitudinem* CD, *hoc eſt* LN *in cylindro* XMV *habente* MM *circulum æqualem circulo* AB: *altera verò eſt* DFGB, *hoc eſt* OPQR *quæ pars in ſua geneſi exſurgit ex ductu* AC, *ſuperficie in ſe ducta: eſt enim* AC *ſegmentum æquale* DB, *ſiue* DF. *quare* DFGB *quadrata ſunt quorum diametri* DG, *ſiue* OQ, *in eodem plano exiſtunt. quare ſi planum agatur per rectam* DD *&* GG, *diuidet hoc planum ſolidam hanc figuram* DFG, *vel* OPQ *in duas partes*

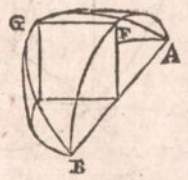
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1027] - 970
PUBLIC DOMAIN

tes æquales, quemadmodum de toto ſemicirculo in ſe ducto explicatum eſt. Ponantur iam in cylindro ſegmenta circularia parallela LM, NS *æqualia ſingula ſegmento* AC *ſiue* DF, *ſiue* OP, *quæ intercipiunt rectas* MS *æquales ipſis* EF. *fiantq́; tam* ST, *quàm* TV *æquales ipſis* SN, *hoc eſt* AC, *ſiue* DB; *eruntq́; totæ* MV *æquales totis* AB. *agantur deinde plana per* NT *&* NV: *erit* NST *quantitas par quantitati* DFG, *& quantitas* NTV *par quantitati* BGD, *ac proinde totum ſolidum* NSV *æquale ſolido* DFGB, *hoc eſt* OPQR, *& conſequenter erit totum* LMVN *corpus, æquale corpori* CEGB, *quod natum eſt ex ductu* AC *in* CB: *quod autem corpus hoc* LMVN *pertineat ad vngulam* XMV, *patet, quoniam* XM *dimidiæ ſunt* MV, *&* NS *dimidiæ ſunt* SV. *igitur anguli* SNV *æquales ſunt angulis* MXV. *quare* XNV *ſunt in eodem plano. Ex his ergo hunc in modum expoſitis habemus ſegmenta circuli inæqualia* AC *&* CB, *in ſe mutuo ducta producere ſegmentum vngulare* LMVN *abſciſſum plano* LN, *à tota vngula* XMV, *cuius baſis eſt par circulo* AB, *& altitudo æqualis diametro* AB. *hoc reuocet in memoriam Lector, vbi de ſegmentis circuli in ſe ductis mentio inciderit.*



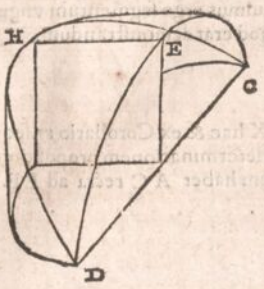
PROPOSITIO XX.

SOlidum productum ex ſemicirculo in ſe ducto ad aliud ſimiliter ortum ex alio ſemicirculo in ſe ducto triplicatam rationem habet laterum homologorum.



Demonſtratio.

SInt itaque AB, CD diametri ſemicirculorum AFB, CED qui in ſe ducti producant corpora AFGB, CEHD. Dico illa triplicatam inter ſe rationem continere diametri AB ad diametrum CD. Sunt enim ſimilia corpora, quoniam baſes ſimiles ſunt, & modus quo formantur communis. Vnde neceſſarium eſt ſortiantur proportionem communem ſimilibuſque corporibus debitam quam ex elementis conſtat eſſe triplicatam laterum homologorum.



Quod ſi quis huic demonſtrationi non acquieſcat, vti poterit inſcriptionibus corporum ſimilium, ſicut propoſitione duodecima huius factum eſt, & per progreſſionum regulas illis inter ſe collatis eruere rationem quam ſine dubio reperiet eſſe triplicatam lineæ AB ad CD, cum ſingula corpora inſcripta ſimilia eandem rationem obtineant vel legat propoſitionẽ huius libri trigeſimam quintam.

Corol-

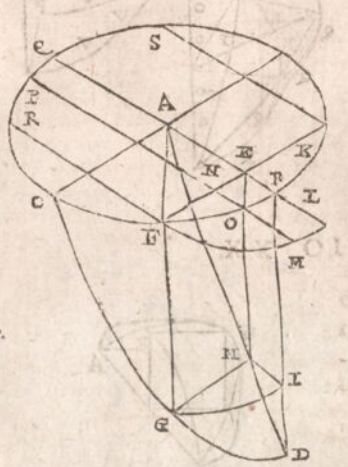
Corollarium.

EXtendi postulo hanc propositionem ad solidas quantitates quę gignuntur ex segmentis partium circuli similibus in se ductis, cum illæ proportionales imprimis sint totis vngulis quarum partes existunt; & eædem omnino formari de illis possint demonstrationes quæ vngulis integris aut circulis in se ductis inseruiunt.

PROPOSITIO XXI.

VNgula ABDC secetur plano EFG, parallelo illi quod per AC & axem cylindri ponitur, sitque BD vngulæ altitudo æqualis BQ diametro circuli.

Dico vngulam totam ABCD ad partem decussatam BEFGD triplicatam habere rationem eius quam habet AC recta ad lineam EF.



Demonstratio.

SVper KF diametro circulus describatur KLF, & ponantur lineæ LBEQ, MONP quotcunque, sed rectæ ad diametrum KF. erit igitur BEQ rectangulum æquale KEF rectangulo, hoc est quadrato EL. similiter erit ONP rectangulum æquale KNF rectangulo, hoc est quadrato NM. Vnde quia singula rectangula ONP æqualia sunt quadratis MN, hinc KBF, ductum in residuum KSRF æquale [a] est solido quod fit ex semicirculo KLF in se ducto: sed semicirculus KLF in se ductus ad semicirculum ABC, in se ductum est [b] in triplicata ratione diametri KF ad diametrum totam CA siue ad BQ. igitur etiam corpus ex ductu plani KBF in planum KSQRF ad semicirculum ex ABC, totum in se ductum habet triplicatam rationē lineæ KF ad diametrum BQ. atqui segmenta KBF, KSQRF producunt segmentum vngulare KDGF, & semicirculus ACB in se ductus producit totam vngulam, vti in Scholio præcedenti demonstrauimus. ergo segmentum vngulare est ad vngulam in triplicata ratione EF ad AC. Quod erat demonstrandum.

[a] 45. De duct.

[b] 20. huius.

Corollarium.

EX hac & ex Corollario 17. sequitur quamlibet vngulā ad segmentum plano iuxta determinationem propositionis abscissum triplicatam habere proportionem eius quam habet AC recta ad EF.

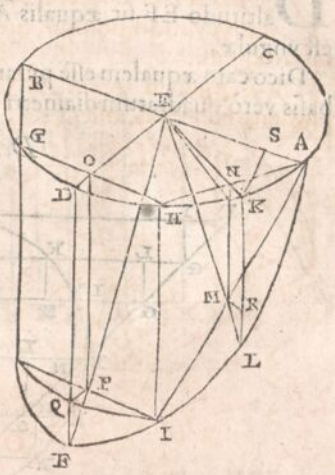
PRO-

PROPOSITIO XXII.

BAsi vngulari dimidium hexagoni inscriptum sit per cuius latera plana ponantur axi æquidistantia AHI, IHG.

Dico segmentum vngulæ plano GHI decussatum duplum esse segmenti quod ablatum est plano AHI.

Demonstratio.

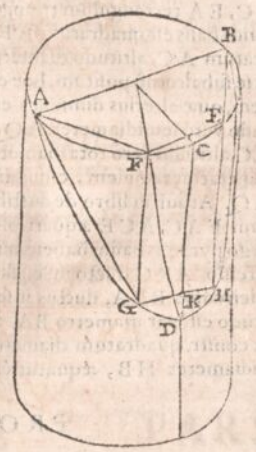


DVcantur ex centro E rectæ ED, EK quæ bifariam secent latera hexagonalia GH, HA in O & N, ponaturque KS parallela ad ED. Quoniam BA, GH æquales arcus intercipiunt, erunt parallelæ. Quare cùm angulus EOH rectus sit, etiam AEO rectus erit. Atqui KS parallela est ex constr. ad ED. ergo etiam ESK angulus est rectus. Est verò & ENA rectus; anguli igitur ESK, ENA æquales sunt. Est autem angulus ad E, vtrique triangulo SEK, NEA communis, & vnum latus EA, vni lateri EK æquale. Igitur SK æquatur AN. sed HA latus hexagoni, hoc est semidiameter DE, duplum est ipsius AN. Ergo DE dupla quoque est ipsius KS. Atqui vt DE ad KS, ita [a] segmentum vngulare GOHIF ad segmentum vngulare HALI, ergo segmentum GOHIF duplum est segmenti HALI. Quod erat demonstrandum.

a 18. *huius.*

PROPOSITIO XXIII.

POnatur iterum basi vngulari semihexagonum inscriptum vt priùs, & plana posita secundùm latera hexagoni parallela axi decussantia tria segmenta vngulæ.



Dico totam vngulam ad residuum quod remansit ablatis segmentis habere rationem octo ad sex.

Demonstratio.

SIt ABCD vngula & latera semihexagoni AF, FE, EB, per quæ plana AFG, FEH, BEH axi æquidistantia auferant segmenta AFG, FGDHE, & EHB. Dico igitur proportionem totius vngulæ ACDB ad solidum clausum planis ABHG, AFEB, FEHG, AFG, BEH esse vt octo ad sex. Ostensum est enim rationem totius vngulæ ACDB ad partẽ FGDHE [b] triplicatam esse rationis, quam habet AB ad EF, est autem AB diameter dupla rectę EF, quæ latus est hexagoni. Igitur tota vngula ACDB, octupla

b 21. & Coroll.

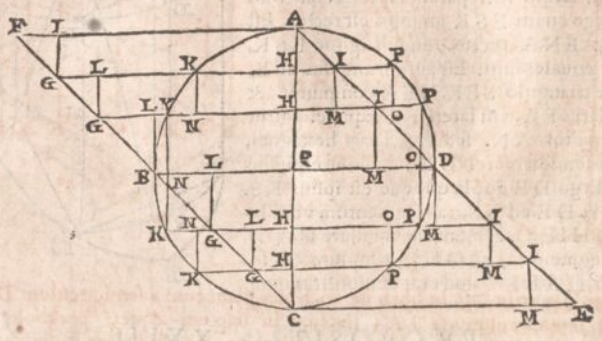
eſt ſegmenti FGDHE. Atqui demonſtratum præterea eſt ſegmentum FGDHE duplum eſſe tam ſegmenti AFG quàm ſegmenti BEH, hoc eſt, vtrique ſimul ſumpto eſſe æquale. Tota igitur vngula ſegmentorum AFG, BEH eſt etiam octupla. Igitur ſegmentum FGDHE, & duo ſimul ſegmenta AFG, BEH æqualia ſunt duabus octauis totius vngulæ. His ergo ablatis erit vngula ad reſiduum ſolidum rectilineum vt 8 ad 6. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

DAta ſit vngula BFA (inſpice figuram propoſitionis ſequentis) cuius altitudo EF ſit æqualis AB diametro ſemicirculi BEA qui baſis eſt vngulæ.

Dico eam æqualem eſſe pyramidi, cuius altitudo eſt ſemidiameter HB, baſis verò quadratum diametri BA.

Demonſtratio.



SEmicirculo BEA æqualis fiat ſemicirculus AKC, quo perfecto ad extremitates diametri AC ducantur tangentes FA, EC, diametro æquales, iunganturque FC, EA rectangulum triangulum FAC ductum in ſeipſum producit[a] pyramidem cuius baſis eſt quadratum AF, altitudo autem recta AF, hoc eſt cuius baſis eſt quadratum AC, altitudo diameter AC. ergo triangulum rectangulum FAC ductum in ſe ſubalternè poſitum, hoc eſt in triangulum ACE, ſibi æquale, producit pyramidem, quæ alterius dimidia[b] eſt. Atqui pyramis cuius baſis eſt quadratum AC, altitudo verò ſemidiameter AQ, dimidia eſt pyramidis cuius baſis eſt quadratum idem AC, altitudo verò tota diameter: ergo triangulum FAC ductũ in triangulum ACE generat pyramidem, cuius baſis eſt quadratum AC, altitudo verò ſemidiameter AQ. Atqui in libro de ductibus oſtenſum eſt[c] corpus quod fit ex ductu triangulorum FAC, ACE æquari ſolido, quod fit ex ductu ſemicirculi AKC in ſeipſum. Ergo pyramis baſim habens quadratum AC, altitudinem verò AQ, æquatur ſemicirculo AKC ducto in ſeipſum. Atqui ſemicirculus AKC, hoc eſt ex conſtruct. ſemicirculus BEA, ductus in ſeipſum gignit ſolidum æquale vngulæ BFA, cuius altitudo eſt par diametro BA. ergo pyramis cuius baſis eſt quadratum AC, hoc eſt ex conſtr. quadratum diametri BA, altitudo verò ſemidiameter AQ, hoc eſt ſemidiameter HB, æquatur vngulę BFA. Quod erat demonſtrandum.

a 4. *Duct.*

b 5. *Duct.*

c *Prop.* 47.

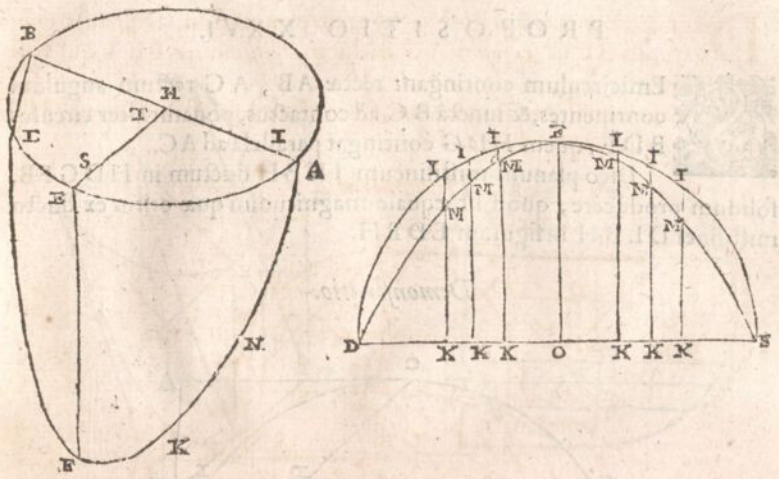
PROPOSITIO XXV.

DAta rurſum ſit vngula BFA altitudinem habens parem diametro BA. Fiat autem ſemicirculus DIEIF æqualis ſemicirculo BEA, erecto-

erectoq; radio O E normaliter ad diametrum D F, describatur parabola D M E M F, cuius axis sit E O.

Dico vngulam B F A æqualem esse cylindro parabolico, cuius basis est parabola B M E M F, altitudo semidiameter E O, siue B A.

Demonstratio.



OStensum enim est in libro de ductibus planorum a semicirculum D E F, hoc est semicirculum B E A, ductum in seipsum æquari parabolæ D M E N ductæ in altitudinem E O. Atqui semicirculus B E A ductus in seipsum generat solidum æquale vngulæ B F A, vt demonstrauimus in scholio propositionis 19. vngula igitur B F A æqualis est cylindro parabolico, cuius basis est parabola D M E M F, altitudo æqualis semidiametro E O siue B A. Quod erat demonstrandum. a 11 2. De duct.

Cylindrus autem parabolicus facilè ad solidum rectilineum reducitur, cùm eius basis notam habeat ad figuras planas rectilineas proportionem.

Scholion.

VIdes, ni fallor, benigne Lector, quo collimarit prima pars huius libri, nimirum ad cubaturam vngulæ siue ad inuentionem corporis quod æquale esset vngulæ, & nullo molimine ad parallelepipedum reduci posset.

Totâ autem vngula ad parallelepipedum reductâ habetur quoque reductio partium vngularium, quæ planis ad cylindri axem parallelis decussantur, cùm harum proportio ad totam vngulam, ex hactenus demonstratis nota sit. Restat igitur vt hoc ipsum præstemus de vngula inuolucro.

PARS SECVNDA

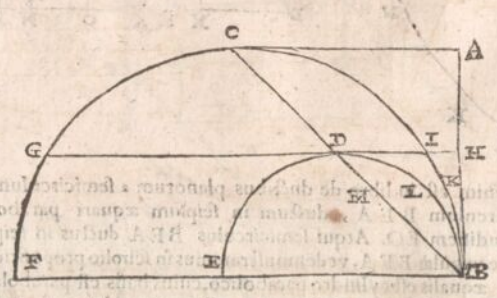
De Inuolucro vngulari eiusq; ad cubum vel parallelepipedum reductione & cuiusuis eius partis quæ plano ad axem cylindri æquidistante decussata fuerit, & nonnullis inuolucri proprietatibus.

PROPOSITIO XXVI.

SEmicirculum contingant rectæ AB, AC rectum angulum continentes, & iunctâ BC ad contactus, ponatur alter circulus BDE, quem HDG contingat parallela ad AC.

Dico planum mistilineum IKBH ductum in HDGFB, solidum producere, quod sit æquale magnitudini quæ oritur ex ductu mistilinei DLBH in figuram EDBH.

Demonstratio.



a 48. Dus. OStensum est [a] pyramidi quæ oritur ex ductu trianguli DHB in se, æquari corpus quod fit vel ex IHB, in HDGFB, vel ex DLBH in EDHB. Igitur æqualia sunt corpora inter se quæ tertium habẽt cui æquantur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

IIsdem positis:

Dico solidam magnitudinem quæ fit ex ductu mixtilinei ACIB in mixtilineum ACFB ad solidum quod resultat ex ductu mixtilinei IHB in HGFB mixtilineum triplicatam habere rationem lineę AB ad HB.

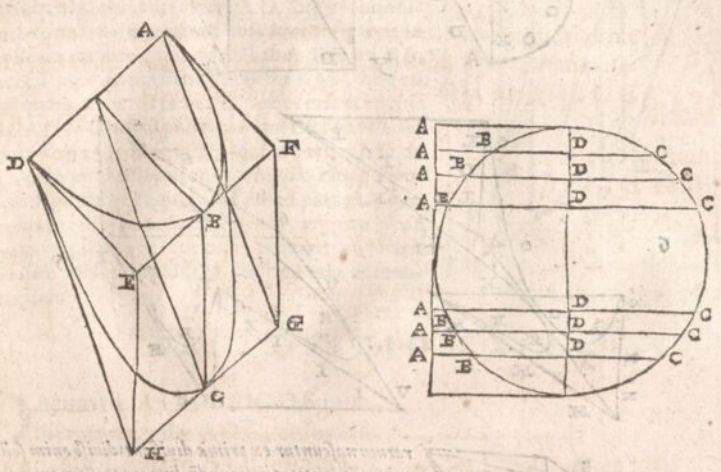
Demonstratio.

b Ibid. ÆQuatur [b] enim magnitudo ex plano ACIB in superficiem ACFB ducta corpori pyramidali, quod emergit ex ductu trianguli ABC in seipsum; pari ratione etiam solidum quod fit ex plano DLBH in planum HDEB, æquatur pyramidi quæ fit ex ductu trianguli DHB in se: sed pyramis nata ex ACB triangulo in seipsum ducto ad pyramidem factam ex triangulo HDB in seipsum

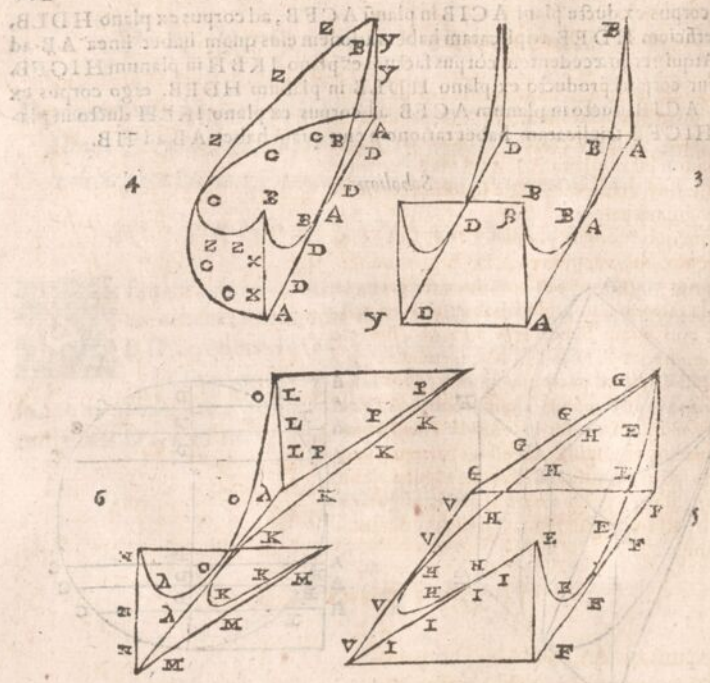
c 8. Duodecimi. ducto triplicatam rationem habet eius [c] quam habet linea AB ad HB. Igitur etiam

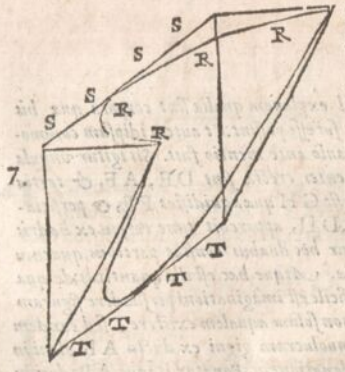
etiam corpus ex ductu plani ACIB in planũ ACFB, ad corpus ex plano HDLB, in ſuperficiem HDEB triplicatam habet rationem eius quam habet linea AB ad HB. Atqui per præcedentem corpus factum ex plano IKBH in planum HIGFB, æquatur corpori producto ex plano HDLB in planum HDEB. ergo corpus ex plano ACIB ducto in planum ACFB ad corpus ex plano IKBH ducto in planum HIGFB triplicatam habet rationem eius quam habet AB ad HB.

Scholion.



MOnet me præſens occaſio vt accuratiùs nonnihil explanem qualia ſint corpora quæ his proximis propoſitionibus expoſita ſunt, & cui vſui eſſe poſſint. Vt autem idipſum commodiùs explicem, recurrendum eſt ad vngulam de qua paulò antè mentio fuit. Sit igitur vngula ABCD, *cuius baſeos diameter* AD *& contingentes erectæ ſint* DE, AF, *& tertia* FBE *parallela* AD, *ex* C *termino vngulæ poſita ſit* GH *quæ æquidiſtet* FE, *& perficiatur parallelogrammum* FGHE; *iunganturq;* AG, DH, *apparebit tunc corpus ex hædris planis conſtitutum, vngulam continens. Corpus igitur hoc duabus conſtat partibus, quarum vna ipſa eſt vngula; altera verò inuolucrum vngulæ. Atque hæc eſt illa quantitas de qua egimus duabus proximè propoſitionibus; quia verò difficile eſt imaginationi perſuadere figuram ex ductu* AB *in* AC *genitam, inuolucro vngulari non ſolùm æqualem exiſtere, ſed eandem illam eſſe, quæ inuolucri munere fungitur; ipſumq; inuolucrum gigni ex ductu* AB *plani in planum* AC: *paucis adiungere ſtatui huius rei explanationem. Ponatur itaque* AB *duci in* AD, *emerget ſolidum baſim habens* AB *ſuperficiem & altitudinem* AD. *Deinde ducatur* AB *in* DC, *exſurget figura valde miſta, qualis exhibetur in quarto ſcemate, habens vnam planarum hædrarum* ABDB *ſuperficiei æqualem; alteram verò æqualem ſemicirculo* DC, *tertiam denique concauam cylindricam, quartam tandem cylindricam conuexam: hæc autem videntur longè diuerſa à figurâ inuolucri quæ ex vna parte terminatur rectangula ſuperficie, ex alia verò planâ quæ ſit æqualis* AB, *tertiâ ſuperficie concaua quæ congruit conuexæ vngulari, quartâ, quam terminat ellipſis conuexa, reſiduæ hædræ triangulares ſunt. ſed facile intelligẽtur hæc omnia coincidere, ſi rectè ſingula ſuis locis aptentur. Ad huius rei explicationẽ ponendæ ſunt hæ quinque quantitates (inſpice figurã ſecundã & tertiam) quarum prima ſit ex ductu* AB *in* AD: *ſecunda (inſpice figuram ſecundam & quartam) ex* AB *in* DC, *vnde prima cum ſecunda æquales ſunt vni figuræ quæ fieret ex* AB *in* AC: *tertia & quarta harum figu-*





rarum naſcuntur ex primæ diuiſione; diuiſo enim ſolido primæ quantitatis ſecundũ lineas paralleas emergent duo corpora, quorum vnũ quinto ſcemate exprimitur, alterum corpus exſurget prout figurâ ſextâ exhibetur habens lineas PO *æquales rectis* ZC, *& quia circulus* OO *æqualis eſt circulo* CC, *ſi coniungantur hæc duo corpora ita vt pars cauа* PO *congruat conuexæ* ZC, *reſultabit ſolidum ſimile, imò æquale quarto ſcemati. quare tertia figura ſimul cum quarta æqualis erit figuræ quintæ vel ſeptimæ biſumptæ, quæ congruit ipſi vngulæ, ac proinde inuolucro æquale erit ſcema primum cum ſecundo coniunctum: eſt autem ſcema primum cum ſecundo id quod naſcitur ex ductu* AB *in* AC: *igitur id, quod prouenit ex ductu* AB *in* AC *inuolucro ipſi non ſolùm eſt æquale, ſed ipſiſſimum inuolucrum eſt, quod vngulæ congruit, ſi ea ratione quæ explicatum eſt, eius partes diſponantur.*

PROPOSITIO XXVIII.

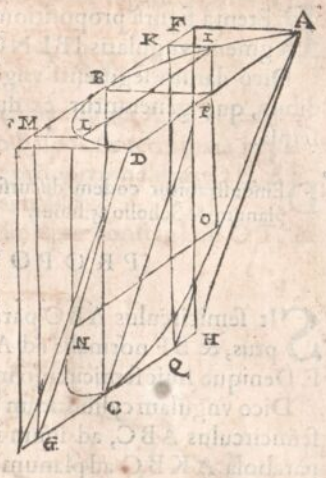
DAtum ſit inuolucrum totam vngulam, cuius altitudo eſt diameter AD, includens, nimirum AEBFDGCH: datum item ſit aliud includens partem vngulę abſciſſam plano ad axem cylindri parallelo ſecundùm rectam IL parallelam diametro AD.

Dico inuolucrum totius vngulæ eſſe ad totam vngulam, vt inuolucrum partis vngularis eſt ad ipſam partem vngularem.

Demon-

Demonſtratio.

EX ſcholio 27. patet inuolucrum totius vngulę cuius altitudo eſt diameter AD produci ex ductu plani AEBFDBA in planum quod compoſitum eſt ex plano AEBFDBA, & toto circulo cuius diameter AD: inuolucrum verò partis vngularis naſci ex ductu plani IKBMLBI, in planum quod conſtat plano IKBMLBI, & toto circulo, cuius diameter AD. Ergo [a] inuolucrum totius vngulæ eſt ad inuolucrum partis in triplicata ratione eius, quam habet EB ad KB, hoc eſt eius quam habet EF ad KM, hoc eſt eius quam habet AD ad IL. Atqui etiam vngula tota ABDC eſt ad partem vngularẽ IONLBI in triplicata [b] ratione eius, quam habet AD ad IL: ergo inuolucrum totius vngulæ eſt ad inuolucrum partis, vt vngula tota eſt ad partem; permutando igitur, inuolucrum totius vngulæ eſt ad totam vngulam, vt inuolucrum partis vngularis ad ipſam partem vngularem. Quod erat demonſtrandum.



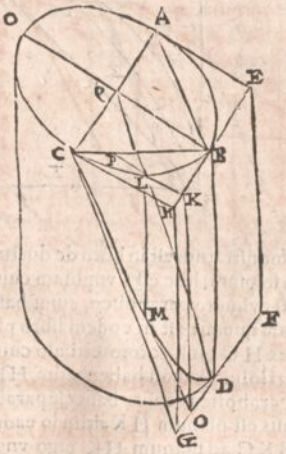
a 27. huius.

b 21. huius.

PROPOSITIO XXIX.

DAtum ſit AEBHCGDF inuolucrum vngulæ ADC, cuius altitudo par ſit diametro AC: ducanturq; BA, BC.

Dico inuolucrum datum vngulare æquari duabus pyramidibus quæ producantur ex triangulis AEB, CBH, ſingulis in ſe ipſa ductis.



Demonſtratio.

PLanum CLBH ductũ in planum BHCO æquatur [c] triangulo BCH ducto in ſeipſum. ſimiliter planum mixtilineum ABE ductum in planum BEAO æquatur BAE, triangulo in ſe ducto. Ergo totum planum mixtilineum CLBAEBHC ductum in totum planum EAOCH, hoc eſt per ea quæ in Scholio 27. huius demonſtrauimus, inuolucrum datum vngulare AEBHCGDF, æquatur duobus triangulis BCH, BAE ductis in ſeipſa, duabus nimirum pyramidibus quæ ex illis ductibus oriuntur. Quod erat demonſtrandum.

c 48. Duct:

Corollarium.

HInc alia rurſum habetur vngulæ cubatura: cùm enim compoſitum ex inuolucro & vngula, vtpote verum priſma notum ſit, cumque huius compoſiti vna pars, nempe inuolucrum, nota ſit, nota erit & altera quæ eſt ipſa vngula.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

REtentâ figurâ propoſitionis 28. ſit inuolucrum ILKMRNOQ ſegmenti vngularis IBLNO, ducanturque rectæ BL, BI.

Dico datum ſegmenti vngularis inuolucrum æquari duabus pyramidibus, quæ generantur ex ductibus triangulorum BIK, & BLM in ſeipſa.

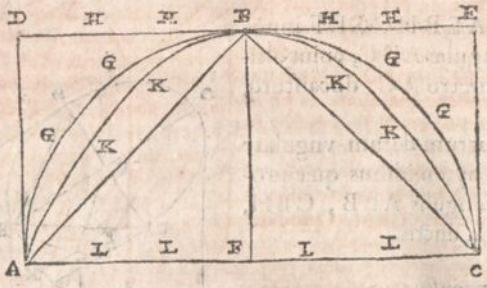
DEmonſtrabitur eodem diſcurſu quo præcedens; ex 48. libri de ductu plani in planum & Scholio 25. huius.

PROPOSITIO XXXI.

SIt ſemicirculus ABC parallelogrammo rectangulo ADEC inſcriptus, & BF normalis ad AC diametrum, diuidat eam bifariam in F. Denique huic ſemicirculo inſcribatur parabola AKBC, cuius axis BF.

Dico vngulam cylindricam cuius altitudo eſt diameter CA, baſis verò ſemicirculus ABC, ad ſuum inuolucrum eam habere rationem quam parabola AKBC ad planum mixtilineum HK, HK.

Demonſtratio.



a 128. *duct.* b *Schol.* 19. *huius.*

DEmonſtratum eſt in libro de ductu plani in planum [a] ſemicirculum ABC ductum in ſeipſum, hoc eſt [b] vngulam cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo AC, æquari cylindro parabolico, cuius baſis parabola AGBKC, altitudo BF. Demonſtratum quoque eſt in eodem libro planum HG, HG, ductum in planum compoſitum ex HGHG, & toto circulo cuius diameter AC, hoc eſt [c] inuolucrum vngulę, æquari ſolido [d] quod habet baſim HK, HK, altitudinem verò BF. Atqui cylindrus parabolicus cuius baſis eſt parabola AKBKC altitudo BF, eſt ad ſolidum cuius baſis eſt planum HK altitudo eadem BF, vt baſis ad baſim, hoc eſt vt parabola AKBKC ad planum HK. ergo vngula cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo AC, eſt ad ſuum inuolucrum vt parabola AKBKC ad planum mixtilineum HK. Quod erat demonſtrandum.

c *Schol.* 27. *huius.* d 130. *duct.*

Corol-

Corollarium.

EOdem ferè diſcurſu exhibebimus rationem quam habent vngulares partes ad ſua inuolucra.

PROPOSITIO XXXII.

CVbo QFG inſcriptus eſto cylindrus, cuius vngula ABCD, altitudinem habens BC æqualem diametro baſeos, ſit terminata in plano ADG per ellipſim DIC: factis deinde proportionalibus QE, AE, RE, deſcribatur parabola ROBOS, cuius axis BP.

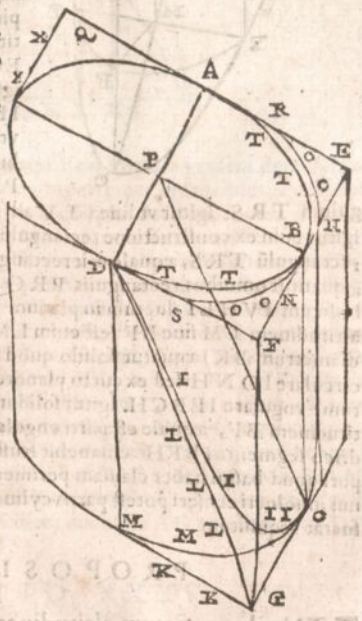
Dico corpus IL, KM æquari magnitudini quæ conſtat baſi OT, & altitudine AD.

Demonſtratio.

a 159. *Dull.*

DEmonſtratum eſt [a] ſolidum ex ductu NT plani in TX, productum æquale eſſe corpori, quod reſultat ex plano NO ducto in altitudinem NX, hoc eſt AD: eſt verò inuolucrum vngulæ AEBCGFD, æquale [b] NT ducto in TX. Igitur inuolucrum vngulæ æquale eſt ſolido ſuper baſi NO exſtructo, & altitudine AD. Corpus autem ex NT in NX, eſt æquale NO ducto in NX, ſimul cum TO ducto in NX. Igitur etiam NT ducto in NX, æquatur inuolucrum vngulare vnà cum OT in NX: ablatis itaque æqualibus, ſcilicet quantitate NO in NX, à ſolido quod fit ex NT in NX, & quantitate vngulari dempta à corpore habente baſim NT, altitudinem verò BC, remanebit corpus ex OT in NX, hoc eſt AD æquale ſolidæ quantitati ILKM. Quod demonſtrandum fuit.

b *Schol. 17. huius.*

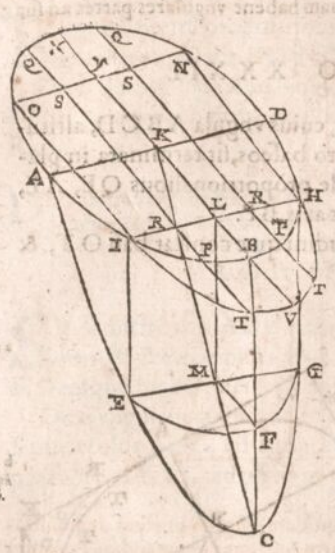


PROPOSITIO XXXIII.

VNgulæ cylindricæ ABCD, cuius altitudo par ſit diametro AD, baſis ABD; ſecetur plano EFG, quod æquidiſtet plano baſeos ABD.

Oporteat autem ſolido ECGME, corpus exhibere æquale, altitudinem habens BF.

Conſtructio & demonſtratio.



QVoniam E F G ſectio baſi A B D, æquidiſtat; igitur erectis è terminis lineæ E G, quę eſt communis interſectio planorum E F G, & A C D, lineis G H, E I in ſuperficie cylindrica, iunctiſque punctis I, H, erit arcus I B H æqualis arcui E F G: ducto igitur plano I H G, agatur K B linea diuidens bifariam arcum I B H, ſecundùm quam fiat ſectio per axem cylindri producens L M, K C, M F communes interſectiones. poſitis denique H N, I O, parallelis rectæ B K, iunctâque O N, fiat vt L γ ad L X, ita L B ad L V, ſiue rectangulo B L X fac æquale V L γ, & per I V H deſcribatur parabola I T V H habens axem L V. Dico ſolidũ habens pro baſi ſuperficiem interceptam peripheria circulari I B H, & parabolica I V H altitudinem verò B F, æquari fruſto vngulari E C G M E. Quoniam parabola eſt I T V H, igitur vt rectangulum I L H ad rectangulum I R H, ita eſt L V linea ad lineam [a] R T. ſed vt eſt rectangulum I L H ad I R H rectangulum, ita quoque eſt rectangulum B L X ad P R Q, hoc eſt rectangulum V L γ ad [b] rectangulum T R S. Igitur vt linea L V ad R T, ita quoque rectangulũ V L γ ad T R S. igitur cùm ex conſtructione rectangulũ V L γ æquale ſit rectangulo B L X, etiam rectangulũ T R S, æquale erit rectangulo P R Q. omnia igitur rectangula T R S, æquantur omnibus rectangulis P R Q. ergo per 46. libri de ductibus, planum parabolicum I V H L I ductum in planum R S, hoc eſt in altitudinem R S, hoc eſt in altitudinem L M ſiue B F (eſt enim L M ad L K, vt B C æqualis diametro ad ſemidiametrum B K) æquatur ſolido quod fit ex ductu plani circularis I B H in planum circulare I O N H: ſed ex ductu planorum circularium I B H & I O N H fit ſegmentum [c] vngulare I E B C H. Igitur ſolidum habens baſim I V H L I parabolam & altitudinem B F, æquale eſt parti vngulari I E B C H. ablato igitur communi cylindrico ſegmento I B F H remanebit fruſtum cylindricum E C G M E, æquale cor-pori quod baſim habet clauſam perimetris I B H, & I T V H. quod etiam aliud genus inuolucri cenſeri poteſt partis cylindricæ cui congruit. exhibuimus igitur quod fuerat requiſitum.

[a] 47. parab.

[b] 310 parab.

[c] Schol. 19. huius.

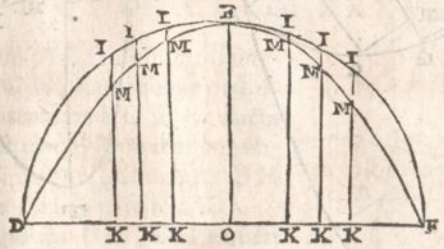
PROPOSITIO XXXIV.

VNgulæ, quarum altitudines ſunt æquales diametris baſium cylindrorum à quibus decuſſantur, triplicatam habent rationem earundem diametrorum.

Demon-

Demonſtratio.





PRopoſitionem paulò antè demonſtrauimus quidem: verùm præſens demonſtratio commodior mihi futura eſt ad vlteriores proportiones indagandas. Ponantur itaque duo circuli A B C, D E F, quorum ſinguli in ſeipſos ducti producant ſingulas vngulas, inſcribantur circulis parabolæ L L, M M. Demonſtratum fuit [a] vngulam productam ex ductu plani circularis G H in ſeipſum, æqualem eſſe ſolido quod baſim habet L H, altitudinem ſemidiametro æqualem. eodem modo oſtenſum eſt ſemicirculum I K in ſe ductum exhibere corpus ſub baſi M K, & altitudine quæ æqualis eſt ſemidiametro. Igitur eandem habebunt rationem inter ſe illæ duæ vngulæ, quam continent corpora ex baſibus parabolicis conſtantia. Atqui horum proportio compoſita eſt ex [b] proportione altitudinis B M ad E O, hoc eſt A C ad D F, & ex ratione baſeos parabolicæ L H ad baſim parabolicam M K, quæ eadem eſt cum ratione circuli A B C ad D E F, (ſimiles enim ſunt illæ parabolæ, vt patet ex figuris inſcriptis euidenter,) ac proinde duplicata rationis A C ad D F. ergo ratio corporis ſub L H baſi, & B M altitudine ad corpus ſub baſi M K, & altitudine E O, eſt triplicata rationis A C ad D F; ergo vngulæ illis corporibus parabolicis æquales in triplicata ſunt ratione earundem linearum, ſcilicet diametri A C ad diametrum D F. Quod fuit demonſtrandum.

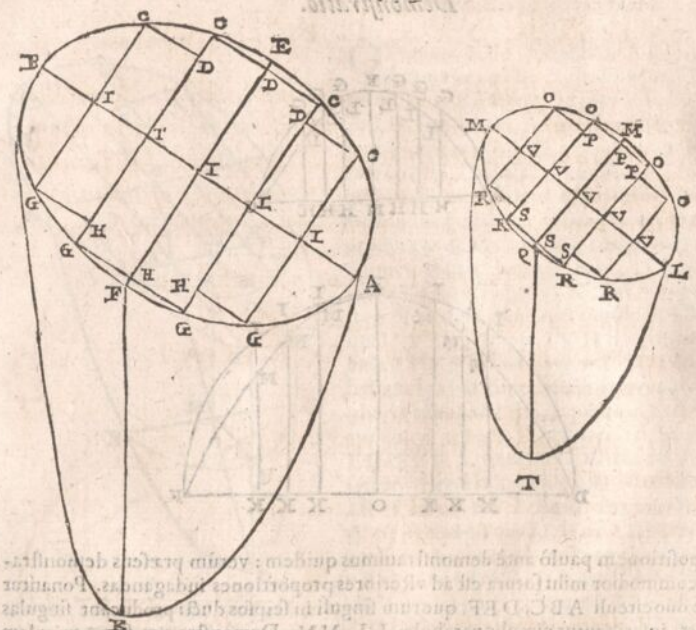
[a] 128. *Duſt.*

[b] 13. *huius.*

PROPOSITIO XXXV.

QVod ſi placuerit eam diſcurrendi formam adhibere, quâ vſi ſumus in propoſitionibus 45. & 47. libri de ductu plani in planum, licebit etiam veritatem præcedentis theorematis hunc in modum demonſtrare.

Demonſtratio.



DAtæ ſint vngulæ AKB, LTM, quarum altitudines FK, QT, æquales ſint AB, LM diametris ſemicirculorum AGB, LRM, qui in ſeipſos ducti ipſas, vt in ſcholio 19. oſtenſum eſt, vngulas producunt.

Diametris AB, LM in æquè multas, ſed plures ac ſemper plures, æquales partes AI, II, LV, VV diuiſis per diuiſionum puncta I, I, V, V ducantur normales ad diametros GC, GC: RO, RO, & compleantur rectangula GI, GI, RV, RV, item CI, CI, OV, OV, ſemicirculis inſcripta. Rectangula GI, GI; RV, RV vnâ cum ſemicirculis ſuis ducta in ſeipſa, hoc eſt in rectangula illis æqualia & ſimilia CI, CI, & OV, OV producent infinita parallelepipeda, vngulis quę ex ſemicirculorum ductibus generantur, inſcripta, quorum baſes erunt rectangula GIC, RVO, hoc eſt quadrata IC, VO; altitudines verò erunt æquales diametrorum partes II, VV. Quia ex conſtr. AI ſunt ad IB, vt LV ſunt ad VM: ſuntque CI, OV mediæ inter AI, IB, & LV, VM, erunt quoque AI, ad CI, vt LV ad OV, & inuertendo CI ad AI, vt OV ad LV. ſed ex conſtr. AI ſunt ad AB, vt LV ad LM. ergo ex æquo CI ſunt ad AB, vt OV ad LM: & permutando CI ſunt ad OV, vt AB ad LM. ergo ratio quadratorum ſingulorum CI ad quadrata ſingula OV duplicata eſt rationis diametrorum AB, LM. ſed ratio altitudinum II, ad altitudines VV, eadem eſt ex conſtructione, quæ diametrorum AB, LM. Ratio igitur compoſita ex ratione quadratorum CI ad quadrata OV, & ex ratione altitudinum II ad altitudines VV, hoc eſt ratio parallelepipedorum ſingulorum vngulę AKB inſcriptorum ad parallelepipeda ſingula vngulæ LTM inſcripta, triplicata eſt rationis diametrorum AB, LM. ergo ſingula parallelepipeda vngulæ AKB ſingulis vngulę LTM proportionalia ſunt. ergo per 12.5. element. vt vnũ vngulæ AKB ad vnum vngulę LTM, ſic omnia ſimul ad ſimul omnia. Atqui vnum eſt ad vnum in triplicata ratione diametrorum, vt iam oſtenſum eſt. Ergo omnia ſimul ſumpta vngulæ AKB, ſunt ad omnia ſimul ſumpta vngulæ LTM in triplicata ratione diametrorum. Quare ſi proſequamur reliquam partem diſcurſus in propoſ. 45. & 47. expreſſi, legitimè concludetur, vngulam quoque ad vngulam in triplicata exiſtere diametrorum ratione. Quod erat demonſtrandum.

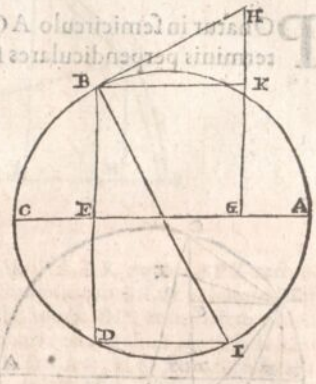
PARS

PARS TERTIA.

Expeditis theorematibus quæ vngularem quantitatem, & inuolucri eiusdem concernunt, aggredimur hac parte contemplationem superficiei cylindricæ quæ vngulam cingit, quam conabimur ad quadratum aut rectangulum ipsi æquale reducere, & varias eius affectiones notas reddere, quas non iniucundas existimo futuras Lectori Geometræ.

PROPOSITIO XXXVI.

CIrculum A B C diuidat diameter AC bifariam, quam orthogonaliter secet B D in E, ducta per centrum B I ponatur contingens B H, ex quouis in contingente B H puncto demittatur H G parallela B D.



Dico rectangulum B D, B H æquari A C, G E rectangulo. Est Pappi collec. Math. lib. 5. propos. 20.

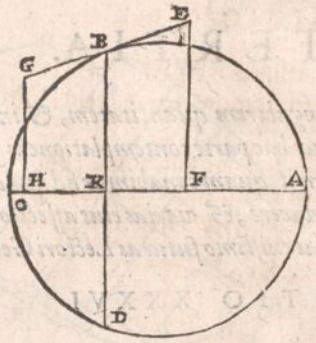
Demonstratio.

IVnge I D, ducaturque B K ad H G normalis. Quoniam B H contingit circulum in B puncto, ex quo recta B I per centrum acta est ex constructione; igitur angulus I B H rectus est. sed etiam rectus est K B E; anguli igitur I B H, K B D æquales sunt: quare dempto communi K B I, æquantur H B K, I B D. sunt verò & anguli H K B, I D B recti, nam I D B in semicirculo est; de altero patet ex constructione; triangula igitur H K B, B D I similia sunt. ergo H B ad B I, vt K B ad B D. ergo rectangulum H B D [a] æquatur rectangulo I B K, hoc est rectangulo A C G E. Quod erat demonstrandum. [a] 16. Sexti.

PROPOSITIO XXXVII.

CIrculum A B C contingat E B G; demittanturque ex punctis, E, B, G, perpendiculares ad diametrum A C, quæ sint E F, B K, G H: & B K producatur in D.

Dico rectangulum B D E G rectangulo A C F H æquale esse. Est Pappi, ibidem propos. 22.



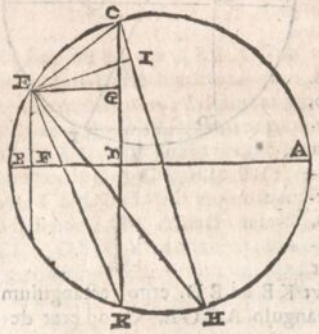
Demonſtratio.

ESt enim per præcedentem rectangulum EBD, æquale AC, FK rectangulo. ſed rectangulum GBD per eandem æquatur AC, KH rectangulo. Igitur rectangulo AC, FH æquale eſt BD, EG rectangulum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

PONatur in ſemicirculo ACB recta ſubtendens arcum CE, ex cuius terminis perpendiculares fiant EF, CD ad diametrum AB.

Dico rectangulum quod continetur vtraque ſimul CD EF, & CE æquale eſſe rectangulo contento rectâ lineâ DF, & rectâ EH ſubtendente circumferentiam EBH, quæ vnà cum circumferentia CE, ſemicirculum CBH perficit. Eſt Pappi ibidem propoſ. 23.



Demonſtratio.

COmpleto circulo, ſit ipſius diameter CH, & productâ CD in K, ad ipſam perpendicularis ducatur EG, & EH, EK iungantur. Quoniam igitur diameter AB ſecat CK ad rectos angulos, æqualis eſt CD ipſi DK. ſed & GD eſt æqualis EF. ergo GK æquatur duabus CD, & EF: eſt autem GE æqualis etiam DF; quę verò reliquam ſemicirculi CEH circumferentiam ſubtendit eſt EH. Itaque quoniam angulus K eſt æqualis angulo H, & HEC angulus in ſemicirculo rectus, æqualis recto KGE; erunt triangula HEC, KEG æquiangula. ergo vt HE ad EC, ita KG ad GE, & ob id rectangulum contentum HE, EG, hoc eſt HE, DF, æquale eſt ei quod GK, CE, hoc eſt ei quod vtrâque ſimul CD, EF, & CE continetur.

PROPOSITIO XXXIX.

IIſdem poſitis demittatur perpendicularis EI ad diametrum HC.

Dico rectangulo CE, EI æquale eſſe HE, CI rectangulum.

Demonſtratio.

a 8. Sexti. SVnt enim a triangula CEI, CEH ſimilia, ac proinde latera CI, IE ſunt lateribus CE, EH proportionalia. vnde rectangulum CI, EH rectangulo IE, CE eſt æquale.

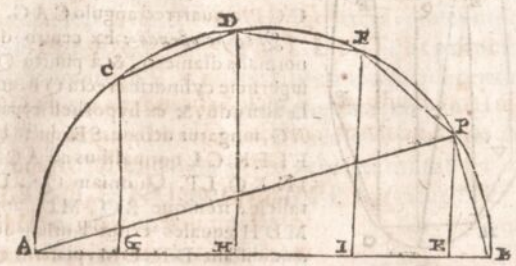
PRO-

PROPOSITIO XL.

SIt A B circuli A B C diameter, & lineæ B P, P E, E D, D C æquales arcus ſubtendant, ex quibus demittantur perpendiculares P K, E I, D H, C G, ad diametrum A B.

Dico rectangulum ſub B G, & ſub A P, ſubtendente arcum P D A, qui vnà cum arcu B P, conſtituit ſemicirculum, æquari rectangulis ſub B P K, ſub P B, & duabus P K, E I, ſub P B, & E I, D H, & ſub P B & D H, C G.

Demonſtratio.



OStendimus præcedenti propoſitione rectangulo P A, B K æquari B P K rectangulum: & propoſitione trigeſima octaua rectangulo ſub P A & K I, æquale eſſe rectangulum ſub P K, E I tamquam vnâ, & P E, hoc eſt B P; & in eadem propoſitione eſt demonſtratum rectangulo P A, I H, æquari rectangulum ſub E I, D H ſimul ſumptis, & E D, hoc eſt P B: item rectangulo ſub A P, H G æquari rectangulum ſub D H, C G, ſimul ſumptis, & ſub D C, hoc eſt B P. Manifeſtum igitur, rectangulum ſub A P & B G æquale eſſe omnibus rectangulis; quorum primum eſt B P K, ſecundum ſub P K, E I & P E ſeu P B, tertium ſub E I, D H & E D, hoc eſt B P, quartum ſub D H, C G & D C, hoc eſt B P.

Corollarium.

EOdem diſcurſu demonſtrabimus ſi æquales lineæ totum ſemicirculum ſubtendãt, rectangulum ſub tota diametro B A, & ſub A P ſubtendente omnia figuræ inſcriptæ latera, dempto vltimo, æquari omnibus rectangulis ſupradictis & rectangulo inſuper A C G.

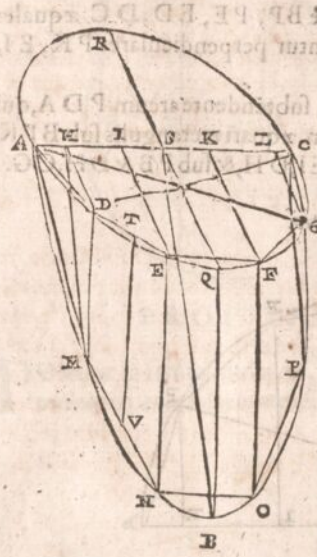
PROPOSITIO XLI.

SI inſcribatur ſemicirculo vngulæ à cylindro recto decuſſatæ, quę habeat æqualem altitudinem diametro baſeos, quodlibet polygonum regulare, & ſecundùm latera polygoni fiant ſectiones quæ ſint axi cylindri, ex quo decuſſata eſt vngula, æquidiſtantes.

Erunt omnia plana ſimul ſumpta vngulæ inſcripta æqualia rectangulo quod fit ſub tota diametro, & latere quod omnia latera polygoni ſubtendit, dempto vltimo.

Demon-

Demonſtratio.



Sit itaque vngula A B C, à cylindro recto abſciſſa habens altitudinem Q B diametro baſeos A C parem: eius baſi inſcripta ſit figura regularis A D E F G C, & ducta ſit A G ad terminum vltimi lateris C G. Denique plana ponantur per latera polygoni quæ æquidiſtent axi cylindri exhibentia communes interſectiones cum ellipſi A B C rectas A M, M N, N O, O P, P C.

Dico plana hæc omnia ſimul ſumpta, nimirum A D M, D E N M, E F O N, F G P O & C G P, æquari rectangulo C A G.

Quod ſic oſtendo: Ex centro ducatur S Q normalis diametro, & à puncto Q ducatur in ſuperficie cylindricâ recta Q B, quę erit vngulæ altitudo, & ex hypotheſi æqualis diametro A C, iungatur deinde S B, ductis inſuper D H, E I, F K, G L normalibus ad A C, iunge H M, I N, K O, L P. Quoniam Q S, D H ſunt parallelę, itemque B Q, M D, anguli B Q S, M D H æquales [a] erunt. Rurſum quia Q S, Q B æquidiſtant D H, D M, plana S Q B, H D M ſunt [b] parallela. ergo earum ſectiones communes cum plano elliptico C B A, rectę nimirum B S, M H, ſunt [c] parallelæ. Cùm igitur Q S, B S æquidiſtent D H, M H, erunt anguli Q S B, D H M æquales. triangula igitur B S Q, M H D ſimilia ſunt. ergo vt B Q ad Q S, ita M D ad D H. ſed B Q ex hypotheſi par eſt diametro A C, adeoque dupla ſemidiametri Q S. Ergo & M D dupla eſt D H. Pari modo oſtendam rectas N E, O F, P G duplas eſſe rectarum E I, F K, G L. Præterea quoniam cylindrus ex hypotheſi rectus eſt, à quo decuſſatur vngula, erunt M D, N E, O F, P G rectæ plano baſeos A Q C, adeoque per definitionem 3. vndecimi angulos rectos faciunt cum lineis A D, D E, E F, F G, G C. triangula ergo A D M, C G P rectangula ſunt, & plana D M N E, E N O F, F O P G, trapezia rectangula. Quoniam igitur M D, trianguli A D M eſt altitudo, eaque dupla eſt oſtenſa ipſius D H, erit triangulum A D M rectangulo ſub A D & D H æquale. Iam verò rectis E D, N M biſectis in T & V, iunctâque T V, rectam T V dimidiam eſſe ſummæ rectarum M D, N E; & rectangulum E D T V, æquari trapezio rectangulo M N E D in ſequenti, figuræ opportunitate vſi, demonſtrabimus. Quare cùm rectangulum ſub E D & M D, N E tanquam vnâ, quæ duplæ ſunt rectę T V, rectanguli E D T V duplum [d] ſit, erit quoque rectangulum ſub E D, & M D, N E tanquam vnâ, duplum plani M N E D. Quia autem rectæ M D, N E, oſtenſæ ſunt duplę rectarum D H, E I, rectangulum ſub E D, & M D, N E ſimul ſumptis duplum etiam eſt rectanguli ſub E D, & D H E I ſimul ſumptis. planum igitur M N E D æquatur rectangulo ſub D E, ſiue A D & D H, E I ſimul ſumptis. pari argumento oſtendam planum E N O F, æquari rectangulo ſub E F id eſt A D, & E I, F K; planum verò F O, P G rectangulo ſub F G, hoc eſt A D & F K, G L, triangulum denique G P C oſtendam rectangulo ſub G C, id eſt A D, & G L æquari, vt oſtendi ſuprà triangulum A D M æquari rectangulo A D H. omnia igitur plana vngulæ inſcripta ſimul ſumpta æquantur omnibus rectangulis illis ſimul ſumptis, hoc eſt per Corollarium præcedentis rectangulo quod rectis C A, A G continetur. Quod erat demonſtrandum.

a 10. *Vndec.*

b 15. *Vndec.*

c 16. *Vndec.*

d 1. *Sexti.*

Corol-

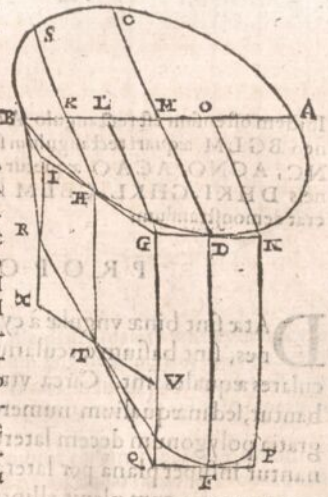
Corollarium.

QVod ſi plano ad axem cylindri parallelo, & tranſeunte per lineam GL diametro rectam abſciſſa ſit pars ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulã cingit GPNAQA, & arcui GEA ſubtendantur æquales rectæ quotcunque, ſecundùm quas plana inſcribantur vngularis ſuperficiei cylindricę ſegmento: eodem diſcurſu, quo iam vſi ſumus, demonſtrabimus per præcedentem omnia plana inſcripta ſimul ſumpta æquari rectangulo quod continetur rectis AL & CD, ſubtendente arcum DFC qui vnà cum arcu AD complet ſemicirculum.

PROPOSITIO XLII.

DAta ſit vngula APB, à cylindro recto decuſſata, cuius DF altitudo ſit æqualis diametro AB, & cõſtituantur latera cuiuſcunque polygoni, circulum ambientia, ſcilicet BI, IHG, GDN; ſic vt primum BI tangat extremitatem diametri AB & reliqua in contactu biſecentur, & per hæc latera, plana conſtituantur axi parallela vngulam tangentia ſecundùm rectas HT, DF, quæ producant communes ſectiones cum baſi vngulari elliptica rectas BR, RQ, PQ: ſecent verò ſeſe mutuo ſecundùm rectas IR, GQ; factâ autem ND æquali ipſi FP iungatur NP, ducatur demum NO normalis ad AB.

Dico omnia plana vngulam ambientia, dempto triangulo BIR, æquari rectangulo, quod fit ſub lineis AB, BO.

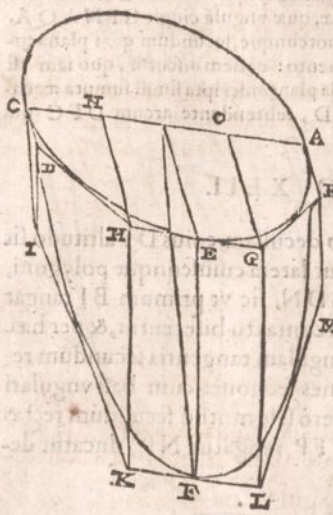


Demonſtratio.

EX punctis H & G, ducantur GL, HKS orthogonaliter ad AB: & ponatur per T parallela occurrens rectis GQ, IR in V & X. Quoniam ex hypotheſi, cylindrus, à quo abſciſſa eſt vngula, rectus eſt, patet TH rectam eſſe plano baſeos ADB. ergo per definit. 3. vndecimi TH normalis eſt ad GI. adeoque & VG, XI, ad GI ſunt rectæ; rectangulum igitur eſt GVXI, æquale ei, quod ſub TH, GI continetur. Atqui rectangulum GVXI æquale eſt plano GQRI. cùm enim IG biſecetur in H, ex conſtruct. etiam XV, BQ biſectæ erunt, adeoque triangula BTX, VTQ æqualia; ſi igitur communi trapezio IBTVG addantur triangula VTQ, BTX, erunt planum IRQG, & rectangulum IXVG æqualia; ergo & rectangulũ TH, GI plano GQRI æquale eſt. Deinde in præcedenti demonſtratum eſt rectam TH duplam eſſe rectæ HK. Cùm igitur eiuſdem dupla ſit HS, pares erunt TH, HS. Rectangulum igitur SHGI æquatur rectangulo THGI, hoc eſt, vt iam oſtendi, plano GQRI. Atqui rectangulum SHGI æquatur[a] rectangulo ſub AB, BL, planum igitur GQRI & rectangulum ſub AB, BL, æqualia ſunt. Simili planè diſcurſu oſtendam planum GQPN æquari rectangulo ſub AB, LO; plana igitur vngulam ambientia ſimul ſumpta, dempto triangulo BRI, æquantur rectangulo ABO. Quod erat demonſtrandum.

[a] 37. huius.

PROPOSITIO XLIII.



SInt AB, CD contingentes circulum AEC in terminis diametri AC, qui circulus basis est vngulæ AEFC cylindro recto decussatæ, habentis altitudinem EF diametro AC parem: posito deinde quocunque polygono BG, GH, HD circumdante circulum AEC, sic vt eius latera in contactu bisecentur, planisq; positis per lineas polygoni axi parallelis, quæ concurrentia cum plano elliptico vngulari AFC forment IK, KL, LM, communes intersectiones, secent verò sese mutuo secundùm rectas DI, HK, GL, BM.

Dico hædras omnes DIKH, HKLG, GLMB, vngulam ambientes simul sumptas exclusis triangulis ABM, CDI æquari quadrato AC.

Demonstratio.

ESt enim in præcedenti demonstratum rectãgulo ACN æquari rectilineum DHKL. Ibidem ostensum est rectangulo AC, NO æquari rectilineum GHKL, & rectilineo BGLM æquari rectangulum super AC & AO; igitur cùm rectangulis AC NC, ACNO, ACAO æquetur quadratum AC; etiam omnibus figuris rectilineis DHKI, GHKL, GBLM simul sumptis æquatur quadratum AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

DAtæ sint binæ vngulæ à cylindris rectis decussatæ, quarum altitudines, sint basium circularium diametris pares, & ipsæ etiam bases circulares æquales sint. Circa vtrumque autem circulum polygona describantur, sed inæqualium numero laterum, circa vnum circulum exempli gratia polygonum decem laterum, circa alterum verò laterum mille: ponantur insuper plana per latera polygonorum quę axibus æquidistent, concurrentia cum planis ellipticis vngulas terminantibus.

Dico omnia plana vnam vngulam ambientia simul sumpta, æqualia esse planis simul sumptis alteram circumdantibus, si triangularia vtrimque omittantur.

Demonstratio.

a 43. huius. EX demonstratis enim a constat congeriem planorum singulas vngulas ambientium, demptis triangulis æqualem esse quadrato circularis diametri quæ in basi est vngulę, ex hypothesi autem vngularum bases, adeoque & diametri basium æquales sunt.

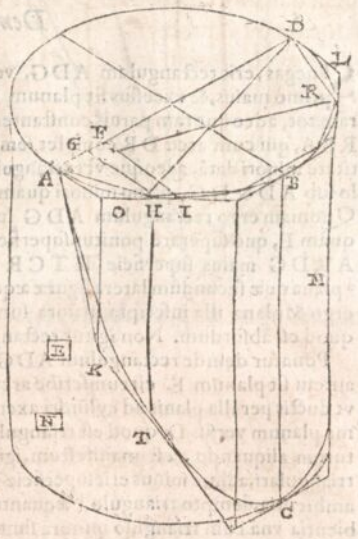
sunt. Igitur manifestum est plana simul omnia demptis triangulis, vnam vngulam ambientia, æqualia esse planis simul sumptis quæ alteram ambiunt, demptis item triangulis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLV.

SVperficies cylindrica cuiusuis vngulę à cylindro recto decussatæ, cuius altitudo par est diametro circuli qui basis est vngulę, æqualis est quadrato diametri.

Demonstratio.

SIt vngula ABCD, cuius altitudo BC, sit æqualis AD diametro baseos cylindri recti à quo decussata est.



Dico cylindricam superficiem vngulæ, quadrato diametri AD æqualem esse. Si negas; sit primò, si fieri potest, quadratum AD maius cylindrica superficie quę vngulam ambit: excessus autem sit planum E. Fiat ergo rectangulum DAF æquale plano E: & erigatur FI normaliter ad diametrum AD. Deinde polygonum aliquod regulare inscribatur circulo ABD, cuius vltimum latus AH minus sit subtensiâ arcus AI, & demittatur HG normalis ad AD diametrũ. Quia quadratum AD, 2. secundi, superat rectangulum ADF rectangulo DAF, id est ex constr. E plano, quo eodem excessu quadratum AD ponitur superare superficiem cylindricam vngulæ, erit rectangulũ ADF, cylindricæ superficiei vngulę æquale. ergo rectangulum ADG maius est cylindrica superficie quę vngulam terminat. ergo rectangulum ADH eâdem multò est maius. sed rectangulo ADH æqualia sunt [a] plana omnia simul sumpta quæ per latera polygoni inscripti ducentur axi parallela terminata in elliptica basi vngularis corporis. Igitur etiam illa plana maiora sunt cylindrica superficie quæ vngulam ambit, quod fieri nequit, cùm singula plana sint minoris & latitudinis & longitudinis quàm singulę partes superficiei cylindricæ quas decussarunt ab ipsa vngulari superficie. Non igitur maius est quadratum AD cylindri superficie quæ vngulam ambit.

[a] 41. huius.

Sit deinde, si fieri potest, quadratum AD minus eadem superficie cylindricâ ambiente vngulam, & defectus sit planum E. Erit ergo quadratum AD cum quantitate N quacunque, quæ minor sit quàm E, adhuc minus vngulari superficie quæ vngulam ambit. Circumscribatur igitur aliquod polygonum circa circulum ABD tot laterum vt ductis per latera planis vngulam tangentibus, triangula remaneant AOK, DLM, quæ simul sumpta æqualia sint aut minora quantitate N; (quod aliquando futurum est, cùm multiplicatis in infinitum polygoni conscripti lateribus triangulorum AOK, DLM, tum bases AO, DL; tum altitudines OK, LM, fiant tandem dato minora) & plana ponantur secundùm latera huius polygoni quæ axi cylindrico æquidistent. Igitur quadratum AD simul cum triangulis AOK, DLM minus est cylindrica superficie quę vngulam ambit. Atqui plana vngulam ambientia demptis triangulis, æquantur quadrato AD per præcedentem. ergo etiam illa vnà cum triangulis minora sunt quàm superficies cylindri, quæ vngulam cingit, quod absurdum

ſurdum eſt; nam omnia illa plana ſimul cum triangulis lateralibus cylindricam vngulæ ſuperficiem includunt. Quadratum igitur AD non eſt minus cylindrica vngulæ ſuperficie; quare cùm neque maius eſſe poſſe, ſuprà oſtenderimus, neceſſe eſt vt ſit æquale. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

DAta ſit vngula, qualis in præcedenti, ad cuius diametrum AD ductâ normali GH quâcunque, ex puncto H ponatur in ſuperficie cylindrica vngulæ recta HT.

Dico cylindricæ ſuperficiei vngulam cingentis partem HTCRD æqualem eſſe rectangulo ADG.

Demonſtratio.

SI negas, erit rectangulum ADG, vel maius vel minus ſuperficie HTCRD. ſit primò maius, & exceſſus ſit planum E. Arcui HBD inſcribe figuram æquilateram tot, adeoque tam paruis conſtantem lateribus, vt recta AR ſubtendens arcum RBA, qui cum arcu DR complet ſemicirculum, deficiat à diametro AD, quantitate minori datâ, adeoque vt rectangulum ſub AR & DG, ſuperetur à rectangulo ſub AD & DG, plano minori quàm E, quæ omnia ex elementis factu facillima. Quoniam ergo rectangulum ADG ſuperat rectangulum AR, DG plano minori quàm E, quo ſuperare ponitur ſuperficiem HTCRD, erit quoque rectangulum ARDG maius ſuperficie HTCRD. Atqui rectangulo ARDG æquantur [a] plana quæ ſecundùm latera figuræ æquilateræ inſcribuntur ſuperficiei HTCRD. ergo & plana illa inſcripta maiora ſunt ſuperficie HTCRD, cui inſcripta ſunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulũ ADG, eſt maius ſuperficie HTCMD.

[a] *Coroll. 41. huius.*

Ponatur deinde rectangulum ADG minus eſſe ſuperficie HTCRD, defectus autem ſit planum E. circumſcribe arcui HBD figuram æquilateram tot laterum, vt ductis per illa planis ad cylindri axem parallelis vngulam tangentibus, poſtrema planum verſus D, quod eſt triangulare, minus ſit plano E. Quod neceſſariò futurum aliquando, eſt manifeſtum. igitur rectangulum ADG vnà cum plano illo triangulari, adhuc minus erit ſuperficie HTCRD. ſed plura ſuperficiem HTCRD ambientia, dempto triangulo, [b] æquantur rectangulo ADG. ergo etiam plana ambientia vnà cum triangulo minora ſunt ſuperficie HTCRD, quam cingunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulum ADG minus eſt ſuperficie HTCRD, ſed neque maius eſſe oſtenſum eſt ſuprà. neceſſe igitur eſt vt eidem ſit æqualis. Quod erat demonſtrandum.

[b] *41. huius.*

PROPOSITIO XLVII.

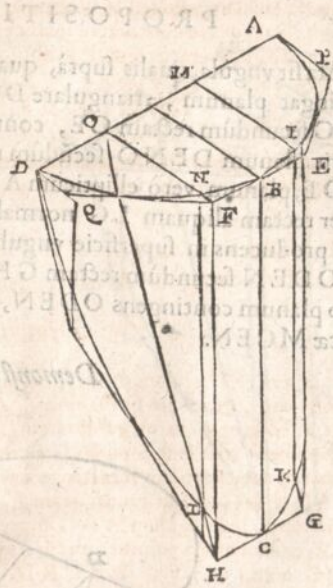
DAta ſit vngula, qualis ſuprà, ductis deinde lineis MI, ON ad diametrum AD rectis, per has ponantur plana ad axem cylindri parallela, quæ in vngulæ ſuperficie efficiant rectas IK, NL.

Dico ſegmentum ſuperficiei cylindricę vngulã ambientis IBNLCKI, æquale eſſe rectangulo quod rectis AD, MO continetur.

Demon-

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt ſegmentum ſuperficiei vngularis INDLKI æquari rectangulo ADM. Demonſtratũ eſt 2 item ſegmentum vngularis ſuperficiei NLD æquari rectangulo ADO. quare ſi ab æqualibus, ſuperficie nimirum INDLKI, & rectangulo ADM, tollantur æqualia, nimirum ſuperficies NLD, & rectangulum ADO, quæ remanent ſunt æqualia, ſuperficies nempe IBNLCKI, & rectangulum ADMO. Quod erat demonſtrandum.



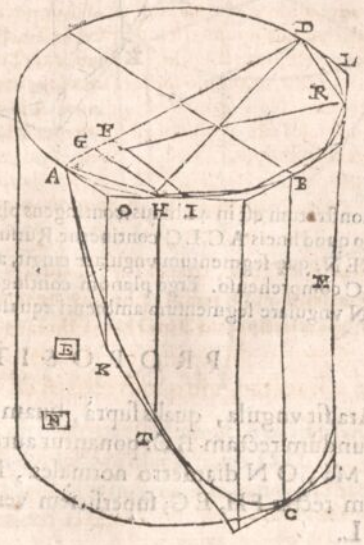
2 46. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

OMnia plana vngulam ambientia, & ad ellipticam vngulæ baſim terminata demptis triangulis lateralibus, ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulam cingit, æqualia ſunt ſimul ſumpta.

Demonſtratio.

OMnia enim illa plana ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur per 43. huius quadrato diametri AD. Atqui eidem quadrato æquatur ſuperficies cylindrica quæ vngulam cingit. Ergo omnia plana vngulam ambientia ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur ſuperficiei cylindricę quæ cingit vngulam. Quod erat demonſtrandum.



Corollarium.

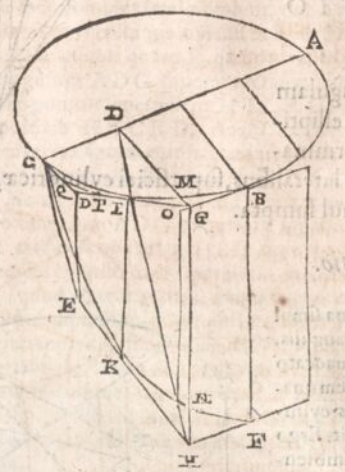
SImiliter demonſtrabimus omnia plano dempto, triangulo laterali vngulæ ſegmentum HTCRD ambientia, æqualia eſſe ſuperficiei HTCRD: tam enim plana ambientia dempto triangulo, quàm ſuperficies, æquantur rectangulo ADG.

PROPOSITIO XLIX.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam ad extremitatem diametri contingat planum, triangulare DCE, ſecans planum ellipticum AFNC ſecundùm rectam CE, contingat autem eandem vngulam & alterum planum DENO ſecúdùm rectam IK, ſecans planum DCE rectâ DE, planum verò ellipticum AFNC rectâ HKE. Ponatur denique per rectam aliquam LG normalem diametro, planum axi æquidiſtans, producens in ſuperficie vngulari rectam MN, ſecans verò planum ODEN ſecundùm rectam GH.

Dico planum contingens ODEN, æquale eſſe ſuperficiei vngulari cylindricæ MCEN.

Demonſtratio.



DEmonſtratum eſt in 42. huius, contingens planum ODEN eſſe æquale rectangulo quod lineis AC, LC continetur. Rurſum per 46. huius ſuperficies cylindrica MCEN, quę ſegmentum vngulare cingit, æquatur rectangulo ſub ijſdem lineis AC, LC comprehenſo. Ergo planum contingens ODEN ſuperficiei cylindricæ MCEN vngulare ſegmentum ambienti æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

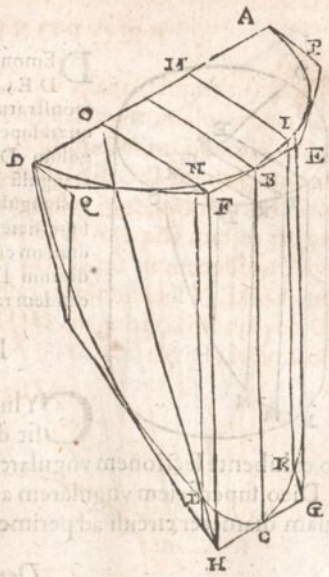
PROPOSITIO L.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam contingat planum aliquod ſecundùm rectam BC: ponantur autem bina plana axi parallela per rectas MI, ON diametro normales, ſecantia planum contingens ſecundùm rectas FH, EG; ſuperficiem verò vngularem ſecundùm rectas IK, NL.

Dico

Dico planum contingens EFHG æquale esse superficiei vngulari cylindricæ IBNLCK.

Demonstratio.

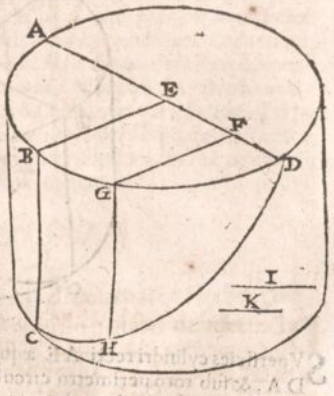


DEmonstratum est in 42. huius planum contingens EFHG æquale esse rectangulo quod lineis AD, MO continetur. Atqui demonstratum etiam est propositione 47. superficiem IBNLCK æqualem esse eidem rectangulo sub lineis AD, MO comprehenso. ergo planum contingens EFHG superficiei IBNLCK æquale est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LI.

VNgularem superficiem cylindricam secundùm datam rationem partiri.

Constructio & demonstratio.



SIt vngularis superficies ABCD diuidenda secundùm rationem datam I ad K. fiat vt I ad K, ita AD ad DF, vel ita AD ad FE, & secundùm FG, EB perpendiculares ad diametrum, ducantur plana axi cylindri parallela exhibentia communes sectiones in superficie cylindri vngulari rectas BC GH. Dico superficiem vngulę ABCD ad partem GHD, vel ad partem BGHC eandem habere proportionem quam habet I ad K. Demonstratum est enim [a] rectangulo ADF æqualem esse vngulę superficiem GHD. Demonstratum quoque est [b] rectangulo AD, EF æqualem esse superficiem BGHC. Demonstratum quoque est [c] toti vngulari superficiei æquale esse quadratum AD. Cùm igitur 1. sexti sit vt AD ad DF, vel EF, ita quadratum AD ad rectangulum ADF, vel AD, FE, erit quoque vt AD ad DF, vel FE (hoc est vt I ad K,) ita superficies vngularis tota ad partem GHD vel GHCB. præstitimus igitur quod petebatur.

[a] 46. huius.
[b] 47. huius.
[c] 45. huius.

PROPOSITIO LII.

SEcetur vngula ABC, cuius altitudo par sit diametro basis planis quotcunque axi æquidistantibus & rectis ad diametrum DC.

Dico superficies vngulares planis illis interceptas eandem inter se sortiri rationem quam partes diametri DC.

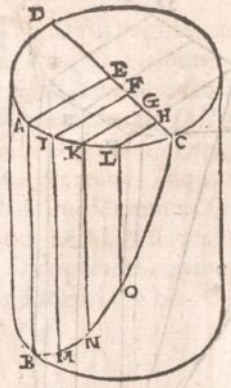
Demon-

Demonſtratio.

a 46. huius.

b 47. huius.

c 1. Sexti.



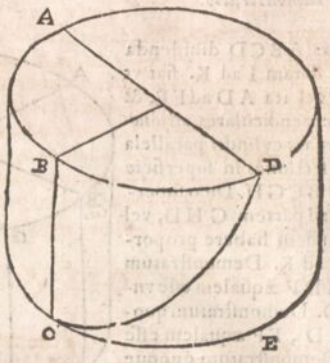
DEmonſtratum enim eſt [a] rectangulum ſub DC & DE, æquale eſſe ſuperficiei vngulari ABD. Demonſtratum item eſt rectangulum ſub DC & EF, æquari ſuperficiei AIMB. oſtenſum [b] quoque eſt rectangulum DC, FG æquari ſuperficiei IMNK, & rectangulũ DC, GH æquale exiſtere ſuperficiei KNOL. rectangulum denique ſuper DC & HC, æquale eſſe ſuperficiei CLO. patet igitur totam vngulæ ſuperficiem diuiſam eſſe ſecundùm partes diametri DC, cùm quadratum DC, ſit diuiſum in rectangula quæ [c] ſortiuntur eandem rationem quam partes lineæ DC.

PROPOSITIO LIII.

CYlindrus rectus ABDE, cuius altitudo par ſit diametro baſis AD, ſecetur per AD plano exhibente ſectionem vngularem ABCD.

Dico ſuperficiem vngularem ad cylindricam, eam obtinere rationem, quam diameter circuli ad perimetrum.

Demonſtratio.



SVperficies cylindri recti AE æqualis eſt rectangulo contento ſub BC, hoc eſt DA, & ſub toto perimetro circuli ABD: quod eodem fere diſcurſu probabitur, quo demonſtrauit Archimedes triangulum cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò, circumferentia, æquari circulo. ſed quadratum DA eſt ad rectangulum contentum ſub DA, & perimetro circuli, vt DA eſt ad perimetrum circuli. Ergo & quadratum DA, hoc eſt per 45. curua ſuperficies vngulæ ACD, eſt ad cylindri ſuperficiem vt diameter DA eſt ad perimetrum circuli ABD. Quod erat demonſtrandum.

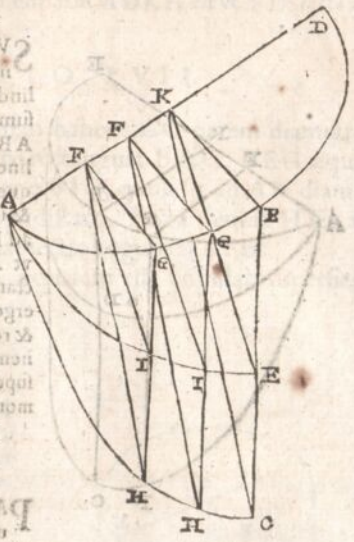
PROPOSITIO LIV.

VNgula ABCD cuius altitudo BC, ſecetur plano per AD & quodlibet punctum E in recta BC.

Dico

Dico vngularē ſuperficiem ABCD ad ſuperficiem ABED eandem habere rationem cum recta BC ad BE.

Demonſtratio.

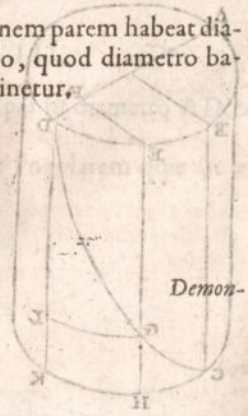


POnantur quotuis KB, FG normales ad AD, per quas fiant ſectiones axi parallelæ KBC, FGH occurrentes plano DEA ſecundum rectas KE, FI, & plano DCA ſecundum rectas FH, FH, KC. erunt ergo omnia triangula CBK, HGF, æquiangula [a] inter ſe. Similiter omnia triangula, EBK, IGF æquiangula erunt. ergo CB, HG, HG, ſunt rectis BK, GF, GF proportionales: & EB, IG, IG, ſunt iiſdem BK, GF, GF proportionales. ergo CB, HG, HG ſunt proportionales ipſis EB, IG, IG; ergo ſingula plana quæ ſubtendunt ſuperficies BCHG, GHHG proportionalia ſunt planis ſingulis, quæ ſubtendunt ſuperficies BEIG, GIIG. Ergo 12. quinti, vt planum ſubtendens ſuperficiem BCHG ad planum ſubtendens ſuperficiem BEIG, hoc eſt vt BC ad BE, ſic omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſiue inſcribuntur ſuperficiei vngulari BCHA ad omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſeu inſcribuntur ſuperficiei vngulari BEIA. Cùm igitur pari argumento poſſimus oſtendere aggregata planorum vtrique ſuperficiei vngulari ſuxta quamcunque multiplicationem inſcriptorum ſemper inter ſe eandem ſeruare rationem quam BC habet ad BE, planaque illa deficiant tandem à ſuperficiebus vngularibus quantitate quacunque datâ minori: Manifeſtum eſt ipſas quoque vngulares ſuperficies, eandem inter ſe rationem habere, quam BC habet ad BE. Quam conſequentiam ſecundum rigorem Geometricum facilè probabit Lector Geometra, ſi adhibeat eam demonſtrandi formam quâ varijs locis huius operis vſi ſumus, vel diſcurſus ab Archimede & Euclide paſſim vſurpatos.

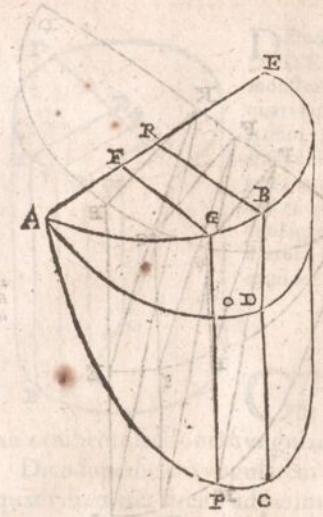
[a] *Demonſtratum eſt in 41. huius.*

PROPOSITIO LVI.

CViuſcunque vngulæ ſuperficies, ſiue altitudinem parem habeat diametro baſeos ſiue non, æqualis eſt rectangulo, quod diametro baſeos (AE) & ipſius vngulæ altitudine (BD) continetur.



Demonstratio.



a 54. huius.

SVmatur BC æqualis diametro AE, & plano per puncta E, A, C ducto ab eodem cylindro decussetur vngula EBCA. Cùm ostensum a sit superficiem ABCE ad superficiem ABDE, eam rationem continere quę est inter lineas BC & BD; etiam inter quadratum AE quod per 45. huius par est superficiei ABCE, & superficiem ABDE, intercedet ratio BC ad BD, hoc est ex hypothesi AE ad BD. sed vt AE ad BD, sic est quadratum AE ad rectangulum rectis AE & BD, comprehensum; ergo quadratum AE, ad superficiem EBDA & rectangulum AEBD eandem habet rationem. igitur rectangulum AEBD, æquale est superficiei vngulari EBDA. Quod erat demonstrandum.

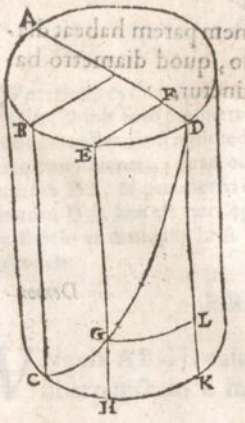
Corollarium.

PAri argumento probabimus, si vngula quæuis planis secetur secundùm rectas BR, GF, diametro normales, superficiem vngularem GOA æqualem esse rectangulo quod diametri basis parte FA, & vngulæ altitudine BD continetur; item superficiem BDOG æquari rectangulo facto ex RF & BD.

Positâ enim rursus vngulâ ACE, cuius altitudo BC par sit diametro AE. Erit superficies GPA æqualis rectangulo b FAE. ergo rectangulum FAE est ad superficiem GOA, vt superficies GPA ad superficiem GOA, hoc est vt CB ad DB, per 54. hoc est. ex constr. vt EA ad BD, hoc est vt ipsum rursus rectangulum FA, AE ad rectangulum FA, BD. cùm igitur rectangulum FA, AE ad superficiem GOA, eandem habeat rationem quam ad rectangulum FA, BD, erit hoc superficiei GOA æquale. Eadem est secundi demonstratio.

b 46. huius.

PROPOSITIO LVI.



c 46. huius.

DAtus sit cylindrus ABCKD, cuius altitudo DK par diametro basis AD, ab hoc abscissa sit vngula ABCD eiusdem altitudinis; ductâ deinde rectâ FE quæ sit perpendicularis ad AD, secundùm FE fiat sectio axi parallela quæ communem intersectionem cum superficie cylindri exhibeat lineam EGH.

Dico superficiem vngulæ EGD ad superficiem EHKD, eam habere proportionem quæ est inter rectam FD & ED curuam.

Demonstratio.

OStendimus c superficiei vngulari EGD æquari rectangulum ADF, siue FDK: est autem rectangulum

gulum FDK ad ſuperficiem EDKH, vt recta FD eſt ad curuam [a] DE. igitur et-iam pars ſuperficiei vngularis EGD ad cylindricam EDKH eſt vt FD recta ad curuam ED. Quod fuit demonſtrandum,

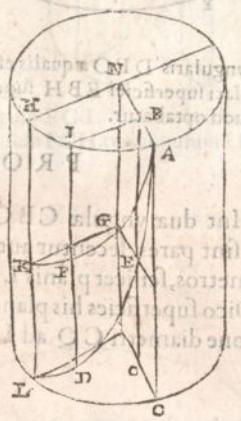
[a] *Demonſtratur hoc ſimili fere diſcurſu quo Archimedes vſus eſt prop. 1. de dimenſ. circuli.*

PROPOSITIO LVII.

DAtus ſit cylindrus NL altitudinem habens AC parem diametro. Ponantur in plano per axem ducto rectangula BAC, BEG æqualia inter ſe, ſitq; vngula ALH ſecta plano BID, quod ſit ad AN diametrum normaliter conſtitutum & axi æquidiſtans. Factâ deinde HK, æquali BE per AN & K punctum, fiat ſectio vngularis AFK.

Dico AID ſuperficiem vngularem æqualem eſſe vngulari ſuperficiei IFKH.

Demonſtratio.



ESt enim ſuperficies vngularis HIFK ad ſuperficiem HIDL, vt HK ad [b] HL. ſed demonſtratum eſt [c] DIHL ſuperficiem æqualem eſſe rectangulo ſuper BN, & diametro baſeos, hoc eſt rectangulo NBO, igitur vt eſt HK ad HL, ita eſt HIFK vngularis ſuperficies ad rectangulum NBO. ſed vt HK ad HL, hoc eſt, quia BE eſt ex hypotheſi æqualis HK, vt BE ad HL, ſiue BO, ita quoque rectangulum NBE ad NBO rectangulum. igitur rectangulum NBE ad NBO, rectangulum eſt vt ſuperficies vngularis HIFK ad rectangulum NBO. Rectangulo igitur NBE æqualis eſt ſuperficies vngularis HIFK: eſt autem ex ſuppoſitione rectangulum NE æquale BAC, rectangulo. Igitur HIFK vngularis ſuperficies rectangulo BAC, æqualis eſt. atqui oſtenſum eſt [d] rectangulo ſub BA & diametro, hoc eſt ex hypotheſi rectangulo BAC, æqualem eſſe ſuperficiem vngularem AID. eſt itaque ſuperficies AID vngularis æqualis HIFK ſuperficiei. Quod fuit demonſtrandum.

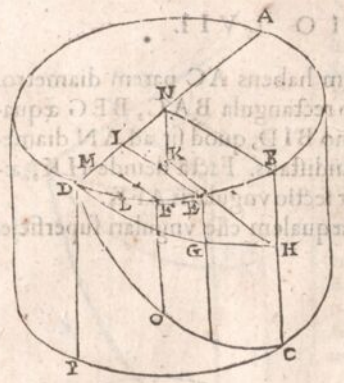
[b] 54. *huius.*
[c] 47. *huius.*
[d] 46. *huius.*

PROPOSITIO LVIII.

DAta ſit vngula ABCD cuius altitudo BC par ſit diametro AD, & arcus BE in ſemicirculo ABD.

Oporteat ſuper arcu BE ſuperficiem exhibere vngularem quæ ſit æqualis vngulari ſuperficiei datæ FOD.

Conſtructio & demonſtratio.



a 47. huius.
b 54. huius.

FIant EI, FM normales ad diametrum AD, & ex cylindri axe abſcinde rectam NK, vt rectangulum KNI æquale ſit rectangulo ADM: ductâ deinde KH quæ æquidiſtet NB, fiat ſectio per AD lineam & H punctum, & demittatur EG quæ æquidiſtet BH. Dico ſuperficiem HGEB æqualem eſſe ſuperficiei FOD. Eſt enim ſuperficies CBE æqualis rectangulo [a] ADNI, hoc eſt NIBC, ſed vt ſuperficies EBC ad EBH, ita eſt BC linea [b] ad lineam BH, hoc eſt rectangulum BC, NI ad BH, NI rectangulum. Igitur etiam rectangulum BH, NI, hoc eſt rectangulum KN, NI æquale eſt ſuperficiei vngulari EBH. ſed rectangulum ADM rectangulo KNI æquale eſt ex conſtructione. Igitur rectangulum ADM æquale eſt ſuperficiei EBH. Atqui etiam ſuperficies DFO vngularis

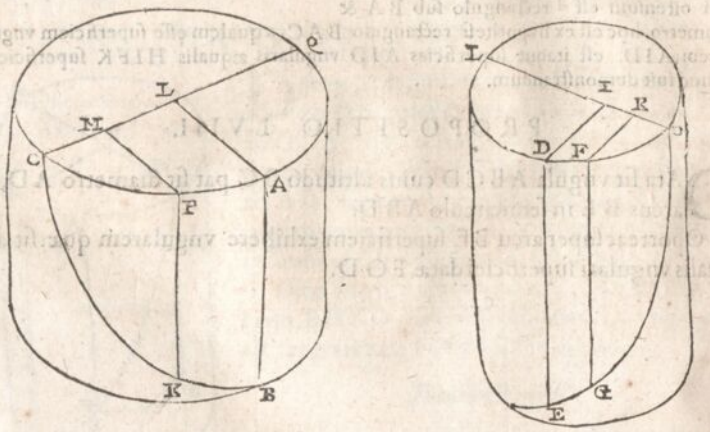
c 46. huius. æqualis eſt rectangulo [c] ADM. Igitur etiam ſuperficies DEO vngulari ſuperficiei EBH ſuper arcu BE conſtituta eſt æqualis. Præſtitimus ergo quod optabatur.

PROPOSITIO LIX.

SInt duæ vngulæ CBQ, LEO, quarum altitudines diametris baſium ſint pares. ſecentur autem planis axi parallelis perpendiculariter ad diametros, ſcilicet planis LAB, MPK, IDE, KFG.

Dico ſuperficies his planis contentas, habere rationem compoſitam ex ratione diametri CQ ad LO diametrum, & ex ratione ML ad KI.

Demonſtratio.



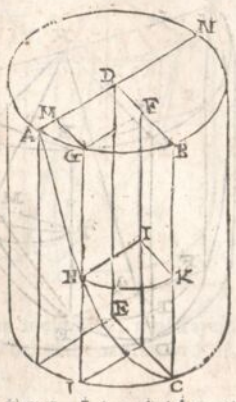
d 47. huius. DEmonſtratum eſt [d] ſuperficiem vngularem ABKP eſſe rectangulo CQLM æqualem. oſtenſum quoque eſt rectangulo LOIK æquari ſuperficiem DEGF, ſed

ſed rectangulum CQML ad rectangulum LOIK, habet rationem compoſitam ex CQ ad LO, & ex ratione ML ad IK. Igitur etiam ſuperficies vngulares illis rectangulis æquales ex ijſdem rationibus ſunt compoſitæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.

VNgula, cuius altitudo par diametro baſeos, ſecetur plano FGHL quod axi æquidiſtet & rectæ AN, exhibens communem interſectionem cum baſi elliptica AHC rectam HI, & per HI planum ponatur HIK quod baſi ABN æquidiſtet.

Dico eodem exceſſu ſuperare ſuperficiem cylindricam BGHK ſuperficiem rectāguli FGH, quo ſuperficies rectanguli IHL excedit vngularem HKC.



Demonſtratio.

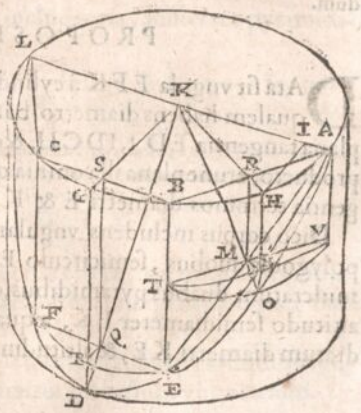
OStenſum eſt [a] ſuperficiem vngularem BGHC æqualem eſſe rectangulo ANMD, hoc eſt quoniam altitudo vngulæ ponitur par diametro AN, rectangulo FGL. Igitur Arithmeticè proportionales ſunt ſuperficies BGHK, rectangulum FGH, rectangulum IHL, & ſuperficies HKC. Quod erat demonſtrandum.

[a] 47. huius.

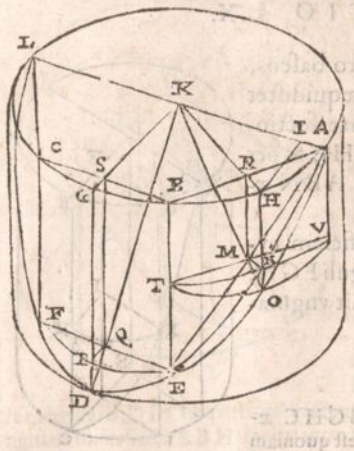
PROPOSITIO LXI.

SVbtendant AB, BC æquales arcus in baſi vngulari ABL, & ſecundùm rectas AB, BC ducantur plana ABE, BEFC, quarum communes interſectiones cum baſi elliptica AEDL ſint rectę AE, EF; & ſecundùm has lineas plana ponantur quæ recta ſint ad plana ABE, BEFC exhibentia communes ſectiones cum ſuperficie vngulari cylindrica arcus ANE, EPF.

Dico ſuperficies vngulares AOEB, BEDFC proportionales diuiſas eſſe, hoc eſt eandem rationem eſſe ſuperficiei ANEB ad BEFC ſuperficiem, qualis eſt ſuperficiei ANEOA ad ſuperficiem EPFDE.



Demonſtratio.



PLant plana KGD, KHO diuidentia rectas BC, AB bifariam, & exhibentia lineas GD, HO in ſuperficie cylindrica, rectas verò SQ, RM in planis, CBEF, ABE. Deinde ex Q & M, lineæ ducantur QP, MN, quæ æquidiſtent rectis KG, KH, & ſecundùm lineam NM, planum ponatur baſi AGL vngulari æquidiſtans exhibens in ſuperficie cylindrica arcũ TNV. Denique ponatur in plano ABE per punctum M recta VMT parallela AB, & fiat ſectio per VT, & baſeos centrum K producens vngulam, ex qua abſcindetur plano ABTNV ſegmentũ vngulare AVOTB: quia KG eſt ad KS, vt KH ad KR, & vt KG ad KS, ita GD eſt ad SQ, vtq; KH eſt ad KR, ſic HO eſt ad RM, erit quoque vt GD ad SQ, hoc eſt GP, ſic HO ad RM, hoc eſt HN. ſed quia arcus AB, BC æquales ſũt, vt GP ad HN, ita eſt ſuperficies cylindrica BEPFC ad ſuperficiẽ AVNTB, & vt GD ad HO, ita eſt ſuperficies vngularis BEDFC ad vngularẽ AVOTB. Igitur vt ſuperficies BEPFC ad BEDFC, ita ſuperficies AVNTB ad ſuperficiem AVOTB, & conſequenter vt eſt ſuperficies BEPFC ad reſiduam EPFDE, ita ſuperficies AVNTB ad reſiduam VNTOV; eſt autem tota ſuperficies AVOTB æqualis ſuperficiei AOEB, & ſuperficies AVNT æqualis ſuperficiei ANEB. Igitur vt BEPFC ad reſiduam EPFDE, ita ſuperficies ANEB ad reſiduam ANEOA. Quod fuit demonſtrandum.

a 54. huius.

PROPOSITIO LXII.

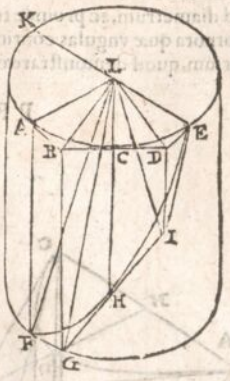
DAta ſit vngula EFK à cylindro recto decuſſata altitudinem AF æqualem habens diametro baſis KE, circumdent autem vngulam plana tangentia ED I, IDCH, &c. terminata in plano elliptico EIFK producto, erunt plana illa omnia quadrilatera, præter duo plana contingentia terminos diametri E & K, quæ ſunt triangula.

Dico corpus includens vngulam contentum planis ambientibus, & polygonis duobus, ſemicirculo EAK & ſemiellipſi EIFK conſcriptis, mulctatum duabus pyramidibus, quarum baſes ſunt triangula lateralia, altitudo ſemidiameter LK, æquale eſſe pyramidi quę baſim habet quadratum diametri KE, & altitudinem LK ſemidiametrum.

Demon-

Demonſtratio.

AD punctum A in quo BA contingit peripheriam baſis KAE, ducatur ex centro recta LA. Quoniam ex hypotheſi rectus eſt cylindrus, FA cylindri latus ad baſim KAE rectum erit. ergo LA ad FA, normalis eſt. Eſt verò LA [a] etiam normalis ad BA. Ergo LA ad planum tangens BGFA recta [b] eſt. ergo LA ſemidiameter baſeos eſt altitudo pyramidis BGFAL. Eodem modo demonſtrabitur ſemidiametrum baſeos cõmunem eſſe altitudinem omnium pyramidum, quarum baſes ſunt plana vngulam tangentia, apex verò centrum L. cùm ergo pyramides æquè altæ, ſint vt baſes, erunt omnes illæ pyramides quæ ſolidum vngulam includens componũt ad pyramidem cuius baſis eſt quadratum KE, altitudo ſemidiameter LK ſiue LA, vt omnia plana ambientia vngulam, ad quadratum KE. ſed omnia plana ambientia, demptis duobus triangulis lateralibus, æquantur [c] quadrato KE. Ergo omnes illæ pyramides, demptis duabus lateralibus, hoc eſt totum corpus vngulam includens, mulctatum duabus lateralibus pyramidibus, æquatur pyramidi cuius baſis eſt quadratum KE, altitudo ſemidiameter LK. Quod erat demonſtrandum.



a 18. *Tertij.*
b 4. *Vndec.*
c 43. *huius.*

PROPOSITIO LXIII.

DAtæ ſint binæ vngulæ æquales ac ſimiles à cylindris rectis abſciſſæ, quarum altitudines ſint baſium diametris pares. Circumſcribantur autem vtriſq; corpora iuxta ſenſum propoſitionis præcedentis, ſic vt eorum ſuperficies diuerſum planorum tangentium numerum complectantur; vnius, exempli gratia, ſuperficies contineat decem plana tangentia, alterius mille:

Dico vtraque illa corpora vngulas includentia, mulctata pyramidibus lateralibus ſemper eſſe æqualia.

Demonſtratio

EX præcedenti eſt manifeſta, ſingula enim æquantur pyramidi cuius baſis eſt quadratum diametri baſeos vngulæ, altitudo autem ſemidiameter eiuſdem baſeos.

PROPOSITIO LXIV.

DAtæ ſint binæ vngulę à cylindris rectis reſectæ, quarum altitudines ſint diametris baſium æquales, baſes autem ſint qualeſcunque, ſiue æquales nimirum ſiue inæquales.

Dico corpora vngulas continentia mulctata lateralibus pyramidibus triplicatam inter ſe habere rationem diametrorum baſium vngularium.

Demonſtratio.

DEmonſtratum enim eſt, [d] corpora illa æquari pyramidibus quę baſes habent æquales quadratis diametrorum vngularium baſium, & altitudines ſemidiametris pares. Igitur quam rationem habebunt pyramides illæ, eandem quoque habebunt corpora,

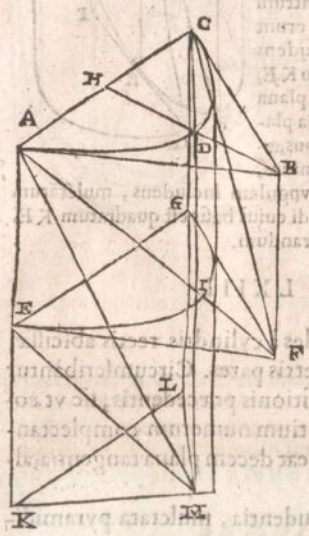
d 62. *huius.*

corpora vngulas continentia. ſed ratio pyramidum eſt compoſita ex ratione quadrati baſeos ad quadratum baſeos, hoc eſt ex duplicata ratione diametri ad diametrum, & ex ratione ſemidiametri ad ſemidiametrum, quæ eadem eſt cum ratione diametri ad diametrum, ac proinde triplicata eſt rationis diametri ad diametrum. ergo etiam corpora quæ vngulas continent ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium vngularium. quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO LXV.

CYlindro parabolico recto CDAEIG conſcriptum ſit priſma, cuius latera BA, BC, FG, FE tangant parabolas quæ ſunt baſes cylindri.

Dico pyramidem cuius baſis rectangulum ſub CA, ordinatim poſitâ & duplâ altitudinis cylindri parabolici, altitudo verò axis ipſe HD, cylindro parabolico eſſe æqualem.



Demonſtratio.

SVmatur AK dupla ipſius AE, quæ eſt altitudo cylindri dati. Eſt demonſtratum libro de parabola, triangulum ABC eſſe ſeſquialterum parabolę ADC. vnde etiam priſma ACBFE eſt ſeſquialterũ cylindri parabolici ADGIGE. poſito deinde plano per CA & F: erit priſma ACBFEG triplum [b] pyramidis cuius baſis ACB, vertex F, ac proinde ſeſquialterum quoque eſt partis reliquæ, quæ eſt pyramis baſim habens CAEG, verticem F. ergo pyramis CAEG, F, æquatur cylindro parabolico. ſed pyramidis CAEG, F, altitudo eſt HDB, quæ [c] dupla eſt axeos parabolæ HD. ergo pyramis CAEG, F, [d] æqualis eſt pyramidi, cuius altitudo ſit HD dimidia prioris altitudinis HB, baſis verò rectangulum CAK quod ex conſtructione duplum eſt baſeos prioris CAEG. Atqui pyramis, cuius altitudo eſt HD, baſis verò rectangulum CAK, eſt illa ipſa pyramis de qua agit aſſertio, cuius nimirum altitudo ſit axis HD, baſis verò rectangulum, quod ſub CA ordinatim poſita & dupla altitudinis cylindri parabolici continetur. Manifeſta igitur eſt veritas Theorematis.

a Ex propoſ. 137.

b 7. duodec.

c 17. Parab.

d 9. duodec.

PROPOSITIO LXVI.

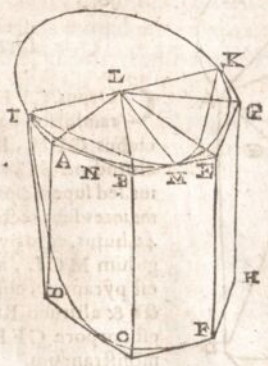
SIt vngula KHI à cylindro recto abſciſſa, altitudinem habens parem diametro baſis KI, quàm cingant plana tangentia IAD, BACD, &c.

Dico corpus vngulam includens, quod planis tangentibus & duobus polygonis, ſemicirculum KMI, & ſemiellipſim IHK ambientibus continetur, mulctatum duabus lateralibus pyramidibus hoc eſt ſolidum GLADFH, æquale eſſe vngulæ.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1061] - 1004
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



ERecta ex centro LM normali ad KI diametrum, inſcribatur ſemicirculo qui eſt baſis vngulæ parabola KMI axem habens LM. Demonſtratum eſt [a] cylindro parabolico habenti baſim parabolam KMI & altitudinem ſemidiametri LM æquari vngulam ſuper baſi ſemicirculari INMK, & altitudine diametri KI. ſed etiam præcedenti propoſitione oſtenſum eſt eidem cylindro parabolico æquari pyramidē cuius altitudo ſit LM, baſis verò rectangulum quod ſub KI & dupla altitudinis cylindri parabolici, ſub dupla nempe ipſius LM, hoc eſt rurſum ſub KI, continetur. ergo pyramis, cuius altitudo eſt ſemidiameter LM, baſis verò quadratum diametri KI, æquatur cylindro parabolico, hoc eſt vt iam oſtendi, æquatur vngulæ. ſed etiam corpus LGHFCDAL [b] æquatur pyramidi cuius baſis ſit æqualis quadrato KI & altitudo ſit LM. ergo corpus LGHFCDAL æquale eſt vngulari magnitudini. Quod fuit demonſtrandum.

a *videſ. huius.*

b 62. *huius.*

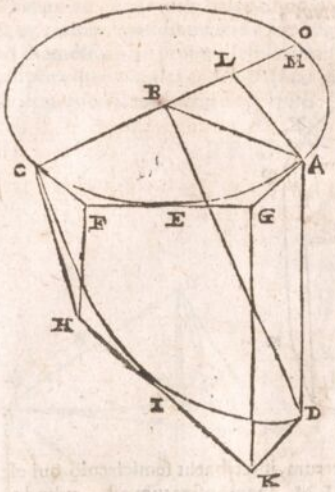
PARS QVARTA.

Comparatio vngulæ cylindricæ cum ſphæra & alijs corporibus.

HAc parte maximè intendimus ſymbolizationes vngulæ cylindricæ cum ſphæra notas reddere, tanta enim eſt ſimilitudo inter vngulam & ſphærā, vt omnes ſphæræ proprietates, vngulæ communes ſint, quemadmodum ex ijs quę deinceps demonſtraturi ſumus cognoſci poterit.

PROPOSITIO LXVII.

DAta ſit vngula CDM à cylindro recto abſciſſa, altitudinem parem habens diametro baſeos CM, ex hac reſectum ſit BADC ſegmentum plano per axem cylindri tranſeunte, cuius communis ſectio cum baſi elliptica ſit recta BD. Circumſcribatur autem polygonum CFEGA arcui AEC, & ſecundùm latera polygoni fiant plana axi parallela quæ exhibeant in plano elliptico cōmunes ſectiones CH, HK, KD, & ponatur AL contingenti CF, æquidiſtans ſiue normalis diametro CM.



Dico corpus CFHKDAB, maius esse pyramide quæ fit sub basi rectangula MCL in altitudine BC.

Demonstratio.

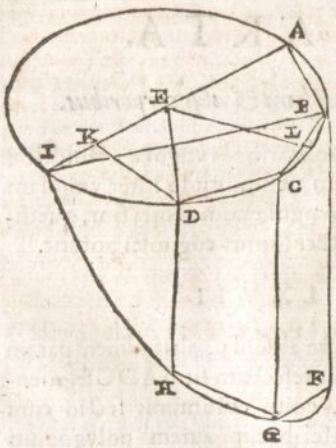
COrpus CFHKDAB est æquale pyramidi sub basi quæ sit æqualis superficiebus CFH, KGFH, KGAD & sub altitudine BC, vt patet ex discursu 62. huius, sed superficies CFH, KGFH, KGAD maiores sunt rectangulo MCL, vt patet ex 42. huius. ergo pyramis, cuius basis rectangulum MCL, altitudo verò BC, minor est pyramide, cuius basis sunt plana prædicta & altitudo BC, adeoque etiam minor est corpore CFHKDAB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

DAta sit vngula qualis in præcedenti AGI, & segmentum eodem modo decussatum EDHFA, si inscribatur polygonum ABCD regulare qualecunque circulari segmento baseos AED, & secundùm latera polygoni plana ponantur axi parallela quarum communes interfectiones cum plano elliptico sint AF, FG, GH; ponaturque DK normalis ad AI.

Dico corpus inscriptum vngulæ minus esse pyramide quæ basim habeat æqualem rectangulo IAK, altitudinem verò AE, semidiametrum.

Demonstratio.



a *Coroll. 41. huius.*

DVcatur enim EL quæ sit normalis ad aliquod latus polygoni, verbi gratia, BC, cũ rectus ex hypothesi cylindrus sit, facilè demõstrabitur EL cõmunẽ esse altitudinẽ pyramidũ, in quas corpus inscriptum ABFGHDE, resolui potest. erit ergo pyramis cuius basis sit æqualis superficiebus ABF, BCGF, CDHG, altitudo autem EL, æquale inscripto corpori ABFGHDE vngulari. sunt autem plana ABF, BCGF, CDHG æqualia a rectangulo ex IB, AK. ergo pyramis cuius basis est rectangulum IB, AK, altitudo EL, æquatur etiam corpori inscripto ABFGHDE. pyramis verò sub basi rectangula IAK, & altitudine AE habet basim maiorem quàm sit rectangulum IB, AK, & habet altitudinem AE maiorem altitudine EL; igitur pyramis sub basi rectangula IB, AK, & altitudine EL, minor est pyramide cuius basis est rectangulum IAK, altitudo autem AE. ergo & corpus ABFGHDE inscriptum vngulæ minus est pyramide habente basim rectangulum IAK, & altitudinem AE semidiametrum. Quod erat demonstrandum.

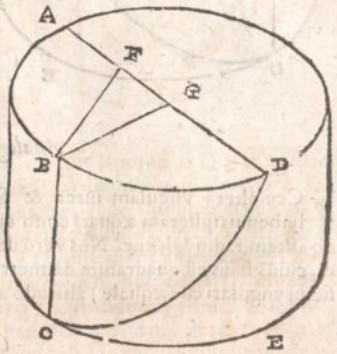
PRO-

PROPOSITIO LXIX.

DAta sit vngula A C D, à cylindro recto decussata, habens altitudinem diametro baseos æqualem, à qua abscissum sit segmentum G B C D, plano per axem cylindri transeunte. Ex puncto autem B ducta sit B F normalis ad diametrum A D.

Dico segmentum vngulare G B C D æquale esse pyramidi cuius basis est rectangulum A D F, & altitudo semidiameter G D.

Demonstratio.



PYramis enim illa nec maior est nec minor segmento vngulari. sit enim, si fieri potest, primò minor, per 6. huius inscribi potest segmento vngulari G B C D solidum, quod deficiat à segmento quantitate minori datâ, adeoque etiam minori quàm pyramis ponatur deficere à segmento G B C D. solidum igitur inscriptum segmento G B C D, maius erit pyramide cuius basis est rectangulum A D F, & altitudo G D. Quod repugnat præcedenti. Non igitur pyramis minor est segmento G B C D.

Ponatur deinde, si fieri potest, pyramis esse maior segmento G B C D. Cylindro cuius pars est vngula, conscribatur solidum superans cylindrum quantitate datâ minori, quod præstat Euclid. prop. 10. 12. erit pars solidi cylindro conscripti, etiam conscripta vngulæ, cuius excessus supra vngulam erit pars excessus quo solidum cylindro conscriptum superat cylindrum. Quare cùm excessus solidi conscripti cylindro suprà cylindrum sit dato minor, erit à fortiori excessus solidi vngulæ conscripti suprà vngulam dato minor, ac proinde etiam minor excessu quo pyramis ponitur superare vngulam. Ergo solidum vngulæ conscriptum minus est pyramide. Quod repugnat 67. huius. Non igitur pyramis maior est vngula. Quare cùm neque minorem esse probatum sit suprà, æqualis erit. Quod fuit demonstrandum.

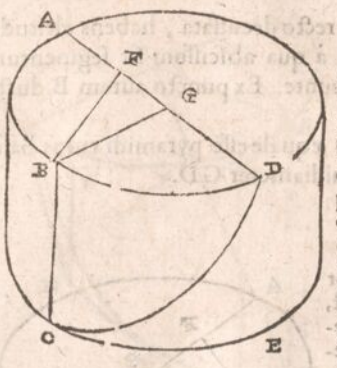
Analogia cum sphæra.

PRima hîc elucet inter sphæram & vngulam similitudo. Demonstrauit Archimedes propos. 38. libri primi de sphæra & cylind. segmento sphæræ æqualem esse conum cuius basis est æqualis superficiei segmenti, altitudo semidiameter sphęræ. similiter & nos iam demonstrauimus segmentum decussatum ab vngula plano per cylindri axem transeunte æquale esse pyramidi cuius basis est rectangulum A D F, (quod per 46. huius æquatur superficiei vngularis segmenti D C B) altitudo autem æqualis semidiametro G D.

PROPOSITIO LXX.

EX præcedenti Theoremate aliter demonstrabimus propositon. 24. cuius hæc est assertio. Omnis vngula à cylindro recto abscissa, altitudinem habens parem diametro baseos (A D) æquatur pyramidi cuius basis est quadratum diametri (A D) altitudo autem semidiameter (G D.)

Demonſtratio.



VNgula ACD plano per axem cylindri tranſeunte, diuidatur in duo ſegmenta GBCD, GBCA; ducaturq; BF ad AD, perpẽdicularis; per prꝫced. erunt ſegmẽta illa æqualia duabus pyramidibus, quarũ baſes ſunt duo rectangula ADF, DAF, altitudo autem communis GD ſemidiameter. ſed duę illæ pyramides æquantur pyramidi cuius baſis eſt quadratum AD, & altitudo eadem GD, cùm rectangula ADF, DAF quadrato AD ſint æqualia. Ergo duo ſegmenta GBCD, GBCA, hoc eſt tota vngula ACD, æquatur pyramidi cuius baſis eſt quadratum diametri AD, altitudo autem ſemidiameter GD. Quod erat demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

ECce altera vngulam inter & ſphæram analogia. Ex Archimede & Pappo habemus ſphęram æquari cono cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſphęræ, altitudo autem radio ſphæræ. Nos verò demonſtrauimus vngulam æqualem eſſe pyramidi, cuius baſis eſt quadratum diametri (quod propoſ. 45. huius libri oſtendimus ſuperficiei vngulari eſſe æquale) altitudo autem ſemidiameter GD.

Corollarium.

EX propoſitione colligo ſequens theorema. Data ſit vngula, quæ ſupra plano per cylindri axem tranſeunte diuiſa ſit in ſegmenta duo GBCD, GBCA, ducaturq; BF normalis ad AD.

Dico ſegmentum GBCD eſſe ad totam vngulam vt pars diametri FD ad totam diametrum AD; ad ſegmentum verò alterum eandem habere rationem quam DF habet ad FA.

Demonſtratio.

REctangulum ADF eſt ad quadratum AD, vt FD ad AD. ſed vt rectangulum ADF ad quadratum AD, ita pyramis, cuius baſis eſt ADF rectangulum & altitudo GD, eſt ad pyramidem cuius baſis quadratum AD, altitudo autem GD. Ergo pyramis cuius baſis eſt rectangulum ADF, & altitudo GD, hoc eſt [a] ſegmentum vngulare GBCD, eſt ad pyramidem cuius baſis eſt quadratum AD, & altitudo GD, hoc eſt [b] ad totam vngulam, vt FD eſt ad AD, pari argumento ex 69. probabimus ſegmenta GBCD, GBCA eſſe inter ſe vt DF eſt ad FA.

a 69. huius.

b 70. vel 24. huius.

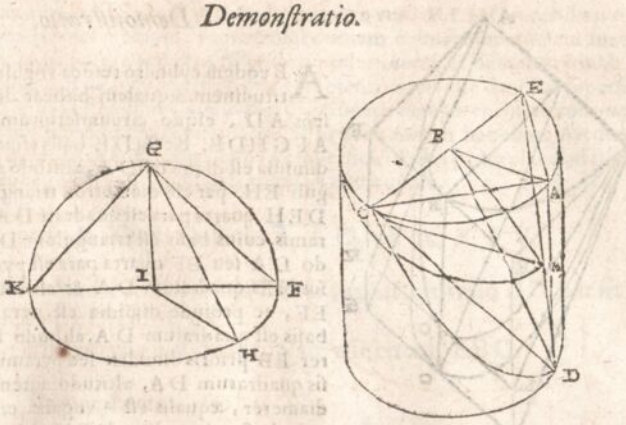
PROPOSITIO LXXI.

OMnis vngula à cylindro recto abſciſſa, dupla eſt inſcriptæ ſibi pyramidis maximæ; cuius nimirum baſis eſt (EAC) triangulum maximum, quod ſemicirculo, qui baſis eſt vngulæ, inſcribi poteſt; altitudo verò AM eadem quæ vngulæ.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1065] - 1008
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



AB eodem cylindro reſecetur vngula EDC, cuius altitudo AD par ſit diametro baſis EC. Maximum triangulum EAC eſt dimidium quadrati circulo baſeos vngularis inſcripti, adeoque quarta pars quadrati, quod ſit ſuper diametro EC; pyramis igitur ſuper baſi triangula EAC in altitudine AD, hoc eſt ex hypotheſi EC, quarta pars eſt pyramidis ſuper baſi quadrata EC, in eadem altitudine EC. Ergo pyramis, cuius baſis eſt triangulum EAC, altitudo EC, hoc eſt AD, eſt pars dimidia pyramidis habentis pro baſi quadratum EC, altitudinem verò BC dimidiam prioris EC, hoc eſt ſemidiametrum. Atqui hæc pyramis [a] æqualis eſt vngulæ. ergo pyramis cuius baſis eſt triangulum EAC, altitudo AD, maxima nimirum quæ inſcribi vngulæ EDC poteſt, dimidia eſt vngulæ ac proinde vngula eius dupla eſt. Sed vt vngula EDC eſt ad pyramidem ſibi inſcriptam, ita vngula EMC ad ſibi inſcriptam pyramidem. Nam & vngulæ per 7. huius, & pyramides vngulis inſcriptæ per elementa, ſunt inter ſe vt altitudines AD, AM. ergo etiam vngula EMC maximę pyramidis ſibi inſcriptæ dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

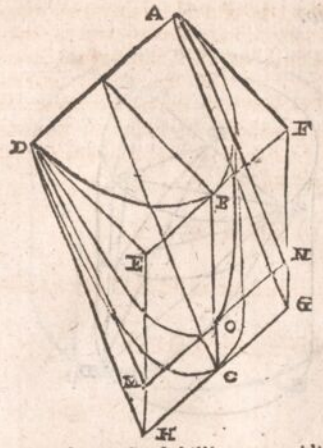
[a] 7o. *vel* 14. *huius.*

Analogia cum ſphæra.

ETiam hîc mirabiliter ſymboliſant ſphæra & vngula. Quemadmodum enim à nobis demonſtratum eſt vngulam pyramidis maximæ ſibi inſcriptæ duplam eſſe, ita quoque ab Archimede demonſtratum hæmiſphærium FHKG duplum eſſe coni maximi ſibi inſcripti.

PROPOSITIO LXXII.

PRiſma (AFNOMDE) cuiuis vngulæ (ABOD) à cylindro recto abſciſſæ circumſcriptum, ipſius vngulæ ſeſquialterum eſt.



Demonſtratio.

AB eodem cylindro reſeca vngulam, quæ altitudinem æqualem habeat diametro baſeos AD, eiúque circumſcriptum ſit priſma AFGHDE. Recta DE baſis trianguli DEH dimidia eſt diametri DA, altitudo autem trianguli EH, par eſt diametro. triangulum igitur DEH quarta pars eſt quadrati DA. Ergo pyramis, cuius baſis eſt triangulum DEH altitudo DA ſeu EF quarta pars eſt pyramidis, cuius baſis quadratum DA & altitudo DA ſeu EF, ac proinde dimidia eſt pyramidis cuius baſis eſt quadratum DA, altitudo ſemidiameter EB prioris dimidia. ſed pyramis, cuius baſis quadratum DA, altitudo autem EB ſemidiameter, æqualis eſt [a] vngulæ. ergo pyramis cuius baſis triangulum DEH, altitudo DA dimidia eſt vngulæ. ſed illius pyramidis priſma AEDHGF triplum [b] eſt. Ergo priſma vngulæ ſeſquialterum eſt.

a 70. vel 24. huius.

b 7. duodec.

Iam verò priſma DG eſt ad priſma DN, vt baſis HED ad baſim MED, hoc eſt 1. 6. vt HE ad ME, hoc eſt vt CB ad OB. per 7. autem huius etiam vngula ACD, eſt ad vngulam AOD vt CB ad OB. Ergo priſma DG eſt ad priſma DN, vt vngula ACD ad vngulam AOD, & permutando vt priſma DG eſt ad vngulam ACD, ſic priſma DN ad vngulam AOD. Atqui oſtenſum eſt priſma DG ſeſquialterum eſſe vngulæ ACD. ergo & priſma DN vngulę AOD ſeſquialterum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

HAbes Lector aliam rurſum vtriuſque corporis ſimilitudinem. Oſtendit Archimedes cylindrum ſphæræ circumſcriptum ſeſquialterum eſſe ſphærę; & nos modò demonſtrauimus priſma vngulæ circumſcriptum ſeſquialterum eſſe vngulę.

PROPOSITIO LXXIII.

DAta ſit quæuis cylindri recti vngula cum inuolucro ſuo, ſiue cum priſmate ipſi circumſcripto.

Dico tres planas ſuperficies DEH, EHGF, FAG, cylindricæ vngularis ſuperficiei, quam includunt, eſſe ſeſquialteras.

Demonſtratio.

REctangulum quod continetur ſub DA diametro baſeos, & altitudine vngulæ BC (hoc eſt rectangulum FEHG) æquatur [c] ſuperficiei vngulari. ſed triangula DEH, AFG, ſimul ſumpta, ſunt dimidium rectanguli FEHG. ergo triangula DEH, AFG dimidium ſunt vngularis ſuperficiei. Cùm igitur rectangulum FEHG oſtenderim ſuperficiei vngulari eſſe æquale, erunt tres ſimul planæ ſuperficies DEH, FEHG, FAG ſuperficiei vngularis, quam cingunt, ſeſquialterę. Quod erat demonſtrandum.

c 55. huius.

Analogia cum ſphæra.

AB Archimede demonſtratum eſt ſuperficiem cylindri ſphæram ambientis ſuperficiei ſphæricæ ſeſquialteram eſſe. Hæc etiam ſphæræ proprietas mirificè exprimi-

exprimitur ab vngula, duo triangula parallela quæ prismatis sunt bases, referunt duos parallelos circulos, qui bases sunt cylindri. planum verò FEHG inter duas triangulares prismatis bases medium, repræsentat curuam cylindri superficiem mediam inter duas cylindri bases circulares. Quemadmodum enim ex demonstratis ab Archimede deducimus duas cylindri sphæram ambientis bases esse dimidias superficiei sphæricæ, ita & nos ostendimus duo triangula prismatis nempe vngulam continentis bases, dimidias esse superficiei vngularis: & sicut ex eodem habemus Archimede superficiem curuam cylindri æqualem esse superficiei sphæræ, ita planè ostensum à nobis est planum FEHG superficiei vngulari esse æquale.

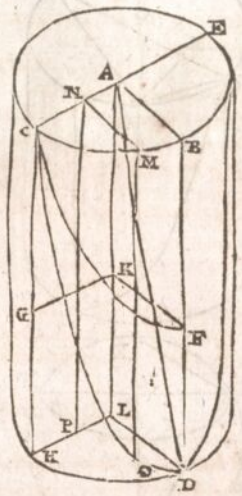
PROPOSITIO LXXIV.

DAta sit cylindri recti vngula EDC, cuius altitudo BD par sit circumferentiæ circuli EBC.

Dico superficiem vngulæ quadruplam esse circuli EBC.

Demonstratio.

EX centro A ducatur AD: Rectangulum sub diametro basis EC, & altitudine vngulæ BD æquatur [a] superficiei vngulari cylindricæ. sed rectangulum ECBD, duplum est rectanguli ABBD, ac proinde quadruplum trianguli ADB. ergo superficies vngularis EDC quadrupla est trianguli ADB. sed triangulum ADB æquatur [b] circulo EBC, quod eius basis sit radius AB, altitudo autem BD par circumferentiæ. Ergo superficies vngularis EDC quadrupla est circuli EBC. Quod erat demonstrandum.



[a] 55. huius.

[b] Archim. prop. 1. dimens. circ.

Analogia cum sphæra.

QVis rursum hîc non agnoscat sphæram in vngula? Eiusdem enim circuli EBC, & superficies vngularis EDC, & superficies sphæræ cuius diameter EC, quadruplæ sunt.

PROPOSITIO LXXV.

VNgula EDC cuius altitudo BD quæcunque, (inspice figuram propositionis 74.) secetur per rectas AB, NM ad diametrum normales planis ABD, NMO, quæ axi cylindrico æquidistent.

Dico superficies vngulares EDB, BDOM, MOC eandem & inter se & ad totam vngulæ superficiem habere rationem, quam partes diametri, vel inter se vel ad totam diametrum.

Demonstratio.

SVperficies EDB [c] æquatur rectangulo EABD: & superficies BDOM, rectangulo ANBD; superficies verò MOC rectangulo NCBD æqualis est. superficies denique tota EDC rectangulo ECBD est [d] æqualis. sed 1.6. illa rectangula, sunt

[c] Coroll. 55.

[d] 55. huius.

sunt inter se, & ad totum rectangulum ECBD, vt partes diametri ad se mutuo vel ad totam diametrum. ergo & segmenta superficiei vngularis, sunt inter se, vel ad totam superficiem vngulæ, vt partes diametri inter se vel ad totam diametrum. Quod erat demonstrandum.

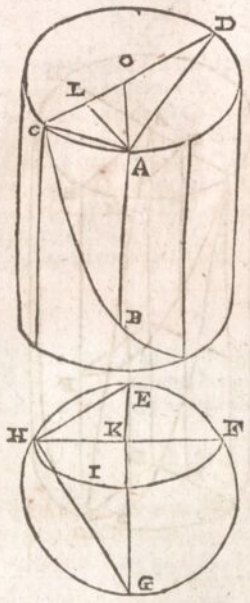
Analogia cum sphæra.

HAbemus ex demonstratis ab Archimede & Pappo segmenta superficiei sphæricæ planis ad diametrum rectis diuisæ, esse inter se vt partes diametri. In hac ergo etiam pulcherrima proprietate, vngula & sphæra conueniunt.

PROPOSITIO LXXVI.

IN omnibus denique superficiem vngularem conuenire cum sphærica sic ostendo.

Demonstratio.



a 46. huius.

b 8. Sexti.

c 45. huius.

POnantur vngula DBC altitudinem habens diametro parem, & sphæra FGHE, sintque circuli maximi sphæræ æquales vngulæ basi DAC, secetur quoque sphæra quacunque demum ratione per circulum FIH plano recto ad circulum maximum FGH. iungantur deinde EHGH. Diuisâ deinde DC in L, secundùm rationem quâ diuisa est EG in K, erectâque LA normaliter ad DC secetur vngula plano LAB. ponanturque AD, AC. Ostendit Archimedes libro de sphæra, & cylindro propositione trigesima prima sphæricam superficiem FIHE æqualem esse circulo qui radio EH describitur, nos autem [a] demonstrauimus vngularem superficiem ABC æqualem esse rectangulo LCD, hoc est [b] quadrato AC. Præterea Archimedes demonstrat propositione trigesima secunda eiusdem libri superficiem sphæricam FIHG absciſſam æqualem esse circulo cuius radius est HG. nos quoque ostendimus superficiem vngularem ABD æqualem esse rectangulo LDC, hoc est quadrato DA. Denique ostendit Archimedes totam sphæræ superficiem æquari circulo cuius radius EG: & nos demõstrauimus [c] totam vngularem superficiem æquari quadrato DC. Igitur tota vngularis superficies DABC ad suas partes in quas est diuisa eandem habet proportionem quam tota sphæræ superficies ad suas partes.

Manifestum igitur est vngularem superficiem à sphæræ rotunditate nullo alio differre nisi secundùm lineas expansas & circulares: vnde si quis hac ratione asserat Archimedem deuenisse in notitiam demonstrationum quibus in materia sphæræ & cylindri vsus est, non videtur à vero aberraturus.

PRO-

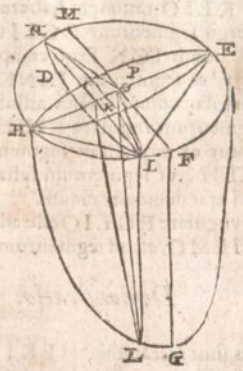
PROPOSITIO LXXVII.

FInem impono recenſendis ac demonſtrandis ſphæræ atque vngulæ analogijs, ſi oſtendero non minùs ſolida ſegmenta vngularia & ſphærica quam ſuperficierum portiones ſymbolizare.

Data ſit cylindri recti vngula EFGH cuius baſis EFH ſemicirculus, altitudo FG par diametro baſeos EH, ſit autem & ſphæra FEPHM, ex eiuſdem ſemicirculi EFH circumuolutione circa diametrum ſiue axem EH, producta. Ducatur deinde IKN perpendicularis ad EH, per quam ductis planis IDN, KIL, rectis ad EH, tam ſphæra quàm vngula in duo ſegmenta dirimatur.

Dico ſegmenta vngularia EGLIK, HKIL, eandem inter ſe habere proportionem quam ſegmenta ſphærica IFEN, IHN.

Demonſtratio.



IVngantur EI, HI, IO, NO, OL. Quoniam ex hypotheſi cylindrus à quo abſcinditur vngula, rectus eſt, erit LI recta plano EIH, adeoque per defin. 3. vndec. angulus KIL rectus. ergo KI eſt altitudo trianguli LIK. Rurſus quia GF eſt par diametro EH, ſiue FM, erit & LI par IN, vt patet ex demonſtratis in 41. huius. triangulum igitur LIK dimidium eſt rectanguli NIK, ac proinde æquatur quadrato IK, hoc eſt rectangulo HKE; pyramides ergo quarum baſes ſunt triangulum LIK, & rectangulum HKE, altitudo autem communis KO, æquales ſunt. prætereà ſegmentum vngulare EGLIO, æquatur [a] pyramidi cuius baſis rectangulum HEK, altitudo radius OF, ſiue OH. quare cum pyramis, cuius baſis rectangulum HEK, altitudo OH, ad pyramidem cuius baſis rectangul. HKE altitudo KO, rationem habeat compoſitam ex ratione altitudinis HO, ad altitudinem KO, & ex ratione baſis rectangulæ HEK ad baſim rectangulam HKE, hoc eſt [b] ex ratione HE ad HK, habebit quoque ſegmentum vngulare EGLIO ad pyramidem KLIO cuius baſis eſt triang. LIK, altitudo KO, rationem compoſitam ex rationibus HO ad KO, & HE ad HK.

[a] 269. huius.

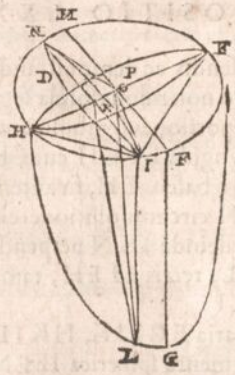
[b] 1. Sexti.

Iam verò ſegmentum ſphæricum IEN contentum ſphærica ſuperficie IEN, & conica ION, æquatur [c] cono cuius baſis eſt circulus radio IE deſcriptus, altitudo autem radius ſphæræ HO, ſed ille conus ad conum ION, rationem habet compoſitam ex ratione altitudinis HO ad altitudinem KO, & ex ratione baſis ad baſim, hoc eſt [d] ex ratione quadrati EI ad quadrat. KI, hoc eſt [e] ex ratione rectanguli HEK ad rectangulum HKE, hoc eſt ex ratione HE ad HK. Ergo & ſegmen-

[c] Archim. prop. 38. l. 1. de ſph. & cyl.

[d] 2. duo dec.

[e] 8. Sexti.



tum ſphęricum IENO ad conum ION, rationem habet compoſitam ex rationibus HO ad KO, & HE ad HK. ſed etiam oſtendi ſuprà ſegmentum vngulare EGLIO ad pyramidem KLIO rationem habere compoſitã ex rationibus HO, ad KO, & HE ad HK. ergo ſegmentum EGLIO eſt ad pyramidem KLIO, vt ſegmentum IENO ad conum ION. Ergo componendo ſegmentum EGLIK eſt ad pyramidem KLIO, vt ſegmentum EINK eſt ad conum IOK. Eodem planè diſcurſu, ſi ſub finem loco compoſitionis adhibeatur diuiſio, oſtendam pyramidem KLIO eſſe ad ſegmentum vngulare KILH, vt conus ION eſt ad ſegmẽtum ſphęricum IHN. Igitur ex æqualitate ſegmentum vngulare EGLIK eſt ad ſegmentum vngulare KILH, vt ſegmentum ſphæricum IEN eſt ad ſphæricum ſegmentum IHN. Quod erat demonſtrandum.

Dico inſuper ſegmentũ vngulare EGLIO eſſe ad ſegmentum vngulare OILH, vt ſphæricum ſegmentum IEMO, eſt ad ſegmentum ſphæricum IONH.

Demonſtratio.

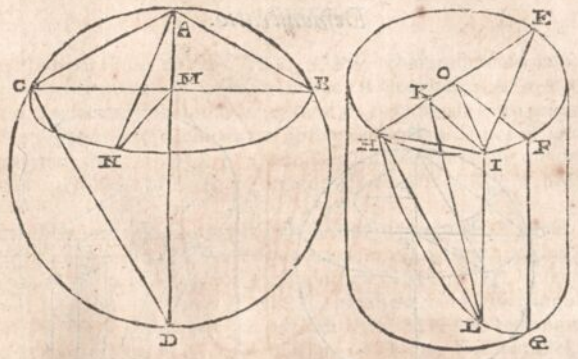
a 69. huius. PYramides, quarum baſes ſunt rectangula HEK, EHK; communis autem altitudo radius OF, hoc eſt a ſegmenta vngularia EGLIO, OILH, ſunt inter ſe vt rectangula HEK, EHK, hoc eſt, vt EK ad KH. Atqui etiam coni quorum

b Arch. 38. l. 1. ſphæric. baſes ſunt circuli radijs EI, HI deſcripti, communis verò altitudo ſemidiameter OF, hoc eſt b ſegmenta ſphærica IEMO, IONH, ſunt inter ſe, vt quadrata EI, HI, hoc eſt vt rectangula HEK, EHK, hoc eſt vt EK ad KH. Ergo ſegmenta vngularia EGLIO, OILK eandem inter ſe rationem habent, quam ſegmenta ſphęrica IEMO, IONH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

CVm inter pyramides vngulæ inſcriptas, & conos inſcriptos ſphæræ non leuis itidem analogia intercedat, hanc quoque tribus ſequentibus propoſitionibus explicabimus.

Data



DAta sit cylindri recti vngula EGH, habens altitudinem FG parem diametro basis & sphęræ ABCD. Cui sectæ plano BNC inscribatur Isosceles conus ABNC. diuisâ verò diametro basis vngulæ EH, (quæ axi AD sit æqualis) in K, vt diuisus est axis AD in M, erigatur KI normalis ad EH, quam patet ipsi MC esse æqualem. fiatque sectio KIL ad cylindri axem parallela. Iunctâ demum HI (quam etiam patet ipsis CA esse æqualem) per HI & L, planum agatur HIL. Archimedes propositione decimaquarta libri de sphæra & cylindro demonstrat circulum descriptum radio qui sit medius inter MN & NA, proportionalis, siue inter MC & CA, æqualem esse toti conicæ superficiei ABNC præter basim. Idem applicandum est vngulæ, ostendendum scilicet IHL superficiem triangularem æqualem esse quadrato facto sub latere, quod medium sit proportionale inter rectas KI, IH, hoc est MC, CA. Iunge OF. quoniam GF est ex hypothesi par EH, erit OF dimidia FG. ergo etiam IK dimidia a lineæ IL. Igitur rectangulum b HI, IK est triangulo HIL æquale. sed quadratum super media inter HI, IK æquatur rectangulo KI, IH. illud igitur ipsum quadratum est æquale HIL triangulo. Idem intellige de quauis superficie pyramidali modo explicato.

a *Ex demonstratis in 41. huius.*
b *Ex demonstratis ibid.*

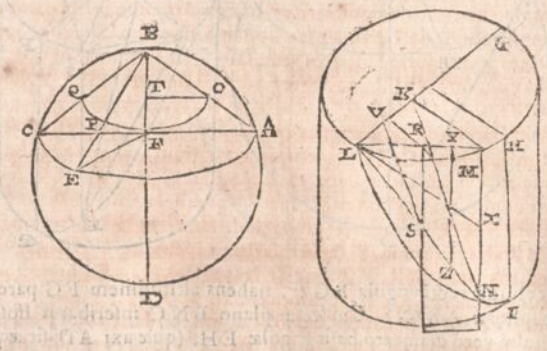
Porrò manifestum est pyramidem KILH vngulæ EFGH inclusam, repræsentare conum inscriptum parti sphæricæ ABNC eâ ratione quam constructio postulauit. Quod liquidò lector intelliget, si coni superficiem secundùm longitudinem perimetri baseos suę expandi concipiat, quod KI ipsi MC, & HI ipsi CA sit æqualis. Quod si igitur IL foret circulari perimetro expanso BNC æqualis, tum superficies IHL non solùm repræsentaret conicam superficiem, sed illi omnino æqualis oxisteret.

PROPOSITIO LXXIX.

SEcetur sphæra plano AEC recto ad axem BD sicuti secta est LIG cylindri recti vngula sectione KMN, quæ recta est ad diametrum GL & axi cylindrico parallela: vngulariqué segmento KMLN pyramis inscripta sit, sphærico verò conus ABCE.

Dico triangulum MKN ad MLN, triangulum eandem habere proportionem quam AEC basis coni ABCE, ad superficiem eiusdem præter basim.

Demonſtratio.



DEmonſtrat Archimedes libro primo de ſphæra & cylindro propoſitione decimaquinta, cuiuſque coni iſoſcelij ſuperficiem ad baſim ſuam eam habere rationem quam latus coni ad radium circuli baſeos, hoc eſt in caſu noſtro, vt eſt AB linea ad lineam AF. cùm autem ponatur GK ad KL, eandem habere rationem quam habet DF ad FB: igitur etiam eſt GK ad KM, vt DF ad FA, & vt KM ad ML, ſic FA, ad AB, quemadmodum ex elementis patet. ſed vt KM ad ML, ita triangulum KMN ad triangulum LMN, cùm eorum communis altitudo ſit MN. ergo triangulum KMN, eſt ad triangulum LMN, vt FA ad AB, hoc eſt vt baſis coni AEC ad reliquam coni ſuperficiem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

PONatur rurſum cylindri vngula LIG, ſed cuius altitudo HI par ſit diametro GL: ſecetur verò conus ABC, ſectione OPQ, baſi AEC parallela, & diuidatur ML in R, vt diuiſa eſt in BE in P. tum per punctum R ſectio fiat RSV quæ æquidiſtet plano NMK.

Dico ſpatium MRSN æquale eſſe quadrato ſub linea quæ media eſt proportionalis inter MR & MK, RV ſimul ſumptas, eo prorſus modo quo ſpatium ſuperficiei conicæ duobus perimetris parallelis AEC, OPQ interceptum æquale eſt circulo cuius radius eſt medius inter PE vel AO, & lineas AF, OT ſimul ſumptas.

Demon-

Demonſtratio.

QVod ſpatium parallelis circulis AEC, OPQ comprehenſum æquale ſit circulo cuius radius mediam proportionem habeat inter lineas AO & OT, AF ſimul ſumptas, non intendo demonſtrare, cùm id ab Archimede libro primo de ſphæra & cylindro propoſitione decimaſexta ſit demonſtratum. Supereſt igitur hoc ipſum demonſtremus de figura MRSN, quod illa ſcilicet æqualis ſit quadrato mediæ proportionalis inter lineas MR, & aggregatum ex duabus MK, RV. hoc autem ſic oſtendo.

Quoniam ex hypotheſi cylindrus ex quo deſumitur vngula, rectus eſt, erit latus cylindri rectum ad baſim GHL, adeoque per definit. 3. vndec. angulus NML rectus eſt. Quia autem parallela plana ex hypotheſi NMK, SRV ſecat planum NML, erunt communes ſectiones NM, SR [a] parallelæ. cùm igitur angulus NMK rectus ſit, etiam SRV rectus erit; trapezium igitur MNSR rectangulum eſt ad baſim ſuam MR. hac igitur in Y ſectâ bifariam, ductâque YZ parallela ad MN, RS, erit rectangulum MR, YZ æquale trapezio MNSR, quod ſtatim patet, ſi per Z ducatur parallela ad MR occurrens rectis MN, RS. recta quoque YZ erit dimidia ſummę rectarum MN, RS, quod eâdem conſtructione facta nullo etiam negotio liquet. Iam verò quia IH altitudo vngulæ ponitur æqualis diametro GL, erit hęc dupla ſemidiametri, adeoque & NM dupla [b] ipſius MK. Cùm igitur NM, SR ſint parallelæ, etiam SR dupla eſt RV. Ergo YZ dimidia ſummæ rectarum NM, SR, æquatur rectis MK, RV. Ergo rectangulum ſub MR & MKRV, hoc eſt quadratum mediæ proportionalis inter MR & MK, RV, æquatur rectangulo MR, YZ, hoc eſt vt ante oſtendi, plano MNSR. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. *Vndec.*

[b] *Ex demonſtr. 41. huius.*

Priuſquam hic manum tollo de tabula, vt ſphæræ atque vngulæ admirabilis ſimilitudo clariùs intelligatur, communes vtriuſque proprietates præcipuas vnum ſub aſpectum Lectori dabo.

Symboliſationes vngulæ cylindricæ cum ſphæra, primò circa ſolidorum rationem.

PRIMA.

QVemadmodum vngula ad vngulam in triplicata eſt ratione laterum homologorum, ita quoque ſphæra ad ſphæram.

II.

Segmenta vngularia & ſphærica tam ea quæ planis ad diametrum rectis abſcinduntur, quàm ea quæ ad centra conſiſtunt eandem inter ſe habent rationem.

III.

Quod ſi baſi vngulari ſemihexagonum inſcribatur, & ſecundùm huius ſemihexagoni lineas plana fiant axi æquidiſtantia, idem quoque præſtetur in ſemicirculo maximo ſphæræ, & hæc figura circulo inſcripta in orbem agatur producens conicas ſuperficies; in eadem ratione ſectæ erunt & vngula & ſphęra.

IV.

Quemadmodum prædicto modo ſecta vngula ad ſuam partem inſcriptam habet rationem octo ad ſex: ita quoque ſphæra ad figuram inſcriptã habet proportionem octo ad ſex.

V.

Sicut vngula altitudinem habens diametro baſeos parem cum inuolucro, ſiue priſma vngulam includens, eſt ſeſquialterum vngulæ; ita ſimiliter ſphæra cum ſuo inuolucro, hoc eſt cylindrus ſphæram ambiens eſt ſeſquialter ſphæræ.

V I.

Quemadmodum inuolucri pars ad totum inuolucrum eſt in triplicata ratione laterum diametro æquidiſtantium: ita etiam contingit in partibus inuolucri ſphærici, ſi ad totum inuolucrum conferas partes inuolucri, quæ inſiſtant lineis axi parallelis.

V I I.

Quemadmodum vngula altitudinem habens baſis diametro parem æquatur pyramidi, cuius baſis par eſt curuæ ſuperficiei vngulę, altitudo autem ſemidiameter, ita & ſphæra ęqualis eſt cono, cuius baſis eſt par ſuperficiei ſphæricæ, altitudo autem ſemidiameter ſphæræ.

V I I I.

Sicuti ſegmento vngulari quod plano per cylindri axem ducto decuſſatur ęqualis eſt pyramis baſim habens æqualem curuę ſuperficiei ſegmenti vngularis, altitudinem verò parem ſemidiametro: ita etiam ſphæricę portioni æqualis eſt conus baſim habens æqualem ſuperficiei ſphęricæ portionis, altitudinem verò ſemidiametrum ſphærę.

I X.

Quemadmodum vngula maximæ pyramidis ſibi inſcriptę dupla eſt, ita & hemiſphęrium coni maximi ſibi inſcripti, duplum eſt.

Secundò circa rationem ſuperficierum.

P R I M A.

HÆdrę cuiuſuis polygoni cingentes vngulam ſi ſimul ſumãtur ſecluſis lateralibus triangulis, ęquales ſunt rectangulo quod fit ſuper diametro circuli qui baſis eſt vngulę, & altera linea quę ęquatur altitudini vngulę. Ita quoque ſuperficies conicę ex cuiuſcunque polygoni circumſcripti ſphęrę circumuolutione productę demptis lateralibus ęquales ſunt rectangulo quod fieret ſuper diametro & linea quę toti perimetro circuli maximi eſt æqualis.

I I.

Quemadmodum hędrę vnius polygoni, alterius polygoni hędris circa eandem vngulam conſtructis, excluſis lateralibus triangulis, inter ſe æquales exiſtunt: ita quoque ſi circa ſphæras duas æquales diuerſa polygona ex gyratione formata conicas ſuperficies produxerint, erunt ſuperficies vnius, alterius ſuperficiebus æquales demptis lateralibus.

I I I.

Sicut ex diuiſione diametri vngularis ſub quauis ratione, ſuperficies vngulares planis interceptæ quæ normaliter ad diametrum per puncta diuiſionum ducuntur ſeſe habent ſecundùm rationes in diametro factas:

ita

ita etiam partes ſuperficierum ſphæræ diuiſæ per circulos rectos ad axem eandem rationem obtinent quæ inter ſegmenta axis facta eſt.

IV.

Vt eſt diameter circuli ad ſemiperimetrum eiuſdem, ita quoque eſt ſphæræ ſuperficies ad cylindrum altitudinis quę æquatur perimetro circuli maximi: pari pacto vt diameter vngulæ eſt ad perimetrum ſemicircularem, ita eſt vngularis ſuperficies ad ſemicylindricam eiuſdem altitudinis.

V.

Quam rationem obtinet ſuperficies vnius ſphæræ ad alterius ſuperficiem, eandem ſeruant inter ſe proportionem vngulares ſuperficies, modò proportionales ſint baſes vngulares cum maximis circulis ſphærarum.

VI.

Quemadmodum ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt maximi circuli, ita & ſuperficies curua vngulæ cuius altitudo par eſt perimetro circuli qui baſis eſt vngulæ, quadrupla eſt eiuſdem circuli.

VII.

Sicut ſuperficies cylindri ſphæram ambientis ſeſquialtera eſt ſuperficiei ſphæræ, ita & priſmatis vngulam continentis, ea ſuperficies quæ curuam vngulæ ſuperficiem cingit, eiuſdem eſt ſeſquialtera.

VIII.

Quemadmodum ſphæræ ſuperficies æqualis eſt circulo cuius radius par eſt ſphæræ diametro: ita etiam vngula cuius altitudo par eſt diametro baſis, æquatur quadrato cuius latus eſt diameter.

Alias ſymbolizationes non proſequor, ſufficit enim hæc inſinuaſſe Lectori, ne longior ſim quàm oportet. demonſtrationes verò harum proprietatum pleræq; à nobis in propoſitionibus præcedentibus traditæ ſunt: cæteræ vel ex noſtris, vel ex Archimede & Pappo non difficulter eruentur.

PARS

PARS QVINTA

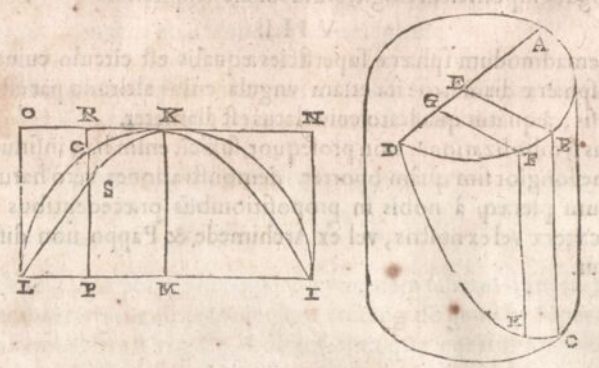
Vngulam parabolicam considerat; insuper cylindricam vngulam & sphæram confert cum parabola & cylindro parabolico.

PROPOSITIO LXXXI.

DAtasit vngula ABCD, altitudinem habens parem basis diametro, quam secent plana EBC, GFH ad diametrum recta. sit autem & parabola IKL, axem habens parem semidiametro ED, ordinatim verò subtensam IL, diametro AD æqualem, diuisa deinde IL, similiter in M & P, vt AD est in E & G, ducantur MK, PS ad IL orthogonę.

Dico totam vngulam ABCD esse ad segmentum EBCHFG, vt parabola IKL est ad segmentum MKSP: item totam vngulam esse ad segmentum GFHD, sicut parabola est ad segmentum PSL.

Demonstratio.



a 118. *Dust.* b *Schol. 19. huius.*

CVm parabola IKL habeat basim diametro AD, & axem semidiametro ED æqualia, hæc ducta in suum axem, hoc est in ED, vel EB, æquabitur [a] semicirculo ducto in seipsum, hoc est vngulæ [b] ABCD: item segmentum MK, SP ductum in eandem altitudinem; æquabitur segmento semicirculari EBFG ducto in seipsum, hoc est segmento vngulari EBCHFG. Atqui solida parabolica orta ex ductu parabolæ IKL, & segmenti MKSP, in communem altitudinem axeos, sunt vt bases, hoc est vt parabola IKL ad segmentum MKSP. ergo etiam vngula ABCD, est ad segmentum suum EBCHFG, vt parabola IKL ad segmentum MKSP. Quod erat demonstrandum.

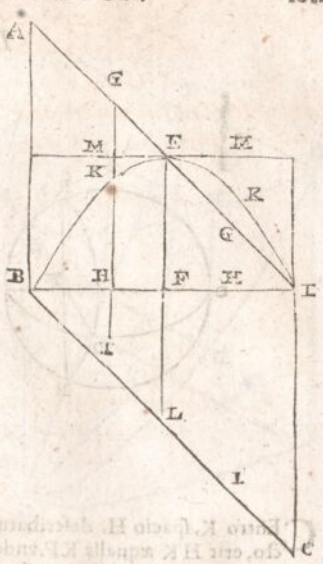
Alterius partis eadem est demonstratio.

PROPOSITIO LXXXII.

SIt triangulum isosceles rectãgulum ABD cum altero simili & æquali BDC subalternè positum. Diuisâq; bifariam BD in F, positâque EF

FE quæ æquidiſtet AB, deſcribatur parabola BED cuius axis ſit EF.

Dico magnitudinem ortam ex ductu GH, in HI æquari cylindro parabolico altitudinis EF & baſeos BED.



Demonſtratio.

DVcãtur parallelę MEM quidem ad BD, & GMKHI ad AB, ſiue EFL. Vt BD ad DC, ſic BH ad HI. ſed ex hypotheſi BD, DC æquantur. ergo & BH, HI æquales ſunt: pari argumẽto pares ſunt HD, HG, rectangulum igitur BHD eſt rectangulum GHI. ſimiliter EF, ipſi FD, & FL ipſi BF æqualis eſt; rectangulum igitur BFD, eſt rectangulum EFL. quia autem BF, FD ex hypotheſi æquantur, erunt etiam EF, FL æquales. rectangulum igitur EFL, (hoc eſt BFD) idem eſt cum quadrato EF. Iam verò cùm rectangulũ BHD ſit ad rectangulum [a] BFD vt KH ad EF, etiam rectangulum GHI erit ad quadratum EF, vt KH ad EF. ſed quam rationem habet HK ad FE, eandem [b] habet rectangulum MHK ad rectangulum EFL, ſiue quadratum EF. Igitur quam rationem habet rectangulum GHI ad quadratum EF, eandem quoque obtinet rectangulum MHK ad EF quadratum. ergo rectangula GHI, MHK æqualia ſunt. ſimiliter oſtendam ductis quotcunque lineis alijs parallelis ſingula ſemper rectangula GHI æquari ſingulis rectangulis MHK. Quare magnitudo nata ex ductu trianguli ABD in BDC, [c] æquatur cylindro parabolico qui conſtat baſi BED, & altitudine EF. Quod demonſtrare oportuit.

[a] 47 parab.

[b] 1. Sexti.

[c] 46. duſtin.

Corollarium.

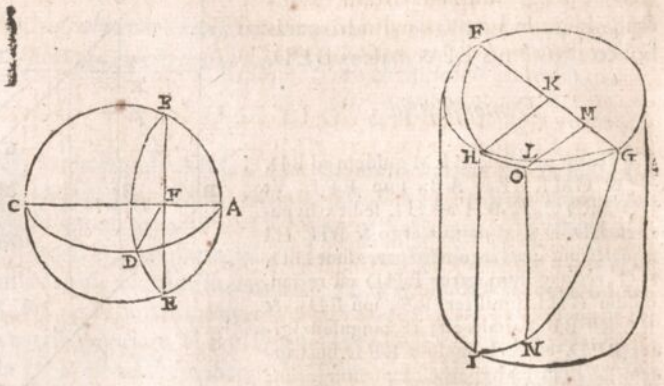
EX hac propoſitione conſequens eſt vt quæuis pars parabolæ parallelis intercepta ſub altitudine EF formet quantitatem æqualem magnitudini quæ fit ex ſegmentis triangularibus in ſe inuicem ductis, quæ illis ijſdem parallelis intercipiuntur quibus parabolæ pars fuit clauſa.

PROPOSITIO LXXXIII.

DAta ſit ſphæra ABCE, ſecta plano BDE ad axem AC recto. Deſcribatur deinde quæuis parabola FHG, cuius axis HK ſit par lateri recto, & ordinatim poſita ſit FKG: quæ ſimiliter ſecetur in M, vt axis ſphæræ ſectus eſt in F: & per M, ducatur ML parallela axi.

Dico ſphæram ABDC ſecundùm eandem proportionem diuiſam eſſe circulo BDE, ſecundùm quam diuiſa eſt parabola FHLG rectâ LM.

Demonſtratio.



CEntro K, ſpacio H, deſcribatur ſemicirculus, quia axis HK æquatur lateri recto, erit HK æqualis KF. vnde ſemicirculus tranſibit per F, & G. ſuper hoc ſemicirculo vt baſi intelligatur fieri vngula FHIG, à cylindro recto abſciſſa quæ altitudinem parem habeat diametro baſeos FG: productâque ML in O, ſecetur vngula plano per MO ducto. Oſtenſum enim [a] eſt partem vngularem FHOMN ad reſiduam, eam rationem obtinere quam parabolæ FHLM ſegmentum, ad partem LMG: ſed vt vngulæ pars ad vngulæ partem, ita quoque ſegmentum [b] ſphæræ ad ſphæræ ſegmentum; igitur eam ſortiuntur partes ſphæræ inter ſe rationem quam partes parabolæ habent inter ſe. Quod fuit demonſtrandum.

a 81. huius.

b 77. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

EX his aliter quàm Archimedes prop. 4. lib. 2. de ſphæra & cylindro ſpheram ſecundùm datam rationem diuidemus, hunc in modum.

PArabolam FHG, cuius axis HK, par ordinatim poſitæ FK, per diametrum ML ſeca in data ratione: vtque ſecta FG in M, ita axem ſphæræ ſeca in F. planum ductum per F rectum ad axem, ſphæram ſecundùm datam rationem partietur; vt patet ex propoſitione iam demonſtratâ.

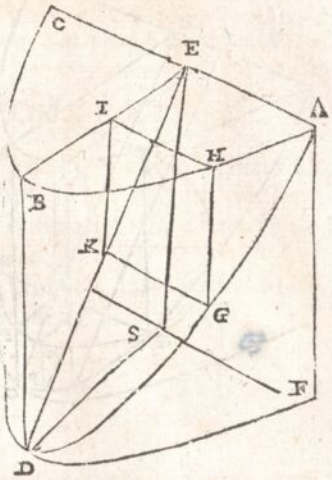
PROPOSITIO LXXXV.

CYlindrus parabolicus, (cuius axis EP, baſis parabola ABC, axis baſeos BE, ordinatim ad axem poſita AEC,) ſecetur plano per AC, exhibente in cylindri ſuperficie lineam AGD.

Dico lineam AGD eſſe parabolam.

Demon-

Demonſtratio.



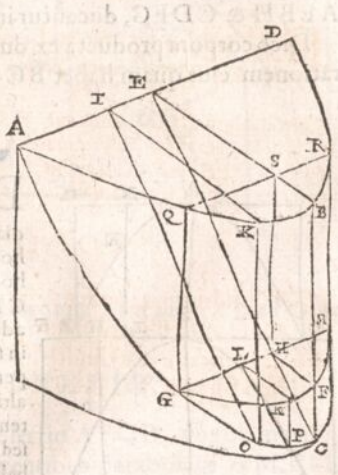
DVcatur recta ED, & ſume in axe EB, quoduis punctum I, à quo ductâ ordinatim IH, quę proinde parallela erit ad AE, ex H in cylindri ſuperficie ponatur recta HG, quam quia axi ES æquidiſtat, patet etiam rectę AF æquidiſtare. Quoniam igitur IH, HG æquidiſtant EA, AF, erunt plana [a] IHG, FAE parallela: quæ quoniam ſecat planum EAD, erunt [b] communes ſectiones AE, KG parallelæ. ſunt autem & HI, AE parallelæ. ergo etiam GK, HI parallelę. Deinde quoniam parallela plana FAES, IHGK ſecat planum BESD, erunt communes ſectiones IK, ES parallelę: ſed etiam HG ad axem ES, eſt parallela. ergo IK, HG parallelæ. Ergo GH, IK parallelogrammum eſt. ergo HI, GK æquales. His demonſtratis hunc in modum concludemus propoſitũ. ducatur in cylindri ſuperficie recta BD, erit hæc parallela axi ES, ac proinde etiam ad IK erit parallela. Igitur ED eſt ad KD, vt EB, ad IB, hoc eſt, [c] vt quadratum AE ad quadratum HI, hoc eſt vt quadratum AE, ad quadratum GK. ergo [d] AGD parabola eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 15. vndec.
b 16. vndec.
c 1. parab.
d Ibid.

PROPOSITIO LXXXVI.

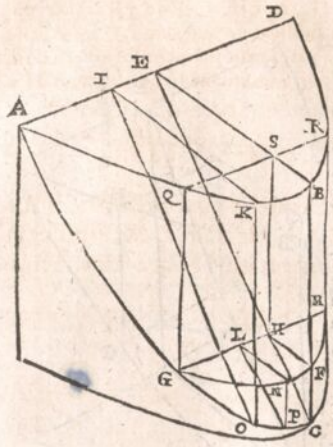
CYlindrus parabolicus rectus ABCD (cuius baſis ABD, & baſeos axis EB, ordinatim verò poſita AED) ſecetur primò ſectione per AD exhibente parabolicam vngulam FAGCBD, & altera ſectione GFM quæ æquidiſtet baſi ABD.

Dico vngulam totam AGCBD ad partem reſciſſam GFCM, quintuplicatam eius habere rationem quam habet AD, ad GM.



Demonſtratio.

DIuidantur proportionaliter rectæ AD, GM in quibuſuis punctis I & L, & erigantur diametri IK, LN; & ſectiones fiant ſecundùm lineas EB, IK, & HF, LN exhibentes in ſuperficie cylindrica rectas lineas BC, KO, & FC, NP. Iungantur denique EC, IO & HC, LP. Quoniam plana IKO, EBC parallela ſecat planum ACD, erunt communes ſectiones IO, EC parallelæ. pari argumento parallelæ ſunt HC, LP; & ſimilia erunt triangula EBC, IKO & HFC, LNP cùm tam anguli BEC, KIO quàm anguli EBC, IKO. item tam anguli FHC, NLP quàm HFC, LNP æquales ſint. Deinde quia rectæ AD, GM ſimiliter ex conſtr. ſunt diuiſæ, erit rectangulum AID ad rectangulũ AED,



a 47. parab.

b 241. parab.

c Primâ parab.

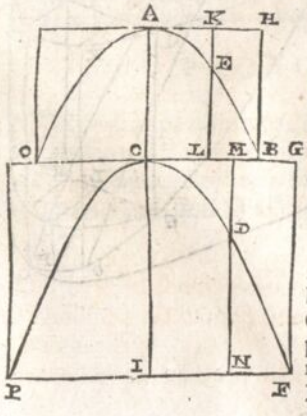
vt rectangulũ GLM ad rectangulum GHM, ergo [a] & IK est ad EB, vt LN ad HF. Deinde ob triangulorum similitudinem, OK est ad CB, vt IK ad EB, hoc est vt LN ad HF, hoc est vt NP ad FC. Igitur vngula ABCD ad vngulam GFCM, rationem habet compositam ex ratione basis ABD ad basim GFM, & ex altitudine BC ad altitudinem FC, quoniam omnes partes basis ABD ad omnes partes basis GFM, hoc est pars basis AKI ad GNL, vel IKBE ad LNFH, eandem rationem habent quam tota parabola ABD ad parabolam GFM & altitudines omnes vngulæ ABCD ad altitudines vngulę GFCM, vt BC ad FC, vel KO ad NP. Sed ratio basis [b] ABD ad basim GFM, hoc est QBR, est triplicata rationis AD ad QR; & ratio BC ad FC, hoc est EB ad HF, hoc est SB, duplicata [c] est eius, quam habet AD ad QR. Igitur quoniam ratio triplicata AD ad QR, ducta in duplicatam eiusdem producit quintuplicatam, manifestũ est rationem vngulæ ABCD ad vngulam GFCM, quintuplicatam esse eius quam habet recta AD ad QR, hoc est AE ad HG, siue AD ad GM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXVII.

HAbeant parabolę ABC, CDF æquale latus rectum inseruiens axibus, positisq; contingentibus AH, CG, ponantur ordinatim BC & FI, & erectis FG, BH quę æquidistent axibus; mixtilineæ superficies AEBH & CDFG, ducantur in seipsas.

Dico corpora producta ex ductu illo habere inter se quintuplicatam rationem eius quam habet BC linea ad lineam FI.

Demonstratio.



d 47. de parab.

e Coroll 243. parab.

DIuidantur proportionaliter AH, CG in K & M, & constituantur KEL, MDN parallelæ diametris. erit igitur rectangulum FIP ad FNP, hoc est BCO ad BLO, vt linea [d] IC ad ND, hoc est CA ad LE. ergo vt AC, hoc est KL ad CI, hoc est MN, ita erit EL ad DN, vel KE ad MD. Igitur AHB ductum in se ad CGF, in se ductum, habet rationem compositam ex superficie HAEB ad superficiem GCDF, & ex altitudine HB ad GF altitudinem secundùm tenorem discursus facti præcedenti propositione. sed basis AEBH ad basim CDFG, triplicatam habet rationem eius quam habet linea AH ad CG, hoc est CB ad IF, (ostendimus [e] enim superficiem AEBH ad CDFG, eandem rationem habere quam parabola ABO ad parabolam FCP:) & ratio HB ad GF, hoc est AC ad CI, du-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1081] - 1024
PUBLIC DOMAIN

duplicata est rationis quam habet AH ad CG, hoc est CB ad IF, igitur cùm triplicata ratio BC ad FI, ducta in rationem duplicatam eiusdem BC ad FI, producat quintuplicatam rationem HA ad GC, patet rationem corporum ex ductu AEBH & CDFG, in seipsa esse quintuplicatam eius quam habet linea AH ad CG. Quod fuit demonstrandum.

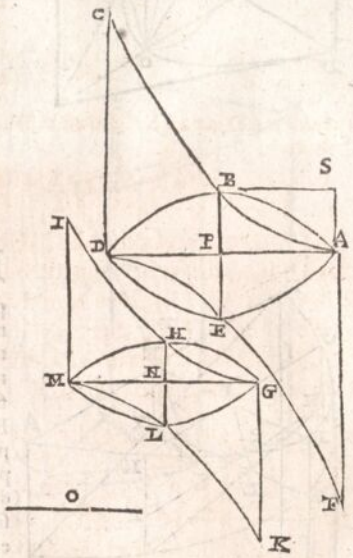
PROPOSITIO LXXXVIII.

Sint ABC, DEF parabolæ similes & æquales quarum vertices A & D, & axes AF, DC. Similiter parabolæ GHI & KLM, similes inter se & æquales quarum axes GK, MI: sit autem O linea latus rectum quod omnibus his parabolis ad axes inseruiat.

Dico ABCD ductum in ADEF ad GHIM, ductum in GMLK, quintuplicatam habere rationem eius quam habet AD ad GM.

Demonstratio.

Diuidantur AD, GM bifariam in punctis P & N, & positis rectis BPE & HNL, quæ æquidistent axibus describantur parabolæ per ABD, GHM habentes axes BP, HN. erit igitur ABCD ductum in ADEF, æquale [a] parabolæ ABD ductæ in se, & similiter GHIM ductum in MLKG, æquale parabolæ GHM in se ductę. habent autem parabolę ABD, GHM æquale latus rectum ad axes quod sic ostendo. Ducantur BS, SA ipsis PA, PB parallelæ vt AS ad SB, sic SB ad O, latus rectum, [b] sed BP, PA ipsis BS, SA sunt æquales. ergo vt BP ad PA, ita PA ad O, & vt HN ad NG, ita NG ad O, quoniam ex constructione parabolæ ABC, GHI commune habent latus rectum O. sed etiam lineæ BP, PA communes sunt parabolæ ABD & rectæ HN, NG communes quoque parabolæ GHM. Igitur commune habent etiam latus rectum O. Hoc posito; demonstratum est [c] ABD, ductum in se ad FHM in se ductum quintuplicatam habere rationem AD ad GM. Igitur etiam ABCD ductum in ADEF ad GHIM, ductum in GMLK, habet quintuplicatam rationem eius quam habet linea AD ad GM. Quod fuit demonstrandum.



a 100. Ducl.

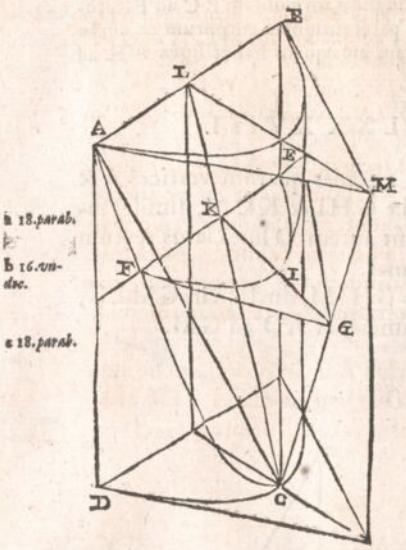
b 8. parab.

c Praced.

PROPOSITIO LXXXIX.

Sit ABCD cylindrus parabolicus, & sectio AFCB, vngulam parabolicam producens, ductisq; contingentibus parabolam AM, BM, demittatur recta MC, in qua assumpto quouis puncto G, per illud fiat sectio FGK parallela plano ABM.

Dico FG contingere parabolam FKI, sectione per G factâ productam.



a 18. parab.

b 16. vndec.

c 18. parab.

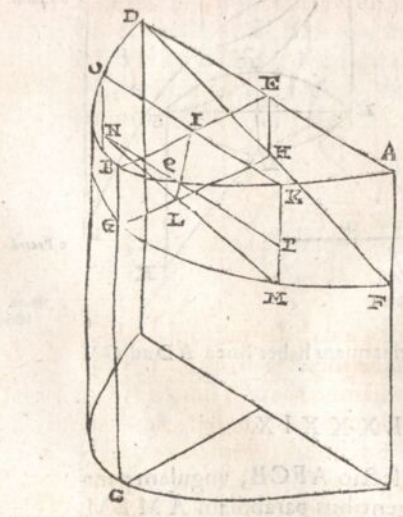
Demonſtratio.

BIſeca AB in L, ductâque LEM; per rectas LM, MGC ducatur planum faciens in plano FKG communem ſectionẽ KIG, & in plano ACB ſectionem LKC, in ſuperficie autem cylindrica rectam EIC. Quoniam AM ex conſtructione parabolam AEB contingit in A, ergo [a] LE, EM æquales ſunt lineæ. cùm ergo planum FKG æquidiſtet AMB, erit quoque GK [b] æquidiſtans LM. ergo & KI æqualis IH, cùm triangulum LMC, ſimile ſit KGC triangulo & LE ad EM, vt KI ad IG, quare [c] etiam GF parabolam FKI contingit in F. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XC.

POnatur cylindrus parabolicus rectus ABCD ſectus quacunque ſectione per rectam DF in plano DAF poſitam, exhibente ſectionem FGD.

Dico FGD eſſe parabolam.



d 10. vndec.

Demonſtratio.

DIuiſa bifariam AD in E, ſit EB diameter parabolæ ABD, per quam ponatur planum parallelum ad AF, exhibens communes interſectiones EH, HG, BG. Deinde ſtatuatur IK æquidiſtans EA, erit IK ordinatim poſita ad diametrum EB, ſecundùm IK: fiat ſectio æquidiſtans AF, occurrens plano FGD ſecundùm rectam MN, quæ proinde parallela erit rectę DF per 16. 11. exhibens præterea communes interſectiones cum cylindri ſuperficie KM, ON parallelas interſe; poſita igitur ex N recta NP, quæ æquidiſtet OK, erit OKP parallelogrammum, ideoque PN, æqualis eſt KO, & quia bifariam diuiſa eſt OK in I, diuidetur quoque PN, bifariam in Q per IL, communem interſectionem planorum EBG, & OKM quæ IL æquidiſtat KM: ac proinde etiam MN bifariam diuiſa eſt in L, eſt verò & FD biſecta in H.

Deinde quoniam cylindrus ex hypot. rectus eſt, erunt anguli FAD, MKO hoc eſt MPN, recti. rurſum quia AF, FD æquidiſtant PM, MN, [d] anguli AFD, PMN pares erunt, triangula ergo DAF, NPM æquiangula ſunt. Ergo vt AD ad PN, ſic FD ad MN. ergo quadratum AD eſt ad quadratum PN, hoc eſt KO, vt quadratum FD, ad quadratum MN. ſed

quadra-

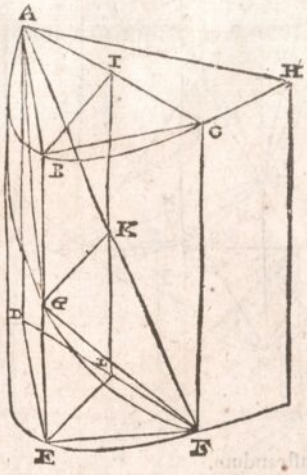
quadratum AD est ad quadratum KO, vt[a] EB ad BI, hoc est, vt HG ad LG. ergo quadratum FD est ad quadratum MN, vt HG ad LG. Quare cùm FD, MN bisectæ sint in H & L, erit quadratum FH ad quadratum ML, vt HG ad LG. ergo FMGD parabola est. Quod erat demonstrandum. [a] 1. parab.

PROPOSITIO XCI.

CYlindri recti parabolici basim ABH secet quæuis AC, secundùm quam & rectam AD facta sectione ACF, erectaque ex I puncto, quo diuiditur AC bifariam diametro IB, ponatur planum per IB parallelum rectæ AD, exhibens BE rectam in superficie cylindri, quâ bisfecta in G, ponatur per G & AF lineam, planum AGF; & ponantur plana per ABE, & CBE quæ exhibeant communes intersectiones AG, GF, DE, EF.

Dico corpus habens basim ACF, & hædris ABG, BCFG, inclusum, æquale esse corpori quod fit sub basi ADF, clausum planis AGED & GEF: siue totum prisma ACFDEB, plano AGF bisecari.

Demonstratio.



QVoniam planum IBE parallelum AD secat bifariam AC in I, secabit quoque DF in L bifariam, quæ parallela est rectæ AC & consequenter diuidet bifariam rectã AF in puncto K, sed ex constructione planum AGF diuidit rectam quoque BE bifariam in G, parallelogrammum igitur IBGK æquale est parallelogrammo KGEL. Quare cùm pyramides IBGKA, KGELF æquales habeant bases, & altitudines item pares sint, quod planum IE æquidistet rectis AD, CF & bisecet rectas AC, DF pyramides æquales erunt. sed etiam totum prisma AILDEB æquatur toti ICFLEB. ergo & reliquum IBKGFC æquatur reliquo KGELDA. quibus si addas æquales illas pyramides, erit solidum ACFGB par solido ADFGE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCII.

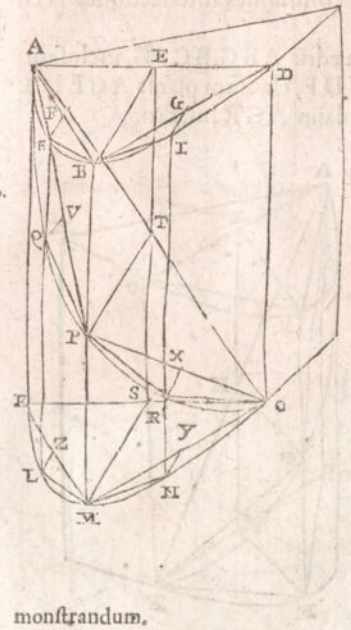
SIt denuo cylindrus parabolicus rectus cuius basis parabola ABC; ductâ deinde quauis AD ponatur eius diameter EB, & iunctis AB, BD, bisecentur AB & BD in F & G, & diametri harum sint FH, GI ducantur AH, HB, BI, ID, per rectas tandem AD, AB, BD, & AH, HB, BI, ID, plana ponantur exhibentia in cylindri superficie rectas lineas AK, HL, BM, IN, DO; in plano autem KMO sectiones faciant KO, KM, MO, KL, LM, MN, NO. rursum per rectas EB, FH, GI ducantur parallela lateri AK, plana quæ faciant in plano KMO, sectiones SM, ZL, YN; in planis verò ADOK, ABMK, DBMO sectiones ES, FZ, GY: ductâ deniq; diagonali AO fiat sectio per AO: quæ diuidat

uidat B M bifariam in P, & producat communes sectiones A O, A V P, V Q, P Q, P X O, X R, P R, O R, T P.

His positis demonstrauimus in precedenti prisma inscriptum toti frusto cylindrico A B D O M K, cuius aduersa plana sunt triangula A B D, K M O, bisecari plano A P O.

Dico igitur ab eodem plano A P O bifariam quoque diuidi aggregata prismatum quæ residuis frusti cylindrici segmentis inscribuntur, hoc est solidum A F B G D I H A Q R O X P V A, æquari solido A V P X O R Q A K L N O Y M Z K A.

Demonstratio.



a Per 140. parab.

QVoniam A E æqualis est E D, hoc est S O, & E S æquidistat A K. erit A T æqualis T O, est autem P B æqualis P M: ex cõstructione; igitur parallelogrammum est E B P T quemadmodum & figura P T S M. quia verò segmenta æqualia sunt A H B, & B I D, hoc est K L M, M N O, & G I, F H diametri diuidunt rectas A B, B D bifariam in F & G, [a] erit triangulum A H B, æquale triangulo B I D, hoc est triangulo M N O. quare cùm etiam sit altitudo B P æqualis altitudini M P, ex constructione; pars prismatis habens basim triangulum A H B, & altitudinem B P æquatur parti habenti basim triangulum M N O, & altitudinem M P. sed etiam totum prisma habens eandem basim triangulum A H B, & altitudinem B M, æquale est prismati super basi triangulari M N O, & altitudine B M; igitur A V P Q M Z K L residuum cuius basis est triangulũ A V P Q, æquatur P X O R B G D I, alteri residuo cuius basis est triangulum P X O R. totum igitur solidum A F B G D I H A Q R O X P V A, æquatur solido toti A V P X O R Q A K L N O Y M Z K A. Quod erat demonstrandum.

Corollarium primum.

QVod si subtensis A H, H B, B I, I D, bifariam rursum diuisis per diametros inscribantur segmentis parabolę residuis noua rursum triangula, atque ita procedatur in infinitum: actisque per singula latera planis inscribantur residuis cylindri parabolici segmentis prismata alia, eodem discursu demonstrabimus, plano eodem illo A P O, bifariam semper diuidi aggregata prismatica.

Corollarium secundum.

QVare consequenter quoties planum A P O diuidit lineam B M bifariam, rectè inferri poterit cylindricum corpus parabolicum bifariam in partes æquales diuisum esse ex eo quod in infinitum per constructionem præscriptam inscribi possint vtrisque æquales quantitates quæ semper plus dimidij residuorum auferant; vnde per ea quæ de progressionibus dicta sunt, concluditur plano A P O bifariam diuisum esse cylindricum segmentum quod basi constat A B D & altitudine M B.

PRO-

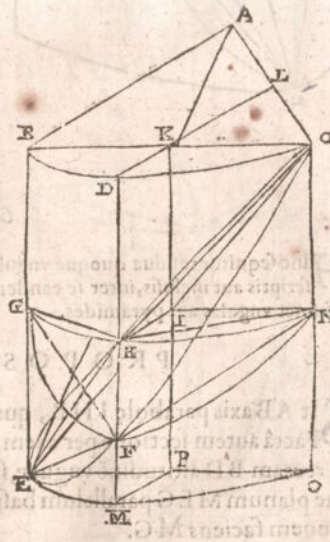
PROPOSITIO XCIII.

SIt AB axis parabolæ CDB, & vngula parabolica ABEC in ſuo cylindro ACOEB; poſito deinde ſecundùm rectam BE exiſtentem in ſuperficie cylindri plano CBEO, exhibente in plano parabolico AEC, quod vngulam terminat communem interſectionem CE, in baſi verò cylindrica OME rectam OE; diuidatur CB bifariam in K, & per K planum pònatur parallelum plano ABE, ſecans ſuperficiem cylindri ſecundùm rectam DM parallelam BE, planum verò CBEO, ſecundùm rectam KP occurrentem lineę CE, in puncto I, (in quo ipſam KP bifariam diuidi patet, ſunt enim CK, PE æquales, & parallelæ, ac propterea vt PE ad CK, ſic PI ad IK) diuiſâ inſuper DM bifariam in H, per rectam CIE, & punctum H ſectio fiat, formans in ſuperficie cylindri lineam CHE, & ſumpto in recta DHM, puncto quouis F, per CE & F, age planum quod faciat in cylindri ſuperficie lineam CFE, ponaturque per I æquidiſtans rectę CB recta NIG, per quam & puncta H & F, agantur plana NHG, NFG.

Dico ſolidum planis CHE, CFE terminatum æquari magnitudini quæ clauditur planis NFG, NHG.

Demonſtratio.

IVngantur IH, IF, CH, CF, GH, GF, & NH, NF, EH, EF. quoniam planum LDM æquidiſtat rectis BE, CO, erunt binæ pyramides IHFN, IHFC, item binæ IHFG, IHFE æquales. duæ igitur IHFC, IHFE æquantur duabus IHFN, IHFG. Atque hoc ipſum demonſtrari poteſt de alijs quantitatibus quæ formari poſſunt per ſubdiuiſionem ſegmentorum CD, DB in duo æqualia ſegmenta parabolica, continuando eandem conſtructionem inſcriptionis qua vſi ſumus præſenti propoſitione & præcedenti: igitur per ea a quę demonſtrata ſunt libro de progreſſionibus Geometricis conſtat quantitatem vngularem NHFG æqualem eſſe magnitudini quæ continetur planis CHE, CFE. Quod fuit demonſtrandum.



a Per 116. de progreſſ.

PROPOSITIO XCIV.

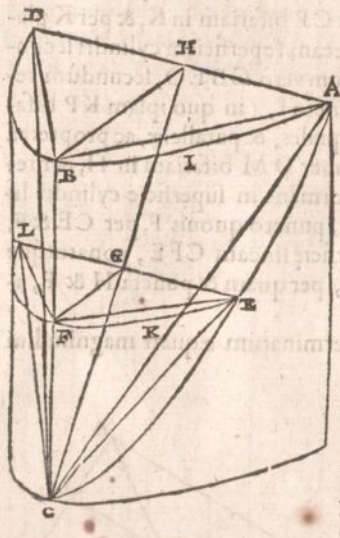
SEcetur vngula parabolica à recto cylindro decuſſata ABCD plano EFL quod baſi æquidiſtet; diuiſâ deinde AD bifariam in H, ponatur HB axis, ſecundùm quem fiat ſectio exhibens in cylindri ſuperficie rectam BC occurrentem ſectioni EFL, in puncto F. poſitis inſuper EF, FL, & AB, BD, plana conſtituantur ABC, DBC, & EFC, LFC quorum

rum communes interſectiones cum baſi vngulari ſint rectę AC, CD & CE, CL.

Dico pyramidem vngulæ ABCD inſcriptam ad pyramidem incluſam vngulę EFCL, eandem habere rationem quam vngula ABCD ad EFCL vngulam.

Demonſtratio.

a 86. huius.
b 127. parab.
c 140. parab.
d 141. parab.



OStenſum a eſt vngulam ABCD ad vngulam EFCL quintuplicatam habere rationem eius quam habet linea AH ad EG. ſed etiam pyramis ABCD ad pyramidem EFCL quintuplicatam habet rationē AH ad EG. quod ſic demonſtro: triangulum ABD quod eſt maximū eorū b quæ parabolę inſcribi poſſūt ad triangulum EFL, quod itē maximum eſt, eandem habet rationem, quam c parabola ABD ad EFL parabolam. ſed d parabola ABD ad EFL, triplicatā habet rationē AH ad EG. ergo & triangulum ABD ad triang. EFL, triplicatā habet rationē AH ad EG. Deinde BC altitudo pyramidis ADBC eſt ad FC altitudinem pyramidis EFLC, vt HC ad GC, hoc eſt vt quadratum AH ad quadratum EG, hoc eſt in duplicata rationis AH ad EG. Quare cùm ratio pyramidum ABDC, EFLC compoſita ſit ex ratione baſium ABD, EFL, & ratione altitudinum BC, FC, perſpicuum eſt eam eſſe quintuplicatam rationis AH ad EG, ac proinde eandem cum ratione vngularum quibus inſcribuntur. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

HInc ſequitur reſidua quoque vngularum quæ ſuperſunt ablatis pyramidibus inſcriptis aut incluſis, inter ſe eandem rationem continuare quæ reperta eſt inter ipſaſmet vngulas aut pyramides.

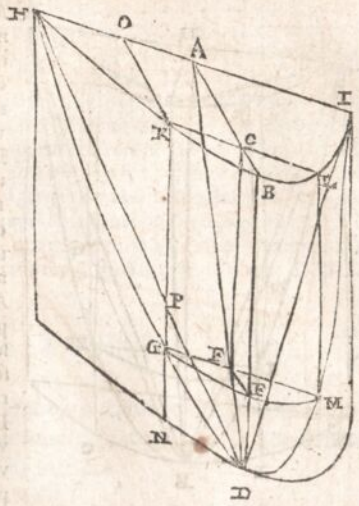
PROPOSITIO XCV.

SIt AB axis parabolę IHB, quæ baſis eſt vngulę parabolicæ ABDH. Factâ autem ſectione per axem AB, quę aſſignet in ſuperficie cylindrica rectam BD altitudinē vngulæ, ſit ED quarta pars rectę BD, ponaturque planum MEG parallelum baſi IBH, cum plano IDH ſectionem cōmunem faciens MG.

Dico totam vngulam IBDH ad vngulam MEDG, eam habere proportionem quam triginta duo ad vnum.

Demon-

Demonſtratio.



PEr 85. huius I M D G H, parabola eſt, diametrum habens AD. deinde quia parallela plana I B H, M E G ſecat planum parabolicum I M D G H, erunt [a] ſectiones I H, M G parallelæ. Quare cùm I H ſit ordinatim poſita ad AD, erit & M G. ducatur iam recta E F, erit hæc [b] parallela A B. ergo B D ad E D, vt A D ad F D, ſed A D eſt ad F D, in duplicata eius quam habet I A ad M F. ergo & ratio B D ad E D, hoc eſt ratio 4 ad 1. duplicata eſt rationis I A ad M F. Ergo ratio I A ad M F, eadem eſt cum ratione dupla, & inuertendo M F, eſt ad I A, vt 1 ad 2. continuetur ratio 1, ad 2, per ſex terminos nimirum 1. 2, 4, 8, 10, 32. Erit ergo ratio 1, ad 32, quintuplicata rationis 1, ad 2, hoc eſt rationis M F ad I A. Atqui ratio vngulę M D G ad vngulam I D H, quintuplicata [c] eſt rationis M F, ad I A. Ergo vngula M D G eſt ad vngulã I D H, vt 1, ad 32. Quod erat demonſtrandum.

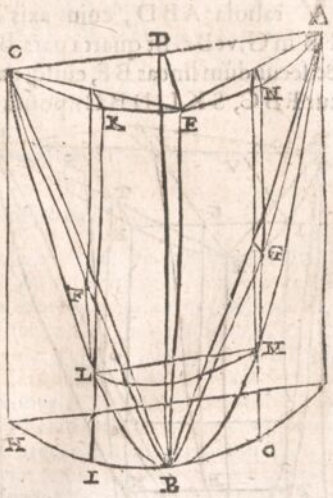
[a] 16. vndec.

[b] Ibid.

[c] 86. huius.

PROPOSITIO XCVI.

VNgula parabolici cylindri recti ſit diuiſa ſectione D E B, per axem parabolæ A E C exhibente in cylindri ſuperficie rectam E B, iunctiſque A E, C E fiant plana per A E B & C E B, occurrentia baſi vngulari A B C ſecundùm lineas A B, B C; deinde per has rectas A B, B C plana ponantur diuidentia lineas N O, K I determinatas in 92. huius bifariam, formãtia in cylindri ſuperficie lineas curuas A G B, B F C.

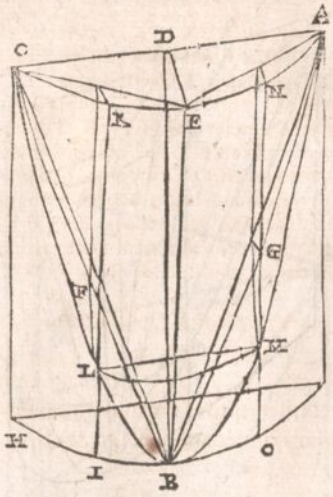


Dico vngulam totam A E B C maiorem eſſe pyramide incluſa A E B C, vnà cũ ſegmẽto cylindrico C E B I H C, magnitudinibus quæ ſuperficiebus comprehenduntur A G B, A M B; & C F B, C L B.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [d] ſegmentum cylindricum baſeos C K E, & altitudinis K I bifariam diuiſum eſſe plano B F C quod ducitur per punctum F in quo biſecatur recta K I, ſimiliter

[d] Coroll. 2. 92. huius.

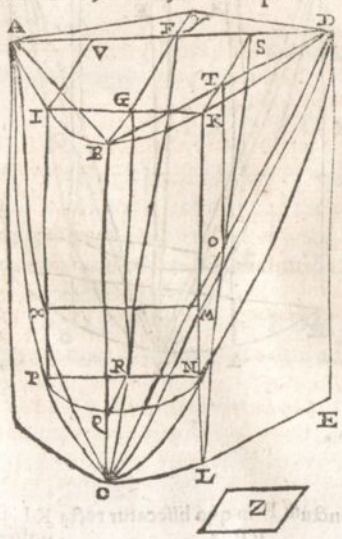


militer segmentum cylindricum super basi ANE, & altitudine EB bisectum esse plano AGB. Cùm igitur æqualia sint segmenta parabolica ANE, EKC, æqualia quoque sunt segmenta cylindrica communis altitudinis illis segmentis parabolicis insistentia; vnde pars AGBE, æqualis est parti BFCH, ac binæ partes AGBE, EBFC, toti segmento EBHC æquales sunt. Quare cùm segmēta vngularia AMBE, EBLC: quæ vnà cum pyramide vngulam constituunt, superent segmenta AGBE, EBFC magnitudinibus, quæ clauduntur planis AGB, AMB; BFC, BLC, (sunt enim illæ planis AGB, CFB, ab vngula resectæ) si segmentis vngularibus AMBE, EBLC, & segmento EBHC, addatur communis pyramis AECB; segmenta vngularia AMBE, EBLC vnà cum pyramide, (hoc est tota vngula) superabunt segmentum EBHC, vnà cum pyramide, magnitudinibus, quę superficiebus comprehendūtur AGB, AMB; & CFB, CLB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCVII.

VNgulæ ABCD ab cylindro parabolico recto abscissæ, basis sit parabola ABD, cuius axis BF & ordinatim posita AD, diuiso axe FB in G, vt BG sit quarta pars BF, per G ponatur IK ordinatim ad axem; & secundùm lineas BF, eiusq; parallelam KS, & tertiam BD plana agantur FBC, SKL, DBC: posita deinde diagonali CD occurrente communi intersectioni TO planorum DBC, SKL in O, erigatur recta OM quæ æquidistet TK, & per DC, OM sectio fiat, exhibebit illa [a] DMC parabolam. Tandem per KI planum, ponatur rectæ BC æquidistans, occurrens ACD sectioni secundùm rectam PN, agaturque PQN planum quod æquidistet basi ABD.

[a] 85. huius.



Dico vngulam PQCN æqualem esse magnitudini contentæ parabolicis planis DMC, DNC.

Demonstratio.

QVoniam FB diuisa est in G. vt GB quartæ parti ipsius FB æqualis existat, igitur AF dupla est rectę IG; nam ratio FB ad

FB ad GB, duplicata est FA ad IG. Vnde positâ IV quæ æquidistet BF, erit VS hoc est IK æqualis FD, ac proinde FB dupla ST, & ST dupla TK, est enim GB æqualis [a] TK, cùm segmenta parabolica sint æqualia IBK, BKD ob æquales lineas VS, FD. quia verò æquidistant rectę KN, TO & similiter ex constructione TK rectæ OM, erit KM æqualis TO, & quia BD dupla est TD, erit quoque BC hoc est KL, dupla KM; ac proinde KM æqualis ML: est autem ST dupla TK, igitur etiam KM dupla MN, hoc est NL: nam KM æqualis est ML, & KM dupla MN, igitur NL æqualis est MN. Igitur KL quadrupla est NL. est autem FB ad BG, vt BC ad CQ; quare BC, hoc est KL quadrupla est QC, hoc est NL, æquales igitur sunt lineæ QC, NL hoc est NM. Quare pyramis basim habens triangulum RQC, & altitudinem RN æquatur pyramidi habenti basim triangulũ OMN, & altitudinem DS, hoc est SF, hoc est RN. quare per propositionem quam paulò ante præmisimus tota vngula PQCN æquatur magnitudini incluse planis DMC, DNC. Quod demonstrare oportuit.

[a] Ex 25. & 118. de parab.

PROPOSITIO XCVIII.

IIsdem positis:

Dico vngulam totam ABCD superare pyramidem maximam vngulæ inscriptam simul cum cylindri segmento baseos BTKD, & altitudinis BC, magnitudine DMCND bis sumpta.

Demonstratio.

OStensum [b] est segmentum BKLD plano DMC, in duas æquales partes diuisum esse. quare BCMD dimidium est segmenti cylindrici BKLD, ac proinde æquale semisegmento cylindrico AXCB: est verò tota vngula æqualis pyramidi inscriptę [c] simul cum duobus semisegmentis AXCB, BCMD insuper adiunctis quãtitatibus quæ determinantur parabolis AXC, APC & DMC, DNC. Igitur excessus quo vngula excedit pyramidem inscriptam simul cum segmento BTKLD, siue duobus semisegmentis cylindricis AXCB, BCMD æqualis est duabus quantitatibus quæ intercipiuntur planis AXC, APC & DMC, DNC hoc est DMCND bis sumpto. Quod oportuit demonstrare.

[b] Coroll 2. 92. huius.

[c] 96. huius.

PROPOSITIO XCIX.

OPorteat vngulæ cylindri parabolici parallelepipedum æquale exhibere.

Constructio & demonstratio.

DEmonstratum est insuper proportionem vngulę PQCN ad vngulam ABCD esse [d] vnius ad triginta duo. Igitur vngula PQCM bis sumpta ad totam vngulam ABCD rationem continet duorum ad triginta duo: sed vngula PQCN, æquatur quantitatibus AXCPA vel DMCND, ablatis igitur magnitudinibus AXCPA & DMCND quæ singulæ æquales sunt vngulæ PQCN, ab vngula ABCD, remanebit quantitas quæ ad vngulam PQCN, rationem obtinebit quam triginta ad vnitatem: est autem vngula [e] ablatis quantitatibus AXCPA & DMCND, æqualis pyramidi inscriptę vngulæ, simul cum segmento cylindrico quod basi insistit BTDK sub altitudine BC: & nota quoque est proportio huius segmenti BKLD ad pyramidem inscriptam vngulæ, cùm superficies BKD parabolica [f] quadrata sit, igitur sit pyramis habens basim ABDγ, & altitudinẽ BC æqualis pyramidi inscriptę vngulæ ABCD, vnà cum segmento BTKLD, igitur pyramis AγDBC ad vngulam PQC rationem habet quam triginta ad vnum. igitur si trigesimæ parti baseos ABDγA sit æqualis Z, & sub Z & altitudine BC pyramis constituatur, erit hæc æqualis vngulæ PQCM. vnde exhibuimus pyramidem & consequenter parallelepipedum æquale vngulæ parabolicæ. Quod erat faciendum.

[d] 95. huius.

[e] 96. huius.

[f] 139. huius.

Corollarium.

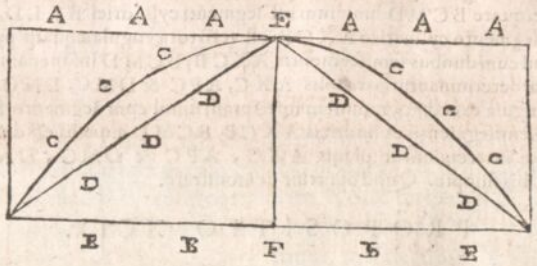
HInc manifesta est ratio dignoscendi proportionem inter vngulam parabolicam, & cylindrum parabolicum qui vngulam continet, vel inter vngulam & residuum quod cum vngula parabolica cylindrum perficit. ex libro etenim quem præmisimus de parabola methodus colligi potest reducendi cylindrum parabolicum ad parallelepipedum illi æquale: cum verò hac præsenti propositione praxis demonstrata sit etiam vngulam ad parallelepipedum reducendi, quod eidem sit æquale; qui horum parallelepipedorum rationem cognouerit, etiam proportiones cognitas habebit, quæ sunt inter cylindrum parabolicum eiusque vngulam.

PROPOSITIO C.

REctangulo AB inscripta sit parabola CB, cuius axis EF & ordinatim ad eundem posita BB, iungantur ED.

Dico corpus ex ductu superficiei AC in altitudinem EF (scilicet inuolucrum cylindri parabolici super basi parabolica BC & altitudine EF,) ad ipsum cylindrum parabolicum habere rationem vt vnum ad duo.

Demonstratio.



SVnt enim hæc corpora inter se vt bases, cùm communem habeant altitudinem: sed ostensum est[a] basim parabolicam CB duplam esse baseos CA; igitur patet veritas propositionis.

a Ex 137. parab.

PROPOSITIO CI.

SIt ABC quadratum cuius latere BA producto in E, vt AE sit dimidia AB, compleatur parallelogrammum BF; ductâ denique diagonali BD, ponatur quæuis GI parallela AB.

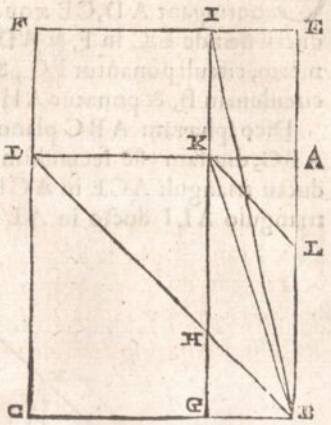
Dico pyramidem habentem altitudinem BG, & basim GHI rectangulum æqualem esse solidæ magnitudini quæ fit ex plano BGH, ducto in planum BAKH.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1091] - 1034
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.

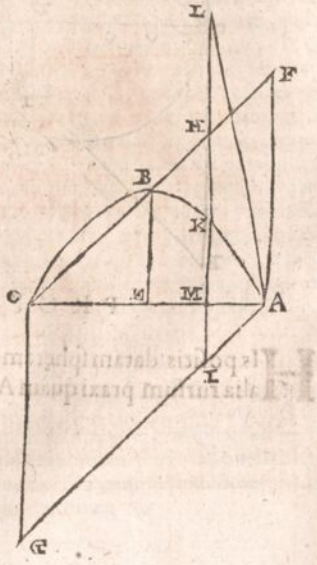
DVcantur BI, BK: deinde fiat KL parallela BH. ostensũ est libro de ductibus triangulũ BHG, ductum in triangulũ KBH, duplam magnitudinẽ producere eius quod producit BHG, ductum in LKB triangulum, at pyramis habens basim GHI rectangulum, & altitudinem BG continet prẽter pyramidem ex basi GHK, & altitudine BG insuper pyramidem ex basi GH, KI, & communi altitudine GB. Ostendendum igitur est corpus ex basi GH, KI, & altitudine BG æquari magnitudini quæ resultat ex ductu superficierum BHG & AKB inter se. nam reliquum est commune, scilicet pyramis ex rectangulo GHK, ducta in altitudinem BG; æqualitatem verò istam sic ostendo. Quoniam AB dupla est ex constructione rectæ KI. Igitur vt ostensum est in libro de ductibus BGH, ductum in AKB æquale producit solidum pyramidi quæ fit ex ductu BGH in IKB. Igitur patet pyramidem ex ductu BGH in BHI, hoc est pyramidem ex basi GHI & altitudine BG, æquari solido quod resultat ex ductu BGH in BHKA.



PROPOSITIO CII.

SIt parabola ABC habens axem BE, æqualem AE ordinatim positæ, & fiat AF orthogona AC, eidemq; æqualis. Ductâque AG quę æquidistet CF, ponatur CG parallela AF. Denique ponatur quæuis HI parallela BE, secans parabolam in K, productâ verò IH, vt HL sit æqualis BE dimidiæ nimirum ipsius AF, ponatur AL.

Dico pyramidem cuius basis AML rectangulum & altitudo AM, æqualem esse solidę magnitudini quæ basim habet AKM & altitudinem BE.



Demonstratio.

PRæcedenti propositione ostensum est pyramidem cuius basis est IML, siue AML rectangulum & altitudo AM, æquari solidæ magnitudini quę fit ex ductu plani AMI in planum AMHF. demonstratum quoque est in Corollario 82. huius, eidem solido quod fit ex ductu plani AMI in planum AMHF, æquari solidam magnitudinem quæ basim habet segmentum parabolicum AKM, altitudinem BE. Ergo pyramis cuius basis est rectangulum IML, altitudo AM, æquatur solidæ magnitudini cuius basis est AKM altitudo BE. Quod erat demonstrandum.

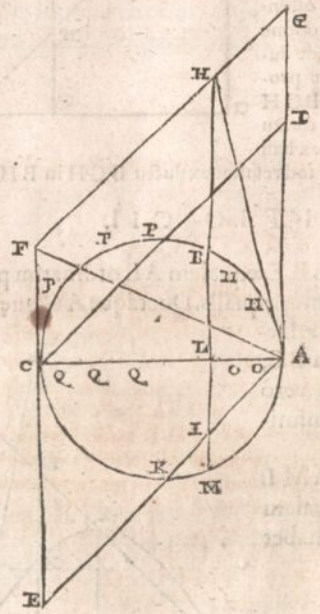
PRO-

PROPOSITIO CIII.

Circulum ABC maximum in sphæra ABCK, cuius diameter AC, contingant AD, CE æquales diametro & iungantur DC, AE. productis deinde EC in F, & AD in G, vt DG, FC sint æquales semidiametro, circuli ponantur FG, & FA. secet deinde HI æquidistans GA, circulum in B, & ponatur AH.

Dico sphæram ABC plano ducto per HBI, recto ad planum circuli ABC, diuisam esse secundùm eam rationem quam habet pyramis ex ductu trianguli ACE in ACF triangulum, ad pyramidem quæ fit ex triangulo ALI ducto in ALH triangulum.

Demonstratio.



Est enim ratio semicirculi ABC ducti in se ad partem ABL, in se ductam vt est sphæra ABCK, ad partē BAM, nā quadrata PQ & NO, eandem inter se rationem seruant quam circuli radijs PQ & NO descripti. quam sequelā propositione cētesimā vigesimā nonā huius exactiùs & vniuersaliter probabimus: sed habetur ex præcedētibus semicirculū ABC ductū in se ad partem ANBL, in se ductam, eam obtinere rationem quam ACE, ductum in ACF ad ALI, ductum in ALH, igitur etiam sphæra ex circumductu ABC, semicirculi circa axem AC ad partem sphæræ quæ fit ex circulatione ANBL super axe AL, eam habet rationem quam pyramis ex ACE in ACF producta, ad pyramidem ex ALI in ALH triangulum. Quod fuit demonstrandum.

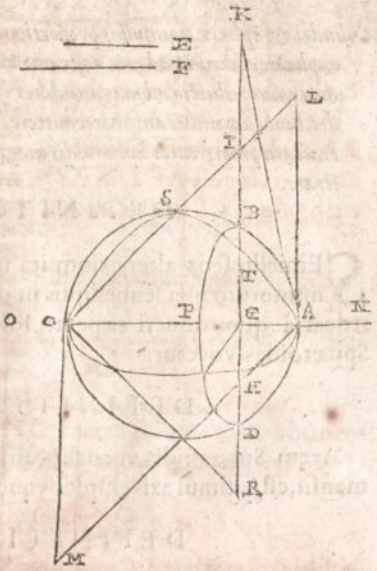
PROPOSITIO CIV.

His positis datam sphęram secundùm quamuis rationem diuidemus alia rursum praxi quàm Archimedes.

Con-

Constructio & demonstratio.

DEtur igitur sphæra ABCD diuidenda secundùm rationem quam habet E ad F, ducta sectio per axem AC exhibeat circulum ABC, producatur eius diameter vtrimque vt AN & CO, sint æquales semidiametro. Atque ita diuidatur AC in G, vt pyramis basim habens rectangulum AGC, altitudinem AG, sit ad pyramidem cuius basis rectangulum CGN, altitudo CG, in ratione datâ E ad F, hac ratione inuento in axe AC puncto G, fiat per G sectio recta ad axem AC. Dico partem sphæræ ABD ad residuum BCD, eam habere rationem quam habet E linea ad F. quod ex ijs quæ demonstrata sunt proximis propositionibus manifestè potest constare. erectis enim AL, CM perpendicularibus ad axem AC, quæ sint ipsi axi æquales, iungantur LC, AM & normaliter ad diametrum ponantur GK, GR æquales rectis GO, GN, connectantur item AK, CR. denique inscribatur circulo maximo parabola ASC axem habens semidiametro PS parem. Quoniam AL, AC sunt pares, etiam 4. 6. IG par est GC. Quare cùm tota GK par sit toti GO, erit & reliqua IK par reliquæ CO. sed CO est par semidiametro. ergo & IK semidiametro par est, adeoque dimidia est ipsius AL. pari modo ostendam HR esse dimidiam ipsius CM. præterea quoniam AG, CG ipsis HG, IG eodem discursu æquales sunt, rectangula AGO, CGN, sunt rectangula HGK, IGR, ac proinde pyramides, quarum bases sunt rectangula AGO, CGN, altitudines autem AG, CG æquantur pyramidibus quarum bases rectangula HGK, IGR, altitudines verò HG, IG. Quare cùm priores pyramides sint inter se vt E, F, erunt & posteriores vt E ad F. iam verò posteriores pyramides, quarum nempe bases sunt rectangula HGK, IGR, altitudines HG, IG, æquantur[a] solidis quorum bases sunt segmenta parabolæ ATG, EST G, altitudo verò communis SP. ergo solida illa parabolica sunt vt pyramides supradictæ, sed vt illa solida parabolica, ita sunt segmenta[b] vngularia quorum bases portiones semicirculi ABG, GBSC: Vt autem vngularia illa segmenta[c] ita sunt portiones sphæricæ BAD, BCD. ergo portiones sphæricæ sunt inter se vt supradictæ pyramides. Atqui has ostendi suprà, datam inter se seruare rationem E ad F. Ergo etiam sphæricæ portiones sunt inter se vt E ad F. Igitur sphæram diuisimus secundùm datam rationem E ad F. Quod fuerat requisitum.



a 102. huius.
b 8. huius.
c 77. huius.

Corollarium.

POsita igitur recta NO diuisa in quatuor partes æquales in A, P & C, si diuidatur recta NO, in G vt quadratum AG multiplicatum per GO ad quadratum GC, multiplicatum per GN proferat rationem datam E ad F, diuisa erit sphæra secundùm rationem datam. Archimedes quidem paulò aliter suam præparationem constituit, quam non minùs imperfectam reliquit, atque ea est quam nos exhibuimus, Lectori proinde non ingrata fore existimo, quæ hîc deduximus.

PARS SEXTA.

De Sphæroide.

Cylindri & Sphæræ nonnullas proportiones earumq; partium conati sumus hucvsque explicare; & quia ad rem nostram non parum facit materia Sphæroidica & Conoidica cuius reductio ad magnitudines cubicas à circuli quadratura maximè dependet, hinc eam intactam prætermittere nefas videtur: conabimur itaque hoc paruo tractatu proprietates Sphæroidis magis obuias ac necessarias inuestigare ac demonstrare.

DEFINITIO PRIMA.

SEmiellipseos alter axium ita intelligatur constitutus vt circa eum immotum ipsa semiellipsis in orbem agatur donec in eundem locum redeat à quo moueri cæperat; solidum ex hac reuolutione formatum Sphæroides vocetur.

DEFINITIO SECVNDA.

Axem Sphæroidis voco lineam quę in eiusdem formatione immota mansit; estq; simul axis ellipseos quę conoides genuit.

DEFINITIO TERTIA.

Centrum Sphęroideos dicatur punctum quod in formatione centrum fuit ellipseos, simulque est centrum omnium figurarum quæ per ipsum transeunt.

Scholion.

NOtatu dignum videtur duplex esse Sphæroides, vnum quod formatur super axe maiore ellipseos, alterum quod fit sub minore, quod quoniam lenticularis formæ figuram exhibet, à Geometris videtur prætermissum qui oualem figuram cum elliptica confundere consueuerunt: quæ igitur sequentibus propositionibus adducemus, vtrique sphæroidi, & ouali & lenticulari communia esse volumus.

DEFINITIO QVARTA.

Similes ellipses dicantur quę axes habent proportionales.

PROPOSITIO CV. LEMMA.

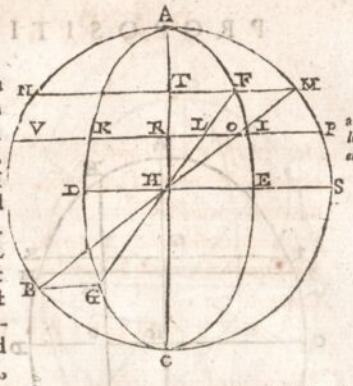
ELlipsim cuius axis AC contineat circulus ABC, contingens in A & C, ductâ deinde quouis FG, quę occurrat axi in H, ponatur quęcunque IK ordinatim ad axem AC secans FG in L. Denique per H ponatur HE ordinatim ad axem AC, & per F recta MT ordinatim ad AC, & ducatur MHB occurrens rectæ IK in O.

Dico SH quadratum ad EH quadratum eam rationem obtinere quam POV rectangulum ad ILK.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1095] - 1038
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.



VT MT ad FT, hoc eſt [a] vt PR ad IR, ita eſt OR ad LR, cùm igitur ſit vt totum PR ad totum IR, ita ablatum OR ad LR ablatum erit reſiduum PO ad reſiduum IL, vt totum PR ad totum IR, hoc eſt vt SH ad EH. Deinde iam oſtenſum eſt OR eſſe ad LR, vt PR ad IR, hoc eſt vt VR ad KR. ergo componendo VO eſt ad OR, vt KL ad LR: & permutando VO eſt ad KL, vt OR ad LR. hoc eſt vt MT ad FT, hoc eſt rurſum vt SH ad EH, ratio ergo quæ componitur ex rationibus PO ad IL, & VO ad KL, hoc eſt ratio rectangulorum POV, ILK, eſt duplicata rationis SH ad EH, hoc eſt, eadem cum ratione quadrati SH ad EH. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Vide Schol. 2. lem. prop. 4. ellipſ.*

PROPOSITIO CVI. LEMMA.

IIſdem poſitis:

Dico rectangulum FLG ad FHG rectangulum eam obtinere rationem quam rectangulum ILK ad EHD rectangulum.

Demonſtratio.

RAtio rectanguli FLG ad FHG rectangulum cõponitur ex ratione FL ad FH, hoc eſt MO ad MH, & ex ratione LG ad HG, hoc eſt OB ad HB, ſed ex iiſdem rationibus componitur ratio rectanguli MOB ad rectangulum MHB. ergo ratio rectangulorum FLG, FHG eadem eſt cum ratione rectangulorum MOB, MHB. ſed ratio rectangulorum MOB, MHB eadem eſt cum ratione POV ad SH quadratum, cùm tam rectangula [b] MOB, POV, quàm rectangulum MHB & quadratum SH ſint æqualia. igitur etiam ratio FLG ad FHG, eadem eſt cum ratione POV ad SH quadratum, ſed ratio [c] POV ad SH quadratum, eadem eſt cum ratione ILK ad HE quadratum. Igitur rectangulum FLG ad FHG, eſt vt ILK rectangulum ad rectangulum EHD. Quod erat demonſtrandum.

[b] *35. tertij.*

[c] *Per prac.*

PROPOSITIO CVII. LEMMA.

IIſdem poſitis:

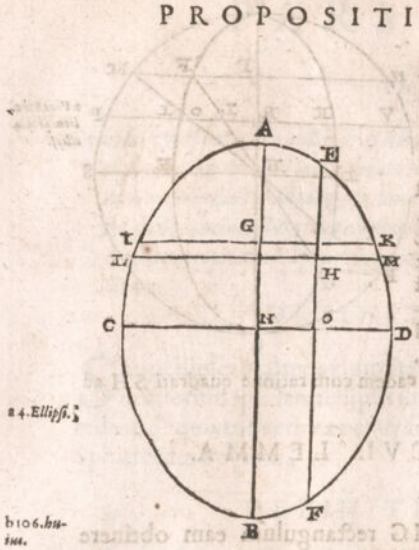
Dico FLG rectangulum ad rectangulum ILK eam habere rationem quam quadratum FH ad HE quadratum.

Demonſtratio.

ESt enim [d] rectangulum FLG ad FHG, vt ILK ad EHD. Igitur permutando vt FLG ad ILK, ita eſt FHG, hoc eſt FH quadratum ad EHD, hoc eſt quadratum EH.

[d] *Per prac. eod.*

PROPOSITIO CVIII. LEMMA.



84. Ellips.

b 106. huius.

SInt AB, CD axes elliptici; recta verò EF æquidistans axi secans CD in O, diuisa sit rursus in H, vt est diuisa AB in G, & ponantur IGK, LHM ordinatim ad axem.

Dico rectangulum LHM ad COD rectangulum eam habere rationem quã IG quadratum ad CN quadratum.

Demonstratio.

ESt enim quadratum IG ad CN quadratum, vt a AGB rectangulum ad rectangulum ANB, hoc est quoniam AB, EF, similiter sunt diuisæ, vt rectangulũ EHF ad EOF. sed vt EHF rectangulum ad EOF, ita est b LHM ad COD rectangulum. igitur vt LHM rectangulum ad rectangulum COD, ita est IG quadratum ad CN quadratum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIX.

OMnis sectio sphæroideos per axem facta exhibet ellipsin à qua sphæroides formatum est.

Demonstratio.

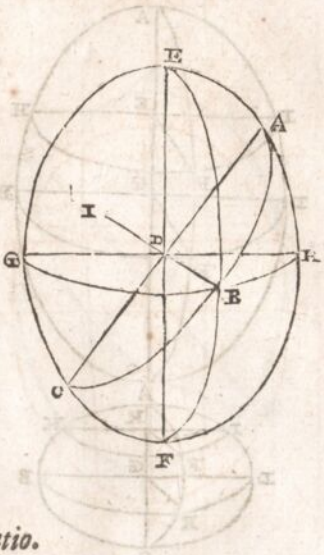
NOn indiget propositio vlteriore demonstratione quàm eâ quæ ex definitione prima potest assumi: cùm enim per ellipsis determinatæ circulationem super axe immoto sphæroides formetur, igitur in omni parte circulationis eadem ellipsis reperietur quæ sphæroides efformat.

PROPOSITIO CX.

OMnis sectio sphæroidis per centrum facta recta est ad aliquod planum ductum per axem sphæroideos.

Demon-

Demonſtratio.



SIt ABC ſectio per centrum ſphæroideos D obliqua ad axem EF, (nam de recta dubium eſſe non poteſt) erigatur igitur [a] ex D, centro normaliter ad planum ABC recta DI, & per ID, & axem EF planum EGF conſtituatur. Dico planum ABC rectum eſſe ad planum EDGF, quod per axem tranſit, nam ID cùm ſit ex conſtructione recta ad planum ABC, igitur [b] etiam planũ EDGF, per ipſam ductum rectum eſt ad planũ ABC. Quod erat propoſitum.

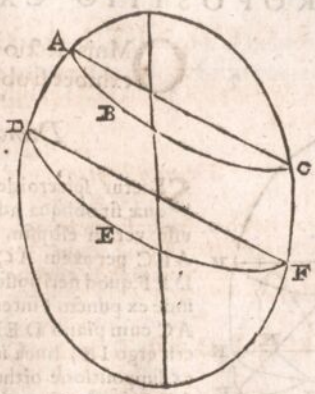
[a] Per 11. undecimi.

[b] 18 undecimi.

PROPOSITIO CXI.

OMnis ſectio ſphæroidis per centrum non tranſiens recta eſt ad aliquod planum quod per axem ſphæroideos duci poteſt.

Demonſtratio.

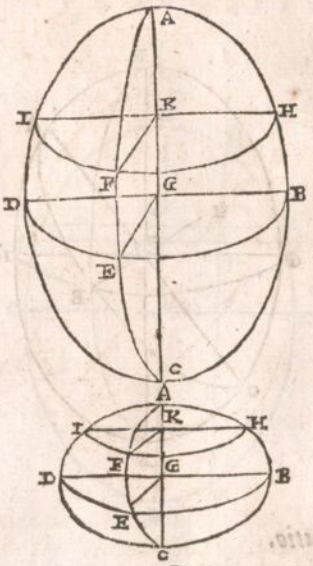


SIt ABC ſectio ſphæroidis non per centrum acta; ſit autem DEF, per centrum poſita æquidiſtans plano ABC. Quoniam oſtenſum eſt plano DEF aliquod per axem poſſe conſtitui quod eidẽ orthogonaliter inſiſtat, igitur plano ABC. æquidiſtanti idem planum orthogonum erit. fieri itaque poteſt, quod propoſitio aſſerit.

PROPOSITIO CXII.

OMnis ſectio ſphæroidis normalis ad axem qui in conſtructione ſphæroideos immotus fuit circulum exhibet.

Demonſtratio.



a 109. huius.

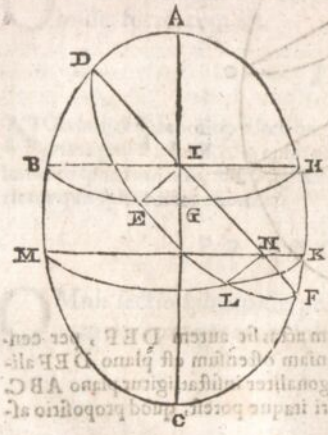
b Ibid.

Sit ſphæroides ABC cuius axem immotum AC diuidat ſectio HFI orthogonaliter. Dico illam circulum eſſe. fiat ſectio per AC axem ſcilicet, erit [a] hæc ellipſis illi ſimilis à qua ſpheroides productum eſt: ſit autem communis ſectio plani ABCD, & plani HFI recta HI, tandem per punctum F, quoduis in ſuperficie ſphæroidis aſſumptum, & axem AC, planum agatur AFC occurrens plano HFI, ſecundùm lineam KF. erit ſectio AFC ellipſis [b] ſimilis & æqualis ellipſi ABCD. Et quoniam ex hypotheſi axis AK rectus eſt plano HFI, defin. 3. vndecimi erunt KF, KH normales axi, ac proinde ordinatim poſitæ ad axem. Quoniam igitur ad idem punctum axeos communis ellipſium æqualium & ſimilium ſint ordinatim ductæ KH, KF erunt inter ſe æquales, eſt verò & IK æqualis KH. ergo KH, KF, KI æquales ſunt. ſectio igitur HFI circulus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXIII.

OMnis ſectio ſphæroideos ellipſim exhibet ſi obliqua eſt ad axem.

Demonſtratio.



c 111. huius.

d 112. huius.

e 106. huius.

SEcetur ſphæroides ABC ſectione DEF, quæ ſit obliqua ad axem AC. Dico illam eſſe veram ellipſin, intelligatur facta ſectio ABC per axem AC, quæ ſit recta ad planum DEF quod fieri poſſe demonſtratum eſt [c]. Deinde ex puncto I interſectionis plani per axem AC cum plano DEF erigatur normaliter IE, erit ergo IE, linea in plano DEF; quoniam ex ſuppoſitione orthogonaliter inſiſtit plano ABC, per rectam igitur IE planum agatur HEB, quod ſit rectum ad axem AC, aſſumpto deinde quouis N puncto in communi interſectione planorum ABC, DEF, erigatur NL parallela IE. erit hæc NL in plano DEF, quod eſt ex conſtructione orthogonum ad planum ABC. per NL, denique agatur planum KLM parallelum BEH. Quoniam [d] HEB, KLM circuli ſunt, igitur HIB rectangulum eſt ad KNM rectangulum, vt eſt quadratum IE ad NL quadratum. ſed vt [e] rectangulum HIB ad rectangulum KNM, ita eſt rectangulum DIF ad DNF rectangulum: igitur vt quadratum IE ad NL quadratum, ita eſt DIF rectangulum ad rectangulum DNF, quare vera ellipſis eſt ſectio DELF. Quod fuit demonſtrandum.

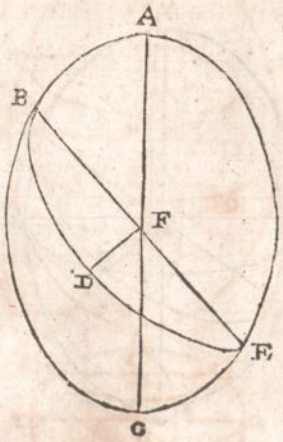
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1099] - 1042
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CXIV.

SPhæroides ſectum plano per axem ſecetur & altero plano per centrum priori ad angulos rectos.

Dico communem interſectionem horum planorum ab axe biſectam eſſe.



Demonſtratio.

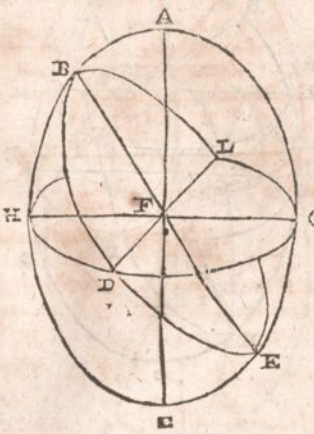
SIt planum ABC per axem AC, alterum quoque planum BDE, per centrum F conſtitutum priori ad rectos angulos, producat communem interſectionem BE. Dico illam in F biſectam eſſe. nám BFE linea eſt non minus in plano ABC quã ſit in plano BDE. ſed prout eſt in plano ABC elliptico tranſit per F centrum ellipſeos, ac proinde bifariam in F diuiſa eſt, igitur etiam prout eſt in plano BDE, biſecta eſt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXV.

PLano per centrum ſphæroidis poſito ſi aliud normaliter per axem iſti inſiſtat, communis interſectio exhibebit axem ſectionis quę per axem ſphæroideos non tranſit.

Demonſtratio.

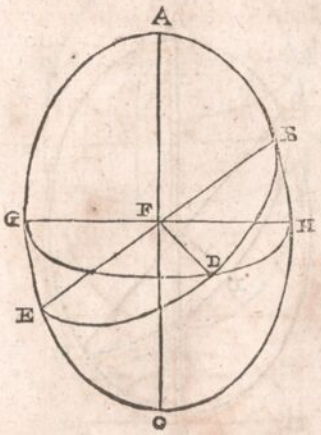
SEcetur ſphæroides ABC plano BDE, per centrum ſphæroideos F; agatur deinde planum per AC axem ſphæroidis quod normaliter plano BDE inſiſtat, exhibens communem interſectionem rectam BE. Dico BE axem eſſe ſectionis BDE. per centrum F ponatur planum GDH rectum ad axem AC, erit [a] hoc circulus, & quidem [b] plano ABC rectus. ſit autem DFL communis ſectio planorum GDH, BDE. quia verò ABC ellipſis eſt cuius F eſt centrum, ergo recta BF æqualis eſt FE, eſt autem etiam FD æqualis LF vtpote in circulo GDHL, per centrum acta, deinde quia plana BDE, GDH, recta ſunt plano ABC, erit [c] DFL communis eorum ſectio recta plano ABC. quare cùm DL ſit diuiſa bifariam in F, diuidatque BE bifariam ad angulos rectos, neceſſariò BE & LD, axes erunt ſectionis BDE, quæ vera ellipſis oſtenſa eſt.



[a] 11. huius.
[b] 18. vndec.
[c] 19. vndec.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.



OMnis linea in quouis plano posita quod per centrum sphęroideos transit bisecatur à centro sphæroidis.

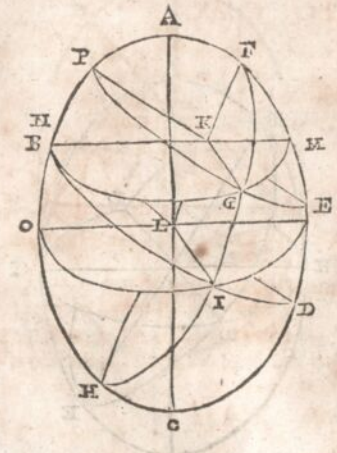
Demonstratio.

SIt sphæroides A B C sectum plano B D E, per centrum F, ducta verò sit in plano B D E recta B E per centrum F. Dico illam bisectam esse in puncto F. Agatur enim planum per A C axem sphæroideos A B C quod rectum sit ad planum B D E, erit B E horum planorum communis intersectio, quàm ex 114. huius perspicuum est bisectam esse in centro F. Quod erat propositum.

PROPOSITIO CXVII.

SEctio sectioni per axem factæ si æquidistans fuerit, eidem similis erit.

Demonstratio.



a 115. huius.

b Ibid.

c 106. huius

d 4. ellips.

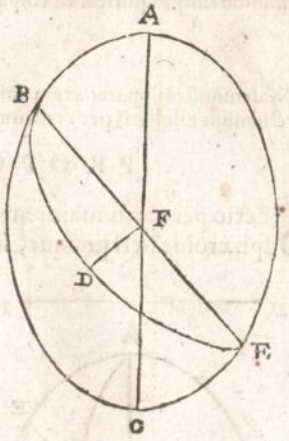
POnantur in sphæroide A B C duo plana parallela P G E, B I D. Vnum scilicet per centrum B I D, alterum eidem æquidistans. Dico illas sectiones inter se similes esse. Agatur planum A B C per axem sphæroideos rectum ad plana parallela, occurrens illis secundùm lineas P E, B D: erunt igitur P E, B D axes a sectionum per centrum sphæroideos & sectionis P G E, erigatur normaliter ad planum A B C recta L I, diuisâ deinde P E bifariam in K, agatur planum per K quod transeat per L I lineam nimirum F G I H, exhibens K G communem intersectionem cum plano P G E, cum plano autem per axem ducto A B C, intersectionem F H, quę c erit axis ellipseos F G H, erit itaque K G normalis ad P E, cùm sit æquidistans L I. vnde rectangulum F K H, est ad rectangulũ F L H vt d P K E rectangulum ad rectangulum B L D. sed vt rectangulum F K H ad F L H, ita est quadratum K G ad L I quadratum, cùm sectio F G H sit elliptica cuius axis est F H. Igitur vt rectangulum P K E ad B L D, ita est quadratum K G ad L I quadratum, igitur vt P E ad B D, ita est K G ad L I, sunt autem P E, K G & B D, L I axes ellipseon. Quare similes sunt hæ sectiones. quod demonstrare oportuit.

PRO-

PROPOSITIO CXVIII.

DAti ſphæroidis axem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt ſphæroides ABC, cuius axem oporteat exhibere. fiat ſectio quæcunque EDB. erit ea [a] aut circulus, aut ellipſis. Inuento huius ſectionis axe EB, per EB, fiat ſectio ABC ad angulos rectos ſectioni EDB. erit ea rurſus ellipſis. Inueniatur denique ſectionis ABC axis AC. Dico AC axem quoque fore ſphęroideos. cùm enim ſectio ABC ad angulos rectos conſtituta ſit ſectioni EDB tranſiens per axem EB, erit [b] in plano ABC axis ſphęroidis, ac proinde ABC ellipſis erit facta per axem à qua ſphęroides formatum eſt; axis ergo eſt AC ſphæroideos ABC. Quod erat demonſtrandum.

[a] 112. & 113. huius.

[b] Colligitur ex 115. huius.

PROPOSITIO CXIX.

DAti ſphæroideos centrum aſſignare.

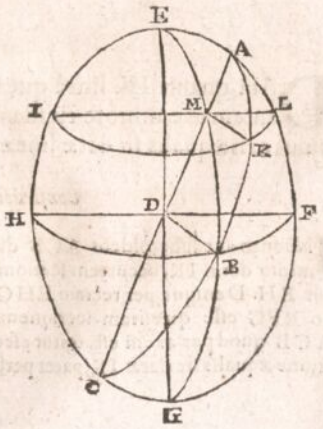
Conſtructio & demonſtratio.

INuentus axis AC diuidatur bifariam in F. Dico F, punctum eſſe quæſitum, eſt enim hoc ipſum centrum ellipſeos ex qua ſphæroides formatum eſt per quod omnis linea in ſphæroide poſita biſecatur.

PROPOSITIO CXX.

OMnis ſectio per centrum tranſiens obliquè ad axem, ellipſin exhibet diſſimilem illi quæ per axem facta eſt.

Demonſtratio.



SIt ſectio ABC per centrũ ſphæroideos D obliqua ad axem. Dico ABC eſſe ellipſim diſſimilem EFG ſectioni quæ facta eſt per axem.

Quod ABC ſit ellipſis patet ex 113. huius.

Quod autem ſimilis non ſit inclinata ſectio ABC ſectioni EFG ſiue EBG, ſic oſtendo. ſit EFG ſectio per axem ſphæroideos recta plano ABC (fieri enim id poteſt per 110.) per centrum autem fiat ſectio HBF ad axem EG recta, (per 18. vndecimi etiam recta erit plano EFG,) faciens cum plano ABC communem ſectionem BD; cum plano autem EFG ſectionẽ DF. quoniam igitur plana HBF, ABC ambo recta ſunt plano EFG, erit per 19. vndecimi communis eorum ſectio BD recta plano EFG, ac proinde per defin. 3. 11. etiam

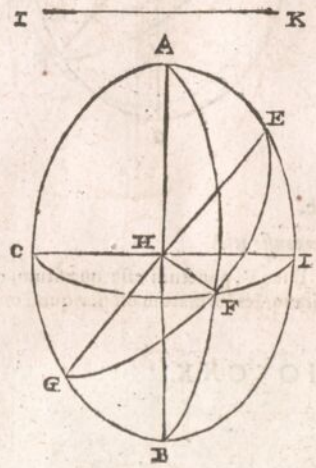
a 115. huius. recta ad AC, quæ axis a est sectionis ABC. ergo BD alter axis est sectionis ABC, similiter perspicuum est ED, DF axes esse ellipseos EFG. quoniam verò HBF b 111. huius. b circulus est, æquales sunt DF, DB. his positis propositum ita concluditur, non est axis ED ad axem DF, vt axis AD ad axem DB, hoc est DF. Quod tamen iuxta definitionem 3. requiritur ad ellipsium similitudinem.

Corollarium.

EX demonstratis patet axem minorem sphæroideos esse communem omnibus sectionibus ellipticis per centrum factis.

PROPOSITIO CXXI.

SEctio per axem maiorem maxima est omnium sectionum, quæ in sphæroide fieri possunt, sicut sectio per axem minorem minima.



Demonstratio.

SInt duo axes sphęroideos AB, CD & sectio per illos facta exhibeat ellipsim ACBD. Dico illam esse maximam omnium sectionum quæ in sphæroide fieri possunt. Erigatur HF normaliter ad planum ACB. Deinde per quamlibet lineam HE in plano ACB, & lineam HF sectio ponatur EFG. Dico illam esse minorem plano ACB. Per rectas AB, HF fiat sectio AFB, erit sectio AFB æqualis sectioni ACB, sed AFB sectio est maior sectione EFG cùm linea AH sit maior axis, ac proinde maior quauis diametro HE. Igitur etiam ACB maior est sectione EFG. Igitur sectio per axem maiorem maxima est omnium sectionũ quæ in sphæroide fieri possunt, minimam autem esse CFD manifestius est quàm vt demonstrari debeat.

PROPOSITIO CXXII.

DAtâ quauis IK lineâ quę sit minor axe maiore sphæroideos, maior autem axe minore eiusdem, oporteat ellipsin exhibere in sphæroide cuius axis æqualis sit datæ lineæ IK.

Constructio & demonstratio.

INuento axe sphęroideos ACB ducatur ex centro eiusdẽ circulus interuallo dimidio datæ IK, occurrens sectioni ACB per axem factæ in puncto E, & iungantur EH. Denique per rectam EHG, sectio fiat EFG, recta ad planum ACB. Dico EFG esse quæsitam sectionem. cùm enim sectio EFG, recta sit ad planum c 115. huius. ACB quod per axem est, igitur c sectionis EFG axis est EG. qui cùm ex constructione æqualis sit datæ IK, patet perfectum esse quod problema requirebat.

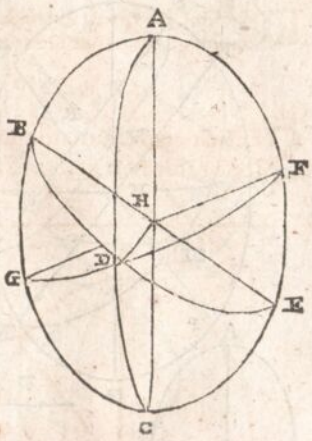
PRO-

PROPOSITIO CXXIII.

OMnes sectiones per centrum sphæroideos transeuntes eam interse sortiuntur rationem quam continent axes maiores inter se.

Demonstratio.

SInt sphæroideos A B C duæ sectiones B D E, F D G per centrum H ductę. Dico illas eam inter se habere rationem quam duo axes maiores inter se si sphæroides sit oblongum. agatur enim planum A B C per axem A C, quod rectum sit ad planum B D E exhibens communẽ intersectionem lineam B E. erit [a] igitur B E axis maior sectionis B D E ; recta verò H D quæ communis est intersectio plani B D E cum plano per axem A C, axis minor est [b] tum sectionis B D E tum A B C vel A D C. similiter communis intersectio plani F D G, cum plano quod per axem A C, fiet erit axis minor tum sectionis F D G, tum sectionis per axem factæ. cùm igitur sectiones per centrum omnes, eosdem habeant axes minores, eam inter se rationem habebunt quam axes maiores, cùm ellipsium ratio ex rationibus axium componatur.



a 115. huius.

b Patet ex demonstratione 120. huius.

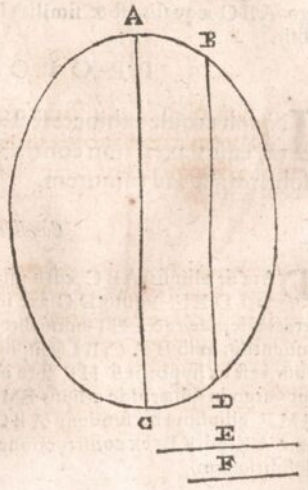
Aliter & breuiùs propositum sic concludo. per Corollarium 120. huius ellipses omnes per centrum transeuntes, axem minorem habent communem cum sphæroide. Quare cùm ratio ellipsium ex axium rationibus componatur, erunt ellipses per centrum transeuntes, vt axes maiores.

PROPOSITIO CXXIV.

IN dato sphæroide ellipsim exhibere, quæ ad ellipsim per axem rationem habeat datam minoris inæqualitatis sitq; illi æquidistans.

Constructio & demonstratio.

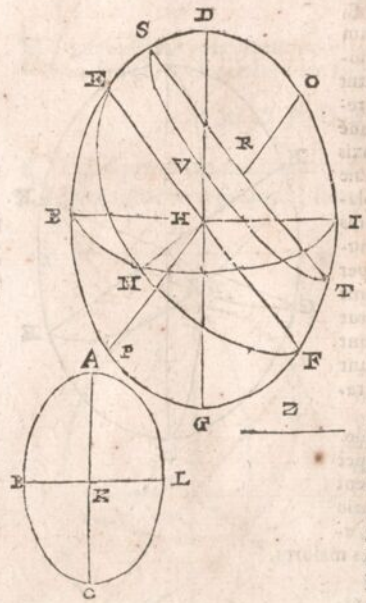
SIt sphæroides A B C cuius sectio per axem A B C. Oporteat autem exhibere ellipsim in ratione duplicata E ad F, quæ æquidistet axi A C. fiat vt E ad F, ita A C ad B D, in plano sectionis per axem A B C; sectioni autem A B C ad rectos angulos constituta sit quædam sectio per B D. dico hanc sectionem esse quæsitam. nam similis est sectioni quæ illi fieret parallela per axem sphæroideos A C, & consequenter similis sectioni A B C, atqui similes sectiones sunt in duplicata ratione laterum homologorum, hoc est A C ad B D, hoc est E ad F. Igitur exhibuimus quod petebatur.



PROPOSITIO CXXV.

DAtam ellipſim in dato ſphæroide exhibere quæ maiorem proportionem inter ſuos axes non habeat quam ellipſis quę ſit per axem ſphęroidis.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt DBGI ſectio facta per axem ſphæroideos & altera data ellipſis, cuius axis maior AC ad minorem LB, non maiorem habeat rationem quàm axis DG ad IB. Oporteat ellipſim exhibere in ſphæroide. Fiat axis minor ſphæroidis HB ad aliam Z, vt KB ad KA. Patet ex hypotheſi Z non fore maiorem axe HD. in ſphæroide igitur exhibeatur ellipſis, [a] cuius axis maior HE, ſit æqualis Z: huius [b] minor axis HM parerit HB. Quare erit HM ad HE, vt KB ad KA. Ergo per definit. 4. huius ellipſes EMF, ABC ſimiles ſunt. Poſitâ deinde OP diametro coniugatâ ipſi diametro EF, fiat vt EH, quadratum ad quadratum AK, ita rectangulum OHP ad ORP rectangulum, & per punctum R ſectio fiat SVT, quæ æquidiſtet ſectioni EMF. Dico SVT ſectionem æqualem & ſimilem eſſe ſectioni ABC. Eſt enim ABC ſimilis ſectioni EMF. Sed SVT etiam ſimilis eſt ſectioni EMF, igitur etiam ABC ſimilis eſt ſectioni SVT. Deinde ellipſis EMF ad ellipſim ABC, eam rationem habet, quam quadratum EH ad AK quadratum, hoc eſt ex conſtruct. quam OHP rectangulum ad ORP rectangulum, hoc eſt rurſum, quam quadratum EH ad SR, quadratum. ellipſis ergo ABC æqualis eſt & ſimilis ellipſi SVT. Igitur perfecimus quod poſtulatum fuit.

[a] 122. huius.
[b] Coroll. 120.

PROPOSITIO CXXVI.

IN ſphæroide exhibere ſectionem per centrum quæ ſimilis ſit ellipſi datæ cuius axes non contineant maiorem rationem quàm axis maior ſphæroideos ad minorem.

Conſtructio & demonſtratio.

DAta ſit ellipſis ABC cui ſimilem oporteat exhibere per centrum ſphæroideos dati DEF. Poſito DG axe in ſphęroide fiat ſectio DEG, cuius centrum H, erectâ deinde rectâ HI normaliter ad axem DG quæ erit minor axis ſphæroideos, inuentiſq; axibus AC, BL ellipſis datæ, fiat vt KB ad KA, ita IH ad HE, perſpicuum eſt ex hypotheſi HE fore minorem axe ſphæroideos maiori HD. exhibeatur [c] ergo in ſphæroide ellipſis EMF per centrum cuius maior axis ſit HE. Dico EMF ellipſim eſſe ſimilem ABC. nam axis EH ad HI, hoc eſt [d] HM, eſt vt axis AK ad KB, ex conſtructione, igitur ſimiles ſunt ellipſes per ſimilium ellipſeon definitionem.

[c] 121. huius.
[d] Coroll. 120. huius.

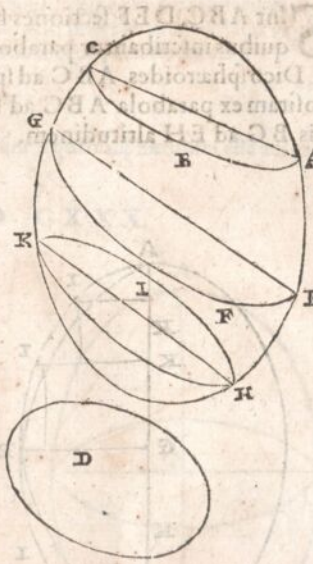
PRO-

PROPOSITIO CXXVII.

DAtæ ſectioni in ſphæroide alteram in eodem æqualem conſtituere, quæ datæ ellipſi ſit ſimilis, habenti inter ſuos axes non maiorem rationem quàm axes inter ſe habeant ſectionis per axem ſphęroidis.

Conſtructio & demonſtratio.

DAta ſit ſectio in ſphæroide ABC cui æqualem oporteat exhibere & ſimilem datæ D. fiat per præcedentem quædam ſectio per centrum ſphęroideos EFG ſimilis D. Deinde fiat [a] HIK ſectio parallela EFG, quę adipſam EFG ſectionem eam habeat rationem quam ABC ad ſectionem eandem EFG, eritque perfectum problema vt per ſe manifeſtum eſt.



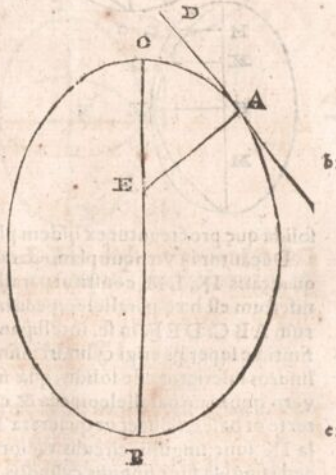
[a] 114. huius.

PROPOSITIO CXXVIII.

AD datum punctum in ſphæroidis ſuperficie contingens planum ponere.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt A punctum datum in ſuperficie ſphæroideos ABC, ad quod oporteat planum adponere quod ſphæroides contingat. inuento [b] axe CB, agatur per CB, & A punctum planum ABC, perque ea quæ libro de ellipſi docuimus, ponatur AD in plano ABC, contingens ſectionem in A, erectâ denique AE normali ex A ad rectam AD, quæ occurrat axi in E. fiat per AD planum rectum ad ſectionem ABC. Dico illud ſphæroides contingere in A. Quoniam EA linea recta eſt ad DA, & ſimul ex conſtructione planum per AD rectum ad planum ABC, igitur etiam EA recta eſt ad planum per AD poſitum. Cùm igitur linea EA breuiſſima ſit oſtenſa [c] ad ellipſim ABC, & ſimul breuiſſima ad planum orthogonum per AD, neceſſariò planũ per AD normaliter plano ABC inſiſtens, contingit ſphæroides in A. ergo præſtitimus quod fuerat requiſitum.



[b] 113. huius.

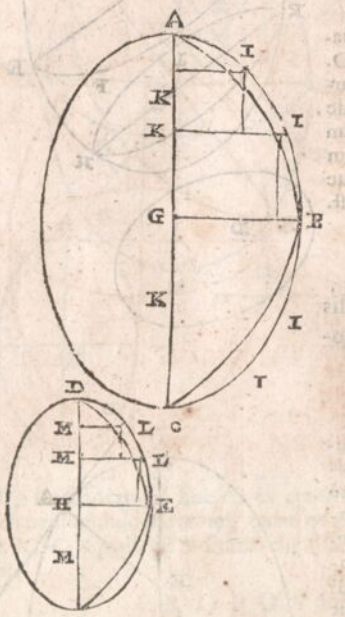
[c] 132. ellipſ.

PROPOSITIO CXXIX.

SInt ABC, DEF sectiones factæ per axes sphæroideon ABC, DEF, quibus inscribantur parabolę ABC, DEF.

Dico sphæroides ABC ad sphæroides DEF habere rationem compositam ex parabola ABC ad DEF parabolam, & ex ratione altitudinis BG ad EH altitudinem.

Demonstratio.



EST enim ellipticum planum ABC ductum in se ad DEF planum ellipticum in se ductum vt corpus habens basim ABC parabolam & altitudinem BG, ad solidum super basi DEF parabolica & altitudine EH, hæc enim illis æqualia esse facilè colligetur ex 204. libri de parabola, & 45. libri de ductibus, sed sicut se habet ABC, ellipticum in se ductum ad DEF, ellipticum ductum in se, ita quoque ABC ductum in orbem ad DEF, ellipticum ductum in orbem, cùm quadrata IK ad LM, eandem rationem contineant quam circuli radijs illis descripti. Igitur etiam sphæroides ABC ad DEF, eam habet rationem quam parabola ABC ducta in altitudinem BG, ad parabolam DEF ductam in altitudinem EH. Quod fuit demonstrandum.

Verùm quoniam argumentandi ratio sub finem huius demonstrationis vsurpata, non adeò fortasse plana omnibus videbitur, vt vlteriorem probationem non desiderent, adiungo lemma vniuersale huiusmodi.

Data sint quæuis plana ABC, DLF. Dico solida quæ fiunt ex planis illis in se ductis eandem inter se rationem habere, quam solida quę procreantur ex ijsdem planis ductis in orbem.

Ducantur in vtroque plano parallelæ infinitæ, IK, LM. & concipiantur super quadratis IK, LM constitui parallelepipeda infinita in altitudinibus KK, MM. manifestum est hæc parallelepipeda inscripta esse solidis, quæ fiunt ex ductibus planorum ABC, DEF, in se. intelligantur deinde radijs IK, & LM describi circuli infiniti, ac super ijs erigi cylindri infiniti in altitudinibus ijsdem KK, MM. patet hos cylindros inscriptos esse solidis, quæ fiunt ex planis ABC, DLF ductis in orbem. Iam verò quoniam parallelepipeda & cylindri habent communes altitudines, erunt inter se vt bases, scilicet vt quadrata IK ad circulos radiorum IK. sed quadrata singula IK sunt singulis circulis radiorum IK proportionalia. ergo etiam parallelepipeda singula sunt singulis cylindris proportionalia. Ergo 12. 5. vt vnum parallelepipedum IK ad primum cylindrum IK, ita omnia parallelepipeda ad omnes cylindros. pari argumento vt vnum parallelepipedum LM ad vnum cylindrum LM, ita omnia parallelepipeda LM ad omnes cylindros LM. sed vt vnum parallelepipedum IK, ad vnum cylindrum IK., ita vnum parallelepipedum LM ad vnum cylindrum LM, cùm horum quatuor solidorum ratio eadem sit quæ basium, quas patet esse proportionales. Ergo omnia parallelepipeda IK, sunt ad omnes cylindros IK, vt omnia parallelepipeda LM ad omnes cylindros LM, & permutando, &c. Vnde facile iam probabitur iuxta formam discursus libri de ductu plani in planum,

num. propoſitione 45. ſolida quę fiunt ex ductibus planorum ABC, DEF in ſeipſa ſolidis quæ procreantur ex ijſdem planis in orbem ductis eſſe proportionalia.

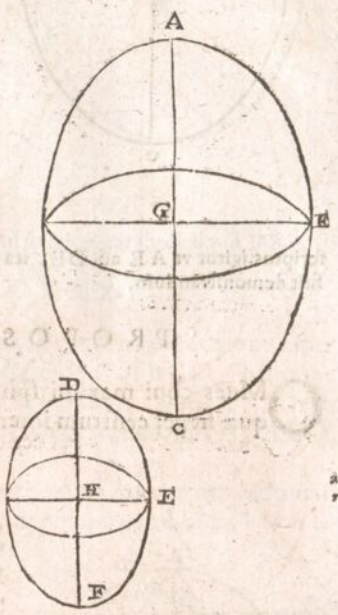
Hoc igitur vniuerſim demonſtratum deinceps aſſumemus in particularibus propoſitionum caſibus, non aliam afferentes probationem præter hanc, quod ſint vt quadrata parallelarum, ita circuli qui ijſdem parallelis vt radijs deſcribantur.

Corollarium.

EX propoſitione patet ſi altitudines BG, EH ſint æquales, ſphæroides eſſe ad ſphæroides vt parabola ad parabolam.

PROPOSITIO CXXX.

SPhæroides ad ſphæroides habet rationem compoſitam ex ratione ellipſeon quę per axes maiores fiunt, & ex ratione altitudinum axium minorum, vel ex ratione ellipſeon quæ per axes minores fiunt & altitudinum maiorum in ſphęroidibus lenticularibus.



Demonſtratio.

OStenſum eſt in præcedenti ſphæroides ad ſphæroides eam habere rationem quæ cõponitur ex ratione inſcriptæ parabolæ ſemiellipſi per axem AEC ad parabolam inſcriptam ſemiellipſi per axem DEF, & axis EG ad axem EH. eſt autem parabola inſcripta ad inſcriptam vt ſemiellipſis ad ſemiellipſin, ſunt[a] enim vt triangula maxima inſcripta. Igitur cùm rationes quoque EG, EH ſemiaxium minorum, communes ſint rationibus diametrorum parabolicarum inſcriptarum, reſtat vt ratio AEC, ſemiellipſeos ad ſemiellipſin DEF, ducta in rationem EG ad EH, eandem rationem exhibeat cum ratione parabolæ inſcriptæ ſemiellipſi AEC ad parabolam inſcriptam DEF, ducta in rationem EG ad EH. Cùm igitur illa eadem ſit cum ratione ſphæroidis ad ſphæroides; ergo etiam hæc eſt vt ſphæroides ad ſphæroides. Quod fuit demonſtrandum.

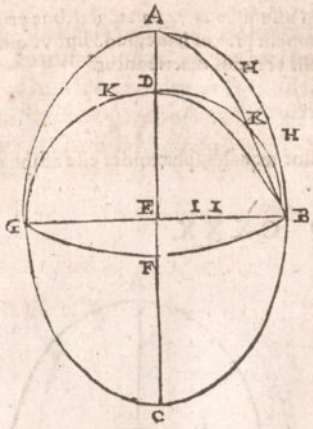
[a] 140. pa. rab.

PROPOSITIO CXXXI.

SPhæroides ad ſphæram inſcriptam eam obtinet rationem quæ inter axes reperitur.

Demon-

Demonſtratio.



a 111. huius.

b Colligitur ex Coroll. 129. huius.

c 140 parab.

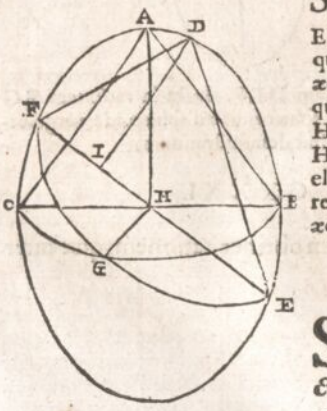
d 129. huius.

SPhæroides ABC ſeca per BE, axem minorem plano ad axem AC recto, ſectio BFG circulus [a] erit. inſcribatur ſuper circulo GFB, ſemiſphæra DBFG. ducto autem per axem AC plano, exhibeãtur ſectiones AHB, DKB, & inſcribatur cuique ſectioni ſua parabola ABE, DBE. Oſtenſum [b] eſt ABE, ductum in ſe ad DBE ductum in ſe eam habere rationem quam parabola inſcripta ABE ad inſcriptam DBE. ſed parabola ABE ad DBE parabolam, (quoniam axes BE communes ſunt) eſt [c] vt AE ad DE; igitur etiam ABE ellipticum ductum in ſe ad DBE, circulare ductum in ſe eſt vt AE ad DE, ſed vt ABE ellipticum ductum in ſe ad DBE, circulare ductum in ſe, ita eſt ABE, ellipticum ductum in orbem ad DBE circulare ductum in orbem; cùm [d] quadrata HI ad KI quadrata eam rationem contineant quam circuli radijs HI deſcripti ad circulos radijs KI deſcriptos. igitur vt AE ad DE, ita eſt ſphæroides ABE ad ſphæram DBE. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXII.

OMnes coni maximi ſphæroidi inſcripti inſiſtentes alicui ſectioni quæ fit per centrum inter ſe ſunt æquales.

Demonſtratio.



e Per Coroll prop. 45. & 44. f 15. ſexti. g 123. huius.

h 15. duodecim.

SInt duo maximi coni ABGC, DEGF inſcripti ſphæroidi, inſiſtentes ſectionibus BGC, EGF per centrum factis. Dico illos inter ſe æquales eſſe. triangulum per axem coni EDF eſt æquale triangulo per axem coni ABC, per ea quę libro de ellipſi demonſtrata [e] ſunt. igitur [f] eſt HC ad HF, vt reciprocè DI ad AH. ſed vt HC ad HF, ſic [g] elliptica baſis BGC ad baſim ellipticam EGF. ergo vt BGC ad EGF, ita reciprocè DI ad AH. ergo [h] coni EDF, BAC æquantur.

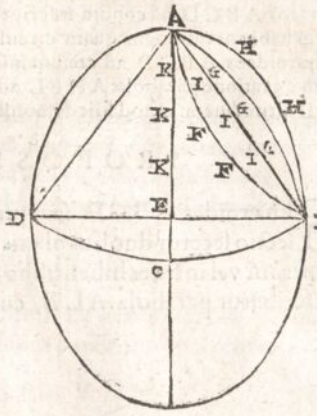
PROPOSITIO CXXXIII.

SIt conus ABCD ſphęroidi inſcriptus & per E centrum & verticem coni A ductum planum exhibeat triangulum ABD, cui inſcripta ſit parabola AFB verticem habens A, altera verò inſcripta ſit ellipſi AHBE cuius vertex B.

Dico

Dico conum inſcriptum ad ſphęroides eam habere rationem quam habet parabola AFBE ad ſpacium parabolicum AGBE.

Demonſtratio.



OStenſum eſt [a] quod AGBE ductum in altitudinem BE æquetur AHBE, ducto in ſe. prætereà demonſtratum eſt [b] AIBE in ſe ductum æquari AFBE ducto in BE, eſt autem BE altitudo communis. Igitur AHBE ductum in ſe ad AIBE, ductum in ſe, eſt vt parabola AGBE ad ſpacium parabolicum AFBE. ſed ſicut ſe habet AHBE ductum in ſe ad AIBE in ſe ductum, ita ſe habet ſphæroides ABCD ad conum AIBCD, [c] cùm quadrata HK ad quadrata IK, eandem rationem obtineant quam circuli radiorum HK ad circulos radiorum IK. Igitur ſphæroides ABCD ad inſcriptum conum eam habet rationem quam parabola AGBE ad ſpacium parabolicum AFBE.

a Colligitur ex 104. parab. & 45. de ductibus.

b Ex 67. parab. & 45. de ductibus.

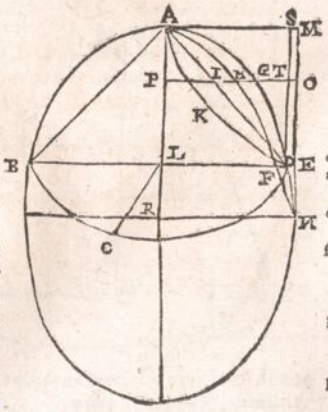
c Patet ex diſcurſu 129. huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

SEcetur ſphęroides ſectione ad axem rectâ exhibente circulum ſuper quo vt baſi inſcribatur conus parti ſphęroideos ABCD; poſitoque per axem plano ABN, ponantur AM, NM parallelæ axibus AR, RN & parabolę inſcribantur AHN, AKD parallelogrammis ARN, ALD, quarum vertices ſint N, & A.

Dico partem ſphæroideos ADCB, ad conum inſcriptum rationem habere compoſitam ex ratione quã habet ſuperficies parabolica FHAL, ad ſuperficiem parabolicam DKAL, & ex ratione quam habet altitudo AM ad altitudinem DL.

Demonſtratio.



DVcatur quæuis OP quæ æquidiſtet AM, oſtenſum eſt [d] proportionales eſſe lineas OP, GP, HP. ſimiliter ſi ex D puncto ponatur DS quæ ſit parallela NM, demonſtratum eſt [e] TP, IP, KP eſſe proportionales, quare AGDL ſuperficies in ſe ducta æquatur [f] ſolido quod habet baſim AHFL, & altitudinem AM. ſimiliter ſuperficies triangularis AIDL in ſe ducta pyramidem exhibebit æqualem [g] magnitudini cuius baſis eſt ſpacium parabolicum AKDL, & altitudo TP. ſed hæ magnitudines habent rationẽ cõpoſitã [h] ex ratione baſeos parabolicę AHFL ad parabolicã AKDL, & ex altitudine MA ad SA, ſiue OP ad TP. Ergo corpora illis æqualia, nimirum AGDL ductum in ſe, & AIDL in ſe

d 104. parab.

e 67. parab.

f 45. Duct.

g Ibid.

h 13. huius

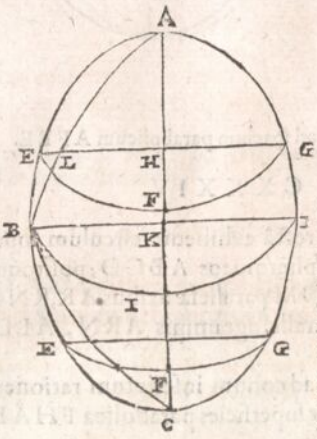
ductum habebunt rationem ex ijſdem compoſitam. ſed quam rationem habet AGDL ductum in ſe ad AIDL, in ſe ductum, eandem rationem habet pars ſphæroideos ABCD ad conum inſcriptum AIDCB; cùm quadrata GP, DL[a] eandem habeant rationem quam circuli radijs GP, DL deſcripti. Igitur etiam pars ſphæroideos ABCD ad conum inſcriptum AIDCB, habet rationem compoſitam ex ratione parabolæ AHFL ad AKDL, & ex altitudine OP ſeu AM ad DL altitudinem. Quod fuit demonſtrandum.

a *Ex diſcurſu 129. huius.*

PROPOSITIO CXXXV.

SPhæroides ABCD ſecetur per axem ſectione ABC; atque hęc ipſa ſectio ſecetur duobus planis parallelis, vno per centrum, altero ſupra centrum vel infra exhibentibus circulos DIB, GFE, in plano autẽ ABC deſcribatur parabola ALB, cuius vertex ſit B.

Dico ſegmentum ſphæroidicum ABID ad AEFG, ſegmentum ſphæroidicum eam obtinere rationem, quam ſuperficies ALBK ad ALH.



Demonſtratio.

ESt enim AEBK in ſe ductum ad AEH, ductum in ſe, vt ſuperficies ALBK ad ſuperficiem ALH parabolicam; quod oſtendetur eodem diſcurſu quo vſi ſumus in demonſtratione 133. huius. ſed vt AEBK ductum in ſe ad AEH, ductum in ſe, ita eſt AEBK ductum in orbem [b] ad AEH, in orbem ductum: cùm quadrata EH, BK eandem rationem ſeruent, quam circuli radijs EH, BK deſcripti. Igitur etiam ſphæroides AEBID ad partem AEFG, eandem rationem ſeruat, quam ALBK ſuperficies parabolica ad ſuperficiem ALH. Quod fuit demonſtrandum.

b *Vide 129. huius.*

PARS

PARS SEPTIMA.

De Conoide Parabolico.

Explicatâ Sphæroidis naturâ eiuſque proprietatibus, breui etiam compendio proſequi intendimus Conoidicas magnitudines, quarum duplex eſt differentia: aliæ etenim magnitudines oriuntur à ſectione parabolæ, aliæ ab hyperbolæ; quodque à parabolâ gignitur, conoides parabolicum appelletur: quod verò ab hyperbolâ, hyperbolicum.

DEFINITIO PRIMA.

COnoides parabolicum voco ſolidum ex ſemiparabolæ circulatione productum ſuper axe eiuſdem parabolę quieſcente.

DEFINITIO SECVNDA.

Axis conoidis parabolici linea eſt quę in formatione conoideos axis parabolę fuit, & ſecat omnes lineas baſi conoidis parallelas bifariam.

DEFINITIO TERTIA.

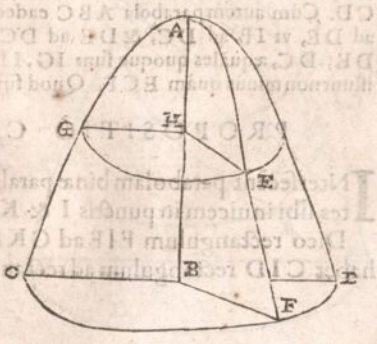
Figura conoidibus inſcripta vocetur maxima figurarum quę illis inſcribi poteſt.

EXPLICATIO.

CVm plurima triangula parabolę verbi gratiâ inſcribi poſſint, illud antonomaſticè dicatur inſcriptum quod maximum eſt triangulorum quæ parabolæ ſuper baſi inſcribi poſſunt. idem eſto de corporibus, quæ conoidibus inſcribuntur.

PROPOSITIO CXXXVI.

OMnis ſectio conoidis parabolici per rectam facta quę in formatione conoidis immobilis fuit parabolam generat.



Demonſtratio.

SIt igitur ſemiparabolæ ABC quæ conoides formauit ſua gyratione, axis AB: ſecundùm quem fiat ſectio ABF, aſſumãturq; in parabolæ ABC perimetro duo puncta G & C, ex quibus demittantur perpendiculares ad rectam AB, lineę GH, CB, & planum ACB voluatur eouſque in orbem donec peruenerit ad punctum E ſectionis AEF. igitur HG æqualis eſt HE, ſimiliter BC æqualis BF, cùm ſint eædem lineę ſolâ ſitus gyratione mutatæ. quare vt GH ad BC, ita eſt HE ad BF, & vt quadratum GH ad CB quadratum, ita eſt quadratum

dratum HE ad BF quadratum, est autem ex suppositione ABC parabola, ad cuius axem AB, ordinatim positæ sunt HG, BC; igitur vt quadratum HG ad BC quadratum, hoc est quadratum HE ad BF, ita linea AH ad AB lineam. a quare etiam AEF est parabola. Quod erat propositum.

a 1. *Parab.*

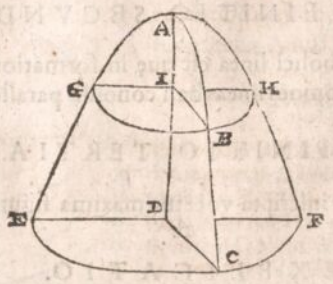
Corollarium.

NOn solùm constat ABF parabolam esse, sed eodem discursu patet parabolas ABF, ABC esse æquales ac similes, ac proinde latus rectum quod axi AB deseruit commune esse vtrique sectioni.

PROPOSITIO CXXXVII.

OMnis sectio conoidis parabolici ad axem conoidis recta circulum format.

Demonstratio.



EX parabolici conoidis definitione linea ED quæ basis est semiparabolæ ADE, formantis conoides, describit circulum ECF, & quia ED ordinatim est collocata ad axem AD, orthogonaliter illi insistit, posito igitur quouis plano ABC per axem AD, erit CD æqualis DE per Corollarium præcedens, cùm sit eadem parabola ABC cum ADE: erit insuper CD recta ad AD. acto deinde plano quocunque GBH quod æquidistet ECF, exhibens communes intersectiones IB, IH, planorum ABC, AGE & GBH. erunt normaliter erectæ, adeoque ordinatim positæ ad axem AI, lineæ IB & IG: quia b parallelæ sunt IG, DE, & IB, CD. Cùm autem parabola ABC eadem sit cum parabola AGE, hinc IG est ad DE, vt IB ad DC, & DE ad DC, vt GI ad IB: cùm autem æquales sint DE, DC, æquales quoque sunt IG, IB. puncta igitur GBH in semicirculo existunt non minùs quàm ECF. Quod fuit demonstrandum.

b 16. *Vndecim.*

PROPOSITIO CXXXVIII. LEMMA.

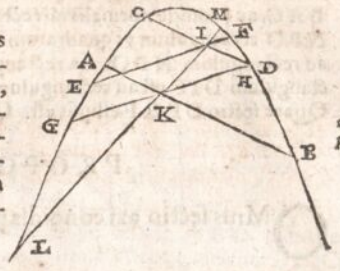
INtersecent parabolam binæ parallelę AB, CD & EF, GH occurrentes sibi inuicem in punctis I & K.

Dico rectangulum EIF ad GKH, eandem habere rationem quam habet CID rectangulum ad rectangulum AKB.

Demon-

Demonſtratio.

PEr puncta I & K, ponatur recta occurrens perimetro parabolæ in punctis LM. erit ergo rectangulum EIF ad GKH rectangulum, vt LIM ad LKM rectangulum, vt eſt oſtenſum lib. de parabola. a ſed eodem modo eſt rectangulum CID ad AKB, vt LIM ad rectangulum LKM. Igitur vt EIF rectangulum ad rectangulum GKH, ita CID ad AKB rectangulum.



a Prop. 49. parab.

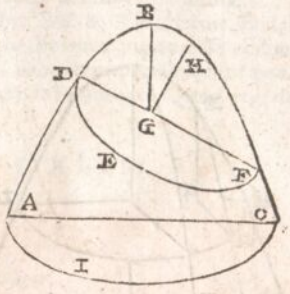
PROPOSITIO CXXXIX.

SEctum ſit conoides quouis plano obliquè ad baſim.

Dico per axem fieri poſſe ſectionem quæ recta ſit ad planum ductum.

Demonſtratio.

SIt conoides parabolicum ABC ſectum ſectione DEF obliquè ad baſim AIC, igitur axi occurret in aliquo puncto G, cùm ſectio DEF axi non æquidiſtet, erigatur ex G linea GH normaliter ad planum DEF, & per HG, & lineam GB planum ponatur: erit illud rectum ad DEF planum, cùm omnis ſectio per lineam GH b recta ſit ad planum DEF.



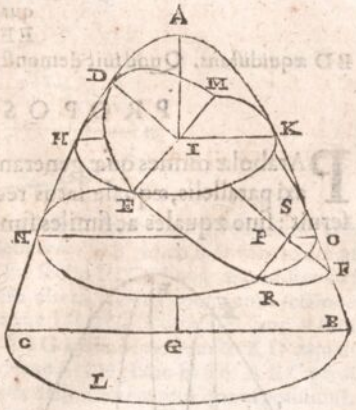
b 18. Vndec.

PROPOSITIO CXL.

OMnis ſectio conoidis parabolici ad axem obliqua ellipſim format.

Demonſtratio.

SIt conoides parabolicum ABC plano DEF, obliquè ſectum ad axem AG. Dico DEF ellipſim eſſe. Agatur enim per axem conoideos planum quod rectum ſit ad planum DEF, exhibens communem interſectionem DF, ex puncto verò I, quod commune eſt axi & lineę DF, erigatur normaliter IE ad planum ABC, quod factum fuit per axem rectum ad DEF planum, ponatur denique per IE planum HEK, quod æquidiſtet baſi CLB, faciens in planis BAC, DEF ſectiones KIH, EIM. Et quoniam IE recta eſt plano BAC, c perpendicularis eſt ad DF, KH. Igitur circulus eſt d ſectio HEK quare lineæ IK, IE, IH, IM æquales ſunt inter ſe. Tandem ponatur planum NRO parallelum HEK, occurrens plano DEF, ſecundùm communem interſectionem PR. Et plano BAC ſecundùm rectam



c Def. 3. 11.

d 137. huius.

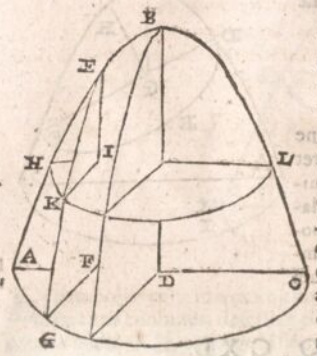
a 16. vndec. b 8. vndec. c Defin. 3. vndec. d 49. parab.

rectam OPN. erit denuo NRO circulus, & quia a PR parallela est ad IE, ac recta IE ex construct. normalis ad planum ABC, erit & recta PR b normalis ad planum BAC, ac proinde normalis ad rectas DF, c ON. Igitur rectangulum HIK est ad NPO rectangulum vt quadratum IE ad PR quadratum. sed vt rectangulum HIK ad rectangulum NPO, ita rectangulum DIF, ad rectangulum DPF. ergo rectangulum DIF est ad rectangulum DPF, vt quadratum IE ad quadratum PR. Quare sectio DERF ellipsis est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXLI.

OMnis sectio axi conoidis parabolici æquidistans parabolam exhibet.

Demonstratio.



ESto conoideos ABC, cuius axis BD, sectio EFG æquidistans BD. Dico sectionem EFG esse parabolam. agatur per axem BD planum CBA, quod rectum sit ad sectionem EFG, exhibens communem intersectionem EF. Deinde agatur aliud planum HKL quod æquidistet basi AGC, cuius communis intersectio cum plano EFG sit linea IK, linea verò FG sit communis eiusdem intersectio cum plano AGC. Quoniam plano ABC, plana EFG & HKL orthogonaliter insistunt, erit KI communis eorum sectio e recta plano ABC. similiter & FG recta est plano ABC. ergo rectangulum HIL æquale est quadrato IK; & rectangulum AFC quadrato FG est æquale. quia verò etiam ABC planum per axem BD positum est, parabola f est ABC sectio; demonstratum verò est libro de parabola g quod rectangulum quoque HIL ad AFC rectangulum eam rationem obtineat quam linea EI ad EF lineam, igitur etiam quadratum IK ad FG, quadratum, eam rationem habet quam linea EI ad EF lineam. quare h parabola est sectio EFG axi BD æquidistans. Quod fuit demonstrandum.

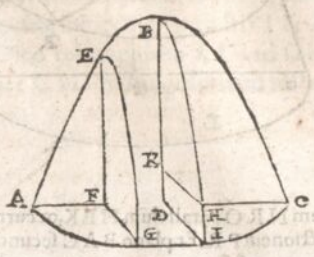
e 19. vndec.

f 136. huius g Pro. 44. parab.

h 1. parab.

PROPOSITIO CXLII.

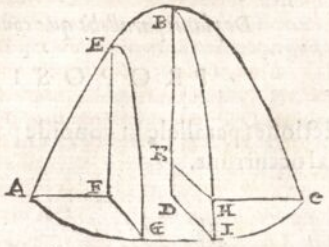
PArabolæ omnes quæ generantur in conoide parabolico sectionibus axi parallelis, æquale latus rectum habent quod omnium axibus inseruit: siue æquales ac similes sunt omnes parabolæ axi æquidistantes.



Demonstratio.

IN conoide ABC ponantur tres sectiones; altera per axem BD, scilicet ABC; reliquæ duæ eidem ad angulos rectos, vna quidem nempe GEF, parallela axi, altera verò DBI etiam per axem: facientes cum plano baseos communes sectiones FG, DI, quæ per 19. vndecimi nor-

normales erunt ad planum ABC, ac proinde per definit.3. vndec. normales ad AC. Per præcedentem EFG, BDI parabolæ ſunt & axes earũ, EF, BD. fiat rectæ EF æqualis BK, & ordinatim ponatur HK quę erit parallela DI, cùm ſit BDI parabola; igitur vt [a] BK ad BD, ita eſt quadratum HK ad DI quadratum. quia ſimiliter ABC parabola eſt, rectangulum [b] AFC ad ADC eſt, vt linea EF ad BD lineam, hoc eſt ex conſtructione vt BK ad BD. ſed vt rectangulum AFC ad rectangulum ADC, ita quadratum FG ad quadratum DI. (Cũ enim FG, DI ſint normales ad AC quadrata rectangulis ſunt æqualia.) Igitur FG quadratum eſt ad quadratum DI, vt linea BK ad BD lineam, hoc eſt KH quadratum ad DI quadratum. Igitur FG linea æqualis eſt lineæ KH. ſed & linea EF æqualis eſt ex conſtructione rectæ BK, igitur ſunt æquales & ſimiles parabolæ EFG & BKH. & æquale habent latus rectum quod axibus BK & EF inſeruit. Eodem diſcurſu oſtendam quamlibet aliam parabolam axi parallelam æqualem eſſe ac ſimilem parabolæ per axem. Omnes igitur parabolę axi conoideos parallelę ſunt æquales ac ſimiles, ſiue latus rectum axibus inſeruiens habent commune. Quod erat demonſtrandum.



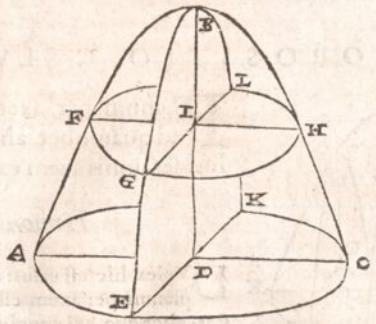
[a] 1. *parab.*

[b] 47. *parab.*

PROPOSITIO CXLIII.

DAti conoidis parabolici axem præbere.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt conoides parabolicum ABC cuius baſis AEC. Inuento centro baſeos D, ex eodem erigatur normaliter ad planum baſeos recta DB. Dico BD fore axem. aſſumpto enim quouis puncto I in linea DB, fiat ſectio FIGH quæ æquidiſtet baſi AEC. Deinde ſecundùm lineam BD ſectio altera faciens communes ſectiones IGDE, quæ 16. vndecimi erunt parallelæ. itaque IH, IG, IF æquales ſunt, & ſimiliter DC, DE, DA: ſed etiam IL æqualis eſt IG. quemadmodum & KD æqualis DE. Igitur quia DB ſecat omnes lineas in plano FGH plano baſeos AEC parallelas bifariam, axis erit conoideos parabolici per definitionem axis quam poſuimus.

De

De planis parallelis quæ conoides parabolicum intersecant.

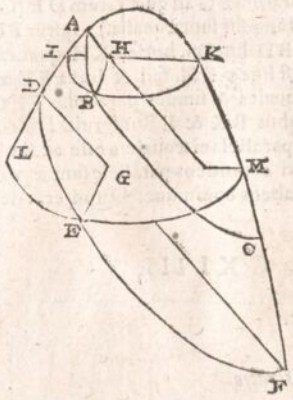
PROPOSITIO CXLIV.

SEctiones parallelę in conoide parabolico ſimiles figuras exhibent quæ axi occurrunt.

Demonſtratio.

a 137. huius.

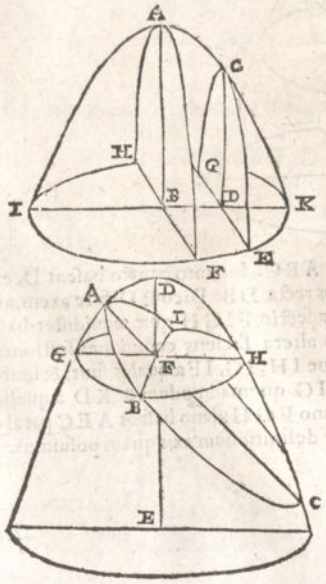
b 140. huius.



c Per 138. huius.

SI æquidiſtant baſi ſectiones, circuli a ſunt, & conſequenter figuræ ſimiles. ſi cum baſi concurrunt, erunt ellipſes. oſtendendum autem eſt illas eſſe ſimiles. fiat planum A C F per axem conoideos rectum ad plana parallela A B C, D E F, erunt rectæ A C, D F axes ſectionum A B C, D E F: diuiſis itaque A C, D F lineis proportionaliter in H & G, erectiſque H B, G E normaliter ad planum A C F, ſecundùm illas rectas H B, G E plana ponantur baſi conoideos parallela, ac proinde recta ad planũ C A L: nempe plana I B K, L E M. quare & per defin. 3. vndec. erunt B H, E G normales ad rectas K D, A C, M L, D F. rectangulum c A H C eſt ad D G F rectangulũ vt eſt I H K ad L G M rectãgulum, hoc eſt quoniam B H, E G normales ſunt ad diametros D K, L M, vt quadratum H B ad G E. ſunt igitur A B C, D E F ellipſes ſimiles iuxta definitionem ellipſeon ſimilium.

PROPOSITIO CXLV.



d 16. vndec.

e 8. vndec.

f 18. vndec.

PLanum per axem conoidis rectum ad quamlibet aliam ſectionem, illius ſectionis axem exhibebit.

Demonſtratio.

DVplex hic eſt caſus: alter quo ſectio ad quã planum per axem eſt rectum, axi æquidiſtat; alter quo axi conoidis occurrit.

Ponatur primùm ſectio G C E, ad quam planum per axem K A I rectum eſt, æquidiſtare axi. per axem ponatur planũ F A H, parallelum plano G C E, erunt ergo A B, C D communes ſectiones plani K A I cum planis F A H, G C E d parallelę. Quare cùm A B, vtpote axis rectus ſit plano K F I, erit e & C D recta eidem plano. ergo C D normaliter ſecat E G, quę eſt communis ſectio planorum G C E, K F I. Inſuper planum F A H, f rectum eſt plano K F I, c ergo planum G C E, eidem parallelum, plano K F I rectum eſt: eſt autem & planum K A I rectum

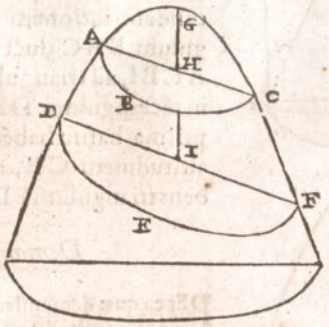
rectum plano GCE. ergo communis eorum [a] sectio IDK, recta est plano GCE. ergo defin.3.vndec.IDK recta est ad EDG. Quare cùm IDK sit diameter, patet EG bisectam esse in D. Et quidem vt suprà ostendi, ad angulos rectos. ergo CD est axis sectionis CED. [a] 19.vndec.

Secundum quoque casum sic demonstrabimus. Sit iterum sectio ABC, plano ADC per axem DE occurrens secundùm lineam AC ad angulos rectos. Dico AC axem esse ellipseos ABC. ex puncto F, quo axis DE occurrit plano ABC, erigatur normaliter FB ad planum ADC. igitur si secundùm [b] FB fiat sectio GBH basi conoidis æquidistans, erit circulus & quidem rectus [c] ad planum ADC, ac proinde FI æqualis FB. quare cùm FB recta sit ad planum ADC, recta quoque erit definit.3.vndecim.ad rectam AC. vnde cùm à rectâ AC diuidatur bifariam recta BI, ad angulos rectos, patet rectam AC axem esse sectionis ABC. [b] 137.hui-ius. [c] 18.vndec.

PROPOSITIO CXLVI.

SI duæ sectiones in conoide parabolico axi occurrentes æquidistantes fuerint, linea per vtriusque centrum acta axi conoideos æquidistabit.

Demonstratio.

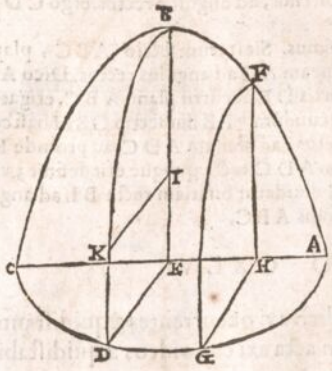


SInt plana parallela ABC, DEF, quorum centra H & I. Dico lineam HI æquidistare axi conoideos. ostensum [d] est sectiones ABC, DEF similes esse. præterea demonstratum est [e] planum per axem conoidis rectum ad sectiones ABC, DEF axes earundem exhibere, planum igitur per axes AC, DF sectionum ABC, DEF tranfiens est planũ, quod per axem conoidis transit, sit igitur planum hoc DAGCF. Igitur DAF parabola est quę per axem transit ac proinde recta GHI, quæ bifariam diuidit AC, DF, quæ 16. vndecimi sunt parallelæ, sectionis DGF per axem conoidis factæ diameter est. Sunt autem omnes diametri axi sectionis æquidistantes. igitur & GHI axi sectionis æquidistat. sed sectio DGF eumdem habet axem quem conoides. ergo GHI axi conoideos æquidistat. Quod erat propositum. [d] 144.hui-ius. [e] 145.hui-ius.

PROPOSITIO CXLVII.

DVæ sectiones axi conoideos æquidistantes sortiuntur basium suarum triplicatam rationem.

Demonſtratio.

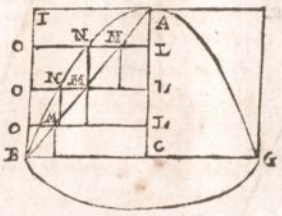


SInt duæ ſectiones DBE maior & minor FGH, quarum axes ſint BE, FH; factaque BI æquali FH, ponatur IK æquidiſtans ED: erit itaque BIK parabola æqualis FGH, vt oſtenſum eſt ſuprà [a]: ſed parabola BED ad BIK, parabolam triplicatam habet rationem eius quam habet recta [b] ED ad IK, hoc eſt HG. Igitur manifeſtum eſt ſectiones axi parallelas triplicatam habere rationem ſuarum baſium. Quod erat demonſtrandum.

a 142. huius.

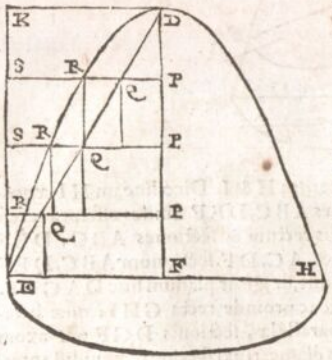
b 41. pa. tab.

PROPOSITIO CXLVIII.



COnoides parabolicum (BAG) ad conoides parabolicum (EDH) eandem rationem habet, quam triangulum BAC ductum in rectangulum ACBI, ad triangulum FDE, ductum in rectangulum DFEK, hoc eſt quam priſma baſim habẽs triangulum BAC, altitudinem CB, ad priſma baſim habens triangulum FDE, altitudinem FE.

Demonſtratio.



PEr ea quæ demonſtrauimus prop. 129. huius, conoides eſt ad conoides, vt corpora quæ fiunt ex ductibus parabolarum in ſeipſas. ſed hæc æquantur [c] ſolidis, quæ fiunt ex triangulis BAC, FDE ductis in rectangula ACBI, DFEK. Ergo conoidium ratio eadem eſt quę ſolidorum factorum ex ductibus triangulorum BAC, FDE in rectangula ACBI, DFEK. Quod erat demonſtrandum.

c Ex 42. de parab. & 45. duct.

Corollarium.

PArtes conoideos parallelis ad baſim planis abſciſſæ, eam ſeruant rationem quam partes parabolæ per axem ijſdem planis interceptæ, in ſe ductæ, ſiue quam partes trianguli BCA ductæ in altitudinem AI ſeu CB.

Demonſtrabitur diſcurſu omnino ſimili.

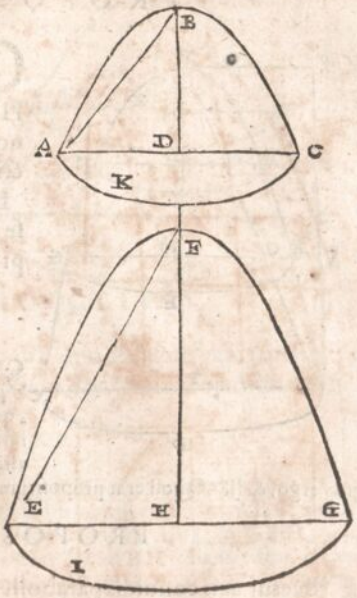
PROPOSITIO CXLIX.

COnoides parabolicum ad conoides parabolicum rationem habet compoſitam ex altitudine ad altitudinem, & ex baſi ad baſim.

Demon-

Demonſtratio.

SInt duo conoides A B C, G E F. oſtendendum eſt conoides A B C ad conoides G E F, habere rationem compoſitam ex ratione baſios A K C ad baſim E I G, & ex ratione altitudinis B D ad F H altitudinem. præcedenti propoſitione demonſtratum eſt conoides ad conoides eam habere rationem quam priſma habens baſim triangulam B D A, & altitudinem D A ad priſma ex baſi triangula F H E & altitudine H E. ſed ratio illorum priſmatum componitur ex ratione altitudinum D A, H E, & ex ratione triangularium baſium B D A, H F E, hoc eſt rurſum ex ratione D A ad H E, & ex ratione B D ad F H. ergo ratio conoidium componitur ex ratione D A ad H E bis ſumpta, hoc eſt ex ratione circuli A K C ad circulum E I G, & ex ratione altitudinum conoidicarum B D, H F. Quod erat demonſtrandum.

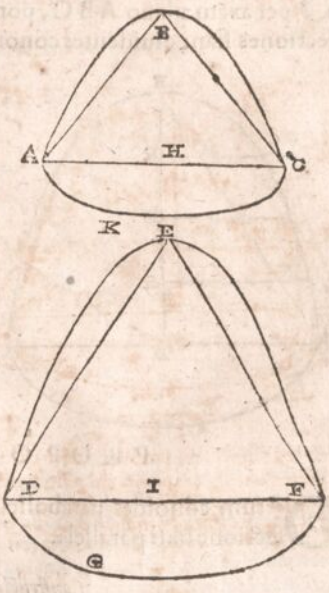


PROPOSITIO CL.

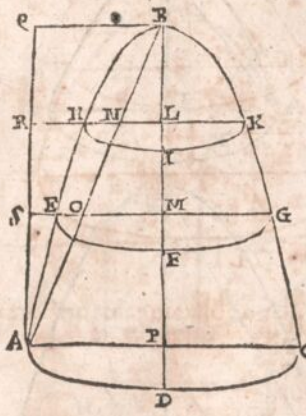
COnoides parabolicum ad conoides parabolicum habet rationem quam conus inſcriptus ad conum inſcriptum.

Demonſtratio.

SInt conoidibus inſcripti coni A B C, D E F. Dico conoides ad conoides eam habere rationem quam habet conus A B C ad D E F. Conus enim ad conum rationem habet compoſitam ex baſi circulari A K C ad baſim D G F, & ex altitudine B H ad E I. ſed præcedenti propoſitione idipſum eſt demonſtratum de ratione conoidis ad conoides. ergo conus inſcriptus ad conum inſcriptum eam habet rationem quam conoides ad conoides, cùm altitudines & baſes communes exiſtant.



PROPOSITIO CLI.



COnoidis ABC secetur plano per axem BPA, & alijs planis EFG, HIK basi parallelis, occurrentibus plano APB secundùm communes intersectiones LH, ME.

Dico partes conoideos eam sortiri inter se rationem quam partes trianguli inscripti PBA.

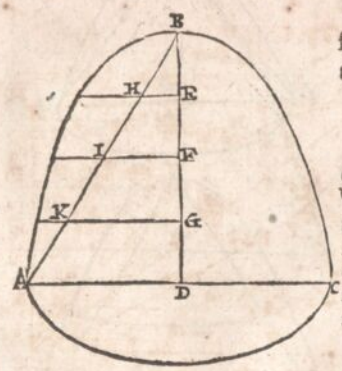
Demonstratio.

SEgmenta illa conoidica parallelis ad basim planis abscissa eam inter se rationem habent, [a] quam prismata quæ fiunt ex partibus trianguli interceptis ijsdem planis ductis in communem altitudinem AP. sed hæc sunt vt partes trianguli. ergo, & illa. Quod erat propositum.

a *Coroll. 148.*

PROPOSITIO CLII.

SEcetur axis conoidis parabolici in E, F, G in partes æquales, actâque per axem plano ABC, ponantur EH, FI, GK parallelę basi AC & sectiones fiant diuidentes conoides.



Dico partes conoidis planis illis abscissas rationem continuare quæ reperitur inter seriem numerorum 1.3.5.7. &c.

Demonstratio.

SVnt enim partes conoidis inter se demonstratæ [b] eandem seruare rationem quæ reperitur in partibus trianguli ABD. sed partes ABD facilè ostendũtur rationem continuare quæ inter seriem numerorũ 1.3.5.7.9. &c. reperitur; igitur etiam partes conoidicæ eandem seriem continuant. Quod fuit demonstrandum.

b 151. *huius.*

PROPOSITIO CLIII.

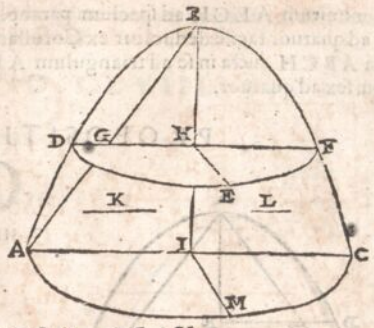
DAtum conoides parabolicum diuidere secundùm datam rationem sectione basi parallela.

Constructio & demonstratio.

SIt conoides parabolicum ABC diuidendum sectione quæ basi AMC æquidistet, secundùm rationem K ad L. fiat per axem BI sectio ABI, ductâque AB diuidatur triangulum ABI recta HG, quæ rectæ AC, æquidistet secundùm rationem K ad L, & per HG planum ponatur DEF, quod basi AMC æquidistet. Dico conoides

conoides ABC ad conoideos partem DBF, eam rationem continere quam K ad L. oſtenſum enim eſt [a] conoides ad partem ſui parallelo ad baſim plano reſectam eam rationem obtinere quam triangulum per axem ad partem ſui: ſed ex cõſtructione triangulũ ABI ad triangulum GBH, eſt vt linea K ad L. Igitur & conoides ABC ad partem ablatam DBFE, eandem rationem K ad L obtinet. Factum igitur quod poſtulatum fuit.

[a] 135. huius



PROPOSITIO CLIV.

COnoides ad partem ſui parallelo baſi plano ablatam eam ſortitur rationem, quæ eſt duplicata axeos totius ad partem axeos ablatam.

Demonſtratio.

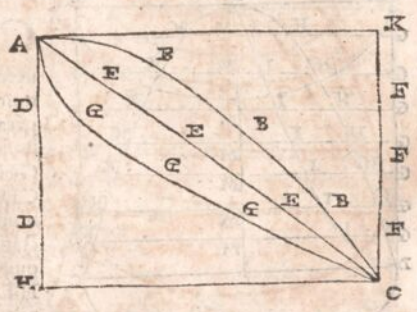
REponatur præcedentis propoſitionis ſcema quo A B C conoides diuiſum eſt plano D E F parallelo baſi A M C. demonſtratum iam eſt conoides A B C ad partem D B F, habere rationem eandem cum ratione trianguli A B I ad G B H, quam cùm ex elementis conſtet eſſe duplicatam rationis B I ad B H, manifeſtum eſt conoides A B C ad ſui partem D B F, duplicatam habere rationem altitudinis B I ad B H.

Conoidis parabolici cum alijs corporibus comparatio.

PROPOSITIO CLV.

PArabolam A B C cuius axis A D, contingat recta A K, axis parabolæ A G C; perfecto deinde rectangulo H K, ponatur diagonalis A C.

Dico parabolã A B C H in ſe ductam ad triangulum A E C H, ductum in ſe, eam habere rationem quam ſex ad quatuor.



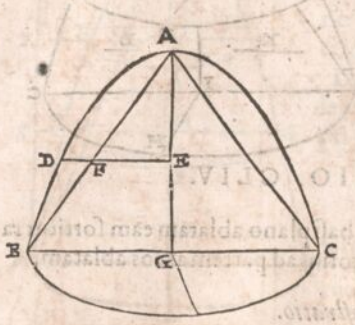
Demonſtratio.

DVcantur parallelæ F B E G ad ordinatim applicatam C H. Quoniam oſtenſum [b] eſt lineas F D, B D, E D proportionales eſſe, ſimiliter oſtenſum eſt proportionales eſſe [c] F D, E D, G D. ergo A B C H ductum in ſe æquatur [d] A E C H ducto in altitudinem A K, & A E C H ductum in ſe æquatur A G C H ducto in altitudinem A K. Igitur quam rationem habet A B C H, ductum in ſe ad A E C H in ſe ductum eam rationem habebunt ſuperficies A E C H, A G C H ductæ in altitudinem A K. cùm igitur duo corpora genita ex ductibus planorum A E C H, A G C H in communem altitudinem A K, ſortiantur baſium ſuarum proportionem, etiam A B C H, in ſe ductum cum A E C H ducto in ſe, habebit eandem baſium proportionem, trian-

[b] 67. parab.
[c] 45. de duct.
[d] 42 parab.

guli nimirum AECH ad ſpacium parabolicum AGCH, ſed hanc eſſe rationem ſex ad quatuor facilè deducitur ex Corollario 236. de parabolâ. Quare etiam parabola ABCH ducta in ſe ad triangulum AECH in ſe ductum rationem continet quam ſex ad quatuor.

PROPOSITIO CXLVI.



COnoides ad inſcriptum conum eam rationem obtinet quæ eſt inter ſex & quatuor.

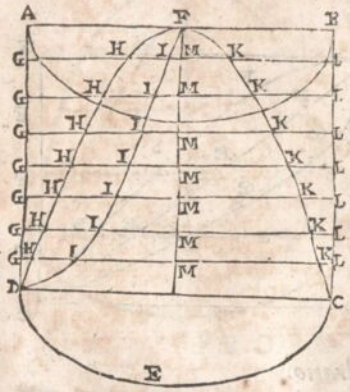
Demonſtratio.

OStenſum eſt præcedenti propoſitione parabolam ADBG ductam in ſe ad triangulum AFBG, in ſe ductum eam habere rationem quam ſex ad quatuor: ſed quam rationem habet parabola ADBG, ducta in ſe ad triangulum AFBG in ſe ductum, eam quoque obtinet conoides ABC ad conum inſcriptum ABC, cùm quadrata parallelarum baſi in parabola ad quadrata parallelarum baſi in triangulo eandem inter ſe contineant rationem, quam circuli ijſdem parallelis, vt radijs deſcripti. ergo ſimili fere diſcurſu quo vſi ſumus prop. 129. huius, concludemus propoſitum.

PROPOSITIO CLVII.

COnoides cylindri quo continetur dimidium eſt.

Demonſtratio.



CYlindrus ABC cuius baſis DEC, habeat inſcriptum conoides DFC. Inuẽto cylindri axe FM, qui & conoidi communis eſt, per eundem fiat ſectio exhibens parabolam DFC; deinde deſcribatur parabola DIF habens axem AD: ducanturque GHIMKL parallelæ ordinatim poſitæ CD. ex ijs quę libro de parabola ſunt demonſtrata [a] erit quadratum GI æquale rectangulo GHL, vnde per quadrageſimam quintam libri de ductibus, GH ductum in HL, æquale ſolidum formabit magnitudini quæ fit ex ductu GI in ſeipſam, hoc eſt ex ductu HM in ſeipſum cum HM, IG parabolæ eædem ſint. Atqui GM ductum in ML æquale corpus profert illis quæ fiunt ex ductu GH in HL, & ex HM in MK: quod colligitur ex 46. de ductibus, cùm rectangulum GML æquetur rectangulis GHL, HMK. Igitur cùm GH in HL, æquetur HM, ducto in ſeipſum ſiue in MK; patet GM ductum in ML, duplum eſſe HM ducti in MK, ſiue in ſeipſum. ſed eandem habet rationem [b] GM ductum in ML, ad HM ductum in MK, quam habet cylindrus GL ad conoides HK, cùm quadrata GM ad quadrata HM, eandem rationem contineant cum circulorum ratione qui fiunt radijs GM & HM. Igitur etiam cylindrus GL duplus eſt conoidis inſcripti, quod demonſtrandum fuit.

[a] Proposit. 167. parab.

[b] Ex diſcurſu 129.

Breuiùs ex præcedenti idem demonſtrabitur. Cylindrus ambiens coni inſcripti triplus

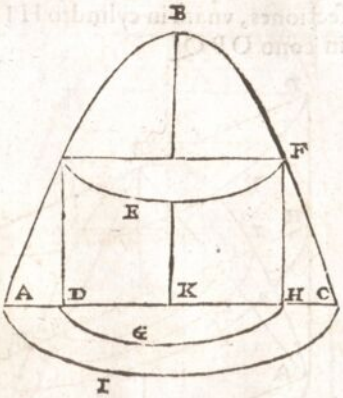
triplus est, conoides verò eiusdem sesquialter. igitur si conus ponatur, 2. erit conoides 3, cylindrus autem 6. Ex quo patet propositum.

PROPOSITIO CLVIII.

COnoidi A B C inscribatur quicunque cylindrus D G H F.

Oporteat rationem conoidis ad cylindrum inscriptum notam facere.

Demonstratio.



a 2. Propos.

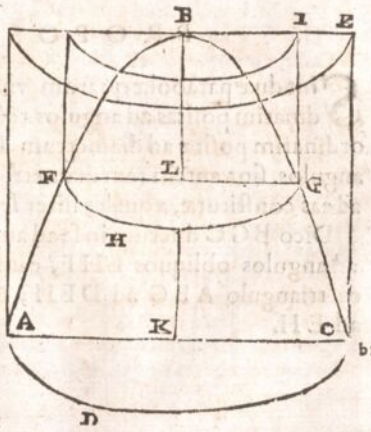
OStensum est cylindrum cui conoides inscribitur, duplũ esse conoideos inscripti. Igitur ratio cylindri super basi A I C, & altitudine K B ad cylindrũ, cuius basis est D G H, & altitudo F H, dupla a est eius quam habet ratio conoideos A B C ad eundem cylindrum inscriptum; nota igitur est ratio conoidis ad inscriptum cylindrum, cùm nota sit ratio cuiusuis cylindri ad quemuis cylindrum.

PROPOSITIO CLIX.

SIt conoides A B C cylindro A D C E inscriptum, & plano F H G posito, quod æquidistet basi A D C, fiat cylindrus F H G I, continens conoides F B G, & fiat sectio A B C per communem axem.

Dico cylindrum A D C E ad cylindrum F H G I habere quadruplicatam rationem A C ad G F lineam.

Demonstratio.



b 1. Parab.

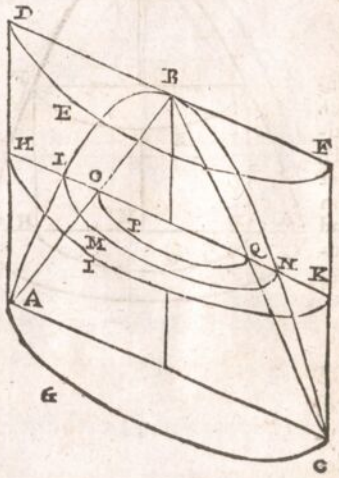
CYlindrus enim A D C E ad F H G I, rationem habet compositam ex basi A D C ad basim F H G, quæ duplicata est rationis A C ad F G, & ex ratione altitudinis C E ad G I, hoc est K B ad B L, quę est pariter duplicata b rationis A C ad F G, cùm sectio per B K, axem conoidis exhibeat parabolam A B C. vnde cùm ratio B K ad B L, ducta in rationem duplicatam A C ad G F, producat quadruplicatam A C ad G F, manifestum fit cylindrum A D C E ad cylindrum F H G I, quadruplicatam quoque habere rationem eius quam A C habet ad F G.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1124] - 1067
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CLX.

SIt quæuis pars conoidis parabolici ABC, habens basim ellipticam AGC, super qua cylindrus constituatur continens conoideos partem ablatam ABC; & super eadem basi formetur conus inscriptus conoidi: fiat deinde quæuis sectio quæ æquidistet basi ellipticę, formans ternas sectiones, vnam in cylindro HIK, secundam in conoide LMN, tertiam in cono OPQ.



Dico tres has sectiones esse inter se similes.

Demonstratio.

CVm solidum AGCF supponatur esse cylindrus, sectio AGC similis & æqualis erit sectioni HIK; sed quia demonstratum est a omnes sectiones in conoide parallelas similes esse, etiam sectio LMN similis est sectioni AGC: quia verò etiam demonstratum est in cono sectiones parallelas quæ exhibent ellipses, similes existere, etiam sectio OPQ similis erit sectioni AGC. Igitur omnes tres HIK, LMN, OPQ sectiones similes sunt basi AGC, & consequenter inter se. Quod erat demonstrandum.

a 144. huius.

PROPOSITIO CLXI.

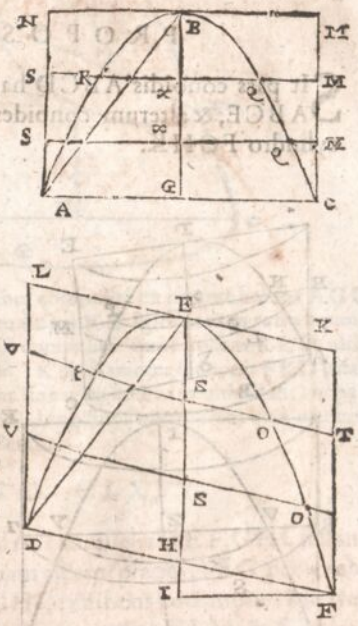
SInt duæ parabolæ quarum vna ABC sit recta, habens nimirum ordinatim positas ad angulos rectos; altera DEF obliqua cuius nimirū ordinatim positæ ad diametrum EH, non faciant cum diametro rectos angulos. sint autem tam diametri BG, EH quàm CA, DF ordinatim ad eas constitutæ, æquales inter se.

Dico BGC ductum in se ad angulos rectos, ad EOFH ductum in se ad angulos obliquos EHF, eam sortiri rationem quæ composita est ex triangulo ABG ad DEH, & ex AG seu GC ad FI, normalem ad EH.

Demon-

Demonſtratio.

FOrmetur parallelepipedum ex ductu KEHF, in ELDH; habebit illud baſim KEHF, & altitudinem FI. ſimiliter ſi conſtruatur parallelepipedum ex rectangulo MBGC in BNAG, habebit hoc baſim BGCM & altitudinem GC. Igitur hæ magnitudines compoſitam habent rationem ex ratione baſis MBGC ad baſim KEHF, hoc eſt ex ratione trianguli ABG ad triangulum DEH, & ex ratione altitudinis CG ad altitudinem FI. ſed MBGC, ductum in BNAG æquatur ſolidis, quæ fiunt ex ductu plani MBQC in planum CQBNA ſimul cum ſolido quod fit ex ductu BQCG in planum BRAG: ſimili pacto magnitudo ex ductu KEHF in ELDH, æquatur ſolidis quæ oriuntur ex ductu plani KEOF in planum FOELD, & ex ductu plani EOFH in EHDP. Diuidantur iam BG, EH in partes æquales in punctis X, Z. Et quia æquantur GB. HE, etiam XB, ZE pares erunt: ducanturq; MQXRS, & TOZPV parallelæ ad CA, FD. quadratum FD (hoc eſt ex hypotheſi quadratum CA) eſt ad quadratum OP, vt HE linea ad ZE, hoc eſt, vt GB ad XB, hoc eſt vt



ruſus quadratum CA ad quadratum QR. æquantur igitur quadrata OP, QR. ergo rectæ OP, QR, adeoque & OZ, QX æquales ſunt. ſunt verò & MS, TV adeoque & MX, TZ æquales. demptis ergo æqualibus QZ, QX, reliquę TO, MQ æquales ſunt: & quia totæ MS, TV, æquales, etiam QS, OV æquales erunt. rectangula igitur MQS æquantur rectangulis TOV, æquantur autem & quadrata OP, QR. ergo omnia rectangula MQS ſunt ad omnia quadrata QX, vt omnia rectangula TOV ad omnia quadrata OZ. ergo MCQB ductum in BQCAN, eſt ad BQCG in BRAG, vt KFOE in EOFDL, ad EOFH in EPDH. Ergo MCQB in BQCAN, vnà cum BQCG, in BRAG, (hoc vt iã oſtendi, parallelepipedũ ex MG in GN) eſt ad MCQB in BQCAN, vt KFOE in EOFDL, vnà cum EOFH, in EPDH (hoc eſt vt parallelepipedum ex KH, in HL) eſt ad KFOE in EOFDL. igitur permutando vt totum parallelepipedum ex MG in GN, eſt ad totum parallelepipedum ex KH in HL, ita ablatum MCQB in BQCAL, ad ablatum KFOE, in EOFDL. ergo & reliquum BQCG in BRAG, eſt ad reliquum EOFH in EPDH, vt parallelepipedum ad parallelepipedũ, hoc eſt (vt oſtẽdi ſuprà) in ratione compoſita ex ratione trianguli ABG ad triangulũ DEH, & ex ratione ipſius AG, ad FI. Quod erat demonſtrandũ.

Scholion.

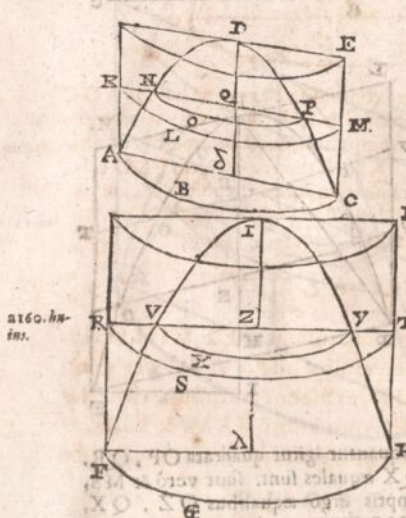
MEmor ſum libro de parabola demonſtratum eſſe, nullas dari parabolas inclinatas, quod ſenſui huius propoſitionis videtur repugnare: nam ſi multiplicatio parabolæ BCG *in* BGA, *per ductum facta qui quadrata producit fiat circulariter, & comparetur productum cum magnitudine* FHE *quæ etiam multiplicatione circulari formabit aliquod ſolidum, tunc vera fiet comparatio conoideos cum conoide, nam* BQCG *ductum in orbem producit verum conoides; vnde etiam* EFH *ductum obliqua inclinatione in orbem exhibebit inclinatum conoides, nihilominus vtrumque ſubſiſtit, rectè ſcilicet affirmatur non dari parabolas inclinatas,*

& tamen concedi potest dari conoides aliquod inclinatum. verùm vlteriùs inclinationem illam non prosequimur, cùm tale conoides nullius sit vsus, & excludatur à definitione quam initio posuimus.

PROPOSITIO CLXII.

SIt pars conoidis ABCD habens basim ellipticam, inclusa cylindro ABCE, & alterum conoides FGHI, super basi circulari, inclusum cylindro FGHK.

Dico conoides ABCD ad conoides FGHI eandem habere rationem quam cylindrus ABCE ad cylindrũ FGHK.



2160. huius.

Demonstratio.

FIat enim quæuis sectio KLM parallela ABC, occurrens axi obliqui cylindri in Q, & formãs in conoide ADC sectionẽ NOP. diuiso deinde axe Iλ in Z secundũ rationẽ DQ ad Qδ, parallela FGH, fiat per Z sectio RST, exhibens sectionẽ VXY in conoide FGHI. erũt igitur sectiones KLM, NOP similes, vti & RST, VXY. insuper quadratum Cδ, hoc est MQ, est ad quadratum PQ, vt δD est ad QD, hoc est ex constructione vt λI ad ZI, hoc est vt quadratum Hλ ad quadratum YZ, hoc est vt quadratum TZ ad quadratum YZ. cùm igitur sit quadratum MQ ad quadratum PQ, vt quadratum TZ ad quadratum YZ, & ellipses ostensæ sint similes, erit ellipsis NOP ad KLM, vt est circulus VXY ad circulum RST, vnde cùm hoc sit vniuersaliter verum, factis quotcunque sectionibus, facile iuxta formã discursus quadragesimæ quintæ propositionis libri de Ductibus concludemus cylindrum ABCE esse ad conoides inclusum, vt cylindrus FGHK est ad conoides inscriptum.

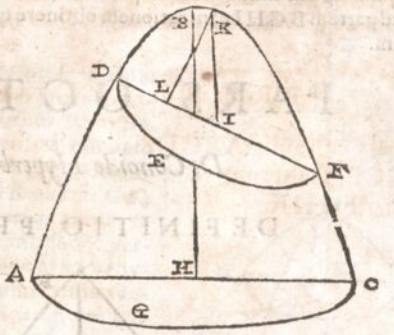
PROPOSITIO CLXIII.

SIt ABC conoides à quo dematur obliquâ sectione ad axem BH, pars DEFB. factâ deinde sectione ABC per axem BH, quæ recta sit ad planum DEF, diuidatur communis intersectio DF in I bifariam, & erigatur IK parallela axi, ponaturq; KL normalis ad DF.

Dico conoides AGCB ad partem DEFK, habere rationem compositam ex basi AGC ad basim DEF, & ex altitudine BH ad altitudinem KL.

Demon-

Demonſtratio.



DEmonſtratum [a] eſt conoides AGCB inclusũ ſuo cylindro, eam rationem continere ad partem conoideos DEFK incluſam ſuo cylindro ſuper baſi DEF, quam cylindrus ad cylindrũ: ſed cylindrus ſuper AGC baſi & altitudine BH, ad cylindrum ex altitudine KL & baſi DEF, rationem habet compoſitã ex ratione baſeos AGC ad baſim DEF, & ex altitudine BH ad altitudinem KL. Igitur etiam ratio conoidis AGCB ad partem DEFK ex ijſdem eſt compoſita. quod autem KL ſit altitudo partis abſciſſæ DEFK inde patet, quod IK ſit diameter ſectionis FKD bifariam ſecans DF, & conſequenter KI maxima linearum quæ axi æquidiſtant; vt patet ex 47. parabolæ & 5.2. ac proinde etiam KL longiſſima normalium quæ ex quouis puncto perimetri FKD ad FD poſſunt demitti.

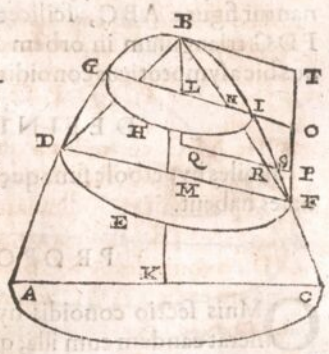
[a] 161. huius.

PROPOSITIO CLXIV.

SIt conoides ABC ſectum duobus planis parallelis DEF, GHI ſed inclinatis ad axem; ducto deinde etiam altero plano ABC per axem BK, quod ſit rectum ad plana DEF, GHI, exhibens communes interſectiones FD, IG; quibus in L & M biſectis ponantur BLM, & FB.

Dico partes conoideos BDEF & BGHI, eam ſortiri rationem, quæ eſt inter triangula BMF, & BLN.

Demonſtratio.



PErficiatur parallelogrammum MT, & ponatur quæuis PSRQ, quæ æquidiſtet FM. erũt [b] itaque OL, IL, NL; item PQ. SQ, RQ proportionales. quare per propoſitionem quadrageſimam quintam libri de ductibus magnitudo conſtans baſi triangula FBM, & altitudine obliquâ FM, æquabitur ſolido, quod emergit ex ductu BISFM in ſe ſecundùm eandem obliquitatem anguli BMF: vnde etiam pars magnitudinis conſtans baſi triangula BNL & altitudine obliquâ FM æquabitur ſolido, quod fit ex ſuperficie BIL in ſe ducta ſecundùm eandem obliquitatem. Cùm igitur hęc priſmata conueniant altitudinibus, inter ſe rationem cõſequuntur quę inter baſes triangulares inuenitur. Vnde etiam BISFM in ſe ductum eandem habet rationem ad partem BIL ductam in ſe, quam continet triangulum BMF ad triangulum BLN. ſed quam proportionem habet ſolidum ex ductu BISFM in ſe, ad BIL in ſe, eandem habet conoidis pars BDEF ad partem conoidis BGHI, quia ellipſis DEF ad ellipſim GHI, vel ad quamcumque aliam eidem parallelam eandem rationem habet quam quadratum FM ad IL quadratum vel quoduis aliud

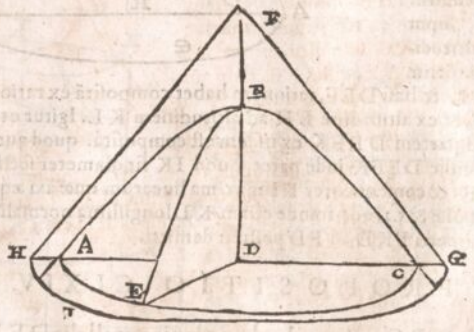
[b] 42. parab.

intermedium. Igitur simili discursu quo vsi sumus in 29. huius patet conoidis partem B D E F ad partem B G H I eam rationem obtinere quam triangulum B M F ad B L N triangulum.

PARS OCTAVA.

De Conoide Hyperbolico.

DEFINITIO PRIMA.



SIt hyperbola A B C, cuius axis B D, super quo immoto intelligatur circumduci in orbem pars A B D pergens ex A in C & E, donec tandem reuertatur in A punctum. exhibebitur figura corporis quod conoides hyperbolicum dicimus. Cuius axis B D & vertex B punctum.

DEFINITIO SECVNDA.

Iisdem positis sit hyperbolæ A B C centrum F, ex quo asymptoti ponantur figuræ A B C, scilicet F G, F H. & productâ D C in G agatur F D G triangulum in orbem describens conum H I G F. Appelletur conus hic asymptoticus conoidis A B C.

DEFINITIO TERTIA.

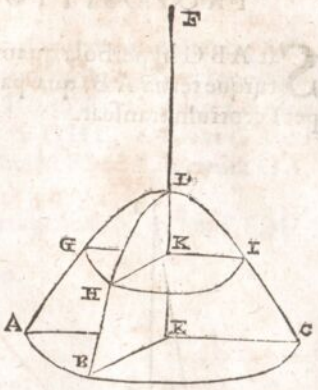
Similes hyperbolę sunt quę rectas & transuersas diametros proportionales habent.

PROPOSITIO CLXV.

OMnis sectio conoidis hyperbolici per axem facta hyperbolam generat eandem cum illa, quâ in formatione conoidis vsi sumus.

Demon-

Demonſtratio.



SIt figura ADC hyperbola ex qua formatum eſt conoides, & axis ſit DE: quo producto inueniatur hyperbolæ ADC centrum F. ſectione denique factâ DBE per axem, & aſſumpto quouis puncto G in perimetro ADC, demittatur ex eo normalis ad axem DE quæ ſit GK; ex K autem ſit KH, normalis item ad axem, & agatur hyperbola DEA in orbem, donec peruenerit ad ſectionem DHB. quoniam igitur hyperbola CDA generat ex hypotheſi ipſum conoides, patet lineam KG ſolo ſitu differre à lineâ KH; eſt verò & EA æqualis BE, cùm ambæ ſint ſemidiametri. Ergo vt quadratũ EA ad quadratum KG, ſic quadratum BE ad quadratum HK. ſed, quia ADC ex hypotheſi eſt hyperbola, vt quadratum EA ad quadratum KG, ſic a rectangulum FED ad rectangulum FKD. ergo vt quadratum BE ad quadratum HK, ſic rectangulum FED ad rectangulum FKD. Ergo DHB hyperbola eſt eadem cum ADC, quæ formauit conoides. Quod erat demonſtrandum. a 21. *hyperb.*

PROPOSITIO CLXVI.

OMnis ſectio in conoide hyperbolico baſi æquidiſtans circulum format.

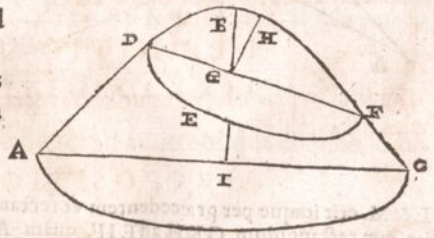
Demonſtratio.

SIt conoides ABCD, & ſectiones per axem ADC & DHB; ſectio autem parallela baſi ſit GHI: ex dictis propoſ. 165. patet KG æqualem eſſe KH, & eodem modo oſtendam reliquas omnes quæ ex K ad perimetrum GK ducuntur, æquales eſſe. ergo GHI circulus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVII.

COnoides hyperbolicum ſecetur plano inclinato ad axem.

Dico per axem conoideos poſſe duci planum quod rectum ſit ad planum datum.

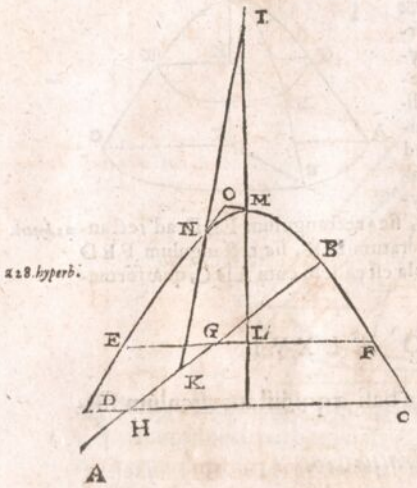


Demonſtratio.

SIt conoideos ABC planum DEF, ſecans obliquè axem BI in G: erectâ deinde normaliter GH ex G ad planum DEF, erunt GH & GB, in eodem plano quod per 18. vndecimi rectum erit plano DEF. Ex quo patet propoſitum.

PROPOSITIO CLXVIII. LEMMA.

SIt ABC hyperbola quam secent duę æquidistantes DC, EF, ponaturque tertia AB, quæ parallelis occurrat in punctis H & G, neque per I centrum transeat.



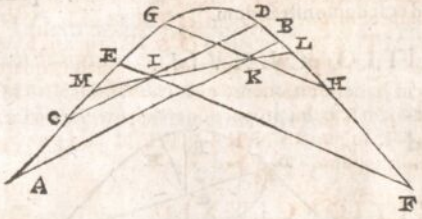
Dico rectangulum EGF ad DHC eandem habere rationem quam habet rectangulum AGB ad AHB rectangulum.

Demonstratio.

EX centro hyperbolæ demissis diametris rectarum AB, EF, quæ occurrant perimetro hyperbolę in punctis N & M, ponantur contingentes NO, MO. concurrent hæ in puncto quodam O. nam æquidistantes sunt 2 ordinatim applicatis AB, EF: quæ sibi occurrunt; eritque per 27. tertij conicorum rectangulum AGB ad EGF, vt est NO quadratum ad MO quadratum. sed etiam per eandem propositionem est rectangulum AHB ad DHC, vt quadratum NO ad MO quadratum. Igitur vt rectangulum EGF ad DHC, ita est AGB ad AHB. Quod fuit demonstrandum.

2 28. hyperb.

LEMMA. PROPOSITIO CLXIX.



SInt in hyperbola binę parallelę AB, CD, & EF, GH sibi occurrentes in I & K.

Dico rectangulum CID ad AKB, eandem continere rationem quam rectangulum EIF ad GKH rectangulum.

Demonstratio.

IVngantur puncta IK rectâ lineâ, quæ conueniat cum perimetro in L & M. erit itaque per præcedentem vt rectangulum LKM ad rectangulum LIM, ita tam rectangulum GKH ad EIF, quàm AKB rectangulum ad CID rectangulum. Igitur vt rectangulum CID ad AKB rectangulum, ita est rectangulum EIF ad GKH rectangulum.

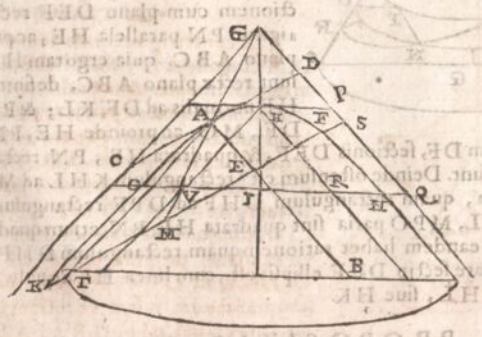
LEM-

LEMMA. PROPOSITIO CLXX.

SEcent hyperbolam inter asymptotos constitutam quæuis rectę AB, HR asymptoto parallelę; ponantur autem ex A & H, rectę contingentes sectionem quæ conueniant in C, D, P cum asymptotis: ex centro denique G duæ diametri ducantur GAM & GHI, & fiat vt GA ad GM, ita GH ad GI, ponanturque ordinatim MFS ad diametrum GA, & INQ ad diametrum GH.

Dico lineas QOSK proportionaliter sectas esse in N,R,I & F,E,M.

Demonstratio.



EST SM ad EM, vt GM ad AM, hoc est per hyp. vt GI ad HI, hoc est vt QI ad RI. sunt igitur SM & QI proportionaliter sectæ in E, & R. positis deinde, HV, AT quæ æquidistent asymptoto GC, erunt iterum QV & ST proportionaliter sectæ, cùm sit RI ad IQ, hoc est VI, ad IQ, velut est EM ad MS, hoc est MT ad MS: sunt autem tres quantitates SF, SE, SK & aliæ tres QN, QR, QO a proportionales, ac proinde cùm sint FE æquales TK & NR, VO, (nam FM æqualis est MK & EM, MT; & NI æqualis IO, & IR æqualis IV,) etiam b quantitates SF, FE, ET & QN, NR, RV sunt proportionales. quare cùm sit QR ostensa ad RI, eandem habere rationem, quam habet SE ad EM, etiam QN ad NR, hoc est VO eandem habebit proportionem quam SF ad FE, hoc est TK. quare totæ lineæ QO, SK in punctis N, R, I & F, E, M sunt proportionaliter sectæ. Quod fuerat demonstrandum.

a 18. *hyperb.*

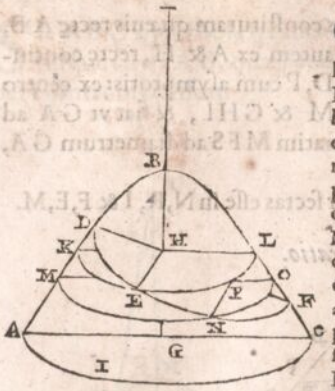
b 9. *process.*

PROPOSITIO CLXXI.

OMnis sectio conoidis hyperbolici ad axem obliqua ellipsim exhibet.

Demon-

Demonſtratio.

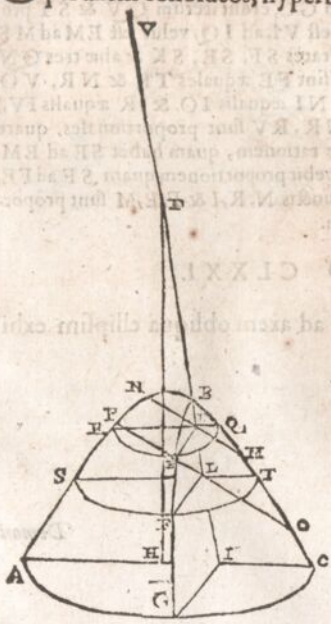


OCcurrat planum DEF ad angulos obliquos axi BG. Dico ſectionem DEF ellipticam eſſe, ponatur planum ABC per axem BG quod ſit rectum ad planum DEF, exhibens communem interſectionem DF, quæ occurrat axi in puncto quouis H, erectâ deinde normaliter HE ad planum ABC fiat ſectio per HE parallela baſi AIC. ſcilicet KEL, quæ erit circulus. deinde ponatur planum MNO, baſi quoque æquidiſtans producẽs circulum MNO ac ſignans communem interſectionem cum plano DEF rectam PN. erit [a] igitur PN parallela HE, ac proinde [b] recta plano ABC. quia ergo tam HE, quàm PN ſunt rectæ plano ABC, definit. 3. vndec. erit HE normalis ad DF, KL; & PN normalis ad DF, MO; ac proinde HE, PN ſunt ordinatim poſitę ad axem DF, ſectionis DEF, & quadrata HE, PN rectangulis KHL, MPO æqualia ſunt. Deinde oſtenſum eſt [c] rectangulum KHL ad MPO, eandem habere rationem, quam rectangulum DHF ad DPF rectangulum. igitur, cùm rectangulis KHL, MPO paria ſint quadrata HE, PN, etiam quadratum HE ad PN quadratum eandem habet rationem quam rectangulum DHF ad DPF rectangulum. Quare ſectio DEF ellipſis eſt, cum linea HE æqualis ſit HK, recta verò HF maior HL, ſiue HK.

a 16. vndec.
b 8. vndec.
c 168. huius.

PROPOSITIO CLXXII.

OMnis ſectio conoideos quæ tranſeat per centrum hyperbolæ factæ per axem conoideos, hyperbolam exhibet.



Demonſtratio.

SIt conoides ABC, cuius ſectio per axem habeat pro centro punctum D, per quod agatur planum DBG. Dico BEG eſſe hyperbolam. fiat enim per axem DH ſectio quæ ſit recta ad planum BEG, ſitque id planum ABC. erit igitur DI communis interſectio planorum ABC, & BEG, diameter in ſectione ABC: aſſumptis autem punctis K & L in diametro DI, erigantur KE, LF normaliter ad planum ABC. erunt igitur hæ lineæ in plano BEF quod orthogonaliter plano ABC inſiſtit; poſitis deinde in ſectione ABC ordinatim rectis OLP, MKN ad diametrum DI, fiant ſectiones per KE, LF quæ baſi AGC æquidiſtent occurrentes plano ABC, ſecundùm rectas QKR, TLS. cùm igitur defin. 3. vndec. rectæ KE, LF normales ſint diametris circulorum QER, TFS, erunt quadrata KE, LF rectangulis RKQ, SLT æqualia. erit igitur vt rectangulum QKR ad TLS, ita quadratum KE ad LF quadratum

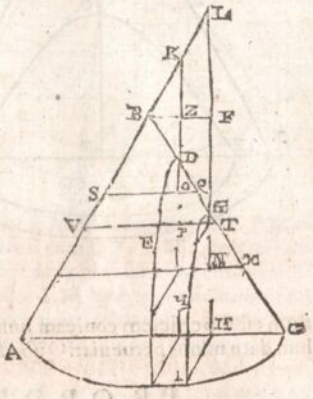
tum. sed vt est QKR rectangulum ad rectangulum TLS, ita est a rectangulum MKN ad OLP rectangulum; igitur vt rectangulum MKN hoc est quadratum MK, ad rectangulum OLP, hoc est quadratum OL, ita est quadratum KE ad LF quadratum. est autem quadratum MK ad OL quadratum, vt rectangulum VKB (facta prius DV æquali DB,) ad VLB rectangulum. igitur vt quadratum KE ad LF quadratum, ita est rectangulum VKB ad VLB. Est igitur sectio BEFG hyperbola cuius axis BI & latus transuersum BV. a 169. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

DVæ hyperbolæ in cono parallelæ inter se similes sunt.

Demonstratio.

SIt conus ABC sectus planis parallelis DRE, GHI quæ hyperbolas exhibeant. Oportet ostendere eas similes esse. facto per axem coni plano ABC quod sit rectum ad sectiones parallelas, erunt DK, GL earum latera transuersa cõmunes intersectiones planorum cũ coni latere AB cõcurrentes. dein ex B coni vertice ponatur BF secans bifariam, transuersas diametros GL, DK. erũt ergo BZ, BF diametri b rectę. His positis quia KD, LG sunt parallelæ, KD est ad LG vt BD ad BG, hoc est vt BZ ad BF. Ergo per defin. 3. hyperbolæ DEF, GHI similes sunt. Quod erat demonstrandum.



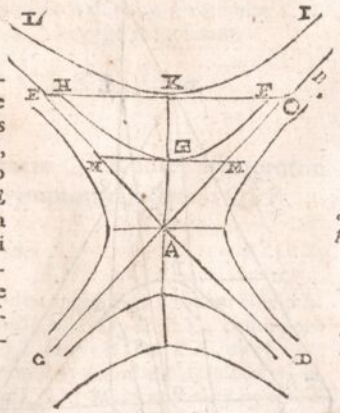
b *Defin. 5. hyperb.* & 16. *undec.*

PROPOSITIO CLXXIV.

OMnes hyperbolæ inter easdẽ asymptotos constitutæ similes sunt.

Demonstratio.

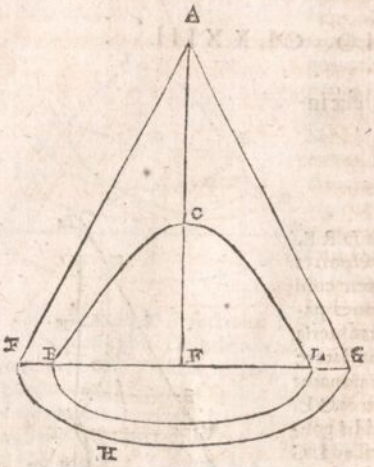
SInt DAE, CAO asymptoti communes duabus hyperbolis FGH, IKL. Dico illas esse inter se similes. Ponantur enim contingentes MGN, OKE ad axem communem AGK, qui angulum asymptotorum bisecat: erunt ergo AK, AG, dimidia laterum transuersorum, OE autem & MN, erunt d rectæ diametri. Iam quia OE, MN tangunt hyperbolas in punctis, vbi axis communis secat hyperbolas, erunt parallelæ. Ergo AG ad AK, vt MN ad OE. quare cùm proportionales sint diametri rectæ & transuersæ patet e hyperbolas gaudentes communibus asymptotis similes figuras esse.



d 41. *hyperb.*

e *Defin. 3. huius.*

PROPOSITIO CLXXV.



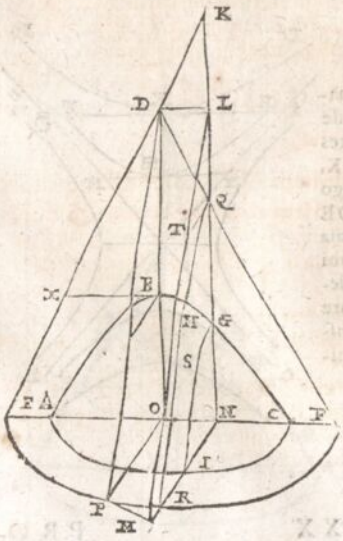
SIt A centrum hyperbolæ BCL factæ per axem conoideos CF & eiusdem hyperbolæ in eodem plano sit asymptotos AE quæ in orbem acta super axe AF, immoto conum EHGA describat.

Dico conum hunc cum conoide BCL non concurrere, quamuis dato quouis interuallo propius accedat.

Demonstratio.

FIat enim quæuis sectio per axem conoidis EAG, habebit hæc pro asymptotis AE, AG lineas quę cum sectione conoidica per eundem axem AE facta nunquam conuenient; accedent tamen ad interuallum dato minus ex natura linearum asymptoton: quare cùm omni sectioni per axem factæ hoc conueniat, manifestum est superficiem conicam nunquam cum conoide conuenire, licet ad interuallum dato minus perueniat. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.



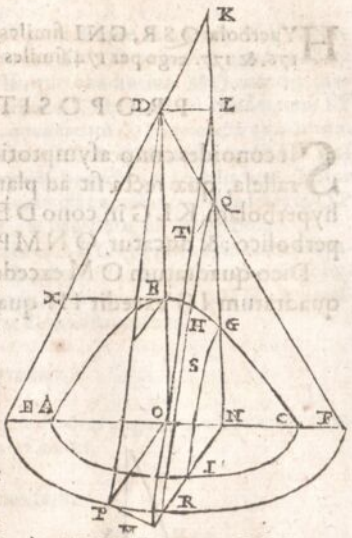
SIt iterum conoides ABC; sectionis ABC per axem factæ centrum sit D, & asymptoti DE, DF in superficie asymptotici coni DFE. fiat autem sectio GNI, quæ recta sit ad planũ ABC per axem conoideos & parallela axi conoideos BO, exhibens communem intersectionem NIM, cum plano baseos EPF: ductâ deinde DL quæ diametro AC baseos conoidis æquidistet, ducatur LM linea vt angulus NLM sit dimidius anguli quẽ continent asymptoti EDF, par nimirum angulo ODE.

Dico sectionis GNI asymptoton esse rectam LM.

Demon-

Demonſtratio.

EX O centro baſeos ponatur OP, quæ ſit parallela NM, & iungantur DP, PM. quoniam plana FPE, LNM recta ſunt plano EDF, erit [a] communis eorum ſectio MIN recta plano EDF, adeoque ad lineam FE. ergo PO parallela ad MN, etiam recta eſt ad FE. inſuper quia DP eſt in ſuperficie coni aſymptotici, erit angulus PDO par angulo EDO, hoc eſt MLN. ſunt verò & anguli DOP, LNM recti vt facile ex hypoth. colligitur. quare cùm latera DO, LN etiam ſint æqualia, erunt quoque [b] OP, NM æquales. igitur NO, PM, iungunt OP, NM æquales & parallelas. ergo & ipſæ ſunt parallelæ. ergo cùm angulus PON oſtenſus ſit rectus, etiam OPM rectus erit. ergo [c] MP tangit circulum. planum ergo DPM tangit conum; deinde quia iam oſtendi MP eſſe parallelã NO, eſtque etiam ex hyp. DL parallela NO, erunt LD, MP parallelę. ergo LM, in vno [d] plano eſt cum rectis MP, PD, DL, in plano ſcilicet conum tangente: & quidem parallela ad DP; cùm LM, DL iungant DL, PM æquales ac parallelas. ergo LM non concurret vnquam cum DP, quæ eſt plano tangenti & ſuperficiei conicæ communis; ac proinde, quia planum tangens cum cono non conuenit vnquam niſi in ſola linea DP, patet LM cum ſuperficie coni non concurrere. Atqui per præcedent. ſuperficies coni nunquam concurrit cum conoide. Ergo LM multo minùs vnquam cõcurret cum conoide, ac proinde neque cum conoideos ſectione GNI. quod autem accedat ad interuallum dato minus, ſic oſtenditur: planum tangens ſi verſus baſim vnà cum cono producatur, ad conum accedit ad interuallum dato minus; nam factis ſectionibus circularibus baſi parallelis, cùm circuli fiant maiores datis quibuſcunque, anguli contactuum MPR fient datis minores, accedit autem & conica ſuperficies ad conoidem ad interuallum dato minus. ergo & planum tangẽs accedit ad conoidem ad interuallum dato minus. ergo & lineæ LM, GNI, ad inuicem accedunt interuallo dato minori. Patet ergo propoſitum.



[a] 19. vndec.

[b] 26. primi.

[c] 16. tertij.

[d] 7. vndec.

PROPOSITIO CLXXVII.

IIſdem poſitis:

Dico coni aſymptotici DFE ſectionem QSR inter aſymptoton LM eſſe conſtitutam; ſiue LM etiam eſſe aſymptoton ſectionis QSR.

Demonſtratio.

EST enim angulus NLM ex conſtructione dimidius anguli FDE, quem aſymptoti complectuntur; vnde ſi ponatur QT normalis ad LQ & BX, contingens ABC ſectionem, erit DB ad BX, vt LQ ad QT, ſed vt BD ad BX, ita eſt QL ad LD, igitur QT & LD æquales ſunt, eſt autem LQ dimidium diametri tranſuerſæ, & LD hoc eſt QT dimidium rectę. Igitur LTM aſymptotos eſt hyperbolæ QSR. Idem patet ex demonſtratis in præcedenti; illic enim oſtenſum eſt LM non concurrere cum ſuperficie coni. quare neque cum ſectione QSR, quæ eſt in coni ſuperficie, vnquam conueniet.

Corollarium.

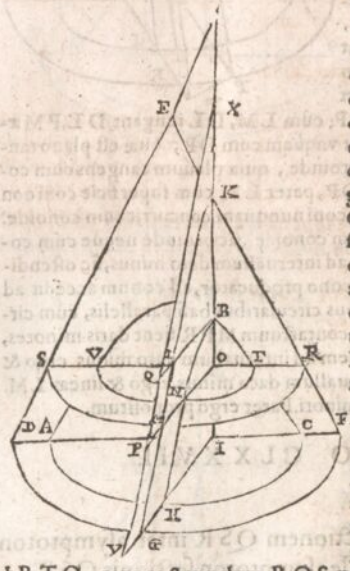
HYperbolæ QSR, GNI ſimiles ſunt, nam iiſdem continentur aſymptotis per 176. & 177. ergo per 174. ſimiles ſunt.

PROPOSITIO CLXXVIII.

SIt conoides cono aſymptotico incluſum, & fiat ſectio KIG axi parallela, quæ recta ſit ad planum ABC ductum per axem, exhibens hyperbolam KLG in cono DEF; & ſectionem BNH in conoide hyperbolico: & ducatur ONMP parallela IGY.

Dico quadratum OM excedere quadratum ON eodem exceſſu quo quadratum IG excedit IH quadratum.

Demonſtratio.



POnatur planum RMS baſi DGF, æquidiſtans, exhibebuntur duo circuli TNV & RMS, paralleli circulis AHC, DGF. eritque quadratum ON æquale TOV rectangulo; quadratum verò OM æquale rectangulo ROS. quemadmodum etiam quadratum IH æquale rectangulo AIC, & quadratum IG, æquale DIF rectangulo. ſed rectangula RTS, FCD, ſunt exceſſus rectangulorũ ROS, FID, ſupra rectangula TOV, CIA. ergo rectangula RTS, FCD etiam ſunt exceſſus quadratorum OM, IG, ſupra quadrata ON, IH. ſed rectangulum RTS æquale [a] eſt rectangulo FCD, igitur etiam exceſſus quadrati OM quo excedit quadratum ON, æqualis eſt exceſſui quo quadratũ IG, excedit quadratum IH. Quod erat demonſtrandum.

[a] 18. hyp.

Aſſumpſi in demonſtratione rectangula RTS, FCD, exceſſus eſſe rectangulorum ROS, FID, ſupra rectangula TOV, CIA. hoc autem ſic demonſtro. rectãgulum ROS, æquatur rectangulis RT, OS & TO, OS. ſed rectangulum TO, OS, æquatur rectangulo TOV, & rectangulo TO, VS, hoc eſt [b] RTO. ergo rectangulum ROS æquatur rectangulis RTOS, TOV, RTO, ſed rectangula RTOS, RTO æquantur rectangulo RTS. ergo rectangulum ROS æquatur rectangulis RTS, TOV. Ergo rectangulum RTS eſt differentia rectangulorum ROS, TOV.

[b] Coroll. 15. hyperb.

PROPOSITIO CLXXIX.

OMnis ſectio conoidis hyperbolici axi parallela exhibet hyperbolam illi ſimilem quæ ſit per axem.

Demon-

Demonſtratio.

REpetatur præcedentis propoſitionis programma ſitque iuxta 177. XY aſymptotos KLG hyperbolæ, quæ eſt in cono DEF. Oſtenſum eſt quod quadratum IG excedit IH quadratum æquali exceſſu, quo quadratum MO excedit quadratum NO. ſed quia XY eſt aſymptotos hyperbolæ KMG, etiam quadratum IY excedit quadratum IG æquali exceſſu quo quadratum OP, excedit quadratum OM, cùm quadrata IY & OP, excedant quadrata IG & OM, rectangulis ſub YG & duplâ YI; & ſub PM & duplâ PO, quæ per 18. hyperbolæ æqualia ſunt. Igitur exceſſus quadrati IY ſuper quadrato IH. æqualis eſt exceſſui quo quadratum OP excedit quadratum ON. Sectio igitur BNH axi parallela, eſt hyperbola.

Quod autẽ ſimilis ſit hyperbola BNH, hyperbolę ABC quę per axem facta eſt, patet ex eo, quòd BNH hyperbola aſymptotis clauditur iiſdem, quibus clauditur hyperbola KIG, vt oſtenſum eſt ſuprà. Ergo per 174. huius hyperbola BNH axi parallela ſimilis eſt hyperbolæ per axem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium primum.

OMnes ſectiones conoidis quæ axi ſunt æquidiſtantes angulum aſymptotis comprehenſum æqualem continent. patet ex 177. huius.

Corollarium ſecundum.

HInc etiam manifeſtum eſt, omnium ſectionum minimam eſſe hyperbolam per axem, ſi comparetur cum quauis hyperbola quæ ſit eidem ſectioni parallela, cùm enim oſtenſum ſit omnes illas hyperbolas aſymptotis vti, qui ſunt eiuſdem anguli, Igitur quo maiores euadent diametri tranſuerſæ, eo etiam maiores euadent hyperbolæ: diameter autem tranſuerſa, minima illa eſt quæ per axem tranſit, vt patet curioſiùs has materias conſideranti.

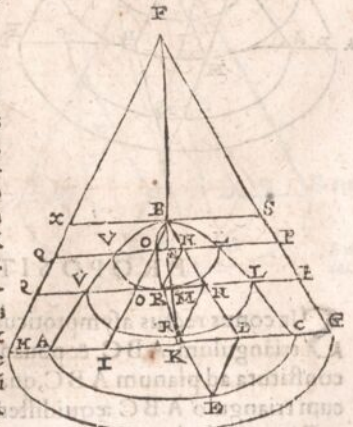
PROPOSITIO CLXXX.

SEcetur conoides plano per axem exhibens hyperbolam: inuentis autem huius ſectionis aſymptotis, fiat ſectio conoideos alteri aſymptoton parallela.

Dico parabolam hac ſectione produci.

Demonſtratio.

SIt ABC planum per axem FBK conoideos hyperbolici, exhibens hyperbolam ABC, cuius centrum F, aſymptoti verò FG, FH. poſitâ deinde rectâ BD quę æquidiſtet aſymptoto FG. fiat per eam ſectio BDE recta ad planum ABC Dico figurã BDE eſſe parabolã ad FBK axem communẽ conoideos & ſectionis ABC. conſtituantur ordinatim rectę LM, quę productæ cum aſymptotis & cum ſectione concurrãt ponanturq; BI aſymptoto FH æquidiſtans, & XBS tangens ſectionem ABC in B. Denique ſectiones fiant LRV, quę ſint rectæ ad planũ per axem quarum communes ſectiones NR cum plano BRE, 19. vndec. & definit. 3. vndec. rectę erunt ad lineas LQ, BD. quoniam igitur FG, BD æquidiſtant PN æquales erunt SB



contingenti, hoc eſt BX, hoc eſt rectis OQ, eritque quadratum PM æquale quadratis PN, NM, & rectangulis PNM bis ſumptis, hoc eſt a rectangulis PLQ ſimul cum quadratis NM, & vnà cum rectangulis PNM bis ſumptis. ſed etiam quadrata PM æqualia ſunt rectangulis PLQ, LNV vnà cum quadratis NM. ablatis igitur communibus PLQ, rectangulis & NM quadratis, remanent rectangula PNM bis ſumpta æqualia LNV. ſed ijſdem rectangulis LNV æqualia ſunt quadrata NR, quòd NR ſint rectæ ad diametros circulares LV. Igitur NR quadrata æqualia ſunt rectangulis PNM bis ſumptis. quare vt rectangulum PNM ad PNM, hoc eſt vt linea NM ad NM, hoc eſt vt NB ad NB, ita eſt quadratum NR ad NR quadratum, quare BRE, ſectio parabola eſt. Quod erat demonſtrandum.

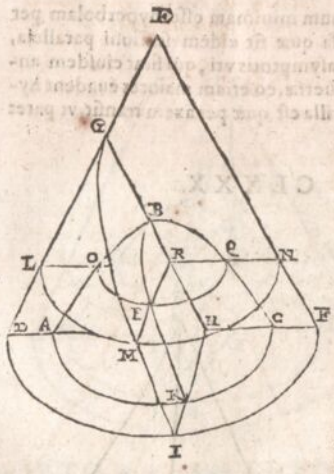
a 18. hyperb

PROPOSITIO CLXXXI.

SIt ABC conoides cono ſuo DEF, aſymptotico incluſum, factâ deinde ſectione DEF per communem axem coni & conoideos, fiat altera GHI aſymptoto quidem EF æquidiſtans ſed normalis ad planum DEF exhibens parabolas BHK, GHI.

Dico has parabolas eſſe parallelas ſeu gaudere communi latere recto.

Demonſtratio.



b Ex demonſtratis in 178. huius.

c 18. hyperb.

d Exprop. 351.

FIat ſectio LMN parallela baſi exhibens in cono & conoide circulos LMN, OPQ & producens in plano GHI communem interſectionem RM, quę, quia eſt communis ſectio duorum planorum LMN, GHI rectorum plano DEF, erit 19. vndecimi recta plano DEF, ac proinde defin. 3. vndecimi normalis ad lineam NQOL, rectangula igitur NRL, QRO æquantur quadratis RM, RP. pari argumento rectangula FHD, CHA æquantur quadratis HI, HK. Quare cùm rectangula NQL, FCD ſint differentię b rectangulorum NRL, QRO & FHD, CHA, erunt quoque eadem rectangula NQL, FCD, differentiæ quadratorum RM, RP & HI, HK. Atqui rectangula NQL, FCD c æqualia ſunt. Igitur exceſſus quo quadratum RM ſuperat quadratum RP æqualis eſt exceſſui quo HI quadratum excedit HK quadratum. ſunt igitur per ea quæ lib. de parabola diximus d parabolæ BHK & GHI parallelæ, gaudentes eodem latere recto ad communem axem. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXXII.

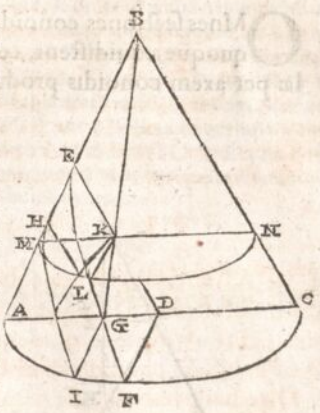
SIt conus rectus aſymptoticus ABC ſectus plano per axem exhibens triangulum ABC, & ponantur duo plana DEF, GHI normaliter conſtituta ad planum ABC, quarum communes interſectiones ED, HG cum triangulo ABC æquidiſtent lateri BC.

Dico parabolam DEF minorem eſſe parabola GHI quę remotior eſt ab aſymptoto BC.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1139] - 1082
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

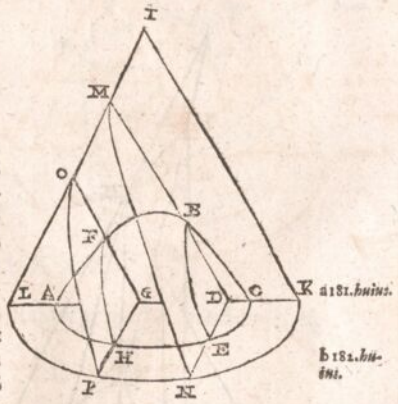


SInt communes interſectiones baſis AIC, & planorum DEF, HGI rectæ DF, GI, quæ erunt normales ad diametrum AC ex 19. vndec. & defin. 3. eiuſdem, ducta verò GB, occurrat rectæ DE in K, ponaturque per punctum K planum MLN, parallelum baſi exhibens LK, communem interſectionem cum plano EDF; quæ normalis eſt ad MN. rectangulum igitur NKM æquale eſt quadrato LK, & rectangulum CGA æquale quadrato GI. Igitur vt eſt rectangulum MKN ad AGC, ita eſt quadratum KL ad quadratum GI. ſed quia ratio NK ad CG, eadem eſt cum ratione KM ad GA, rectangulum MKN eſt ad rectangulum CGA, in duplicata ratione NK ad CG, hoc eſt BK ad BG, hoc eſt KE ad GH. Igitur etiam quadratum KL ad quadratum GI, eſt in duplicata ratione KE ad GH. ergo vt quadratum KL ad GI quadratum, ita eſt quadratum KE ad quadratum GH. ſunt itaque ſimiles portiones parabolicæ EKL & GHI. ſed latus rectũ portionis HGI, maius eſt latere recto portionis EKL, cùm rectangulum HGI maius ſit rectangulo EKL. Igitur verum eſt quod remotior à vertice maior ſit parabola quàm quæ propinquior eſt.

PROPOSITIO CLXXXIII.

POnatur conoides hyperbolicum ABC ſectum planis parallelis exhibentibus parabolas BDE, FGH; oſtendendum eſt ſectionem BDE minorem eſſe ſectione FGH.

Demonſtratio.



a 181. huius.

b 181. huius.

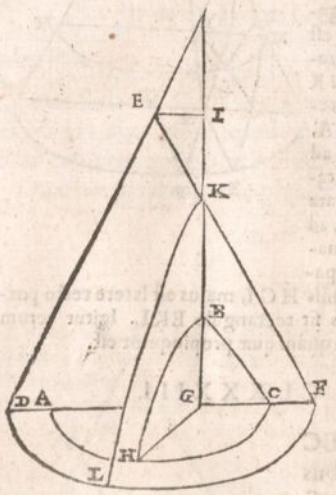
PErficiatur conus aſymptoticus LIK, & planũ per axem ductum. exhibeat hyperbolam ABC eiuſque aſymptotos LI, IK, quarum IK æquidiſtabit parabolis, vt patet ex 180. huius: plana verò DBE, GFH producta producãt figuras MDN, OGP, quæ vtique parabolę exiſtent cũ plana illa aſymptoto IK æquidiſtent. oſtenſum eſt [a] parabolas MDN, BDE æquales eſſe; ſimiliter & OGP, FGH. Igitur cùm oſtenſum etiam ſit [b] parabolam DMN viciniorem IK, minorem eſſe parabola OGP remotiore, etiam BDE parabola minor erit parabola FGH, quæ remotior eſt ab aſymptoto IK. Quod fuerat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXIV.

OMnes sectiones conoidis hyperbolici axi æquidistantes, si inter se quoque æquidistent, centra habent in linea quæ à centro hyperbolæ per axem conoidis productę, normalis ad parallela hyperbolarum plana ducitur.

Demonstratio.

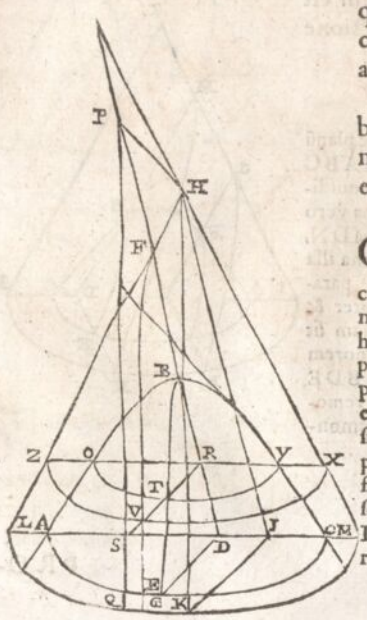


SIt igitur planum A B C per axem conoideos incluſi cono D E F aſymptotico, ad quod aliud ponatur B G H ad rectos angulos, quod æquidiſtet axi conoideos. Dico ſectionis B G H centrum eſſe in E I, quæ à centro hyperbolæ A B C ducitur normalis ad planum B G H. planum enim B G H, productum ſecet conum, & exhibeat hyperbolam K G L; huius centrum erit in recta E I. Atqui hyperbola B G H, iiſdem aſymptotis clauditur quibus hyperbola K G L, vt patet ex 176. & 177. huius. ergo & centrum cum eâ habet commune in recta E I. ſimiliter oſtendam omnes hyperbolas ipſi B G H parallelas habere centrum in recta E I. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO CLXXXV.

SEcetur conoides hyperbolicũ A B C ſectione per axem & altera B D E, quæ recta ſit ad planum per axem, concurratque cum lateribus trianguli per axem coni aſymptotici extra conum.

Dico ſectionem B D E eſſe hyperbolam quę cum ſectione coni F D G, non concurret, quæ in eodem plano exiſtit.



Demonstratio.

QVoniam planum B D E rectum eſt ad planum per axem A B C, & concurrit cum lateribus trianguli per axem extra conum, igitur ſectio F D G coni H M G L hyperbola eſt, cuius centrum ſupponatur punctum P. ex quo aſymptotos ducatur P Q. poſitâ igitur diametro P D, aſſumptoque in ea puncto quouis R erigantur R S, D Q quę ſint normales ad planum trianguli A B C per axem, & ſecundùm R S, D Q ſectiones fiant baſi conoidis parallelæ, exhibebunt hæ ſectiones circulos O T Y, A E C & Z V X, L G M ex 19. 11. & definit. 3. 11. patet R T V rectis P D, X Z, ac D E G rectis L M, P D eſſe

esse normales, vnde rectangulis O R Y, A D C, æquantur quadrata R T, D E; rectangulis insuper Z R X, L D M quadrata R S, D G, & quia H M, H L asymptoti sunt sectionis A B C, etiam Z O X L A M rectangula inter se sunt [a] æqualia; vnde excessus quadrati R V quo superat quadratum R T æqualis est excessui quo quadratum D G excedit D E [b] quadratum: & quia P Q asymptotos est sectionis F D G, excessus quadrati R S super R V quadrato æqualis est excessui [c] quo differt quadratum D Q à quadrato D G, ac proinde quadratum R S excedit quadratum R T eodem excessu quo D Q quadratum superat quadratum D E. sunt igitur B T E ad hyperbolam cuius asymptotos est P Q. Quare cùm duarum hyperbolarum F V G, B T E altera sit in superficie coni, altera in superficie conoidis; quæ superficies nunquam [d] concurrunt, nec ipsæ sectiones concurrent. Quod erat demonstrandum.

[a] 18. *hyperb.*
[b] 178. *huius.*
[c] 179. *huius.*
[d] 175. *huius.*

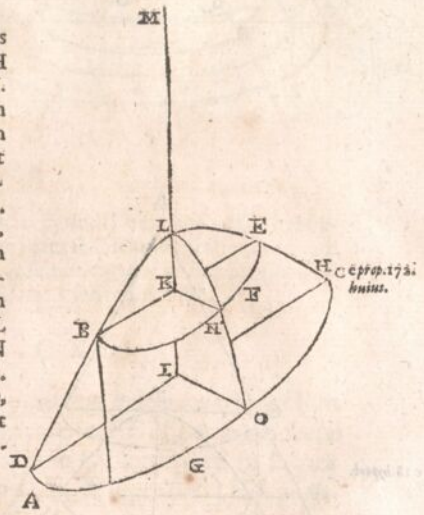
PROPOSITIO CLXXXVI.

SEcetur conoides duobus planis parallelis quę ellipses formentBNE, DOH.

Dico illas ellipses esse inter se similes.

Demonstratio.

AGatur ABC planum per axem conoidis quod sit rectum ad sectiones BFE, DGH exhibens communes intersectiones BE, DH. erit igitur ABC hyperbola. ponatur autem diameter MI, quæ diuidat BE, DH bifariam in K & I, & sectio fiat per M L I quæ recta sit ad planum ABC exhibens communes intersectiones, K N, I O, quæ per 19. 11. & defin. 3. 11. erunt rectæ ad lineas E B, H D, ac proinde E B, K N, H D, I O sunt axes ellipsium; erit autem per ea quę demonstrata sunt [c] L N O hyperbola cuius latus transuersum M L, commune cum hyperbola A B C. quare vt rectangulum M K L ad M I L rectangulum, ita est quadratum K N ad I O, & quadratum K B, ad quadratum I D. ac proinde quadratum K N ad quadratum I O, vt quadratum K B ad quadratum I D, vnde vt E B ad K N, ita H D ad I O. sunt igitur similes ellipses B N E, D O H.

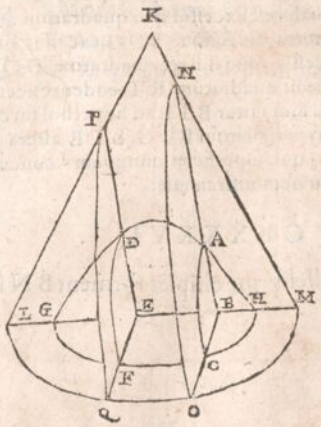


[c] *prop. 178. huius.*

PROPOSITIO CLXXXVII.

SI sectiones parallelæ conoideos hyperbolici hyperbolas produxerint, similes erunt hyperbolæ.

Demonſtratio.



a 173. huius.

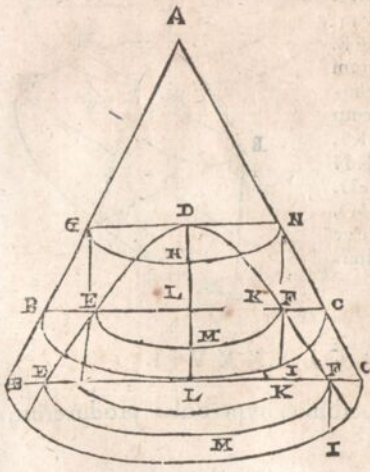
b Coroll. 177. huius.

SInt ABC, DEF ſectiones conoideos parallelæ producentes hyperbolas. Dico illas inter ſe ſimiles eſſe: perfecto enim cono aſymptotico LKM producãtur plana ABC, DEF donec occurrentia conoformentᵃ hyperbolas NBO, PEQ, oſtenſum eſt a hyperbolam NBO parallelam PEQ, ſimilem quoque eidem eſſe. demonſtratũ inſuper eſt b hyperbolas NBO, PEQ ſimiles eſſe hyperbolis ABC, DEF. igitur etiam hyperbolæ ABC, DEF ſunt ſimiles inter ſe. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

SIt conus ABC rectus ſectus plano per axem exhibente ſectionem hyperbolicam DEF cum aſymptotis eiuſdem AB, AC. fiant ſectiones GHN per verticem D, & aliæ BIC quæ ſint rectæ ad BAC, planum per axem, æquidiſtantes contingenti GDN & exhibeant in plano BAC ſectiones GN, BEFC: erigantur denique FI normales ad CB.

Dico rectas FI æquales eſſe rectæ DN.



c 18. hyperb.

Demonſtratio.

SVnt enim rectangula BFC æqualia cquadrato DN, ſed etiam rectangula BFC æquantur quadratis FI, quod FI ſint rectæ ad circulares diametros BC. ſunt igitur FI quadrata æqualia quadratis DN. ergo rectæ FI, DN etiam æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXXIX.

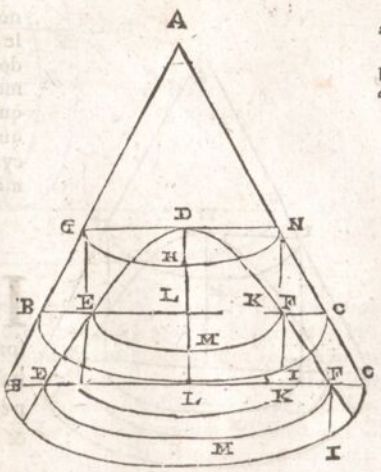
IIſdem poſitis:

Dico ſpatium NCIBGD conoides hyperbolicum cingens æquari cylindro cuius baſis eſt circulus GHN, & altitudo DL.

Demon-

Demonſtratio.

REctangulum C F B æquale eſt quadrato[a] D N, hoc eſt per præced. quadrato F I, hoc eſt quadrato K L, & conſequenter circulus radio D N deſcriptus eſt æqualis ſpatio circulis parallelis contento B I C, E M F. vnde cũ baſes ſemper ſint æquales & altitudines, facilè per cylindrorũ inſcriptiones demonſtrabitur cylindrum qui baſim habet circulum G H N, & altitudinem D L æquari ſpatio quod conoides hyperbolicum cingit. Quod fuit demonſtrandum.



a 18. *hyperb.*

b 58. *circul.*

PROPOSITIO CXC.

ILſdem poſitis:

Dico ſpatia conoides hyperbolicum cingentia quę planis parallelis contingenti G H N intercipiuntur eandem rationem obtinere quã altitudines D L, L L.

Demonſtratio.

PRæcedenti enim oſtenſum eſt ſpatia illa æquari cylindri partibus qui habet baſim circulum G H N: ſed partes cylindri eam inter ſe ſortiuntur rationem quam altitudines D L, L L. igitur etiam ſpatia illa inter ſe eam rationem habent quam altitudines D L, L L, quæ cum altitudinibus cylindricis ſunt communes.

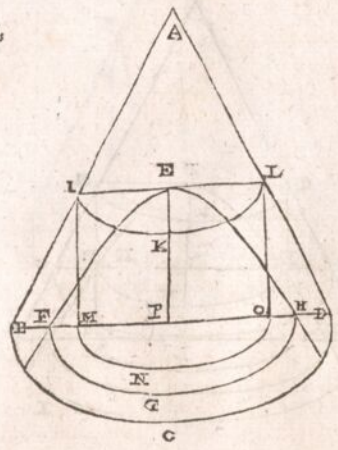
PROPOSITIO CXCI.

SIt denuo conus rectus A B C D ſectus per axem exhibens triangulum A B D, cuius latera ſint aſymptoti hyperbolæ F E H per axem factæ conoideos E F G H: ductâ deinde contingente L I ſectionem in E quæ æquidiſtet B D, deſcribatur circulus radio L E, & ſuper baſi I K L ponatur cylindrus I M N O.

Dico conoides E F G H æquari ſpatio coni quod cylindrũ I M N O L, circumcingit.

Demonſtratio.

ESt enim ſpatium coni reſciſſum IBCDL, æquale conoidi ſimul cum ſpatio quod conoides ambit: rurſus idem ſpatium coni æquale eſt corpori cylindrico ſimul cum ſpatio ſolido quod cylindrum circundat; eſt autem a 189. *huius* demonſtratum ſpatium quod conoides cingit æquari cylindro IMNOL, igitur ablatis æqualibus remanent conoides & ſpatium quod cylindrum ambit æqualia inter ſe. Quod demonſtrandum fuit.



PROPOSITIO CXCII.

IIſdem poſitis:
Dico conum abſciſſum AIKL ad ſpatiũ quod circundat conoides EFGH habere rationem compoſitam ex ratione altitudinis AE ad altitudinem EP, & ex ratione IL ad triplam rectæ IL.

Demonſtratio.

OStenſum enim cùm ſit, cylindrum IMNOL æquari ſpatio ſolido quod ambit conoides hyperbolicum, igitur quam rationem habebit conus AIKL ad cylindrum IMNOL, eandem quoque habebit ad corpus cingens ipſum conoides. ſed ratio coni AIKL ad cylindrum IMNOL, componitur ex ratione AE ad EP. & ex ratione IL ad triplam IL: igitur etiam conus AIKL ad corpus ambiens conoides habet rationem ex ijſdem compoſitam.

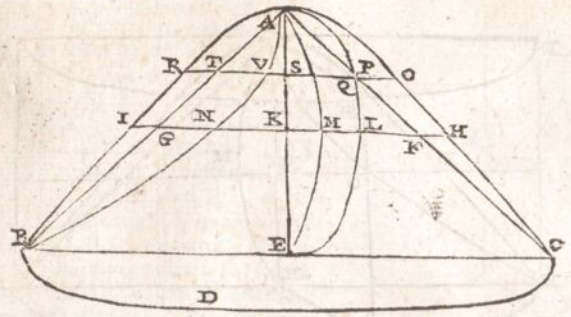
PROPOSITIO CXCIII.

REcto conoidi incluſus ſit conus ABDC factaq; per axem AE ſectione triangulari ABC & hyperbolicâ BRAOC, diuiſiſq; AB, AC bifariam in F & G: ductâque FG quę ſectioni hyperbolicæ occurrat in H & I, fiat rectangulo HFI æquale quadratum KL, & per AE axem, & LK ſemiaxem deſcribatur ellipſis. Deinde fiat rectangulum ſub EB & MK æquale quadrato LK, & deſcribatur parabola AME, cuius axis MK facto denique rectangulo ſub EB & KN, æquali quadrato KG ſeu FK deſcribatur parabola ANB, cuius vertex A.

Dico conoides hyperbolicum ad conum incluſum eam obtinere proportionem quam ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBEKA.

Demon-

Demonſtratio.



SVperficies AHCFA ducta in ſuperficiem AFCBIA, æquale[a] ſolidum pro- [a] 45. *Duct.*
ducit magnitudini quę oritur ex ductu ſemiellipſeos ALE ductæ in ſe, cùm ex hypotheſi rectangulum HFI, æquetur LK quadrato, & quodlibet rectangulum OPR (dummodo OR æquidiſtet HI) æquetur quadrato QS, cùm rectangula HFI, OPR, &c. ſint quadratis LK, QS, &c. proportionalia: eſt enim per 168. huius rectangulum HFI, ad rectangulum OPR, vt rectangulum AFC ad APC [c] 45. *Duct.*
hoc eſt rectangulum AKE ad ASE, hoc eſt 4. ellipſ. vt quadratum KL ad quadratum SQ. ſed APLE ductum in ſe æquatur ſolido quod habet baſim parabolam AME, & [b] altitudinem EB, cùm ex hypotheſi rectangulum ſub EB, & MK æquetur quadrato LK, igitur etiam AHCFA ſuperficies ducta in planum AFC BIA, æquatur eidem ſolido quod habet baſim AME & altitudinem EB.

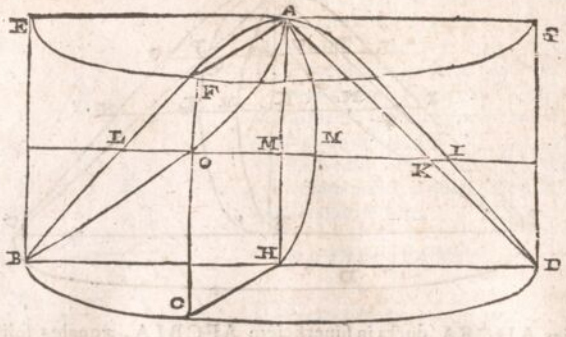
Simili ratione triangulum AFCE ductum in ſe æquatur ſolido habenti baſim ſpacium parabolicum ANBE, & altitudinem EB; cùm KN, KG (hoc eſt FK) EB ſint proportionales ex hypoth. & quęcunque SV, ST, EB, modò ST ſit parallela EB, ſimili ratione proportionales ſint. Quare cùm totum AOCE ductum in ſe æquetur AOCFA ducto in AFCBIA, & ſimul triangulo AFCE ducto in ſe ſiue in triangulum ABE, cùm quadrata HK, æqualia ſint rectangulis HFI, FKG; etiam totum AOCE, ductum in ſe æquatur ſolido habenti pro baſe ſuperficies AME & ANBE, hoc eſt ſuperficiem AMEBNA, & altitudinem EB. ſed ſolida illa quę altitudinem habent EB, communem, ſunt vt baſes AMEBNA, ANBESA. ergo & hyperbola AOCE ducta in ſe eſt ad triangulum AFCE, ductum in ſe vt ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBESA. Sed ſicut ſe [d] *Ex 129. huius.*
habet AOCE ductum in ſe ad triangulum AFCE ductum in ſe, ita quoque ſe habet [c] AOCE, ductum in orbem ad triangulum AFCE, ductum in orbem, hoc eſt conois facta per gyrationem hyperboles AOCE ad conum factum ex circumductu trianguli AFCE, cùm quadrata HK ordinatim poſitarum ad quadrata FM ordinatim poſitarum eandem rationem contineant quam circuli quorum radij ſunt HK ad circulos quorum radij ſunt FK. ergo patet conoides ABDC ad conum inſcriptum AGBDC, eam habere rationem quam ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBESA. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CXCIV.

SIt conoides ABCD incluſum cylindro EFCDG.

Oporteat autem rationem corporum aſſignare cylindri ſcilicet & conoideos.

Conſtructio & demonſtratio.



DVcatur per axem communem AH planum quod exhibeat parallelogrammum rectangulum GB, & hyperbolam BAD. ductâque rectâ DA ponatur linea IL parallela DB, quę biſecet AD in K, & rectangulo IKL fiat æquale rectangulum ſuper HB & NM; & deſcribatur parabola ANH cuius axis NM. Denique fiat rectangulum ſuper HB, & MO æquale quadrato KM, & deſcribatur AOBM parabola. Dico cylindrum EFGDCB ad inclusum conoides hyperbolicum eam rationem obtinere quam rectangulum AEBH ad ſuperficiē parabolicam ANHBOA. In præcedenti oſtenſum eſt hyperbolam ADH ductam in ſe æquari plano ANHBOA ducto in altitudinem HB. Ergo quod fit ex rectangulo GDHA, ducto in eandem altitudinem HB eſt ad hyperbolam ADH ductam in ſe vt GDHA, ſiue AHBE ad planum ANHBOA. ſed quam rationem habet AGDH ductum in ſe ſiue in altitudinem HB ad AIDH in ſe ductum eam quoque ſeruat corpus cylindricum ad conoidicum cùm quadrata linearum rectanguli AGDH ad quadrata ordinatim poſitarum in hyperbola ad axem AH, eandem habeant rationem quam circuli radijs earundem linearum deſcripti. Igitur a manifeſtum eſt cylindrum ad conoides habere rationem quam rectangulum AEB ad ſuperficiem ANHBOA. Quod fuit demonſtrandum.

a n 9. huius.

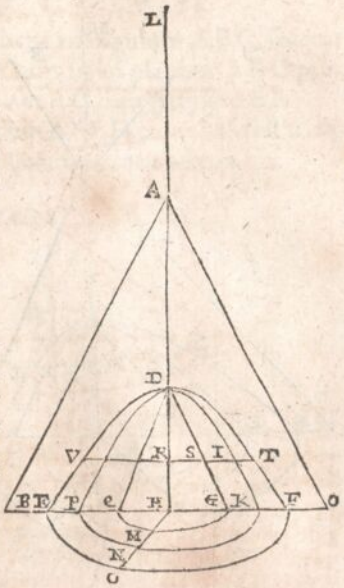
PROPOSITIO CXCV.

SInt AB, AC aſymptoti angulum rectum continentes hyperbolæ EDF, cuius vertex D; axis ADH. ponatur autem DG conſtituens angulum HDG ſemirectum. Ducatur deinde parabola DIK cuius latus rectum ſit æquale diametro tranſuerſę DL.

Dico conoides hyperbolicum DEOF æquari conoidi parabolico DPNK, ſimul cum cono DQMG.

Demon-

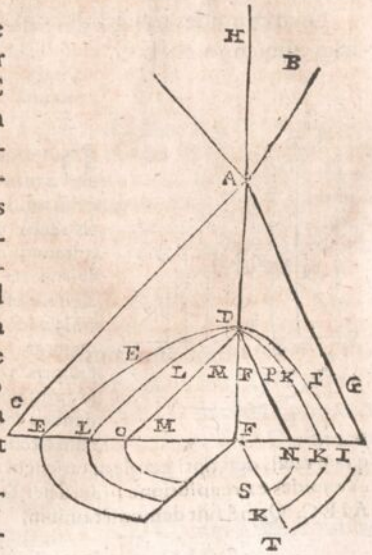
Demonſtratio.



POnatur enim R T parallela HF. Quoniam angulus B A C rectus ponitur, igitur tranſuerſa diameter & recta hyperbolæ D E F æquales [a] ſunt inter ſe. Vnde rectangulũ L H D æquale eſt [b] quadrato H F, & rectangulo L R D æquale R T quadratum, quia verò diameter tranſuerſa L D eſt parabolæ D I K latus rectum ex conſtructione; igitur rectangulo L D R æquatur quadratum R I, & rectangulum L D H æquatur H K quadrato. ſed rectangula L H D, L R D, æquantur [c] rectangulis L D H, L D R, cum quadratis D H, D R. ergo quadrata F H, T R æquantur quadratis K H, I R cum quadratis D H, D R, hoc eſt cum quadratis G H, S R, ſunt enim D H, D R pares G H, R S 5. primi; quod angulus G D H, ex hypotheſi ſit ſemirectus, anguli verò S R D, G H D recti. Cùm igitur quadrata R T, F H æqualia ſint quadratis I R, S R, & K H, G H: igitur D T F H ductum in ſe, æquale eſt D I K H ducto in ſe ſimul cum D S G H in ſe ducto, vt patet ex diſcurſu quadrageſimę quintæ libri de ductu plani in planum. ſed ſicut ſe habent quadrata T R, F H, ad bina quadrata I R, S R & bina K H, G H, ita ſe habent circuli quadratorum illorum lateribus tanquam radijs deſcripti. Igitur etiam conoides hyperbolicum D E O F æquale [d] eſt conoidi parabolico D P N K, ſimul cum cono D Q M G. Quod fuit demonſtrandum.

[a] 42. *hyp.*
[b] 60. *hyp.*
[c] 3. *ſecund.*
[d] 129. *huius.*

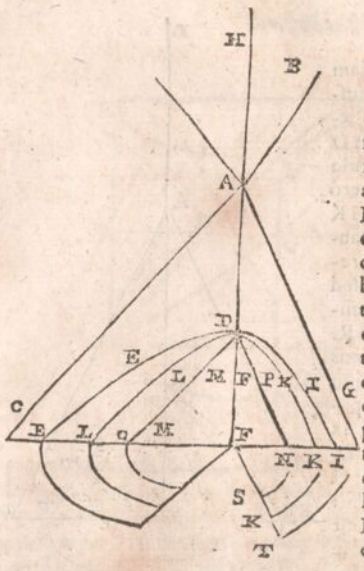
PROPOSITIO CXCVI.



SInt A B, A G aſymptoti figuræ D I F cuius axis D F, & diameter tranſuerſa D H. Conſtitutâ deinde A C quę cum axe A F angulum ſemirectum conſtituat, ponatur eidem A C parallela D M O: deinde ponatur D E E hyperbola cuius aſymptotos A C, & latus tranſuerſum H D, & ſimul ponatur parabola D L F, cuius latus rectum quoque ſit D H, tandem fiat vt F E ad F L, ita F I ad F K, & per puncta D K deſcribatur linea, ponaturque D N parallela A G, & circumuolutio D I F, D K F, D N F producat conidea & conum, cuius baſes circulares ſint I T, K K, N S.

Dico conoides hyperbolicum D I T æquari conoidi parabolico D K K ſimul cum cono D P N S.

De-



Demonſtratio.

CVm duæ hyperbolæ DEE, DII ad eandem diametrum tranſuerſam DH conſtitutæ ſint, ordinatim applicatæ vnius, ſcilicet IF ad IF eandem rationem obtinent [a] cum ratione ordinatim applicatarum alterius FE ad FE. ſed etiam ex eo quod EF ad LF, eandem rationem habeant ex conſtructione quam rectæ IF ad KF, etiam conſtat DKK eſſe parabolam per ea quæ libro de parabola præmiſimus. Quoniam igitur eſt quadratum IF ad FE quadratum vt circulus radij IF ad circulum radij FE. igitur vt conoides IF ad FE conoides, ita eſt conoides KF vnà cum cono PF ad conoides FL vnà cum cono FM. eſt autem propoſitione præcedenti demonſtrata æqualitas inter conoides EF & conoides LF cum cono MF. Igitur manifeſta eſt etiam æqualitas conoidis hyperbolici IF cum conoide KF & cono PF. Quod erat demonſtrandum.

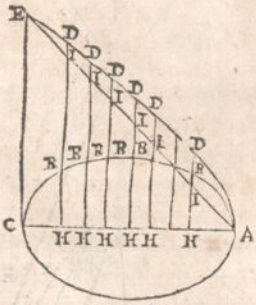
[a] Ex 1. de hyperb.

PROPOSITIO CXCVII.

SIt ellipſis ABC producens hyperbolam EDA, iuxta ea quæ [b] libro de hyperbola præmiſimus, & hyperbola conoides produxerit ADE, ellipſis verò ſphæroides ABC, triangulum quoque AIEC produxerit conum AIEC.

Dico conoides hyperbolicum ADEC æquale eſſe ſphæroidi ABC ſimul cum cono AIEC.

[b] Prop. 246.



Demonſtratio.

DVctis ordinatim ad AC axem rectis DIBH, ponantur AB, erunt AB ex conſtructione propoſitionis ſuprà citatæ in libro de hyperbola æqualis rectis DBH, & recta EC æqualis axi AC. eſt autem quadratum AB æquale quadratis AH & BH. Igitur etiam quadratum DH ijſdem quadratis AH, BH æquale eſt. ſed, quia AC, CE æquantur, etiam AH, IH, adeoque & quadrata AH, IH æquantur. ergo quadrata DH æquantur quadratis IH & BH ſimul ſumptis. Quare ſuperficies hyperbolica DH ducta [c] in ſe, æquale corpus formabit illis magnitudinibus quæ fient ex ductu planorum HB & HI, in ſeipſa. Quare cùm circuli ſuper quadratorum illorum lateribus tanquam radijs deſcripti eandem rationem inter ſe ſeruent quam ipſa quadrata, etiam [d] conoides ex reuolutione ſuperficiei DH æquabitur, & ſphæroidi ABC & cono AIEC. Quod fuit demonſtrandum.

[c] Colligitur ex diſcurſu 45. ducti.

[d] Ex 129. huius.

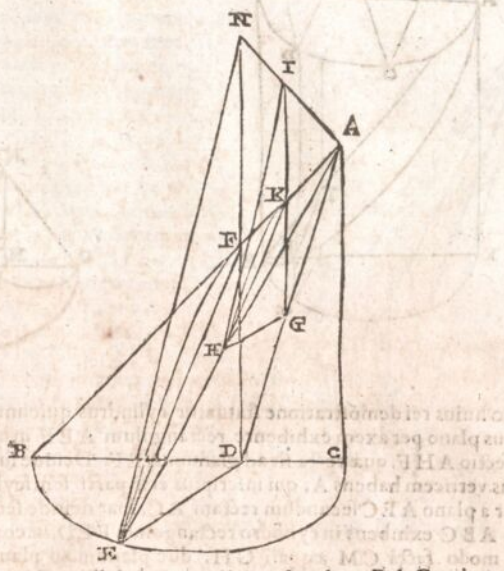
PRO-

PROPOSITIO CXCVIII.

SIt conus plano per axem sectus exhibens triangulum A B C, secetur autem & altero plano D F E quod rectum sit ad planum A B C producens in plano B A C sectionem parallelam A C, iungaturque E F.

Dico coni partem A F E D ad pyramidem A F E D cuius basis est triangulum D F E, vertex A habere rationem quam quatuor ad tria.

Demonstratio.



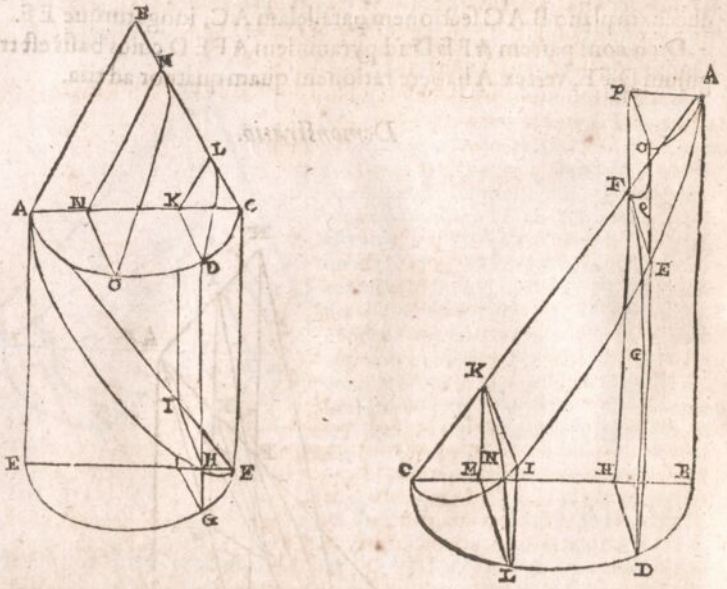
QVoniam sectio F D E est parallela lateri A C & recta plano B A C, erit parabola, quæ quoniam ad triangulum sibi inscriptum rationem habet eandem quam quatuor ad tria, manifestum est etiam segmentum conicum A F E D, cuius basis est parabola, ad pyramidem inscriptam cuius basis est triangulum D F E, eandem obtinere rationem quam quatuor ad tria; quod inscriptis pyramidibus, discursu illo ordinario elementi duodecimi nullius negocij est demonstrare; liquet ergo propositũ.

PROPOSITIO CXCIX.

HAbeat conus A B C & cylindrus C E communem basim A D C, cuius diameter A C diuisa sit vtcunque in N. factâ autem C K æquali rectę A N, fiant sectiones paraboliçe N M O & K L D. denique ponatur planum per rectam K D, æquidistans axi cylindri scilicet K D G; secetur tandem cylindrus plano A H F quod sit rectum ad planum per axem A C F formans in plano K D G sectionem I H.

Dico partem coni A B M O N ad partem L K D C, eam habere rationem quam pars cylindri K D C F H I C ad residuum I H F G.

Demonſtratio.



PRo huius rei demõſtratione ſtatuatur cylindrus quicunque ille ſit AEGFC ſectus plano per axem exhibente rectangulum AEF in quo ducta diagonali AF fiat ſectio AHF, quæ recta ſit ad planum AEF. Deinde ſuper baſi ADC, ponatur conus verticem habens A, qui inſcriptus erit parti ſemicylindri AECLB & tangetur à plano AEC ſecundùm rectam AC. Fiat deinde ſectio FEDH recta ad planum ABC exhibens in cylindro rectangulum FED, in cono verò parabolã FGD. Pari modo factâ CM æquali GH, duc planum ad planum ABC rectum, producens rectangulum KILM, & parabolam KNL. Vt FGDH parabola ad parabolam KNLM hoc eſt PFQO, ita eſt rectangulum FEDH, ad rectangulum KILM, hoc eſt ita eſt parabola MNO in cono ABC ad parabolam KLD: & hoc tam in omni ſubdiuiſione linearum BH, MC in cylindro quàm in omni ſubdiuiſione rectarum AN, KC in cono. ergo omnes parabolæ in parte coni ABMO ad parabolas in parte coni KLCD, vt omnia rectangula in parte cylindri AFEDH ad rectangula in parte cylindri IKCL, & vt parabolæ in parte coni ABMO ad rectangula in parte cylindri AFEDH, ita parabolę in parte coni KLCD ad rectangula in parte cylindri KILMC, ergo vt pars cylindri ad partem cylindri, ita quoque pars coni ad partem coni, cùm baſes ſemper ſint in eadem ratione & altitudines æquales, vel in vna eademque ratione. Qui accuratiorem huius rei demonſtrationem requirit, ſubdiuidat AN & KC, lineas bifariam in infinitum quæ ſunt in cono, & ſimiliter lineas BH, MC, in cylindro & ſectionibus factis per eadē puncta inſcriptas figuras inter ſe comparet, quarum inſcriptionē hîc & alibi breuitatis cauſa omiſimus.

PRO-

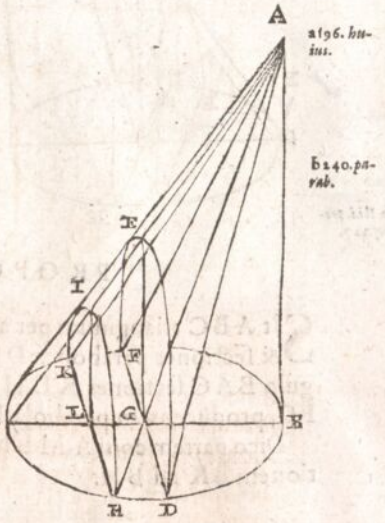
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1151] - 1094
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CC.

SIt triangulum per axem A B C ad coni baſim B D C rectum, ſumptiſque in communis interſectione B C punctis G & L, erigantur G E, L I quæ æquidiſtent lateri A B: & ductis G D, L H ordinatim ad B C fiant ſectiones ſecundùm lineas E G D & I L H.

Dico rationem ſolidi A D E F ad ſolidum A H I K triplicatam eſſe rationis D F ad H K.

Demonſtratio.



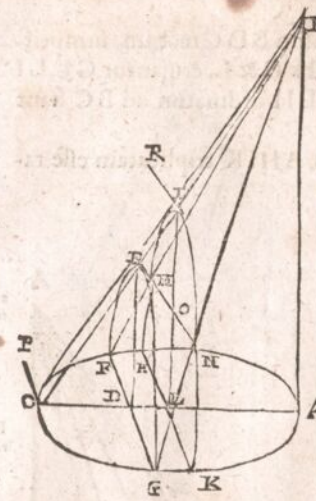
SOlida A D E F, A H I K ſunt ad a pyramides ſibi inſcriptas vt 4. ad 3. ergo & eandem habent rationem quam pyramides. ſed hæ compoſitam habent ex ratione triangulorum parabolis D E F, H I K inſcriptorum, (hoc eſt ex ratione ipſarum parabolarum D E F, H I K) & ex ratione altitudinum B G, B L. ergo ſolida A D E F, A H I K rationem habent compoſitam ex ratione parabolarum D E F, H I K, & ex ratione altitudinum B G, B L. ſed ratio parabolarum componitur ex ratione altitudinum G E, I L, (hoc eſt ex ratione G C ad L C) & ex ratione baſium D F, H K, ſeu D G, H L. ratio igitur ſolidorũ A D E F, A H I K componitur ex rationibus B G ad B L, & G C ad L C, & G D ad L H. ſed rationes B G ad B L, G C ad L C, componunt rationem rectanguli B G C, ad rectangulum B L C, hoc eſt rationem quadrati D G ad H L, hoc eſt rationem duplicatam D G ad H L. ergo ratio ſolidorum A D E F, A H I K compoſita eſt ex ratione duplicata rationis D G ad H L, & ex ratione D G ad H L. hoc eſt ratio ſolidorum triplicata eſt rationis D G ad H L, ſiue D F ad H K. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCI.

SEcetur iterum conus per axem ſectione recta ad baſim exhibente triangulum A B C, & punctis L & D in communi interſectione aſſumptis erigantur L I, D E, parallelę A B, & poſitis L K, D G ordinatim ad A C, fiant ſectiones parabolicæ per I L K & E D G. Denique planum agatur per B, & rectam G F occurrens parabolæ H I K ſecundùm rectam N O M.

Dico parabolam F E G ad M I N habere duplicatam eius rationem quam habet F G ad N M.

Demonſtratio.



a *Propoſ. 240 parab.*

b *Ibid. propoſ. 227.*

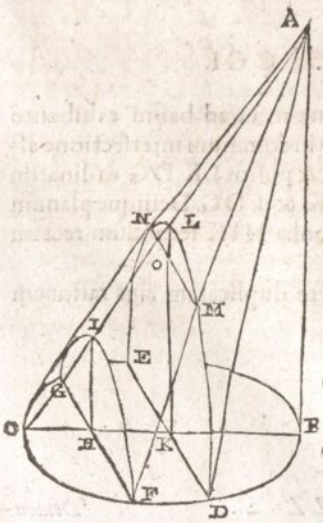
VT eſt GF ad NM, ita eſt BD ad OB, hoc eſt DE ad OI, igitur vt eſt GF ad NM, ita eſt DE ad OI. ſimilia igitur ſunt triangula maxima GEF & NIM, parabolis inſcripta, ac proinde eorum ratio eſt duplicata rationis laterum GF, NM. ſed in libro de parabola demonſtratũ eſt [a] parabolas eam inter ſe habere rationem quã triangula maxima inſcripta. ergo etiam parabola GEF ad parabolam NIM in duplicata eſt ratione GF ad NM. Quod autem triangula prædicta ſint maxima, quæ inſcribi poſſunt parabolis NIM, GEF, ſic oſtendo. LI, DE ſunt cõmunes ſectiones plani ABC recti ad baſim AGG, cum planis KHI, GEF, etiam rectis ad baſim. ergo 19. 11. LI, DE ſunt rectæ plano AAGC. ergo defin. 3. 11. etiam rectæ ſunt ad lineas KH, FG. ergo ſunt axes parabolarum KIH, GEF; liquet ergo [b] triangula NIM, GEF maxima eſſe.

PROPOSITIO CCII.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum, rectum ad baſim BDC, & ſectiones parabolicæ DLE, FIG exhibentes communes cum triangulo BAC ſectiones KL, HI. Deinde planum agatur per A & rectam FG, producens in parabola DLE ſectionem MN.

Dico partem coni AMLN ad partem AFIG, habere triplicatam rationem BK ad BH.

Demonſtratio.



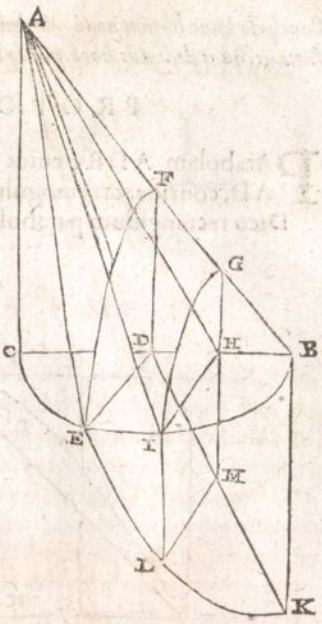
OStenſum eſt in præcedenti rationem parabolæ MLN ad parabolam FIG eſſe duplicatam rationis FG ad MN, ſiue LO ad IH, hoc eſt rationis AL ad AI, hoc eſt rationis BK ad BH. ſed manifeſtum quoque eſt partem coni AMLN ad partem coni AFIG, rationem habere compoſitam ex ratione baſis ad baſim, & ex ratione altitudinis BH ad altitudinem BK. Igitur ſi duplicatæ rationi BK ad BH, altera ratio BK ad BH, addatur in ſenſu multiplicationis, reſultabit ratio triplicata rationis BK ad BH. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCIII.

TRiangulum ABC per axem coni factum ſecet normaliter baſim BEC; & ex centro baſeos D erigatur DF, parallela AC; ſimiliter ex quouis puncto diametri

metri B C erigatur recta H G æquidistans similiter A C; ductisque perpendicularibus H I, D E fiant sectiones F D E, G H I. denique ponantur per rectas D E, H I, plana A D E, A H I. his positis supponatur quoque vngula D B K E, & planum G H I productum secet vngulam, exhibens communem sectionem rectangulum H I L M.

Dico eandem esse rationem solidi A F E D ad solidum A G I H, quæ est vngulæ B D E K ad partem B H I L M K.



a 200. huius.

b 21. huius eiusque Corell.

Demonstratio.

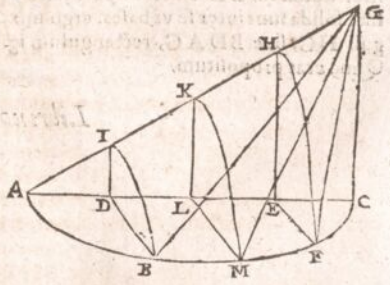
OStendimus a rationem solidi A F E D ad solidum A G I H, esse triplicatam eius quam habet D E linea ad lineam H I. sed etiam demonstratum est b vngulam B D E K ad partem suam B H I L K habere triplicatam rationem eiusdem D E ad H I. Igitur manifestum est corpora hæc inter se esse proportionalia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CCIV.

SIt A B C basis coni A G G; sumptis autem punctis D E in diametro æqualiter à centro distantibus, erigantur E H, D I quæ æquidistent G C lateri trianguli per axem, & per I D, H E fiant sectiones parabolicæ I D B, E H F aganturque plana secundùm D B & G, item E F & G.

Dico solida F G H E & B G I D, inter se æqualia esse.

Demonstratio.



POnatur per centrum baseos L planum K L M, quod æquidistet planis I D B, H E F, ponaturque planum per G & rectam L M. erit c ratio solidi G K M L ad solidum G I B D triplicata L M ad D B. similiter constat d rationē solidi G K M L ad solidum G H F E esse triplicatam eius quam habet L M ad E F. Igitur cùm D B sit æqualis E F (nam est ex hypothesi A D æqualis E C) habebit solidum G K M L ad vtrumque solidum G I B D, & G H F E eandem rationem; æquantur igitur solida G I B D, G H F E. Quod erat demonstrandum.

c 200. huius.

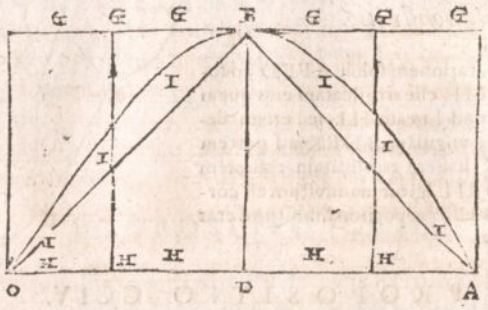
d Ex eadē.

Concludo hunc librum nouâ quadraturâ parabolæ, quæ diuersa omnino est à quadraturis ijs, quas dedimus libro quinto huius operis.

PROPOSITIO CCV.

PArabolam ADB, cuius axis sit DB, ordinatim ad axem posita AD, contineat rectangulum BDAG.
Dico rectangulum parabolæ sesquialterum esse.

Demonstratio.



a *Prop. 163.* DVcatur diameter HG. Demonstratum est in libro ductuum a, solidum quod fit ex ductu trianguli AGB in se, hoc est pyramidem cuius basis est quadratum BG altitudo BD, æquari solido quod fit ex plano GI, ducto in altitudinem BD. ergo solidum quod fit ex GI, in BD altitudinem, & pyramis eandem habent rationem ad HG rectangulum ductum in eandem altitudinem BD. sed pyramis illa cuius nimirum basis est quadratum BG, altitudo BD, est solidi quod fit ex ductu
b *7. duodec.* rectanguli GH in altitudinem BD, tertia b pars. ergo & solidum quod fit ex GI in altitudinem BD est tertia pars solidi, quod fit ex GH, in altitudinem BD; sed hæc solida sunt inter se vt bases. ergo mixtilineum planum GI, est tertia pars rectanguli HG, siue BDAG, rectangulum igitur BDAG parabolæ sesquialterum est. Quod erat propositum.

Libri noni Finis.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER DECIMVS.

ARGVMENTVM.

Iandem aliquando vt operi coronidem imponamus, tempus est ea ad praxim redigere, quæ hucvsque præmisimus: varias etenim materias tractauimus, quæ ab inuicem valde separatæ nonnemini videbuntur. sed præsentis libri decursus ostendet eas disparatas nequaquam esse: vtemur enim in hoc libro medullâ præcedentibus excluſâ applicando eam circulo ad quadratum seu rectilineam figuram reducendo: quod vt præstaremus, primò conati sumus cylindrum ad eidem æquale solidum reducere, quod curuitate saltem circulari careret; proprietates etiam illius corporis varias indagauimus: restat hoc demum libro ex harum proprietatum secundùm proportionem collatione eruamus, quales sint inter segmenta cylindrica rationes, ac proinde quæ proportio existat inter bases eorumdem segmentorum; quo tandem innotescat inter circularem & rectilineam figuram Geometrica proportio.

PARTITIO LIBRI.

Prima pars Lemmata complectitur quæ varijs quadraturis concinnandis inseruire poterunt.

Secunda pars quadraturas varias circuli exhibet, modosque reducendi cylindrica corpora ad rectilineas magnitudines solidas.

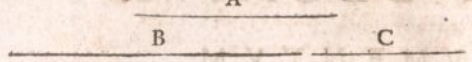
Tertia denique hyperbolem quoque per cylindricum hyperbolicum ad rectilinea solida reductum, ad figuras rectilineas planas reducit.

PARS

PARS PRIMA

Lemmata aliquot complectitur variis quadraturis concinnandis inseruientia.

PROPOSITIO PRIMA.



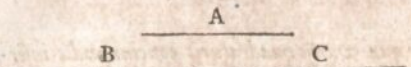
RAtionis A ad B consequenti termino B, adiungatur quantitas C.

Dico magnitudinem C additam B, minuere rationem A ad B, ac proinde rationē A ad B C minorem esse quàm sit ratio A B.

Demonstratio.

EX elementis constat quod eadem quantitas ad maiorem quantitatem minorem rationem habeat quàm ad maiorem: est autem B cum C, maior quàm sit sola quātitas B. Igitur ratio A ad B C, minorem habet rationem quàm eadem A habeat ad solam B, quæ est minor quàm sit vtraque B C, hæc autem alteratio rationis non contingit nisi per augmentum quanticatis C adueniens ipsi B, igitur accessus C ad B, diminuit rationem A ad B.

PROPOSITIO II.



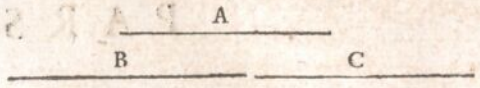
IIsdem positis:

Dico quod tantò minor sit futura ratio A ad B C, ratione A ad B, quantò minor est quantitas B, quantitate B C.

Demonstratio.

IN libro proportionalitatum Geometricarum prop. 7. demonstrauimus rationem A ad B C, eam habere proportionem ad rationem A B, quam reciprocè habet consequens secundum B, ad primum B C. quantò igitur B quantitas minor est quantitate B C, tantò minor est ratio A ad B C, ratione A ad B.

PROPOSITIO III.



DAta sit ratio A ad quamuis aliam quantitatem diuisam in B & C.

Dico rationem A ad B C æquari rationi A B diminutæ per rationem, quæ oritur ex magnitudine C addita quantitati B.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1157] - 1100
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

ITa decreſcit ratio A ad B, per augmentum C additum B, ſicut augetur ratio B A per idem C additum B; ſed ratio B A per augmentum C format rationem B C ad A. Igitur etiam ratio A ad B per C additum B, efficit rationem A ad B C, quæ eſt appoſita rationi B C ad A.

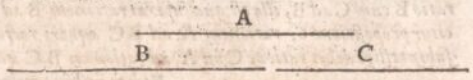
Paulò aliter.

ITa ſe habet ratio A B ad rationem A, B C, vt quantitas B C eſt ad B. ſed B minor eſt quàm ſit B C magnitudine C. Igitur etiam ratio A ad B C, minor eſt ratione A ad B, ratione quæ cauſatur à quantitate C addita magnitudini B.

PROPOSITIO IV.

ILſdem poſitis:
Dico proportionem quæ eſt inter rationem A ad B, & rationem A ad B C, eandem eſſe cum proportione quam habet ratio B C ad B, ad rationem inter B & B.

Demonſtratio.



RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, eſt vt B C [a] ad B. ſed ratio B C ad B, ad rationem B ad B, eſt etiam vt B C [b] ad B. ergo ratio A B ad rationem A ad B C, eſt eadem cum ratione B C ad B, ad rationem B ad B. Quod fuit demonſtrandum.

[a] 7. *Prop.*
[b] 2. *Prop.*

PROPOSITIO V.

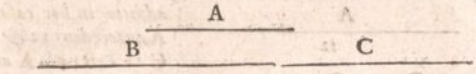
ILſdem poſitis:
Dico quod ratio A ad B, excedit rationem A ad B C, ratione C ad B.

Demonſtratio.

RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, per præcedentem æquatur rationi B C ad B, ad rationem B ad B. ſed ratio B C ad B, ſuperat [c] rationem B ad B, ratione C ad B. Igitur etiam ratio A ad B, ſuperat rationem A ad B C, ratione C ad B. Quod fuit demonſtrandum.

[c] 114. *Prop.*

PROPOSITIO VI.



DAta ſit ratio A ad quamuis aliam diuiſam in B & C.
Dico rationem A ad B C æquari rationi A ad B, minùs ratione C ad A.

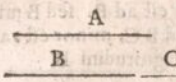
Demonſtratio.

RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, eſt vt B C ad B. Item ratio B C ad A, ad rationem B ad A, eſt vt B C ad B. Igitur ratio A ad B, ad rationem A ad

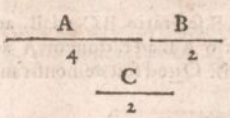
BC, eadem est cum ratione B C ad A, ad rationem B ad A. sed ratio B C ad A, excedit rationem B ad A, ratione C ad A. Igitur etiam ratio A ad B excedit rationem A ad B C, ratione C ad A. Quod fuit demonstrandum.

Scholion.

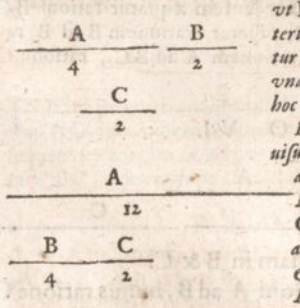
VIdentur propositiones præmissæ quarta, quinta, & sexta se inuicem omnino destruere, ac proinde vel altera vel vtraque non rectè subsistere. Verùm si rectè intelligantur prout postulat materia quæ spectat proportiones rationum, altera alterius videbitur esse confirmatio.



Ponantur itaque denno duæ quantitates, vna A, altera diuisa in duas scilicet B & C, asserit quinta propositio rationem A ad B, excedere rationem A ad B C, ratione C ad B, sexta verò rationem A ad B, excedere rationem A ad B C, ratione C ad A; vnde necessariò videbitur inferri, quod ratio C ad B sit eadem cum ratione C ad A, quod tamen elementis repugnat. Verùm ad soluendam hanc difficultatem sciendum est, hos excessus non esse absolutos, sed respectiuos, cùm hic modus argumentandi sit is, quo semper vti oportet in proportionalitatibus. Asserit itaque quinta propositio quod ratio A B excedat rationem A ad B C, ratione C ad B, non qualicumque sed ratione C ad B relata ad rationem C cum B ad B, ratio enim excessus in materia rationum semper requirit aliam determinatam rationem cum qua conferatur, alioquin rationes excessuum inter omnes rationes semper essent æquales. Et sic sensus est, rationem excessus quo ratio A B superat rationem A ad B C, qui est ratio C ad B, debere conferri cum sola ratione B C ad B; nam ratio B cum C ad B, illa est quæ superat rationem B ad B, ratione C ad B. Similiter cùm dicitur propositione 6. rationem A ad B C æquari rationi A ad B, minùs ratione C ad A, subintelligi debet ratione C ad A, ad rationem B C ad A.



Vt hæc meliùs percipiantur, idem planè euenire ostendemus in additione verâ, quando scilicet antecedens diuisum est in duo, & consequens est commune. Sit itaque A B antecedens & C consequens: si petatur qualis sit ratio A ad C, & B ad C, communis determinatio quidem est quã docuimus prop. 114. l. de proportional. quod sit vt A B ad C: sed hanc ipsam rationem aliter determinare iam placet, vt determinationem aliquam habeamus quæ communis sit, & in hoc casu, in quo antecedens diuisum est, & in præcedenti in quo consequens diuisum est. Dico itaque in hoc casu rationem A ad C, & B ad C, esse rationem A ad C, auctam ratione B ad C; non qualicumque, sed rationis A B ad C. Itaq; sit ratio A ad C, vt 4. ad 2. siue dupla, tota verò ratio A B ad C, vt 6. ad 2. siue tripla, itaque cùm rationi A ad C, addenda sit ratio B ad C, rationis A B ad C, inquirendum est quam rationem habeat ratio B ad C, ad rationem B A ad C, illa autem per 2. lib. de proportional. est vt B ad A B. itaque cùm B sit 2. & A B sit 6. erit B vna tertia A B; itaq; rationi A ad C, quæ erat ratio dupla addatur vna tertia rationis A B ad C, quod fiet si ad A adiungas vnam tertiam A B, exurget ratio tripla qualem habet A B hoc est 6. ad C hoc est ad 2.

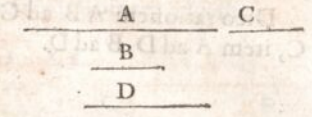


Eodem prorsus modo procedendum est cùm consequens diuisum: primâ enim determinatione vti non possumus cùm additio in hoc casu nobis vsui esse non possit. Sit itaque A antecedens 12 & consequens B C diuisum in B 4, & C 2. Erit ratio A ad B, vt 12 ad 4 siue tripla, & ratio A ad B C, erit dupla: quæritur iam quæ sit ratio A ad B, & A ad C, & secundùm sensum iam explicatum respondeo A ad B, & A ad C, esse rationem æqualem rationi A ad B, minus siue mutilatæ ratione C ad A, rationis B C ad A. Cùm itaq; ratio C ad A, ad rationem B C ad A, sit vt C ad B C, per 2. lib. de proportional. & cùm C ad B C, sit vt vnũ ad 3; itaque à ratione A ad B, hoc est à ratione tripla auferatur vna tertia rationis A ad B, remanebit ratio dupla qualem habet A ad B C, auferetur autem à ratione A ad B, vna tertia rationis A ad B, si ad B adiunxeris vnam tertiam totius B C.

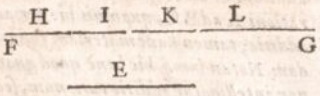
Sed

Sed hoc ipſum quod iam aſſumpſi explicandum eſt, quod ſcilicet auferatur aliqua ratio à ratione A ad B, ſi ad quantitatem B addatur quantitas C, vti & creſcere rationem B ad A, ſi ad B addatur aliqua quantitas C, quod ex Euclidæis elementis ſatis quidem patet, tamen tuerit claritatis causâ hanc materiam explicaſſe.

Sciendum eſt igitur rationes augeri non tantùm per additiones rationum, & multiplicationes, item minui non tantùm per ſubtractiones rationum, verùm etiam per ſolum incrementũ vel decrementum quantitatis adiunctæ vel demptæ ab altero terminorum, antecedente ſcilicet vel conſequente altero etiam manente inuariato: Poſitâ enim ratione A ad B, ſi ipſi A quantitati addatur quantitas C, exſurget ratio A cum C ad B, maior ratione eâ quam ſola quantitas A habet ad quantitatem B. pari pacto euenit ſi ratio B ad A comparetur, & ipſi A eadem quantitas C addatur, tunc ratio B ad A, per augmentum quantitatis aduenientis ipſi A reddetur diminuta, & quidem ſecundùm eam proportionem truncata, quæ reſultat ex variâ accretione factâ ipſi magnitudini A vt iam oſtensũ eſt. Poſitâ verò alterâ D quantitate, reſultabit ratio D ad A longè alia quàm fuerit ratio B ad A; & ratio D ad A C quantitatem longè alia quàm fuerit ratio B ad A C quantitatem; remanebit tamen ratio D ad A, ad rationem D ad C, eadem cum ratione B ad A, ad rationem B ad C, ſiue remanebit proportio rationis D A ad D C rationem, eadem cum proportione rationis B A ad B C, vt demonſtraui prop. 3. l. de proportional. eodem prorſus modo quo ratio A ad B, longè diuerſa eſt à ratione A ad D, & ſimiliter ratio C ad B, longè alia quàm ſit ratio C ad D; nihilominus proportio rationis A ad B, ad rationem C ad B, eadem eſt cum proportione rationis A ad D, ad rationem C ad D, & quemadmodum rectè dicitur ratio A cum C quantitate ad magnitudinem B, æquatur rationi A ad B, & C ad B per accretionem rationis, ita quoque rectè loquemur rationem B ad A, ſimul cum ratione B ad C, per mutilationem conſtituere rationem B ad A C mutilatam.



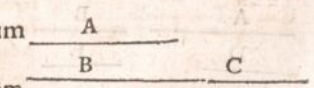
Quod autem de augmento C dictum eſt aduenienſ ipſi A, intelligi debet de quouis augmento. Nam ratio E ad F G, diuiſam in partes H, I, K, L, nihil aliud eſt quàm ratio E ad H, & E ad I, & E ad K, & E ad L, ſecundùm intentionẽ propoſitionum quintæ & ſextæ.



Nam ſicut in vera additione ſecundùm ea quæ docuimus prop 114. l. de proport. rectè dicitur F G ad E, conſtari ex rationibus H ad E, I ad E, K ad E, L ad E, ſibi adiunctis, ita diminuendo rationem rectè dicemus, rationem E ad H G, æquari rationi E ad H, diminutæ per rationem E ad I, E ad K, E ad L, iuxta ſenſum antè datum ſcilicet augendo quantitatem H per additionem quantitatum I, K & L. Ex his itaque hoc modo intellectis ſequentem propoſitionem formabimus.

PROPOSITIO VII.

SIt rationis A ad B C conſequens diuiſum in B & C.



Dico rationem A ad totam B C, eandem eſſe cum ratione A ad B, & A ad C.

Demonſtratio.

ESt enim ratio A ad B C, æqualis rationi A ad B, mulctatæ ratione C ad A, per 6. huius. Sed ratio A ad B, & A ad C, etiam æqualis eſt rationi A ad B, diminutæ per rationem C ad A, iuxta iam dicta in Scholio præc. igitur ratio A ad totam B C, eſt eadem cum ratione A ad B, ſimul cum ratione A ad C.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1160] - 1103
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO VIII.



SInt iam rationes AB ad CD, termini tam antecedens quàm consequens diuisi, & antecedens quidem in A & B, consequens verò in C & D.

Dico rationem AB ad CD, eandem esse cum ratione A ad C, B ad C, item A ad D, B ad D.

Demonstratio.

a *Per 114. de propor.*

RAtio A ad C, addita rationi B ad C, æqualis est rationi A B ad C. a Item ratio A ad D, addita rationi B ad D, æqualis est rationi A B ad D. Itaque cùm ratio A B ad C, vnà cum ratione A B ad D, æqualis sit rationi A B ad C D per præc. patet rationem AB ad CD, æquari rationibus A ad C, B ad C, vnà cum rationibus A ad D, & B ad D.

Scholion.



ATque hæc propositio de quibusuis subdiuisionibus quantitatum A B, C D *intelligenda est, cùm planè vniuersalis sit propositio, vt consideranti patet.*

Potuissem quidem propositionem septimam tamquam veram assumere, cùm eius veritas satis patuerit ex sensu contrario additionis veræ; ostenderam enim in 114. *lib. proport.* B *ad* A, *additam* C *ad* A, *facere rationem* B C *ad* A, *vnde facilè patebat* A *ad* B, *&* A *ad* C, *æquari rationi* A *ad* B C, *quamuis hic per additionem quantitatis* C *ad* B, *fieret detractio & non additio; tamen hanc materiam fusiùs deducendam putaui, adeoq; cum posset, etiam demonstrãdam. Notandumq; hic benè quod quando dicitur ratio* A *ad* B, *simul cum ratione* A *ad* C, *quod non intelligatur additio rationum, sed tantùm intelligitur additio quantitatis* C *ad* B, *manente* A *inuariato, quod in gratiam eorum monendum duxi qui additione hac non benè intellectâ additionem rationum intelligerent, vbi nos additionem quantitatum volumus; clarum est enim, quòd si rationi* A *ad* B, *addas rationem* A *ad* C, *rationem* A *ad* B, *non minuendam sed augendam, cùm tamen secundùm sensum nostrum minui debeat, addita scilicet quantitate ad quantitatem termini consequentis.*

PROPOSITIO IX.



SI proportionales fuerint quantitates A B C, D E F, æquales verò sint C & F.

Dico rationem A ad D, duplicatam esse eius rationis quam habet B ad E.

Demonstratio.

VIde lib. progressionum Geometricarum propositione vigesimaseptima.

PRO-

PROPOSITIO X.

QVod si ratio A D duplicata fuerit rationis B ad E, & proportionales sint A B C, D E F.

Dico C & F quantitates æquales esse.

ESt conuersa præcedentis, eiusque demonstratio facilè elicitur ex hypothesi.

PROPOSITIO XI.

SI ratio A B duplicata fuerit rationis eius quã continet ratio C ad D, ratio verò C ad D, duplicata sit eius quam habet ratio E ad F;

A C E
I D F
K
B

Dico rationem A ad B, quadruplicatam esse rationis E ad F.

Demonstratio.

FIat vt C ad D, ita A ad I: vtque E ad F, ita I ad K: erit itaque ratio A ad B, duplicata rationis I ad B, vel A ad I: & ratio I ad B, vel A ad I, duplicata I ad K, vel K ad B. Composita autem est ratio A ad B, ex ratione A ad I, hoc est I ad B, hoc est duplicata K ad B, & ex ratione I ad K, & K ad B, quæ cùm æquales sint inter se & simul æquales rationi A ad I, patet rationem A ad B, quadruplicatam esse K ad B, siue E ad F. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

SInt quatuor ordines quinque proportionalium A B C D E, & F G H I K: deinde L M N O P, & Q R S T V, habentium vltimas quantitates E, K, P, V, æquales inter se.

A B C D E
F G H I K
L M N O P
Q R S T V

Dico rationem quantitatum A F ad L Q, toties continere rationem quantitatum C H ad N S, quoties ratio quantitatum C H ad N S, continet rationem quantitatum D I ad O T.

Demonstratio.

RAtio A cum F ad L Q, æquatur rationi A L, A Q & F L, F Q. [a] Similiter ratio quantitatum C H ad N S, æquatur rationi C N, C S, & H N, H S, quemadmodum etiam ratio D, cum I ad O T, æquatur rationi D O, D T, & I O, I T; [b] ergo quoties rationes A L, A Q, F L, F Q continent rationes C N, C S, H N, H S: & quoties hæ continent rationes D O, D T, I O, I T, toties continet etiam ratio A F ad L Q, rationem C H ad N S, & hæc ipsa rationem D I ad O T.

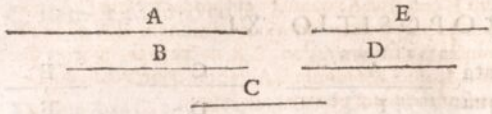
[a] Per 8. huius.

[b] Per eandem.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1162] - 1105
PUBLIC DOMAIN

a 27. Progr. Sed ratio [a] AL continet per multiplicationē bis CN, & ratio CN per multiplicationem continet bis rationem DO: Ratio quoque AQ bis continet rationem CS, & hæc bis continet rationem DT atque ita de reliquis: igitur quoties ratio quantitatum AF ad LQ, continet rationem quantitatum CH ad NS, toties hæc ipsa ratio quantitatum CH ad NS, continet rationem quantitatum DI ad OT. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.



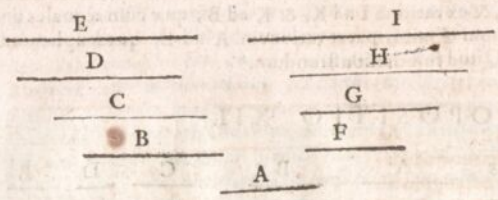
SInt proportionales ABC, CDE extremum terminum C habentes communem.

Dico rationem duplicatam rationis B ad C, additam rationi duplicatæ rationis D ad C, æquari rationi ipsius A cum E ad C.

Demonstratio.

b 114. Proportionalit. RAtio enim duplicata rationis B ad C, est ratio A ad C, & ratio duplicata rationis D ad C, est ratio E ad C. sed ratio A ad C, addita rationi E ad C, [b] æquatur rationi A cum E ad C: Igitur etiam ratio duplicata B ad C, addita duplicatæ rationi D ad C exhibet rationem A cum E ad C. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.



SInt proportionales quantitates ABC DE & AFGHI; quæ habeant communem terminum A.

Dico rationem EA additam rationi IA, æqualem illi constituere rationem, quam exhibet ratio CA ducta in se addita GA rationi in se ductæ.

Demonstratio.

c 82. Proportionalit. d 114. Proport. QVoniam A,B,C,D,E sunt in continua, erunt etiam A,C,E in continua: pari modo quia A,F,G,H,I sunt in continua, erunt & A,G,I in continua. ratio igitur EA duplicata est rationis CA, & ratio IA duplicata rationis GA. Ergo [c] ratio CA ducta in se producit rationem EA, & ratio GA ducta in se producit rationem IA. Sed ratio E ad A, addita rationi I ad A, producit [c] rationem EI ad A, [d] igitur ratio CA ducta in se addita rationi GA, ductæ in se producit etiam rationem EI ad A. constat itaque veritas propos.

PROPOSITIO XV.

IIsdem positis:

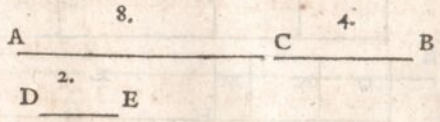
Dico rationem EA additam rationi IA, toties continere rationem CA, ductam in se additam rationi GA in se ductæ, quoties ratio CA ducta in se addita rationi GA in se ductę, continet BA quater in se ductam additam rationi FA similiter quater in se ductæ.

Demon-

Demonſtratio.

PRæcedenti eſt oſtenſum rationem C A in ſe ductam additam rationi G A, ductæ in ſe, exhibere rationem E cum I ad A: ſimili pacto inibi eſt demonſtratum rationẽ B A ductam in ſe additam rationi F A in ſe ductæ producere rationem C cum G ad A. ſed ratio B A in ſe quater ducta profert rationem E A, & ratio F A quater ducta dat rationem I ad A, quas rationes etiam producunt ratio C A in ſe ducta, & ratio G A ductá in ſe: cùm igitur ratio B A, quater ducta in ſe, addita F A rationi quater in ſe ductæ exhibeat rationem E cum I ad A, quam etiam producit ratio C A in ſe ducta addita rationi G A ductæ in ſe; patet toties continere rationem E A additam rationi I A, rationem C A in ſe ductam additam rationi G A ductæ in ſe, quoties hæ continent rationem B A quater in ſe ductã, additam F A, rationi quater in ſe ductæ: nam vtraque bis in altera continetur in eodem genere continendi.

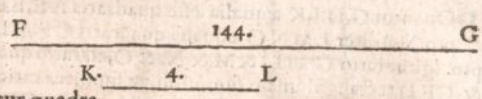
PROPOSITIO XVI.



LInea A B diuiſa ſit vtcunque in C, & data ſit quæuis alia D E.

Dico rationem quadrati A B ad D E quadratum, æqualem eſſe rationi quadrati A C ad D E quadratum, & quadrati C B ad D E, quadratum ſimul cum ratione rectanguli A C B ad D E quadratum bis ſumptâ.

Demonſtratio.



QVadratum enim A B æquatur quadratis A C, C B, & A C B rectangulo bis ſumpto. ſed ratio quadrati A C ad D E quadratum, addita rationi quadrati C B ad D E quadratum, æquatur rationi quadratorum A C, C B ad D E quadratum: [a] ſimiliter ratio quadratorum A C, C B ad D E quadratum, addita rationi rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum, efficit rationem quadrati A B ad D E quadratum; [b] igitur patet rationem quadrati A B, ad D E quadratum, æquari rationi quadrati A C ad D E quadratum, cum ratione quadrati C B ad D E, ſimul cum ratione rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum. Idem quoque patebit in numeris. Quadratum enim A B ponatur eſſe F G. & fiat vt quadratum A B ad D E quadratum, ita F G ad K L; ſitque A C quadrato æquale M N; quadrato verò C B æquale O P, denique rectangulo A C B æquale Q R vel S T. ergo M N, O P, Q R, S T æqualia ſunt F G. Oſtenſum verò eſt quod ratio F G ad K L, eadem ſit cum ratione M N ad K L, & O P ad K L, Q R ad K L, & S T ad K L: igitur collecta in vnam ſummam M N, O P, Q R, S T cùm exhibeant V æquale F G, patet quadratum F G ad K L, hoc eſt quadratum A B ad D E, eandem habere rationem, cum ratione quadrati A C ad D E, C B ad D E, & rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum. Quod erat demonſtrandum.

F. 144. G. K. 4. L.
M. 64. N.
O. 16. P.
Q. 32. R.
S. 32. T.
144.
V.

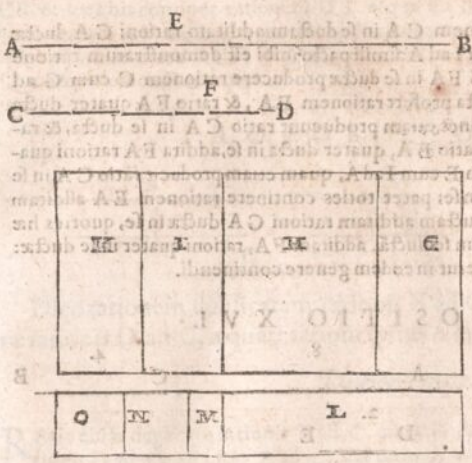
[a] *Per 114. propoſ.*

[b] *Per cand.*

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1164] - 1107
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XVII.



SInt AB, CD diuiſæ vtcunque in E & F.

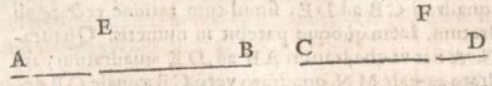
Dico rationẽ quadrati AB ad CD, eandem eſſe cum ratione AE quadrati ad CF, & FD quadrata, vnà cum ratione quadrati AE ad rectangulum CFD bis ſumptâ; inſuper cum ratione addita quadrati EB ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis ſumptum, ſimul cum ratione rectanguli AEB bis ſumpti ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis.

Demonſtratio.

POnantur G, H, I, K æqualia eſſe quadratis AE, EB, & rectangulo AEB bis ſumpto. Similiter LMNO æqualia quadratis CF, FD & rectangulo CFD bis ſumpto. Igitur ratio G ad L, & M. & N. & O, eſt ratio quadrati AE ad quadrata CF, FD, & CFD rectangulum bis ſumptum, & ſimiliter ratio H ad L, M, N, O, eſt ratio quadrati EB ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis ſumptum, tandem etiam ratio I vel K ad L, M, N, O eſt ratio rectanguli AEB ad quadrata CF, FD & rectangulum CFD. ſed etiam ratio G ad L, M, N, O, addita rationi H ad eadem L, M, N, O, æqualis eſt rationi G H ad L, M, N, O,[a] & conſequenter ratio G cum H ad L, M, N, O, addita rationi I vel K ad L, M, N, O, æquatur G H I vel K ad eadem L, M, N, O, hoc eſt rationi totius G K ad totum L O. Igitur etiam ratio quadrati AE ad CF, FD quadrata vnà cum duobus rectangulis CFD, addita rationi quadrati EB ad eaſdem quantitates, ſimul cum additione rationis rectanguli AEB bis ſumpti, ad eaſdem, æquatur rationi quadrati AB ad CD. Quod erat demonſtrandum.

[a] Per 8. huius.

PROPOSITIO XVIII.



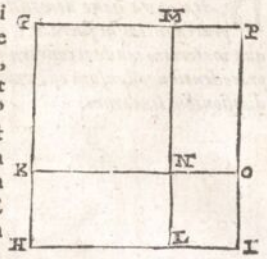
SInt AB & CD, vtcunque diuiſæ in E & F.

Dico AB ductum in CD æquari AE in CF, & AE in FD ſimul cum EB in CF, & EB ducto in FD.

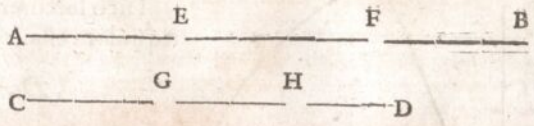
Demon-

Demonſtratio.

FIat rectangulũ G I, ex GH æquali AB, & HI æquali CD, quod ęquale erit AB ductę in CD: diuiſis deinde GH, HI in K & L, ſecundũ rationẽ quâ diuiſæ ſunt AB, CD in E & F; ponantur KO, LM quæ æquidiſtent GH, HI. erunt igitur rectangula KL, NI, GN, NP æqualia toti GH in HI, hoc eſt AB ducto in CD: eſt autem KL æquale AE in CF, & NI æquale AE in FD; & GN æquale EB in CF, & NP æquale EB in FD. Igitur etiam AB ductum in CD, æquale eſt AE in CF, & AE in FD ſimul cum EB in CF, & EB in FD. Quod fuit demonſtrandum.

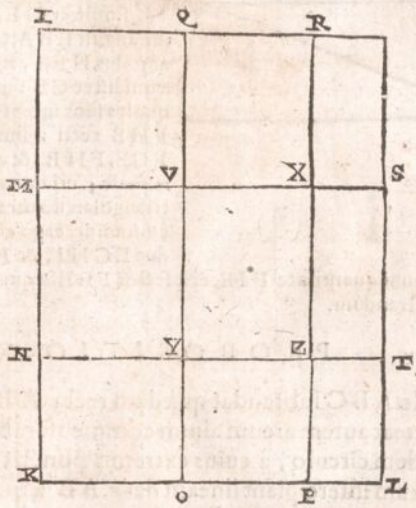


PROPOSITIO XIX.



QVod ſi AB, CD diuiſæ ſint vtcunque in EF & GH.

Dico AB ductum in CD, ęquari AE in CG; AE in GH; AE in HD; ſimul cum EF in CG, GH, HD; vnà cum FB in CG, GH, HD.



Demonſtratio.

FIat rectangulum IL ex IK, æquali AB & KL, æquali CD. erit igitur IL æquale AB ducto in CD, diuiſis autem IK, KL in M, N & O, P, ſecundùm eandem rationem qua diuiſæ ſunt AB & CD in E, F, G, H; ponantur MS, NT, & OQ, PR quæ æquidiſtent IK, KCL. erũt igitur rectangula IV, QX, RS, cum rectangulis MY, VZ, XT, & rectangulis NO, YP, ZL æqualia toti IL, hoc eſt AB ducto in CD: ſunt autem IV, QX, RS, æqualia AE in CG, GH, HD: inſuper MY, VZ, XT æqualia EF in CG, GH, HD: denique NO, YP, ZL, æqualia FB, in CG, GH, HD. Igitur etiam AB ductum in CD æquatur ijſdem AE ſcilicet in CG, GH, HD, ſimul cum EF in CG, GH, HD, & FB in eoſdem CG, GH, HD. Quod erat demonſtrandum.

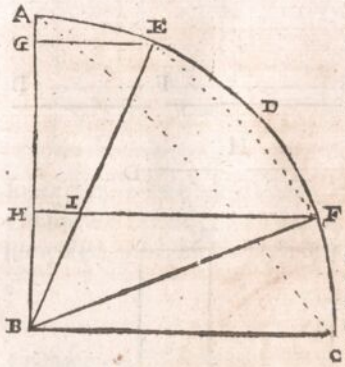
Scholion.

DAta opera hanc demonſtrationem conatus ſum ijſdem verbis demonſtrare, quibus in præcedenti vſus fueram; quo ſubterfugerem occaſionem plures formandi propoſitiones quæ materiam eandem concernunt, & ſolo differunt numero diuiſionum; vnde quod duabus præcedentibus oſtenſum eſt, vniuerſaliter aſſumi poterit de quouis numero partium reperto in diuiſionibus linearum.

PROPOSITIO XX.

SIt quadrantis A B C arcus A C biſectus in D, fiantque D E, D F æquales arcus; & ex E & F ponantur E G, F H quæ æquidiſtent C B, iungunturque B E, B F.

Dico ſectorem E B F figuræ E G H F æqualem eſſe.



Demonſtratio.

QVoniam arcus D A, D C æquales ſunt, & ſimiliter D E, D F ex conſtructione; igitur anguli E B A, C B F [a] æquales ſunt. Atqui angulus H F B, æqualis F B C, quoniam F H æquidiſtet C B: igitur anguli E B A, H F B æquales ſunt inter ſe. ſunt autem anguli E G B, F H B recti; ſimilia itaque ſunt triangula E G B, F H B: & quia latus E B lateri F B eſt æquale; etiam æqualia inter ſe ſunt eadem triangula: eſt autem I H B triangulum vtrique commune, ergo communi ablato I H B, reſidua E G H I, & F I B æqualia erunt. Additâ igitur communi quantitate F I E, erit ſector F B E æqualis figuræ E G H F. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Ex elementis.*

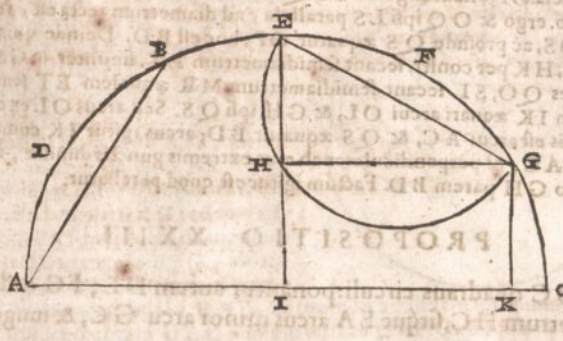
PROPOSITIO XXI.

IN circulo A B C ſubtendat quædam recta A B arcum A D B.

Oporteat autem arcum alium commenſurabilem arcui A D B, exhibere in eodem circulo, à cuius extremis punctis perpendiculares ductæ ad diametrum intercipiant lineam datæ A B æqualem.

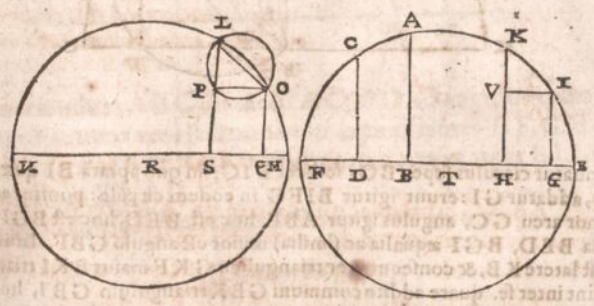
Conſtru-

Conſtructio & demonſtratio.



PONatur E F G commenſurabilis aliquis arcus arcui A D B, cuius ſubtenſa ſit E G maior A B, ſubtenſâ arcus A D B. deſcripto deinde circulo E H G ſuper diametro E G, ponatur G H æqualis A B; quod fieri poterit, cùm E G diameter maior ponatur recta A B, per centrum denique circuli A B C ponatur A C diameter, quæ æquidiſtet G H; & demittatur E H I, & huic æquidiſtet G K. Dico factum quod requiritur. angulus enim E H G rectus cùm ſit, etiam E I K rectus erit, vti & angulus G K I. vnde rectangulum eſt H K: & H G æqualis I K, hoc eſt A B, eſtque arcus E F G commenſurabilis A D B ex conſtructione. quare perfectum eſt quod requiſitum fuit.

PROPOSITIO XXII.



SInt A B, C D normaliter poſitæ ad diametrum E F.

Oporteat aliquem arcum I K conſtituere in eodem circulo commenſurabilem arcui A C, ex cuius extremis lineæ K H & I G, perpendiculariter demiſſæ ad diametrum intercipiant G H rectam æqualem B D.

Conſtructio & demonſtratio.

DEſcribatur centro R circulus M L N æqualis E A F, in quo aſſumatur aliquis arcus O L commenſurabilis arcui A C, cuius ſubtenſa O L, maior ſit quàm B D, & diametro O L ducatur circulus L P O, & ponatur O P æqualis B D, ductiſque L P S, O Q parallelis inter ſe per punctum R ducatur M R N parallela O P, & ex

centro T. fiat TH æqualis RS, & MQ æqualis EG, & erigantur HK, GI perpendiculariter ad EF diametrum.

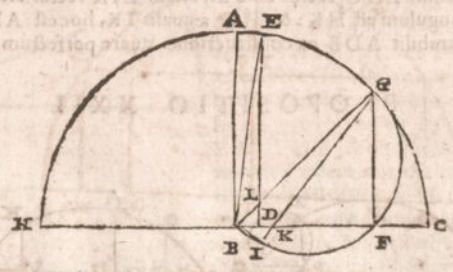
Dico arcum IK, eum esse qui petitur. Quoniam angulus OPL rectus est, estque MN parallela OP, etiam angulus BSQ rectus est, adeoque SL perpendicularis est diametro. ergo & OQ ipsi LS parallela, ad diametrum recta est, rectangulum igitur est OS, ac proinde QS æquatur OP, hoc est BD. Deinde quia perpendiculares GI, HK per constr. secant semidiametrum ET, similiter in G & H, vt perpendiculares QO, SL secant semidiametrum MR æqualem ET semidiametro, patet arcum IK æquari arcui OL, & GH ipsi QS. Sed arcus OL ex constr. commensurabilis est arcui AC, & QS æquatur BD; arcus igitur IK commensurabilis est arcui AC, & perpendiculares ab eius extremis punctis dimissæ, intercipiunt ex diametro GH parem BD. Factum igitur est quod petebatur.

PROPOSITIO XXIII.

SIt ABC quadrans circuli: ponantur autem DE, FG ordinatim ad diametrum HC, sitque EA arcus minor arcu GC, & iungantur EB, GB.

Dico segmentum EDFG maius esse sectore EBG.

Demonstratio.



DEscribatur circulus super BG, scilicet BIG; in quo aptatâ BI quæ sit æqualis BD, addatur GI: erunt igitur BIFG in eodem circulo: ponitur autem arcus AE minor arcu GC, angulus igitur ABE, hoc est BED, hoc est BGI (sunt enim triangula BED, BGI æqualia ac similia) minor est angulo GBF, latus igitur GK maius est latere KB, & consequenter triangulum GKF maius BKI triangulo, cùm similia sint inter se. quare addito communi GBK triangulum GBI, hoc est EBD minus est triangulo GBF, ablato denique communi triangulo LBD, remanebit EBL minus quàm GLDF, addito igitur communi ELG, erit sector EBG minor segmento EDFG. Quod erat demonstrandum.

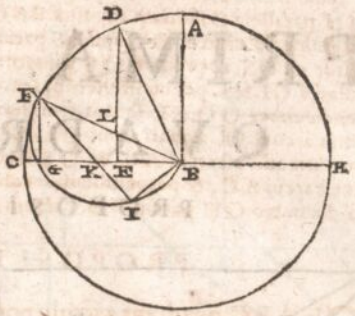
PROPOSITIO XXIV.

IN quadrante circuli ABC positæ sint ordinatim rectæ DE, FG ad diametrum HC, & iungantur DB, FB. sit verò arcus AD maior arcu FC.

Dico segmentum circuli DEGF minus esse sectore DBF.

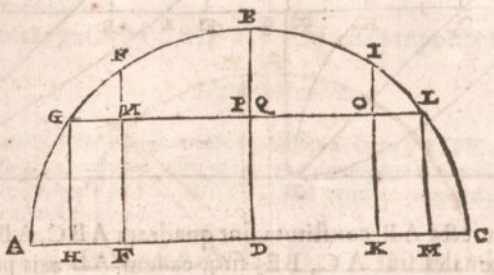
Demon-

Demonſtratio.



DEſcribatur circulus BIF ſuper diametro BF cui inſcribatur BI, æqualis BE, iungaturque FI. erit igitur triangulum BFI æquale ac ſimile triangulo BDE, adeoque angulus BFI æqualis angulo BDE, & quia arcus AD maior eſt arcu FC, erit angulus ABD, hoc eſt BDE, hoc eſt BFI, maior angulo FBC, ac proinde latus BK maius latere KF, & conſequenter triangulum BKI maius ſibi ſimili triangulo FKG: addito igitur communi BFK, maius eſt triangulum BFI, hoc eſt BDE triangulo BFG, ablato communi triangulo BLE, remanebit trapezium LEGF minus triangulo DBL, ac proinde addita rurſus communi quantitate DLF erit ſegmentum DEGF minus ſectore DBF. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.



DIuidant circulum ABC diametri AC, BD ad angulos rectos conſtitutæ: diametro verò BD ponantur æquidiſtantes EF, GH & IK, LM, intercipientes HF & KM æquales lineas, ita vt arcus BI, LC ſint æquales vti & arcus EB, AG.

Dico etiam GE, IL æquales arcus eſſe.

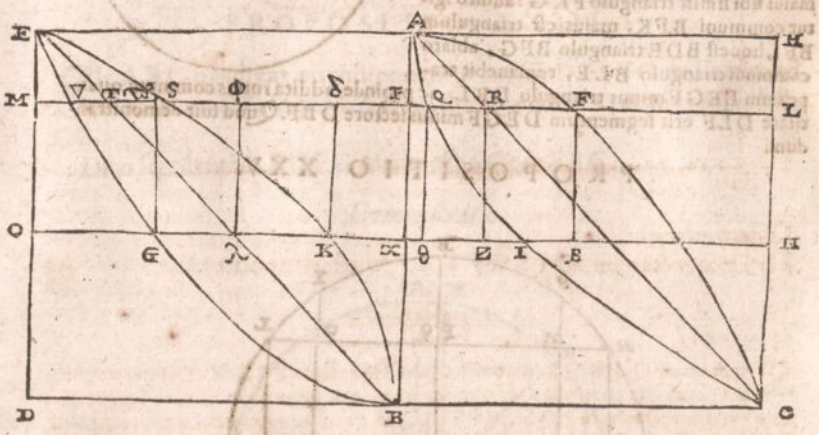
Demonſtratio.

DVcantur LQ, GP, quæ æquidiſtent AC. Quoniam IB arcus æqualis eſt arcui LC, igitur IK æqualis eſt rectæ LQ. ſimiliter EF æqualis erit ob eandem rationem rectæ GP; & conſequenter IO æqualis rectæ OL, id eſt KM, quemadmodum linea EN lineæ GN, id eſt HF. vnde cùm recta HF ſit æqualis KM, ex ſuppoſitione, etiam EN rectę IO eſt æqualis. Quoniam igitur æquales ſunt GN, ipſi OL, & EN ipſi IO, etiam quadrata GN, EN æquantur quadratis OL, IO, eſt autem quadratum ſubtenſæ arcus GE æquale quadratis GN, NE ſicut & quadratum ſubtenſę arcus IL æquale quadratis IO, OL. ergo quadrata ſubtenſarum arcubus GE, IL, ac proinde etiam ſubtenſæ ipſę æquantur. Igitur etiam arcus GE, IL ſunt æquales. Quod fuit demonſtrandum.

PARS SECVNDA:

PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO XXVI.



SVper recta AB, constituta sint quadrata ABC, ABD quorum diagonales sint AC, BE, sitq; eadem AB axis parabolarum subalternè constructarum AFC & BGE, quarum vertices sint A & B, sint denique rectæ AH & BD axes parabolarum AIC, BKE, quarum similiter vertices sint A & B, tandem ponatur quæuis LM, quę æquidistent CD, secetq; parabolas in F, Q, S, V, diagonales in R & T, lineam verò AB in P.

Dico tam PQ, PR, PL quàm PS, PT, PM esse in proportione continua.

Demonstratio.

VIde demonstrationem in libro de parabola propositione 67.

PROPOSITIO XXVII.

IIsdem positis:

Dico tam lineas PR, PF, PL, quàm rectas PT, PV, PM esse proportionales.

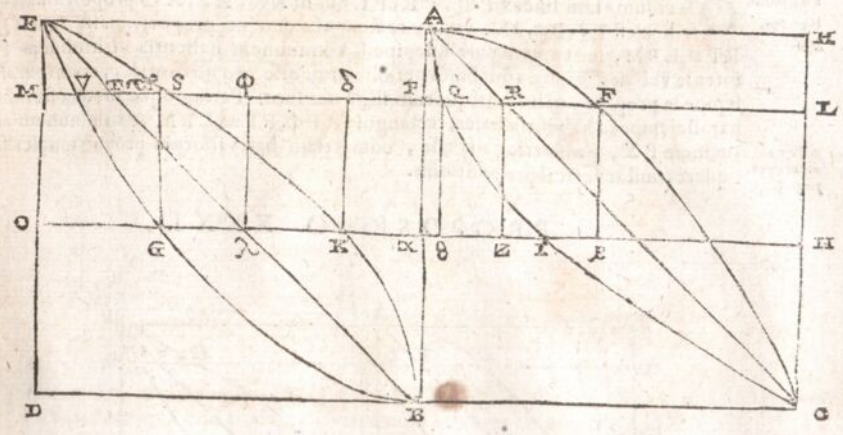
Demonstratio.

HOc pariter demonstratum inuenies eodem libro de parabola propositione 42.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1171] - 1114
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXVIII.



Iisdem manentibus:
Dico rectangula QPS, RPT, LPM esse proportionalia.

Demonstratio.

SVnt enim [a] PQ, PR, PL, in continua analogia: item PS, PT, PM per eandem sunt in analogia continua. ergo per ea quę demonstrauimus in libro progressionum [b] etiam rectangula PQS, RPT, LPM eandem proportionem continuant. Quod erat demonstrandum. [a] 26. huius. [b] 38. Progr.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem positis:
Dico rectangula RPT, FPV, LPM, eandem continuare analogiam.

Demonstratio.

OStensum est, [c] tam PR, PF, PL, quàm PT, PV, PM, esse in continua. ergo [d] etiam rectangula RPT, FPV, LPM sunt in continua analogia. Quod erat demonstrandum. [c] 27. huius. [d] 38. Progr.

PROPOSITIO XXX.

QVod si eadem manente figura ponatur NO parallela rectę CD siue LM occurrens sectionibus BKE, BGE in K & G, rectæ verò diagonali BE in λ, ex quibus punctis ponantur Kδ, λφ, Gϖ quæ æquidistent AB. Denique ex punctis Q, R, F, constituantur Qθ, RZ, Fβ quæ eidem rectæ AB sint parallelæ.

Dico parallelepipeda quę super basibus rectangulis QPδ, RPφ, LPM construuntur habentia communem altitudinem PX, proportionalia esse inter se, quemadmodum similiter sunt parallelepipeda super rectangulis RPφ, FPϖ, & LPM constituta, habentia communem quoque altitudinem PX.

Demon-

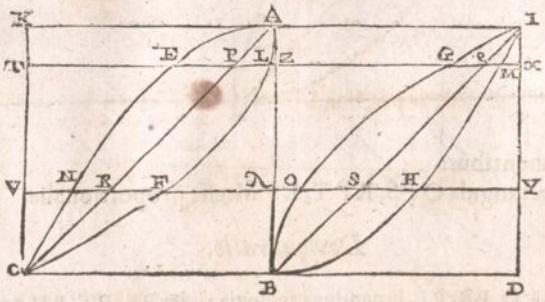
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1172] - 1115
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

a 28. huius. b 18. Progreſſ. OStenſum a tam lineas PQ, PR, PL quàm XK, Xλ, XO proportionales eſſe, hoc eſt Pδ, Pφ, PM. vnde b rectangula quoque proportionalia ſunt QPδ RPφ, LPM, ſunt autem parallelepipeda communem habentia altitudinem PX inter ſe vt baſes. quare cùm baſes perhibeantur eſſe proportionales, etiam parallelepipeda proportionalia ſunt, quorum illę baſes ſunt. Pari quoque modo oſtenditur parallelepipeda habentia baſes, rectangula RPφ, FPϖ, LPM & communem altitudinem PX, proportionalia eſſe, cùm etiam baſes illorum proportionales ſint. c quare conſtat veritas propoſitionis.

c Ex 29. huius & 18. progreſſ.

PROPOSITIO XXXI.



SVper AB conſtructis quadratis ABC, ABD, deſcriptis prętereа parabolis AEC, BHI quarum vertices ſint A & B, axes verò AB, BA; item parabolis AFC, BOI, quarum vertices etiam ſint A & B, axes verò AK, BD; poſitis inſuper EG, FH quę æquidiſtent CD, & ſectionibus occurrant in E, L, G, M & N, F, O, H, diagonalibus quoque AC, BI, in punctis P, Q, R, S.

Dico rectangulum LZG ad FλO, rectangulum duplicatam habere rationem eius, quam habet rectangulum PZQ ad RλS rectangulum.

Demonſtratio.

d 28. huius. e 9 huius. OStenſum eſt ſuprà d tam rectangula LZG, PZQ, TZX quàm rectangula FλO, RλS, VλY eandem continuare rationem. Quare cùm extrema rectangula TZX, VλY ſunt æqualia, erit e ratio rectanguli LZG, ad rectangulum FλO duplicata rationis quam habet rectangulum PZQ ad rectangulum RλS. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

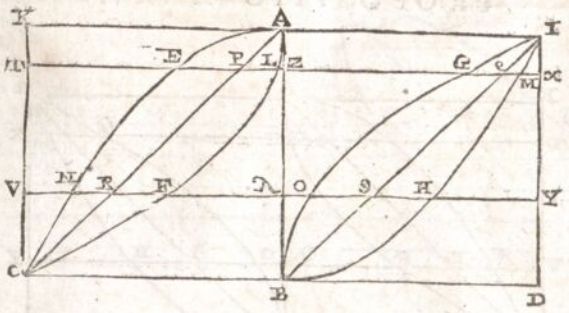
IIſdem manentibus:

Dico rectangulum PZQ ad RλS, duplicatam habere rectanguli EZM ad NλH rectangulum.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1173] - 1116
PUBLIC DOMAIN

Demonstratio.



OStensum est [a] tã rectangula P Z Q, E Z M, T Z X quã rectangula R λ S, N λ H, V λ Y in continua esse analogia. Quare cùm extrema rectangula T Z X, V λ Y æqualia sint, erit [b] ratio rectanguli P Z Q ad rectangulum R λ S duplicata rationis rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H. Quod erat demonstrandum. [a] 29. huius. [b] 9. huius.

PROPOSITIO XXXIII.

MAnentibus ijsdem:
Dico rectangulum L Z G ad rectangulum F λ O, quadruplicatam eius continere rationem, quam habet rectangulum E Z M ad N λ H rectangulum.

Demonstratio.

REctangulum L Z G ad F λ O, rectangulum duplicatam [c] habet eius rationem quam habet rectangulum P Z Q ad R λ S rectangulum, rectangulum autem P Z Q ad R λ S, habet duplicatam [d] eius quam rectangulum E Z M habet ad rectangulum N λ H. ergo rectangulum L Z G ad F λ O, quadruplicatam [e] habet eius rationem quam rectangulum E Z M habet ad rectangulum N λ H. Quod erat demonstrandum. [c] 31. huius. [d] 32. huius. [e] 11. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

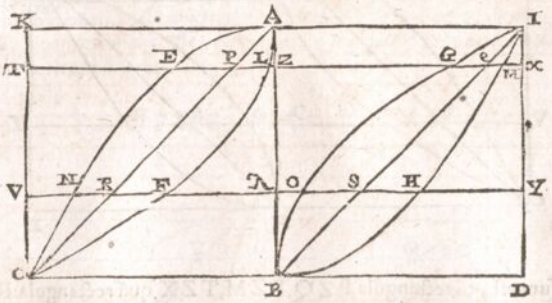
POsitis ijsdem:
Dico rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties hæc eadem ratio P Z Q ad rectangulum R λ S, continet per multiplicationem rationem rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H.

Demonstratio.

EX præcedentibus est manifesta. nam ostensum [f] est rationem rectanguli L Z G ad F λ O rectangulum, duplicatam esse eius, quam habet rectangulum P Z Q ad R λ S, ac proinde prior ratio secundam bis continet in sensu multiplicationis. Similiter est demonstratum [g] rectangulum P Z Q ad R λ S rectangulum duplicatam habere rationem eius quam habet rectangulum E Z M ad N λ H rectangulum; & cõsequenter etiam hæc prior ratio secundam bis continet in sensu multiplicationis. [f] 31. huius. [g] 32. huius.

Quare patet rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties hæc continet per multiplicationem rationem rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H.

PROPOSITIO XXXV.



ISdem permanentibus:

Dico parallelepipedum ex basi rectangula L Z G & altitudine Z λ, ad parallelepipedum ex basi rectangula F λ O, & eadem altitudine Z λ quadruplicatam habere rationem eius quam continet parallelepipedum ex basi rectangulâ E Z M & altitudine Z λ, ad parallelepipedum sub basi rectangulâ N λ H & communi altitudine Z λ.

Demonstratio.

a 33. huius. DEmonstratum est [a] rectangulum L Z G ad F λ O rectangulum habere quadruplicatam eius rationem, quam continet rectangulum E Z M ad N λ H. sunt autem parallelepipeda sub hisce basibus & communi altitudine Z λ inter se vt ipsæmet bases. Patet ergo veritas theorematis.

PROPOSITIO XXXVI.

EAdem figura manente:

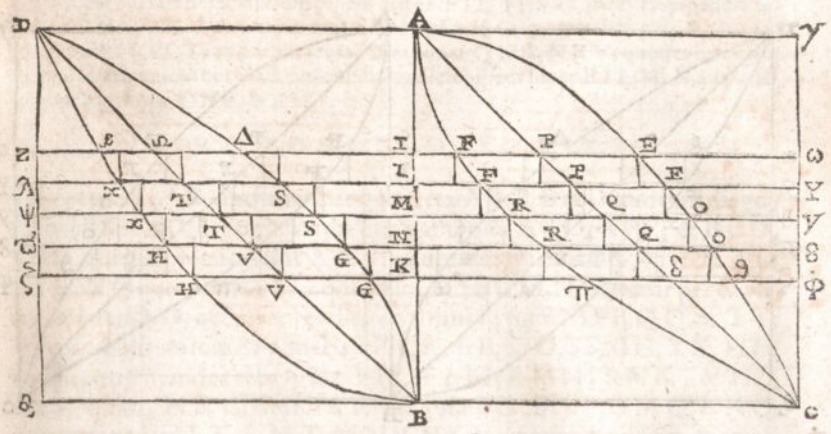
Dico rationem parallelepipedi quod fit ex basi rectangula L Z G ad parallelepipedum quod fit ex basi F λ O rectangula, toties continere per multiplicationem rationem parallelepipedi super basi rectangula P Z Q ad parallelepipedum super basi rectangula R λ S, quoties ratio hæc continet per multiplicationem rationem parallelepipedi super basi rectangula E Z M ad parallelepipedum quod fit super basi N λ H rectangula, modò pro omnibus parallelepipedis eadem sumatur altitudo, Z λ.

Demonstratio.

b 34. huius. DEmonstratum est [b] rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O toties cõtinere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties continet ratio rectanguli P Z Q ad R λ S rectangulum, rationem rectanguli E Z M ad N λ H rectangulum; parallelepipeda autem de quibus agimus talem sortiuntur inter se rationem qualem bases rectangulares super quibus erecta sunt, quoniam altitudines conueniunt ex hypothesi. Patet igitur veritas assertionis.

PRO-

Schema Commune.



PROPOSITIO XXXVII.

SVper rectâ A B constituantur quadrata A B C, B A D, quorum diagonales sint A C, B D: descriptisq; parabolis A E C, A F C, & B G D, B H D quarum vertices sint A & B, in linea A B assumantur quæcumque I L, N K, ponanturq; per I, L, N, K puncta parallelæ lateri A D occurrentes diagonalibus in punctis P, Q, T, V, parabolis autem in punctis F, R, E, O, S, G, X, H, compleantur deinde rectãgula F I L, R N K; I L S, N K G; item P I L, Q N K; I L T, N K V, denique E I L, I L X; O N K, N K H.

Dico parallelepipedum super F I L & I L S, ad parallelepipedum super R N K, N K G duplicatam habere rationem eius quam parallelepipedum super P I L, I L T, habet ad parallelepipedum super Q N K, N K V.

Demonstratio.

CVm enim [a] parallelepipeda super F I L, I L S, super P I L, I L T, super ω I L, I L λ sint proportionalia; item cùm proportionalia sint parallelepipeda super R N K, N K G, super Q N K, N K V, super θ N K, N K ξ, & cùm hæ duæ series vltima habeant æqualia, scilicet parallelepipedum super ω I L, I L λ, & super θ N K, N K ξ, patet [b] primum parallelepipedum vnius seriei ad primum alterius seriei esse in duplicata ratione secundi ad secundum. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per 30. huius.*

[b] *Per 9. huius.*

PROPOSITIO XXXVIII.

IIsdem positis:

Dico parallelepipedum super P I L, I L T, ad parallelepipedum super Q N K, N K V, duplicatam habere rationem eius quam parallelipipedum super E I L, I L X habet ad parallelepipedum super O N K, N K H.

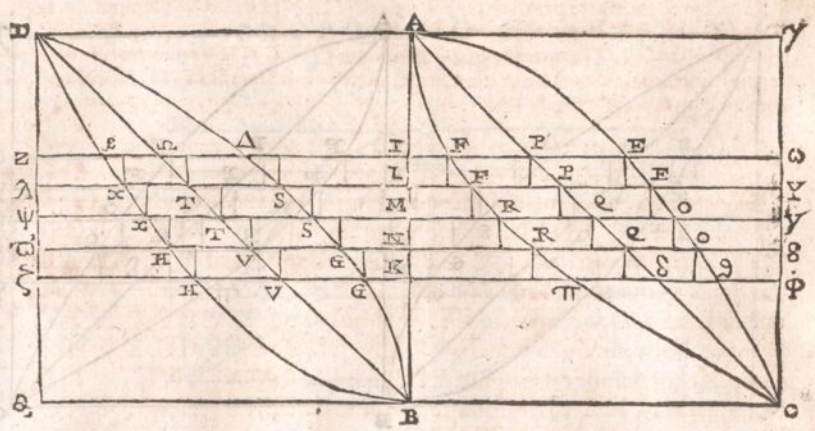
Demonstratio.

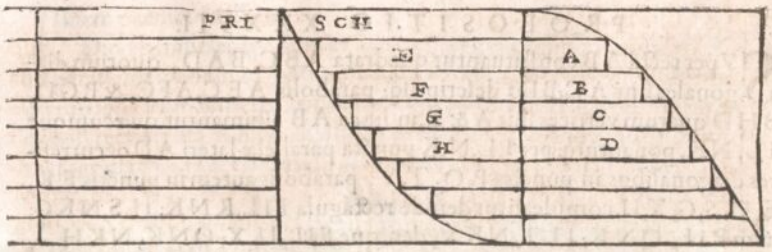
RVrsus enim [c] parallelepipeda super P I L, I L T, super E I L, I L X, super ω I L, I L λ sunt proporrionalia, item proportionalia sunt parallelepipeda super Q N K, N K V, super O N K, N K H, super θ N K, N K ξ, & vltima vtriusque seriei sunt æqualia, igitur [d] iterum primum parallelepipedum primę seriei est ad primum secundę seriei, vt secundum ad secundum. Quod erat demonstrandum.

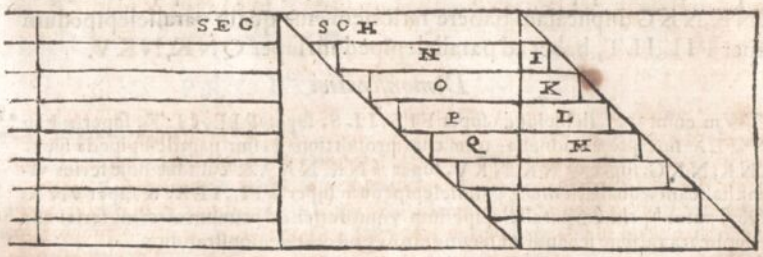
[c] *Per 30. huius.*

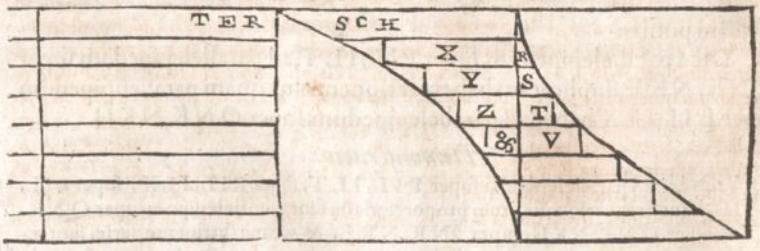
[d] *Per 9. huius.*

Schema *Commune.*









Corol-

Corollarium.

HInc patet rationem parallelepipedi ſuper FIL, ILS ad parallelepipedum ſuper RNK, NKG, toties per multiplicationem continere rationem parallelepipedi ſuper PIL, ILT, ad parallelepipedum ſuper QNK, NKV, quoties hæc ratio per multiplicationem continet rationem parallelepipedi ſuper EIL, ILX, ad parallelepipedum ſuper ONK, NKH.

PROPOSITIO XXXIX.

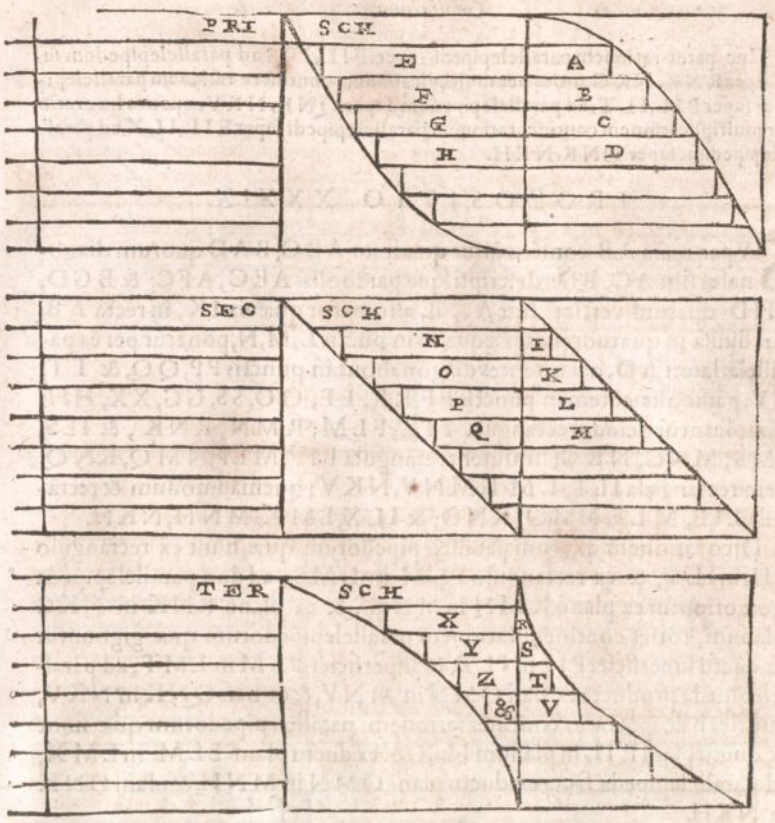
SVper recta AB conſtruantur quadrata ABC, BAD quorum diagonales ſint AC, BD: deſcriptiſque parabolis AEC, AFC, & BGD, BHD quarum vertices ſint A & B, aſſumatur quæuis IK, in recta AB; qua diuiſa in quatuor partes æquales in pũctis L, M, N, ponãtur per ea parallelæ lateri AD, occurrentes diagonalibus in punctis PP, QQ, & TT, VV; parabolis autem in punctis FF, RR, EE, OO, SS, GG, XX, HH: compleantur deinde rectangula FIL, FLM; RMN, RNK, & ILS, LMS, MNG, NKG; ſimiliter rectangula LIP, MLP, NMQ, KNQ: item rectangula ILT, LMT; MNV, NKV; quemadmodum & rectãgula LIE, MLE; NMO, KNO; & ILX, LMX; MNH, NKH.

Dico rationem duorum parallelepipedorum quæ fiunt ex rectangulo FIL in ILS, & ex rectangulo FLM in LMS, ad duo parallelepipeda quæ oriuntur ex plano RMN in MNG, & ex plano RNK in NKG planum, toties continere rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu ſuperficiei PIL in ILT, & ſuperficiei PLM in LMT, ad parallelepipeda producta ex baſi QMN in MNV, & ex baſi QNK in NKV, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum quæ fiunt ex ductu plani EIL in planum ILX, & ex ductu plani ELM in LMX, ad parallelepipeda facta ex ductu plani OMN in MNH, & plani ONK in NKH.

Demonſtratio.

AD confuſionem vitandam omnia hæc rectangula quæ in vnam figuram congeſta ſunt, in varias figuras ſegregabimus, & ſingulis rectangulis ſuam litteram inſcribemus qua ipſorum notitia habeatur, vt diſcurſus ratio nonnihil ſubleuetur: Primũ igitur ſchema particulare complectatur figuras in ſchemate vniuerſali conſtituras quæ terminantur in parabolis conuexis EO & HX. Secundum verò contineat eas quarum termini in figura vniuerſali ſunt rectę PQ & VT. Tertium denique figuras repræſentet concauas parabolas FR, GS, figuræ vniuerſalis. ſint autem primo ſchemati inſcripta rectangula A, B, C, D; & E, F, G, H. ſecundo ſimiliter rectangula I, K, L, M & NO, P, Q, tertio quoque rectangula R, S, T, V, X, Y, Z. & oſtendendum igitur eſt rationem parallelepipedorum ex R in X & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z, & V in &, toties continere per multiplicationem rationem parallelepipedorum quæ fiunt ex rectangulo I in N, & K in O, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda ex plano C in G, & D in H, quod ſic oſtendo. Ratio parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z, & V in & eſt eadem cum ratione parallelepipedi ex R in X ad parallelepipedum ex T in Z, & ex R in X ad V in &, ſimul cum ratione parallelepipedi ex S in Y ad parallelepipeda ex T in Z, & ex V in &. [a] ſimiliter ratio parallelepipedorum ex I in N, & ex K in O, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, eadem eſt cum ratione parallelepipedi ex

[a] *Per 8. huius.*



ex I in N, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q simul cum ratione parallelepipedi ex ductu K in O, ad eadem parallelepipeda ex L in P, & M in Q [a]. Denique ratio parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda quæ fiunt ex C in G, & D in H, eadem est cum ratione parallelepipedi quod oritur ex A in E, ad ea quæ fiunt ex C in G, & ex D in H, simul cum ratione quę resultat ex ratione parallelepipedi quod fit ex ductu B in F ad parallelepipeda facta ex ductu C in G, & D in H. Sed [b] ratio parallelepipedi ex R in X, ad parallelepipedum ex T in Z, toties multiplicat rationem parallelepipedi ex I in N, ad parallelepipedum quod est ex L in P, quoties ratio parallelepipedi facti ex ductu I in N ad parallelepipedum ex L in P, cõtinet rationem parallelepipedi ex A in E, ad C in G parallelepipedum, & ita deinceps ratio parallelepipedi ex R X ad V &, toties continet rationem parallelepipedi IN ad MQ, quoties ratio parallelepipedi IN ad MQ, continet rationem parallelepipedi ex AE ad DH parallelepipedum; & ita consequenter ratio parallelepipedi SY ad TZ, toties continet rationem KO ad LP, quoties hæc ratio KO ad LP, cõtinet rationem parallelepipedi ex B in F ad C in G. Denique toties etiam continet ratio parallelepipedi SY ad V &, rationem parallelepipedi KO ad MQ, quoties ratio parallelepipedi ex KO ad MQ, continet rationem parallelepipedi BF ad DH parallelepipedum. Igitur manifestum est quod ratio duorum parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad rationem parallelepipedorum duorum quæ fiunt ex T in Z, & V in

[a] *Per eandẽ*

[b] *Per Corollar. 38. huius.*

V in &, toties contineat rationem parallelepipedorum ex I in N, & K in O, ad parallelepipeda quæ fiunt ex L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda orta ex ductu plani C in G, & D in H. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

NE multiplicentur moroſæ demonſtrationes, propoſitionem præſentem extendi volumus ad caſus omnes qui altitudines horum parallelepipedorum bifariam, vel quadrifariam, vel ſecundùm quamcunque rationem in partes æquales diuiderent, ad multiplicanda rectangula quæ in aduerſæ figuræ rectangula ducta multiplicarent quemcunque numerum parallelepipedorum: nam diſcurſus demonſtrationis vnus & idem ſemper occurrit, vti propoſitione 8. huius eſt demonſtratum.

PROPOSITIO XL.

POſitis ijſdem:
Dico rationem ſolidi ex ductu plani parabolici R S in planum parabolicum X Y, ad ſolidum ortum ex ductu plani parabolici concaui T V in concauum parabolicum Z &, toties continere rationem ſolidi quod naſcitur ex ductu trapezij I K in trapezium N O, ad ſolidum quod fit ex trapezio L M ducto in trapezium P Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem corporis ex ductu parabolæ conuexæ A B, in E F parabolã conuexam, ad corpus ortum ex ductu C D parabolici conuexi in G H conuexum parabolicum.

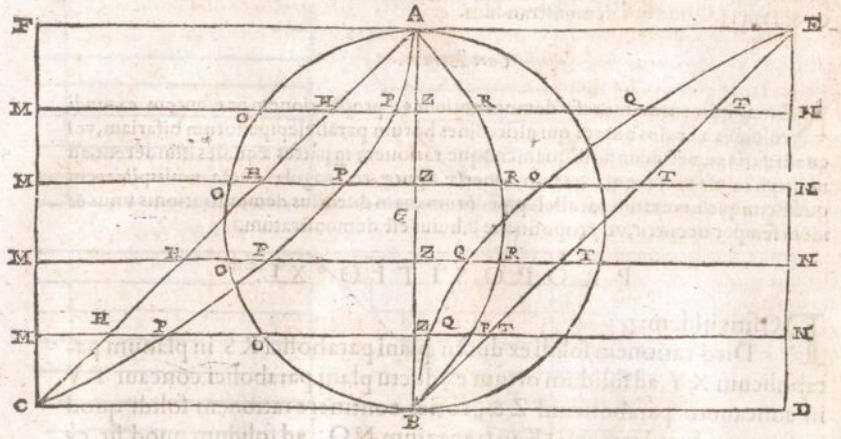
Demonſtratio.

OStenſum eſt propoſitione præcedenti & Corollario quod ratio medietatis figurarum inſcriptarũ tertio ſchemati ad alteram medietatem figurarum inſcriptarum, toties cõtineat rationem medietatis figurarum ſecundo ſchemati inſcriptarum ad alteram ſuam medietatem, quoties hęc ipſa ratio continet rationem medietatis figurarum primo ſchemati inſcriptarum ad reſiduam medietatem, & quia hoc ipſum ſemper fieri poteſt; igitur cùm terminis iſtius progreſſionis qui in ſchemate vniuerſali ſunt ωIZ & φKξ rectangula, conueniat eadem proprietas, & ratio rectanguli FIΔ ad rationem πKG, a toties contineat rationem rectanguli PIΩ ad ϑKV, quoties hæc ipſa ratio continet rationem rectanguli EIβ ad ϑKH, per propoſitionem vniuerſalem libri de ductibus quadrageſimam ſextam, etiam ratio ſolidi ex R S parabolico in X Y parabolicum, ad ſolidum ex parabolico concauo T V in Z &, toties cõtinet rationem ſolidi ex trapezio I K in N O, trapezium ad ſolidum ex trapezio L M in P Q, quoties hæc eadem ratio continebit rationem ſolidi ex ductu parabolici conuexi A B in E F, ad ſolidum ex ductu parabolici C D in conuexum parabolicum G H. Quod fuit demonſtrandum.

a *per 34. huius.*

PRO-

PROPOSITIO XLI.



SVper recta A B constituta sint quadrata A B C, A B D, quorum diametri A C, B E: his inscribantur parabolæ A P C, B Q E, quarum vertices sint A & B, axes verò A F, B D. Deinde A B bisectâ in G, centro G spatio G A, circulus describatur, ductisque rectis infinitis M O H P Z R Q N, parallelis ad C B D, ac proinde orthogonis ad A B, fiant vt M Z ad O Z, sic O Z ad Z R.

Dico puncta A R, R B esse ad parabolam.

DEmonstratum est in libro de parabola propositione 299.

PROPOSITIO XLII.

IIsdem positis:

Dico solidum quod producitur ex plano mixtilineo A P C B, in mixtilineum A B Q E æquari solido quod fit ex parabola A R B ductâ in se.

Demonstratio.

QVoniam M Z, O Z, Z R sunt proportionales, etiam quadrata ipsarum M Z, O Z, Z R erunt proportionalia. Similiter, quia [a] tam M Z, H Z, P Z, quàm N Z, T Z, Q Z sunt proportionalia, [b] etiam rectangula M Z N, H Z T, P Z Q erũt proportionalia: sed quadratum M Z æquatur rectangulo M Z N; & quadratum O Z æquale est A Z B, hoc est rectangulo H Z T, cùm enim B A æqualis sit tam A E quàm B C, etiam B Z ipsi Z T, & A Z ipsi H Z, ob triangulorum B A E, B Z T, A B C, A Z H similitudinem, æquales erunt. cùm igitur binę habeantur series quantitatum continuè proportionalium, quarum primi quatuor termini sint æquales inter se, liquet etiam reliquos, quadratum nempe Z R & rectangulum P Z Q, æquari. pari argumento omnia quadrata alia Z R rectangulis alijs omnibus P Z Q æqualia sunt. Ergo per 45. libri de duct. solidum quod fit ex plano A P C B ducto in planum A B Q E æquatur solido quod fit ex parabola A R B ductâ in seipsam. Quod erat propositum demonstrare.

[a] 26. huius.
[b] 38. Progr.

Corol.

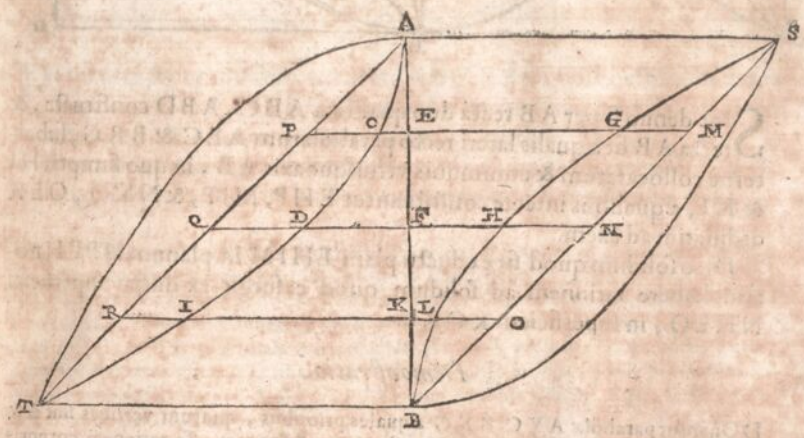
Corollarium primum.

EOdem discursu ostenditur solidum quod gignitur ex segmento mixtilineo PPZZ in mixtilineum segmentum ZZQQ æquari solido quod fit ex parabolico segmento ZRRZ ducto in se.

Corollarium secundum.

FAcile iam nobis erit solidum quod fit ex mixtilineo APPCB ducto in mixtilineum AZBQQE, ad parallelepipedum reducere. Nam parabola in se ducta producit segmentum cylindri parabolici, quam libro præcedenti vngulam vocauimus parabolicam, & cubauimus propositione 99. eiusdem libri. quare cùm corpus factum ex APCB in ABQE, æquale ostenderimus corpori quod gignit ARB parabola in se ducta, hoc est vngulæ parabolicæ, huius quoque habebitur cubatura, siue reductio ad parallelepipedum: habitâ autem cubatura totius solidi ex ABQE ducto in APCB, eodem artificio obtinebitur cubatura solidi quod fit ex segmento PPZZ ducto in segmentum ZRRZ.

PROPOSITIO XLIII.



SInt parabolæ ACD, BLG æquales sed subalternè positæ quas contingat AB æqualis lateri recto in A & B. Ponãtur insuper PCEGM, QDFHN, RIKLO normales ad AB, iungantur AT, BS, AS & BT.

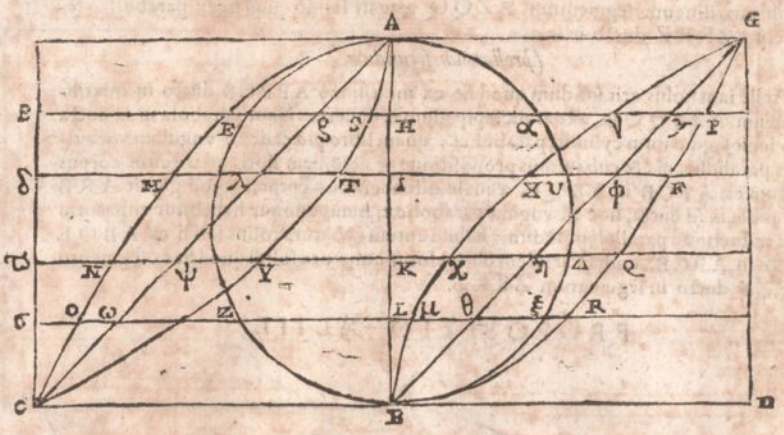
Dico rationem corporis orti ex ductu plani CEFD in planũ EGHF, ad corpus ex ductu plani DFKI in FHLK notam esse, insuper etiam rationem solidi quod fit ex plano PEFQ ducto in planum EMNF ad solidum quod fit ex QFKR plano in planum FNOK.

Demonstratio.

OStensum est[a] cui parallelepipedo æquetur corpus ex ductu mutuo planorum CEFD & EGHF. Insuper demonstratũ est cui parallelepipedo æquetur solidum ex planis PEFQ, EMNF [b] inter se multiplicatis, quemadmodum etiam de solido ex superficiebus QFKR & FNOK, inter se ductis: quare ratio corporum de quibus agit propositio, quę illis æqualia sunt etiam nota vel data est. Quod fuit demonstrandum.

[a] *Corr. secundo 42. huius.*
[b] *Ex 5. de duct.*

PROPOSITIO XLIV.



SInt denuo ſuper AB rectâ duo quadrata ABC, ABD conſtructa, & recta AB ſit æqualis lateri recto parabolarum AEC & BRG, ſubalternè collocatarum & communis vtriuſque axis AB, in quo ſumptis HI & KL, æqualibus inter ſe conſtituantur EHP, MIF, & NKQ, OLR ordinatim ad axem.

Dico ſolidum quod fit ex ductu plani EHIM in planum HPFI, notam habere rationem ad ſolidum quod exſurgit ex ductu ſuperficiei NKLO, in ſuperficiem KQRL.

Demonſtratio.

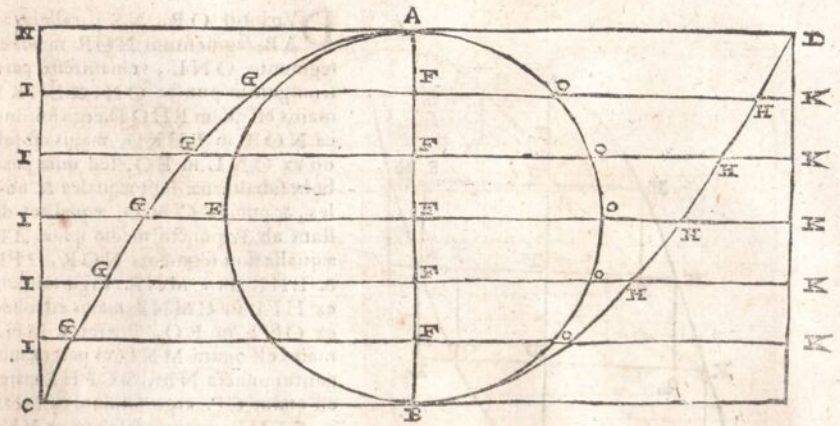
a 43. huius. b Per 44 and. c 40. huius.

POnantur parabolæ AYC, BXG æquales prioribus, quarum vertices ſint A & B, contingantque AB in A & B. oſtenſum eſt [a] notam eſſe rationem corporis quod fit ex ductu SHIT in HγXI, ad corpus ex ductu ſuperficiei YKLZ in KκμL. Similiter demonſtratum eſt [b] notam eſſe rationẽ ſolidi ex ductu plani HϱλI in HγφI, ad ſolidum productum ex ductu ψKLω in planum KηθL. Demonſtratum autem eſt [c] rationem corporis orti ex ductu SHIT in HγXI, ad corpus ortum ex ductu plani YKLZ in KκμL, toties continere rationem corporis orti ex ductu plani HϱλI in HγφI, ad corpus ex ductu ψKILω in KηθL, quoties hæc ratio continet rationem corporis orti ex ductu HEMI in HIFP, ad corpus ortum ex ductu plani KNOL in KLRQ. Igitur cùm notæ ſint prima, & ſecunda ratio, notum quoque eſt quoties prima ſecundam contineat, ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda contineat tertiam: itaque cùm ſecunda ratio ſcilicet corporis orti ex ductu plani HϱλI in HγφI, ad corpus ortum ex ductu ψKLω in KηθL nota ſit, etiam nota erit ratio corporis quod oritur ex ductu ſuperficiei EHIM in HPFI ad corpus ortum ex ductu ſuperficiei NKLO in KQRL. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1183] - 1126
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XLV.



POnantur ſuper AB duo quadrata ABC,BAD, quibus inſcriptæ duę ſemiparabolæ AGC,BHD ſitu ſubalterno circa communem axem AB, & ſuper AB diametro ſemicirculus deſcribatur AEB.

Dico corpus quod producit parabola AGC ducta in parabolã BHD, æquari ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus AEB, altitudo AB.

DEmonſtrationem dedimus libro de ductu plani in planum propoſitione 143. illic enim oſtenſum eſt parabolas ſubalternè poſitas, quarum communis axis eſt æqualis lateri recto axeos producere ſolidum æquale ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus axe tanquam diametro deſcriptus, altitudo verò ipſe axis; ſed parabolarum AGC, BHD quadratis inſcriptarum axis AB æquatur lateri recto axeos, [a] quod ordinatim poſita AD ſit æqualis ipſi AB. ergo ſolidum quod producitur ex ductu mutuo parabolarum AGC, BHD æquatur ſemicylindro ſuper ſemicirculo AEB in altitudine AB. [a] 9. Parab.

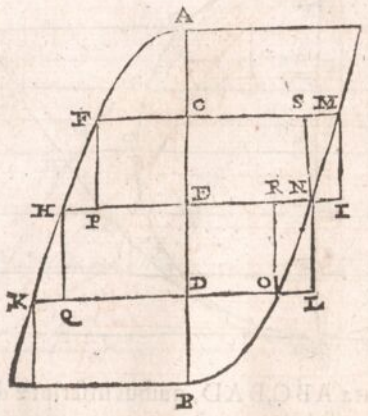
Verùm cùm hoc theorema ſit vnum ex primarijs huius operis, proximeque influat in circuli quadraturam: ſit autem demonſtratio propoſit. 143. libri ductuum allata fortaſſe ſtrictior quàm vt omnibus ſatisfaciat: pleniorem huius veritatis demonſtrationem exhibebo propoſitionibus aliquot ſequentibus.

PROPOSITIO XLVI.

SIt AB axis parabolarum ſubalternè poſitarum AKB, ABM, & axe biſecto in E, itemque AE, BE biſectis C & D, per diuiſionum puncta C, E, D ducantur rectæ ad axem normales, compleanturque rectangula tam CP, EQ inſcripta parabolæ AKB, quam CI, EL circumſcripta parabolæ ABM.

Dico ſolida quę oriuntur ex TPH in CENM, & ex HQK in ENOD, ſimul ſumpta maiorem molem exhibere quàm ſolida quę fiunt ex ductu plani MNI in FCEP, & plani NOL in PEDQ, ſimul ſumpta.

Demonſtratio.



DVcantur OR, NS parallelæ axi AB; ſegmentum NOR maius eſt ſegmento ONL, vt manifeſtè patet ſi iungantur puncta ON: & EHKD maius eſt quam EHQD. ergo ſolidum ex NOR in EHKD, maius eſt ſolido ex ONL in EQ. ſed quia parabolæ ſubalternæ ſunt æquales & ſimiles, & puncta C & D, æqualiter diſtant ab E puncto medio ipſius AB, æqualia ſunt ſegmenta NOR, HFP, & EHKD, CMNE. Ergo ſolidum ex HFP in CMNE, maius eſt ſolido ex ONL in EQ. Præterea MNS maius eſt quàm MNI (vt patet ſi iungantur puncta NM,) & CFHE maius eſt quàm CP. ergo ſolidum ex MNS in CFHE, maius eſt ſolido ex MNI in CP. ſed MNS, KHQ, & CFHE, ENOD ſunt inter ſe æqualia. ergo ſolidum ex KHQ in ENOD, maius eſt ſolido ex MNI in CP. Igitur ſolida ſimul ſumpta quę fiunt ex HFP, KHQ in CMNE, ENOD maiora ſunt ſolidis ſimul ſumptis quæ fiunt ex ONL, NMI in EQ, CP. Quod erat demonſtrandum.

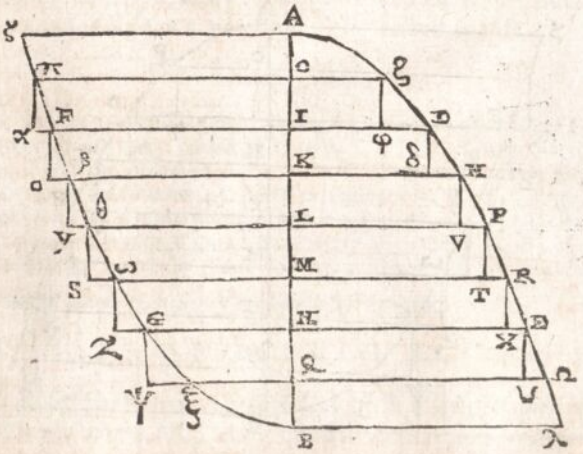
PROPOSITIO XLVII.

QVod ſi axe AB biſecto in L rectæ AL, BL diuidantur in quotcumque partes æquales, ductiſque per diuiſionum puncta C, I, K, L, M, H, Q lineis parallelis ad axem normalibus compleantur tam rectangula Cφ, Iδ, KV, LT, MX, EQ quæ cadunt intra parabolam APE, quam rectangula Cα, IO, KY, LS, MZ, Hψ quæ ſunt partim intra parabolam ABF, partim extra:

Dico ſolida ſimul ſumpta quæ fiunt ex ſegmentis parabolicis ϱDφ, DNδ, NPV, RPT, & ERX, Eυα in parabolica ſegmenta Cπ FI, IFβK, Kβθ L, Lθω M, Mω GH, HGξQ maiora eſſe ſolidis ſimul ſumptis, quæ producuntur ex ſegmentis πα F, FOβ, Yβθ, Sθω, ωGZ, Gψξ in rectangula Cφ, Iδ, KV, LT, MX, Hυ: atque ita licet in infinitum procedatur, ſemper idem eueniet.

Demon-

Demonstratio.



PErficietur eodem planè discursu quo præcedens, quemadmodum enim in præced. ostendimus id quod fit ex segmentis PNV, RPT, æqualiter remotis à medio axis puncto L, siue à media parallelâ PLθ in K$\beta\theta$L, & L$\theta\omega$M, maius esse eo quod fit ex Y$\beta\theta$, S$\theta\omega$ in KV, LT, ita planè ostenditur discursu eodem id, quod fit, ex segmentis in NDδ, ERX æqualiter etiam remotis à medio axis puncto L, siue à parallela media PLθ, ductis in IFβK, & MωGH maius esse eo quod fit ex OFβ, ZωG in Iδ, MX & quod gignitur ex D$\varrho\phi$, & E$\upsilon\Omega$ in CπFI, & HGξQ maius esse eo quod fit ex $\alpha\pi$F & ψGξ in Cϕ & Hυ. Ex quibus patet veritas theorematis propositi.

PROPOSITIO XLVIII.

REsumpta figura propositionis 46.

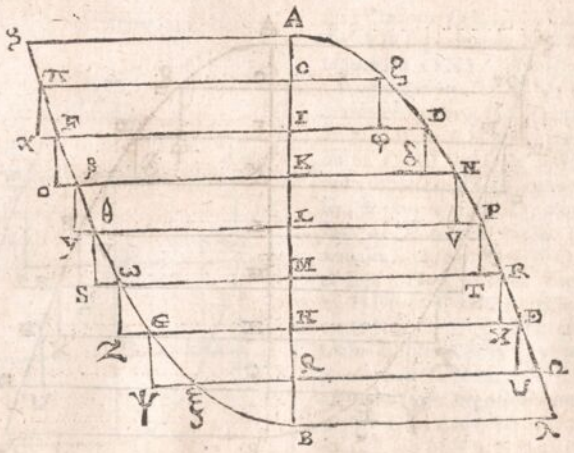
Dico solidum quod fit ex segmentis parabolicis CFHE, DKHE in segmenta subalterna CMNE, ENOD, hoc est ex segmento FCDK in segmentum CMOD, maius esse corpore quod producitur ex rectangulis CP, EQ ductis in rectangula CI, EL.

Demonstratio.

OStensum est solidum quod fit ex segmentis HFP, KHQ in segmenta CMNE, ENOD, maius esse solido quod fit ex segmentis IMN, LNO in CP, EQ rectangula. Quare si addatur vtrisque commune solidum quod fit ex rectangulis CP, EQ in segmenta CMNE, ENOD, erit solidum quod fit ex HFP, KHQ in CMNE, ENOD, vnà cum solido ex CP, EQ in CMNE, ENOD, maius solido quod fit ex CP, EQ in IMN, LNO, vnà cum solido ex CP, EQ in CMNE, ENOD. sed solidum ex HFP, KHQ in CMNE, ENOD vnà cum solido ex CP, EQ in CMNE, ENOD æquatur [a] corpori quod fit ex FCEH in CMNE, & ex HEDK in ENOD, & solidum ex CP, EQ, in IMN, LNO, vnà cum solido ex CP, EQ in CMNE, ENOD æquatur solido quod fit ex CP in CI, & ex EQ in EL. ergo solidum quod fit ex FCEH in CMNE, & ex HEDK in ENOD, hoc est ex segmento FCDK in segmentum CMOD, maius est solido facto ex CP, EQ in CI, EL. Quod erat demonstrandum.

[a] *Demonstratur ex prima 2. similis discursu quo 299. duarum ex quarta 2.*

PROPOSITIO XLIX.



REſumptâ figura propoſitionis 47. ſi fuerint ſegmentorum axis AL, BL, ſubdiuiſiones factæ plures ac plures in infinitum iuxta mentem propoſitionis 47. ac proinde plura ſemper ac plura rectangula inſcripta fuerint parabolæ A λ B, circumſcripta verò parabolæ AB ζ.

Dico nihilominus ſolidum quod producitur ex mutuo ζCQΩ, Cπξ Q ſegmentorum ſubalternorum ductu, maius eſſe ſolido quod fit ex omnibus rectangulis inſcriptis parabolæ Aλ B in omnia rectangula conſcripta parabolæ AB ζ.

Demonſtratio.

PErficietur eodem diſcurſu quo propoſitio 48. Nam quo diſcurſu illic ex 46. oſtendimus ſolidum ex ſegmentis PNKL, RPLM, quæ adiacent medio axis puncto L in ſegmenta KβθL, Lθω M maius eſſe ſolido quod fit ex rectangulis KV, LT in rectangula KY, LS, eodem quoque demonſtrabimus ex 47. ſolidum quod fit ex ſegmentis NDIK, RMHE æqualiter à medio axis puncto L remotis, in ſegmenta IFβK, HGω M, maius eſſe ſolido quod fit ex rectangulis, Iδ, MX in rectangula IO, MZ: & ſolidum quod gignitur ex ſegmentis Dϱ CI, ΩEHQ in ſegmenta Cπ FI, HGξ Q maius eſſe ſolido producto ex Cφ, Hυ in Cα, Hψ. Totum igitur ſegmentum ϱΩQC ductum in ſegmentum totum Cπξ Q maius ſolidum producit quàm omnia rectangula Cφ, Iδ, KV, LT, MX, Hυ in omnia rectangula Cα, IO, KY, LS, MZ, Hψ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

SInt parabolæ ſubalternæ æquales ac ſimiles Aλ B, AB ζ, quarũ communi axe AB, biſecto in L, partes AL, BL, in plures ſemper ac plures in infinitum partes æquales & æque multas, diuidantur, ductiſq; per diuiſionum puncta parallelis lineis ϱπ, DF, &c. normalibus ad AB, inſcribantur parabolæ Aλ B, parabolæ verò ζB A circumſcribantur rectangula plura ſemper ac plura ſine termino.

Dico

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1187] - 1130
PUBLIC DOMAIN

Dico corpus genitum ex ductu mutuo parabolarum ſubalternarum maius eſſe ſolido ſiue aggregato parallelepipedorum quod producitur ex rectangulis omnibus Cφ, Iϑ, &c. inſcriptis parabolæ AλB, ductis in rectangula omnia Cα, IO, &c. parabolæ ABζ circumſcripta.

Demonſtratio.

OStenſum eſt in præcedenti ſegmentum CϱΩQ in ſegmentum CπξQ, producere maius ſolidum quàm omnia rectangula CφIϑ, &c. in omnia rectangula Cα, IO, &c. Atqui parabola tota AλB ducta in ſubalternam totam ζBA, maius corpus efficit quàm ſegmentum ϱCBλΩ in ſegmentum CπξB. Ergo parabola AλB in paraboIam ζBA maius ſolidum gignit aggregato parallelepipedorum producto ex omnibus rectangulis Cφ, Iϑ, &c. inſcriptis parabolæ AλB, in rectangula omnia Cα, IO, &c. parabolæ ζBA conſcripta. Quod erat propoſitum.

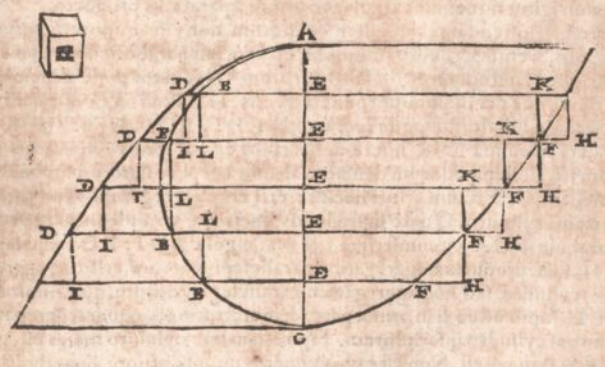
Venio tandem ad demonſtrationem Theorematis ſuprà propoſiti.

PROPOSITIO LI.

SInt parabolę ſubalternæ ADC, FCA binis inſcriptæ quadratis circa communem axem AC, ſiue (quod in idem recidit, vt in propoſ. 45. oſtenſum eſt) quarum axis AC lateri recto axeos ſit æqualis: & ſuper AC diametro deſcribatur ſemicirculus ABC, quem totum intra parabolas cadere patet ex 126. de parabola.

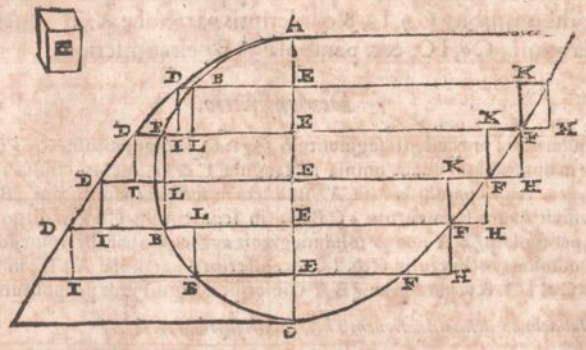
Dico corpus productum ex ductu parabolę ADC in ſubalternam parabolam FCA, æquari ſemicylindro, cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo autem axis parabolarum AC.

Demonſtratio.



SI æqualia non ſunt illa corpora, erit cylindrus corpore parabolico maior aut minor. Ponatur primò cylindrus eſſe maior corpore parabolico quantitate aliqua G, ſecetur axis AC bifariam; & bina axeos ſegmenta in tot & æquè multas æquales partes ſubdiuidantur in punctis E, E, vt ductis per E parallelis rectis BE, normalibus ad AC, completiſque rectangulis EL, rectangula EBL ducta in altitudinem cylindri AC, cylindro [a] inſcribant aggregatum parallelepipedorum habentium rectangula BEAC, BEAC pro baſibus altitudines verò EE deficiens ab ipſo

[a] *Patet ex Archimede.*



ipſo cylindro quantitate minori quàm G, quo facto erit corpus cylindro inſcriptum etiam maius corpore quod fit ex ductu mutuo parabolarum. protrahantur deinde parallelæ EB vtrimque in D, & F, H, compleanturque rectangula tam EDI, inſcripta parabolæ ADC, quàm EH, conſcripta parabolę FCA: ac deinde rectangula EI, ducta in rectangula EH producant parallelepipeda quę corpori nato ex parabolis partim inſcripta erunt partim circumſcripta, baſes autem habebunt rectangula DEF, altitudines verò lineas EE. Demonſtrauimus in libro ductuum [a] rectangula omnia DEF æquari rectangulis BE, AC. Quare cùm rectangula DEF baſes ſint parallelepipedorum adſcriptorum corpori parabolico quæ fiunt ex EDI in EH: rectangula verò BEAC, BEAC ſint baſes parallelepipedorum inſcriptorum cylindro & altitudines vtrobique ſint communes, lineolæ nimirum EE, manifeſtum eſt aggregatum parallelepipedorum adſcriptorum corpori parabolico æquari aggregato parallelepipedorum cylindro inſcriptorum, ſed aggregatum parallelepipedorum inſcriptorum cylindro maius ponitur corpore nato ex parabolis ergo & aggregatum parallelepipedorum adſcriptorũ corpori ex parabolis producto maius eſt eodem corpore; quod repugnat propoſitioni 50. in qua demonſtrauimus eſſe minus, non igitur minor eſt cylindrus corpore à parabolis producto.

[a] *Propoſ. 143.*

Supereſt vt oſtendamus eundem cylindrum non eſſe minorem corpore genito ex parabolis. Si enim cylindrus minor ſit, erit corpus parabolicum maius cylindro v. g. quantitate G, oſtenſum eſt in libro ductuum [b] AC in tot poſſe æquales partes ſubdiuidi, ductiſque per diuiſionum puncta rectis DEF ad AC normalibus tot inſcribi parabolis ſubalternis poſſe rectangula EDI, EDI, EFK, EFK, vt omnia EDI ducta in omnia EFK inſcribant corpori ex parabolis ſubalternis genito aggregatum parallelepipedorum deficiens ab ipſo corpore nato è parabolis quantitate minori datâ G. Factum igitur hoc ſit: erit ergo aggregatum illud parallelepipedorum maius cylindro. Quare ſi productis lineis DF compleantur rectangula EH, EH parabolę FCA circumſcripta; & rectangula EDI, EDI ducta in rectangula EH, EH, producant aggregatum parallelepipedorum, erit hoc aggregatũ multo maius cylindro. ſed hoc aggregatum parallelepipedorum, quę nimirum fiunt ex EDI, EH, ſuprà oſtendi in prima parte demonſtrationis æquari aggregato parallelepipedorum cylindro inſcriptorum. Ergo etiam hoc cylindro maius eſt, pars ſuo toto, quod fieri non poteſt. Non eſt ergo cylindrus minor corpore à parabolis producto. ſed neque maiorem eſſe oſtendimus. Eidem igitur æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

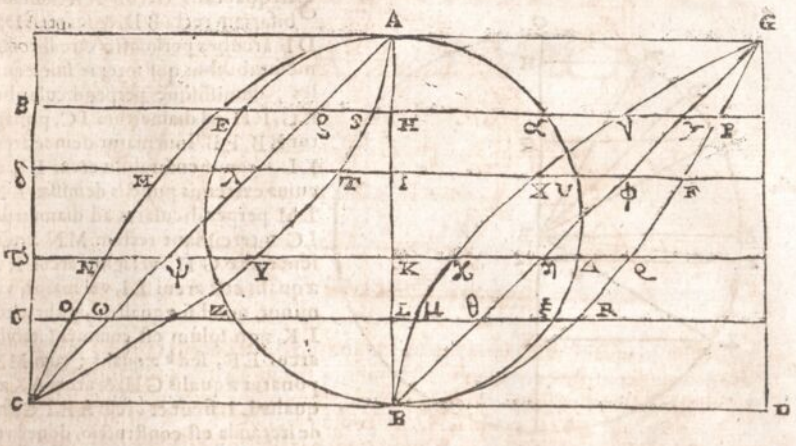
[b] *Propoſ. 43.*

Corollarium.

EOdem diſcurſu demonſtratur ſegmenta ſubalterna parabolica DEED, EFFE ducta in ſe mutuo æquale ſolidum producere ſegmento cylindrico cuius baſis eſt ſegmentum circulare BEEB, altitudo AC.

PRO-

PROPOSITIO LII.



SInt iam denuo ſuper rectâ AB duo quadrata ABC, ABD conſtructa, & recta AB ſit æqualis lateri recto parabolarum AEC & BRG ſubalternè collocatarum, & communis vtriuſque axis AB, in quo ſumptis HI & KL æqualibus inter ſe, conſtituantur EHP, MIF, & NKQ, OLR ordinatim ad axem: denique deſcribatur circulus AυB ſuper diametro AB, qui lineas EP, MF, NQ, OR ſecet in α, υ, Δ, ξ.

Dico ſuperficiem HαυI ad ſuperficiem KΔξL, notam habere rationem.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [a] corpori ex ductu plani EHIM in planum HPFI; æqualem eſſe partem cylindri ſuper baſi HαυI conſtitutam in altitudine AB. Similiter corpori ex ductu ſuperficiei NKLO in ſuperficiem KQRL, æquari cylindri partem cuius baſis eſt KΔξL & altitudo AB. ſed demonſtratum eſt [b] corpora, quæ illis cylindricis partibus æquantur inter ſe notam habere rationem. Igitur etiam partes cylindricę, notam inter ſe continent rationem, ſed partes cylindricæ, cùm altitudine non diſcrepent, eandem inter ſe rationem habẽt quam baſes HαυI, KΔξL. ergo etiam harum nota eſt ratio. Quod fuit demonſtrandum.

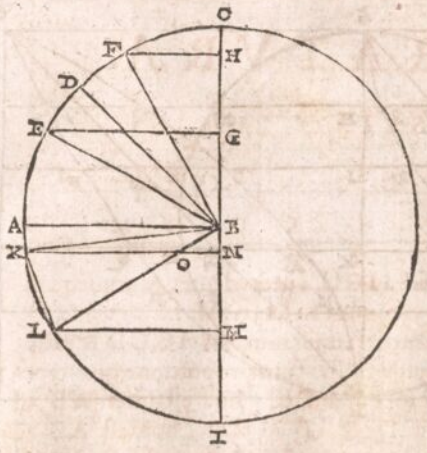
a 51. huius eiusque Coroll.

b 41. huius.

PROPOSITIO LIII.

OPorteat tandem proportionem circuli ad figuram rectilineam exhibere.

Constructio & demonstratio.



211. huius.

b Per 15. huius.

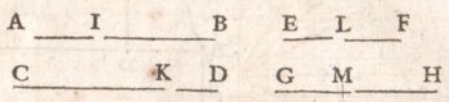
SIt quadrans circuli ABC diuisus bifariam recta BD, & sumptis DE, DF arcubus perimetro circuli commẽsurabilibus qui inter se sint æquales, demissisque perpendicularibus EG, FH ad diametrum IC, ponantur EB, FB. Inueniatur deinde arcus KL [a] commensurabilis arcui EF, ex cuius extremis punctis demissæ KN, LM perpendiculares ad diametrum IC intercipiant rectam MN æqualem rectæ GH. vel igitur arcus KA æqualis erit arcui LI, vel maior, vel minor. quod si æqualis sit, igitur arcus LK, non solùm est commensurabilis arcui EF, sed [b] æqualis: cùm MN ponatur æqualis GH, & arcus AK æqualis LI, sicut & arcus AE, FC. vnde iteranda est constructio, donec vel AK arcus maior sit arcu LI vel è cõtra arcus LI maior arcu AK. Sit igitur AK arcus minor LI & ducantur KB, LB. Quoniam ponitur arcus AK minor arcu LI, ergo [c] segmentum LMNK maius est sectore LBK. nota autem est [d] proportio segmenti LMNK ad segmentum EGHF, hoc est [e] ad sectorem EBF: nota est præterea ratio sectoris LBK ad sectorem EBF, cùm arcus LK, EF sint commensurabiles ex constructione. Igitur nota est etiam ratio LMNK ad sectorem LBK, quę cùm nota sit, etiam excessus, quo LMNK superat sectorem LBK, notus est; ac propterea nota est etiam ratio sectoris EBF ad rectilineum excessum quo segmentum LMNK excedit sectorem LBK, (excessum autem eum rectilineum esse posse patet, si iungãtur puncta LK, & triangulo LBK abscindatur trapezium æquale ex trapezio LKNM, addito enim communi segmento LK, erit sector, segmento & illi trapezio æqualis, quare reliquum segmenti erit excessus & quidem rectilineus) & consequenter nota est ratio totius circuli ad idem rectilineum, quoniam arcus EF commensurabilis est perimetro circuli IAC ex constructione: quare peractum est, quod fuit requisitum.

c Per 23. huius.
d 32. huius.
e 20. huius.

SECVN-

SECVNDA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO LIV.



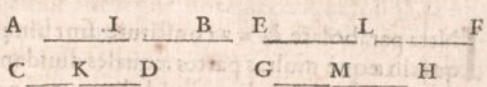
RAtionum AB ad CD, EF ad GH, antecedentes & consequentes termini diuidantur vtcunque in I,L,K,M.

Dico proportionem quæ est inter rationes AB,CD & rationem inter EF ad GH eandem esse, cum proportione quæ reperitur inter rationes AI ad CK, IB ad CK (hoc est inter AB ad CK) simul cum ratione AI ad KD, & IB ad KD (hoc est AB ad KD) & inter rationem EL ad GM, & LF ad GM, (hoc est EF ad GM) vnà cum ratione EL ad MH, & LF ad MH: (hoc est EF ad MH) & contra.

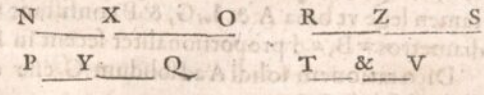
Demonstratio.

PRopositione octaua huius est demonstratum rationem AB ad CD, eandem esse cum rationibus AI ad CK, IB ad CK, simul cum rationibus AI ad KD, & IB ad KD. similiter eâdem propos. ostensum quod ratio EF ad GH, eadem existat cum rationibus EL ad GM, & LF ad GM, simul cum rationibus EL ad MH, & LF ad MH, manifestum igitur est proportionem rationis AB ad CD, ad rationem EF ad GH, eandem esse cum proportione quæ est inter rationes AI ad CK, IB ad CK, AI ad KD, IB ad KD, ad rationes EL ad GM, LF ad GM, EL ad MH, LF ad MH, & contra. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.



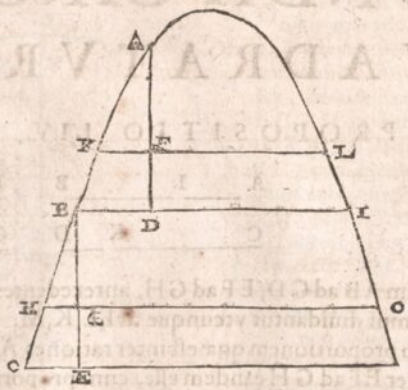
HInc colligitur quoties comparantur inter se ratio quantitatum AB, CD & ratio quantitatum EF, GH, per rationes inuentas inter partes modo assumpto in contextu propositionis, si ostendantur rationes inter partes vnius rationis esse eædē cum rationibus quæ inueniuntur esse inter partes alterius rationis, tunc necessariò etiam erit similitudo inter rationem AB, CD & rationem EF, GH & contra.



Quod si autem addantur duæ aliæ rationes NO ad PQ, & RS ad TV, rationes verò partium vnius proportionis conueniant cum rationibus partium alterius proportionis, tum similiter vt priùs inferre licebit proportiones esse similes, hoc est proportionem inter rationem AB ad CD, & rationem EF ad GH, eandem esse cum proportione inter rationem NO ad PQ, & rationem RS ad TV.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1192] - 1135
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LV.



PArabola LAB habeat æquales diametros AD, BE, quas in F & G, proportionaliter diuidant orthogonæ KFL, HGO. Dico rectangula KFL, HGO esse æqualia.

DEmonstratum reperies in libro de parabola propositione 45.

Obserua pro propositionibus sequentibus.

Breuitatis causa parallelepipeda quæ ex ductu vnius rectanguli in alterum producũtur, posthac duabus litteris designabimus. Exempli gratia parallelepipedum quod gignitur ex rectangulo A ducto in rectangulum L, vocabimus parallelepipedum siue solidum AL.

Similiter breuitatis gratia solidum quod fit ex rectangulo aliquo ducto in seipsum vnica tantum littera designabitur, exempli gratia parallelepipedum quod producitur ex A rectangulo in se ducto vocabimus solidum A.

PROPOSITIO LVI.

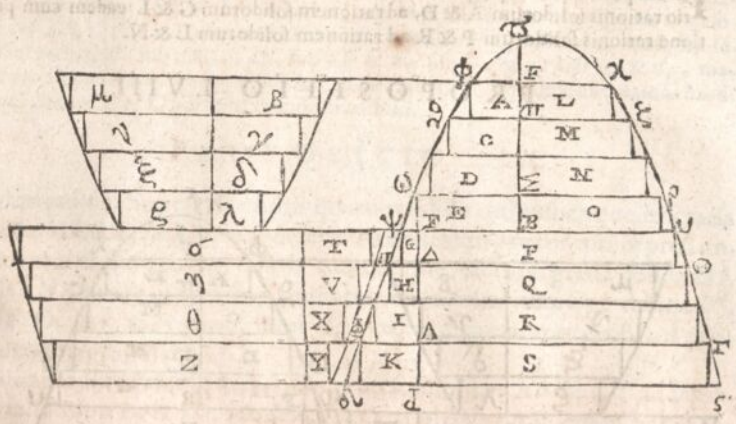
INtra parabolam ∂ω ϖ υ constitutę sint binę æquales diametri ϖB, ωd, quas in æquè multas partes æquales diuidant parallelę lineę φκ, ϑζ, &c. ψυ, πΘ, &c. ductisque lineolis ad diametros parallelis, formentur rectangula A, C, D, E: G, H, I, K: P, Q, R, S: L, M, N, O, ex quibus in seipsa ductis producantur solida parallelepipeda A, C, D, E, &c.

His ita constitutis si sumantur ex solidis A, C, D, E; L, M, N, O, G, H, I, K, P, Q, R, S, quatuor solida quæcunque exempli gratiâ A, G, P, L, hac tamen lege vt bina A & L; G, & P consistant circa rectas φEκ, ψBυ, quę diametros ϖB, ωd proportionaliter secent in E & F.

Dico rationem solidi A ad solidum G esse eandem cum ratione solidi P ad solidum L.

Demon-

Demonſtratio.



OStenſum eſt a rectangula φE×, ψFυ æqualia eſſe. Ergo φE eſt ad ψF, vt recipro-cè Fυ eſt ad E×. Ergo & quadratum φE eſt ad quadratum ψF, vtquadratum Fυ eſt ad quadratum E×, ſunt autem hæc quadrata baſes ſolidorum A, G, P, L: Quare cùm ſolida illa æquales habeant altitudines Eπ, FΔ, erunt inter ſe vt quadrata, adeoque ſolidum A, erit ad ſolidum G, vt quadratum φE ad quadratum ψF, hoc eſt vt quadratum Fυ ad quadratum E×, hoc eſt vt ſolidum P ad ſolidum L. Eadem erit in cæteris demonſtratio. Patet ergo propoſitum. a 55. huius.

PROPOSITIO LVII.

EAdem manente figura aſſumantur quatuor quęcunque ſolida, exempli gratia ſolida A, G, P, L, quorum bina A & L, G & P, pro lateribus habeant rectas φE×, ψFυ quæ diametros ϖB, ωd proportionaliter ſecent in E, & F. Aſſumantur autem & alia quatuor ſolida quæcunque exemp.grat. ſolida D, I, R, N, modò etiam bina D & N, I & R, conſiſtant ſuper rectis diametros proportionaliter ſecantibus.

Dico proportionem quam habet ratio ſolidorum A & G, ad rationem ſolidorum P & L, eandem eſſe cum proportione quam habet ratio ſolidorum D & I ad rationem ſolidorum R & N.

Demonſtratio.

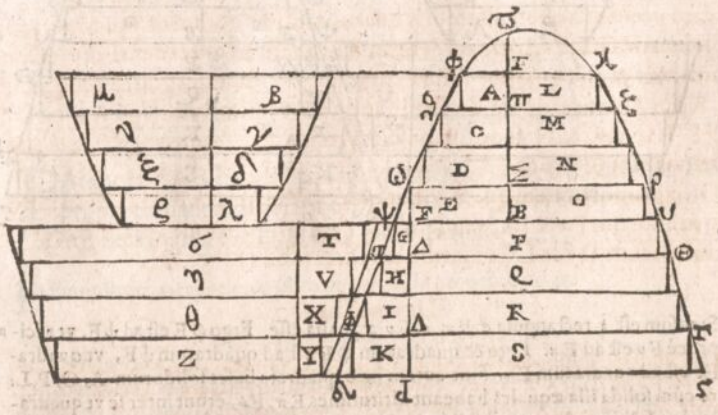
OStenſum eſt, b rationem ſolidorum A & G, eandem eſſe cum ratione ſolidorum P & L: oſtenſum quoque eſt c rationem ſolidorum D & I, eandem eſſe cum ratione ſolidorum R & N, ratio igitur ſolidorum A & G, eſt ad rationem ſolidorum P & L, vt ratio ſolidorum D & I, eſt ad rationem ſolidorum R & N: hoc eſt proportio quam habet ratio ſolidorum A & G, ad rationem ſolidorum P & L, eadem eſt cum b 56. huius. c Ibid.

proportione quam habet ratio ſolidorum D & I, ad rationem ſolidorum R & N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Iſdem poſitis quæ *in* propoſitione, per 58. libri progreſſionum erit quoque proportio rationis ſolidorum A & D, ad rationem ſolidorum G & I. eadem cum proportione rationis ſolidorum P & R ad rationem ſolidorum L & N.

PROPOSITIO LVIII.



Iſdem poſitis quę 56. huius rectangula A, C, D, E item G, H, I, K, ducta in rectangula ſibi poſita ſubalternè β,γ,δ,λ, & T,V,X,Y, producant ſolida Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, & ſolida GT, HV, IX, KY. ſimiliter rectangula L, M, N, O, item P, Q, R, S ducta in rectangula ſibi ſubalternè poſita μ,ν,ξ,ο, & σπ, θ, Z, producant ſolida Lμ, Mν, Nξ, Oο, & ſolida Pσ, Qη, Rθ, SZ.

Deinde aſſumantur quatuor ſolida quæcunque exemp. gr. ſolida Aβ, GT, Pσ, Lμ, hac tamen lege vt bina Aβ & Lμ: GT & Pσ, conſiſtant circa rectas φκ, ψυ, quæ diametros ϖB, ωd proportionaliter ſecent in E & F.

Dico rationem ſolidi Aβ ad ſolidum GT eandem eſſe cum ratione ſolidi Pσ ad rationem ſolidi Lμ.

Demonſtratio.

SOlidum ex A in β eſt idem cum ſolido ex A in E, æquales enim ex hypotheſi & ſimiles per omnia ſunt figuræ ambæ ſolâ nimirum ſubalterna poſitione differentes, ſed ſolidi ex A in E, baſis eſt rectangulum quod rectis φE, ωΣ continetur. Ergo idem rectangulum φε, ωΣ etiam baſis eſt ſolidi Aβ. Eodem modo oſtendam ſolidi GT baſim eſſe rectangulum rectis ψF, & φΛ contentum, ſolidi verò Pσ baſim eſſe rectangulum ſub Fυ & Λr: ſolidi denique Lμ baſim eſſe rectangulum ſub Eκ & Σρ. Iam verò quia rectangula φEκ, ψFυ a ſunt æqualia, erit φE ad ψF, vt Fυ ad Eκ, hoc eſt

a 55. huius.

est ratio φE ad ψF æqualis erit rationi Fυ ad Eκ. Pari modo quia rectangula ω,Σρ; φΛΓ [a] sunt æqualia, erit recta ωΣ ad rectam φΛ, vt recta ΛΓ ad rectam Σρ, hoc est ratio ωΣ ad φΛ, par est rationi ΛΓ ad Σρ. Ergo ratio composita ex ratione φE ad ψF, & ratione ωΣ ad φΛ, æquatur rationi compositę ex ratione Fυ ad Eκ, & ratione ΛΓ ad Σρ: hoc est ratio rectanguli sub φE & ωΣ ad rectangulum sub ψF & φΛ æquatur rationi rectanguli sub Fυ & ΛΓ ad rectangulum sub Eκ & Σρ. Quare cùm solidorum Aβ, GT, Pσ, Lμ æquales sint altitudines Eπ, FΔ, bases verò, vt ostendi suprà, sint rectangula sub φE, & ωΣ, sub ψF & φΛ sub Fυ & ΛΓ sub Eκ & Σρ, manifestum est rationem quoque solidi Aβ ad solidum GT, æqualem esse rationi solidi Pσ ad solidum Lμ. Quod erat demonstrandum.

[a] Ibid.

PROPOSITIO LIX.

IIsdem positis: hoc est assumptis quatuor solidis quibuscunque, ex. gratia solidis Aβ, GT, Pσ, Lμ iuxta determinationem in præcedenti expressam; assumantur & alia quatuor solida quæcunque, exempli gratia solida Dδ, IX, Rθ, Nξ iuxta eandem determinationem, ea nimirum lege vt bina Dδ, & Nξ: IX, Rθ, & Nξ consistant circa rectas quæ diametros πB, ωd proportionaliter diuidant.

Dico proportionem quam habet ratio solidorum Aβ & GT ad rationem solidorum Pσ & Lμ, eandem esse cum proportione quam habet ratio solidorum Dδ & IX ad rationem inter solida Rθ & Nξ.

Demonstratio.

OStensum est [b] rationem solidorum Aβ & GT, eandem esse cum ratione solidorum Pσ & Lμ. Ostensum [c] quoque est rationem solidorum Dδ & IX, eandem esse cum ratione solidorum Rθ & Nξ. Ergo ratio solidorum Aβ & GT, est ad rationem solidorum Pσ & Lμ, vt ratio solidorum Dδ & IX, est ad rationem solidorum Rθ & Nξ: hoc est proportio quam habet ratio solidorum Aβ & GT ad rationem solidorum Pσ & Lμ, eadem est cum proportione quam habet ratio solidorum Dδ & IX, ad rationem solidorum Rθ, & Nξ. Quod erat demonstrandum.

[b] 58. huius.
[c] Ibid.

Corollarium.

IIsdem positis quæ in propositione, sequitur ex iam demonstratis & ex 58. libri progressionum proportionem quoque quæ reperitur inter rationem solidorum Aβ & Dδ & rationem solidorum GT, & IX eandem esse cum proportione rationis solidorum Pσ & Rθ, ad rationem solidorum Lμ, & Nξ.

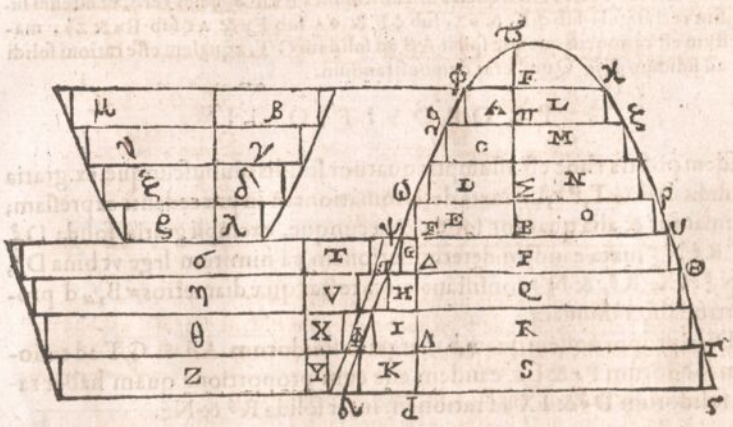
PROPOSITIO LX.

EAdem manente figurâ, assumantur octo solida, exempli gratia solida A, G, P, L, & Aβ, GT, Pσ, Lμ, hac lege vt quatuor prima A, G, P, L, & quatuor alia Aβ, GT, Pσ, Lμ consistant circa rectas φκ, & ψυ, quæ diametros πB, ωd proportionaliter secent in E & F. Assumantur autem & alia octo solida quæcunque, iuxta eandem tamen determinationem, verbi gratia solida, D, I, R, N & Dδ, IX, Rθ, Nξ.

Dico proportionem quę est inter rationem solidorum A & G, & rationem solidorum P & L, esse ad proportionem quæ est inter rationem solidorum D & I, & rationem solidorum R & N, vt est proportio inter rationem solidorum Aβ & GT, & rationem solidorum Pσ & Lμ, ad proportionem

portionem inter rationem ſolidorum Dδ & IX & rationem ſolidorum Rθ & Nξ.

Demonſtratio.



a 57. huius. OStenſum eſt [a] proportionem rationis inter ſolida A & G, ad rationem inter ſolida P & L, eandem eſſe cum proportione inter rationem ſolidorum D & I, & ra-
b 59. huius. tionem ſolidorum R & N. ſimiliter oſtenſum eſt [b] proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Aβ & GT, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ, eandem eſſe cũ proportione quam habet ratio ſolidorum Dδ & IX, ad rationem ſolidorum Rθ & Nξ. Ergo proportio quæ eſt inter rationem ſolidorum A & G, & rationem ſolidorum P & L, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum D & I, & rationẽ ſolidorum R & N, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & GT, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ, ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Dδ & IX, & rationem ſolidorum Rθ & Nξ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

IIſdem poſitis quæ in propoſitione: eodem planè diſcurſu demonſtrabimus ex Corollarijs 57. & 59. etiam proportionem quæ eſt inter rationes ſolidorum A & D, ac rationem ſolidorum G & I, eſſe ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum P & R, & rationem ſolidorum L & N, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & Dδ, & rationem ſolidorum GT & IX ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Pσ & Rθ, & rationem ſolidorum Lμ & Nξ.

PROPOSITIO LXI.

IIſdem manentibus:

Dico quod ratio quæ eſt inter aggregatum ſolidorum A, C, D, E & aggregatum ſolidorum G, H, I, K, ſit ad rationem inter aggregatum corporum P, Q, R, S, ad aggregatum corporum L, M, N, O vt ratio aggregati corporum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ ad aggregatum ſolidorum GT, HV, IX, KY eſt ad rationem inter aggregatum corporum Pσ, Qη, Rθ, SZ, & aggregatum corporum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ.

Demon-

Demonstratio.

A	G	P	L
C	H	Q	M
D	I	R	N
E	K	S	O
Aβ	GT	Pσ	Lμ
Cγ	HV	Qη	Mν
Dδ	IX	Rθ	Nξ
Eλ	KY	SZ	Oϱ

DVplici viâ hanc propositionem demonstrabimus.

Prima est per propositionem secundam Archimedis de Conoid. applicando proportionibus rationum ea quæ solis rationibus quantitatum simplicium attribuit Archimedes.

Altera verò per propositionem 54. Lemmaticam huius libri.

Primâ igitur viam sic inire licebit, quam tamē post eà mitiori discursu absoluemus. Proportio quæ est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, eadem [a] est cum proportione quę est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M. Item proportio quæ est inter rationes corporum C ad H, & D ad I, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N: igitur proportio quæ est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ad proportionem quę est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, est vt proportio quę est inter rationes corporū C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Igitur [b] permutando proportio quę est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ad proportionem quæ est inter rationes corporum C ad H, & D ad I, est vt proportio quę est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Simili modo ostenderetur quod proportio quæ est inter rationes corporum C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ est inter rationes corporum D ad I. & E ad K, sit vt proportio quę est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum R ad N, & S ad O.

[a] *Patet ex 57 huius permutando.*

[b] *Colligitur ex 44. proportionalit.*

Prætereà ostensum est [c] quod proportio quę est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, sit ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio quæ est inter rationes corporum Aβ ad GT, & Cγ ad HV, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Pσ ad Lμ, & Qη ad Mν. Igitur [d] permutando proportio quæ est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Aβ, ad GT, & Cγ ad HV, est, vt proportio quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Pσ, ad Lμ, & Qη ad Mν.

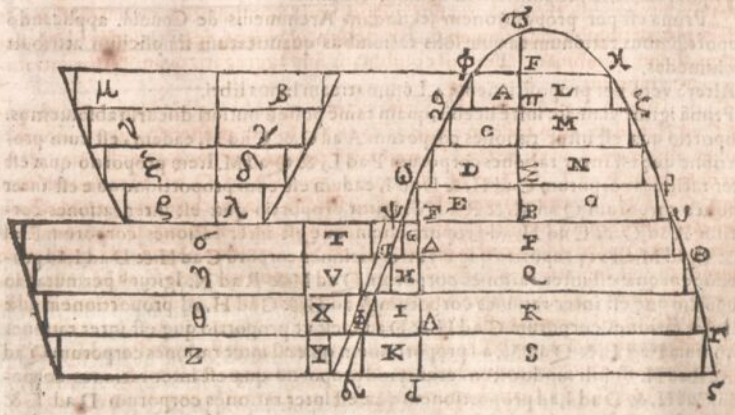
[c] *Patet ex 60. huius permutando.*

[d] *Collige ex 44 proportionalit.*

Simili prorsus ratione demonstrabitur quod proportio quæ est inter rationes corporum C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Cγ ad HV, & Dδ ad IX, sit vt proportio quæ est inter rationes corporū Q ad M, & R ad N, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Qη ad Mν, & Rθ ad Nξ: item quod proportio quæ est inter rationes corporum D ad I, & E ad K, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Dδ ad IX, & Eλ ad KY, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum R ad N, & S ad O, est ad proportionem quę est inter rationes corporum Rθ ad Nξ, & SZ ad Oϱ.

Igitur quemadmodum infert Archimedes quod omnes quantitates primæ simul sumptæ ad omnes quantitates secundas simul sumptas, sint vt omnes quantitates ter-

A	G	P	L
C	H	Q	M
D	I	R	N
E	K	S	O
Aβ	GT	Pσ	Lμ
Cγ	HV	Qη	Mν
Dδ	IX	Rθ	Nξ
Eλ	KY	SZ	Oϱ



riæ ſimul ſumptæ ad omnes quantitates quartas ſimul ſumptas, ita quoque eodem diſcurſu inferimus quod omnes proportiones aggregatæ quæ ſunt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, item C ad H, & D ad I, item D ad I, & E ad K, ſint ad omnes proportiones aggregatas quæ ſunt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, item Q ad M, & R ad N, item R ad N, & S ad O, vt proportiones omnes aggregatæ quæ ſunt inter rationes corporũ Aβ ad GT, & Cγ ad HV, item Cγ ad HV, & Dδ ad IX, item Dδ ad IX, & Eλ ad KY, ſunt ad omnes proportiones aggregatas quæ ſunt inter rationes corporum Pσ ad Lμ, & Qη ad Mν, item Qη ad Mν, & Rθ ad Nξ, item Rθ ad Nξ, & SZ ad Oϱ.

Cùm verò proportionem quæ eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H conſtituant binæ rationes corporum A ad G, & C ad H, item ſingulas alias proportiones binæ ſemper rationes conſtituant, etiam rectè infertur quod omnes rationes corporum quæ proportiones illas quantitatum conſtituunt, ſcilicet rationes corporum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K ſimul ſumptæ, ſint ad rationes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ſimul ſumptas, vt omnes rationes corporum Aβ ad GT, Cγ ad HV, Dδ ad IX, Eλ ad KY ſimul ſumptæ, ſunt ad omnes rationes corporum

Pσ ad

Pσ ad Lμ, Qη ad Mν, Rθ ad Nξ, SZ ad Oϱ simul sumptas. Cùm verò rationes A ad G, C ad H, D ad I, E ad K, sic sint constitutæ vt omnia corpora A, C, D, E sint termini antecedentes, corpora verò siue termini G, H, I, K sint consequentes; item in rationibus corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O eodem modo corpora P Q, R, S, terminorum antecedentium locum obtinent, vti & corpora L, M, N, O vicem consequentium; idemque in alijs aggregatis rationum inueniatur, & termini antecedentes sint corpora Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, termini verò consequentes sint corpora GT, HV, IX, KY; item in quarto aggregato rationum corpora Pσ, Qη, Rθ, SZ vices antecedentium obtinent, vti & corpora Lμ, Mν, Nξ, Oϱ consequentium. Igitur ratio aggregati solidorum A, C, D, E, ad aggregatum solidorum G, H, I, K, est ad rationem aggregati solidorum P, Q, R, S, ad aggregatum solidorum L, M, N, O; vt ratio aggregati solidorum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ ad aggregatum solidorum GT, HV, IX, KY, est ad rationem aggregati solidorum Pσ, Qη, Rθ, SZ, ad aggregatum solidorum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio facilior.

QVod iam per propositiones proportionum absoluimus, facilius fortasse per proportiones nudas declarabitur, faciliusque patebit Archimedis discursum ad vnguem fuisse obseruatum; vti enim ipse ex rationibus quæ semper duas quantitates pro terminis habent, terminorum siue quantitatum combinationem inuenit; ita & nos ex proportionibus quæ semper duas rationes continent, ipsas rationes combinabimus, sicque combinatas cum alijs combinatis siue aggregatis quantitatum rationibus comparabimus.

Ratio corporis A ad G, [a] eadem est cum ratione corporis P ad L. item ratio corporis C ad H, eadem cum ratione corporis Q ad M. Igitur proportio quę est inter rationes corporum A ad G, & C ad H, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, siue ratio corporis A ad G, est ad rationem corporis C ad H, vt ratio corporis P ad L, est ad rationem corporis Q ad M. Similiter ostendetur quod ratio corporis C ad H, ad rationem corporis D ad I sit vt ratio corporis Q ad M ad rationem corporis R ad N. Denique ostendetur quod ratio corporis D ad I, ad rationem corporis E ad K sit vt ratio corporis R ad N, est ad rationem corporis S ad O. Atque sic primam partem habemus constructionis Archimedeæ. Itaque ad secundam sic procedemus.

a *Per 46. huius.*

Ratio corporum Aβ ad GT, eadem [b] est cum ratione corporum Pσ ad Lμ, & ratio corporum A ad G, etiam eadem erat cum ratione corporis P ad L. Itaque ratio corporum A ad G, est ad rationem corporum P ad L, vt ratio corporum Aβ ad GT, est ad rationem corporum Pσ ad Lμ. igitur [c] permutando ratio corporum A ad G, est ad rationem corporis Aβ ad GT vt ratio corporis P ad L, ad rationem corporis Pσ ad Lμ. eodem modo ostendetur ratio corporis C ad H, esse ad rationem corporis Cγ ad HV, vt ratio corporis Q ad M, est ad rationem corporis Qη ad Mν. Item ratio corporis D ad I, ad rationē corporis Dδ ad IX, est vt ratio corporis R ad N, ad rationem corporis Rθ ad Nξ. Denique ratio corporis E ad K, est ad rationem corporis Eλ ad KY, vt ratio corporis S ad O, est ad rationē corporis SZ ad Oϱ.

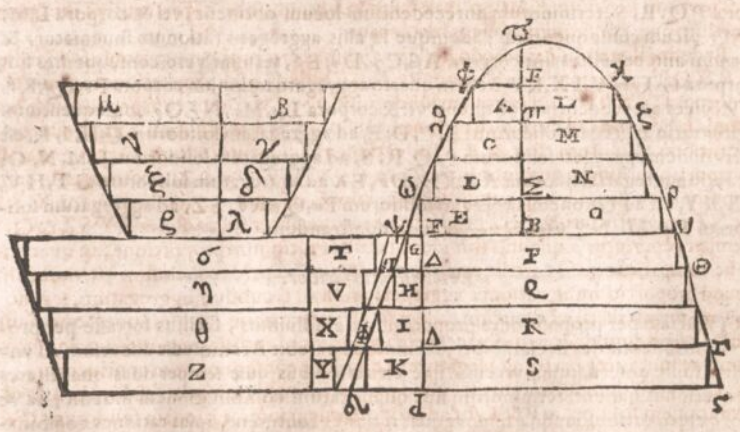
b *58. huius.*

c *Collige ex 44. proportionaliter.*

Igitur vti Archimedes de quantitatibus, ita & nos de rationibus quantitatum inferimus, nempè quod omnes rationes quantitatum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K, sint ad omnes rationes quantitatum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O; vti omnes rationes quantitatum Aβ ad GT, Cγ ad HV, Dδ ad IX, Eλ ad KY, sunt ad omnes rationes quantitatum Pσ ad Lu, Qη ad Mν, Rθ ad Nξ, SZ ad Oϱ.

Cùm verò rationes corporum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K sic sint constitutæ vt omnia corpora A, C, D, E sint termini antecedentes, corpora verò G, H, I, K sint termini consequentes; idemque in reliquis rationibus obseruatum sit: igitur ratio aggregati solidorum A, C, D, E ad aggregatum solidorum G, H, I, K est ad rationem aggregati solidorum P, Q, R, S, ad aggregatum solidorum L, M, N, O; vt ratio aggregati solidorum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, ad aggregatum solidorum GT, HV, IX, KY est ad rationem aggregati solidorum Pσ, Qη, Rθ, SZ, ad aggregatum solidorum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. Quod erat demonstrandum.

Aliter.



ADdemus & alteram ex Lemmatica propositione 54. huius libri hac methodo qua similiter inferemus eandem conclusionem quam priore discursu intulimus.

Proportio rationis inter solida A & G, ad rationem inter solida P & L, eadem
a 57. huius. est [a] cum proportione rationis inter solida C & H, ad rationem inter solida Q & M, praetereà proportio rationis inter A & G solida ad rationem solidorum P & L, eadem
b Ibid. est [b] cum proportione rationis quæ est inter solida D & I, ad rationem inter solida R & N. Vlteriùs proportio rationis inter solida A & G, ad rationem inter solida P & L,
c Ibid. est eadem [c] cum proportione rationis solidorum E & K, ad rationem solidorum S & O, atque hucvsque proportio rationis inter solida A & G, ad rationem solidorum P & L, comparata est cum omnibus alijs cum quibus conferri potest, ita vt semper antecedentis rationem obtineat; vt igitur discursum prosequamur, assumemus proximè sequentes rationes quæ vicem antecedentis obtineant, dicendo: proportio rationis inter solida C & H, ad rationem solidorum Q & M, eadem est cum proportione inter solida D & I, ad rationem solidorum R & N, & proportio iterum rationis solidorum C & H, ad rationem solidorum Q & M, eadem est cum proportione rationis solidorum E & K, ad rationem solidorum S & O. Denuo proportio rationis solidorum C & H, ad rationem solidorum Q & M, eadem est cum proportione rationis solidorum A, G, ad P, L solidorum rationem; atque hoc modo contulimus proportionem rationis solidorum C & H, ad rationem solidorum Q & M, cum reliquis rationibus concedendo illi semper locum antecedentis, restat igitur idipsum præstemus de alijs quæ remanent, dicendo iterum: proportio rationis solidorum D, I ad rationem solidorum R, N eadem est cum proportione rationis solidorum E, K ad S, O solidorum rationem; item proportio rationis inter solida D & I, ad rationem inter solida R & N, eadem est cum proportione rationis inter solida A, G, ad rationem solidorum P & L, & eadem cum proportione rationis inter solida C & H, ad rationem inter solida Q & M. Tandem vt hanc partem expediamus dicemus proportionem rationis inter solida E, K ad rationem inter solida S, & O, eandem esse cum proportione rationis solidorum A, G ad rationem P, L, & cum proportione rationis C, H ad rationem Q, M; & cum proportione rationis D, I, ad rationem R, N.

Hoc

Hoc autem posito infero ex vi Lemmaticæ propositionis priùs citatæ huius libri quod proportio rationis inter aggregatum omnium solidorum A,C,D,E & aggregatum solidorum G,H,I,K ad rationes inter aggregatum omnium solidorum P, Q, R,S, & aggregatum solidorum L,M,N,O, eadem sit cum proportione inter rationes partium iam numeratarum quæ antecedentium loca obtinebant & rationem partium quæ consequentis vices supplebant.

Eadem discurrendi methodo, sed per 59.huius erit proportio rationis solidorum Aβ,& GT, ad rationem solidorum Pσ,& Lμ eadem cum proportione rationis solidorum Cγ & HV ad rationem solidorum Qη & Mν, item cum proportione rationis solidorum Dδ, & IX ad rationem solidorum Rθ,& Nξ;item cum proportione rationis solidorum Eλ & KY, ad rationem solidorum SZ & Oϱ. similiter si proportio rationum quæ sunt inter solida Cγ & HV:Qη & Mν comparetur cum omnibus reliquis, idemq; fiat circa proportionē rationū inter solida Dδ & IX, Rθ & Nξ existentiū;vti & circa proportionē rationū inter solida Eλ & KY:SZ & Oϱ: semper reperietur æqualitas siue identitas inter rationum proportiones in quacunque comparatione.Quare licebit inferre idem quod priùs conclusum est, nimirum quod proportio inter rationes aggregati primi ad secundum aggregatum,& rationes aggregati tertij ad quartum eadem sit cū proportione inter rationes, quæ sunt inter partes aggregatorum obtinentes vices antecedentium terminorum & rationes,quę sunt inter partes aggregatorum quæ loca consequentium continebant.

Quia verò demonstratum est [a] quod proportio inter rationem solidorum A & G, & rationem solidorum P & L, sit ad proportionem inter rationem solidorum C & H, & rationem solidorum Q & M, vt est proportio inter rationem solidorum Aβ & GT, & rationem solidorum Pσ & Lμ ad proportionem inter rationem solidorum Cγ & HV, & rationem solidorum Qη & Mν, atque ita consequenter de reliquis, & hoc quidem in omni subdiuisione diametrorum parabolæ, infero secundū mentem propositionis quadragesimæ sextę libri de ductibus quod proportio rationis quæ est inter aggregata solidorum A,C,D,E & solidorum G,H,I,K ad rationem aggregatorum P,Q,R,S & L,M,N,O, eadem sit cum proportione rationis quæ est inter aggregatum solidorum Aβ,Cγ, Dδ,Eλ, & aggregatum solidorum GT,HV, IX,KY ad rationem inter aggregatum solidorum Pσ,Qη, Rθ, SZ & aggregatum solidorum Lμ,Mν,Nξ,Oϱ. Quod fuit demonstrandum. [a] 60.huius.

PROPOSITIO LXII.

EAdem figura manente:

Dico rationem quæ est inter segmenta parabolica φEBψ & ψFdδ ducta in se ipsa, esse ad rationem quę reperitur inter parabolica segmenta dFυσ & BEκυ, etiam ducta in seipsa, vt ratio inter segmenta parabolica φEBψ & ψFdδ, ducta in seipsa subalternè, est ad rationem inter segmenta parabolica dFυσ & BEκυ ducta in seipsa subalternè.

Demonstratio.

OStensum est præcedenti demonstratione rationem inter parallelepipeda A, C, D,E & parallelepipeda G,H,I,K, esse ad rationem inter parallelepipeda P,Q, R,S & parallelepipeda L,M,N,O, vt ratio inter parallelepipeda Aβ, Cγ, Dδ,Eλ, & parallelepipeda GT,HV, IX,KZ est ad rationē inter parallelepipeda Pσ, Qη, Rθ,SZ,ad parallelepipeda Lμ, Mν,Nξ, Oϱ. atque hoc de quauis subdiuisione rectarum EB, Fd intelligendum est ex vi discursus in demonstratione positi: cum igitur continuatis subdiuisionibus auferatur semper plus dimidio residui corporum eorum quibus parallelepipeda inscribuntur, vt demonstratum libro de ductibus,[b] liquet ex discursu propositionis 45.eodem libro demonstratæ rationem quoque inter Eφψ B in se ductum & Fψδd,ductum in se esse ad rationem inter dFυσ in se [b] Propos. 42. & 43.

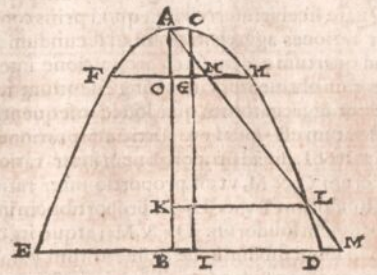
ductũ & E ϰυB, ductum in se vt ratio eorundẽ segmentorum φEBψ & ψFdδ, subalternè in se ductorum est ad rationem eorundem rursus segmentorum dFυσ & EBυϰ, in se ductorum subalternè. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIII.

SIt parabolę axis AB, ad quem positæ sint ordinatim DE, HF, axi verò sit æquidistans CGI, occurrens ordinatim positis in G & I.

Oporteat autem figuræ ex plano HGID, in se ductæ æquale parallelepipedum exhibere.

Constructio & demonstratio.



a 161. duct.

FIat recta AK æqualis lateri recto quod axi AB inseruit: posita deinde KL ordinatim ad axem ducatur AL quæ secet HF, DE in punctis N & M, erit igitur a prisma basim habens triangulum AMB & altitudinem AK, æquale corpori quod fit ex AHDB parabola in se ducta, & consequenter figura solida habens basim NOBM & altitudinem AK, æqualis est corpori quod fit ex ductu HOBD in seipsum ducto. sed HOBD in se ductum (hoc est, b vt iam ostendi ONMB ductum in altitudinem AK) æquale est c HGID, ducto in se, simul cum GOBI in se ducto, & simul cum HGID, bis ducto in GOBI. Igitur cùm GOBI in se ductum parallelepipedum exhibeat, & cùm HGID, ductum in GOBI, corpus producat quod notam habet basim & altitudinem; si ex solido cuius est basis ONMB, & altitudo AK, auferantur partes quæ sint æquales corporibus quæ fiunt ex GOBI, in se ducto & ex HGID in ipsum GOBI bis, residuum ex corpore habente basim NOBM, & altitudinem AK, erit æquale solido quod fit ex HGID in se ducto. igitur figurę ex plano HGID in se ductæ æquale parallelepipedum exhibuimus. quod præstare oportuit.

b Similiter ostenditur vt 199. ductu.

c Colligitur ex 239. parab.

PROPOSITIO LXIV.

IDem oporteat præstare de parte parabolæ GFEI.

Constructio & demonstratio.

QVoniam figura OFEB æqualis est figurę OHDB, & cùm sit demonstratum d figuram HOBD ductam in se æqualem esse prismati habẽti basim NOBM, & altitudinem AK, etiam figura OFEB in se ducta eidem prismati sub basi NOBM, & altitudine AK æqualis erit: est verò figura GFEI, in se ducta æqualis e GOBI in se ducto simul cum OFEB, ducto in se vnà cum GOBI, bis ducto in superficiem OFEB. Igitur cùm GOBI, ductum in se parallelepipedum sit, &

d Ex 161. duct.

e Similiter ostenditur vt 199. duct.

OFEB

OFEB ductũ in ſe æquetur priſmati ſub baſi NOBM, & altitudine AK, & OFEB ductum in GOBI, æquale ſit corpori habenti triangulum æquale figurę OFEB, (quam ad rectilineam reduximus [a]) & altitudine GO, manifeſtum eſt totum corpus ex ductu plani GFEI in ſeipſum reductum eſſe ad ſolidum baſeos figuræ rectilineę & altitudinis notæ. quod præſtare oportuit.

[a] Part. 5. parab.

PROPOSITIO LXV.

REſumpta figura propoſitionis 56.

Dico proportionem quæ eſt inter rationẽ ſolidi ex plano ϕ E B ψ parabolico in ſe ducto ad ſolidum ex plano parabolico F ψ ϑ d ducto in ſe, & inter rationem ſolidi ex ductu plani F d σ υ in ſe ducti ad ſolidum ex ductu plani parabolici E χ υ B in ſe ipſum notam eſſe.

Vide figurã pag. 1144.

Demonſtratio.

PRęcedenti enim propoſitione reducta ſunt ſingula ea corpora ad priſmata quæ baſim habent rectilineam & altitudinem notam. ſed inter quatuor talia corpora proportionalitas nota eſt per ea quæ docuimus libro de proportionalitatibus [b]. igitur etiam proportionalitas inter corpora illis æqualia nota erit. Quod fuit demonſtrandũ.

[b] Prop 13.

PROPOSITIO LXVI.

REſumptâ eadem figura.

Dico proportionem quæ eſt inter rationem ſolidi ex plano ϕ E B ψ ducto in ſeipſum ſubalternè ad ſolidum quod fit ex ſuperficie ψ F d ϑ in ſe ſubalternè ductâ, & inter rationem ſolidi geniti ex ductu ſubalterno in ſe plani F d σ υ ad ſolidum quod oritur ex ductu plani B E χ υ ſubalternè in ſe, notam eſſe.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt propoſit. 61. huius quadraturæ eandem eſſe proportionalitatẽ inter corpora quę oriuntur ex planis ϕ E B ψ, F ψ ϑ d, F d σ υ, & B E χ υ in ſe ductis & inter ſolida, quę fiunt ex ijſdem planis ductis in ſe ſubalternè. ſed propoſitione præcedenti oſtenſum eſt, notam eſſe proportionalitatem inter corpora quæ oriuntur ex planis ϕ E B ψ, F ψ ϑ d, F d σ υ, & B E χ υ in ſe ductis. Igitur nota erit proportionalitas quæ reſultat in corporibus quę fiunt ex ductu earundem ſuperficierum in ſe ſubalternè. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVII.

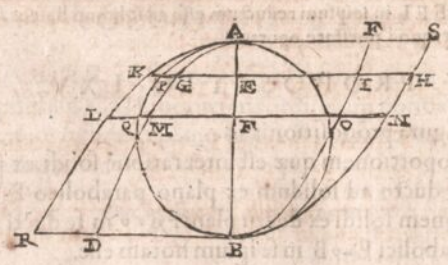
SInt A & B vertices parabolarum ſubalternè poſitarum æqualium, eductiſque ordinatim B D, A F ad axem A B, ſuper A B deſcribatur circulus A C B, & conſtituantur ordinatim G I, M O.

Dico rectangulum G E I ad M F O, eandem habere rationem quam habet linea P E ad Q F.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1204] - 1147
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

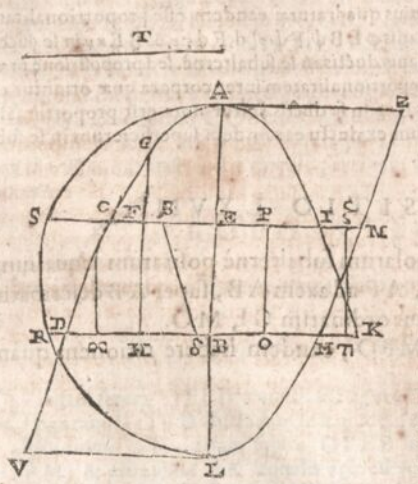


Fiant BR, AS æquales AB, quibus ordinatim poſitis ad axes AB, BA, deſcribantur parabolæ AKR, BNS habentes axem AB, erit rectangulo AB, PE æquale rectangulum KEH, & rectangulo AB, QF æquale rectangulũ LFN. ſed vt PE, ad QF, ita rectangulum AB, PE, ad rectangulum AB, QF. ergo vt PE ad QF, ſic rectangulum KEH ad rectangulum LFN. Iam verò vt GE ad MF, ita eſt KE ad LF, & vt eſt EI ad FO, ita EH eſt ad FN. Igitur eſt rectangulum KEH ad LFN, vt rectangulum GEI ad MFO, cùm ſit horum rectangulorum ratio compoſita ex ijſdem rationibus. Igitur eſt rectangulum GEI ad MFO, vt linea PE ad QF lineam. Quod fuit demonſtrandum.

a *Oſtenſum in demonſt. prop. 143. duct.*

PROPOSITIO LXVIII.

SIt AL axis parabolarum æqualium ſubalternè poſitarum ACD, & LMN, & applicatis ad axem ordinatim rectis CEN, DBM, ſuper AL fiat ſemicirculus ASL, ſecans ordinatim poſitas productas in S & R. Fiat demum rectangulo CEN æquale rectangulum ſuper SE & T.



Dico ſegmentum circulare ductum in altitudinem T, æquari ſegmento parabolico CDBE ducto in ſegmentum EBMN: imò totus ſemicirculus ductus in altitudinem T, æquatur toti parabolæ AVL in ſe ductæ ſubalternè.

Demonſtratio.

b *Per præcedent.*

QVoniam vt SE ad RB, b ita eſt rectangulum CEN ad DBM, & vt SE ad RB, ita rectangulum SET ad rectangulum RBT, erit rectangulum SET ad rectangulũ RBT, vt rectangulum CEN ad rectangulum DBM. Quare cùm rectangulum SET ex conſtr. æquetur rectangulo CEN, etiam rectangulum RBT æquatur rectangulo DBM. Quod quia ſemper contingit, circa omnia re-

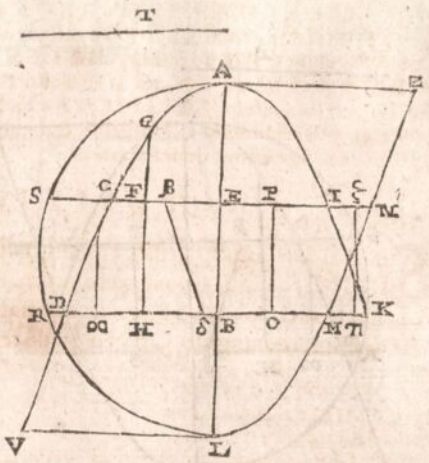
nia rectangula alia quotcunque tandem ducantur parallelæ, eodem planè discursu, quo vsi sumus in quadratura prima propos. 51. & aliquot eam præcedentibus demonstrabimus CEBD, ductum in ENMB æquale corpus efficere solido quod fit ex SEBR, ducto in altitudinem T: imò totam parabolam AVL ductam in parabolam totam ALZ, æquale corpus producere cylindro qui fit ex semicirculo ASRL in altitudinem T. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIX.

SIt parabola ACV axem habens AL, quam secent ordinatim positæ CEI, DBK: ponaturque FH parallela axi.

Oporteat solido quod fit ex segmento parabolico CFHD in se subalternè ducto, exhibere æquale solidum cylindricum cuius basis sit segmentum aliquod circulare.

Constructio & demonstratio.



FIat EL, æqualis AB, & rectis EI, BK, æquales BM, EN: tum factâ NP æquali RH, ponatur PO parallela axi. erunt igitur puncta LMN ad parabolam, segmentumque parabolicum PNMO æquale erit ac simile segmento DCFH, & posito subalternè. Deinde super AL describe circulum, cui occurrant EC, BD in S & R: & super recta SE, & quadam aliâ T, fiat rectangulum æquale ei quod rectis CE, EN continetur, erit igitur per præced. segmentum parabolicum CEBD in se ductum subalternè, hoc est in ENMB, segmentum æquale segmento circulari SEBR, ducto in altitudinem T. Atqui segmentum parabolicum CEBD ductum in ENMB, æquatur [a] segmento FEBH, ducto in ENMB, & segmento DCFH, ducto in EPOB, vnà cum DCFH ducto in PNMO. ergo hæc tria solida quæ nimirum fiunt ex FEBH ducto in ENMB, ex DCFH in EPOB; ex DCFH in PNMO, simul sumpta æquantur solido quod fit ex SEBR ducto in altitudinē T. Iā verò quoniam parabolicum segmentum CEBD, [b] reduximus ad rectilineum, etiam solidum ex FEBH in ENMB, reductum est ad parallelepipedum. Fiat igitur parallelepipedum altitudinem habens T, æquale solido ex FEBH in ENMB; quod quia iam ostendi minus esse solido ex SEBR, ducto in altitudinem T, etiam parallelepipedū ipsi æquale in T altitudine minus est solido ex SEBR in altitudine T, ac proinde eius basis erit minor plano SEBR. sit igitur basis illa segmentum βEBδ. Præterea quoniam segmentum DCFH redegi [c] ad rectilineum, etiam solidum ex DCFH in EPOB, ad parallelepipedū redactum est. Fiat ergo parallelepipedum in altitudine T, æquale solido ex DCFH in EPOB. Quoniam autem ostendi suprà SEBR in T, æquari FEBH in ENMB, & DCFH in EPOB, vnà cum DCFH in PNMO; estque βEBδ in T, æquale solido ex FEBH in ENMB, manifestum est solidum ex SβδR in T, æquari solido ex CFHD in EPOB, vnà cum DCFH in PNMO. ergo parallelepipedum quod paulò ante in altitudine

a *Demonstratur ex prima 2. similiter ac 199. ex quarta 2.*

b *Parte 5. parab.*

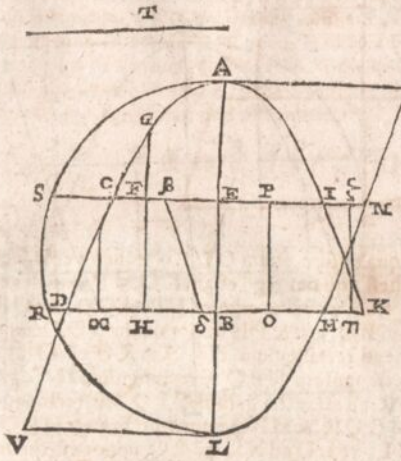
c *Ibid.*

dine T, factum est æquale solido ex DCFH in EPOB, minus est solido ex SβδR in T, ac proinde & basis eius minor est plano SβδR. sit igitur basis illa rectilineum βδXC. Quoniam igitur totum SEBR ductũ in T, æquatur FEBH in ENMB, & DCFH in EPOB, vnà cum DCFH in PNMO, suntque solidi ex SEBR in T, partes duę, nimirum βEBδ in T, & βδXC in T, æquales solidis FEBH in ENMB, & DCFH in EPOB. Erit quoque solidi ex SEBR in T residuum, nempe quod fit ex SCXR in altitudinem T, æquale ei quod fit ex DCFH in PNMO, hoc est solido quod fit ex DCFH in se ducto subalternè. Fecimus ergo quod erat postulatum.

PROPOSITIO LXX.

Iisdem positis: Oporteat solido quod fit ex segmento parabolico FIKH in se ducto subalternè, hoc est ducto in segmentum FNMH, exhibere æquale solidum cylindricum cuius basis sit segmentum aliquod circulare, altitudo verò T, eadem nempe quę superiori propositione reperta fuit.

Constructio & demonstratio.



a Parts 5. parab.

b Ibid.

PLanũ CFHD, hoc est PIKO, ductũ in PNMO, æquatur plano SCXR ducto in altitudinem T, per præcedent. & quia segmentum PIKO reduximus [a] ad rectilineũ, etiam solidum quod fit ex PIKO in FPOH redactum est ad parallelepipedum. Fiat igitur ipsi æquale parallelepipedum cuius altitudo sit T, basis verò rectilineum, exempli gratia CβδX. Rursum quia [b] reduximus ad rectilineum portionem parabolicam FIKH, solidum quoque natum ex FPOH in FIKH, redactum est ad parallelepipedum. Fiat igitur ipsi æquale parallelepipedum cuius altitudo sit T, basis verò rectilineum βξπδ. Tria igitur solida, quæ nimirũ fiunt ex SCXR in T, ex CβδX in T, ex βξπδ in T; hoc est solidum quod producitur ex segmento circulari toto SRπξ in altitudinem T, æquatur tribus solidis quę fiunt ex PIKO in PNMO, ex PIKO in FPOH, ex FPOH in FNMH. Atqui solidum ex PIKO in PNMO, cum solido PIKO in FPOH (hoc est solidum ex PIKO in FNMH) vnà cum solido ex FPOH in FNMH, æquantur [c] solido quod producitur ex FIKH, in se ducto subalternè siue in planum FNMH. ergo segmentum cylindriforme quod fit ex SRπξ in altitudinem T ducto, æquatur solido quod fit ex segmento parabolico FIKH in se ducto subalternè. exhibuimus ergo quod petebatur.

c Demonstratur ex prima 2. ut 99. ex quarta 2.

PRO-

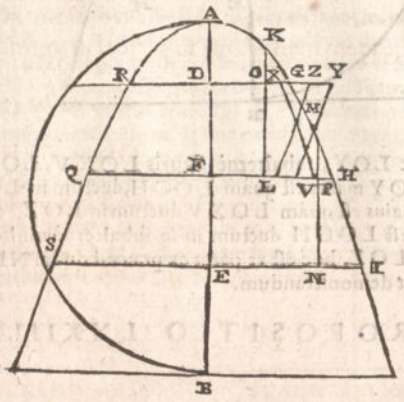
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1207] - 1150
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXXI.

SIt AB axis parabolæ AGI, & rectâ DE bifariam diuisâ in F, ponantur ordinatim DG, FH, EI quæ intercipiant æquales diametri partes FD, FE. Denique constituantur KL, MN axi æquidistantes æquales inter se.

Dico figuram OGHL maiorem esse figura PHIN, & similiter corpus ex ductu OGHL, in se maius esse solido quod fit ex ductu PHIN in se.

Demonstratio.



QVoniam DF, FE ex hypothesi æquales sunt, etiam OL, PN æquales erũt. sunt autem & totæ KL, MN ex hypothesi æquales. ergo etiam KO, MP æquales erunt. rectangula igitur GOR, HPQ [a] sunt æqualia. ergo vt HP ad GO, sic OR ad PQ. quare cùm OR minor sit quàm PQ, erit & PH minor quàm GO. Deinde ostensum est [b] rectangulum GOR esse ad rectangulum HLQ, vt KO est ad KL, hoc est vt MP ad MN, hoc est [c] vt rectangulum HPQ ad rectangulum INS. igitur permutando vt rectangulum GOR est ad rectangulum HPQ, sic rectangulum HLQ ad rectangulum INS. sed GOR, & HPQ æquantur. Ergo & HLQ, INS æqualia sunt. Ergo NI est ad HL, vt LQ ad NS. sed LQ minor est quàm NS. ergo NI minor quoque est quàm HL. Quoniam igitur ostensum est HP minorem esse quàm GO, & NI minorem quàm HL, fiat OX par ipsi HP, & LV par ipsi NI, inscriptaq; figurâ OXVL, quę sit æqualis PHIN, erit OGHL maior figura OXVL adeoq; etiam figura PHIN. quod erat primũ. Secundum quoque sic constabit: quoniam OGHL in se ductum maius est OXVL, ducto in se, etiam OGHL, in se ductum erit maius PHIN in se ducto. Quod erat secundum.

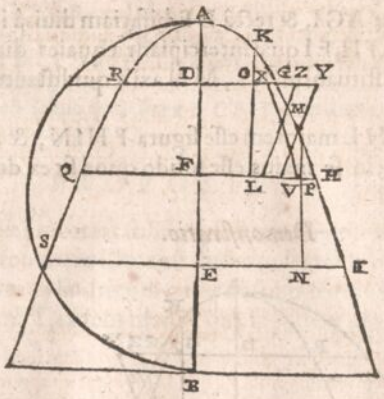
[a] 55. huius.
[b] 44. parab.
[c] Per cand.

PROPOSITIO LXXII.

IIsdem positis:

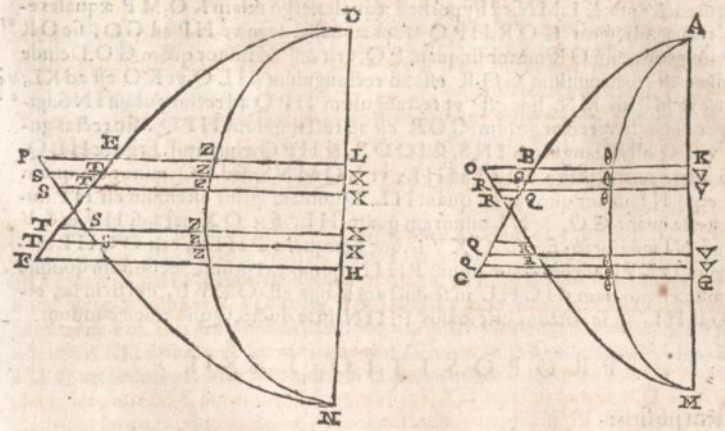
Dico quod OGHL ductum in se subalternè maius existat solido quod resultat ex PHIN in se subalternè ducto.

Demonſtratio.



POnantur LOZ & LOY, ſubalternè figuris LOXV, LOGH. Tunc LOGH ductum in LOY maius eſt quàm LOGH, ductum in LOZ. ſed LOGH ductum in LOZ, maius eſt quàm LOXV ductum in LOZ. ergo LOGH ductum in LOY, hoc eſt LOGH ductum in ſe ſubalternè multò maius eſt quàm LOXV, ductum in LOZ, hoc eſt vt patet ex præced. quàm NPHI ductum in ſe ſubalternè. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIII.



SInt duæ parabolę ABC, DEF, quarum axes AG, DH diuiſi ſint in K, & L proportionaliter, & KB, VQ, GC ordinatim poſitæ ſint, vti & LE, XT, HF; productis deinde AG in M & DH in N, vt ſint æ-

quales

quales AK, GM, item DL, HN, fiat KO linea æqualis GC, & LP æqualis HF lineæ; & per M & O, item per N & P parabolæ descriptæ sint, quarum vertices M & N. Denique fiant rectangulis RVQ æqualia rectangula sub AM & θV; similiter rectangulis SXT æqualia fiant rectangula sub DN, XZ; A, θ, M puncta; item puncta D, Z, N erunt ad [a] circulum vel [b] ellipsin.

[a] *Si axis æqualis sit lateri recto, & habetur ex demonstratis prop. 143. dict.*

[b] *Si axis sit lateri recto inæqualis, & patet ex conuersa 210. parab.*

Dico partem sectionis θKGθ eandem habere rationem ad sectionem AθM cuius est pars, quam pars sectionis ZLHZ habet ad sectionem DZN cuius est pars.

Demonstratio.

CVm enim sectio AθM, item DZN sit ellipsis aut circulus cuius axes AM, DN: item cùm θK, ZL ordinatim applicatæ ad suas diametros eas proportionaliter diuidant, [c] erit θAK segmentum ad suam sectionem vt segmentum ZDL est ad suam. Eodem modo ostendetur segmentum θAG ad suam sectionem esse vt segmentum ZDH est ad suam, rursus enim θG, ZH ordinatim applicatæ ad suas diametros, eas diuidunt proportionaliter. Igitur permutando erit segmentum θAK ad segmentum ZDL, vt sectio ad sectionem. eodem modo permutando segmentum θAG ad segmentum ZDH, erit vt sectio ad sectionem, hoc est vt segmentũ θAK ad ZDL segmentum. ergo diuidendo segmentum θKGθ, est ad segmentum ZLHZ vt segmentum θAK ad segmentum ZDL, hoc est vt sectio ad sectionem, & permutando segmentum θKGθ est ad suam sectionem AθM, vt segmentum ZLHZ est ad suam sectionem nempè DZN. Quod erat demonstrandum.

[c] *Per 187. de ellips.*

PROPOSITIO LXXIV.

QVod si rursus parabolæ subalternę ponantur vt suprà, & ordinatim applicatę BK, CG, æqualiter distent à verticibus A & M, item in secundis parabolis subalternè positis ordinatim applicatæ ZX, ZX æqualiter etiam distent à verticibus D & N, sed ratio AM ad AK, non sit eadem cum ratione DN ad DX, sed ratio AM ad AK, sit maior quàm ratio DN ad DX.

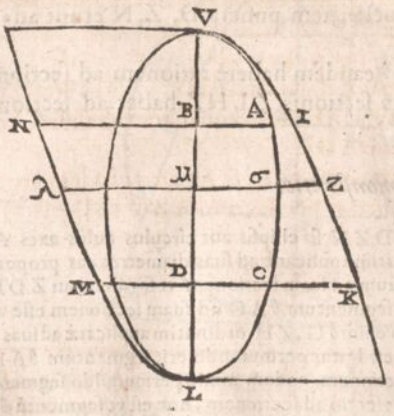
Dico quod segmentum inter ordinatim ductas interceptum, nempe θKGθ ad suam sectionem nempe AθM, maiorem habeat rationem, quàm segmentum ZXXZ habeat ad suam sectionem nempe DZN.

Demonstratio.

CVm posita sit ratio AM ad AK, maiorem habere rationem quàm DN ad DX; fiat vt AM ad AK, ita DN ad DL; erit igitur DL linea minor quàm linea DX, & per præced. segmentum θAK erit ad suam sectionem AθM, vt segmentum ZDL est ad sectionem DZN. Sed ZDL segmentum ad sectionem DZN, minorem rationem habet, quàm segmentum ZDX habeat ad eandem sectionem DZN (cùm linea DL minor sit lineâ DX, ac propterea segmentum ZDL minus segmẽto ZDX). Igitur & segmentum θAK ad sectionem AθM, minorem rationem habet, quàm segmentum ZDX habeat ad sectionem DZN, adeoque segmentum θKGθ ad suam sectionem AθM, maiorem habet rationem, quàm ZXXZ segmentum ad sectionem DZN. Quod erat demonstrandum.

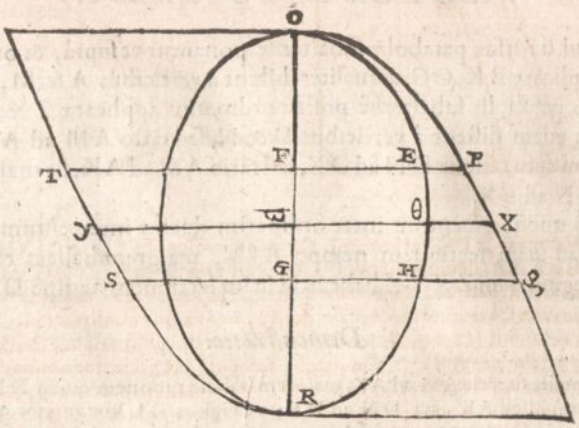
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1210] - 1153
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXXV.



PONantur in duobus circulis aut ellipſibus ordinatim ad axem binæ lineæ AB, CD, EF, GH æqualiter à centris diſtantes.

Oporteat binas parabolas ſubalternè conſtituere, ſcilicet VIK, LMN, & OPQ & RST, vt ſegmẽtum IBDK, ductum in ſegmentum BNMD, & ſimiliter ſegmentum PFGQ, ductum in ſegmentum FTSG, æqualia ſolida producant cum partibus cylindricis quarũ baſes ſint ABDC, & EFGH, & altitudines VL & OR.



Conſtructio & demonſtratio.

Fiat rectangulo ſub VL & AB æquale rectangulum IBN. Deinde fiat vt recta VB ad VD, ita quadratum IB ad KD quadratum. Denique fiat vt linea LB ad LD lineam, ita quadratum BN ad DM quadratum. erunt[a] puncta V, I, K, LMN ad parabolas. Similiter fiat in altera ellipſi vel circulo OER, nimirum fiat rectangulo ſuper OR & EF, æquale rectangulum PFT, & ſit vt OF linea ad lineam OG, ita quadratum PF ad QG quadratum. Tandem fiat vt linea RF ad RG, ita quadratum FT ad GS quadratum. erunt puncta O, P, Q, R, S, T ad parabolas

[a] *Primâ parab.*

rabolas. Dico factum quod requiritur. ductâ enim quauis Z λ vel XY, quæ æquidistet AB vel EF, ostensum est[a] rectangula Z μ λ & X ϖ Y, æqualia esse rectangulis sub VL & σ μ, & OR & ϖ θ. Quare eodem discursu quo demonstrata est 51. huius ostendemus corpora quæ fiunt ex ductu partium parabolarum inter se æquari partibus cylindricis quarum bases sunt ABDC & EFGH, & altitudines VL & OR, igitur perfecimus, quod fuerat imperatum.

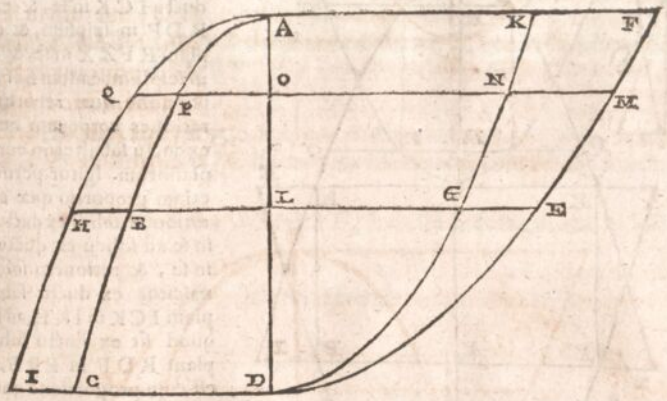
a *In circulo patet ex demonstratis 143. ductuum; in ellipsi ex conuersâ 110. parab.*

PROPOSITIO LXXVI.

DAtis duabus parabolis ABC, DEF inæqualibus subalternè constitutis ad communem axem AD.

Oporteat alteram inuenire quæ ducta in se subalternè idem producat seu æquale illi solido, quod efficitur per ductum ABC in DEF.

Constructio & demonstratio.



Diuidatur axis AD bifariam in L, & positâ ordinatim EH, fiat LG media inter duas EL, LB: denique fiat vt DL linea ad DA lineam, ita LG quadratum ad quadratum AK, fiatque LG æqualis LH & AK, æqualis DI, & per DGK & AHI, parabolæ describantur æquales & similes, vt patet ex ipsa constructione; & parabola DGK ducta in AHI, æquale solidum exhibebit illi quod exhibet ductus parabolæ DEF in parabolam ABC: quod patebit si quęuis MQ ducatur ordinatim ad communem axem AD: nam rectangulum MOP æquale erit rectangulo NOQ, quod ita demonstrabitur. Ratio rectanguli GLH ad rectangulum ELB, componitur ex ijsdem rationibus, ex quibus est composita ratio rectanguli NOQ ad rectangulum MOP: nam est GL ad LE, vt ON ad OM; & LB ad LH, vt OP ad OQ. ergo cùm rectangulum ELB, æquale sit rectangulo GLH; etiam rectangulum MOP, æquale erit NOQ rectangulo. quare solidum ex ductu DGK, in se subalternè productum æquatur[b] magnitudini quæ fit ex ductu parabolarum DEF, ABC inter se. Igitur perfecimus quod postulatum fuit.

b *45. Duct.*

PRO-

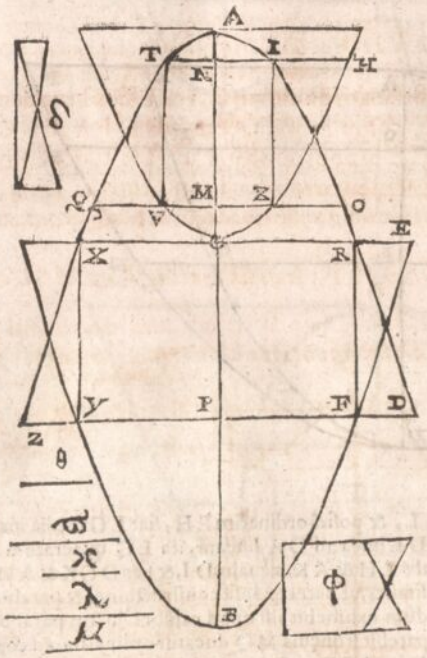
PROPOSITIO LXXVII.

SIt axis AB parabolarum ACD, BFE & AIC, HKO ſubalternè conſtitutarum: ſumptis deinde AN, OM inter ſe æqualibus & ſimiliter AO, BP, ita vt NM ſit æqualis OP, ponantur ordinatim NIH, MKC & OE, PD.

Oporteat autem rationem exhibere quæ eſt inter corpora quæ oriuntur ex ſubalterno ductu ICK in HIK & ex ductu RDF in ERF, vel inter ſolida quæ fiunt ex ductu ſubalterno planorum ITQK in HTVK, & RXZF in EFYX.

Conſtructio & demonſtratio.

a Per 61. huius.



DEmonſtratum eſt a quod proportio quę eſt inter rationes ſolidorum quæ fiunt ex ductu ICK in ſe, & ex ductu RDF in ſeipſum, & ex ductu plani RFZX in ſe, & IKQT in ſeipſum, eadem ſit cum proportione quæ reperitur inter rationes corporum quæ fiunt ex ductu ſubalterno eorundem planorum. Igitur permutando etiam proportio quæ eſt inter rationem ſolidi ex ductu ICK in ſe ad ſolidū ex ductu RDF in ſe, & rationem ſolidi quod naſcitur ex ductu ſubalterno plani ICK in IKH, ad ſolidum quod fit ex ductu ſubalterno plani RDF in ERF, eadem eſt cum proportione quę exiſtit inter rationes corporum quæ naſcuntur ex ductu FRXZ in ſe, & ITQK in ſe, & rationem ſolidorum quę fiunt ſub ijſdem planis ſubalternè ductis in ſe. Igitur ſi proportio rationis inter ICK in ſe ductum, & RDF in ſe ductum ad rationem inter RFZX, in ſe ductum, & ITQK, ductum in ſe eſt vt proportio rationum λμ & ϖκ, etiam proportio quæ eſt inter rationes corporum quæ oriuntur ex ijſdem planis in ſe ſubalternè ductis eadem erit cum proportione λμ & ϖκ, quare etiam proportio inter rationes corporum ex ductu ICK in ſe, & DRF in ſe ad rationem ſolidorum ex ductu ſubalterno eorundem ortorum, eadem erit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum quæ gignuntur ex ductu RXZ in ſe, & ITQ in ſe ad rationem corporum quæ oriuntur ex ductu ſubalterno eorundem. Ac proinde vt eſt proportio rationis inter IKC, ductum in ſe ſubalternè & RFD ſubalternè ductum ad rationem IKC in ſe ducti ad RFD ductum in ſe: ita eſt proportio rationis inter FRXZ ductum in ſe ſubalternè, & KITQ ſubalternè in ſe ductum ad rationē FRXZ,

FRXZ, ductis in se ad ITQ ductum in se. Fiat igitur vt RFD ductum in se ad IKC, ductum in se, ita RFD ductū in se subalternè ad ∂, & fiat vt ITQ, ductum in se ad FRXZ ductum in se, ita ITQ, in se subalternè ductum ad solidum φ. erit itaque vt solidum ex ductu CIK, in se subalternè ad ∂, ita solidum ex ductu subalterno FRXZ ad φ ac proinde cùm hæ magnitudines priùs sint reductæ ad cylindricas quantitates illis æquales, etiam proportionem rationum exhibuimus, quæ sunt inter illas ipsas magnitudines cylindricas, quod sufficit vt ex communis Geometriæ principijs eædem partes cylindricæ ad parallelepipeda illis æqualia reduci possint, præmissimus enim omnia quæ ad hoc ipsum necessaria sunt, vt plenius in quartâ Quadraturâ cognosci poterit.

TERTIA CIRCVLI QVADRATVRA.

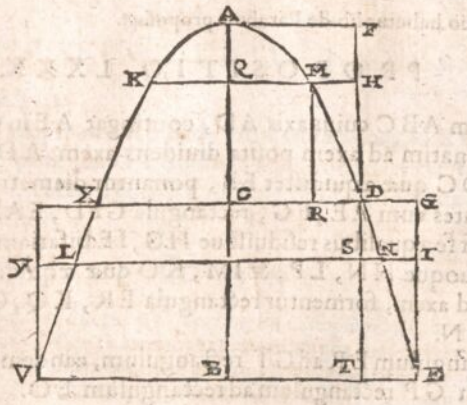
PROPOSITIO LXXVIII.

Sit parabolę axis AB bifariam diuisus in C, erectisq; ad eundem ordinatim CD, BE, compleantur rectangula DFA, EGC: diuisis deinde FD, GE proportionaliter in H & I, ponantur HK, & IL quæ æquidistent ordinatim constitutis ad axem.

Dico primò, vt AQ ad QC lineam ita esse quadratum MQ ad rectangulum MHK.

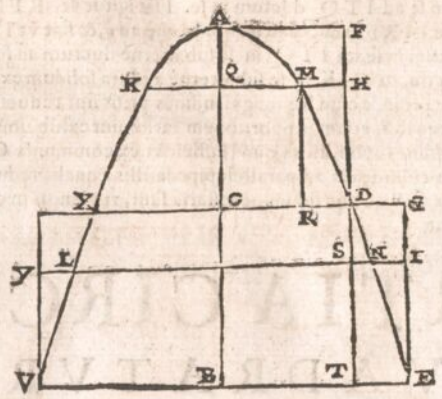
Dico secundò, vt est linea DS ad ST, ita esse rectangulum NSL ad NIL rectangulum.

Demonstratio.



VT est AQ ad AC, ita est[a] quadratum MQ ad DC, hoc est HQ quadratum, est autem HQ. quadratum æquale quadrato MQ. vnà cum rectangulo MHK; igitur MQ quadratum ad quadratum MQ vnà cum rectangulo MHK est vt AQ ad AC, & diuidendo vt AQ linea ad QC lineam, ita est quadratum MQ ad rectangulum MHK, quod erat primum. [a] Per primam parabol.

Secundum quoque sic expedietur: ex E ducatur EV ordinatim ad axem, erigatur-



que ex V, linea V Y parallela E G, occurrens I L productæ in Y. Vt D S ad D T, ita rectangulum N S L ad E T V, hoc est I S Y per ea quæ de parabola[a] præmisimus. rectangulum L I N æquatur rectangulis L S N I, & S I N I addatur commune L S N, erit L I N cum L S N æquale his tribus L S N I, S I N I, L S N. sed S I N I æquatur Y L S I, ergo L I N cum L S N, æquatur L S N I, Y L S I, L S N. sed hæc tria conficiunt rectangulum Y S I siue I S Y, nam duo L S N I, L S N faciunt rectangulum L S I, cui si addis Y L S I, conflatur rectangulum Y S I. ergo Y S I æquatur L S N, cum L I N. rursus igitur diuidendo vt D S ad S T, ita rectangulum L S N ad rectangulum L I N. Quod erat propositum.

[a] Per 44. parab.

PROPOSITIO LXXIX.

Iisdem positis:
Dico rectangula M H K, N I L esse inter se æqualia.

Demonstratio habetur lib. de Parabola propos. 45.

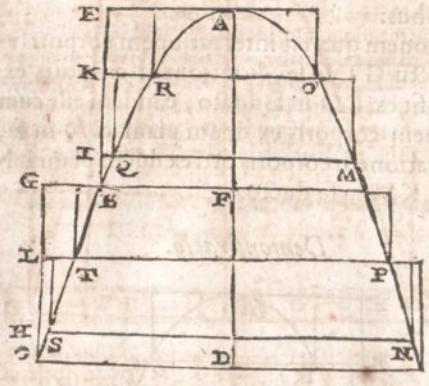
PROPOSITIO LXXX.

Parabolam A B C cuius axis A D, contingat A E in vertice A: sitque B F ordinatim ad axem posita diuidens axem A D bifariam in F; eductâque D C quæ æquidistet F B, ponantur diametris parallelæ C G, B E, formantes cum A E, F G, rectangula G F D, E A F. factis deinde C H, B I inter se æqualibus residuisque H G, I E bifariam in L & K diuisis, positis quoque H N, L P, & I M, K O quæ æquidistent ordinatim constitutis ad axem, formentur rectangula E R, K Q, G T, L S & E O, K M, G P, L N.

Dico rectangulum E R ad G T rectangulum, eandem habere proportionem quam G P rectangulum ad rectangulum E O.

Demon-

Demonſtratio.



QVoniam EB, GC ſunt æquales lineæ axi æquidiſtantes ex conſtructione, ſicut etiam EI & GH; igitur [a] rectangulo RKO æquatur TLP rectangulum, vnde vt eſt KR ad LT, ita eſt LP ad KO. ſed rectangulum ER eſt ad rectangulum GT, & rectangulum GP ad EO, vt ſunt eorum baſes, cùm altitudines communes vel æquales ſint ex conſtructione: Igitur manifeſtum eſt rectangulum ER ad GT, eam habere proportionem quam habet GP rectangulum ad rectangulum EO. Quod fuit demonſtrandum. [a] 45. depar.

Corollarium.

HInc liquidò conſtat etiam rectangulum KQ ad LS rectangulum, eam obtinere proportionem quam rectangulum LN ad KM rectangulum, diſcurſus enim idem eſt cum priore quo hoc demonſtrari debet: quod ſimiliter intelligendum eſt de quauis ſubdiuiſione linearum EB, GC, modò reliqua ſeruentur quę in conſtructione ſunt adhibita.

PROPOSITIO LXXXI.

IIſdem manentibus:

Dico parallelepipedum quod oritur ex rectangulo ER in ſe ducto, ad illud quod gignitur ex GT ducto in ſe, eandem habere rationem, quã habet ſolidum ex ductu plani GP in ſe, ad illud quod fit ex ductu ſuperficiei EO in ſeipſam.

Demonſtratio.

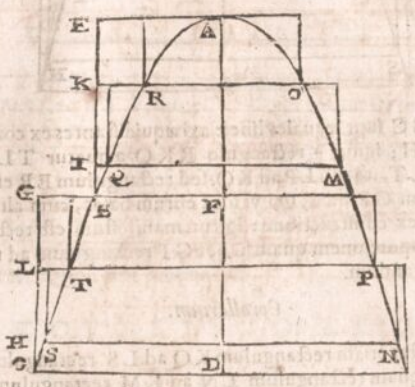
PArallelepipedum ex ductu ER rectanguli in ſeipſum, ad parallelepipedum ex ductu rectanguli GT in ſe, eam habet rationem quę inter baſes reperitur, cùm altitudines ex conſtr. ſint æquales. Sed eadem quoque reperitur proportio inter baſes parallelepipedorum quę fiunt ex ductu plani GP in ſe, & ex ductu plani [a] EO in ſeipſum. Igitur patet parallelepipedum ex plano ER, ducto in ſe ad ſolidum ex GT in ſe ducto emergens, eandem habere proportionem, quam ſolidum ex ductu plani GP in ſe, ad ſolidum ex EO in ſeipſum ducto reſultans. [a] Per 80. huius.

PROPOSITIO LXXXII.

IIsdem remanentibus:

Dico proportionem quæ est inter rationem corporis ex ductu E R in se, ad corpus ex ductu G T in se, & rationem corporis ex ductu G P in se, ad corpus quod fit ex E O in se ducto, eandem esse cum proportione quæ est inter rationem corporis ex ductu plani K Q in se, ad corpus ex ductu L S in se, & rationem corporis orti ex ductu plani L N in se ad corpus ortum ex plano K M in se ducto.

Demonstratio.



a *Prop. 81. huius.* OStensum est [a] quod ratio quæ est inter corpora orta ex ductu E R in se, & G T in se, eadem sit cum ratione quæ est inter corpora orta ex ductu G P in se & plani E O in seipsum. Item quod ratio quæ est inter corpora nata ex ductu K Q in se, & L S in se, eadem sit cum ratione quæ est inter corpora orta ex ductu plani L N in se, & K M plani in se ducti. igitur cùm vtrobique sit ratio æqualitatis, manifestum est [b] quod in propositione fuerat assertum.

b *Per 58. de propor.*

PROPOSITIO LXXXIII.

IIsdem positis:

Dico proportionem quæ est inter rationem corporis orti ex ductu E R in se, ad corpus ortum ex ductu K Q in se, & rationem corporis orti ex ductu plani G T in se ad L S in se ductum, eandem esse cum proportione quę est inter rationem corporis orti ex ductu G P in se, ad corpus ortum ex ductu plani L N in se, & rationem corporis orti ex ductu plani E O in se, ad corpus quod fit ex ductu plani K M in seipsum.

Demonstratio.

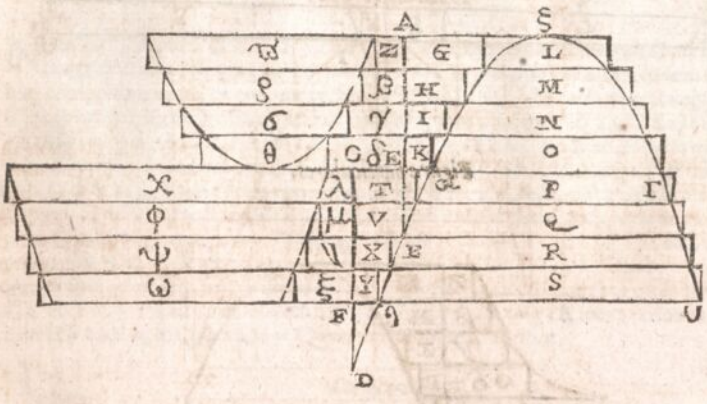
c *Prop. 82. huius.* DOcuimus [c] proportionem quæ est inter rationem corporis orti ex ductu E R in se, ad corpus ex ductu G T in se, & rationem corporis ex ductu G P in se, ad corpus quod fit ex E O in se ducto, eandem esse cum proportione quæ est inter rationem corporis ex ductu plani K Q in se, ad corpus ex ductu L S in se, & rationem corporis

poris orti ex ductu plani L N in se ad corpus ortum ex plano K M in se ducto. ergo permutando [a] proportio quæ est inter rationem corporis ex ductu E R in se ad G T in se, & rationem corporis orti ex ductu K Q in se ad L S in se, eadem est cum proportione quæ est inter rationem corporis orti ex ductu G P in se ad E O in se, & rationem corporis L N in se ad K M in se, quare [b] etiam proportio quę est inter rationem corporis orti ex ductu E R in se, ad corpus ortum ex ductu Q K in se, & rationẽ corporis orti ex ductu plani G T in se, & L S in seipsum, eadem est cum proportione quæ est inter rationem corporis orti ex ductu G P in se, ad corpus ortum ex ductu plani L N in se, & rationem corporis orti ex ductu plani E O in se, ad corpus quod fit ex ductu plani K M in seipsum. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 44. de propor.

[b] Per 59. de propor.

Figura vniuersalis pro sequentibus propositionibus.



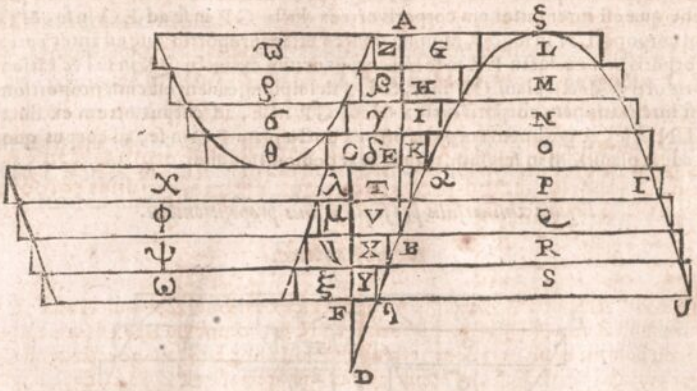
SInt A B, C D axi parabolæ æquidistantes, inter se æquales, à quibus demptæ æquales A E, C F, diuisæ sint quadrifariam; & per diuisionum puncta posítæ sint ordinatim ad axem; perficiantur denique rectangula G, H, I, K, & L, M, N, O. Deinde rectangula T, V, X, Y, & P, Q, R, S. His ita peractis, ponantur hæ figuræ subalternè, scilicet figurę A E Γ ζ, fiat similis & æqualis A E θ ϖ, & subalternè constituta. Idemque fiat de figurâ C F ω κ, quæ subalternè posita sit cum figura C F υ Γ, formenturque productis parallelis rectangula Z, β, γ, δ; ϖ, ϱ, σ, θ, & λ, μ, ν, ξ; κ, φ, ψ, ω.

Figuræ particulares.

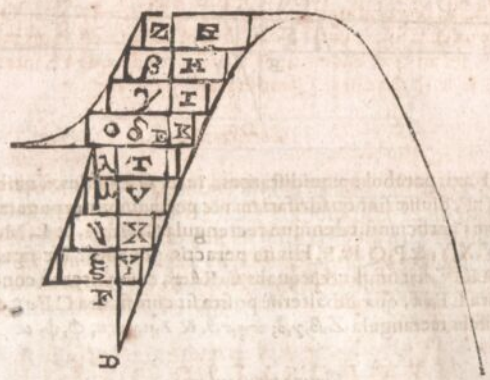
VT clariùs in sequentibus procedamus, transferantur rectangula quæ in schemate vniuersali sunt inter parabolam D B α ζ, & parabolas subalternè positas in schema particulare primum, & corpora orta ex ductu rectanguli G in se, H in se, I in se, K in se, item corpora nata ex ductu rectangulorum T, V, X, Y, in seipsa, vocentur corpora G, H, I, K: item T, V, X, Y. Item corpora quæ nascentur ex ductu rectanguli G in Z rectangulum, rectanguli H in β, rectanguli I in γ, & K in δ; item ea quæ exsurgunt ex ductu rectanguli T in λ, rectanguli V in μ, rectanguli X in ν, & rectanguli Y in ξ, vocentur sine addito corpora G Z, H β, I γ, K δ & sic de cæteris. *Vide particulares figuras paginâ sequenti.*

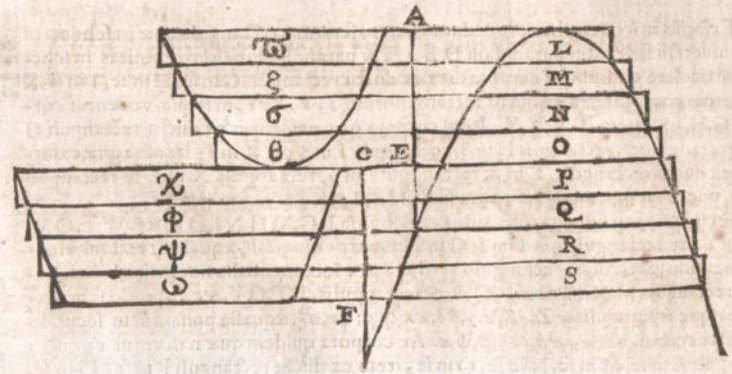
In secũdum verò schema referantur rectangula L G, M H, N I, O K, item P T, Q V, R X, S Y: ac rectangulo quidem L G in schemate vniuersali, æquale sit rectangulum L in secundo particulari; rectangulo verò M H, N I, &c. æqualia sint in secundo schemate rectangula M, N, O, item P, Q, R, S rectangulis, P T, Q V, &c. in primo schemate. Denique rectangulis ϖ Z, ϱ β, σ γ, θ δ, κ λ, φ μ, ψ ν, ω ξ, æqualia ponantur in secundo schemate rectangula ϖ, ϱ, σ, θ, & κ, φ, ψ, ω. Ac corpora quidem quæ nascentur ex ductu rectanguli L in se, M in se, N in se, O in se, item ex ductu rectanguli P in se, Q in se,

Figura vniuerſalis pro ſequentibus propoſitionibus.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1219] - 1162
PUBLIC DOMAIN

R in se, S in se, vocentur corpora L,M,N,O, &c. Item ea quæ nascentur in eodem schemate ex ductu rectanguli L in ϖ; item ex M in ϱ, & N in σ; ex O in θ; item ea quę exsurgent ex ductu P in $\varkappa$, Q in φ, &c. vocentur sine addito corpora L ϖ, M ϱ, N σ, O θ; P $\varkappa$, Q φ, R ψ, S ω.

PROPOSITIO LXXXIV.

ILlis positis:

Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & P $\varkappa$ ad L ϖ; eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ.

Demonstratio.

NAm ratio corporis G Z ad T λ, composita est ex ratione rectanguli G ad T, & rectanguli Z ad λ; item ratio corporis P $\varkappa$ ad L ϖ, composita est ex ijsdem rationibus: componitur enim ex ratione rectanguli P ad L, hoc est [a] ratione rectanguli G ad T; & ex ratione rectanguli $\varkappa$ ad ϖ, hoc est ratione [b] rectanguli Z ad λ. Eadem igitur est ratio corporis G Z ad T λ, & ratio corporis P $\varkappa$ ad L ϖ. Eodem discursu patet rationem quæ est inter corpora H β, & V μ, eandem esse cum ratione quæ est inter corpora Q φ & M ϱ. Nam rursus ratio corporis H β ad V μ, composita est ex ratione rectanguli H ad V, & rectanguli β ad μ: ex ijsdem autem etiam componitur ratio corporis Q φ, ad M ϱ: componitur enim ex ratione rectanguli Q ad M, hoc est [c] ratione rectanguli H ad V; & ex ratione rectanguli φ ad ϱ, hoc est β ad μ. Quare cùm rationes vtrobique eædem sint, patet quod proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & P $\varkappa$ ad L ϖ; eadem sit cum proportione quę est inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ. Quod erat demonstrandum.

[a] *per 80. huius.*
[b] *per eand.*
[c] *per eand.*

Corollarium.

QVod de proportionibus harum rationum dictum est, id etiam de quibusuis proportionibus corporum hîc diuisorum intelligi volumus, modò corpora sumantur prout hîc sumpta sunt: nimirum asserimus quod proportio quę est inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum I γ ad X ν, & R ψ ad N σ, item eadem cum proportione quæ est inter rationes corporum K δ ad Y ξ, & S ω ad O θ, cùm in his sit eadem demonstratio. Idemq; in sequenti obseruandum.

PROPOSITIO LXXXV.

IIsdem positis:

Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, eadem sit cum proportione quę est inter rationes corporum P $\varkappa$ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ.

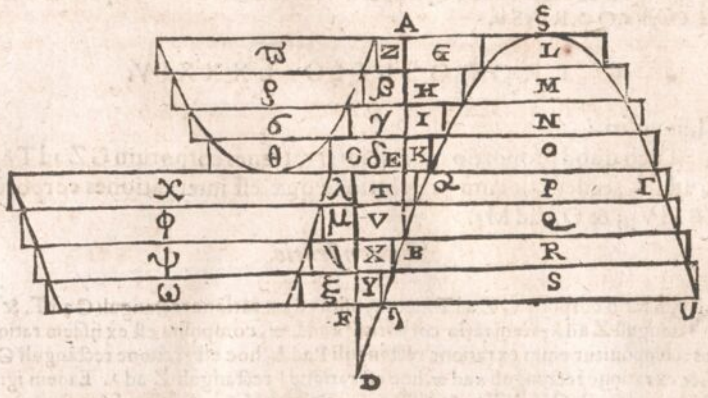
Demonstratio.

DEmonstratum enim est præcedenti propositione quod ratio corporum G Z & T λ, sit ad rationem corporum P $\varkappa$ & L ϖ, vt ratio corporum H β & V μ, est ad rationem corporum Q φ & M ϱ. igitur [d] permutando ratio corporum G Z & T λ, ad rationem corporum H β & V μ, est vt ratio corporum P $\varkappa$ & L ϖ ad rationem corporum Q φ ad M ϱ, hoc est proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ; eadem erit cum proportione quę inuenitur inter rationes corporum P $\varkappa$ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ. Quod erat demonstrandum.

[d] *per 44. proport.*

Corol-

Figura vniuersalis.


A
ϛ
ϖ
ϙ
ϡ
ϟ
ϻ
ϼ
ϽϾ
ϿϾ
ϿϾ
Ͽ

Corollarium.

HInc collige[a] quod proportio quę est inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum P ϰ ad Q φ & L ϖ ad M ϱ. [a] Per 10. de proport.

PROPOSITIO LXXXVI.

ILsdem positis:
Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ϰ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ.

Demonstratio.

OStensum est[b] quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eadem sit cum proportione, quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M. Similiter demonstratum est[c] quod proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum P ϰ & L ϖ, ad Q φ ad M ϱ. Igitur cùm proportiones quæ comparantur inter se æquales sint, constat quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β, ad V μ, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ϰ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ. Quod erat demonstrandum. [b] Per demonstrata 85 huius. [c] per 85. huius.

Corollarium primum.

SIcrectè etiam inferes, quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad H, T ad V, ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad Q & L ad M, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, est ad proportionem quæ est inter rationes corporũ P ϰ ad Q φ & L ϖ ad M ϱ. nam[d] rursus proportio quæ est inter rationes corporum G ad H, & T ad V eadem est cum proportione quę est inter rationes corporum P ad Q & L ad M. Ex altera verò parte cùm ostensum sit,[e] quod proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum P ϰ ad Q φ, & L ϖ ad M ϱ, constat igitur sicut priùs veritas propositionis, quam etiam ad duas sequentes extendi volumus. [d] Per 85. huius. [e] Per cor. 85. huius.

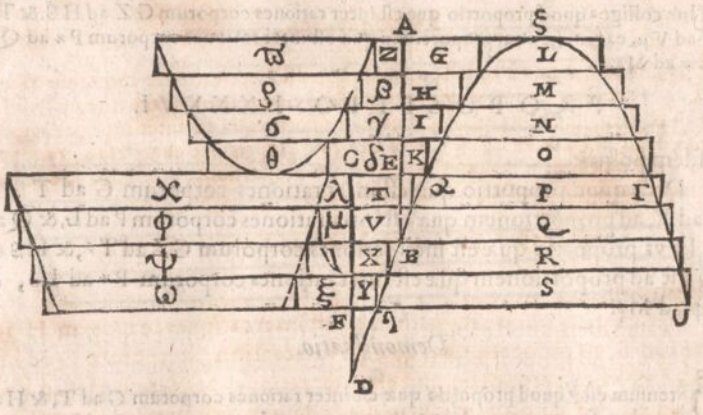
Corollarium secundum.

EOdem modo ostenderur quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, ad proportionem quæ est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, sit vt proportio quæ est inter rationes, corporum G Z ad T λ, & P ϰ, ad L ϖ ad proportionem quæ est inter rationes H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ. scilicet per propositionem iam positam, rationesque permutando per 44. de proport.

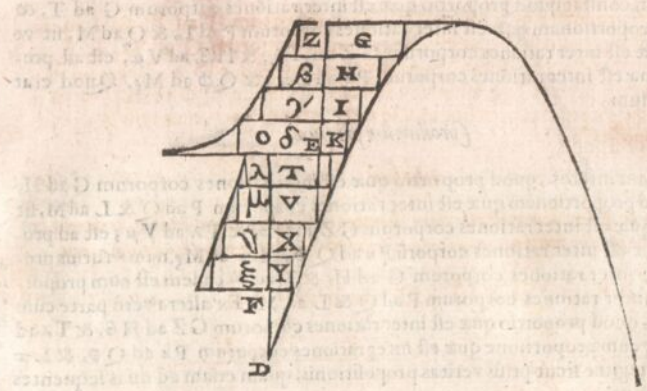
PROPOSITIO LXXXVII.

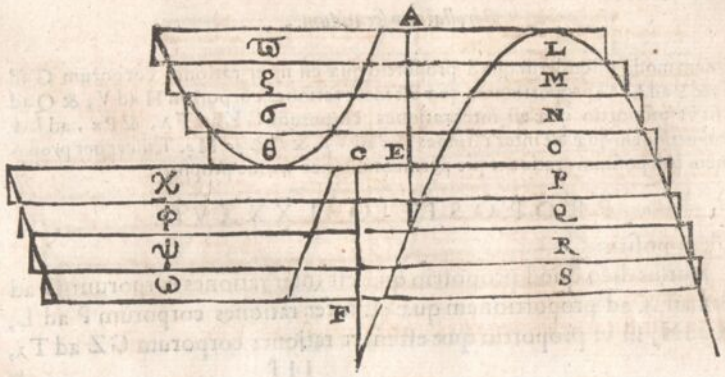
ILsdem positis:
Rursus dico quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & I ad X ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & R ad N, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ,

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1223] - 1166
PUBLIC DOMAIN

& Iγ ad X$_{\nu}$, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum P$\varkappa$ ad Lϖ, & Rψ ad Nσ.

Demonſtratio.

DEmonſtratum enim eſt [a] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & I ad X, ſit eadem cũ proportione quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & R ad N. Item demonſtratum [b] eſt quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad Tλ, & Iγ ad Xν, ſit eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum P$\varkappa$ ad Lϖ, & Rψ ad Nσ. Igitur cùm proportiones quæ inter ſe comparantur eædem ſint, [c] conſtat veritas propoſitionis.

[a] 83. huius.
[b] 85. huius.
[c] 43. Prop.

PROPOSITIO LXXXVIII.

IIſdem poſitis:
Iterum dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Qϕ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ.

Demonſtratio.

RVrſus enim [d] proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Item [e] proportio quæ eſt inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Qϕ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ. Itaque cùm iterum proportiones quę inter ſe comparantur eædem ſint, [f] conſtat veritas propoſitionis.

[d] Per demonſtrata 83. huius.
[e] 85. huius.
[f] 43. Propoſit.

Scholion.

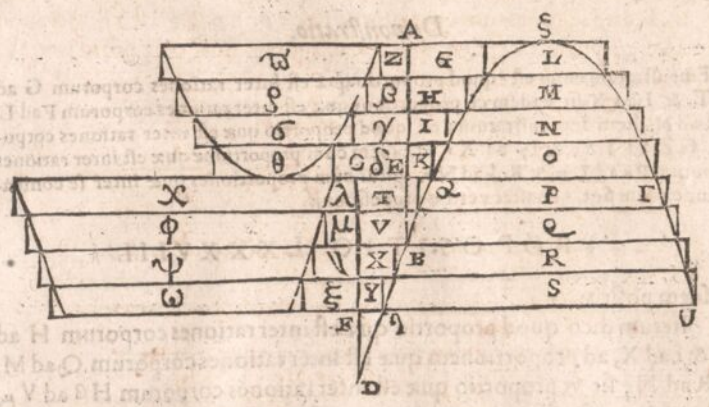
NE longior ſim in ijſdem demonſtrationibus ſemper repetendis, idem intelligi volumus de quibuſuis aliis ſubdiuiſionibus; modò corpora eò modo ſumantur prout hìc ſumpta ſunt.

PROPOSITIO LXXXIX.

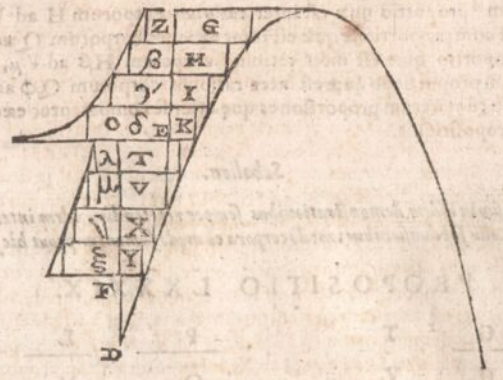
G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	P$\varkappa$	Lϖ
Hβ	Vμ	Qϕ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

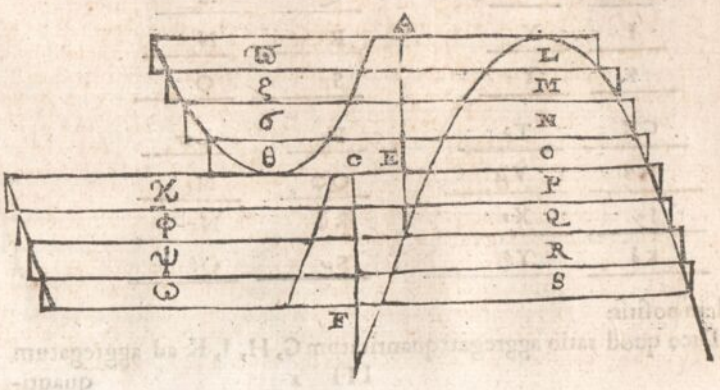
IIſdem poſitis:
Dico quod ratio aggregati quantitatum G, H, I, K ad aggregatum

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1225] - 1168
PUBLIC DOMAIN

quantitatum T,V,X,Y sit ad rationem aggregati quantitatum P,Q,R,S, ad aggregatum quantitatũ L,M,N,O, vt ratio aggregati corporum GZ, Hβ, Iγ, Kδ ad aggregatum corporum Tλ, Vμ, Xν, Yξ est ad rationem aggregati corporum Pκ, Qφ, Rψ, Sω ad aggregatum corporum Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ.

G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pκ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Demonstratio.

DVplici rursus viâ propositionem hanc demonstrabimus, vti & in quadraturâ secundâ factum. Primum viâ Archimedeâ, per prop. 2. de Conoid. Deinde per propositionem nostram 54. Lemmaticam huius lib.

Primâ igitur viâ sic demonstro. Proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eadem [a] est cum proportione quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M. Item proportio quæ est inter rationes corporum H ad V, & I ad X, eadem [b] est cum proportione quę est inter rationes corporũ Q ad M & R ad N. Igitur proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio quæ est inter rationes corporum H ad V, & I ad X, est ad proportionem quę est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, cùm vtrobique sit proportio æqualitatis ad proportionẽ æqualitatis. Igitur [c] permutando proportio quę est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, est ad proportionem quę est inter rationes corporum H ad V, & I ad X, vt proportio quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, est ad proportionẽ quæ est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Similimodo proportio quę est inter rationes corporum H ad V, & I ad X, ostendetur esse ad proportionem quæ est inter rationes corporum I ad X, & K ad Y, vt proportio quę est inter rationes corporum Q ad M & R ad N, est ad proportionem quę est inter rationes corporũ R ad N, & S ad O. Atque hoc modo primã Archimedeę constructionis partem absoluimus.

[a] Per 82. huius.

[b] Per eand.

[c] 44. Ds proport.

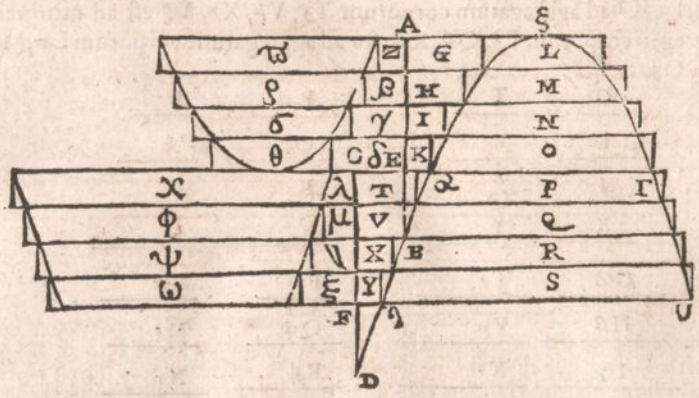
Præterea ostensum est [d] quod proportio, quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, sit ad proportionem, quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio, quæ est inter rationes corporum GZ ad Tλ, & Hβ, ad Vμ, est ad proportionem, quæ est inter rationes corporum Pκ ad Lϖ & Qφ ad Mϱ. Igitur [e] permutando proportio, quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, est ad proportionem, quæ est inter rationes corporum GZ ad Tλ & Hβ ad Vμ, vt proportio quę est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Pκ ad Lϖ, & Qφ ad Mϱ.

[d] Per 86. huius.

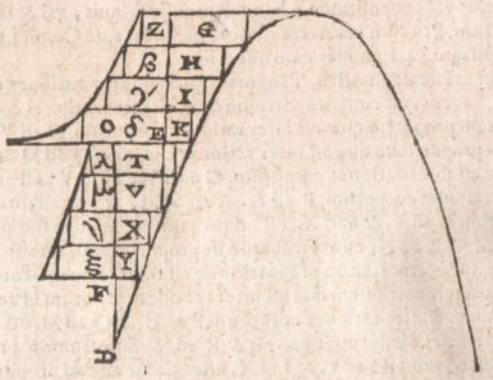
[e] Per 44. proportion.

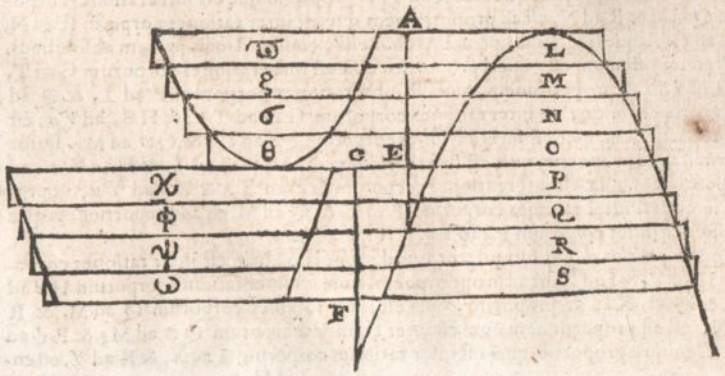
Eodem prorsus modo ostendetur quod proportio, quæ est inter rationes corporum H ad V, & I ad X, sit ad proportionem, quæ est inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, vt proportio, quæ est inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Qφ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ. Denique proportio, quæ est inter rationes corporum I ad X, & K ad Y, ostendetur

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pϰ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

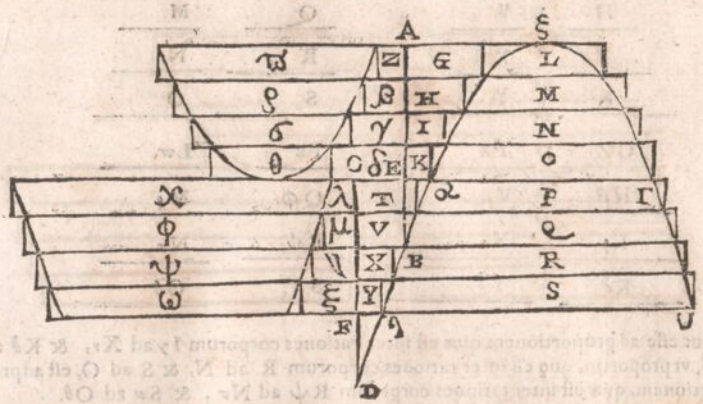
detur esse ad proportionem quæ est inter rationes corporum Iγ ad Xν, & Kδ ad Yξ, vt proportio, quę est inter rationes corporum R ad N, & S ad O, est ad proportionem, quæ est inter rationes corporum Rψ ad Nσ, & Sω ad Oθ.

Itaque quemadmodum Archimedes infert de quantitatibus eo modo dispositis, quo nos proportiones rationum dispositas ostendimus, ita & nos de proportionibus inferimus, nempe quod proportiones omnes simul sumptæ, quæ sunt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, item rationes corporum H ad V, & I ad X, item I ad X, & K ad Y, sint ad proportiones omnes simul sumptas quæ sunt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, item inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, item R ad N, & S ad O, vt proportiones omnes simul sumptæ quæ sunt inter rationes corporum GZ ad Tλ, & Hβ ad Vμ, item Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, item Iγ ad Xν, & Kδ ad Yξ, sunt ad proportiones omnes simul sumptas, quæ sunt inter rationes corporum Pϰ ad Lϖ, & Qφ ad Mϱ, item Qφ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ, item Rψ ad Nσ, & Sω ad Oθ. Et cùm mediæ proportiones singulorum aggregatorum sint etiam inter se proportionales, si eæ omissæ intelligantur, manebit aggregatum duarum proportionum vt ad secundum aggregatum duarum proportionum, tertium aggregatum duarum proportionum est ad aggregatum quartum duarum itidem proportionum. Sed proportiones singulas binę rationes constituunt, nempe proportionem inter rationes G ad T, & H ad V, constituunt rationes corporum G ad T, & H ad V, & ita de reliquis: itaque quod de proportionibus intulimus, illud ipsum de rationibus inferre licebit, scilicet rationes omnes G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, esse ad rationes omnes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, vt rationes corporũ GZ ad Tλ, Hβ ad Vμ, Iγ ad Xν, Kδ ad Yξ, sunt ad omnes rationes corporũ Pϰ ad Lϖ, Qφ ad Mϱ, Rψ ad Nσ, Sω ad Oθ. Sed omnes rationes corporũ G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, ita sunt constitutæ vt corpora G, H, I, K sint termini antecedentes, corpora vero T, V, X, Y sint termini consequentes, item rationes P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ita sunt constitutæ vt corpora P, Q, R, S sint antecedentes termini, corpora verò L, M, N, O termini consequentes. Idem autem in alijs rationibus obseruatum est vt semper corpora GZ, Hβ, Iγ, Kδ antecedentium vices, corpora autem Tλ, Vμ, Xν, Yξ consequentium locum obtineant, vti & in vltimo aggregato rationum obseruatum est, vt corpora Pϰ, Qφ, Rψ, Sω antecedentes sint termini, corpora autem Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ sint termini consequentes. Itaque ratio aggregati corporum G, H, I, K, ad aggregatum corporum T, V, X, Y, est ad rationem aggregati corporum P, Q, R, S ad aggregata corpora L, M, N, O, vt ratio aggregatorum corporum GZ, Hβ, Iγ, Kδ, ad aggregata corpora Tλ, Vμ, Xν, Yξ est ad rationem aggregatorum corporum Pϰ, Qφ, Rψ, Sω, ad aggregata corpora Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ. Quod erat demonstrandum.

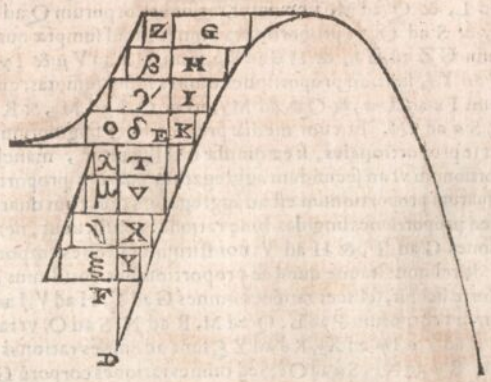
Faciliori

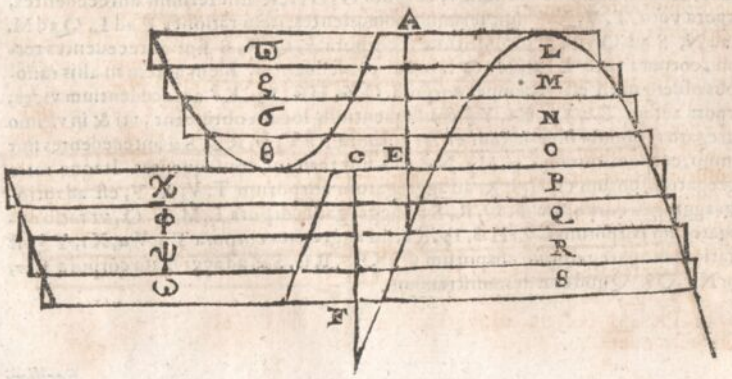
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1228] - 1171
PUBLIC DOMAIN

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1229] - 1172
PUBLIC DOMAIN

G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pϰ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Facilìori discursu idem demonstratur.

RAtio corporis G ad T, eadem[a] est cum ratione corporis P ad L. item ratio corporis H ad V, eadem est cum ratione corporis Q ad M : igitur[b] permutando ratio corporum G ad T, est ad rationem corporum H ad V, vt est ratio corporum P ad L, ad rationem corporum Q ad M. eodem modo ostendetur quod ratio corporum H ad V, sit ad rationem corporum I ad X, vti ratio corporum Q ad M, est ad rationem corporum R ad N. denique ratio corporum I ad X, esse ostenditur ad rationem corporum K ad Y, vti ratio corporum R ad N, est ad rationem corporum S ad O. Atque sic primam constructionis Archimedeæ partem absoluimus.

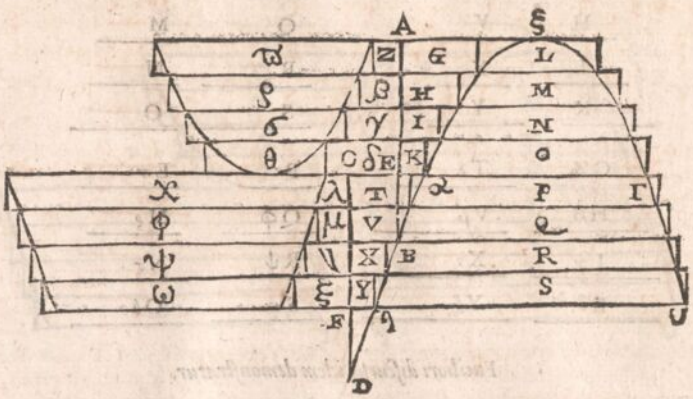
a Per 81. huius.
b Per 44. propos.

Iam verò cùm ostensum sit[c] quod ratio corporis G Z ad T λ eadem sit cum ratione corporum P ϰ ad L ϖ, erat autem ratio corporum G ad T, eadem cum ratione corporum P ad L, ergo[d] permutando iterum erit ratio corporum G ad T, ad rationem corporum G Z ad T λ, vt ratio corporum P ad L, est ad rationem corporum P ϰ ad L ϖ. Eodem modo demonstrabitur quod ratio corporum H ad V, sit ad rationem corporum H β ad V μ, vt ratio corporum Q ad M, est ad rationem corporum Q φ ad M ϱ; item quod ratio corporum I ad X, sit ad rationem corporum I γ ad X ν, vt ratio corporum R ad N, est ad rationem corporum R ψ ad N σ. Denique inferetur eodem discursu quod ratio corporum K ad Y, sit ad rationem corporum K δ ad Y ξ, vt ratio corporum S ad O, est ad rationem corporum S ω ad O θ.

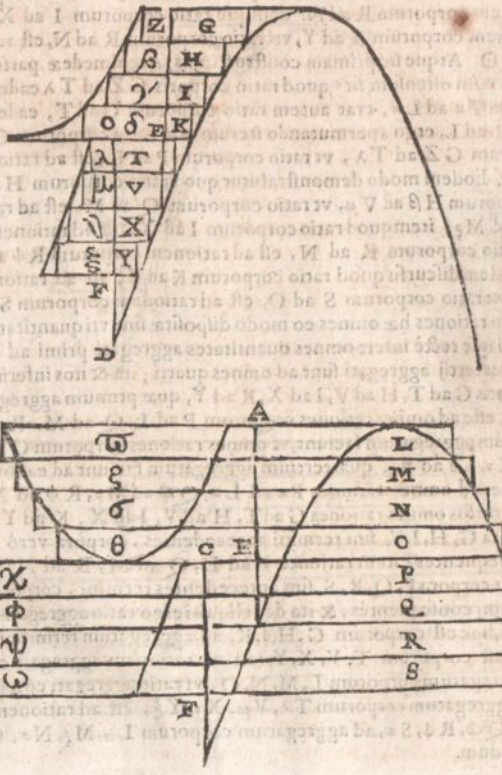
c Per demonstrata prop. 84. huius.
d Per 44. propos.

Igitur cùm rationes hæ omnes eo modo dispositæ sint vti quantitates apud Archimedem, vti ipse rectè infert omnes quantitates aggregati primi ad omnes secundi esse, vt omnes tertij aggregati sunt ad omnes quarti; ita & nos inferimus omnes rationes corporis G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, quæ primum aggregatum rationum constituunt, esse ad omnes rationes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, quæ secundùm aggregatum faciunt, vt omnes rationes corporum G Z ad T λ, H β ad V μ, I γ ad X ν, K δ ad Y ξ, quæ tertium aggregatum faciunt ad eas omnes quæ quartum, nempe ad omnes rationes P ϰ ad L ϖ, Q φ ad M ϱ, R ψ ad N σ, S ω ad O θ. Itaque cùm rursus omnes rationes G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, ita constitutæ sint vt corpora G, H, I, K sint termini antecedentes, corpora verò T, V, X, Y sint termini consequentes; item rationes P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ita sint constitutæ vt corpora P, Q, R, S sint antecedentes termini, corpora verò L, M, N, O sint termini consequentes, & ita de reliquis; ergo ratio aggregati antecedentium terminorum, hoc est corporum G, H, I, K, ad aggregatum terminorum consequentium, hoc est corporum T, V, X, Y, est ad rationem aggregati corporum P, Q, R, L, ad aggregatum corporum L, M, N, O, vt ratio aggregati corporum G Z, H β, I γ, K δ ad aggregatum corporum T λ, V μ, X ν, Y ξ, est ad rationem aggregati corporum P ϰ, Q φ, R ψ, S ω, ad aggregatum corporum L ϖ, M ϱ, N σ, O θ. Quod erat demonstrandum.

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1231] - 1174
PUBLIC DOMAIN

G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pϰ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Aliter demonstratur via secunda.

ADdemus & alteram ex Lemmatica propositione 54. huius quâ similiter inferemus eandem conclusionem quam priore discursu intulimus.

Proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, sunt enim[a] eædem rationes. Præterea proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum I ad X, & R ad N; vlterius proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum K ad Y, & S ad O: atque huc vsque proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, comparata est cum omnibus alijs cum quibus conferri potest, ita vt semper antecedentis rationem obtineat. Vt igitur discursum prosequamur, assumemus proximè sequentes terminos, qui vicem antecedentis obtineant. Proportio itaque quæ est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum I ad X, & R ad N, item eadem cum proportione quæ est inter rationes K ad Y, & S ad O, denique eadem cum proportione quæ est inter rationes G ad T, & P ad L, per ea quę antè diximus, atque ita contulimus proportionem quę est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, cum reliquis proportionibus, dando illi semper locum antecedentis. Restat igitur vt idipsum præstemus de alijs quæ remanent.

[a] *Per 82. huius.*

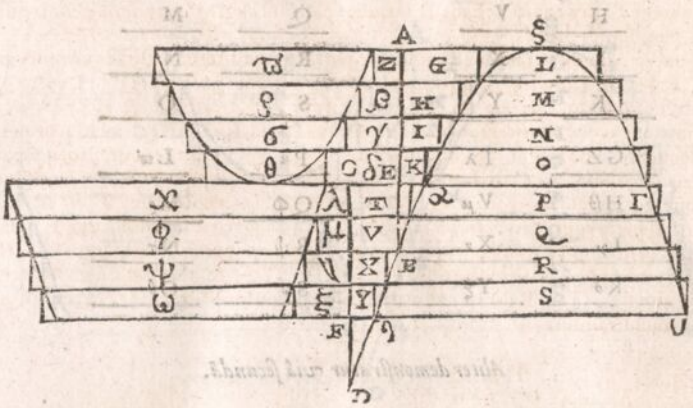
Iterum igitur proportio, quæ est inter rationes corporum I ad X, & R ad N, eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum K ad Y, & S ad O: item eadem cum proportione, quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L, denique eadem cum proportione quæ est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M.

Tandem vt hanc partem concludamus, iterum proportio quæ est inter rationes corporum K ad Y, & S ad O, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum G ad T, & P ad L: similiter eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum H ad V, & Q ad M: tandem eadem cum proportione quæ est inter rationes corporum I ad X, & R ad N.

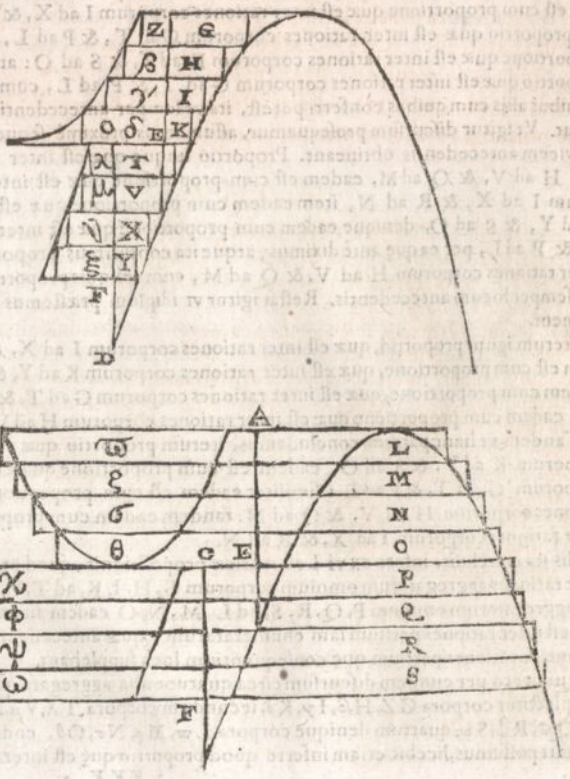
His ita conclusis, infero ex vi Lemmaticæ propositionis, quod proportio quæ est inter rationes aggregatorum omnium corporum G, H, I, K, ad T, V, X, Y, & rationes aggregatorum omnium P, Q, R, S, ad L, M, N, O eadem sit cum proportione quæ est inter rationes partium iam enumeratarum, quæ antecedentium vices obtinebant, & rationes partium quę consequentium loca supplebant.

Quia verò per eundem discursum circa quatuor alia aggregata quorum primum complectitur corpora G Z, Hβ, Iγ, Kδ, secundum corpora Tλ, Vμ, Xν, Yξ, tertium Pϰ, Qφ, Rψ, Sω; quartum denique corpora Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ, eodem modo argumentari possumus, licebit etiam inferre quod proportio quę est inter rationes aggre-

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.



gati primi ad secundum aggregatum, ad rationes aggregati tertij ad aggregatum quartum, sit eadem cum proportione, quæ est inter rationes partium aggregatorum quæ antecedentes constituebant, & rationes partium aggregatorum quę consequentium vices supplebant.

Quia verò demonstratum est [a] quod proportio quæ est inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ est inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, sit vt proportio, quæ est inter rationes corporum G Z ad T λ, & Hβ ad V μ, ad proportionem quę est inter rationes corporum, P κ ad L ϖ, & Qφ ad Mϱ, atque ita consequenter [b] de reliquis, & hoc quidem in omni subdiuisione diametrorum parabolæ; infero per Corr. Prop. Lemmaticæ suprà citatæ, quod proportio quæ est inter rationem aggregati corporum G, H, I, K, ad aggregatum corporum T, V, X, Y, & inter rationem aggregati corporum P, Q, R, S, ad aggregatum corporum L, M, N, O, eadem sit cum proportione quæ est inter rationem aggregati corporum G Z, Hβ, Iγ, Kδ, ad aggregatum corporum T λ, V μ, Xν, Yξ, & inter rationem aggregati corporum P κ, Qφ, Rψ, Sω, ad aggregatum corporum L ϖ, Mϱ, Nσ, Oϑ. Quod fuit demonstrandum.

[a] 86. huius.

[b] Per 87. & 88. huius.

PROPOSITIO XC.

EAdem manente figurâ vniuersali propositionis 84. huius cum particularibus,

Dico quod ratio corporis orti ex figurâ parabolicâ A Eαζ in se ductâ, ad corpus ortũ ex figura parabolica C Fηα in se ducta sit ad rationem corporis orti ex figurâ parabolicâ C Fυτ in se ductâ, ad corpus quod exsurgit ex figurâ parabolicâ A Erζ in se ductâ, vt ratio corporis ex ductu figuræ A Eαζ in se subalternè, ad corpus ortum ex ductu figuræ C Fηα in se subalternè, est ad rationem corporis orti ex ductu figuræ CFυτ in se subalternè positæ, ad corpus ortum ex ductu figuræ A Erζ in se subalternè.

Demonstratio.

PRæcedenti demonstratione ostensum est quod ratio omnium parallelepipedorum G, H, I, K, ad parallelepipeda T, V, X, Y, sit ad rationem corporum P, Q, R, S, ad corpora L, M, N, O, vt ratio corporum GZ, Hβ, Iγ, Kδ ad corpora T λ, V μ, Xν, Yξ, est ad rationem corporum P κ, Qφ, Rψ, Sω, ad corpora L ϖ, Mϱ, Nσ, Oϑ. Et hoc quidem in quauis inscriptione figurarum per subdiuisionem linearum A E, CF intelligendum est ex vi discursus in demonstratione positi. Cùm ergo continuatis subdiuisionibus, auferatur semper plus dimidio residui corporum illorum, quibus parallelepipeda inscribuntur, vt demonstratum est [d] in libro de ductibus: ac propterea omnia simul sumpta exhauriant corpora quibus inscribuntur, manifestum est rationem plani parabolici A Eαζ in se ducti, ad planum parabolicum CFηα in se ductum, esse ad rationem plani parabolici CFυτ in se ducti, ad corpus ex plano parabolico A Erζ in se ducto, vt ratio corporis orti ex ductu plani A Eαζ in se subalternè, ad corpus ex ductu plani C Fηα in se subalternè ducti, est ad rationem plani CFυτ in se ducti subalternè ad planum A Erζ in se subalternè ductum, cùm hæc ipsa corpora sint quibus parallelepipeda fuerant inscripta.

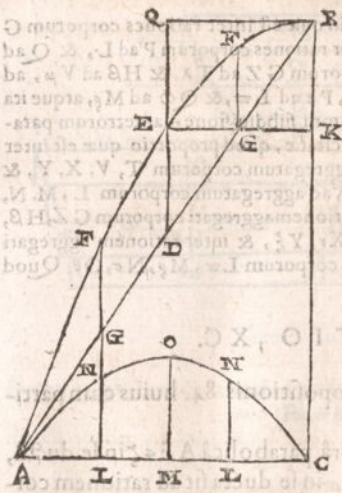
[d] 41. De duct.

PROPOSITIO XCI.

PArabolæ A E B axis sit B C, diametri verò E D, F G, quas secet linea B A ducta ex vertice B.

Dico segmentum B E A ductum in se secundùm lineas E D, F G esse vngulam parabolicam quæ ad corpus rectilineum ei æquale reducta sit.

Demonstratio.



a Per 330. de parab.

b Per 17. parab.

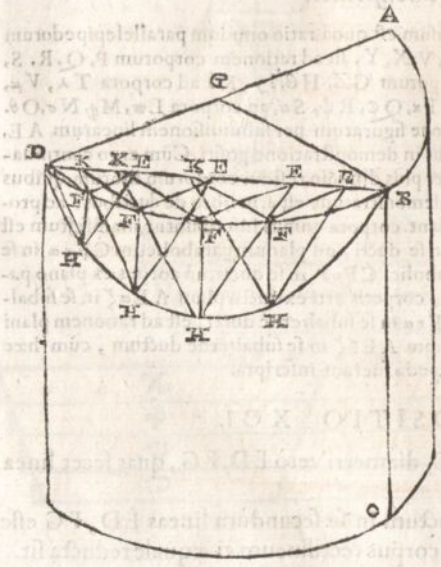
c Per 99. de cylind.

DVcta enim AC ordinatim ad axem, fiant lineis ED, FG æquales lineæ OM, NL sic vt sint ad angulos rectos ad AC, erit itaque ANOC a parabola, & quidem æqualis parabolę AEB, cùm omnia quadrata OM, NL æqualia sint quadratis ED, FG, &c. Igitur parabola AEB ducta in se per diametros ED, FG æqualis est parabolę AOC, ductę in se per diametros OM, NL. Intelligatur igitur diameter EDM bifariam diuidere lineas AB, AC: productaque DE ad tangentem BQ, erit b ED æqualis EQ; igitur si ex E ducatur ordinatim EK ad axem BC, erit BK æqualis QE, hoc est ED, hoc est OM: sed & linea EK æqualis est MC, vel MA, igitur EBK parabola eadem est cum parabola AOC; sed parabola EBK in se ducta, c reducta est ad corpus rectilineum ei æquale, igitur & corpus ortum ex superficie AEB ducta in diametros ED, FG reductum est ad corpus rectilineum ei æquale. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCII.

CYlindri parabolici ABCD, basi inscribatur maximum triangulum ABD, cuius diameter BG, ad quam ordinatim ponantur FE. Fiant verò rectis FE æquales FH in cylindri superficie & iungantur EH.

Dico puncta BHD esse in eodem plano cum rectâ BED.



Demonstratio.

QVoniam EF ordinatim positæ sunt ad BG, igitur inter se parallelę sunt: vlterius quoniam FH in superficie cylindri ductę sunt, igitur etiam inter se æquidistant. ergo cùm EF, FH æquales sint inter se, triangula EFH similia sunt. vnde vt EF ad EF, ita est EH ad EH. quare anguli FHE inter se æquales sunt: vnde lineę EH, sunt in vno eodemque plano cum recta BED. ac proinde & puncta B, H, H, D. Quod erat propositum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

IIsdem positis ducantur diametro BG parallelę FK & iungantur HK.
Dico similiter puncta B, H, D in eodem plano existere cum linea BKD.

Demonstratio.

QVoniam æquidistant lineę KF inter se, igitur anguli EKF inter se sunt æquales. Vnde similia sunt triangula EFK inter se, & consequenter est EF ad EF, vt FK ad FK, sed vt EF ad EF, ita ex constructione sunt FH ad FH. igitur vt FK ad FK, ita FH ad FH; similia igitur sunt triangula KFH: ac proinde anguli FHK sunt æquales. Igitur puncta B,H,D in plano eodem existunt cum rectâ BKD, hoc est BED. Quod oportuit demonstrare.

PROPOSITIO XCIV.

IIsdem positis:
Dico parabolæ segmentum BFD ductum in se per lineas EF producere vngulam parabolicam quæ reducta est ad rectilineum ei æquale.

Demonstratio.

LIneæ FK ductæ in seipsas producunt [a] vngulam parabolicam quæ reducta est ad corpus rectilineum: sed lineæ FH ad FH, sunt [b] vt FK ad FK: igitur FK, FK lineæ ductæ in FH producunt etiam vngulam parabolicam, & quidem quæ ad vngulam ortam ex ductu FK in seipsam, [c] rationem habeat quam FH ad FK, ac proinde reducta sit ad rectilineum. Sed EF, EF, lineæ ductæ in se producunt idem corpus quod FK lineæ ductæ in FH, cùm lineæ EH [d] ostensæ sint esse in eodem plano cum HK lineis; igitur & EF lineæ ductæ in FH, siue superficies EFD ducta in se secundùm lineas EF, producit vngulam parabolicam, quę reducta sit ad rectilineum ei æquale. Quod erat demonstrandum.

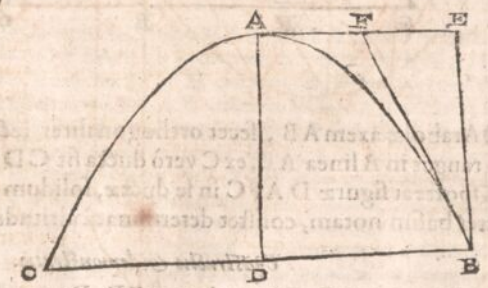
[a] *Per 91. huius.*
[b] *Per demonstratã 93. huius.*
[c] *Per demonstratã prop. 7. de cylindro circul.*
[d] *Per 92. & 93. huius.*

PROPOSITIO XCV.

SIt parabolæ ABC axis AD, & contingens in vertice AE, denique axi æquidistans EB.
Oporteat solido ex ductu plani AEBA in seipsum, æquale solidum exhibere quod basim habeat & altitudinem notam.

Constructio & demonstratio.

EX puncto B ponatur BD, ordinatim ad axem AD, & ex eodem B puncto ducatur BF cõtingens sectionem in B. Dico figuram AEBA, in se ductam æqualem molem producere solido habenti basim superficiei AFBA, æqualem altitudinem verò BC. huius constructionis demõstrationem inuenies libro de de ductu plani in planum propositione 169.



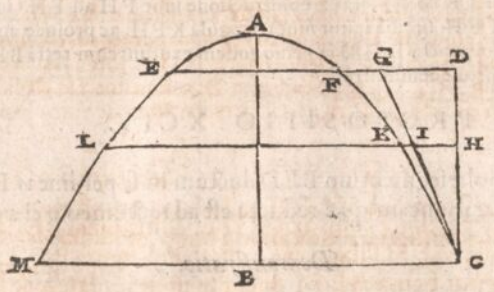
PRO-

PROPOSITIO XCVI.

PArabolæ axem AB ſecent orthogonaliter duæ rectæ CB, DE: & ſit DC axi parallela.

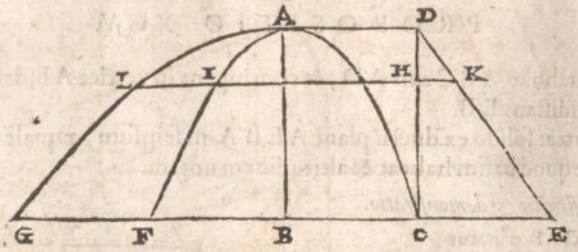
Oporteat denuo figuræ FKCD in ſe ductæ, æquale ſolidum exhibere quod præter baſim certam habeat notam altitudinem.

Conſtructio & demonſtratio.



POnatur iterum, ſecundùm praxim præcedentis propoſitionis, C G contingens ſectionem in C occurrens DE in puncto G. Dico corpus ortum ex ductu plani FDC in ſe, æquari ſolido quod habet baſim FGC, & altitudinem duplam rectæ CM. Demonſtratio eadem eſt cum præcedenti ex 169. duct.

PROPOSITIO XCVII.



PArabolæ axem AB, ſecet orthogonaliter recta CF, parabolamque tangat in A linea AD, ex C verò ducta ſit CD parallela axi.

Oporteat figuræ DAFC in ſe ductæ, ſolidum æquale proferre, quod præter baſim notam, conſtet determinatâ altitudine.

Conſtructio & demonſtratio.

FIat CE æqualis rectæ BC, & ducatur ED. Denique ſit BG dupla rectæ BF, & deſcribatur parabola ALG, habens axem AB & ordinatim ad illum poſitam rectam BG. Dico corpus genitum ex ductu ſuperficiei DCFA, in ſeipſam æquale eſſe

esse solidæ magnitudini quæ constat basi EDAGE, & altitudine DA. Est enim planum DCFA, in se ductum æquale corpori ex ABF in se ducto (quod æquatur solido super basi triangulari DEC, & altitudine DA, vt demonstratum [a] est libro de ductibus plani in planum) simul cum rectangulo DABC ducto in se quod æquatur solido habenti basim DABC, & altitudinem DA, vnà insuper cum solido quod generatur ex DABC ducto in ABF bis, hoc est solido habenti basim ABG, quę dupla est ipsius BAF, vt patet ex libro de parabola, [b] & altitudinem DA. Igitur cùm figura EDAGE æqualis sit basibus omnium figurarum quæ cum altitudine DA æquatur solido quod oritur ex ductu plani DCFA in seipsum, expediuimus solutionem problematis propositi quoad partem hanc.

[a] Per 161. de duct.

[b] Per Coroll. 240. paráb.

Quod si verò postuletur solui problema in casu HIFC, quo requiritur solidum exhiberi vt priùs quod æquetur figuræ HIFC in seipsam ductæ, ponatur AD quæ æquidistet HI, & producta CH in D, repetatur præcedens constructio & habebitur vt priùs solida magnitudo æqualis figuræ HIFC in seipsam ductæ. nam solidum habens basim EKLG, & altitudinem DA æquatur HIFC ducto in se secundùm tenorem propositionis vniuersalis [c] quam libro de ductu plani in planum demonstrauimus.

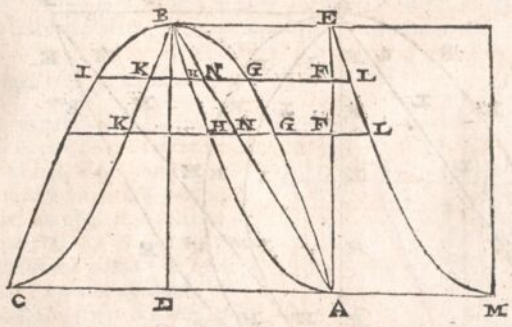
[c] Per 46. de duct.

PROPOSITIO XCVIII.

Sit AGBIC parabola cuius axis BD & contingens BE, axi parallela EA; & figura AEM subalternè posita cum figura BEAG.

Oporteat igitur figuræ AEM ductæ in figuram BEAG, æquale solidum exhibere, quod determinata constet basi & notâ altitudine.

Constructio & demonstratio.

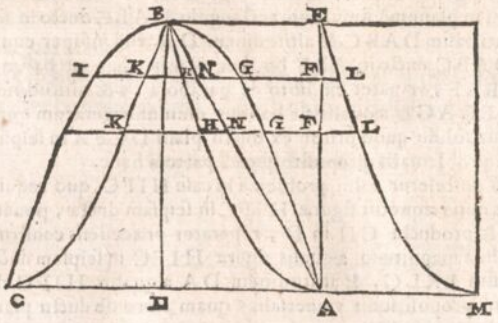


Ostensum est [d] quod corpus ortum ex ductu MAE in BEAG, siue ex ductu figuræ BEAG, in se subalternè dimidium sit corporis orti ex ductu BGAH in se. Sed corpus ortum ex ductu superficiei BGAH ductę in se, si diuidatur per lineam AB bifariam, æquale est superficiei BGAN ductæ in se, BNAH ductæ in se, hoc est superficiei BGAN bis in se ductæ vnà cum superficie BGAN bis ducta in planum BNAH. igitur cùm corpus ex ductu superficiei BEAG in se subalternè ductâ dimidium sit corporis ex ductu superficiei BGAH in se, etiam æquale est corpori quod oritur ex superficie BGAN in se, simul cum plano BGAN ducto in BNAH. igitur cùm corpus quod oritur ex ductu BGAN in se, [e] reductum sit ad corpus habens certam basim & notam altitudinem, restat vt corpus ortum ex ductu superficiei BGAN in BNAH reducamus ad corpus quod basim determinatam habeat & altitudinem. Sit igitur.

[d] Prop. 112. de duct.

[e] Per 92. huius.

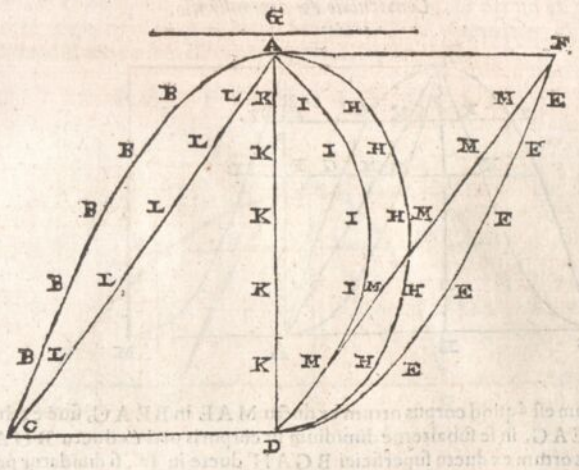
PROPOSITIO XCIX.



ASsumptâ eadem figurâ.

Oporteat figuræ parabolicę B G A N ductæ in figuram B N A H, solidum æquale exhibere, quod præter basim determinatam, habeat altitudinem notam.

Constructio & demonstratio.

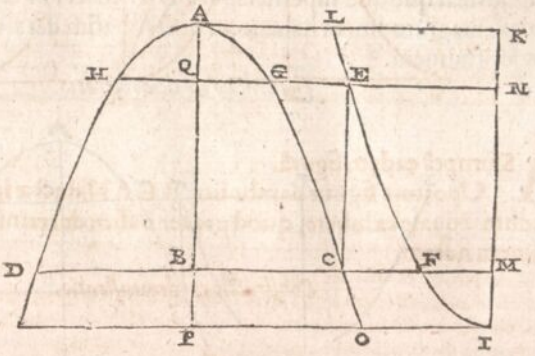


ASsumantur alię duæ semiparabolæ subalternè positæ A B C, D E F, quæ in se ductæ proferant solidam magnitudinem æqualem illi quam exhibet cylindrus ex basi sem ellíptica K H & altitudine G, quod posse fieri patet per conuersam 210. de parab. & per 45. de duct. item ex propositione 75. huius. quoniam igitur B K ductum in K E, æquatur moli corporeæ ex basi K H, & altitudine G; & quoniam triangulum K M ductum in parabolam K B, ad parallelepipedum est reductum, sicut enim propos. 27. de duct. ostensum est ex tali ductu segmenti circularis in triangulum hoc modo dispositum produci vngulam circularem, ita quoque manifestum est per hunc ductum produci vngulam parabolicam quam prop. 99. de cylindr. ad corpus rectilineum reduximus. Et quoniam K M ductum in K B, siue L K in K E, æquale est L K ducto

ducto in KM, & LK in ME; & rursus quoniam cubatum est corpus ex ductu LK in KM per 5. de duct. etiam corpus ex ductu LK in ME, reductum est ad corpus rectilineum. ponantur itaque illa duo corpora scilicet ex MK in KB, & ex ME in KL, æqualia solido habenti basim parabolicam KI & altitudinem G. MK in KB, vnà cum EM in KB, (hoc est vnà cum EM in KL, & EM in LB,) æquatur EK in KB, hoc est HK in altitudinem G. sed MK in KB, cum EM in KL æquatur IK in altitudinem G. Ergo reliquum EM in LB, æquatur reliquo IH in altitudinem G. Quod oportuit præstare.

PROPOSITIO C.

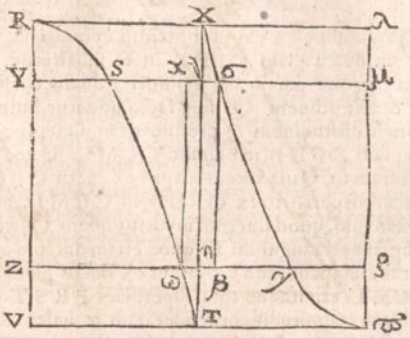
SIt parabolæ axis AB, ad quem ordinatim ponatur GH, CD: & CE, axi æquidistet; figuræ verò GEC ponatur subalternè ECF æqualis & similis.



Oporteat autem corpori ex ductu EGC in figuram parabolicam ECF producto proferre solidam magnitudinem æqualem quæ determinatam quidem habeat basim, & notam aliquam altitudinem.

Constructio & demonstratio.

PErficiatur parabola EF, eiusque vertex sit punctum I; recta verò IK illius axis, & IP contingens in I: quemadmodum AK parabolam AGC contingit in A. erit itaque parabola AOP parabolæ LIK subalternè posita; & quoniam FEC æqualis ac similis est figuræ GEC, patet BA esse æqualem NI & AQ æqualem IM hoc est BP. Fiat itaque parabolæ AOP æqualis RST, cuius axi RV constituatur parallela XT; & RY, ZV inter se quidem æquales sint, sed & æquales QA vel BP. positis deinde Yμ, Zϱ ordinatim ad axem, collocetur parabola Xγϖ subalternè cum RST, & ducantur ωκ, σβ quæ æquidistent XT. erunt igitur κω, σβ æquales ZY, hoc est in alio scemate rectę CE. est autem prop. 98. & 99. huius ostensum, cui solidæ magnitudini habenti basim determinatam & notam altitudinem, æquale sit corpus quod oritur ex ductu plani ϝSωη in σνηγ. ergo etiam scitur cui solido determinatæ basis & altitudinis æquale sit κSω in σνηγ, vnà cum νκωη in σνηγ, cùm hæc simul sumpta æquentur ϝSωη in σνηγ. sed κSω in σνηγ æquatur κSω in σγβ, & κSω in σνηβ. Ergo summa corporum quę fit ex κSω in σγβ, & ex κSω in σνηβ, & ex νκωη in σνηγ, reducta est ad solidum determinatæ basis & altitudinis, sunt autem ex summa horum trium cor-



porum, duo reducta nimirum $\varkappa S\omega$ in $\sigma\upsilon\eta\beta$, cùm quadrata [a] sit figura $\varkappa S\omega$ & $\upsilon\varkappa\omega\eta$ in $\sigma\upsilon\eta\gamma$, cùm quadrata similiter sit figura $\sigma\upsilon\eta\gamma$. Ergo & reliquum quod fit ex $\varkappa S\omega$ in $\sigma\gamma\beta$, reductum est ad solidum determinatam habens basim ac altitudinem. Quod erat propositum.

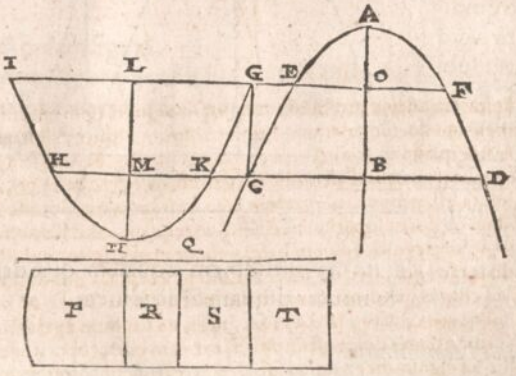
[a] Parte 5. parab.

PROPOSITIO CI.

SIt denuo AB axis parabolæ ad quem sint ordinatim positę EF, CD, & CG axi æquidistans. Deinde constituatur æqualis & similis figura GCHI subalternè cum figura GFDC.

Oporteat quoque superficiei GFDC in GIHC ductæ exhibere æqualem magnitudinem habentem præter basim determinatam, etiam notam altitudinem.

Constructio & demonstratio.



OStensum est, [b] cui proportioni cylindri sit æqualis magnitudo solida quæ fit ex ductu plani OFDB in se subalternè, hoc est in planum LMHI, ponatur itaque portio illa cylindri æqualis corpori quod habet basim circularem P, & altitudinem Q. hoc facto addatur huic basi P rectangulum R, quod ductum in altitudinem Q producat parallelepipedum æquale solido quod fit ex ductu plani OFDB in planum GCML. Quod fieri poterit, cùm [b] figura OFDB quadrata sit. Quia autem corpus ex ductu OBCG in planum LMHI, æquale est eidem corpori orto ex OFDB in GCML, adiungatur rectangulum S æquale R rectangulo, quod ductum in altitudinem Q æquetur R ducto in Q. Tandem adiungatur rectangulum T, quod etiam ductum in eandem altitudinem Q, æquetur parallelepipedo quod gignitur ex ductu plani GOBC in seipsum seu in planum GCML. erit itaque tota superficies PRST ducta in altitudinem Q producens solidam magnitudinem desideratam, æqualem illi scilicet corpori quod oritur ex ductu GFDC, ducto in se subalternè. nam GFDC ductum in GCHI, æquatur FOBD in IHML, (hoc est P in Q) simul cum FODB in GCML, (hoc est R in Q) simul cum OGCB in ILMH, (hoc est S in Q) vnà denique cum rectangulo OGCB in LGCM ducto, scilicet T in altitudinem Q. quare perfecimus quod requirebatur.

[b] Prop. 68. huius.

[c] Parte 5. parab.

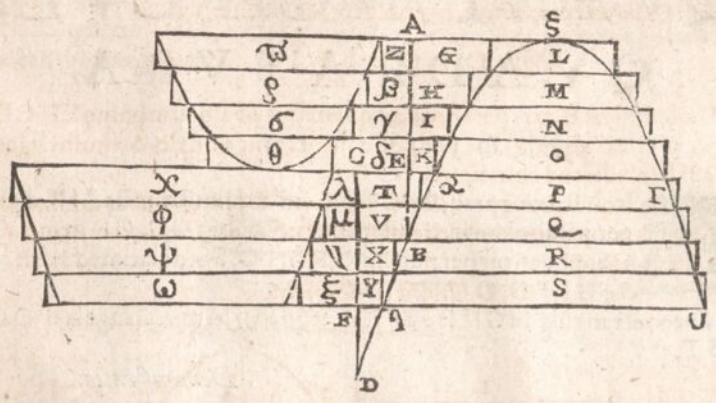
PROPOSITIO CII.

OMnibus itaque his suppositis propositum sit proportionem circuli ad figuram rectilineam notam facere.

Constructio

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1241] - 1184
PUBLIC DOMAIN

Conſtructio & demonſtratio.



REſumamus itaque ad hoc pręſtandum figuram vniuerſalem propoſition. 84 quod eſt fundamentum cui ſpeculationis huius cardo innititur. exhibita itaque eſt ratio corporis ex AEαζ plano in ſe ducto ad corpus ex plano CFηα in ſe ducto reſultans; cùm [a] vtraque ad corpus quod altitudinem certam habet & baſes notas reducta ſint: prætereà exhibita eſt proportio inter corpora producta ex ſuperficie CFυr in ſe ducta, & ſolidum ex ductu ſuperficiei AErζ in ſeipſam, cùm hæc etiam ad corpora reducta ſint [b] quę pręter altitudinem baſes habent notas. Igitur exhibita eſt proportio inter has duas rationes, hoc eſt inter rationem corporis quod fit ex ductu plani AEαζ in ſe, ad corpus quod oritur ex ductu plani CFηα in ſe, & inter rationem quam habet ſolidum ex ductu plani CFυr in ſe, ad ſolidum ex ductu plani AErζ in ſeipſum. Verum etiam [c] demonſtratum eſt eandem eſſe proportionem inter rationes corporum quæ gignuntur ex ductu ſubalterno earundem figurarum, hoc eſt inter rationem corporis ex ductu plani AEαζ in planum AEθ, ad corpus ex plano parabolico CFηα in planum parabolicum CFξ, & rationem corporis quod oritur ex ductu plani CFυr in planum CFω, ad corpus quod fit ex ductu ſuperficiei AErζ in AEθϖ cum proportione quæ eſt inter rationes corporum quæ fiunt ex ijſdem figuris ductis in ſe. quare cùm proportio quæ eſt inter rationes corporum genitorum ex figuris illis in ſe ductis, nota quoque erit proportio quam inter ſe habent rationes corporum quæ fiunt ex ſubalterno earundem figurarum ductu. Igitur cùm [d] hæc vltima corpora reducta quoque ſint ad ſolidas magnitudines, quarum baſes habent circulares figuras, & vnam eandemque communem omnibus altitudinem, eadem reperietur ratio inter hæc corpora quæ inter baſes eorum exiſtet, atque ita ratio circuli ad rectilineum reducta erit, prout pleniùs ex quadratura quarta adhuc intelligetur.

[a] *Per 96. huius.*

[b] *Per 97. huius.*

[c] *Per 90. huius.*

[d] *Per 98. 100. 101. huius.*

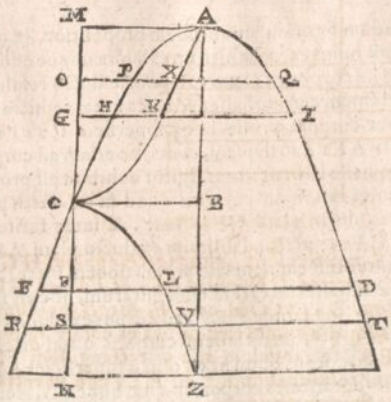
QVARTA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO CIII.

SIt AB axis parabolæ CAD, cui æquidistet recta MN diuisa per parabolam in C, sumptisq; æqualibus CG, CF; item CO, CS, ponantur per puncta G, F, ita O, S ordinatim ad axem rectę GI, ED; OQ, RT.

Dico rectangula HGI, EFD fore æqualia; item rectangula POQ, RST.

Demonstratio.



a *Per 339. parab.*

b *Per 152. de cylindro, Conoid. &c.*

c *Per 15. parab.*

d *Per 44. de parab.*

FIat enim GK media inter GH, GI; & OX media inter OP, OQ. item FL, SV mediæ inter EF, FD, & RS, ST. ostensum [a] est CKX, item CLV esse parabolas, & quidem CLV æqualem planè [b] parabolę CAD. concurrat itaque parabola CLV cũ axe AB in Z. manifestum est, si ex Z ordinatim ducatur ZN ad axem CN, æqualem eam fore ordinatim ductæ ex C ad axem AB, scilicet æqualem CB; quare cùm CLZ, CAD parabolæ eædem sint, manifestum est axes AB, CN æquales esse. Manifestum est etiam ex constructione. parabolam CKX transire per A: nam ex A, ducatur AM parallela GK, tanget [c] ea parabolam CAD, itaque cùm [d] rectangulum HGI sit ad quadratum AM vt linea CG ad CM, etiam quadratum GK ad MA quadratum erit vt CG ad CM. patet itaque CKX parabolam transire per A, & quidem AM vti & GK ordinatim erit posita ad axem parabolæ CKA cùm sint ad angulos rectos ductæ ad axem AB, ac propterea AM æqualis erit BC, & MC æqualis AB, hoc est CN. æquales itaque rursus sunt parabolæ CKA, CLZ, quare & quadratum GK quadrato FL, & quadratum OX quadrato SV, æquale erit. manifestum igitur est etiam rectangula HGI, EFD, item POQ, SRT esse æqualia. Quod erat demonstrandum.

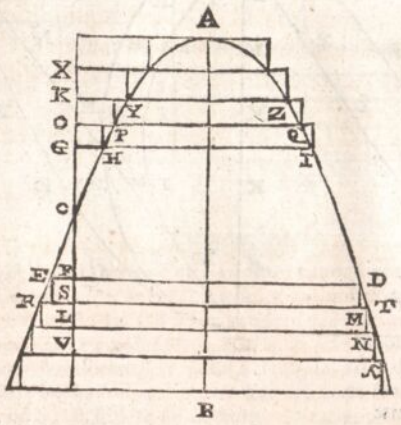
PROPOSITIO CIV.

PArabolę CAD axis sit AB, quęuis autem diameter GCF parabolam secet in C; factis deinde CG, CF inter se æqualibus, vti & GO, FS, item OK, SL & sic deinceps, per puncta G, O, F, S, &c. ponantur ordinatim ad axem OQ, GI, ED, RM, &c. secantes parabolam in R, E, H, P, item

item in Q, I, D, T, &c. ex quibus punctis educantur parallelæ ad axem, perficianturq; rectangula K P, O H, E S, R L; item K Q, O I, F M, S N.

Dico rectangulum O H ad rectangulum E S esse vt rectangulum F M, ad rectangulum O I: & rectangulum K P esse ad R L, vt rectangulum S N ad K Q rectangulum.

Demonstratio.



QVoniam C F, C G, item C O, C S æquales sunt, igitur [a] rectangulum H G I, æquale est rectangulo E F D, ac propterea G H est ad E F, & F D ad G I, sed rectangulum O H est ad rectangulum E S, vt G H ad E F, & rectangulum F M ad rectangulum O I vt F D ad G I, cùm altitudines eædem sint ex constr. igitur manifestum est rectangulum O H ad E S, rectangulum esse vt rectangulum F M ad O I. Eodem prorsus modo ostendetur rectangulum K P ad R L, esse vt rectangulum S N ad K Q rectangulum. Quę fuerant demonstranda.

[a] *Per 103. huius.*

PROPOSITIO CV.

IIsdem positis:

Dico parallelepipedum quod oritur ex ductu rectanguli O H in se, ad id quod oritur ex ductu E S in se, eandem habere rationem quam parallelepipedum ex ductu rectanguli F M in se ad parallelepipedum ex ductu O I in se.

Demonstratio.

PArallelepipedum ortum ex ductu rectāguli O H in se ad parallelepipedum ortum ex ductu rectanguli E S in se, est vt rectangulum O H ad rectangulum E S, cùm altitudines æquales sint. Sed [b] eadem quoque reperitur proportio inter bases parallelepipedorum quę fiunt ex ductu F M rectanguli in se, & ex ductu rectanguli G I in seipsum. Igitur patet veritas propositionis.

[b] *Per 104. huius.*

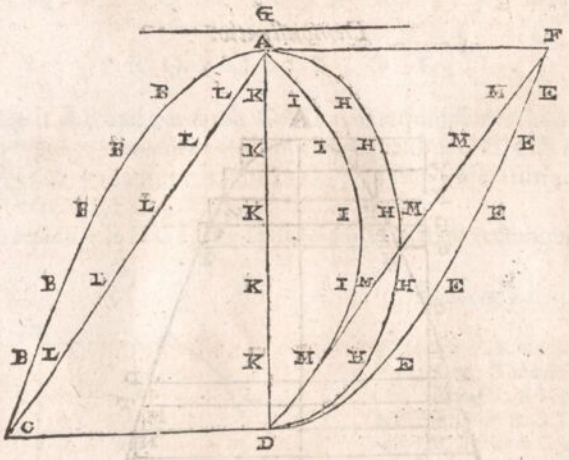
Corollarium.

EOdem modo demonstrabitur parallelepipedum ex ductu rectanguli K P in se ad parallelepipedum ortum ex ductu R L in se esse vt corpus ortum ex ductu S N in

se

se ad corpus ortum ex ductu rectanguli KQ in se, imò & de omnibus parallelepipedis quorum bases æqualiter à puncto C distant, id eodem modo ostendetur.

PROPOSITIO CVI.



Iisdem manentibus:

Dico proportionem quæ est inter rationem corporis ex ductu OH in se ad corpus ex ductu ES in se, & rationem corporis ex ductu FM in se ad corpus ex ductu OI in se, eandem esse cum proportione quæ est inter rationem corporis ex ductu plani KP in se, ad corpus ex ductu RL in se, & rationem corporis orti ex ductu plani SN in se, ad corpus ortum ex ductu plani KQ in se.

Demonstratio.

a *Per 105. huius.*

DEmonstratum est [a] quod ratio quæ est inter corpora orta ex ductu OH in se, & ES in se, eadem sit cum ratione quæ est inter corpora ex ductu FM in se, & plani OI in seipsum. Similiter ostensum est quod ratio quæ est inter corpora nata ex ductu KP in se, & ex ductu RL in se, eadem sit cum ratione quę est inter corpora orta ex ductu SN in se, & ex ductu KQ in se. Igitur cùm vtrobique sit ratio æqualitatis, manifestum est quod in propositione fuerat assertum.

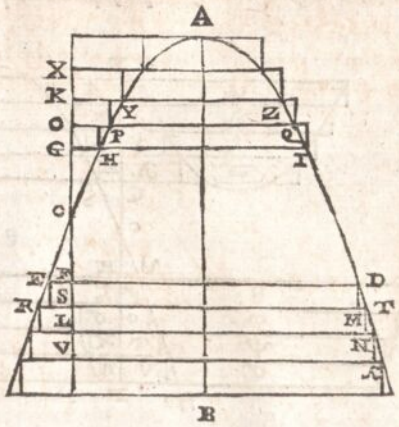
PROPOSITIO CVII.

Iisdem positis:

Dico proportionem quæ est inter rationem corporis orti ex ductu OH in se, ad corpus ortum ex ductu KP in se, & rationem corporis orti ex ductu plani ES in se ad RL in se ductum, eandem esse cum proportione quæ est inter rationem corporis orti ex ductu FM in se, ad corpus ortum ex ductu SN in se, & rationem corporis orti ex ductu OI in se, ad corpus ortum ex ductu plani KQ in se.

Demon-

Pro hac demonſtratione vſurpetur figura hîc appoſita, vti & in propoſitionibus paginâ præcedenti poſitis, non verò illa, quæ ibidem per errorem impreſſa eſt.



Demonſtratio.

OStendimus a igitur proportionẽ quæ eſt inter rationẽ corporis orti ex ductu plani O H in ſe, ad corpus ex ductu E S in ſe, & rationẽ corporis orti ex ductu F M in ſe ad id quod oritur ex ductu O I in ſe, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani K P in ſe, ad corpus eſt ductu R L in ſe, & rationem corporis nati ex ductu S N plani in ſeipſum, ad id quod ex plano K Q in ſe ducto exſurgit. ergo permutãdo b proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani O H in ſe, ad E S in ſe ductum, & rationem corporis orti ex ductu K P in ſe ad id quod oritur ex ductu R L in ſe, eadem erit cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani F M in ſe ad O I in ſe, & rationem corporis orti ex ductu S N in ſe; ad id quod ex ductu plani K Q in ſe, exſurgit. Quare c etiam proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu O H in ſe, ad corpus ortum ex ductu K P in ſe, & rationem corporis orti ex ductu E S in ſe ad R L in ſe ductum, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu F M in ſe, ad corpus ortum ex ductu S N in ſe, & rationem corporis orti ex ductu O I in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani K Q in ſe. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 106. huius.*

b *Per 44. de propor.*

c *Per 59. de propor.*

Corollarium primum.

EOdem planè modo demonſtrabitur quod proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu K P in ſe, ad corpus ortum ex ductu X Y in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani R L in ſe ad α V in ſe ductum, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani S N in ſe ducti ad id quod oritur ex ductu L λ plani in ſe, & rationem corporis orti ex ductu K Q in ſe ad X Z in ſe ductum.

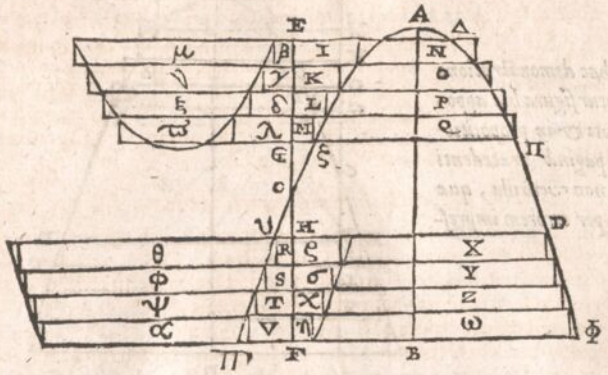
Corollarium ſecundum.

ITem ex demõſtratione conſtat quod proportio quæ eſt inter rationem corporum ortorum ex ductu O H in ſe, & E S in ſe, & rationem corporum ex ductu K P in ſe, & R L in ſe, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationes corporum ex ductu F M in ſe, & O I in ſe, & rationem corporum ortorum ex ductu S N in ſe, & K Q in ſe.

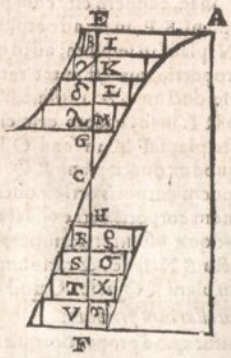
Corollarium tertium.
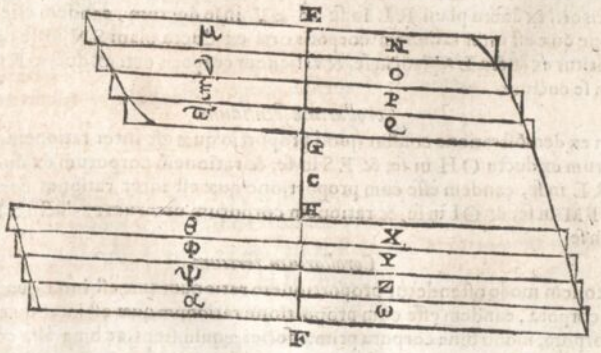
IMò eodem modo oſtendetur proportionem rationum quæ eſt inter quælibet quatuor corpora, eandem eſſe cum proportione rationum quæ eſt inter quælibet quatuor corpora, modò bina corpora primæ ſeriei æquidiſtent, ac bina alia corpora primæ ſeriei à puncto C: & rurſus bina corpora ſecundæ ſeriei æquidiſtent à puncto C, ac bina alia corpora eiuſdem ſeriei.

Figura vniuersalis pro sequentibus propositionibus.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1247] - 1190
PUBLIC DOMAIN

Constructio Figuræ vniuersalis pro sequentibus propositionibus.

SIt AB axis parabolæ C A D, cui æquidistet diameter E F bifariam diuisa in C; sumptisque C G, C H æqualibus, diuisisque G E, H F in quatuor partes æquales, ponantur per puncta diuisionum ordinatim ad axem, & perficiantur parallelogramma I, K, L, M; item I N, K O, L P, M Q; & rectangula R, S, T, V, item ϱ X, σ Y, ϰ Z, η ω. Denique ponatur figura parabolica I K L M subalternè in β γ δ λ, similiter subalternè constituatur E G Q N, in E G ϖ μ. Tandem figura parabolica H F π υ subalternè ponatur in H F η ϱ, vti & figura H F ω X subalternè constituatur in H F α θ, & intelligantur parallelogramma vbique perfecta.

Constructio Figurarum particularium.

VT clariùs in sequentibus procedamus, transferantur rectangula quæ in schemate vniuersali sunt inter parabolam C A, diametrum E C F, & parabolas subalternè positas in schema particulare primum, & corpora orta ex ductu rectanguli M in se, L in se, K in se, I in se, item corpora orta ex ductu rectangulorum R, S, T, V singulorum in seipsa, vocentur corpora M, L, K, I, item corpora R, S, T, V. Item corpora quæ nascentur ex ductu rectanguli M in λ rectangulum, rectanguli L in δ, rectanguli K in γ, rectanguli I in β, vocentur corpora M λ, L δ, K γ, I β sine addito, vti & corpora quæ exsurgent ex ductu rectanguli R in ϱ, S in σ, T in ϰ, V in η, vocentur corpora R ϱ, S σ, T ϰ, V η.

In secundum verò schema referantur rectangula M Q, L P, K O, I N, item ϱ X, σ Y, ϰ Z, η ω ac rectangulo quidem M Q in schemate vniuersali, sit æquale rectangulum Q, in secundo schemate particulari: rectangulis verò L P, K O, I N in vniuersali, æqualia sint rectangula, P, O, N in secundo particulari; item rectangula X, Y, Z, ω æqualia rectangulis ϱ X, σ Y, &c. Denique rectangulis ϖ λ, ξ δ, ν γ, μ β; θ R, φ S, ψ T, α V in vniuersali, æqualia ponantur in particulari schemate ϖ, ξ, ν, μ; θ, φ, ψ, α. Ac corpora quidem quę nascentur ex ductu rectanguli Q in se, O in se, P in se, N in se, item ex ductu rectanguli X in se, Y in se, Z in se, ω in se, vocentur corpora Q, P, O, N, &c. Item ea quæ exsurgent ex ductu Q in ϖ, ex P in ξ, O in ν, N in μ, &c. vocentur sine addito corpora Q ϖ, P ξ, O ν, N μ; X θ, Y φ, Z ψ, ω α.

PROPOSITIO CVIII.

ILlis positis:

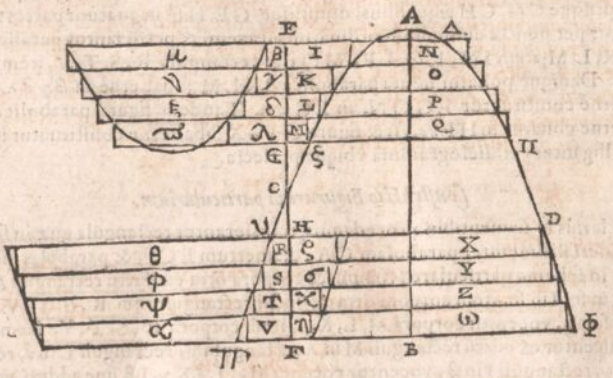
Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum M λ ad R ϱ, & X θ, ad Q ϖ, eandem esse cum proportione quæ est inter rationes corporum L δ, ad S σ, & Y φ ad P ξ.

Demonstratio.

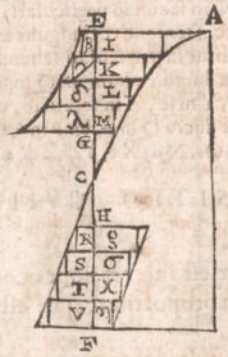
NAm ratio corporis M λ ad R ϱ, composita est ex ratione rectanguli M ad R, & rectanguli λ ad ϱ. Item ratio corporis X θ ad Q ϖ, composita est ex ratione rectanguli X ad Q, hoc est ratione rectanguli [a] M ad R, & ex ratione rectanguli θ ad ϖ, hoc est [b] λ ad ϱ. Eadem igitur est ratio corporis M λ ad R ϱ, & ratio corporis X θ ad Q ϖ. Eodem discursu patet rationem quæ est inter corpora L δ & S σ, eandem esse cum ratione quæ est inter corpora Y φ & P ξ. nam rursus ratio corporis L δ ad S σ, composita est ex ratione rectanguli L ad S, & rectanguli δ ad σ; ratio autem corporis Y φ ad P ξ, ex ijsdem composita est: componitur enim ex ratione rectanguli Y ad P, [c] hoc est rectanguli L ad S, & ex ratione rectanguli φ ad rectangulum ξ, hoc est rectanguli δ ad σ. Quare cùm vtrobique rationes eædem sint, erit proportio quæ est inter rationes corporum M λ, ad R ϱ, & X θ ad Q ϖ, eadem cum proportione quæ est inter rationes corporum L δ, ad S σ, & Y φ ad P ξ. Quod erat demonstrandum.

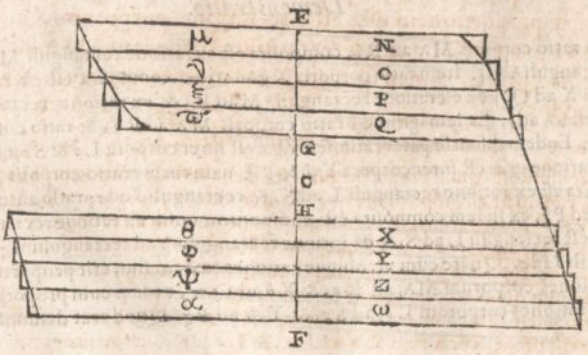
[a] *Per 104. huius.*
[b] *Per eand.*
[c] *Per eand.*

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1249] - 1192
PUBLIC DOMAIN

Corollarium.

QVod de proportionibus harum rationum dictum est, id etiam in quibusuis subdiuisionibus intelligi volumus, modò corpora debito modo sumantur, hoc est prout hîc sumpta sunt: nimirum asserimus, quod proportio, quæ est inter rationes corporum $L\delta$, ad $S\sigma$, & $Y\phi$ ad $P\xi$, eadem sit cum proportione, quæ est inter corpora $K\gamma$ ad $T\varkappa$, & $Z\psi$ ad $O\nu$: item eadem cum proportione, quæ est inter rationes corporum $I\beta$ ad $V\eta$, & $\omega\alpha$ ad $N\mu$, cùm in his sit eadem demonstratio. Idemque in sequenti propositione aduertendum est.

PROPOSITIO CIX.

IIsdem positis:
Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$.

Demonstratio.

DEmonstratum est præcedenti prop. quod proportioque est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $X\theta$ ad $Q\varpi$, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum $L\delta$ ad $S\sigma$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Igitur permutando [a] etiam proportio quæ est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem erit cum proportione quę est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. [a] *Per 44 de proport.*

Corollarium primum.

HAnc etiam prout in Corollario 107. dictum, ad alias proportiones reliquorum corporum extendi volumus modo suprà dicto.

Corollarium secundum.

HInc rursus collige quod [b] proportio quę est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $L\delta$, & $R\varrho$ ad $S\sigma$, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Y\phi$, & $Q\varpi$ ad $P\xi$. [b] *59. Propor.*

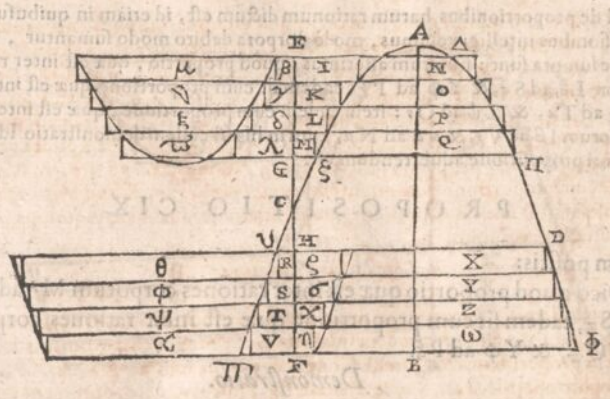
PROPOSITIO CX.

IIsdem positis:
Dico quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & L ad S, ad proportionem quæ est inter rationes corporum X ad Q, & Y ad P, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$.

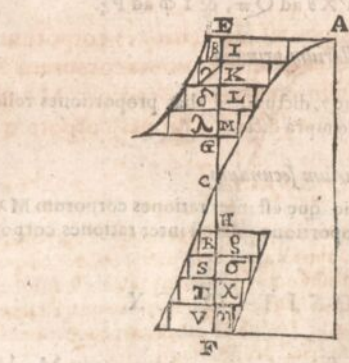
Demonstratio.

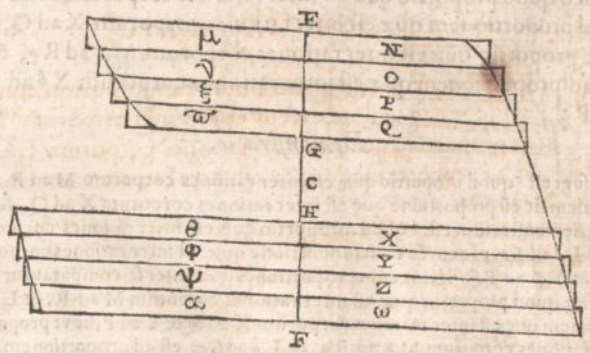
OStensum est [c] quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & L ad S, eadem sit cũ proportione quę est inter rationes corporum X ad Q, & Y ad P. Similiter demonstratum est [d] quod proportio quę est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Igitur cùm proportiones quæ inter se comparantur æquales sint, constat quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & L ad S, ad proportionem quę est inter rationes corporum X ad Q & Y ad P, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\varrho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, est ad proportionem, quę est inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Quod erat demonstrandum. [c] *Corol. 2. prop. 107. huius.* [d] *109. huius.*

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1251] - 1194
PUBLIC DOMAIN

Corollarium primum.

HInc rectè etiam inferes quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad L, & R ad S, ad proportionem quæ est inter rationes corporum X ad Y, & Q ad P, sit vt proportio, quæ est inter rationes corporum Mλ ad Lδ, & Rϱ ad Sσ, est ad proportionem quę est inter rationes corporum Xθ ad Yφ, & Qϖ ad Pξ. nam rursus [a] proportio quæ est inter rationes corporum M ad L, & R ad S, eadem est cum proportione quæ est inter rationes corporum X ad Y, & Q ad P. Ex altera verò parte ostensum est [b] quod proportio quæ est inter rationes Mλ ad Lδ, & Rϱ ad Sσ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum Xθ ad Yφ, & Qϖ ad Pξ. Constat igitur veritas Corollarij, quam etiam de duabus sequentibus propositionibus intelligi volumus.

[a] *Per 107. huius.*

[b] *Per Corr. 2. 109. huius.*

Corollarium secundum.

EOdem modo ostendemus quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, ad proportionem quæ est inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Xθ ad Qϖ, est ad proportionem Lδ ad Sσ, & Yφ ad Pξ, scilicet per propositionem iam positam, rationesque permutando per 44 de propor.

PROPOSITIO CXI.

IIsdem positis:

Rursus dico quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & K ad T, ad proportionem quæ est inter rationes corporum X ad Q, & Z ad O, sit vt proportio quæ est inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Kγ ad Tκ, est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Xθ ad Qϖ, & Zψ ad Oν.

Demonstratio.

DEmonstratum est enim [c] quod proportio quę est inter rationes corporum M ad R, & K ad T, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum X ad Q, & Z, ad O. Similiter ostensum est [d] quod proportio quæ est inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Kγ ad Tκ, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes corporum Xθ, ad Qϖ, & Zψ ad Oν. Itaque cùm iterum proportiones quę inter se comparantur eædem sint, constat veritas propositionis.

[c] *Per Corr. 3. 107. huius.*

[d] *Corr. 1. prop. 109. huius.*

PROPOSITIO CXII.

IIsdem positis:

Iterum dico quod proportio quæ est inter rationes corporum L ad S, & K ad T, ad proportionem quæ est inter rationes corporum Y ad P, & Z ad O, sit vt proportio, quæ est inter rationes corporum Lδ ad Sσ, & Kγ ad Tκ, est ad proportionem, quæ est inter rationes corporum Yφ ad Pξ, & Zψ ad Oν.

Demonstratio.

EAdem quæ superior.

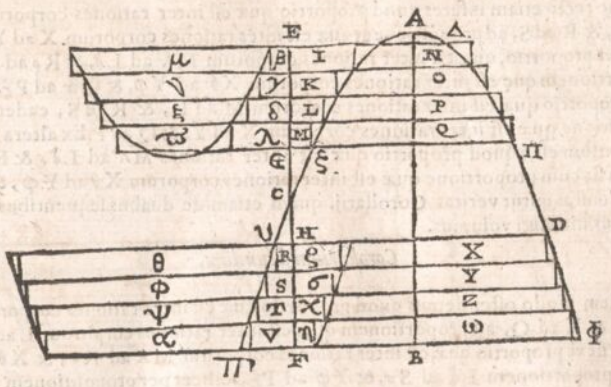
Scholion.

NE longior sim in ijsdem demonstrationibus semper repetendis, idem intelligi volumus de quibusuis aliis proportionibus corporum subdiuisorum, modò corpora eo modo sumantur, prout hic sumpta sunt.

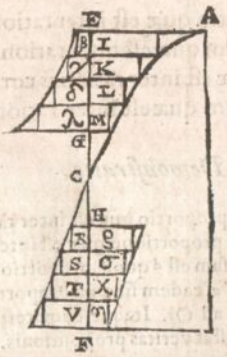
PRO-
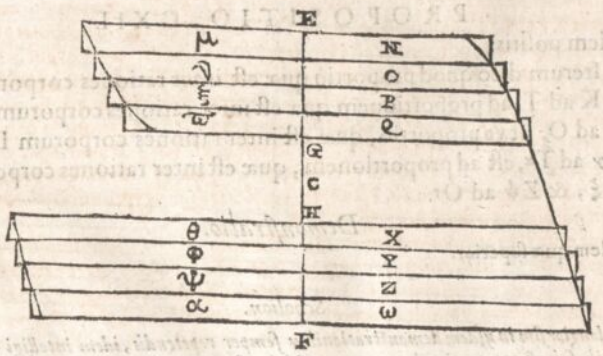
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1252] - 1195
PUBLIC DOMAIN

Figura vniuersalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1253] - 1196
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CXIII.

M	R	X	Q
L	S	Y	P
K	T	Z	O
I	V	ω	N
Mλ	Rϱ	Xθ	Qϖ
Lδ	Sσ	Yφ	Pξ
Kγ	Tκ	Zψ	Oν
Iβ	Vη	ωα	Nμ

MAnentibus ijſdem:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati corporum M, L, K, I, ad aggregatum corporum R, S, T, V, & inter rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω, ad aggregatum corporum Q, P, O, N, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter aggregatum corporum Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, ad aggregatum corporum Rϱ, Sσ, Tκ, Vη, & inter rationem aggregati corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα, ad aggregatum corporũ Qϖ, Pξ, Oν, Nμ.

Demonſtratio.

DVplici rurſus viâ hanc propoſitionem demonſtrabimus. Prima erit per propoſ. ſecundam de Conoidibus Archim. Secunda per prop. Lemmaticam 54. huius libri. Primâ itaque viâ ſic demonſtrabimus. Ratio corporum M ad R, ad rationem corporum L ad S, [a] eſt vt ratio corporum X ad Q ad rationem corporum Y ad P. Item eodem modo ratio corporis L ad S ad rationem corporis K ad T, eſt vt ratio corporis Y ad P, eſt ad rationem corporis Z ad O. Denique ratio corporis K ad T ad rationem corporis I ad V, eſt vt ratio corporis Z ad O, eſt ad rationem corporis ω ad N. Atque ſic primam Archimedei Theorematis partem abſoluimus.

[a] *Per Corol. 2. prop. 107. huius.*

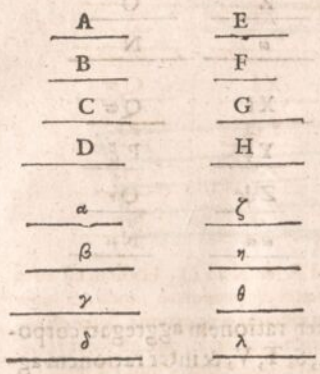
Cùm verò oſtenſum ſit [b] quod ratio corporis Mλ ad Rϱ, eadem ſit cum ratione corporis Xθ ad Qϖ, demonſtratum verò ſit [c] etiam quod ratio corporis M ad R, eadem ſit cum ratione corporis X ad Q, etiam [d] permutando ratio corporis M ad R, ad rationem corporis Mλ ad Rϱ, erit vt ratio corporum X ad Q, eſt ad rationem corporum Xθ ad Qϖ. Eodem modo oſtendetur ratio corporis L ad S, ad rationem corporis Lδ ad Sσ eſſe, vt ratio corporum Y ad P eſt ad rationem corporum Yφ ad Pξ: item ratio corporis K ad T, ad rationem corporis Kγ ad Tκ, erit vt ratio corporum Z ad O eſt ad rationem corporum Zψ ad Oν. Denique ratio corporum I ad V, ad rationem corporum Iβ ad Vη, erit vt ratio corporum ω ad N, eſt ad rationem corporum ωα ad Nμ.

[b] *Per demonſtrata prop. 108. huius.*
[c] *Per 105. huius.*
[d] *Per 44. proport.*

Igitur cùm hæ rationes omnes ita diſpoſitæ ſint vti quantitates apud Archimedẽ, ſicut ipſe rectè infert quantitates aggregati primi ad omnes aggregati ſecũdi eſſe vt omnes quantitates tertij aggregati ſunt ad omnes quantitates aggregati quarti, ita & nos inferimus omnes rationes corporũ M ad R, L ad S, K ad T, I ad V, (hoc eſt rationẽ aggregati corporum M, L, K, I ad aggregatum corporum R, S, T, V) eſſe ad omnes rationes corporum X ad Q, Y ad P, Z ad O, ω ad N (hoc eſt ad rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω ad aggregatum corporum Q, P, O, N) vt omnes rationes cor-

porum Mλ ad Rϱ, Lδ ad Sσ, Kγ ad Tϰ, Iβ ad Vη (hoc est vt ratio aggregati corporum Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, ad aggregatum corporum Rϱ, Sσ, Tϰ, Vη) sunt ad omnes rationes corporum Xθ ad Qϖ, Yφ ad Pξ, Zψ ad Oν, αω ad Nμ, hoc est ad rationem aggregati corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα, ad aggregatum corporum Qϖ, Pξ, Oν, Nu. Quod erat demonstrandum.

Scholion.



NE quis verò miretur nos hic à rationibus ad rationes argumentari, cùm Archimedes à quantitatibus ad quantitates argumentum formet, ostendemus Archimedis constructionem etiam in rationibus consistere. Sic ipse construit. Sit quantitas A ad B, vt quantitas E ad F, quantitas verò B ad C, vt quantitas F ad G, denique quantitas C ad D, vt quantitas G ad H. Item quantitas A ad α, vt quantitas E ad ζ; quantitas verò B ad β, vt quantitas F ad η, item quantitas C ad γ, vt quantitas G ad θ; tandem quantitas D ad δ, vt quantitas H ad λ. Infert Archimedes omnes quantitates A, B, C, D, esse ad omnes quantitates E, F, G, H, vt sunt quantitates α, β, γ, δ ad quantitates ζ, η, θ, λ.

Iam verò à rationibus ad rationes quantitatum argumentabimur in his ipsis quantitatibus, vt superiùs fecimus. Cùm quantitas A ad B, sit vt quantitas E ad F, igitur ratio quantitatum A ad B, eadem est cum ratione quantitatum E ad F, & ratio quantitatum B ad C, eadem cum ratione quantitatum F ad G, tandem ratio quantitatum C ad D, eadem erit cum ratione quantitatum G ad H.

Cum verò Archimedes fecerit quantitatem A ad α, vt quantitas E est ad ζ, etiam ratio quantitatum A ad α, eadem erit cum ratione quantitatum E ad ζ. item ratio quantitatum B ad β, eadem erit cum ratione quantitatum F ad η, & ratio quantitatum C ad γ, eadem cum ratione quantitatum G ad θ; denique ratio quantitatum D ad δ, eadem erit cum ratione quantitatum H ad λ. Igitur ratio omnium quantitatum A, B, C, D ad omnes quantitates E, F, G, H, eadem est cum ratione quantitatum α, β, γ, δ ad omnes quantitates ζ, η, θ, λ: siue quod in idem recidit, prout Archimedes inferebat omnes quantitates A, B, C, D, sunt ad omnes quantitates E, F, G, H, vt omnes quantitates α, β, γ, δ, ad omnes quantitates ζ, η, θ, λ. Differentia verò tantùm est in priori nostro discursu, quod omnes rationes inter duos terminos posuerimus; atque sicut Archimedes dicere potuisset vt iam ostendimus ratio A ad B, eadem est cum ratione E ad F, ita nos in superiori discursu diximus, ratio corporis



M ad R, ad rationem corporis L ad S, est sicut ratio corporis X ad Q, ad rationem corporis Y ad P, rationes autem esse similes aut easdem in idem recidit. Et sic si rationum M ad R, & L ad S, statuantur esse denominatores A & B: item rationum X ad Q, & Y ad P, denominatores statuantur E & F, & sic de cæteris, apparebit nos, quando dicimus rationem corporum M ad R, ad rationem corporum L ad S, esse vt ratio corporum X ad Q, est ad rationem corporum Y ad P, nihil aliud efferre quàm quod ratio A ad B, sit eadem cum ratione E ad F, siue vt Archimedes effert, quod quantitas A ad B, sit vt quantitas E ad F. Itaque si aliarum rationum denominatores statuantur quantitates C, D, G, H, &c. apparebit nostrum discursum cum Archimedæo ad amussim congruere.

Aliter

Aliter demonstratur viâ secundâ.

M	R	X	Q
L	S	Y	P
K	T	Z	O
I	V	ω	N
Mλ	Rϱ	Xθ	Qϖ
Lδ	Sσ	Yφ	Pξ
Kγ	Tκ	Zψ	Oν
Iβ	Vη	ωα	Nμ

PRoportio quæ est inter rationes corporum M ad R & X ad Q, [a] eadem est cum proportione corporum L ad S, & Y ad P. Præterea proportio, quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, [b] eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum K ad T, & Z ad O: præterea proportio, quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. Atque ita proportio quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, comparata est cum omnibus alijs, cum quibus conferri potest, ita vt semper antecedentis locum obtineat. Vt igitur discursum prosequamur, assumemus proximè sequentes terminos, qui vicem antecedentis obtineant.

[a] *Per 106. huius.*

[b] *Per eandem.*

Proportio itaque quę est inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum K ad T, & Z ad O. item eadem cum proportione quę est inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. Denique eadem cum proportione quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q; vti patet ex demonstratis prop. 106. huius. Atque ita contulimus proportionem, quæ est inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, cum reliquis proportionibus, dando illi semper locum antecedentis. Idem ergo in alijs præstemus.

Rursus proportio quæ est inter rationes corporum K ad T, & Z ad O, eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. item eadem cum proportione, quæ est inter rationes M ad R, & X ad Q; & rursus eadem cum proportione, quæ est inter rationes corporum L ad S, & Y ad P. Tandem proportio quæ est inter rationes corporum I ad V, & ω ad N, eadem est cum proportione, quæ est inter rationes corporum M ad R, & X ad Q: item eadem cum proportione, quæ est inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, & denique eadem cum proportione, quæ est inter rationes corporum K ad T, & Z ad O.

His ita concluſis infero ex vi [c] Lemmaticæ propositionis quod proportio quæ est inter rationem aggregati corporũ M, L, K, I, ad aggregatũ corporũ R, S, T, V, & rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω, ad aggregatum corporum Q, P, O, N, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes partium iam enumeratarum quæ antecedentium vices obtinebant; & rationes partium quæ consequentium loco ponebantur.

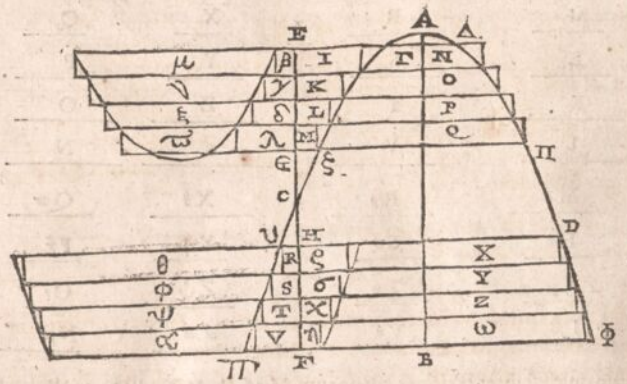
[c] *Per 45. huius.*

Quia verò per eundem discursum circa quatuor alia aggregata quorum primum complectitur corpora Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, secundum corpora Rϱ, Sσ, Tκ, Vη, tertium Xθ, Yφ, Zψ, ωα; quartum denique Qϖ, Pξ, Oν, Nμ, eodem modo argumentari possumus, licebit etiam inferre, quod proportio quæ est inter rationem aggregati primi ad secundum aggregatum, ad rationem aggregati tertij ad aggregatum quartum, sit eadem cum proportione quæ est inter rationes partium aggregatorum quæ antecedentes constituebant, & rationes partium aggregatorum quę consequentium supplebant vices.

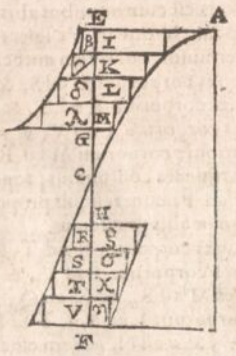
Quia verò demonstratum est [d] quod proportio quæ est inter rationes corporum M ad R,

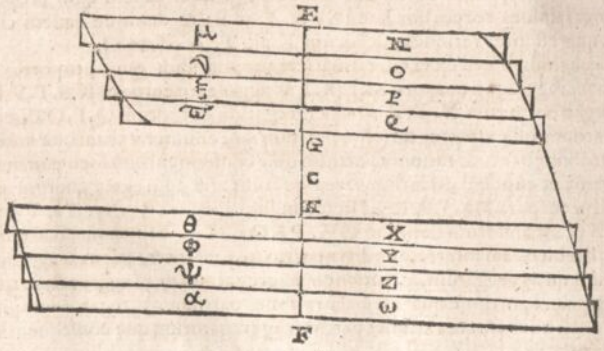
[d] *Per 110. huius.*

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1257] - 1200
PUBLIC DOMAIN

ad R, & L ad S, sit ad proportionem quæ est inter rationes corporum X ad Q; & Y ad P, vt proportio, quæ est inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Lδ ad Sσ; est ad proportionem quæ est inter rationes corporum Xθ ad Qϖ, & Yφ ad Pξ; atque ita [a] consequenter de reliquis, & hoc quidem in omni subdiuisione diametrorum parabolæ: infero per Coroll. proportionis Lemmaticæ suprà citatæ, quod proportio quæ est inter rationem aggregati corporum M, L, K, I, ad aggregatum corporum R, S, T, V, & inter rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω, ad aggregatum corporum Q, P, O, N, eadem sit cum proportione quæ est inter rationes aggregati corporum Mλ, Lδ, Kγ, Iβ ad aggregatum corporum Rϱ, Sσ, Tκ, Vη, & rationem aggregati corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα, ad aggregatum corporum Qϖ, Pξ, Oν, Nμ. Quod fuit demonstrandum.

[a] Per 111. & 112. huius.

PROPOSITIO CXIV.

MAnente eadem figurâ.

Dico quod ratio corporis orti ex ductu parabolici segmenti EGζΓ in se ipsum, ad corpus quod exsurgit ex figurâ parabolicâ νHFπ in se ductâ, sit ad rationem corporis orti ex figura parabolica HFΦD ducta in seipsam ad corpus quod resultat ex ductu figuræ EGΠΔ in seipsam, vt ratio corporis ex ductu figuræ EGζΓ in se ducta subalternè, ad corpus ortum ex ductu figuræ νHFπ ductæ in se subalternè, est ad rationem corporis nati ex ductu figuræ HFΦD in se subalternè, ad corpus quod exsurgit ex figurâ EGΠΔ ductâ in se subalternè.

Demonstratio.

PRæcedenti demonstratione ostensum est, quod ratio inter omnia parallelepipeda M, L, K, I, & omnia parallelepipeda R, S, T, V ad rationem inter corpora X, Y, Z, ω & corpora Q, P, O, N sit vt ratio inter corpora Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, & corpora Rϱ, Sσ, Tκ, Vη, est ad rationem corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα ad corpora Qϖ, Pξ, Oν, Nμ. & hoc quidem in quâuis inscriptione figurarum per subdiuisionem linearum EG, HF in infinitum intelligendum est; ex vi discursus in demonstratione positi. Cùm igitur continuatis semper diuisionibus auferatur [b] semper plus dimidio residui corporum illorum quibus parallelepipeda inscribuntur; ac propterea cùm omnia corpora simul sumpta exhauriant corpora quibus inscribuntur, manifestum est rationem plani parabolici EGξΓ in se ducti, ad planum parabolicum νHFπ in se ductum esse ad rationem plani parabolici HFΦD in se ducti, ad planum parabolicum EGΠΔ ductum in se, vt ratio primorum corporum in se subalternè ductorum, est ad rationem secundorum corporum in se subalternè ductorum, cùm hæc ipsa corpora sint, quibus ea parallelepipeda circumscripta fuerant aut inscripta. Hæc porrò corpora, similiter atque in secunda & tertia quadratura præstitum à nobis est, ad corpora cylindrica ipsis æqualia reducentur. Restat vt propositiones iam aliquot hîc subiungam ex quibus manifestior ratio circuli ad rectilineum eruatur.

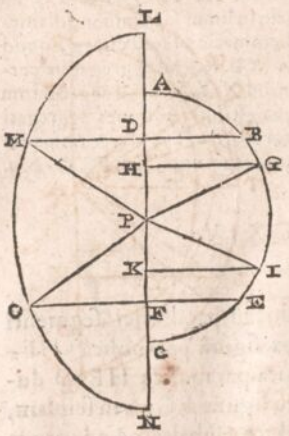
[b] Per 42. & 43. duct.

PROPOSITIO CXV.

IN circulo ABC constituantur ordinatim ad diametrum AC rectæ BD, EF æqualiter semotæ à centro P: sumpto deinde arcu GI commensurabili cum BE ponantur ordinatim GH, IK æquales.

Oporteat autem LMN ellipsim assignare, ad quam circulus ABC talem habeat rationem, quam GHKI circuli segmentum, ad ellipseos segmentum, inclusum parallelis BM & EO; æqualiter à P centro communi distantibus.

Constructio & demonstratio.

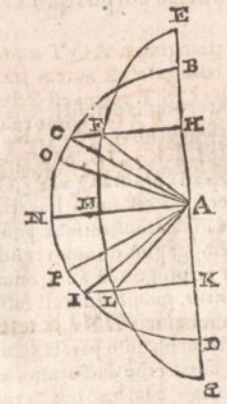


FIat vt PH ad PA, ita PD ad PL vel PN: & describatur quæcunq; ellipsis LMN, cuius axis maior sit LN. Dico factum quod requiritur. Ductis enim PM, PO, & GP, PI: erit sector GPI ad suum circulum ABC, vt sector ellipticus MPO est ad suã ellipsim LMN; ac proinde segmentum GHKI ad circulum ABC, vt segmentum DMOF ad ellipsim LMN. Quod fuerat requisitum.

PROPOSITIO CXVI.

SIt A centrum circuli BCD & ellipseos EFG: & ponantur ordinatim ad axem communem rectæ CH, IK, æqualiter à centro remotæ, sitque sector AOP commensurabilis sectori CAI.

Dico si sit vt EG ad BD, ita NA ad MA, & sector OAP ad circulum BND eam rationem habeat, quam sector FAL ad ellipsim EMG; quod sectores FAL, OAI æquales inter se sint.



a 191. *ellips.*

Demonstratio.

SVnt enim a ellipsis & circulus inter se vt triangula maxima inscripta MEA, NBA semicirculo vel semiellipsi. Quare cùm æqualia sint triangula illa his figuris inscripta ex eo quod circa communem angulum latera habeant per hypothesim reciproca, etiam figuræ ipsæ æquales erunt ac proinde etiam sectores FAL, OAP æquales sunt, qui ad totas figuras eamdem sortiuntur rationem. Quod erat propositum.

PROPOSITIO CXVII.

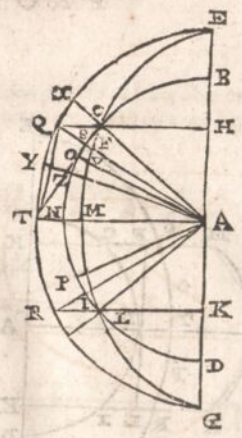
IIsdem positis si ellipsis transeat per puncta C & I circuli BCD. Dico quod sector FALMF minor sit sectore CAINC.

Demon-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1259] - 1202
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

QVoniam EG, axis ellipſeos ponitur maior diametro BD. igitur rectangulum EHG ad EAG rectangulum maiorem habebit rationem quàm rectangulum BHD ad BAD rectangulum; vnde quadratum FH ad MA, quadratum maiorem habet rationem, quàm quadratum FH ad NA quadratum, minor igitur eſt AM quàm ſit AN; vnde & ſector FMLAF minor eſt ſectore CAINC. Quod fuit demonſtrandum.



PROPOSITIO CXVIII.

ISdem poſitis: Quod ſi ellipſis EQRG, circulo non occurrat, & AQ, AR iungantur:

Dico ſectorem QAR maiorem eſſe ſectore CAI.

Demonſtratio.

PRoducta AN in T, ducatur CT, QT. erit igitur triangulum AQT æquale TCA triangulo, adeoque & QST æquale FSA triangulo. eſt autem triangulum AFS maius ſectore FAV. Igitur etiam triangulum QST maius eſt ſectore eodem FAV: ſed etiam triangulum SAT maius eſt ſectore VAN. Igitur triangulum QAT maius eſt ſectore FAN, & à fortiori totus ſector QATYQ maior ſectore FAN. Quare, & ſector QAR maior eſt ſectore CAI: oſtenſum enim eſt dimidium vnius, alterius dimidio eſſe maius.

PROPOSITIO CXIX.

ISdem poſitis:

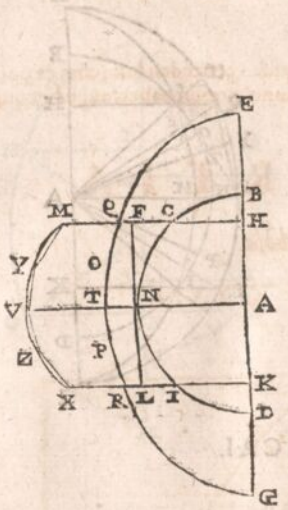
Dico quantitatem ellipticâ lineâ QTR & circulari CNI interceptam, eſſe conuexam.

Demonſtratio.

QVoniam arcus CNI commenſurabilis eſt arcui ONP: inueniatur menſura quæ vtrumque commenſuret (menſura autem de quâ loquor non linearis eſt ſed ſuperficies alicuius ſegmenti quod aliquoties ſumptum adæquat ſegmentum arcus circularis & ſegmentum arcus elliptici, ſecundùm ea quæ libro de ellipſi explicata ſunt) ſitque illa ſegmentum arcus CV, producta deinde AC in X, diuidatur ſector QAR per ſegmentum QX, erit enim QX menſura quæ commenſurabit ſegmentum, ſectoris QAR quoniam ſegmentum arcus VC commenſurat FNI ſegmentum, cumque nota ſit ratio ſegmenti CV ad XQ ſegmentum, erit quoque nota ratio ſegmenti CN ad ſegmentum QT: eſt verò ſegmentum QT oſtenſum maius ſegmento CN: ſit igitur ſector CAV tertia pars verbi gratiâ ſectoris CAN, & fiat VZ æqualis CV, & ducatur AZY. erunt igitur ſegmenta QY, YT maiora quàm ſint ſegmenta CV, VZ, ZN, ablatis igitur tribus illis ſegmentis à ſegmentis duobus QY & YT remanebit adhuc aliqua pars conuexa ipſius ſectoris QAT. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXX.



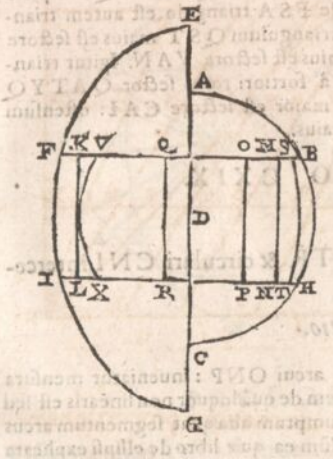
MAnentibus ijsdem. Ponatur figuræ HCNIK æqualis FMVXL, vt contineat ellipticam superficiem QTR vt sit commune spatium QFLR, segmento MFLX.

Dico spatium QMVXR esse concauum.

Demonstratio.

OStensum enim est segmentum QTR maius esse segmento circuli CNI vel MVX, igitur si diuisa sit quantitas MVX in quatuor videlicet segmenta MY, YV, VZ, ZX, æqualia & tollantur à quantitate elliptica verbi gratia QO, OT, TP illis æqualia residuum erit PR concauum. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CXXI.



HAbeat ABC circulus centrum D commune cum ellipsi EFG, & BF, HI ponantur ordinatim ad axem EG, æquidistantes à centro D; sit autem vt KFIL, segmentum ellipseos ad segmentum circuli BMNH, ita BOPH circuli segmentum ad segmentum ellipseos QFIR.

Oporteat autem quatuor assignare quantitates proportionales inter se, quarum tres sint conuexæ, quarta verò concaua.

Constructio & demonstratio.

QVoniã ex præced. propos. ellipsis EFG, vel contrahi vel diduci potest ea ratione, vt segmentum FI maius esse possit vel minus segmento arcus circuli BH: supponatur segmentum ellipticum FKLI minus esse segmento circulari MBHN, vnde super rectâ MN inscribatur segmentum MSTN æquale segmento KFIL. Fiet itaque pars alia SBHT residua, quâ differat segmentum BMNH à segmento incluso. similiter idem fiat de segmento circulari BOPH, (quod etiam segmẽto elliptico QFIR inscribi poterit, cùm ponantur proportionalia esse segmenta KFIL, BMNH segmentis BOPH, QFIR supponaturque KFIL, minus segmento MBNH. sit ergo excessus figura VXIF. erit igitur vt MSTN ad residuum SBHT, ita QVXR ad residuum VFIX. Ostensum verò est SBHT esse concauum & VFIX conuexum. Igitur MSTN est ad MBHN, vt QVXR est ad QFIR: & diuidendo MSTN est ad SBHT, vt QVXR, est ad VFIX. igitur permutando SMNT conuexum est ad conuexum QVXR, sicut est concauum BSTH ad

conuexum

conuexum VFIX. Igitur quatuor quantitates exhibuimus proportionales, inter quas tres conuexæ sunt & quarta concaua. Quod fuerat imperatum.

Corollarium.

CÆtera perficere poteris, neque enim vlteriùs censeo procedendum; cùm ex positis sufficienter vnusquisque, qui statum quæstionis notum habet, expediet quæ desiderantur.

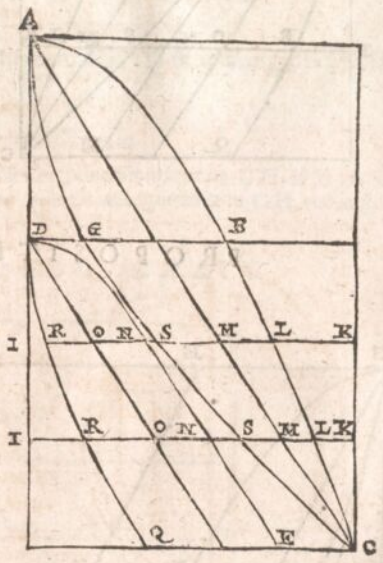
PARS TERTIA.

Quadratura Hyperbolæ.

PROPOSITIO CXXII.

COnstitutæ sint duæ parabolæ ABC, DNE ad eundem axem AD, quarum vertices sint A & D: ductaque CK quę æquidistet AD, ponãtur AC, DO quæ inter se sint parallelæ. Denique sint ordinatim ad axem AD collocatę rectæ KI, quæ sint diametri parabolarum AGC, DRQ.

Dico IS, IM, IK & similiter IR, IO, IK esse proportionales lineas.



Demonstratio.

INuenies illam libro de parabolâ propositione 67.

PROPOSITIO CXXIII.

IIsdem positis:

Dico IM, IL, IK & IO, IN, IK esse continuè proportionales lineas.

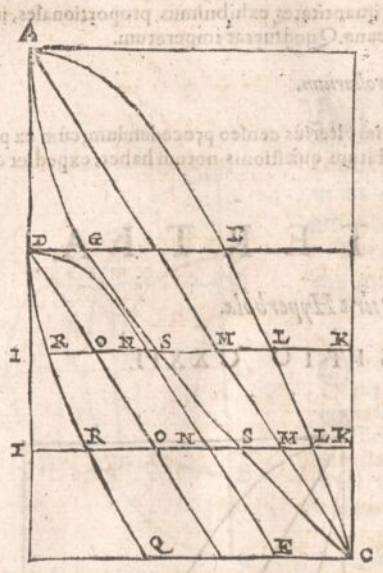
Demonstratio.

LEge illam libro de parabolâ propositione 42.

PROPOSITIO CXXIV.

IIsdem positis:

Dico rectangula SIR, MIO, KIK esse proportionalia.



a 11.huius.

b 23.huius.

c 58.Progress.

Demonstratio.

CVm sint proportionales quantitates IR, IO, IK & IS, IM, IK [a]. Igitur rectangula ex illis resultantia erunt proportionalia per propositionem 58. libri de progressionibus.

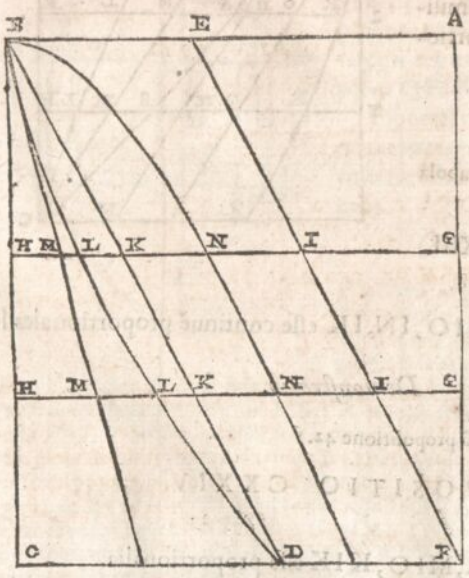
PROPOSITIO CXXV.

IIsdem manentibus:
Dico similiter rectangula MIO, LIN, KIK esse proportionalia.

Demonstratio.

COincidit cum præcedētis propositionis demonstratione: cū enim [b] sint IM, IL, IK, item IO, IN, IK proportionales, etiam rectangula MIO, LIN, KIK proportionalia [c] erunt.

PROPOSITIO CXXVI.



d Per 67. huius.

IN parallelogrammo ABC sint parallelæ positæ BD, FE. Deindè rectæ GH æquidistantes AB. Fiant autem rectangulis IHK æqualia rectangula GHL.

Dico BLL esse ad eandem parabolam.

Demonstratio.

FIant rectangulis IKH æqualia rectangula GHM; & quadratis KH æqualia rectangula GHML. Erunt puncta BL, L ad parabolam [d], sed hæc puncta L, L, sunt eadem cum punctis L, L, in hypothesi determinatis: Nam quia rectangula IKH, cum quadratis KH æquantur rectangulis GHM cum rectangulis

ctangulis G H, M L, etiam per 1.2.elem. rectangula I H K æqualia erunt rectangulis G H L. Patet ergo propositum.

PROPOSITIO CXXVII.

Iisdem positis: sint quadrata H N rectangulis G H L æqualia.
Dico B N N esse ad eandem hyperbolam cuius diameter erit B C.

Demonstratio.

OStensum est [a] quod lineæ quæ sunt mediæ inter lineas I H & H K, terminentur in hyperbolâ quæ habet B C diametrum, rectangulis autem G H L æqualia sunt rectangula I H K ex hypothesi, vt videre est præcedenti propositione. Igitur etiam H N, lineæ quæ mediæ sunt inter latera rectanguli G H L erunt ad hyperbolam cuius diameter B C. Quod fuit demonstrandum.

[a] 192. *Hyperb.*

PROPOSITIO CXXVIII.

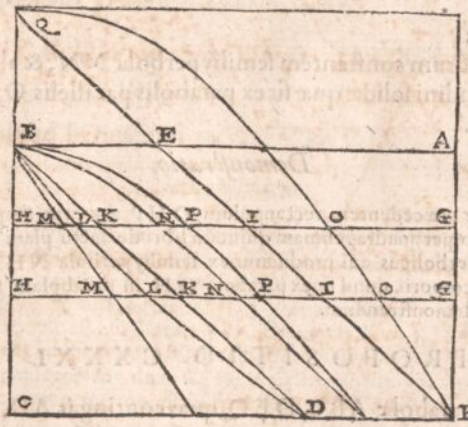
Iisdem manentibus:
Dico quadratum G H rectangulum G H N & rectangulum G H L, esse proportionales quantitates.

Demonstratio.

PRoportionales enim sunt per hypothesim præcedentis lineę G H, N H, & L H. Igitur etiam [b] proportionales sunt quantitates, quadratum G H, rectangulum G H N & G H L rectangulum.

[b] 1. *Sexti.*

PROPOSITIO CXXIX.

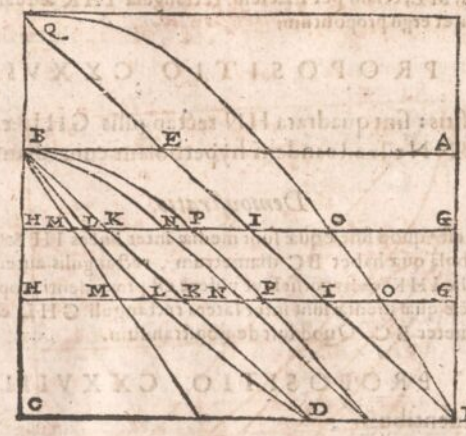


COniungantur hypotheses 122. 125. & 127.
Dico rectangulo O H P æquale esse rectangulum G H N.

Demonstratio.

QVadratum G H, rectangulum O H P, & rectangulum I H K sunt [c] proportionalia; item proportionalia sunt [d] quadratum G H, rectangulum G H N, & rectangulum

[c] 125. *huius.*
[d] 128. *huius.*



ctangulum GHL. Cùm igitur vtriuſque ſeriei terminus primus ſit idem, nempe quadratum GH, & inſuper ex hypotheſi 126. huius extrema rectangula IHK, GHL ſint paria, etiam media OHP, GHN æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc patet ſi OHP rectangulis æqualia fiant rectangula GHN, punctaN eſſe ad hyperbolam.

PROPOSITIO CXXX.

IIſdem poſitis:

Dico cylindrum conſtantem ſemihyperbola NN, & altitudine HG æquari magnitudini ſolidæ quæ fit ex parabolis parallelis OH, PH in ſe inuicem ductis.

Demonſtratio.

CVm enim per præcedentem rectangulum OHP æquetur ſemper rectangulo GHN; ergo per quadrageſimam quintam libri de ductu plani in planum, ſemicylindrus hyperbolicus qui producitur ex ſemihyperbola NH in altitudinem HG æqualis eſt corpori, quod fit ex parabola OH in parabolam ſibi parallelam HP. Quod erat demonſtrandum.

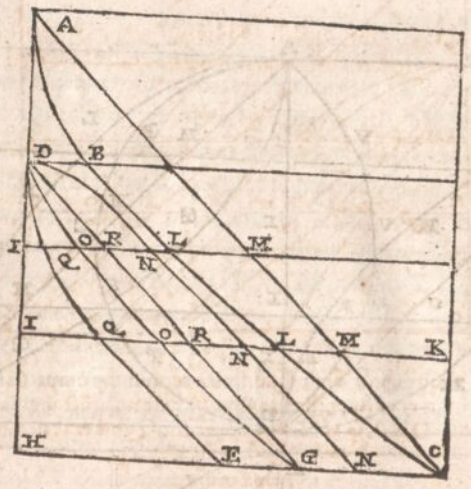
PROPOSITIO CXXXI.

SInt denuo parabolæ ABC, DEQ, quas contingat AD, in vtriuſque vertice: poſitiſq; AC, DR quæ inter ſe æquidiſtent & deſcriptâ hyperbolâ DNN, cuius IN ordinatim poſitæ ad axem DH, poſſint rectangula MIR: fiant quadratis NI æqualia KIO rectangula.

Dico DOO eſſe parabolam.

Demon-

Demonſtratio.



PRopoſitione 126. demonſtratum eſt, quod ſi fiant rectangulis MIR æqualia rectangula KIO, quod DOG, ſit parabola. ſed quadrata NI æquantur ex hypotheſi rectangulis MIR. ergo etiam ſi quadratis NI fiant rectangula KIO æqualia, erit DOG parabola. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXII.

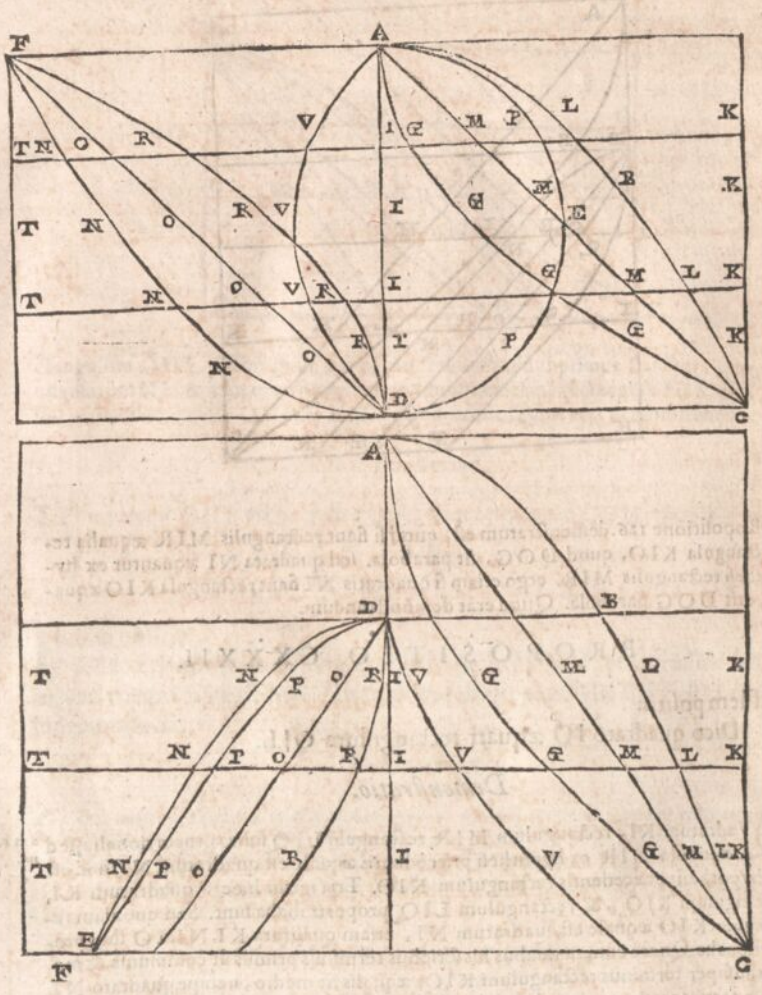
ILſdem poſitis:
Dico quadrato IO æquari rectangulum QIL.

Demonſtratio.

QVadratum KI, rectangulum MIR, rectangulũ LIQ ſunt [a] proportionalia; ſed rectangulo MIR ex hypotheſi præcedentis æquale eſt quadratum NI, hoc eſt ex hypotheſi præcedentis rectangulum KIO. Tria igitur hæc, quadratum KI, rectangulum KIO, & rectangulum LIQ proportionalia ſunt. Sed quoniam rectangulo KIO æquale eſt quadratum NI, etiam quadrata KI, NI, IO ſunt proportionalia. Quare cùm in duabus his ſeriebus terminus primus ſit communis, & medius, inſuper terminus rectangulum KIO, æqualis ſit medio, nempe quadrato NI, etiam tertius tertio par erit, hoc eſt rectangulum KIO quadrato OI. Quod erat demonſtrandum.

[a] 114. huius.

Symbolizatio quadraturæ circuli cum hyperbolæ quadraturâ.



NImis elegans visa mihi est symbolizatio inter proprietates circuli & hyperbolæ, quàm vt eam suppressam voluerim, aut silentio præteritam: quidquid enim ad circuli quadraturam necessarium fuit id omne in hyperbolæ quadraturâ ita ad amussim sese offert vt ijsdem prorsus characteribus eademq́ discurrendi methodo vtramque absoluere possis, modo disponantur debitâ ratione, quæ requiruntur ad discursum formandum.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1267] - 1210
PUBLIC DOMAIN

dum. Ponantur enim duo cylindri quorum alter basi circulari insistat, scilicet cylindrus ex altitudine AD seu KI, & basi semicirculari PI, alter autem basi semihyperbolica IP, & altitudine KI, quos oporteat ad magnitudines solidas reducere quæ vel parallelepipeda sint vel cubi. Primus labor in circulari cylindro fuit eum reducere ad aliud corpus, æquale quidem sed quod nihil circulare contineret, sic erit primæ industriæ scopus vt idem præstemus de cylindro hyperbolico. Ostensum itaque[a] est posità in figurâ, constructione quadraturæ primæ circuli cylindrum basi circulari PI & altitudine KI, æquari corpori quod fit ex parabolis LI, IN subalternè constitutis in se ductis. Ita quoque demonstrauimus posità propositionum iam in hac quadraturâ præmißarum constructione cylindrum ex basi hyperbolica IP, & altitudine KI æqualem esse magnitudini solidæ quæ fit ex parabolis parallelis LI, IN in se inuicem ductis: nam in hâc figurâ parabola DNN refert parabolam BPP in figurâ propositionis 130. huius: hyperbola verò DPP designat hyperbolam BNN in figurâ prædicta, neque enim est alia diuersitas huius figuræ ab ea, qua vsi sumus propositione 130. huius, quam quod vna parabolarum DN cum hyperbola DPP, ad aliam partem translata sit.

[a] 51. huius.

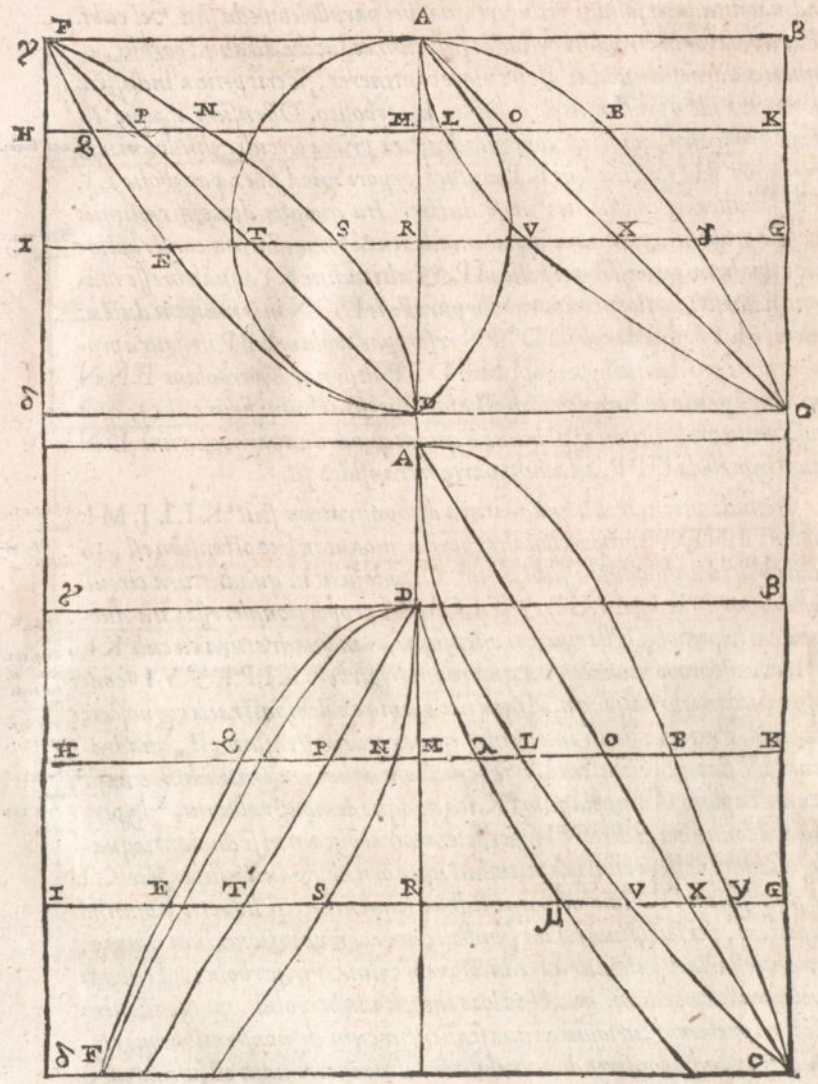
[b] Per 130. huius.

Secundò vti in circuli quadratura demonstratum fuit[c] KI, LI, MI: item TI, NI, OI, proportionales esse; ita quoque in hac ostensum est, [d] si eadem litteræ alphabeti assumantur. Deinde sicut in quadratura circuli ostensum est[e] KI, MI, GI, & TI, OI, RI proportionales esse; ita quoque [f] in hyperbola. Vlterius vti ostensum est [g] in quadratura circuli KI, PI, VI esse proportionales, ita quoque in hyperbola KI, PI, & VI [h] continuant eandem rationem. Atque hæc omnia ex demonstratis cognoscere poteris. Præterea sicuti in circuli [i] quadratura ostensum est, quadratum IV siue quantitatem IV in se ductam æquari magnitudini, quæ fit ex ductu plani GI in planum IR, ita quoque demonstrabimus, [k] hyperbolæ id conuenire, scilicet VI superficiem parabolicam in se ductam, æquale solidum exhibere cum magnitudine, quæ oritur ex ductu superficiei GI in superficiem IR. Imò verò quæ adhuc sequentur, si libuerit nonnihil reflectere, perfectißimè etiam symbolizare cognosces secundùm omnia, quæ necessaria requiruntur ad reductionem cylindri hyperbolici ad cubum vel parallelepipedum. quod hoc loco indicandum volui, vt occasionem Lectori præberem curiosiùs ea quæ sequentur cum demonstrationibus circularis cylindri conferendi. mirabiliter enim reficere nata est vsque adeò vniuersalis symbolizatio. translatus igitur est cylindrus hyperbolicus habens basim semihyperbolam IP, & altitudinem KI ad solidum, quod nascitur ex duabus parabolis LI, IN in se inuicem ductis, sicut etiam de cylindro circulari factum est. prosequemur itaque reliquas proprietates

[c] Prop. 27. huius.
[d] Prop. 123. huius.
[e] Prop. 26. huius.
[f] Prop. 122. huius.
[g] Per prop. 41. huius.
[h] Per hyp. prop. 127. huius.
[i] Prop. 42. huius.
[k] Prop. 143. huius.

quas

quas quadraturæ circuli aptauimus vt ex iis ipſam hyperbolam ad rectangulum reducamus aut quadratum.



PRO-

PROPOSITIO CXXXIII.

CONstruantur duo scemata, vnum quod circulari cylindro subseruiat, alterum, quod cylindro hyperbolico. Constructio verò vtriusque hoc pacto fiat. In vno duæ æquales parabolæ constituantur subalternè positę ad communem axem, in altero verò loco parabolarum subalternè positarum fiant parabolæ parallelæ inter se sicut libro de parabola dictum est. sintq; illæ parabolæ in vtroque scemate A B C, D E F, quarum axis communis sit A D. Deinde axibus æquidistantes ponantur C G, H I, quæ ab axibus distent æquali interuallo. fiant præterea G I, K H ordinatim ad axem A D & ducantur A C, D T constituentes æquales angulos cum axe A D. Denique construantur parabolæ D N S, A L C quarum vertices sint A & D, & contingant axem in ijsdem punctis.

Dico rectangula L M N, O M P, K M H esse in continuâ proportione in vtroque scemate.

Demonstratio.

OStensum enim [a] L M, O M, K M, item M N, M P, M H esse proportionales lineas. Igitur per demonstrata libro de progressionibus propositione 58. etiam rectangula L M N, O M P, K M H proportionalia sunt. [a] *Per 112. huius.*

PROPOSITIO CXXXIV.

IIsdem manentibus:

Dico rectangula O M P, B M Q, K M H esse proportionalia.

Demonstratio.

DEmonstrauimus propositione 29. de quadratura circuli hanc ipsam propositionem; sed præcedentibus quoque immediatis [b] ostensum est lineas O M, B M, K M, & M P, M Q, M H proportionales esse in scemate hyperbolico. Igitur per ea quæ libro de progressionibus sunt demonstrata [c] etiam rectangula O M P, B M Q, K M H proportionalia sunt. [b] *113. huius.* [c] *Prop. 58.*

PROPOSITIO CXXXV.

IIsdem denuo manentibus:

Dico parallelepipeda quæ super basibus rectangulis L M, R S, O M, R T & K M, R I constituuntur habentia communem altitudinem M R, esse inter se proportionalia, vti etiam sunt parallelepipeda, super rectangulis O M, R T; B M, R E, & K M, R I. sub eadem altitudine rectæ M R.

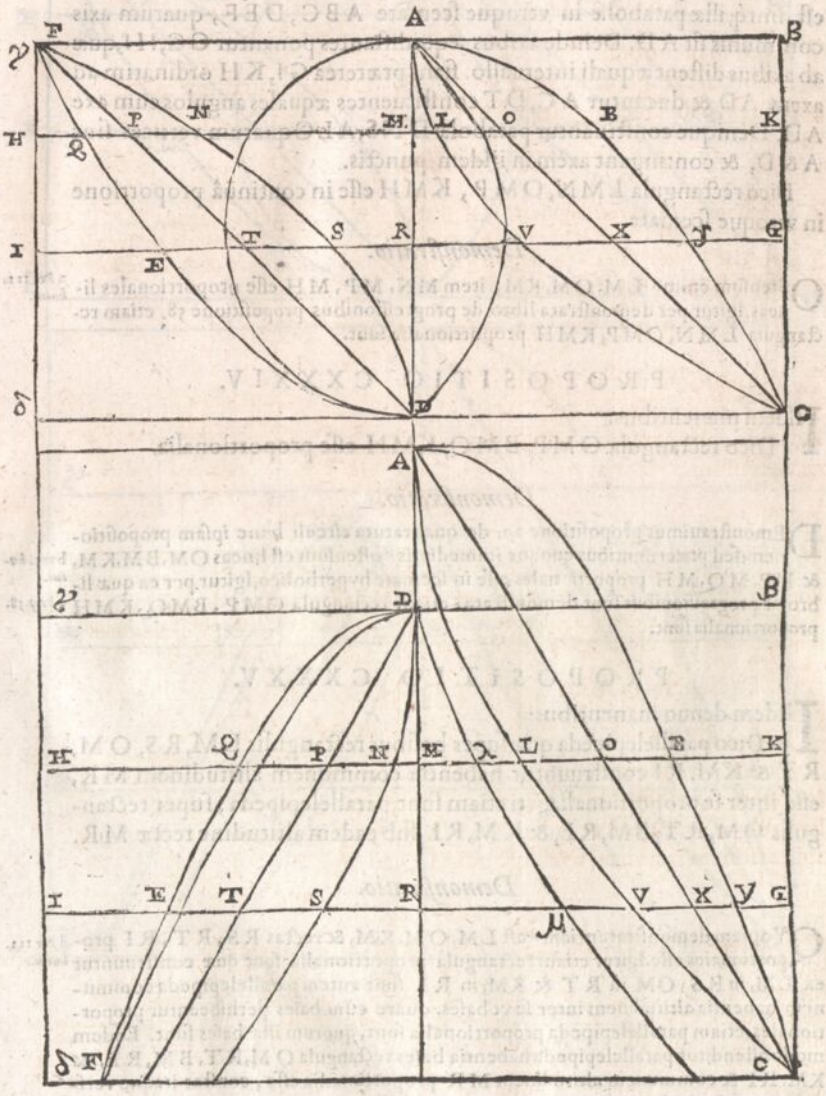
Demonstratio.

QVoniam demonstratum iam [d] est L M, O M, K M, & rectas R S, R T, R I proportionales esse. Igitur etiam rectangula proportionalia sunt quæ constituuntur ex L M, in R S, O M in R T & K M, in R I. sunt autem parallelepipeda communem habentia altitudinem inter se vt bases. quare cùm bases perhibeantur proportionales, etiam parallelepipeda proportionalia sunt, quorum illæ bases sunt. Eodem modo ostenditur parallelepipeda habentia bases rectangula O M, R T, B M, R E, & K M, R I & communem altitudinem M R proportionalia esse, constat itaque veritas propositionis. [d] *Per 112. huius.*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1270] - 1213
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CXXXVI.

Iisdem permanentibus:
Dico rectangulum LMN ad VRS rectangulum duplicatam habere rationem eius quam habet rectangulũ OMP ad rectangulũ XRT.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1271] - 1214
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

OStenſum eſt ſuprà [a] tam rectangula LMN, OLP, KMH quàm rectangula VRS, XRT, GRI eandem continuare rationem. quare cùm extrema rectangula KMH, GRI ſint æqualia, erit ratio rectanguli LMN ad VRS, rectangulum duplicata [b] rationis, quam habet rectangulum OMP ad XRT rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

[a] 124. huius.
[b] 9. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

IIſdem manentibus:
Dico rectangulum OMP ad XRT, duplicatam rationem habere eius quam habet rectangulum BMQ ad YRE.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [c] tam rectangula OMP, BMQ KMH, quàm rectangula XRT, YRE & GRI in eadem eſſe proportione. quare cùm rectangula poſtrema KMH, GRI interſe ſint æqualia, erit [d] ratio rectanguli OMP ad XRT, rectangulum duplicata rationis rectanguli BMQ ad YRE rectangulum.

[c] 125. huius
[d] 9. huius.

PROPOSITIO CXXXVIII.

MAnentibus denuo ijſdem:
Dico rectangulum LMN ad rectangulum VRS quadruplicatam eius continere rationem, quam habet rectangulum BMQ ad YRE rectangulum.

Demonſtratio.

REctangulum LMN ad VRS rectangulum, duplicatam [e] habet eius rationem, quam habet rectangulum OMP ad XRT rectangulum. ſed OMP rectangulum ad rectangulum XRT habet [f] duplicatam eius quam rectangulum BMQ ad YRE rectangulum. ergo LMN rectangulum ad VRS quadruplicatam habet eius rationem quam rectangulum BMQ ad YRE. Quod fuit demonſtrandum.

[e] 136. huius.
[f] 137. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

POſitis ijſdem:
Dico rationem rectanguli LMN ad rectangulum VRS, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli OMP ad XRT rectangulum, quoties hæc eadem ratio OMP ad XRT continet per multiplicationem rationem rectanguli BMQ ad YRE.

Demonſtratio.

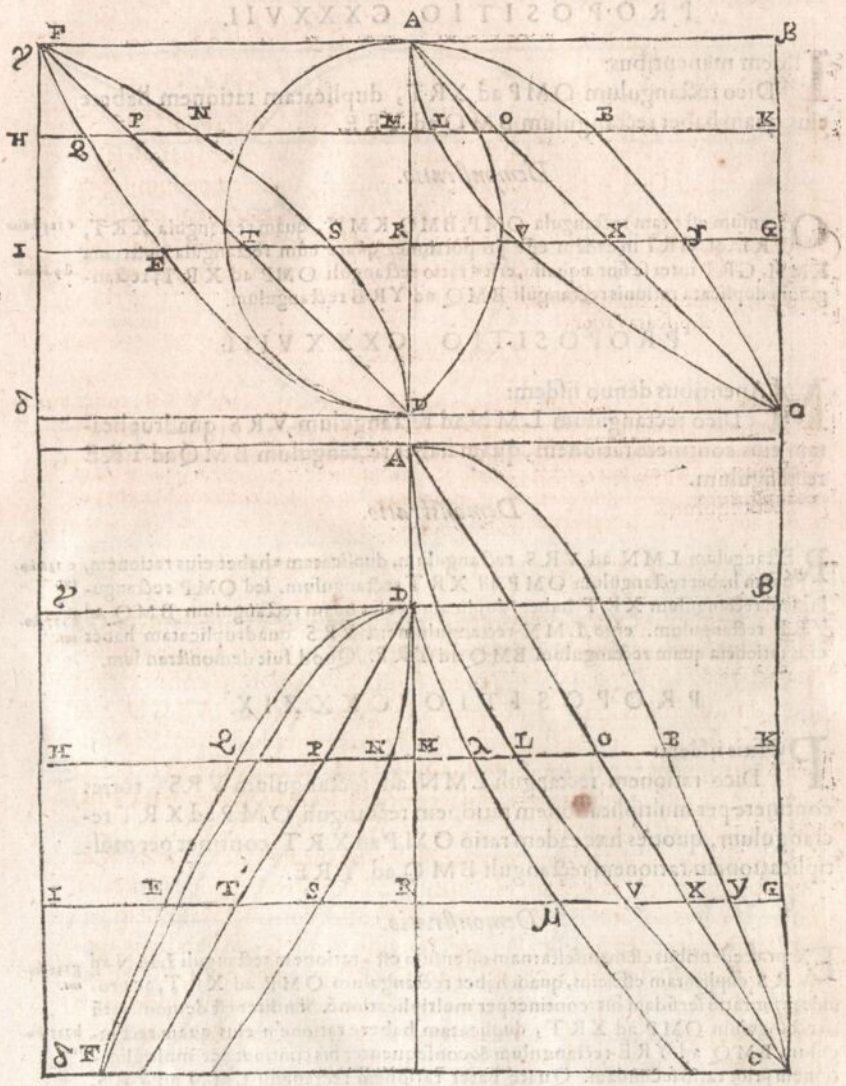
EX præcedentibus eſt manifeſta: nam oſtenſum eſt [g] rationem rectanguli LMN ad VRS duplicatam eſſe eius, quam habet rectangulum OMP ad XRT, ac proinde prior ratio ſecũdam bis continet per multiplicationẽ. Similiter eſt demonſtratũ [h] rectangulum OMP ad XRT, duplicatam habere rationem eius quam rectangulum BMQ ad YRE rectangulum & conſequenter bis continet per multiplicationem prior ratio ſecundam. Quare patet rationem rectanguli LMN ad VRS, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli OMP ad XRT, quoties hæc continet rationem rectanguli BMQ ad YRE rectangulum.

[g] 136. huius.
[h] 137. huius.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1272] - 1215
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO CXL.

IIsdem manentibus:
Dico parallelepipedum constans basi rectangulâ L M N, & altitudine M R ad parallelepipedum ex basi V R S eademque altitudine M R quadruplicatam habere rationem eius quam continet parallelepi-



pedum ex basi rectanguli B M Q, & altitudine M R ad parallelepipedum sub basi rectanguli Y R E & communi altitudine M R.

Demonstratio.

DEmonstratum est a rectangulum L M N ad V R S rectangulum, quadruplicatam eius habere rationem, quam continet rectangulum B M Q ad Y R E rectangulum. sunt autem parallelepipeda sub hisce basibus & communi altitudine M R inter se vt ipsæmet bases. Igitur patet propositionis veritas. a 138. huius.

PROPOSITIO CXLI.

EAdem figurâ manente:

Dico rationem parallelepipedi, quod fit ex basi rectangulâ L M N, ad parallelepipedum ex basi V R S continere toties rationem parallelepipedi super basi O M P per multiplicationem ad parallelepipedum super basi rectanguli X R T, quoties ratio hæc per multiplicationem continet rationem parallelepipedi super basi rectangulâ B M Q ad parallelepipedum, quod fit super basi Y R E rectangulâ, modò eadem altitudo omnibus parallelepipedis inseruiat.

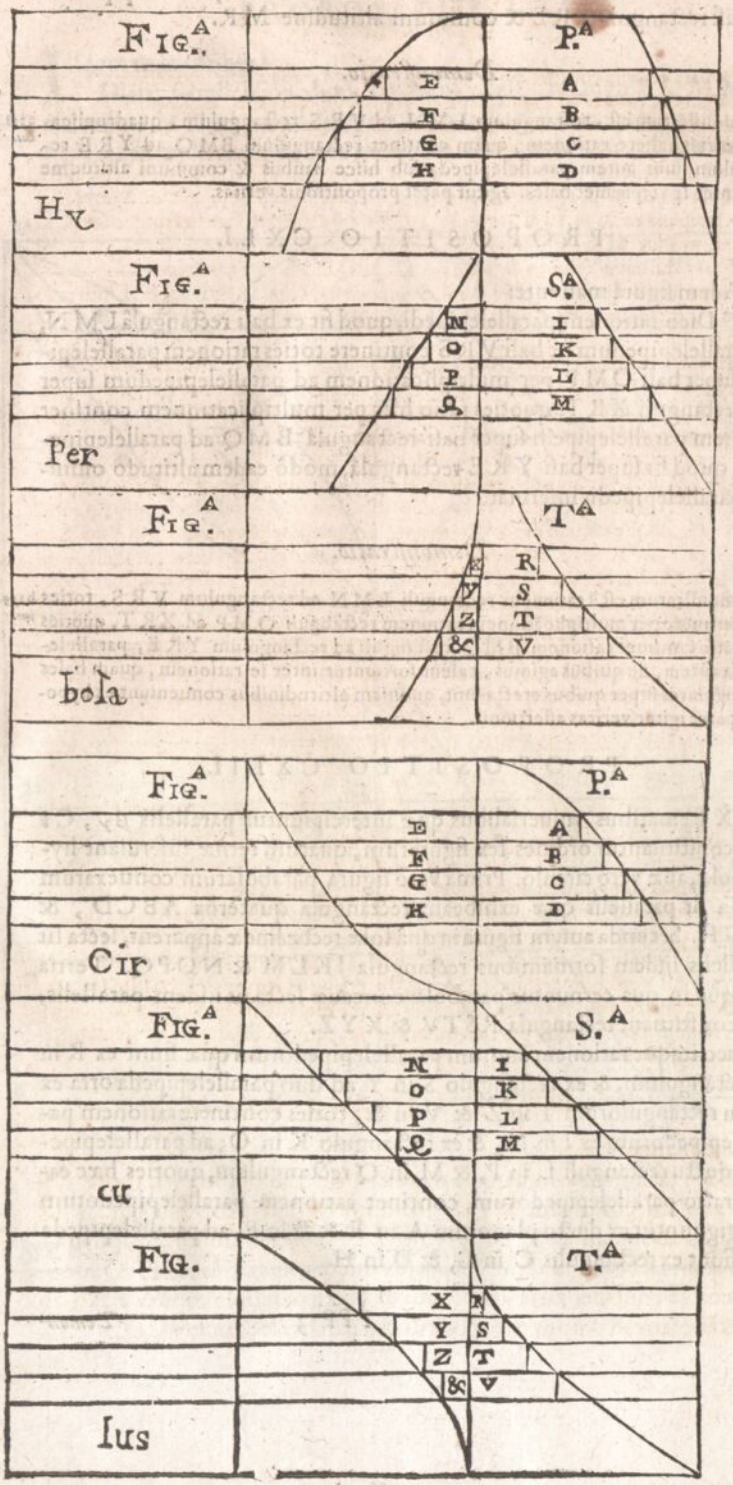
Demonstratio.

DEmonstratum est b rationem rectanguli L M N ad rectangulum V R S, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli O M P ad X R T, quoties hæc ratio continet rationem B M Q rectanguli ad rectangulum Y R E, parallelepipeda autem, de quibus agimus, talem sortiuntur inter se rationem, quam bases rectangulares super quibus erecta sunt, quoniam altitudinibus conueniunt ex hypothesi. patet igitur veritas assertionis. b 139. huius.

PROPOSITIO CXLII.

EX sectionibus vniuersalibus quæ intercipiuntur parallelis $\beta\gamma$, C δ constituantur ordines sex figurarum, quarum ternæ inseruiant hyperbolæ, aliæ verò circulo. Prima verò figura parabolarum conuexarum diuisa sit parallelis quæ exhibeant rectangula quaterna A B C D, & E F G H. Secunda autem figura in quâ solæ rectæ lineæ apparent, secta sit parallelis ijsdem formantibus rectangula I K L M & N O P Q. Tertia denique in qua cernuntur parabolæ concauæ secta sit ijsdem parallelis, quæ constituant rectangula R S T V & X Y Z.

Dico itaque rationem duorum parallelepipedorum quæ fiunt ex R in X rectangulum, & ex rectangulo S in Y ad duo parallelepipeda orta ex ductu rectangulorum T in Z & V in &, toties continere rationem parallelepipedorum ex I in N, & ex rectangulo K in O, ad parallelepipeda ex ductu rectanguli L in P, & M in Q rectangulum, quoties hæc eadem ratio parallelepipedorum, continet rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu planorum A in E & B in F, ad parallelepipeda quæ fiunt ex rectangulis C in G, & D in H.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1275] - 1218
PUBLIC DOMAIN

Demonſtratio.

RAtio parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z & V in &, eadem eſt [a] cum ratione parallelepipedi ex R in X ad T in Z, & R in X ad V in &, vlteriùs ex ratione parallelepipedi ex S in Y ad parallelepipeda ex T in Z, & V in &, per propoſitionem octauam huius libri. Simili modo ratio parallelepipedorum ex ductu I in N, & K in O, ad parallelepipeda ex ductu plani L in P, & M in Q, eſt eadem [b] cum ratione parallelepipedi ex I in N, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, ſimul cum ratione parallelepipedi ex K in O, ad L in P, & M in Q. Denique ratio parallelepipedorum ex ductu A in E, & B in F ad parallelepipeda ex ductu C in G, & D in H, eſt eadem cum ratione parallelepipedi ex ductu A in E ad parallelepipeda ex C in G, & D in H, ſimul cum ratione parallelepipedi ex B in F, ad parallelepipeda quę fiunt ex ductu C in G & D in H.

[a] 8. huius.

[b] Per eandē.

Sed ratio parallelepipedi ex R in X, ad T in Z, toties continet rationem parallelepipedi ex I in N, ad L in P, quoties hæc continet rationem parallelepipedi ex A in E, ad C in G, quod eodem prorſus modo oſtenditur quo illud in quadraturâ circuli propoſitionibus 37. & 38. & harum Corollario oſtenſum fuit; ſunt enim omnia ad hoc præſtandum in hâc etiam quadraturâ præmiſſa. Simili modo ratio parallelepipedi ex R in X ad parallelepipedū ex V in &, toties continet rationē parallelepipedi ex I in N, ad M in Q, quoties hæc continet rationem parallelepipedi ex A in E, ad D in H. Atque eodem modo de ratione parallelepipedi ex ductu S in Y ad T in Z, & S in Y ad V in &, oſtenditur, quod toties contineat rationem parallelepipedi ex K in O ad L in P, & K in O ad M in Q, quoties hæc eadem continet rationem parallelepipedi, quod fit ex ductu B in F, ad C in G, & B in F, ad id quod reſultat ex ductu D in H. Igitur patet quod ratio duorum parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad duo parallelepipeda ex T in Z, & V in &, toties contineant rationem parallelepipedorum quæ oriuntur ex ductu I in N, & K in O ad parallelepipeda quæ fiunt ex ductu L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu plani A in E, & B in F, ad parallelepipeda, quæ fiunt ex ductu C in G, & D in H. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

QVæ dicta ſunt præcedenti propoſitione de quatuor parallelepipedis ex planis A B C D in plana E F G H ductis, & reliquis; etiam ſunt intelligenda de quauis ſubdiuiſione rectangulorum eorundem per parallelas in partes æquales ad formanda parallelepipeda, prout in propoſitione requiſita fuerunt; de quibus ſemper fiet eadem illatio & conſequentia, quæ facta iam eſt, cùm demonſtrationis diſcurſus ſit vniuerſalis, eiuſdemque fundamenta ſemper occurrant iteranda. quare cùm illæ ſubdiuiſiones nihil noui inferendum adducant ab eo, quod iam demonſtratum fuit, ſed meram eorum repetitionem quæ præmiſſa ſunt, moleſtam intelligentibus contineant, hinc propoſitionem præcedentem de quacunque ſubdiuiſione demonſtratam liberè aſſumemus.

PROPOSITIO CXLIII.

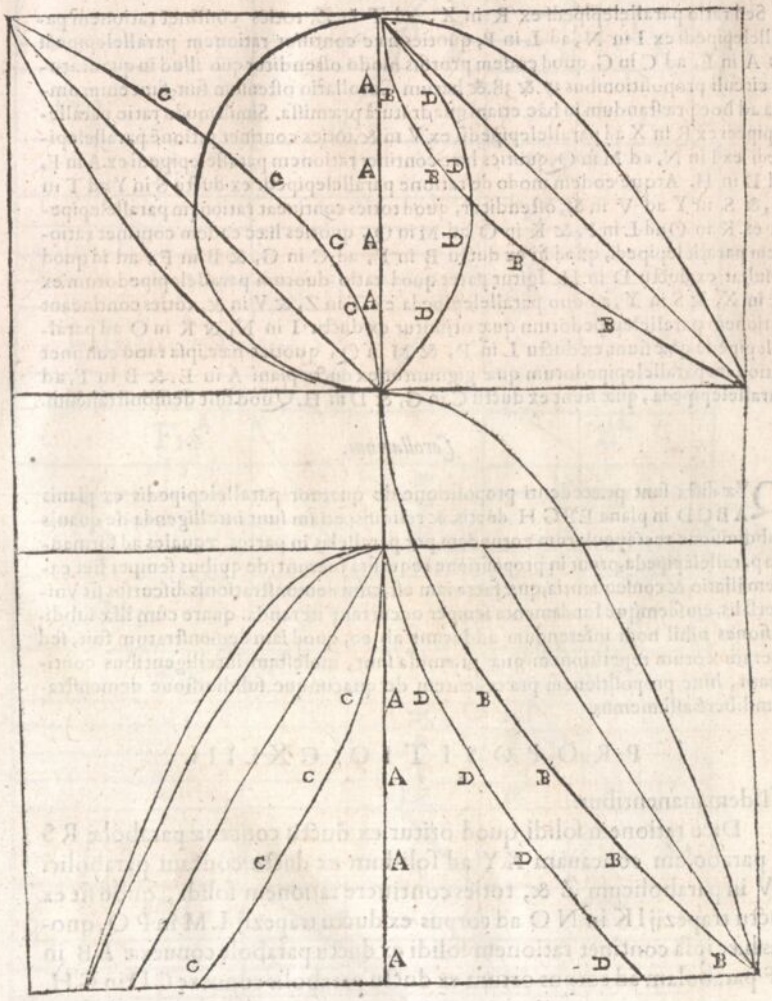
IIſdem manentibus:

Dico rationem ſolidi quod oritur ex ductu concauæ parabolæ R S in parabolam concauam X Y ad ſolidum ex ductu concaui parabolici T V in parabolicum Z &, toties continere rationem ſolidi, quod fit ex ductu trapezij I K in N O ad corpus ex ductu trapezij L M in P Q, quoties hæc ipſa continet rationem ſolidi ex ductu parabolę conuexæ A B in E F parabolam ad corpus ortum ex ductu parabolæ conuexę C D in G H.

Demon-

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt præcedenti propoſitione eiuſq; Corollario, quod ratio medietatis figurarum inſcriptarum tertio ſchemati ad alteram medietatem figurarum inſcriptarum, toties contineat rationem medietatis figuratum ſecundo ſchemati inſcriptarum ad alteram ſuam medietatem, quoties hæc ipſa ratio continet rationẽ medietatis figurarum primo ſchemati inſcriptarum ad ſuam reſiduam medietatem; & quia hoc ipſum ſemper fieri poteſt, igitur per propoſitionem vniuerſalẽ libri de ductu plani in planum, quadrageſimam ſcilicet ſextam; etiam ratio ſolidi ex R S parabolico in X Y parabolicum, ad ſolidum ex parabolico concauo T V in Z &, toties continet rationem ſolidi ex trapezio I K in N O trapezium, quoties hæc eadem ratio continebit rationem ſolidi ex ductu parabolici conuexi A B in E F, ad ſolidum ex ductu parabolici C D in conuexum parabolicum G H. Quod fuit demonſtrandum.



PROPOSITIO CXLIV.

REsumatur figura similis illi quam propositione 133. huius exposuimus & inter AC, AB ponantur mediæ proportionales AD iuxta tenorem propositionis 131. huius libri, erit parabola DD.

Dico figuram parabolicam AD ductam in se, æquari figuræ AB, ductæ in AC.

Demonstratio.

CVm enim ex hypothesi AB, AD, AC sint in continuâ, ergo vt patet ex propositione vniuersali quadragesimâ quintâ libri de ductu plani in planum, quantitas AD in se ducta solidum producet, quod æquetur magnitudini solidæ, quæ conficitur ex duarum superficierum BA & AC mutuo inter se ductu. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

POrrò corpus ortum ex ductu figuræ parabolicæ BA in figuram parabolicam AC ad parallelepipedum reductum esse patet, cùm solidum quod nascitur ex ductu parabolæ AD in se, quodque corpori isti in propositione ostensum est æquale, ad parallelepipedum reduxerimus. Nam DA in se ductum est inuolucrum solidi quod remanet ex cylindro parabolico post ablatam vngulam, est autem & cylindrus parabolicus[a] & vngula[b] cubata. ergo & solidum illud residuum cubatum est. Quare cùm illud solidum residuum cum suo inuolucro conficiat prisma rectilineum, ipsum quoque inuolucrum erit cubatum. sed DA in se ductum est inuolucrum illius residui. Ergo DA ductum in se est cubatum. Quæ verò de totis illis superficiebus in se vel in se mutuo ductis demonstrata sunt, eadem etiam non dissimili ratione de illarum partibus à parallelis lineis DBAC, CABD interceptis, demonstrantur.

a *Per 82. de cylind.*
b *99. de cylindr.*

PROPOSITIO CXLV.

REsumptâ hypothesi priori in scemate constituantur AB, CD, EF ad angulos rectos ad communem axem GH, occurrentes sectionibus parabolicis in I, M, V; N, O, Y; B, D, F; & hyperbolæ in γ, δ, λ; & subtensis PT, RX, in P, Q, T; R, S, X. *Vide figuram pag. 1222.*

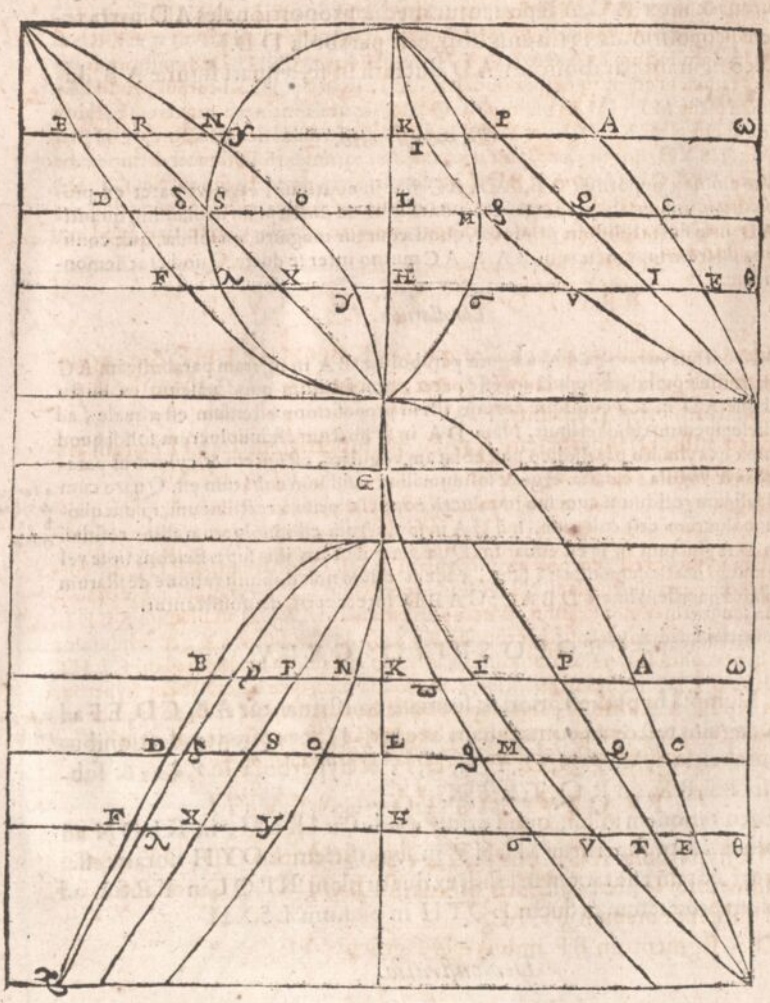
Dico rationem solidi, quod oritur ex ductu IKLM, in KLON ad solidũ ex ductu superficiei MLHV in superficiem LOYH notam esse: insuper notam esse rationem solidi ex ductu plani KPQL in KRSL ad solidum productum ex ductu LQTH in planum LSXH.

Demonstratio.

OStensum est[c] cui parallelepipedo æquetur corpus ex ductu mutuo planorum IKLM in KLON, quemadmodum etiam de corpore ex ductu MLHV in superficiem LOYH. Insuper ostensum est[d] cui parallelepipedo æquetur solidum ex planis KPQL & KRSL in se mutuo ductis, & eodem modo cui æquale sit solidum ex superficiebus LQTH & LSXH inter se ductis. Quare, cùm nota sit ratio parallelepipedorum inter se, nota quoque erit ratio corporum, de quibus agit propositio. Quod erat ostendendum.

c *Per Goroll. 144. huius.*
d *Ex 5. de duct.*

PROPOSITIO CXLVI.



Iisdem positis:

Dico rationem solidi ex ductu plani AKLC in planum KBDL ad solidum ex ductu CLHE in planum LDFH, notam habere rationem.

Demon.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [a] notam eſſe rationẽ ſolidi quod oritur ex ductu IKLM in KLON ad ſolidum ex ductu ſuperficiei MLHV in ſuperficiem LOYH. Simili modo demonſtratum eſt, [b] notam eſſe rationem ſolidi ex ductu plani KPQL in KRSL ad ſolidum productum ex ductu LQTH in planum LSXH. Demonſtratum verò eſt, [c] rationem corporis orti ex ductu KIML in KNOL ad corpus productum ex ductu plani MLHV in planum LOYH, toties continere rationem corporis orti ex ductu plani KPQL in KRSL ad ſolidum, quod fit ex ductu QLHT in planum LSXH, quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi, quod oritur ex ductu plani AKLC in planum KBDL, ad corpus factũ ex ductu ſuperficiei CLHE in ſuperficiem LDFH. Quocirca cùm notæ ſint rationes, quæ ſunt inter duo prima corpora, & duo ſecunda, etiam nota erit ratio, quæ eſt inter duo tertia. Quod erat demonſtrandum.

[a] 145. huius.
[b] Ibid.
[c] 143. huius.

PROPOSITIO CXLVII.

IIſdem manentibus: fiant rectangulis AKB, CLD, EHF, &c. æqualia rectangula ωKγ, ηLδ, θHλ, &c. erit quidem γδλZ hyperbola per Corollarium prop. 129. huius.

Dico inſuper ſuperficiem Kγδ L ad ſuperficiem Lδλ H notam habere rationem.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [d] corpori ex ductu plani AKLC in planum KBDL ad corpus ortum ex ductu plani CLHE in ſuperficiem LDFH notam habere rationem. ſed etiam demonſtratum eſt [e] corpori ex ductu AKLC in planum KBDL, æquale eſſe ſolidum ex baſi hyperbolicâ Kγδ L, & altitudine ωK; & ſolidum ex baſi hyperbolicâ Lδλ H, & altitudine ηL, æquale eſſe ſolido ex ductu plani CLHE in planum LDFH. Igitur etiam inter duo ſolida hæc, quæ baſes habent hyperbolicas Kγδ L, & Lδλ H, & communem altitudinem, ratio nota erit; ac proinde etiam inter ipſas baſes erit nota ratio, cùm hæc corpora demonſtrata ſint eam habere rationem, quam ipſæ baſes continent. Quod erat propoſitum.

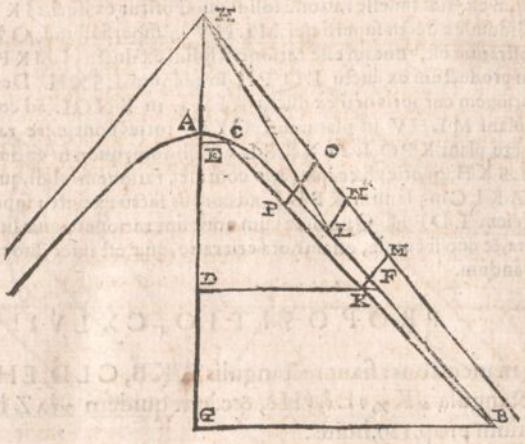
[d] 146. huius.
[e] 130. huius.

PROPOSITIO CXLVIII.

SIt hyperbolæ ACB axis AG, ex quo aſſumptis GD, DE æqualibus inter ſe, & conſtitutis ordinatim BG, FD, EC ponantur BF, FC ſubtenſæ arcuum BF, FC.

Dico ſegmentum BF minus eſſe ſegmento FC.

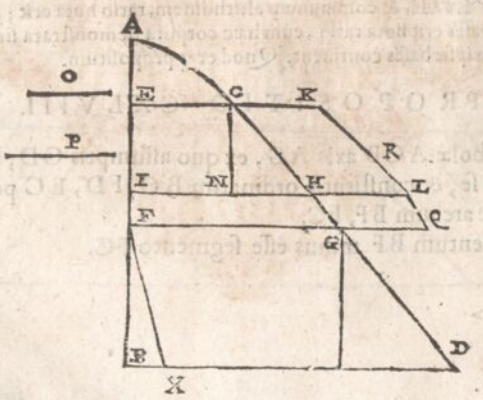
Demonstratio.



a 19. *hyperb.* Ducta enim BC ponatur eius diameter HLK[a], quæ diuidet bifariam rectã BC in puncto K in quo FD occurrit EB, quare punctum L in quo diameter secat hyperbolam, est inter CE, DF ordinatim positas ad axem HC, cùm priùs diameter debeat occurrere sectioni, quàm ordinatim positis intra hyperbolam. Ductis igitur CL, LB, erunt[b] segmenta CL, LB inter se æqualia, est autem LB segmentum maius segmento FB, ergo etiam segmentum CL maius est segmento FB, ac proinde segmentum CF multò maius erit FB segmento. Quod fuit demonstrandũ.

b 106. *hyperb.*

PROPOSITIO CXLIX.



OPorteat tandem hyperbolę rectilineum æquale exhibere.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

SIt hyperbolę ACDB, cuius axis ſit AB. Ducantur ad axem ordinatim rectæ CE, GF. DB, quæ æquales axeos partes EF, FB intercipiant, quoniam verò nota [a] eſt proportio ſegmenti CEFG ad ſegmentum GFBD, ſit ea O ad P, & producantur FG, EC, in K & Q, vt CE, GF, ſint ad KE, QF, vt O ad P: Tum per A, K, Q deſcribatur hyperbola, cuius axis ſit AB: erit igitur [b] tam hyperbole AQF ad hyperbolem AGF, vt QF ad GF, hoc eſt vt P ad O; & hyperbole AKE ad hyperbolem ACE, vt KE ad CE, hoc eſt, vt P ad O. Quare etiam reſiduum ſegmentum KEFQ erit ad ſegmentum reſiduum CEFG, vt P, ad O, hoc eſt vt ſegmentum GFBD ad idem ſegmentum CEFG. ſegmenta igitur KEFQ, GFBD æqualia ſunt. Ducantur deinde ſubtenſæ KQ, CG, GD. ſegmentum CG maius eſt [c] ſegmento GD, ſed ſegmentum KQ maius eſt ſegmento CG, vti facilè demonſtrabitur ex 175. libri de hyperbolâ. Ergo ſegmentum KQ multò maius eſt ſegmento GD. Abſcindatur igitur ex ſegmento maiori KQ ſegmentum KR æquale ſegmento GD. erit ergo figura hyperbolica quæ arcu QR & ſubtenſis RK, QK continetur, exceſſus ſegmenti KQ ſupra ſegmentum GD. Iam verò quia ſegmenta KEFQ, GFBD oſtendi eſſe æqualia, quo exceſſu ſegmentum KQ ſuperat ſegmentum GD, eodem à trapezio GDBF ſuperatur trapezium KQFE. exhibeatur ille per elementa, ſitque triangulum FXB. Erit ergo figura hyperbolica contenta arcu QR & rectis RK, QK æqualis triangulo XFB. ducatur demum ſubtenſa QR, & rectangulo RKQ, auferatur ex triangulo XFD pars æqualis, rectilineum reſiduum æquabitur reſiduo ſegmento hyperbolico QR. quod ſufficit ad hyperbolæ quadraturam.

[a] 147. huius.

[b] 175. hyperb.

[c] 148. huius.

FINIS.



EPILOGVS
AD
LECTOREM.

HAbes, amice Lector, conatus noſtros, qui ſi tibi arridét, vtere & fruere; ſin minùs, per me licet illis vt demas vel addas, prout ad Matheſeos culturam opportunum iudicaris, quæ verè abyſſum ſcientiarum complectitur, quod nõ ignorauit, qui Deum Opt. Max. omnia opera ſua in pondere, numero & menſura perfeciſſe diuino oraculo enuntiauit. Scaphulam concinnare tentaui, quâ vaſti Oceani noua littora legerem, Tu Argonauticam para, vt noſtræ imbecillitati opem præſtes, quâ fretus alto te credas Pelago quod ex harum lucubrationum lectione tibi patere non inficiaberis. Comminiſci debui noua quidem elementa, non ita tamen, quin ea communis Geometriæ principijs ſancirem vel Archimedeæ doctrinæ conformia efficerem. Memineris rogo ſi quæ minùs placent, ea non ita explodere, vt poſteris animos tollas aliquid audendi, quod ad Geometriæ nomen cõferre eis videretur. Ordinem & Methodum rerum quas hîc inuenies non ita exactam reperies, quam res poſtulat: ſed rerum copia rarò concinnitatem illam admittit, quam rerum dignitas exigit. Et ſecundę cogitationes maturæ magis ſunt, quæ ad incudem malè tornata reddere ſolent. Reſiduus liber fuit quem hiſce adiungere decreueram, qui materiam proſequeretur ductuum planorum in plana ſed in orbem; eum, ſi vita comes fuerit, in aliam occaſionẽ reſeruamus. omiſſæ ſunt quoque omnes ſpeculationes quæ aliâ viâ quàm quæ proportionalitates implicat, circuli & hyperbolæ tetragoniſmos exhibere poſſent, quarum accuratiorem tractatum in aliud quoque tempus differimus, boni interim conſule quæ amicorum importunitas & Superiorum imperium publici iuris fieri voluerunt. Cedant autem hæc omnia

Ad Maiorem Dei Gloriam.

ERRA.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1283] - -
PUBLIC DOMAIN

ERRATA.

Libro Primo de lineis.

pagina.	linea		lege	
2		34 tertij	35	tertij
2		Sexti		tertij
2	penult.	secundam		Secundùm
3		36 Sexti	17	Sexti
4		34 tertij	35	tertij
4	6	GF		GE
10	1	CB		CD
11	1	CB		CD
14	1	CB		CD
13	24	ZB		ZP
14	31	MK ad NL		NL ad MK
31	5.a fine	ABE		BAK
35		in prop. 32. vbi est B debet esse C & contra.		
37	16	CD		CG

Ad propositionem 84. libri primi ponatur sequens constructio.

DAta sit ratio E ad F, & fiat rectangulum aliquod GIK quod ad rectangulum L I M eandem habeat rationem cum ratione E ad F, hoc facto ponatur ex I, recta I S, orthogona ad G M diuidatur K G bifariam in O erigaturque O T parallela I S. Deinde fiat vt rectangulum K I G ad quadratum I O, ita linea I P ad P S, ducta deinde S T quæ æquidistet I G & bisecta L M in V ponatur V X parallela P S. Denique fiat vt linea I P ad P S, ita rectangulum L I M ad quadratum aliud, ponaturque latus huius quadrati medium inter I V vel S X & rectam S R & ex P, per punctum R ducatur P R. Dico T Z lineam esse diuisam vt postulatur diuidi A B. Demonstratio huius pendet à parabolâ vt ipsa figura docet.

Libro Secundo.

pag.	linea		lege	
62		in fig. Coroll.		F pro B.
78	2	trium		duarum
112		omissum est H inter G & I in figura		
114		in figura inter B & H habeatur K pro E.		
116	4	C		G.
116		ommissum est C inter E & K in figura		
118	6	KB		HB
118	penult.	allatis		ablatis
119	3.a fine	AK		BK
127	1	NR		NO
134	2	B		V
140	4	omittendum est per.		
142	penult.	NK		MK
149	multis	AF		AG
154	4	fieri		seriei
159	14	Xβ		αβ
161	9.a fine	AL		AF
162	penult.	AB		HB
165	8.a fine	AO		HO

Libro Tertio.

pag.	linea		lege	
172	5	FGH		GFH
172	vltima	HL		HI
176	46	linem		lineam
176	53	HI		H
183	5.a fine	PH		LH
187	8	DA		BA

pag.	linea		lege	
187	16.a fine	AB		AE
190	9	omittendum est B.		
199	3	DB, DE		AB, AE
199	2	per E E		per E X D D.

Libro Tertio.

pag.	linea		lege	
202	2	AD, FC		ADFC
211	8	DE		DB.
211	2	ADC		AGC
211		in figura ponatur F loco E & contra		
212	10	GC		FC
213	7	AD		AC
215	6	triplicata		duplicata
217	1	IAF		AF
221	antepen.	EF		DF.
224		in figura F pro E & contra.		
232	12.a fine	sic vt		suntque
233	1	AI		HI
233	21	AG		BG.
236	18	omitte L.		
239	1	MK		NK
239	1	E		M.
239	10.a fine	ABC		ACB
239	10.a fine	FLH		FLG.
239	penult.	angulo		angulus

Libro Quarto.

pag.	linea.		lege	
245	7.a fine	PM, EM		PME, AIK
247	3.a fine	BC		BE
248	14.a fine	ducantur		producatur
249	25	BA		HB.
250	4	BM		DM.
250	10	B		G
251	13	deleatur F		G.
257	3.a fine	EH		ED
259	3	AOE		AQE
259	21.a fine	EG.		AC
261	7.a fine	DEC, DEA		DEC, GEC
263	16.a fine	KC		HC
266	13	FG		FB.
267	2	GBL		GBI.
267	3	EG		FG.
270	23	AH		AC
271	6. a fine	GFB		GFD.
272	8. a fine	DC		DE
273	5	lineæ deleatur		
274	8.a fine	FEI		HEI
277	15	LM		EF
278	9. a fine	EC		EG
279	9	DHG, BHC		DHE, GHC
279	9	CH, HE		CH, HG.
281	13. a fine	EHK ad LHE		IHK ad LMN
286	3	CD		CB.
287	5	FG		EG.
287	6	CK		GK
287	16	CD		AD
288	13	maior		minor
290	10	FF		EF
291	3	AC		AD
294	14.a fine	EF, GH		AB, CD
295	13	GHF		AE
295	14	BC		FC
296	12	diameter		diametro
303	11	LHM		LEM
309	17.a fine	ECD		EGD
310	3.a fine	DHE		GHE.
311	3	AHD		AHE
313	23	FI		FE
316	19	DBBE, EFFE		DBDE, EFFD.
318	6.a fine	D		G.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1284] - -
PUBLIC DOMAIN

ERRATA.

pag.	linea		lege
320	13	HP	HN
324	7	AGK	AGC
327	5	occurrant	occurrat
328	3.a fine	AB	ADC
329	24.a fin.	FG	FC
329	17.& 2.	deleatur DA	
330	5.a fine	cuius axis, supple,	AC.
335	8	BE	AI
335	15.a fine	dele EF.	
336	8	BC	BG
338	17	EL	FL
338	1. Cor.	ABD	ABC
339	17	sine	sine
344	3	C.	O
346	6	ADF	DF
346	6. a fine	deleatur tam	
347	9	E	I
349	4	FG ad FE	FE ad FG.
351	8	KFQ	KNQ.
351	14	BEC	BED

Libro Quinto.

pag.	linea		lege
359	7.a f. & 5	BH ad BE	DH ad DE.
363	4. a fine	BD	AD
364	1	AF	AE
365	7	dele quadrati	
369	3	CEI	CBI
370	15	EBA	EBF
373	4	AC	BC
379	6	BF	BE
		& 1.Corol.	FB. lege CB.
385	1	IAK	AIK.
385	3	DML ad IAK	AIK ad DML
397		in figura est G.	loco F & contra.
418	4	TSX	TSY
435		in figura est E.	loco F & contra.
438	1	C.	G.
440	8.a fine	FDB	FDG.
444	2.Cor.	AF & FB	BF & FD
		& in 3. AF	BF
448	2	supple æqualis	
449	17.a fine	AC	AG

454. in propos. 25. diuisam in CEID. lege C & D. & paulò post quadratum AEC lege AC.
454. 3. a fine bisectis in LELN lege in L & N.
454. penultima NK deleatur
454. ex G duæ normales ad AB lege ex G. duc. normales
455. linea 3. parallelam ad KB. lege AB.

454	12.a fine	GPM.	GPN.
459	14	B.	H
464	11	FE	FC
467	12	DF	DE
		& 20.AC	BC
471	1	BCN æqualis K.	BCG æqualis H
472	9. a fine	ABC	AC
482	19.a fine	AF	BF
483	3.a fine	AG	BG
484	13	AD	BD
487	18	supple ellipsis ad	ellipsim FBG.
494	3	AD, AE, AF, AG	AE, AF, AG, AC
500	9	DK, RQ	KQ, LR
505	3	FE	BE
506	5	D	A
508		vbi est E.	intellige D.
521	9	NSQ	NRQ.

Libro Sexto.

pag.	linea		lege
528	7	AB.	BC & contra.
535	10. a fin.	rectanguli	rectangulum
536	11	SB.	SV
536		in figura est G. loco A & E. loco F.	

pag.	linea		lege
537	8.a fine	FI	FL
546	9.a fine	CG, FH	GF, HI.
547	16.a fine	DE, DH	ME, MH.
553	18	BIF	BIE
555	8	&	cum
557		Q	N.
560	2.a fine	KB.	KL
563	8	EB.	EC
565	19	ED	CD
576	7. a fine	EH	EG.
580	10	EF	IC
585		in fig. est D. pro B.	
586	17	LE	LI
598	5. a fine	FGHC adde	NOFG
601	13. a fine	PG.	PQ
607	11	EC	EF
607	5.a fine	linea supple NA	
615	12	MC	MQ
616	2	BC	AC
618	15.a fine	FAH	KAH
618	10.	Dele ratio	
625	13	BR	PR
626	16.a fine	ZQR	ZIR
629	1	AGB	AIB
629	4	GHI	FLI
631	11.a fine	FK	GK
634	12	BF	BD
637	26	HC	HE
640	23	DH	EH
641	12.a fine	GG	GI
643	20	PN	PP
646	21	SK	IK
649	17.a fine	FE	FG
649	2	HL ad HL	HG ad HG
657	11.a fine	IB.	BC
657	10.	ICC	CC
661	8.a fine	parabola supple quæ	
666		RQ	RG.
668	4	KK	HK
668	6	PHKH	PHK
668	12.a fine	RIQ	RXG.
669	3.a fine	GD	GB.
670	11.a fine	PHKA	PHKH.
674		in figura E pro F	
682	2	sit	sic
683	18	&	ex
683	10.a fine	AK, AL	AB, AH
684	15. a fine	LAMQ	LAM
685	24.a fin.	spira	supple AC
686	8	GEGC	GEQC
686	2.a fine	ABE	ABK

Libro Septimo.

pag.	linea		lege
706	16.a fine	distinctionem	definitionem
707	25.	ipsius	ipsis
710	2	PM	PMG.
710		in figura N	loco μ. nec Z bene
713	5	GNA	GNH
719	3.a fine	ductum	supple in
724	8	in se	supple est
725	13. a fine	TR	OR
726	14	circulus	circulum
726	16	superficem	superficiem
729	8	STV	PQR
729	21	corpus	corporis
731	13. a fine	incipiendo ab ita, dele vsque ad assertionem.	
733		Propositiones 40. & 41. ponuntur eodem numero quo priores.	
734	9.a fine	BKA	RKA
735	1.a fine	altitudinibus	altitudinis
736	4. Sch.	ZY	ZV
737	15.a fine	HPE	HEE
739	10.a fine	KK	KF
741	9.a fine	AHI	GHI.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1285] - -
PUBLIC DOMAIN

ERRATA.

pag.	linea		lege
743	1	BAG	BAD.
746	pr.54.	L	G.
753	7	DA	BAL
753	5.a fine	continentes	contingentes
759	15	DP	DB.
763	10	GHF	GH
765	4	AC	AG.
768	21	LE	CE
772	pr.101	K	E
772	2.a fin.	BK	DK
774		in figur.N loco H	ſuo autem loco N non habetur
775	1	fore	ferè
776	10.a fin.	ſint	ſunt
778	13	HIF	HI
786	19	FNP.	HNI
788	5.& 3.a fi.	LA	GA
788	4	LD	GA
789	17.a fine	MM	PQ
789	8.a fine	NI	NILI
793	4.a fine	CD	DI
794	13.a fine	HB	HG.
842	2.a fine	dele EL	
843	7.a fine	lineæ	lineis
856	8	bifariam	tiifariam
859	9.a fine	HO	HK.
859	8.a fine	HO	HK.

Libro Octauo.

pag.	linea		lege
892	6	CD	D C
900	15	A ad B.	dele ad B.
906	17	K.	G.
908	1.à fine	AE	AB.
909	1	A	B
923	17	GE	FC
926	18	CD	D
934	9.a fin.	D	DI
941	6	E	C

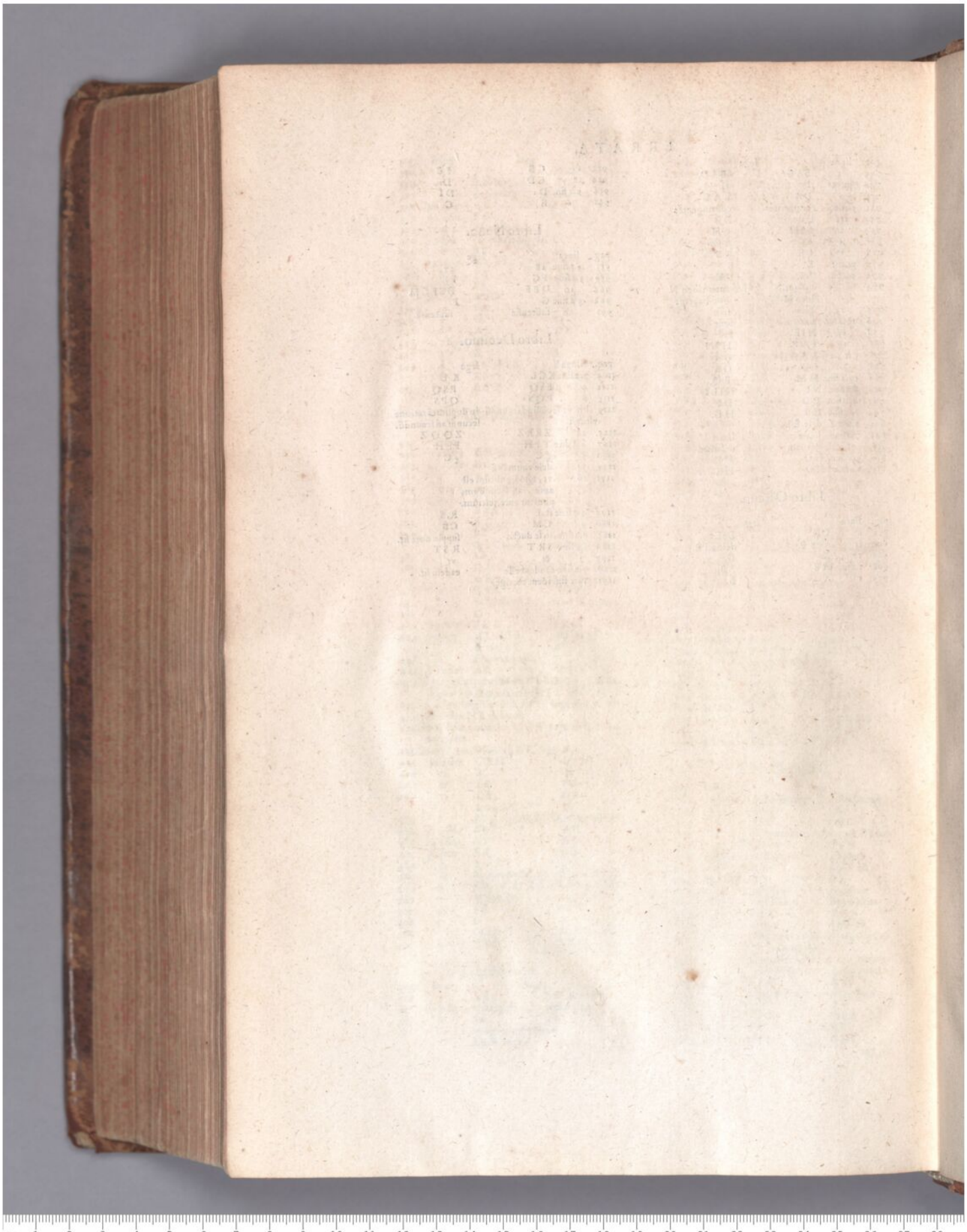
Libro Nono.

pag.	linea		lege
955	3.a fine	28	27
959	3.a fine	FG	FE
964	10	DBF	DBFCM
964	3.a fine	G	F
991	20	ſubtenſia	ſubtenſæ.

Libro Decimo.

pag.	linea		lege
1109	7.a fine	KCL	KL
1112	4	BSQ	PSQ
1115	6	PQS	QPS
1119	lin. vt ſecũdi ad ſecundũ vltimâ		in duplicatâ ratione ſecundi ad ſecundũ.
1125	14	ZRRZ	ZQQZ
1127	4.a fine	TPH	FPH
1130	5	ꝯC	ꝯC
1139	15	dele vnum Nꝯ	
1171	16	vt, quod poſitum eſt ante, ad ſecundum, ponatur ante, tertium.	
1173	4.a fine	R,L	R,S
1180	9	CM	CB
1185	6.a fine,	in ſe ductis	ſupple nota ſit.
1186	5.a fine	SRT	RST
1187	7	&	vt
1189	7.a fine	eandem eſſe	eadem ſit.
1191	14.a fin.	idem corrige.	

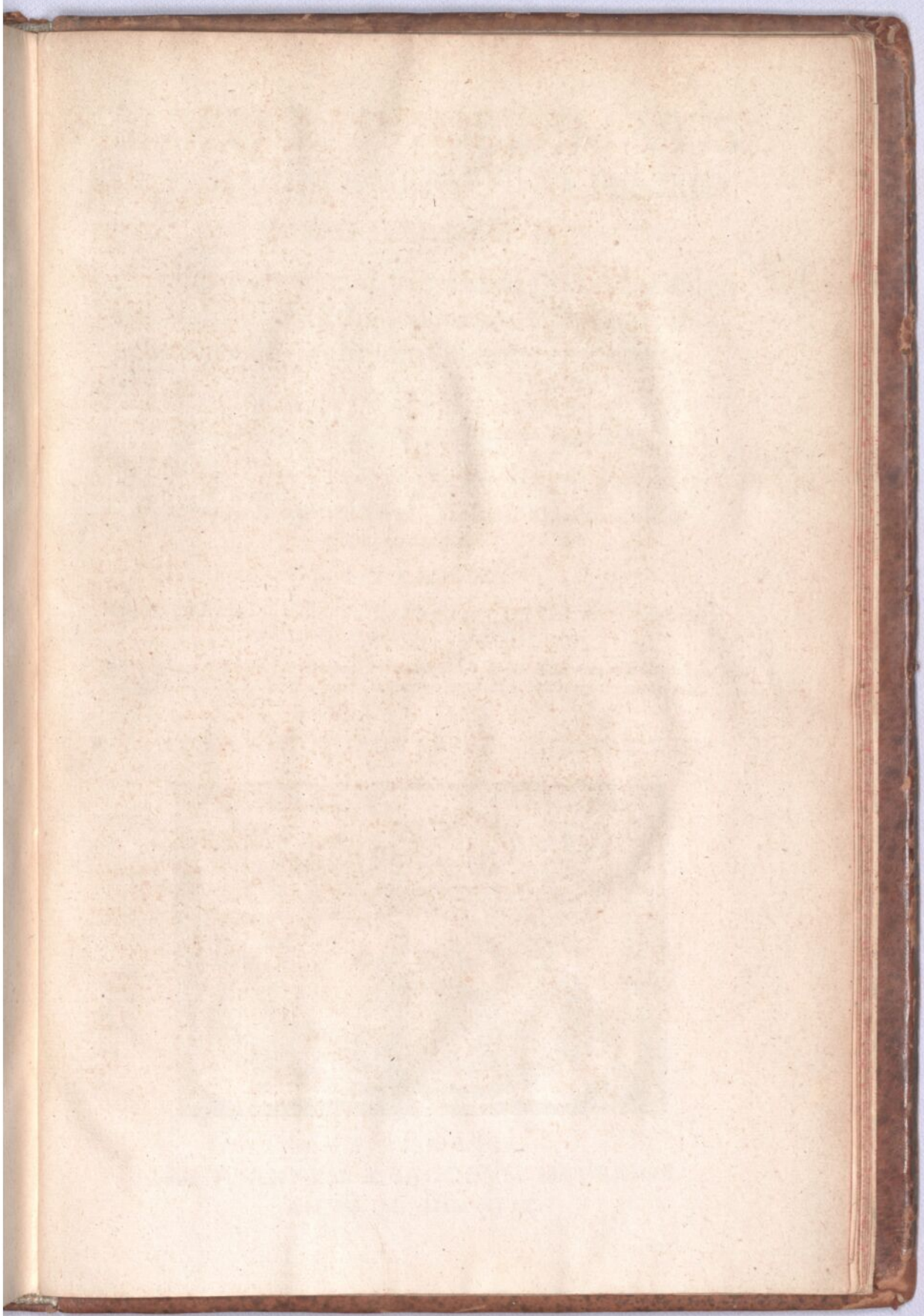
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1286] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1287] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1288] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

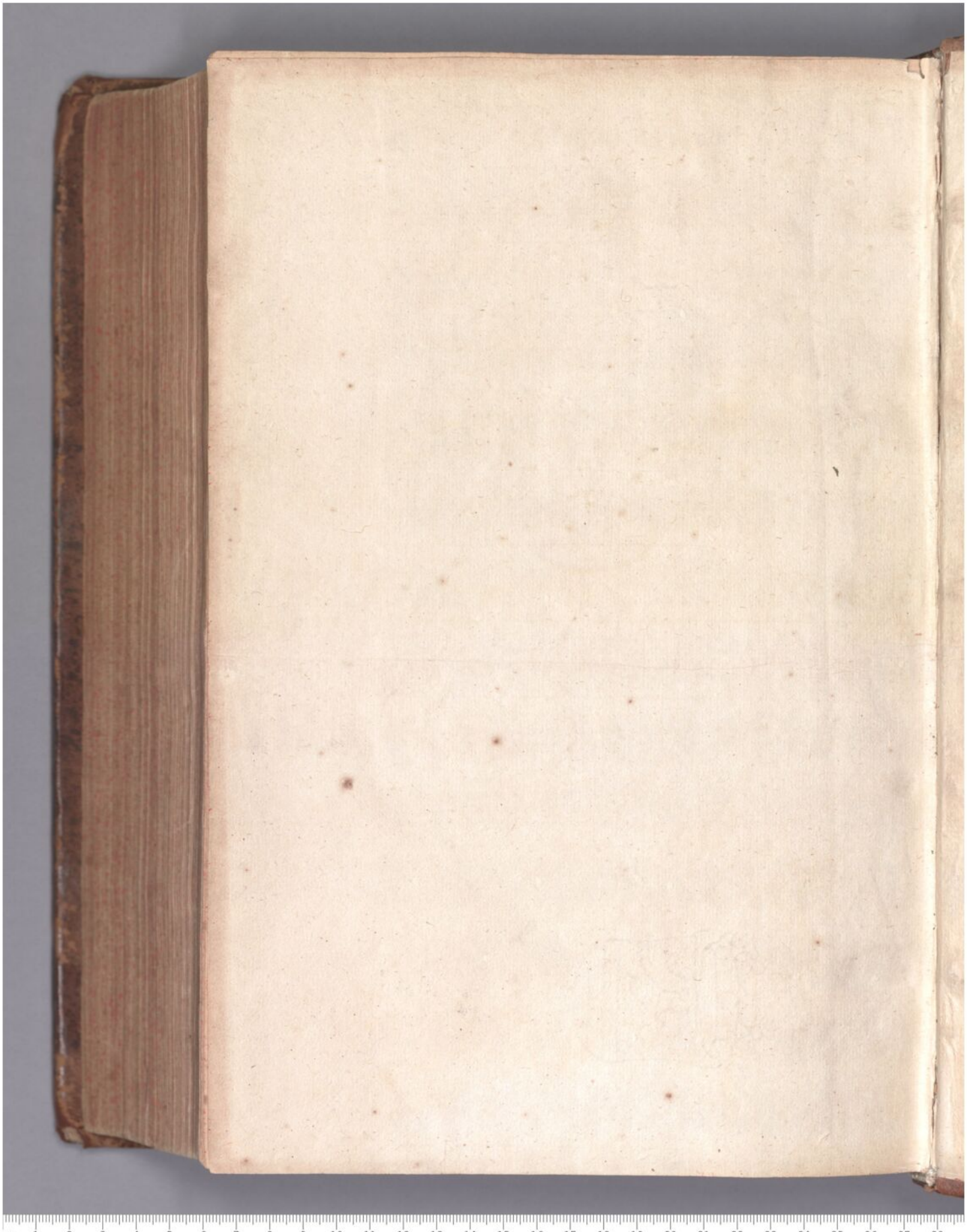
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1289] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1290] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1291] - -

PUBLIC DOMAIN

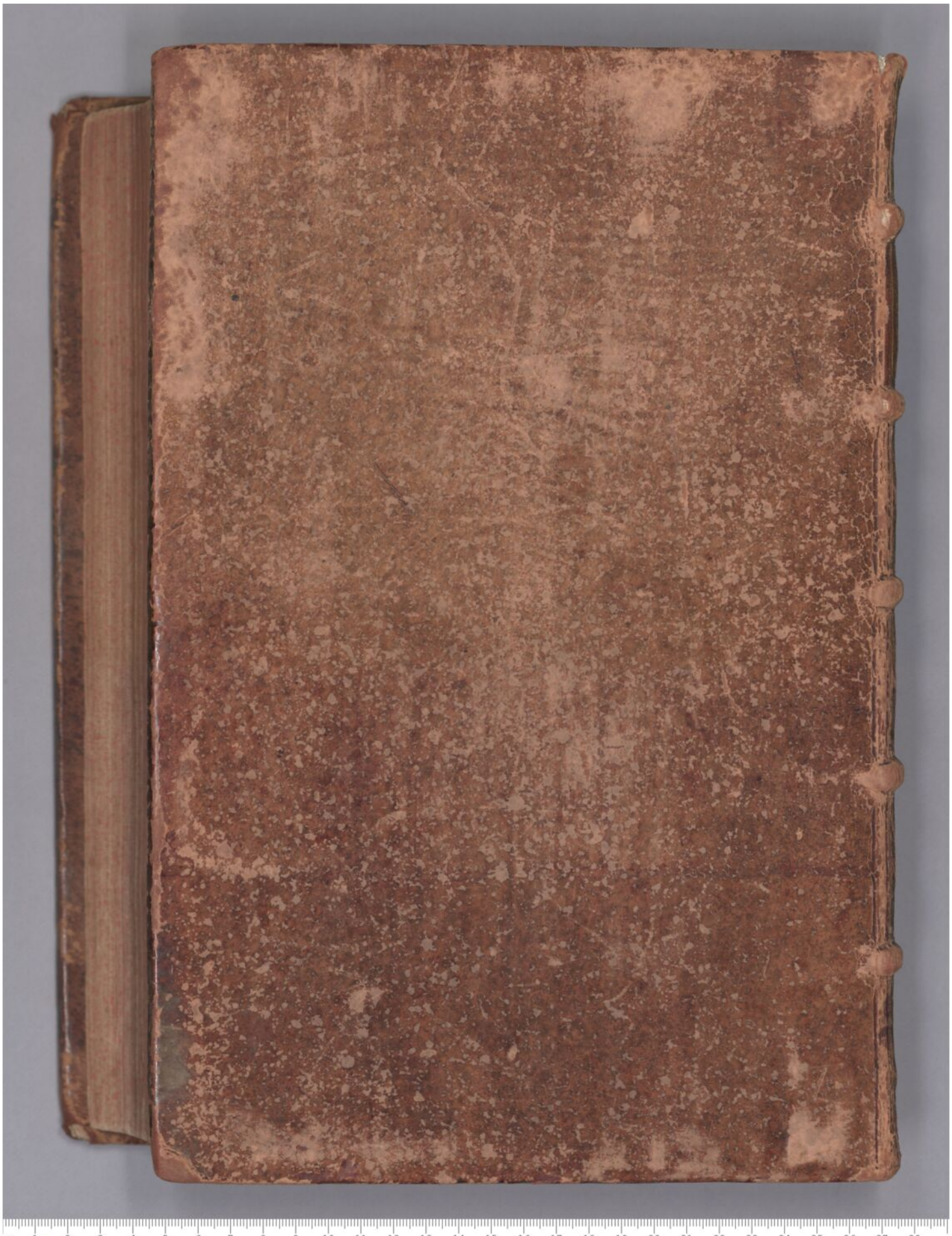
GWLB Hannover 35
036 856 525

317

IV 65, 317
2°

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

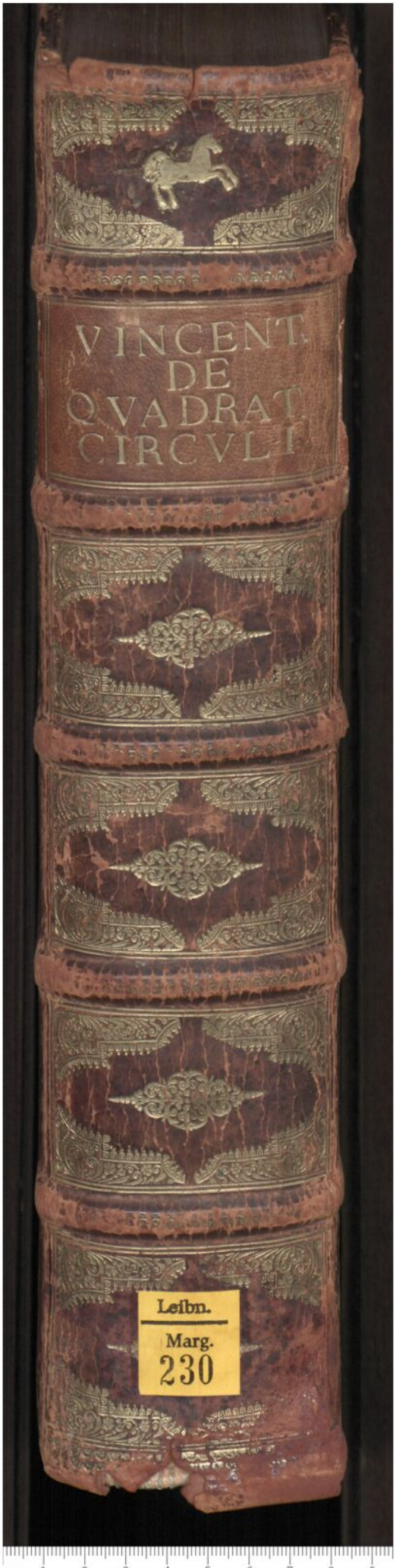
Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1292] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1293] - -

PUBLIC DOMAIN



Signatur: Leibn. Marg. 230, Stück 1, [1294] - -
PUBLIC DOMAIN