Leibn.
Marg.
103

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [1] - -

PUBLIC DOMAIN

B 159.

Leibn. Marg. 103

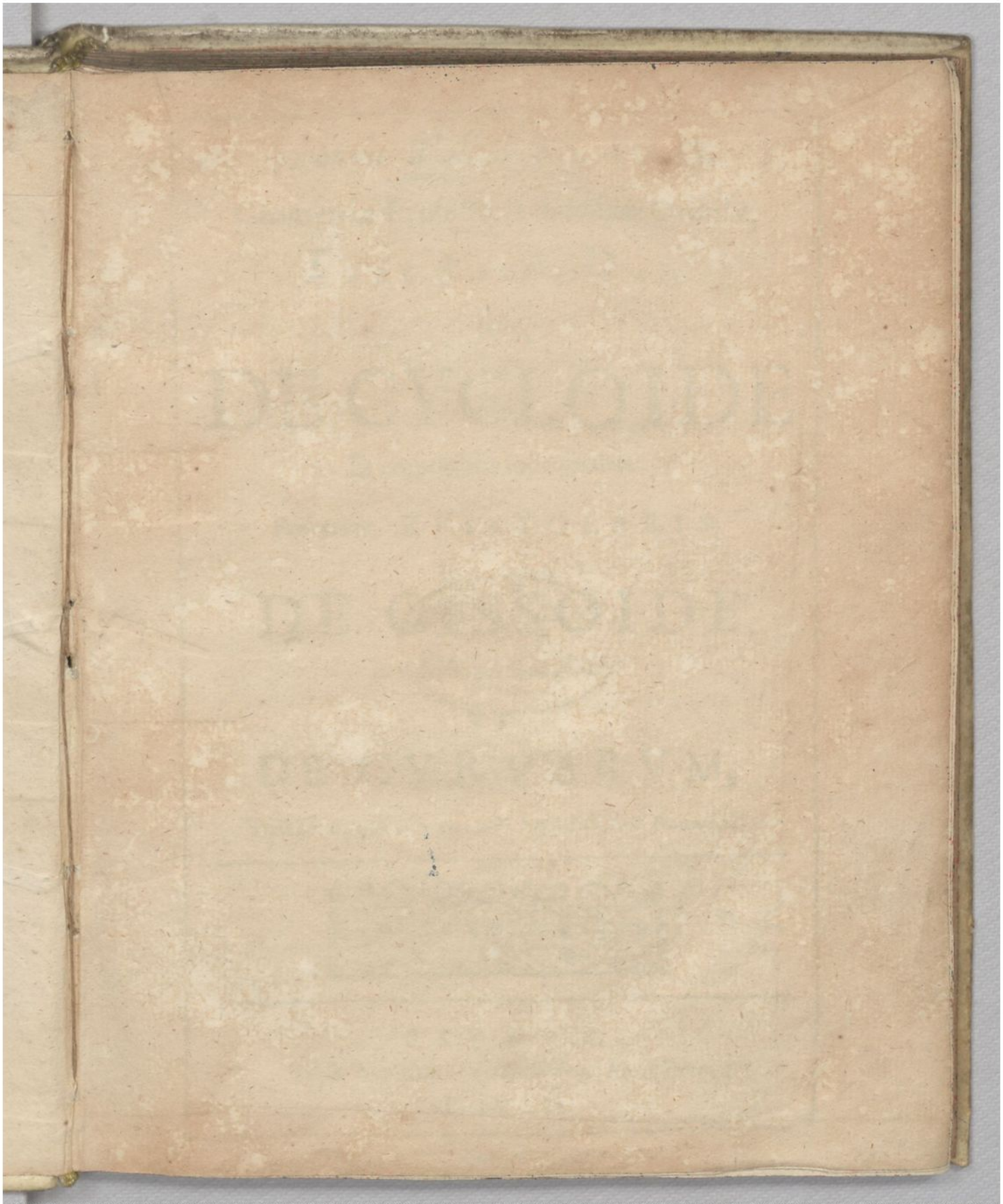
Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

Leibn. S. 1 a. Taf. (2)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [2] - -

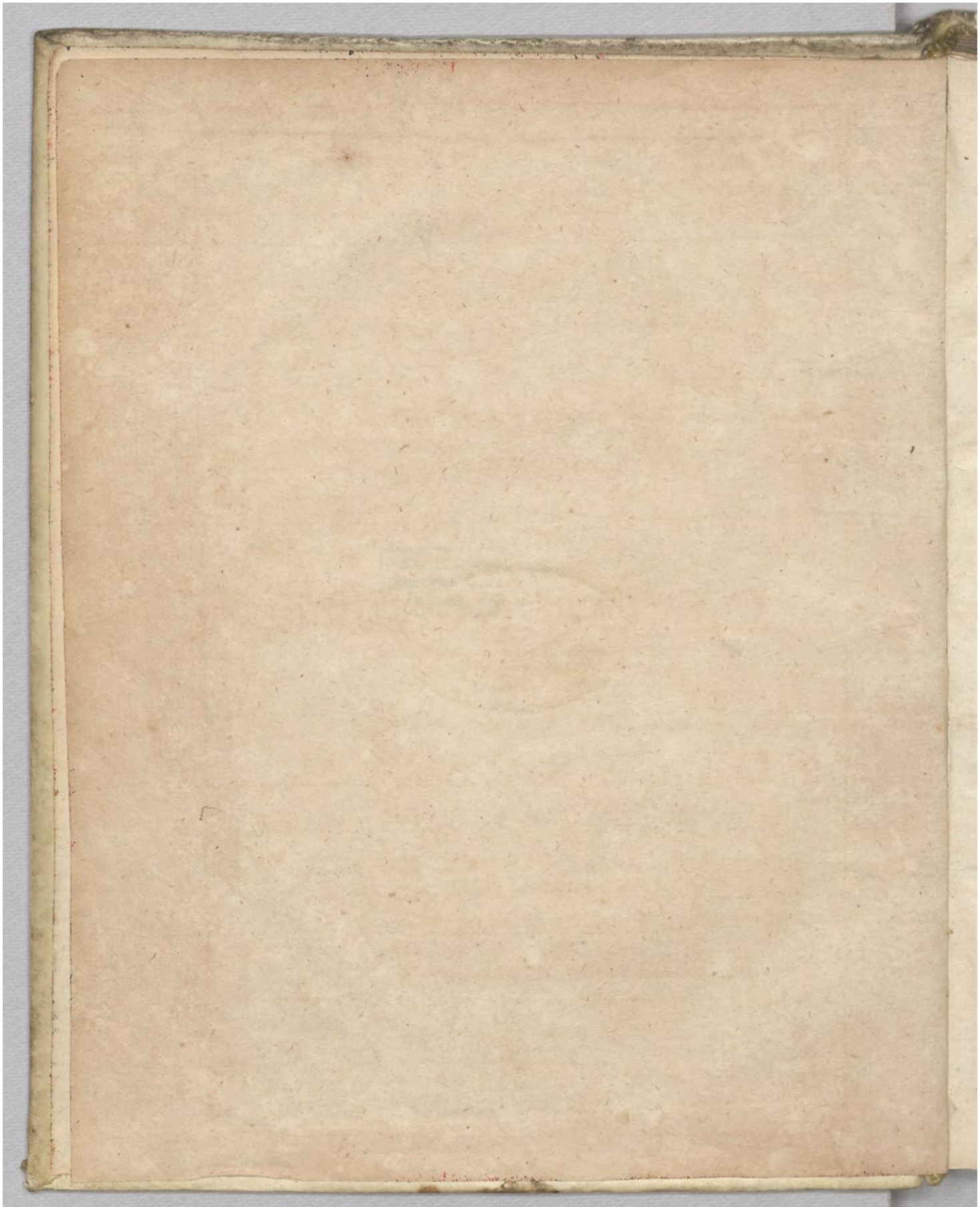
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [3] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [4] - -

PUBLIC DOMAIN

Johannis Wallisii S S. Th. D.

Geometriæ Professoris *Saviliani* Oxoniæ,

TRACTATUS DUO.

Prior,

DE CYCLOIDE

Et corporibus inde genitis.

Posterior, EPISTOLARIS;

In qua agitur,

DE CISSOIDE,

Et Corporibus inde genitis:

ET

DE CVRVARVM,

Tum Linearum Εὐθυώσει, tum Superficierum Πλατυσμῷ.

M. F.

OXONIÆ.
Typis Academicis *Lichfieldianis*. Anno Dom.
CIↃ IↃC LIX.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [5] - -
PUBLIC DOMAIN

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [6] - -

PUBLIC DOMAIN

[ ]

Honoratissimo Doctissimoque Domino,

D. ROBERTO BOYLE

ARMIGERO,

Tum illustri Familia, Tum magnis Virtutibus Nobili:

QUUM, Scientiam nullos habituram inimicos, præter ignorantes, jam olim sit scitissimum: Nemo, credo, aut inique aut imprudenter à me factum existimabit, quod Scientissimum Virum opusculo huic nostro patronum advocaverim. Qui præter tuam in Theologicis tum cognitionem tum praxin; atque in Linguis, tum sacris, antiquisque, tum modernis etiam peritiam; in Politicis item, & negotiis publicis, & rerum & personarum, domi peregreque, intimam notitiam,

Qui mores hominum multorum nôris & urbes:

In Physicis etiam, & veræ Philosophiæ venatione, ita perpetuis & subtilissimis Experimentis, Medicis, Chymicis, Anatomicis, aliisque omne genus, Naturam quasi ferro & igne prosequeris, (nedum per omnes subtiliorum in quacunque arte Opificum officinas,) in secretos abditissimosque sequeris recessus, & quasi in viscera penetras; ut mirum ni tibi tandem se in prædam dedat. Quique Naturam, tanquam equuleo impositam, severâ saltem, ne crudeli dicam, quæstione, torquendo vexas & retorquendo, quò verum tandem fassa secreta pandat omnia: idem, in Matheſi,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [7] - -
PUBLIC DOMAIN

Æquationes Analyticas (Equuleum Mathematicum) versas; quo vix subtilius aliud instrumentum abdita perquirendi, aut extricandi involuta.

Quamquam enim tam perspicacis ingenii Virum, atque subacti judicii, reformidare debere videar, qui de nostris sententiam ferat; ut qui, vel leviora παραγράμματα aut ἀκριβείας, vel ἀμαθίας etiam, si qua deviatum est, potis es dignoscere: Tu tamen, qui cætera nôris, noris etiam quam in festino scripto multa sint condonanda, quamque omnino arduum sit, omnem unguis critici scalpturam devitare.

Invenies autem, ex subtilissimis præsentis seculi inventis, si non omnia, præcipua saltem, vel ex professo tradita, vel obiter insinuata: Eaque, utut non nova omnia, aut nulli hactenus reperta, at novis saltem demonstrationibus ornata, & methodis nostris accommodata. Et quidem ab aliis nonnulla per longiores ambages & particulatim inventa, mirabere forsan tam facile ex principiis nostris, & universaliter traditis, simplicius & sponte fluere.

Tu vero, ut soles, & doctis favere pergas, & studia promovere: nec averseris interim,

VIR NOBILISSIME,

Tui observantissimum
& amantissimum,

JOHANNEM WALLIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [8] - -
PUBLIC DOMAIN

PRÆFATIO.

VO, quid in ſequentibus agatur, rectiùs perſentiſcat Lector, quaq; anſâ datâ hæc fuerim meditatus; præviam hanc totius rei geſtæ, quatenus ea me ſpectet, narrationem præmittere viſum erat, quæque ad id operis me impulerunt cauſas breviter aperire. Cum Illuſtriſſimi Equitis Digbæi *literis (Julii 17, 1658, Pariſiis datis) duas ſimul incluſas chartulas, pridie Cal. Auguſti, ſtylo noſtro, hoc eſt Aug. 10. ſtylo novo, Oxoniis accepi. Quarum prior, hæc continebat Problemata; (Pariſiis, quod audio, menſe Junio primum divulgata.)*

Dato, in Cycloide quacunque ABCD fig. 1. quolibet puncto Z, ex quo ducta ZY recta, baſi AD parallela, axem CF in puncto Y ſecet: Quæruntur;

Dimenſio ſpatii CZY; Ejuſque centrum gravitatis:

Solidaque ex ejuſdem CZY converſione, tum circa ZY, tum circa CY, genita; & horum Solidorum Centra gravitatis.

Quod ſi eadem ſolida, tum quod circa ZY, tum quod circa CY, plano per axem bifariam ſecentur: Horum item ſemiſolidorum quæruntur centra gravitatis.

Quorum quidem Problematum ſolutionem, à præſtantiſſimis toto orbe Geometris, ſupplex poſtulat *Anonymus*, *propoſito ſimul* præmio *in hæc verba*, Quiſquis ſuperius propoſita, intra primam diem menſis Octobris anni 1658 ſolverit & demonſtraverit, magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem conſequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hiſpanicorum, quos ipſi Hiſpani *Dublones*, & Galli *Piſtolles* vocant: Secundus

vero viginti ejuſmodi duplos aureos : Si unus tantum ſolverit, ſexaginta ſolus habebit.

Charta poſterior, indicat; Per [Cycloidem quamcunque] non aliam ab ipſo intelligi, quam Cycloidem primariam à Toricellio deſcriptam; cujus nempe Baſis perimetro circuli generantis æquatur; *Seque* rationem quam habet Baſis Cyloidis ad altitudinem, ſive ad diametrum circuli generantis, pro data reputare: *Remittit denique nonnihil de propoſitionum præcedentium rigore, nempe* multorum caſuum calculum, & abſolutam ſolutionum conſcriptionem; *Adeoque his tandem verbis conditiones ſuas exponit*, Qui publico Inſtrumento, intra præſtitutum tempus, Illuſtriſſimo D: de Carcavi ſignificaverit, eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe habere; & aut ipſammet demonſtrationem quantumvis compendioſam ad ipſum miſerit; aut ſi chartæ mandare nondum per otium licuerit, ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem, caſus quem mox deſignabimus calculum dederit; ſeque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omnino demonſtrare ad ipſius D. de Carcavi nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus: Et conſentimus, primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo, præmio donandum, ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcavi viriſque ad id ſecum adhibitis, cum ipſi viſum fuerit, exhibita, geometrica ac vera judicetur: Salvo ſemper erroris calculo, (*lege*, errore calculi.) Caſus autem cujus ſolius ſufficiet calculus ille eſt. Si ſemicyclois ACF circa baſim AF convertatur, & ſolidum inde genitum ſecetur plano per ipſam AF (quæ jam hujus ſolidi axis eſt) ducto, quod quidem ſolidum dividet in duo ſemiſolida paria. Alterius horum ſemiſolidorum centrum gravitatis aſſignari poſtulamus.

His acceptis literis cum inde perſpexerim Illuſtriſſimo Equiti in votis eſſe, ut ego huic me inquiſitioni accingerem; id ſtatim feci, non tam expoſito præmio (quod quidem ad pompam facere viſum eſt) quam Illuſtriſſimi Equitis deſiderio inductus. Videbam autem non parum temporis propoſiti (mediam ſaltem partem) jam effluxiſſe: Et quidem (quod intellexi poſtea) non exiguum etiam à calce amputandum erat; quantum ſaltem exſcribendis, tranſmittendis & tradendis literis ſufficiat: (Quod enim in chartâ primâ dictum eſt, qui intra primam diem Octobris ſolverit & demonſtraverit; *id in ſecunda ſonat*, qui publico Inſtrumento, intra

præſtitutum

præstitutum tempus D. Carcavio significaverit; *quod tandem exponunt Pascalii ad Wrennum literæ*, si intra dictum tempus Carcavius id acceperit.) *In angustias itaque temporis conjectus eram;* (*& quantas quidem tam perplexæ disquisitioni vix sufficere vel author ipse judicabit;*) *Præsertim cum rudis ego ad id operis accesserim, quod ipsum, & Gallos suos, jam per viginti annos & ultra, nedum quadraginta, exercuit:* (*neque enim ego de Cycloide quidpiã ante meditatus erã quam his Problematis fuerim excitatus.*) *Quod itaque temporis angustiæ postulabant, nec abnuebant oblatæ conditiones, rem ego summatim aperiendam duxi: adeoque literis Aug.* 19. *Oxonii datis, paragraphis* 55, (*eisdem fere verbis cum totidem tractatûs insequentis primoribus,*) *ad* D. *Carcavium amandabam; quibus totius methodi summa continetur: reservatâ mihi, quam & oblatæ conditiones patiuntur, libertate, lapsus* (*si qui forte fuerint*) *emendandi.* (*Non enim tam ipsum calculum quam calculi methodum tum exponere satagebam.*) *Et quoniam* Instrumenti publici *mentionem factam videram, quamquam quid illæ voces ibidem innuebant non satis perspiciebam, ne tamen & hac ex parte quidquam deficeret,* Notarii publici *subscriptione rem confirmandam curabam.*

Has meas literas, ad D. Carcavium 10 *Septemb. pervenisse intelligo; vel saltem* (*eo absente*) *ad ipsum Pascalium: qui tum ea Problemata, quod jam intelligimus, Anonymus proposuerat, tum* D. *Carcavio permittente aliorum scripta literasque ad eum ea de re datas accepit & perlustravit, id enim in suis ad D. Wren literis* 13 *Sept. datis innuit, his verbis.* Absentia communis amici nostri D. de Carcavi qui tuas ad me misit Epistolas, causa est cur non ille sed ego quamvis ignotus audeam respondere. *Et tandem* (*post alia multa*) Unum tibi, *inquit,* dicere habeo, scilicet hic receptas esse ab eximio ex vestris geometra epistolas in quibus omnium quæ de Cycloide problematum sunt proposita solutionem tradit. Et ipsi suum ordinem religiose servandum ab illa die scilicet quo recepta fuerunt, nempe a decimo die hujus mensis stilo novo. Sic enim habetur intentio Anonymi proponentis, ut qua die D. de Carcavi excipit solutionem alicujus eo die ordo ejus sumatur. Et quidem conformius fuisset Anonymi ipsius intentioni ut per Notarios Parisienses attestatio facta fuisset quam per Oxonienses. Parisienses enim fidem facerent

receptionis D. de Carcavi, unde ordo sumitur ; Oxonienses vero nihil ad hoc facere possunt. (*Tantâ siquidem solennitate res transigenda erat !*) *Quasi quidem nesciverit Carcavius, sine Notariorum plurium Publicorum testimonio, se accepisse ; vel etiam quo die acceperit.*) *Ne autem istæc non satis intelligantur ; Ad ea verba impressa chartulæ posterioris,* Qui publico instrumento ante præstitutum tempus, Illustrissimo D. de Carcavi significaverit ; *hanc adscriptam transmisit notam marginalem*, id est, per Notarios Parisienses, per extraneos enim nihil significari potest D. de Carcavi : Et in hoc est aliquantulum plus gratiæ in Gallos, quam in alios Geometras ; sic autem voluit Anonymus, suæ legis dominus : Itaque quicquid ante Calendas Octob. ad D. de Carcavi mittetur ordinem obtinebit, quod autem postea, non recipietur quamvis probaretur actum fuisse ante Calendas Octobris : significatio enim facta ad D. de Carcavi, seu ejus receptio, sola valet ad ordinem præmii. Et siquis è regione magis remota jam mittat solutionem actam ante 29 Augusti (qua die acta est solutio vestri dicti Geometræ ;) ipsa quamvis prior, posterior habebitur, utpote posterius recepta. *Atque hæc sunt quæ ad* D. Wren *de me scripserat. De quibus mihi nihil quicquam contra disputare in animo est. Ad præmium enim quod attinet, de quo videtur ille admodum solicitus, id me omnium minime solicitum tenet, Rem ipsam quod spectat: Geometrarum illud judicio permittendũ est. De Instrumento publico quod dicitur: putarim quidem ego, vel eo hoc opus esse ut D. Carcavio fidem faceret, quo tempore solutio quælibet alibi facta fuerit ; vel non omnino opus est : ut enim sibi se accepisse constet, vel quo die acceperit, quid Instrumento publico vel publicis notariis opus esset non videbam. Sed affigat quam velit mentem suis verbis, & de præmio quod lubet statuat, non repugno; Gallisque suis præ aliis favorem quem velit largiatur. Facti siquidem ego rem refero, non de jure litigaturus.*

Interea vero temporis, literis secundis 3 Septemb. datis, minutiora quædam in literis præcedentibus contenta, partim explicabam partim immutabam (reservata tamen qua prius libertate,) adeoque in eundem plane statum quo jam habentur redigebam : Nisi quod, etiam tum, non satis attentus, § 30 falso s adhuc numeros apposueram ; (& similiter § 45.) Illis utique numeris investigandis, trilineum

lineum C z F A *fig.* 1. *hoc est* C F A *fig.* 7. (*qui facilis lapsus est*) *circa rectam* A F *converteram, quod circa* C F *convertendum erat,* (*ut* § 77, *ubi calculus instituitur, videre est,*) *nempe ut habeatur aggregatum omnium* F Y, *sive* ζ Z *fig.* 7. *in* Z z *Arithmetice proportionales ductarum. Quam quidem oscitantiam ubi animadverterem* (*quodque unicum in jam traditis emendavimus*) *ultimis tandem literis, eodem mense datis insinuabam*: supereſſe, *nempe*, in prioribus nonnihil immutandum, quod & ipſis, ni nondum ad examen redegerint, perſpectum eſſe poſſit: cum autem ipſis adhuc plura videri ſorte poſſint ſupplenda, ad juſtam eorum demonſtrationem quæ vel ſtrictim inſinuaverim, vel ut pro conceſſis h buerim, expectaturum me *dicebam*, donec quid ipſis videretur intelligerem, ut eadem operâ immutarem, immutanda, ſupplenda ſupplerem, & ſupremam adjicerem manum. *Atque hæc quidem ego ipſorum conditionibus conformia eſſe duxi*, (*qui nonniſi* demonſtrationem quantumvis compendioſam *peterent*, *vel ne hanc quidem, modo numeros uni caſui accommodos quis exhiberet*,) *idque* ſalvo ſemper errore calculi: *modo ſaltem* (*quod in literis ad D. Wren additum eſt*) *parati ſimus reliqua exhibere ubi fuerimus à D. Carcavio ad hoc moniti.*

Lapſus autem ille quis fuerit quem emendaturus eram, ſpeciatim literis illis non indicabam; quia jam mihi ſubolebat lupus in fabula. Conjiciebam enim ex literis ad D. Wren ſcriptis, (*me enim nullis hactenus dignati ſunt,*) *Paſchalium hunc cui D. Carcavius literas accipiendi, perluſtrandi, eiſque reſpondendi copiam feciſſe diceretur*, (*fortaſſe & ſententiam ferendi num conditionibus ſatisfiat,*) *eundem eſſe qui hæc problemata Anonymus propoſuerat. Cui cur ego mea ulterius aperirem non videbam. Accedebat, quod jam edoctus fueram, quocunque tempore quidpiam alibi factum fuiſſe conſtet, niſi id Pariſius ante indictum diem Carcavio tradatur*, (*quocunque id fato fiat,*) *non admittendum fore; adeoque cum non ſperandum videbatur ut quicquid ego tum ſcriberem* (*exeunte Septembri*) *ante primum diem Octobris eo accederet; id ſaltem inſinuare viſum eſt, tum deprehendiſſe me errorem illum calculi, tum paratum eſſe vel illum emendare, vel etiam, quæ ultra deſiderentur, ad eorum nutum ſupplere.*

Cum vero ego per aliquot menſes, ut monitus eram, (*ſive D Carcavii, ſive potius*) *Paſcalii nutus expectaveram, quid ultra poſtu-*

larent, aut quid ſuppletum adhuc vellent ; nec quicquam literarum acceperim, (licet literas meas ternas ad D. *Paſcalium rite fuiſſe traditas aliunde intelligam;) Tandem prodiit, quaſi rei geſtæ Narratio,* Hiſtoire de la Roulette ; *quam exeunte menſe Novembri primum vidi. In qua, ut de ſolutionibus à me exhibitis (quod & de aliorum item eveniſſe conjicio) altum fuit ſilentium; tamen etiam adhuc exſpectandum inſinuatum erat dum alii neſcio qui à* D. *Carcavio ad id deſignati (ſiqui ſaltem deſignati) judicium tulerint de ſcriptis ſive noſtris, ſive & aliorum, quorum etiam nomina reticere voluit.*

Innuit quidem hæc hiſtoriola, Conſiderationem Cycloidis, Merſenno proponente, jam ab anno 1615 *(dum ego nondum natus eram) Gallos exercuiſſe ; Robervallium vero anno* 1634 *demonſtraſſe primum,* Figuram Cycloidalem circuli genitoris triplam eſſe: *quod & poſt illum demonſtraſſe dicuntur Fermatius & Carteſius, ſed quorum demonſtrationes, præ illa Robervallii, extenuatum itur. (Eorum vero nemo, quod ſciam, demonſtrationem ſuam typis vulgari hactenus curavit.) Torricellius deinde, qui anno* 1644, *harum rerum neſcius, vulgavit ſuas (omnium, credo, primus,) inſimulatur plagii; (quam juſte, nedum candide, non inquiro; poſtquam per complures annos ſit demortuus;) non quod Robervallii demonſtrationem pro ſua venditaverit, ſed quod (ſic utique ſuſpicantur) inter Gallilæi ſchediaſmata vidiſſe forte potuerit propoſitionis iſtius demonſtrationem à* D. *Beaugrand ad Galilæum olim tranſmiſſam. Cui ſimile quid de Lalouerâ Jeſuitâ videntur ſuſpicari, qui eorum nonnulla protulerat quæ ſibi peculiaria putaverit Robervallius. Fortaſſis etiam & nos ejuſdem inſimulandi, ubi viderit eadem & à nobis inveniri.* Inveniri, *inquam ; non enim ſi ſe prius hæc ſciviſſe contendat, utut id verum eſſe poſſit, nos ideo minus inveniſſe dicendi ſumus, dummodo clam nobis ſit quod ipſe fecerit ; qui nec uel ſcrinia ſua vel ſcripta compilavimus, nec ab illo quidquam fuimus edocti. Didiceram quidem à Toricellio, (à* Toricellio, *inquam, nam Robervallium de rebus hiſce quidpiam meditatum eſſe, quæ mea erat infelicitas, ne per ſomnia cogitabam;) didiceram, inquam, ab illo, tum Cycloidis aream circuli triplam eſſe ; tum Tangentes deſcribendi methodum : Plura vero de Cycloide, quempiam excogitaſſe, neſciebam plane ; ut & (quantum hactenus intelligo) noſtri juxta mecum ignorabant omnes : Nec quidem ullo jure cenſendi ſumus cognoviſſe; cum illud omne quod ſe*

inveniſſe

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [14] - -
PUBLIC DOMAIN

inveniſſe contendit, vel intra privata ſua ſcrinia recondidit, vel familiaribus ſaltem aliquot communicavit, in publicum certe (quantum mihi hactenus aſſequi licuit) nondum edidit.

Pergit deinde eadem hiſtoriola ediſſerere, quid Robervallius, quid author ipſe invenerit. (Se ſolos autem eadem inveniſſe, non dicent, credo.) Quid autem invenerint alii, ſubticuiſſe mirandum non eſt, cum palam profiteatur peculiarem ſe Gallis ſuis favorem exhibere voluiſſe. Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium noſtrum prodidiſſe, Portionem Cycloidis quam abſcindit recta ad axim ordinatim applicata, ejuſdem axis partem quartam vertici proximam abſcindens, æqualem eſſe ſpatio rectilineo: (*Quod quidem verum eſt; æquat utique* $\frac{3}{8} R^2 \sqrt{3}$: *ut ex calculo* § 23 *liquet; uti & trilineum* C b B *fig.* 1. *vel* 7, *æquare* R^2 *quadratum radii; Et priſmatis oblique ſecti portionem, ſive momentum ejuſdem* C b B *trilinei reſpectu* c B, *æquare* R^3 *cubum radii; item ejuſmodi portionem, ſive momentum trilinei* B F C, *ſive reſpectu* c β, *ſive reſpectu* β F, *æquare* $2 R^3$, *duos cubos radii circuli generantis: quæ nos in ſequentibus demonſtravimus:*) *Eundemque Wrennium noſtrum* Cycloidis curvæ, ejuſque partibus, æquales rectas inveniſſe. *Atque hinc denique anſam deſumit novas proponendi quæſtiones*, De centro gravitatis tum lineæ curvæ cycloidis, tum partium ejuſdem deque ſuperficiebus ejuſdem curvæ tum converſione tum ſemiconverſione, tam circa baſim, quam circa axim, deſcriptis, & harum ſuperficierum centro gravitatis. *Nos autem (nullius nominis in narratione ſua) quid præſtitimus, patebit in ſequentibus.*

Exſpectandum autem aliquandiu videbatur (prout ſuperius inſinuatum diximus) numquid aliquando nobis injunctum foret à Carcavio ad demonſtrationes noſtras ſummatim traditas pro libitu ſuo perficiendas. Atque interea quæſtiones de novo propoſitas ſolvebam, (quod quidem poſt ſolutas præcedentes non erat factu difficile.) Tandem vero, cum nihil prorſus acceperim, nec noverim quid ageretur; quæ ad ſolutiones meas quà priores, quà poſteriores, elucidandas, viſa ſunt neceſſaria, (quæ nempe poſt § 55 *inſequuntur,) ſcholiorum inſtar ſubjunxi, eaque prout nunc ſunt ad* D. *Vicecomitem Brounker Menſe Martio tranſmiſi: neque ex eo tempore quicquam innovandum putavi.*

Rem autem ipſam quod attinet; Id animo propoſitum habui, quam ſuccincte

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [15] - -
PUBLIC DOMAIN

succincte omnia, sed & perspicue proponere: Non tamen quæ subinde occurrunt Lemmata singula seorsum semper demonstrare, (id enim si feciſſem, nimis increviſſet operis moles,) sed ea saltem quæ videbantur obscuriora; reliquorum fontes vel digito indicasse satis esse ratus. Sed & eadem non raro, variis in locis, variis etiam modis demonstrata reperiantur. Nec eandem semper demonstrandi methodum secutus sum sed nunc ad morem veterum, nunc ex Geometria Indivisibilium, nunc etiam & ex Infinitorum Arithmetica nostra petitis demonstrationibus. Non quidem quod illud necesse habui; sed quoniam id Lectori, & magis utile, nec minus gratum fore credidi, quam eandem sæpe cramben recoquere. Quod moneo, ne miretur forsan aliquis si in se quidem similia, dissimili nonnunquam demonstrandi methodo probata videat. Non raro etiam à minutioribus nonnullis demonstrandis consulto abstinui; nec ad singulos forsan casus possibiles ubique descendi; satis id ratus, si viam demonstrandi palam ostenderim, singulos interim apices (si illud ἐπιδιῶκται postulent) paratus exhibere.

Atque hæc sunt quæ Lectorem præmonendum putabam. Quæ quidem paulò fusius exposui, ut, qui supra memoratas chartas non viderint, earum saltem summam, adeoque rei gestæ narrationem, hinc intelligant; & causam simul cur hac methodo mea disponatur, quæ secus aliâ forsan methodo rectius disponenda esse, si res esset integra, existimare possent.

DE

DE

CYCLOIDE

ET

CORPORIBUS

Inde genitis, Problematum Solutio.

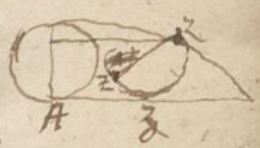
PARS PRIOR.

§ 1. MAnifestum est, in constructione Cycloidis, Peripheriam Circuli generantis, propter continuam sui quæ supponitur ad rectam D A (fig. 1.) applicationem, huic æqualem esse: Adeoque & semissem semissi, &c.

Recta Z γ.

Fig. 1.

2. Et quidem, particulatim, dum Circulus Genitor, basin in ζ contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum Z, manifestum est (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) rectam ζ A congruere curvæ ζ Z, hoc est (ducta Z z basi parallelâ, quæ occurrat in z circulo C z F circa Cycloidis axem) curvæ F z : Adeoque & reliquam



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [17] - 1
PUBLIC DOMAIN

quam reliquæ : nempe ζ F, hoc est Z z, ipsi z C. Et sic ubique.

3. Recta igitur Z Y æquat ubique aggregatum Arcûs & Sinûs recti, Sinui verso C Y convenientium.

Semicycl ois. 4. Si uper circulo C z F circa Cycloidis Axem constituto, aut huic æquali, erigatur Cylindrus rectus F z C r, (fig. 2.) altitudinem habens C r, diametro Basis æqualem : Tota superficies hujus Cylindri (cum basibus) est dupla Cycloidis A C D F ; (nempe duæ bases Cylindri fig. 2. sunt duplæ circuli C z F fig. 1. & Cylindrica superficies curva, dupla reliquorum segmentorum :) Atque si eadem superficies (*superficies*, inquam ; non Cylindrus, ne novæ superficies secando emergant) plano F C r per axem bisecetur : Semisuperficies Cylindri erit dupla Semicycloidis A F C ; (nempe duæ semibases, sunt duplæ semicirculi C z F fig. 1 ; & Semicylindrica superficies curva, dupla trilinei C A F z :) Et denique si ea semisuperficies bisecetur adhuc plano elliptico F ζ r υ quod plano F C r rectum sit ; semisuperficiei illius semissis r ζ F z C Y F æquabit semicycloidem C A F ; (nempe Semicirculus basis C z F fig. 2. æquabit semicirculum C z F fig. 1. & superficies curva r ζ F z C r æquabit trilineum C A F z.)

Fig. 2.

5. Nam, sumpto ubivis in Cycloidis axe puncto Y, unde parallela basi ducatur Y z Z : rectæ C Y in axe Cycloidis sumatur C Y æqualis in diametro basis Cylindricæ, unde ducatur Y υ lateri C r parallela, diagonali F r occurrens in υ ; & per punctum υ, plano basi F z C parallelo, puta υ ζ c, secetur superficies cylindrica sectionem exhibens ζ c arcum circuli, quæ (propter parallelas) congruet arcui z C in base Cylindri, hoc est arcui z C circuli genitoris, adeoq; z Z rectæ æqualis, (sicut & υ ζ congruit rectæ Y z sive in base cylindri sive in circulo generante.) Quod cum ubique fiat, erunt omnes curvæ in superficie cylindrica r ζ F z C r, ipsi ζ c parallelæ, æquales rectis omnibus ipsi z Z parallelis in trilineo cycloidis C A F z, & singulæ singulis, & similiter positæ (in iisdem puta sive à base sive à vertice distantiis :) Adeoque, propter æqualem etiam utriusque figuræ altitudinem, figura figuræ æqualis : superficies cylindrica, plano trilineo ; (sed & segmenta illius respectivis segmentis hujus, ut patet :) Et si addantur utrobique æquales semicirculi C z F, erit

erit aggregatum aggregato æquale, & duplum duplo, quadruplum quadruplo, &c. Hoc est, superficies r ζ F z C Y E, Semicycloidi A C F; & Semisuperficies Cylindri (quippe istius dupla) Cycloidi A C D F; & tota superficies hujus dupla. Quod erat propositum.

6. Est igitur Cyclois A C D F, circuli genitoris tripla. Quod sic colligitur. Cylindri integri modo expositi superficies curva, æquatur facto ex altitudine (quæ æqualis est diametro Basis) in basis circumferentiam; adeoque est quadrupla circuli basis: Cui si basis utraque adjiciatur, aggregatum erit, baseos (hoc est circuli genitoris) sextuplum. Est autem, ut supra ostensum est, duplum Cycloidis: Ergo Cyclois ipsa est circuli Genitoris Tripla. Nempe Trilineum C A F z Semicirculi C z F duplum. *Cyclois Circuli tripla.*

7. Porro, si exposita quæ prius superficies (nempe semisuperficei cylindricæ semissis) r ζ F z C Y F, secetur adhuc plano z γ Y, quod sit plano elliptico F ζ r υ parallelum: Superficies abscissa γ z C Y z, æquabit segmentum Cycloidis C Y Z. Nam, propter Cylindricæ superficiei sectiones parallelas, congruet γ z C ipsi r ζ c, hoc est trilineo C z Z Cycloidis; sed & C Y z utrobique æqualis; Ergo aggregatum aggregato æquale. *Segmentum C Y Z.*

8. Si super Cycloide A C D erigatur (ut in fig. 3.) semicylindrus rectus, sive Prisma, (utrovis enim nomine dicatur perinde est) altitudinem habens C Φ duplam rectæ A D; quod per axem secet F C Φ sectionem in latere faciens C Φ rectam; cui plano intelligatur planum aliud recte insistens, per rectam F Φ transiens, solidum abscindere D A Φ C D: Huic solido æquatur solidum factum ex conversione Cycloidis A C D circa rectam A D. Cum enim sit A D æqualis peripheriæ diametri F C; erit ipsius dupla C Φ, æqualis peripheriæ semidiamerri F C; adeoque (propter angulum F C Φ rectum) triangulum F C Φ æquatur circulo ex conversione radii F C facto. Et similiter ostendetur triangulum X Z ξ æquale circulo radii X Z: Et sic ubique. Ergo omnia triangula omnibus circulis, adeoque solidum solido æquatur, & segmenta segmentis respectivè sumptis: Puta, solidum X Z ξ A, solido ex conversione plani X Z A facto; & sic ubique: Item prisma X Z ξ υ Y F solido ex conversione parallelogrammi X Z Y F; adeoque & solidum Z Y C Φ υ ξ solido cylindrice *Solidũ axis A D.* Fig. 3.

lindrice excavato conversione plani Z Y C circa rectam A F facto. Sin adhuc secetur plano ξ υ ϰ basi parallelo, segmentum Φ ξ υ ϰ æquabitur solido ex conversione plani Z Y C circa rectam Z Y facto. Nam & hic eodem modo ostendetur, triangulum υ ϰ Φ æquale circulo radii υ ϰ; & de reliquis similiter.

Solidũ axis F C.

9. Similiter, si super semicycloide A F C fig. 4. erigatur Prisma, sive Cylindri recti quadrans, altitudinem habens A V, quæ sit ad A F, ut 4 A F ad F C; (nempe ut circuli Perimeter ad Radium;) secetur autem plano F C V: Solido F V C Z A æquatur solidum ex conversione plani F C Z A circa rectam F C; & segmenta segmentis respective sumptis; puta segmentum Y Z Ψ C segmento conversione plani Z C Y facto. Nam & hic triangulum F A V æquatur circulo radii F A; & triangulum Y Z Ψ circulo radii Y Z: Et sic ubique.

Fig. 4.

10. Atque hactenus quidem utut tum planorum tum solidorum omnium expositorum dimensionem aliquatenus hac methodo tradidisse videamur: Cum tamen de Gravitatis Centris nihil hinc constet, libet in sequentibus, resumpto iterum toto negotio, rem aliter expedire, hoc modo.

Angulus Z ζ A.

11. Ut supra ostendimus rectam z Z fig. 1. æqualem arcui z C: ita ostendetur, angulum Z ζ A, hoc est z F A, arcui Z ζ sive z F, hoc est rectæ A ζ, proportionalem esse: (nempe, ut arcus F z, hoc est A ζ recta, ad arcum F z C, hoc est rectam A F, sic esse angulum Z ζ A vel z F A, ad C F A rectum:) propter angulum z G F anguli z F A ubique duplum, & propterea utrumq; arcui F z ubique proportionalem.

Fig. 1.

12. Adeoque, divisa recta A F in partes quotlibet æquales, in punctis λ, μ, β, ζ, &c. ductisque rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. à puncto contactûs ad punctum lineans, (quibus parallelæ existunt in circulo F l, F m, F b, F z, &c.) anguli L λ A, M μ A, B β A, Z ζ A, &c. sunt Arithmetice proportionales; quorum continuus excessus primo æqualis est, nempe angulo L λ A.

13. Ductis itaque tum in Cycloide rectis λ L, μ M, β B, ζ Z, &c. tum ipsis respondentibus in circulo F l, F m, F b, F z, &c. distribuentur Semicyclois & Semicirculus in segmenta numero æqualia; singula singulis (respective) correspondentia.

14. Ductis item in Cycloide, à punctis ν, ζ, β, &c. rectis ν ϖ, ζ ϱ, β σ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζ Z, β B, μ M, &c.

Erunt

Erunt anguli omnes N ν ϖ, Z ζ ϱ, B β σ, &c. æquales tum inter se, tum angulo L λ A, tum etiam cuilibet angulorum A F l, l F m, m F b, &c. qui item (propter æquales arcus F l, l m, m b, &c.) sunt inter se æquales.

15. Ductis porro tum in Cycloide rectis N O, Z P, B R, &c. tum in circulo n O, z p, b r; &c. inscribatur tum Cycloidi figura ex Trapeziis, tum circulo figura ex Triangulis correspondentibus constans.

16. Erunt autem illa Trapezia, Triangulorum horum respective sumptorum, ubique plusquam tripla. Constat enim quodlibet Trapeziorum, ex Triangulo simul & Parallelogrammo: quorum illud, triangulo correspondenti in circulo (ut ex dictis facile colligitur) ubique æquale est; hoc illius (ut jam ostendetur) plusquam duplum.

17. Nam, verbi gratia, in Trapezio O N ν F, Triangulum O n F est utrique figuræ commune; & Parallelogrammum N n F ν (æquialtum) plusquam duplum Trianguli, propter rectam N n, hoc est curvam n C, majorem n O rectâ.

18. Sin aliud sumatur Trapezium, puta P Z ζ ν; Erit inibi Triangulum P ν ϖ, triangulo p F z æquale; & Parallelogrammum Z ζ ν π plusquam duplum, propter rectam Z π, hoc est, ζ ν, hoc est curvam z n, majorem quam z p, vel π P. Nam si aptetur chorda z n; erit angulus p F Y (propter tum semiperipheriam C z F, tum angulum rectum C F A, in sex partes æquales divisum) $\frac{1}{6}$ anguli recti; adeoque angulus Y p F, hoc est z p n, $\frac{5}{6}$ recti; cui si addatur angulus n z p, qui est $\frac{3}{6}$ recti, (subtendit utique duplo arcûs z C, minus z n;) aggregatum $\frac{8}{6}$ recti ex 2 rectis subductum, relinquet angulum z n p, $\frac{4}{6}$ recti. Major itaque est angulus z p n angulo z n p, (nempe ut 5 ad 4,) adeoque latus oppositum z n recta, major quam z p; ideoque à fortiori, z n curva, hoc est recta Z π, multo major erit quam recta z p, hoc est π P. Et similiter ostendetur (inscriptâ chordâ b z) angulum b r z majorem esse angulo b z r, (nempe ut 4 ad 3,) & sic alibi. Nempe, universaliter, si ponamus arcum semicirculi C F, adeoque angulum rectum C F A, dividi in partes æquales numero s; quarum arcus z C, adeoque & angulus z F C, contineat partes numero n, (adeoque angulus p F C partes $n-1$, & propterea angulus Y p F, hoc est z p n, partes

$s-n+$

$s-n+1$;) erit angulus n z p partium $2n-1$; qui si addatur angulo z p n, & utriusque aggregatum $s+n$ ex duobus rectis, hoc est ex $2s$, auferatur; manebit angulus z n p partium $s-n$, minor angulo z p n partium $s-n+1$.

19. Sin istiusmodi figuræ tum Cycloidi tum Circulo circumscribantur; erunt singula Cycloidis Trapezia, respectivorum Circuli Triangulorum, minus quam tripla. Triangula siquidem erunt in utraque figura æqualia; Parallelogramma minus quam dupla Triangulorum; cum æque alta sint, sed super minore base. Fig. 1.

20. Nam, verbi gratia, In Trapezio C Q ν F, recta Q q, hoc est ν F recta, hoc est arcus n C, minor est tangente q C. Utut enim secans F q, non à centro G, sed ab opposito diametri termino F ducatur, adeoque minor sit q C quam Tangens vulgo dicta quæ rectæ à G centor per arcus terminum n transeunti occurrat; est tamen ipso arcu n C major; Nam si intelligatur à centro G duci recta rectæ F q parallela; bisecabit illa tum arcum n C, tum rectam q C; adeoque erit q C æqualis duabus Tangentibus Semiarcûs, quas simul ipso arcu majores esse constat.

21. Atque eodem fere modo ostendetur, n τ, hoc est N t, majorem esse quam est n z curva, hoc est recta T t; item z υ, hoc est Z u, majorem quam z b curva, hoc est recta V u; & in reliquis pariter. Et quidem quo longius à puncto C recessum est, eo insignior erit excessus.

Semicyclois semicirculi tripla.

22. Quoniam igitur figura sic circumscripta Semicycloidi C Z A, aut ipsius parti C Z, (utrobique enim eodem modo procedit demonstratio,) minor est quam tripla figuræ semicirculo C z F, aut ipsius parti C z, circumscriptæ, (quotcunque fuerint illic trapezia, hic triangula;) inscripta verò inscriptæ major quam tripla: Et quidem augendo illic numerum trapeziorum, hic triangulorum, eo tandem devenietur utrobique, ut differentia figuræ inscriptæ à circumscripta minor sit quavis assignatâ, (adeoque in infinitum procedendo evanescat:) erunt tum figuræ singulæ quadrilineæ (qualis B β ζ Z) singularum respectivè sumptarum trilinearum (qualis b F z,) tum omnes omnium, triplæ. Hoc est, tum Semicyclois C Z A F semicirculi C z F, tum istius segmentum B β ζ Z sectoris hujus b F z, tum

tum segmentum Z A ζ segmenti z F z, tum segmentum Z ζ F C sectoris z F C, (& sic ubique) triplum.

23. Jam vero, ex ductu Semiradii ($\frac{1}{2}$ G z) in arcum z C, hoc est rectam Z z, habetur sector G z C ; atque ex ductu semiradii ($\frac{1}{2}$ G F) in altitudinem z Y, habetur Triangulum G z F: Ergo ex ductu Semiradii in totam Z Y, habetur sector F z C: Atque ex ductu Sesquiradii in eandem Z Y, habetur segmentum ζ Z C F: Unde si auferatur ζ Z Y F trapezium, habetur dimenso segmenti C Z Y quæsita : Vel etiam, subducto insuper C z Y, habetur C z Z trilineum. *Segmentum C Z Y.*

24. Porro, Quoniam si ponamus semicirculum ex infinitis trilineis, qualia C n F, n z F, &c. vel etiam (nam & hoc, propter infinitatem, adeoque & approximationem in infinitum, tantundem valet,) ex infinitis triangulis, qualia O n F, p z F, &c, constare : ponendum & semicycloidem constare ex totidem quadrilineis, ut C N ν F, N Z ζ ν, &c ; vel etiam trapeziis numero infinitis, ut O N ν F, P Z ζ ν, &c ; quorum quodvis exhibeat tum Triangulum tum Parallelogrammum istius duplum. Ex conversione autem Parallelogrammi, ut N F, circa axem A F, fiet Cylindrus, saltem distortus ; & ex simili conversione Trianguli, ut O n F, in hoc situ, fiet similis Cylindrus conice excavatus, qui erit $\frac{2}{3}$ cylindri pleni : Ex conversione igitur Trapezii, ex parallogrammo simul & triangulo constantis, fit solidum quod ad solidum conversione Trianguli est ut $1 + \frac{2}{3}$ ad $\frac{2}{3}$, sive ut 5 ad 2. Quod cum ubique fiat ; erit solidum ex conversione cycloidis, ad solidum ex conversione circuli circa rectã A F, ut 5 ad 2. (Quod ipsum etiam sic colligitur. Centrum gravitatis Trapezii P Z ζ ν distat ab A F, per $\frac{5}{9}$ rectæ F Y ; centrum autem gravitatis Trianguli p z F ab eadem A F recta, distat $\frac{2}{3}$ vel $\frac{6}{9}$ ejusdem F Y : Centrorum itaque ab A F distantiæ sunt ut 5 ad 6 ; Et magnitudines ostensæ sunt ut 3 ad 1. Ergo quæ ex illis componitur, sive momentorum respectu A F rectæ, sive solidorum circa eandem A F conversione factorum, ratio, est ut 5 ad 2. Nempe $\frac{5}{6} \times \frac{3}{1} - \frac{2}{2}$.) *Solidũ axis A F.*

25. Ex ea vero conversione circuli, fiet annulus (ut loquuntur) clausus, æqualis Cylindro cujus basis est ille circulus, & altitudo æqualis istius circuli circumferentiæ, hoc est rectæ A D, fig. 1. Solidum itaque ex ea conversione Cycloidis, æquatur

Cylindro,

Cylindro cujus basis est idem circulus C F, & altitudo æqualis rectæ quæ sit ad illius circumferentiam ut 5 ad 2; hoc est, dupla sequialtera rectæ A D. (Est utique annulus ille $\frac{1}{4}$ D P × P − $\frac{1}{8}$ D P²; & solidum illud Cycloidicum $\frac{5}{8}$ D P². Intelligendo scilicet per D, diametrum, &, per P, peripheriam circuli generantis: ut & deinceps alibi passim.)

Segmenta solidi circa A F.

26. Sed & pari argumento de partibus judicandum erit. Nempe tum solidum ex conversione segmenti ζ Z A, ad solidum ex conversione segmenti F z F; ut & solidum ex conversione Quadrilinei ζ Z C F, ad solidum ex conversione sectoris F z C, est ut 5 ad 2. Dantur autem hæc, ergo & illa.

27. Sed & insuper, si ex solido ex conversione quadrilinei ζ Z C F, auferatur solidum ex conversione trapezii ζ Z Y F, manebit annulus conversione segmenti C Z Y circa axem A F factus; qui itaque datus est.

Fig. 3.

28. Est autem Annulus ille, æqualis solido Z Y C Φ υ ξ fig. 3. (ut §. 8. ostenditur;) unde si auferatur datum prisma Y Z ξ υ χ C (cujus basis est segmentum modo repertum C Z Y, altitudo Y υ, quæ est ad C Φ sive 2 A D, ut F Y ad F C;) quod supereſt solidum Φ ξ υ χ æquatur solido ex conversione segmenti C Z Y circa rectam Z Y facto.

Solidū axis C F.

Fig. 1.

29. Ut vero habeamus solidum ex conversione Semicycloidis circa rectum C F, ejusque solidi segmenta, libet paulo immutare constructionem, (nulla necessitate, sed phantasiæ juvandæ gratia.) Nempe cum prius ostendimus, in figura circumscripta, Trapezii Parallalogrammum minus esse quam Trianguli duplum, sed majus in figura inscripta; differentiam verò utrobique (sectione in infinitum continuata) evanescere; adeoque reapse perinde esse sive inscriptæ sive circumscriptæ figuræ Trapezia perpendamus, (& de Triangulis similiter:) Commodum jam videtur viam inter utramque mediam sectari, adeoque tum Trapezia Cycloidis, tum Triangula circuli, partim circumscribere, partim inscribere; puta pro Trapezio Z ζ ϱ P fig. 1. Trapezium V β ϱ P; &, pro Triangulo z F p, Triangulum υ F p substituendo; ut tum illic recta Z ζ trapezium, tum hic recta z F triangulum, quasi medium secet. (Utut enim in sectione definita V Z major sit quam Z P, & υ z quam z p, hæc tamen differentia, sectione in infinitum continuatâ, evanescit; adeoque in

in figuris infinite exiguis, tum trapeziis tum triangulis, ſuppo-nenda eſt æqualitas.) Sed & inſuper, ſi libet, licebit (ductâ recta $\zeta\pi$) trapezii triangulum $u\zeta\pi$ parallelogrammo medium inter-ponere; adeoque ſubſtituere, pro uno parallelogrammo integro, duo parallelogramma dimidia $V\zeta$ & ζP (ſupponitur utique, propter continuatam in infinitum ſectionem, tum $Z\pi$, πP, tum $\zeta\pi$, πP, invicem æquales eſſe;) quæ duo parallelogramma di-midia tantundem circumvolvendo præſtant ſive rectæ $Z\zeta$ utrin-que contigua, ſive æqualiter utrinque remota fuerint: cum ſit idem utrobique centrum gravitatis. (Supponimus enim, quod & facile ſi opus ſit probabitur, planum quodvis tantundem hujuſ-modi converſione producere quantum eſt quod fit ex eodem pla-no in lineam ipſius centro gravitatis deſcriptam ducto; quod & de lineâ quavis ſive recta ſive curva in eo plano deſcriptâ pariter intelligendum eſt. Quod quidem quum ipſe olim me primum inveniſſe putaverim, monitus mox eram nonnihil apud Guldi-num exſtare quod huc ſpectat. Id autem ſi animadvertiſſet Tac-quetus, dum *de Cylindricis & Annularibus* acutum opus conſcrip-ſit, non parum illi fuiſſet adjumento; multaque quæ illic ex-ſtant tum univerſalius tum & contractius forte fuiſſent tradita.)

30. Re ſic conſtructa; Ratio Solidi ex converſione Trapezii $V\beta\nu P$, ad ſolidum ex converſione Trianguli νFp; componi-tur ex ratione Trapezii ad Triangulum, (hoc eſt, ſectione in in-finitum continuatâ, ut 3 ad 1;) atque ex ratione diſtantiarum centri gravitatis in utraque figura à converſionis axe; Nempe, in Trapezio, puncti K, quod ita dividit rectam $Z\zeta$, ut ſit ζK ad $Z\zeta$, ut 5 ad 9; (adeoque diſtantia Kk erit $zZ+\frac{5}{9}zY$;) In Triangulo, puncti H, quod ita dividit rectam Fz, ut ſit FH ad Fz ut 2 ad 3; (adeoq; diſtantia Hh eſt $\frac{2}{3}zY$.) Ratio itaque diſtantiarum eſt, ut $zZ+\frac{5}{9}zY$ ad $\frac{2}{3}zY$; ſive ut $3zZ+\frac{5}{3}zY$ ad $2zY$; quæ ſi cum ratione planorum 3 ad 1 componatur, emer-git ſolidorum ratio ad invicem, ut $9zZ+5zY$ ad $2zY$; ſive, ut $5zY$ ad $2zY$ (hoc eſt, ut 5 ad 2,) atq; inſuper ut $9zZ$ ad $2zY$. Quod quidem cum ubique fiat, ſitq; eadem ubique ratio $5zY$ ad $2zY$, adeoq; & omnium ad omnes; non autem eadem ubique ratio $9zZ$ ad $2zY$, ſed neque æqualia ubique triangula νFp circumducta, (quorum ſi utrumvis eſſet, pro omnibus $9zZ$ ad $2zY$, ponen-dum eſſet 18 ad 2; quia nempe omnes zZ ad omnes zY, hoc eſt trilineum $CAFz$ ad ſemicirculum CzF, eſt ut 2 ad 1;

quum autem eorum neutrum sit, non licet sic arguere;) præter rationem illam 5 ad 2, quærenda est alia ratio; nempe quam habeat noncuplum omnium z Z (sive z C arcuum arithmetice proportionalium) in respectiva Triangula v F p, ad duplum omnium z Y (sinuum rectorum eorundem arcuum) in eadem respectivè triangula. Hoc est (propter triangulorum bases æquales) noncuplum arcuum arithmetice proportionalium, in residuorum sinus versos ductorum (utpote Triangulorum altitudines,) ad duplum sinuum rectorum in eosdem sinus versos; Hoc est (ut deinceps fusius ostendetur § 74 &c.) ut differentia quadratorum basis A F & altitudinis C F, ad $\frac{2}{9}$ quadrati C F, sive ut 9 A F q − 9 C F q ad 2 C F q. Cui si adjungatur ratio 5 ad 2, hoc est 5 C F q ad 2 C F q; fiet 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q, ratio solidi ex semicycloidis conversione circa C F, ad sphæram circuli genitoris.

Fig. 1.

Segmenta solidi circa C F.

31. Eodem fere modo etiam de solidis ex conversione segmentorum arguendum. Nam & hic omnia minuta Trapezia segmenti, verbi gratia ζ Z C F, circumducta; ad omnia minuta Triangula sectoris F z C sic circumducta, circa eandem rectam C F: sunt ut 5 ad 2, atque insuper, ut noncuplum omnium z Z in respectiva Triangula, ad duplum omnium z Y in eadem triangula: sin ex hoc demum solido, auferatur solidum ex conversione Trapezii ζ Z Y F circa rectam C F factum; manebit solidum ex conversione segmenti C Z Y circa rectam C Y.

32. Et pari fere processu, si demissâ recta Z X rectæ C F parallelâ abscindi intelligatur segmentum Z X A; istius segmenti tum dimensio, tum & solidi inde facti, sive conversione circa rectam C F, sive circa rectam Z X, facile colligitur. Sed hæc inter quæsita non sunt.

Centrum Gravitatis Semicycloidis.

33. Ad centrum gravitatis inveniendum, supponimus ob datas C F, A D, fig. 1. datam esse circuli quadraturam; adeoque & centrum gravitatis in segmentis. Nam ut, ex dato centro gravitatis in circuli segmentis, colligi posse circuli quadraturam, jam ab aliis ostensum est; sic vice versa, ex data quadraturâ facile colligitur centrum gravitatis in segmentis. (Quod, si opus sit, deinceps ostendetur § 67 & seqq.)

Quantum distat à C F,

34. Ponamus itaque primò centrum libræ in G, & rectam C F lineam æquilibrii (libræ transversam:) sitque utriusvis semicirculi

circuli C F centrum gravitatis punctum E (in circuli diametro basi Cycloidis parallela.) Quoniam vero momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu lineæ C F; est in ratione compositâ ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem æquilibrii linea C F; atque ex eisdem rationibus componatur ratio solidorum ex eorundem planorum circa C F conversione genitorum, (ut supra insinuatum est § 29.) eadem erit momentorum ratio, atque ratio solidorum sic genitorum. Nempe, ut 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q. Ut § 30. dictum est.

35. Ductâ itaque G e basi Cycloidis parallelâ, quæ sit ad G E, ut 9 A F q − 4 C F q ad 2 C F q: Si intelligatur ex puncto e suspendi æqualis semicirculus, æquiponderabit ille semicycloidi oppositæ in suo situ. Quoniam vero magnitudo semicycloidis est ad magnitudinem semicirculi, ut 3 ad 1; si sumatur (in utrovis semicycloide) recta G r (basi parallela) quæ sit ad G e, ut 1 ad 3; & ducatur recta r γ rectæ C F parallela; erit centrum gravitatis istius semicycloidis in recta r γ.

Quantum dist at ab A F.

36. Ponamus deinde Centrum libræ in F, & rectam A D lineam æquilibrii. Quoniam momentum semicycloidis ad momentum semicirculi, respectu rectæ A D, est in ratione composita ex rationibus magnitudinum, & distantiarum centri gravitatis ab eadem A D; adeoque in eadem ratione cum solidis ex conversione circa rectam A D factis, hoc est (ut supra dictum est § 24) ut 5 ad 2; Si in continuata G F, sumatur F f, quæ sit ad F G ut 5 ad 2; semicirculus in puncto f, æquiponderabit semicycloidi in suo situ: Cumque semicyclois sit ad semicirculum ut 3 ad 1; si sumatur (in recta F G) recta F Δ, quæ sit ad F f ut 1 ad 3; atque à puncto Δ ducatur basi Cycloidis parallela Δ ♪ (rectæ r γ occurrens in ♪,) erit centrum gravitatis semicycloidis in recta Δ ♪; adeoque in illius puncto ♪.

Centrum gravitatis segmenti C Z Y.

37. Atque ex iisdem principiis, eodem fere processu, colligetur centrum gravitatis segmenti C Z Y. Erit enim momentum segmenti C Z Y ad momentum segmenti C z Y respectu lineæ æquilibrii C F, ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa eandem C F factum: sed hæc ratio dari supponitur ex § 31: ergo & illa: Esto ut α ad β. Sed & data est ratio magnitudinis ad magnitudinem, per § 23: Esto hæc ut α ad γ.

Datur item segmenti C z Y centrum gravitatis (ut § 33. supponitur, & § 67. &c. deinceps ostendetur;) adeoque & ipsius distantia ab æquilibrii linea C F: Esto ea ε. Erit itaque, propter $\frac{\alpha}{\gamma}) \frac{\alpha}{\beta} (\frac{\gamma}{\beta}$, Distantia centri gravitatis segmenti C Z Y ab eadem C F recta, ad distantiam ε, ut γ ad β. (Nempe in ratione quæ componitur ex ratione momentorum, α ad β; atque reciprocâ magnitudinum, γ ad α.) puta $\frac{\gamma \varepsilon}{\beta}$.

38. Similiter momentum segmenti C Z Y ad momentum segmenti C z Y, respectu lineæ Z Y, est ut solidum istius ad solidum hujus conversione circa rectam Z Y factum. Sed hæc ratio superius data est, per § 28; Ergo & illa. Esto ut α ad δ. Magnitudinum autem ratio (ut prius) ut α ad γ. Distantia vero centri gravitatis segmenti C z Y à recta Z Y, sit ζ. Erit distantia centri gravitatis segmenti C Z Y ad distantiam ζ, ut γ ad δ. Nempe $\frac{\gamma \zeta}{\delta}$.

39. Cum itaque data sit istius distantia tum à recta C F, tum à recta Z Y, (atque intra ipsum segmentum esse constet,) datur & ipsum gravitatis centrum quæsitum.

Centrum solidi circa A F.

40. Deinde, ad inveniendum centrum gravitatis in solidis; Supponimus ut supra in segmentis circularibus, ita jam in sphæralibus segmentis centrum gravitatis datum esse: vel, si exigatur, parati sumus exhibere, ut infra § 67 & seqq.

41. Ponamus jam solidum factum ex conversione semicycloidis C A F circa rectam A F, secari plano quod plano C A F recte insistat in A F rectâ, semisolidum abscindens; cujus propterea centrum gravitatis in plano C A F esse manifestum est.

42. Deinde, cum solidum sive ex conversione, sive ex semiconversione Trapezii V β ν P (circa rectam A F,) ad solidum ex simili conversione vel semiconversione trianguli ν F p, sit ut 5 ad 2, (ut § 24 ostensum est;) quærantur utriusque centra gravitatis, ut habeatur ratio distantiarum tum à recta A F tum à recta C F.

43. Habetur autem solidi ex semiconversione Trapezii Centrum gravitatis, si in recta ζ Z intelligatur punctũ K abscindere rectam

ζ K

ζ K quæ sit ad ζ Z ut 7 ad 10 (quod quidem centrum gravitatis esset si curvatura figuræ demeretur ; putà , si pro singulis semicirculis sive superficiebus semicylindricis circa axem A F intelligantur totidem lineæ rectæ vel superficies planæ plano C A F ad angulos rectos positæ atque ab eo bisectæ ;) atque deinde in recta K κ quæ sit basi A D perpendicularis , sumatur (propter curvaturam) ut C F ad F A (hoc est , ut Diameter ad Semiperipheriam circuli ,) sic κ Φ ad κ K, (qua nempe ratione dividendus est axis semicirculi ut habeatur semiperipheriæ centrum gravitatis :) Erit Φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trapezii V β ν P circa rectam A F.

44. Centrum autem gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli , habetur, si à rectæ F z puncto H, quod jam intelligatur abscindere rectam F H, quæ sit ad F z, ut 3 ad 4, (quod nempe centrum gravitatis esset si demeretur curvatura,) perpendicularis H ν intelligatur (propter curvaturam) ita dividi in φ ut modo divisimus K κ in Φ. Erit utique φ centrum gravitatis solidi ex semiconversione Trianguli υ F p circa rectam A F. (Quamquam revera perinde omnino est ad hoc negotium an omnino reperiantur puncta Φ, φ, an tantum puncta K, H : Nam eadem est distantia, quantum ad rectam C F, punctorum K & Φ, item punctorum H & φ ; &, quantum ad rectam A F, eadem saltem distantiarum ratio, sive puncta K , H, sive Φ, φ, considerentur.)

45. Cum igitur ratio distantiarum sive punctorum K, H, sive Φ, φ, à recta A F , sit ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 28 ad 30, vel 14 ad 15 ; & magnitudinum, ut 5 ad 2 : Erit, quæ ex his componitur , ratio momentorum, ut 70 ad 30, sive 7 ad 3. Quod cum ubique fiat ; eadem erit & ratio momenti solidorum ex semiconversione trapeziorum omnium ad omnium triangulorum sic conversorum momentum, hoc est, momenti solidi ex semiconversione semicycloidis , ad momentum solidi ex semiconversione semicirculi, (circa rectam A F,) respectu rectæ A F : Nempe ut 7 ad 3. Unde colligentur puncta f, Δ, ∫, ut supra. Nempe si intelligatur G centrum gravitatis solidi ex semiconversione circuli circa rectam A F, (quod punctum G dari supponimus , vel , si exigatur, deinceps exhibebimus § 56 ;) & fiat , ut 3 ad 7 , sic F G ad F f ; & deinde, ut 5 ad 2, sic F f ad F Δ ; atque duca-

Quantum distat ab A F.

tur Δ ♪ basi parallela ; erit centrum gravitatis solidi ex semiconversione semicycloidis circa rectam A D, in recta Δ ♪.

Quantum distat à C F.

46. Cum vero distantia puncti sive K sive Φ à recta C F sit z Z + $\frac{7}{10}$ z Y ; atque distantia puncti H vel φ ab eadem recta sit $\frac{3}{4}$ z Y ; (quorum utrumque ex dictis patet :) erit distantiarum ratio, ut z Z + $\frac{7}{10}$ z Y ad $\frac{3}{4}$ z Y, sive ut 20 z Z † 14 z Y ad 15 z Y : Quæ si cum ratione magnitudinum 5 ad 2 componatur, habetur momentorum ratio 100 z Z + 70 z Y ad 30 z Y, sive 10 z Z + 7 z Y ad 3 z Y. Quod cum ubique fiat ; pro ratione momenti solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) semicirculi circa rectam A F, respectu lineæ æquilibrii C F, sumenda erit tum ratio 7 ad 3 (propter 7 z Y ad 3 z Y) tum (propter 10 z Z ad 3 z Y) ea ratio quam habet decuplum momenti solidorum ex conversione triangulorum υ F p circa A F, suspensorum in distantiis z Z respective, ad triplum momenti eorundem solidorum suspensorum in distantiis z Y : Nempe ut $\frac{5}{32}$ $R\,\overline{2R-P}^{3} - \frac{1}{3}\,R^{3}P$ ad $\frac{2}{3}\,R^{3}P$, sive ut 15 A F q — 20 C F q ad 4 C F q. (Quod § 87 & seqq. fusius declaratur.) Quæ quidem ratio si cum ratione 7 ad 3 conjungatur, habetur ratio momenti (respectu rectæ C F) solidi ex conversione (vel semiconversione) semicycloidis circa rectam A F, ad momentum solidi ex simili conversione (vel semiconversione) semicirculi: Nempe $\frac{5}{32}\,RP^{3} - \frac{16}{9}\,R^{3}P$ ad $\frac{2}{3}\,R^{3}P$, sive ut $45\,P^{2} - 512\,R^{2}$ ad $192\,R^{2}$, Hoc est, ut 45 A F q — 32 C F q ad 12 C F q.

47. Si itaque ponamus G E distantiam centri gravitatis solidi ex ea conversione vel semiconversione semicirculi, (a recta C F;) & fiat, ut 12 C F q ad 45 A F q — 32 C F q, sic G E ad G e ; iterumque, ut 5 ad 2, sic G e ad G r ; & ducatur r γ parallela rectæ C F : Erit semisolidi ex conversione (hoc est solidi ex semiconversione) Semicycloidis circa rectam A F, centrum gravitatis in recta r γ ; adeoque in ipsius eo puncto ubi occurritur rectæ Δ ♪ modo inventæ § 45. (Designamus autem in schemate centrum gravitatis in ea semicycloide, ubi minor futura esset linearum confusio ; perinde enim ad rem est, in utrâ designetur.

Centrũ solidi integri, circa A F.

48. Habito autem centro gravitatis in semisolido, a fortiori

ri in ſolido integro haberi certum eſt : puta in Axis puncto γ.

49. Eodem fere proceſſu (mutatis mutandis , ut ſupra § 31,) colligitur centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione ſegmenti ζ Z C F circa rectam A F ; & conſequenter etiam centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione ſegmenti C Z Y, tum circa rectam A F, tum & circa rectam Z Y. *Centrũ ſemiſolidi ex ſegmento.*

50. Tandem ſupereſt ut centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione Semicycloidis circa rectam C F inveſtigemus. Nempe ſi ſemiſolidum illud plano abſcindatur quod plano CAF in recta C F recte inſiſtat ; manifeſtum eſt gravitatis centrum fore in ipſo plano C A F. Quæritur, in quonam ejus puncto. Hoc modo. *Centrum ſemiſolidi circa C F.*

51. Semiſolidum ex converſione trianguli υ F p, erit ſemiconus excavatus ; cujus propterea centrum gravitatis, ſi curvaturam demas , erit in rectæ z F puncto H , quod abſcindat F H = ¼ z F ; (nempe in recta z F ſic ſecta ut ſecanda eſſet F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus ſolidi integri;) ſed deinde, propter curvaturam ſemicircularem verſus rectam C F , (ſi verum gravitatis centrum indagare libeat,) abſcindenda eſt rectæ H h , ea portio verſus h, quæ ſit ad totam H h ut diameter circuli ad ſemicircumferentiam; (ſic utique dividendus eſt axis ſemicirculi ut habeatur ſemiperipheriæ centrum gravitatis.)

52. Semiſolidum autem ex converſione Trapezii V β ν P, eſt fruſtum coni excavatum , cujus centrum gravitatis (ſi curvaturam demas) eſt in rectæ ζ Z eo puncto, puta K, quo ita dividitur ut dividenda eſſet F Y ad inveniendum centrum gravitatis hujus ſolidi integri , nempe excavati fruſti conici. Centrum autem gravitatis verum, eſt (propter curvaturam) in rectæ K k eo puncto quo ita dividitur ut de H h modo diximus.

53. Cum itaque horum ſemiſolidorum ratio momentorum , tum reſpectu rectæ C F, tum rectæ A F , componatur ex rationibus magnitudinem & diſtantiarum; reperientur puncta τ, Δ, ſimili fere methodo quo ſupra ; adeoque & punctum ♌, centrum gravitatis ſemiſolidi ; & ſimul centrum gravitatis ſolidi integri, puta punctum Axis Δ.

54. Cumque ſimiliter faciendum ſit (mutatis mutandis ut § 31, 49,) de ſemiſolido ex converſione ſegmenti , puta ζ Z C F; pariter *Centrum ſolidi ex ſegmento.*

pariter datum erit & hujus centrum gravitatis ; & conſequenter (propter datum etiam centrum gravitatis ſemiſolidi ex converſione Trapezii ζ Z Y F,) centrum gravitatis ſemiſolidi (adeoque & ſolidi integri) ex converſione ſegmenti C Z Y circa C F. Dabuntur itaque quæ quærebantur omnia.

55. Poſſumus autem hæc eadem exhibere, etiam ſine ope centrorum K, H, &c ; methodo mihi quidem facili & familiari, ex principiis in noſtra *Infinitorum Arithmetica* traditis deſumpta, (& quidem in multis expeditiùs :) ſed quam alii forſan haud ita prompte ſine longiori verborum apparatu aſſequerentur.

Atque hactenus ea ſunt quæ ad D. Carcavium menſibus Auguſto & Septembri, Anni 1658, miſeram (hoc eſt, intra tempus a proponente limitatum,) methodum meam, totiuſque rei quaſi ſceleton, exhibentia: Et quidem iiſdem fere tum verbis tum ordine ; Niſi quod ad § 30 numeros emendaverim qui vitioſi erant, utpote quos inveſtigando Trilineum C A F fig. 7. circa rectam A F incautus converteram cum circa C F convertendum eſſet, & ſimiliter ad § 46 ; Quem calculi lapſum ubi deprehenderam, literis eodem Septembri datis inſinuabam; meque inſuper tum iſtius emendationem, tum alia quæ ſibi ſuiſve ad juſtam demonſtrationem deeſſe viſa forent, ubi hoc indicaverint, exhibiturum. Cum autem nihil inde hactenus monitus fuerim, (quod oblatæ conditiones expectandum innuunt, ut & emendandi calculi veniam impune permittunt ;) ea tamen quæ ſequuntur, quaſi ſcholiorum inſtar, ad præcedentium tum illuſtrationem tum juſtam demonſtrationem, libet hic ſubjungere.

Centrum portionis cylindri obliqué ſecti, & ſemiannuli.

56. Quum ſupra § 45 deſiderari videatur punctum G, quod ibidem deſignat (non centrum circuli, ſed) centrum gravitatis ſemiannuli ex ſemiconverſione circuli C F circa rectam A D : Illud hac methodo inveſtigamus. Super circulo C z F fig. 5. (qui circulo C z F genitori Cycloidis æquetur) erigatur Cylindrus rectus F c, altitudinem habens C c circuli genitoris perimetro æqualem, adeoque æqualem ſemiperipheriæ circuli radio F C deſcripti. Et intelligatur Cylindrus ille biſecari, tum per axem plano F c C parallelogrammo ; tum per hujus diagonalem

Fig. 5.

F c

F c transeunte plano elliptico F c ζ, quod plano F C c recte insistat ; tum denique plano basi parallelo φ κ; reliquaque construantur ut in schemate. Dico primò, Cylindri portionem plano elliptico abscissam F ζ ζ c C, per omnia æquari semiannulo exposito, dempta curvaturâ. Nempe rectam C c æquari semicirculo à puncto C descripto ; & similiter rectas Y υ, z ζ, (sumptis ubivis in base Cylindri respectivis punctis Yz,) semiperipheriis punctorum similiter positorum in semiannulo ; item Y ζ parallelogrammum, semisuperficiei cylindricæ recta Y z in annulo descriptæ ; & sic ubique. Nec aliter differt hæc portio Cylindrica ab illo semiannulo, quam quod semisuperficies cylindricæ omnes rectis Y z in annulo descriptæ, in portione Cylindri in planum expandantur ; adeoque hæc Cylindri portio tantundem valet atque semiannulus dempta curvitate.

57. Centrum autem gravitatis in exposita Cylindri portione, sic colligitur. Si ponamus C c lineam æquilibrii (adeoque planum huic perpendiculariter insistens, æquilibrii planum ;) erunt, tum altitudines Y υ ad invicem, ut rectæ F Y ; tum distantiæ ab æquilibrii plano, ut Y C ; adeoque, quæ ab ipsis fiunt, ut rectangula F Y C, hoc est, ut quadrata Y z ; quæ quidem in ipsas Y z ducta, hoc est, facta ex basis in altitudinem & distantiam continuo ductu, hoc est, planorum Y ζ momenta respectu rectæ C c, sunt ut cubi rectarum Y z. (Per *momentum* autem, tum hic, tum passim alibi, intelligo factum ex magnitudine in distantiam ab æquilibrii plano ducta ; ut quæ momentis sunt proportionalia.) Sunt autem omnes cubi rectarum Y z, ad totidem cubos rectæ C F ; hoc est, momentum F Y υ ζ c C portionis semicylindri in suo situ, ad momentum Parallelepipedi æquealti basin habentis quadratum F C ex puncto F suspensi ; ut 3 ad 32 □ ; (ubi per 1 ad □ intelligo rationem circuli ad quadratum diametri, sive ut *P* ad 4 *D* ;) quod mox probabitur § 63 ; adeoque, ad momentum Cylindri parallelepipedo illi inscripti similiter suspensi, ut 3 ad 32 ; (substituris scilicet circulis pro diametri quadratis :) Et propterea, momentum F ζ ζ c C Portionis integri Cylindri in suo situ, ad momentum Cylindri sic suspensi, ut 3 ad 16. Est autem magnitudo ad magnitudinem, ut 1 ad 2. Ergo, distantia ad distantiam, ut 3 ad 8. Si itaque dividatur F C in g, ut sit C g ad C F ut 3 ad 8 ; & ducatur

catur $g\gamma$ rectæ Cc parallela : Erit centrum gravitatis portionis expositæ $F\zeta\zeta c C$ in recta $g\gamma$. Sed &. (quod tamen ad præsens negotium quæsitu non est necessarium, ipsum enim g punctum jam inventum nobis sufficit,) idem gravitatis centrum est in recta $F\varkappa$, (quippe quæ per omnium $z\zeta$ parallelogrammorum centra transit, ipsique revera FC in annulo respondet ;) ergo in eorum communi puncto γ.

58. Si itaque ut rectam $F\varkappa$ in γ, vel FC diametrum basis Cylindri in g, ita & FC axem annuli dividamus in g, (quod semiannuli centrum gravitatis esset dempta curvatura:) ipsamque $Fg = \frac{5}{8} D$ dividamus iterum (propter curvaturam) in G, ita ut sit FG ad Fg, ut circuli diameter ad semicircumferentiam ; erit G centrum gravitatis semiannuli ex semiconversione circuli FC circa AF rectam. Habetur itaque (quod §. 45. supponitur) semiannuli centrum gravitatis G. (nempe, ut $\frac{1}{2} P$ ad D, sic $Fg = \frac{5}{8} D$ ad $\frac{5}{4} \frac{D}{P} D = FG$.) Et consequenter, propter $\frac{1}{2}) \frac{7}{2} \times \frac{5}{4} \frac{D^2}{P}$ ($\frac{7}{6} \frac{D^2}{P}$, erit $\frac{7 D^2}{6 P}$, vel $\frac{14 R^2}{3 P}$, $= F\Delta$ fig. 1. distantia centri gravitatis solidi (semiconversione semicycloidis circa AF facti) ab AF.

59. Ut autem habeatur E, centrum gravitatis semiannuli ex simili semiconversione semicirculi, sumenda adhuc erit, à puncto G jam proxime invento, recta GE (basi parallela) quæ tanta sit quanta distantia centri gravitatis semicirculi FC à circuli centro ; quæ nempe sit ad $\frac{1}{2} FC$ (sive $\frac{2}{3}$ radii) ut FC ad FA, sive ut D ad $\frac{1}{2} P$.

60. Quod autem §. 57. probandum suscepimus, Nempe omnes cubos rectarum Yz ad totidem cubos CF, esse ut 3 ad 32 □ ; sic ostenditur ex nostræ *Infinitorum Arithmeticæ* principiis. Si ponamus diametrum $FC = D$ in partes æquales numero infinitas dividi in punctis Y ; erunt omnes $FY = a$ series infinita Primanorum, sive Arithmeticæ proportionalium, quorum maximum est D ; quæ in $YC = D - a$ respective ductæ, dant Residua $aD - a^2$ omnia rectangula FCY, hoc est omnia Quadrata Yz ; quæ ad totidem D^3 sunt 1 ad 6 ; Residuorum vero Quadrata, hoc est rectarum Yz Biquadrata, ad totidem D^4, ut 1 ad 30; Residuorum cubi, hoc est rectarum Yz potestates sextæ, ad totidem

totidem D^6, ut 1 ad 140.&c. Unde colligitur series 1, 6, 30, 140, 630, &c. (Arith. Infin. pr. 133.) Quæ non alia est quam series $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c, in seriem Geometrice proportionalium 1, 4, 16, 64, 256, &c, respective ducta : Adeoque series illa (ibid. prop. 189.) interpolata $1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\square, \frac{15}{8}, \frac{8}{5}\square$, &c, in hanc item interpolatam 1,2,4,8,16,32,&c, respectivè ducta, exhibebit illã primã interpolatã $1,2\square, 6, \frac{32}{3}\square, 30, \frac{256}{5}\square, 140$, &c.Et propterea,sicut 1 ad 6,30,140,&c,exhibent rationes quas habent rectarum omnium Y z potestates secunda, quarta, sexta, &c. ad totidem D^2, D^4, D^6,&c : Sic 1 ad $2\square, \frac{32}{3}\square, \frac{256}{5}\square$, &c, exhibebunt rationes quas habent earundem rectarum Y z potestates prima, tertia, quinta, &c, ad totidem D, D^3, D^5, &c. Et speciatim(quod nostra jam interest)omnes cubi rectarum Y z, ad totidem D^3 sive cubos FC,rationem habebunt 1 ad $\frac{32}{3}\square$, sive ut 3 ad 32 $\square$. Quod suscepimus probandum.

61. Porro, quum calculus ad § 51, 52,53,54, (ubi agitur de centro gravitatis solidorum ex conversione Semicycloidis circa rectam C F) omissus sit, & calculi tantum fundamenta remotiora exhibita : libet hic calculum illum aliquatenus exhibere, juxta methodum quam § 55 insinuavi. Et primo quidem perpendemus conversionem Trianguli v F p, deinde Trapezii V β γ P. Rectam autem in Triangulo v p, adeoque & $C\gamma$ in Trapezio, dicemus B; ejusque aliquotam partem infinite exiguam b; adeoque V P erit $B+B$, vel 2 B. Item z Y, dicemus Y; ejusque partem infinite exiguam, y. Et rectam F Y, hoc est altitudinem, vel etiam distantiam ab A F, dicemus A; ejusque partem infinite exiguam, a. Rectam denique z Z, dicemus Z. *Centrum gravitatis semisolidi circa C F.* Fig.1.

62. His positis ; supponimus in Triangulo v F p infinitas rectas parallelas arithmetice proportionales, à vertice F ad basin usque v p continuatas,o, 1 b, 2 b, 3 b,&c, usque ad B earum maximam, quæ est ipsa v p. Hæ autem rectæ, dum circa rectam F C convertuntur, describunt totidem annulos planos (saltem hujusmodi annulorum partes similes) æquales totidem rectangulis parallelogrammis à rectis ipsis quæ convertuntur, & peripheriis quæ earum punctis mediis describuntur, contentis ; quas peripherias, sive integras sive dimidias, cum sint radiis proportionales, per ipsos radios designabimus, nempe o, 1 y, 2 y, 3 y, &c, usque ad Y, hoc est z Y radiorum illorum maximum. Erunt igitur plana

illa, ut $00, 1b \times 1y, 2b \times 2y, 3b \times 3y$, &c, hoc est, $00, 1by, 4by, 9by$, &c, usque ad BY. Deinde, cum horum planorum momenta respectu rectæ A F, sint factis ex magnitudinibus in distantias proportionalia; sintque distantiæ, ut $0, a, 2a, 3a$, &c, usque ad A; erunt ea momenta ut $0by \times 0a, 1by \times 1a, 4by \times 2a, 9by \times 3a$, &c, hoc est $000, 1aby, 8aby, 27aby$, &c, usque ad A B Y. Hoc est, omnia momenta, sunt series Tertianorum; Quæ Tertianorum series, ad totidem maximo æqualia, hoc est ad maximum in altitudinem ductum, hoc est ad Cylindrum vel Prisma ejusdem vel æqualis basis æquealtum ex puncto Y suspensum, est ut 1 ad 4. Quod dicamus igitur $\frac{1}{4} AABY$.

63. Eodem modo; Infinitæ rectæ Trapezii, à minima B, hoc est $\beta\gamma$, ad usque $B+B$, sive $2B$, hoc est V P; sunt $B+0, B+b, B+2b, B+3b$, &c, usque ad $B+B$. Radii vero peripheriarum à mediis rectarum punctis descriptarum, sunt $Z+0, Z+y, Z+2y, Z+3y$, &c, usque ad $Z+Y$. Ex quibus seriebus invicem respectivè ductis fit series magnitudinum, $BZ+0Z+0B+00, BZ+bZ+yB+by, BZ+2bZ+2yB+4by, BZ+3bZ+3yB+9by$, &c, usque ad $BZ+BZ+YB+BY$. Quæ si ducantur in respectivas suas ab A F distantias $0, a, 2a, 3a$, &c usque ad A; fiet series Momentorum

Fig. 1.

$$0BZ+000Z+00B+000$$
$$aBZ+abZ+ayB+aby$$
$$2aBZ+4abZ+4ayB+8aby$$
$$3aBZ+9abZ+9ayB+27aby$$
&c usque ad
$$ABZ+ABZ+AYB+ABY$$

Cujus summa est $\frac{1}{2} AABZ+\frac{1}{3} AABZ+\frac{1}{3} AAYB+\frac{1}{4} AABY$.
sive $\frac{5}{6} AABZ+\frac{7}{12} AABY$.

64. Cum igitur sit ratio momenti hujus ad momentum illius, ut $\frac{1}{6} AABZ+\frac{7}{12} AABY$ ad $\frac{3}{4} AABY$; hoc est (dividendo per A A B) ut $\frac{2}{6} Z+\frac{7}{12} Y$ ad $\frac{3}{4} Y$, sive (ductis omnibus in 12) ut $10Z+7Y$ ad $3Y$: Nempe, ut 10 z Z + 7 z Y ad 3 z Y, (eadem scilicet ratio quæ & supra § 46,) Atque hoc ubique: Propter omnes 7 z Y ad 3 z Y, ponenda ratio 7 ad 3; & propter 10 z Z ad 3 z Y, eadem quæ supra § 46. Et quidem eandem utrobique rationem provenire necesse est, (utut variis modis libuerit investigare:) Nam momentum solidi ex conversione ejusdem

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [36] - 20
PUBLIC DOMAIN

juſdem figuræ circa A F reſpectu rectæ C F, atque circa C F reſpectu rectæ A F (propter magnitudinum & diſtantiarum reciprocationem) tantundem erit. Adeoque hinc habetur tum diſtantia centri gravitatis ſemiſolidi ex ſemicycloidis ſemiconverſione circa C F, a recta A F; tum integri iſtius ſolidi ipſiſſimum gravitatis centrum, utpote quod in C F ſitum eſſe conſtat.

65. Quantum autem ad diſtantiam centri gravitatis ejuſdem Semiſolidi (ex ſemiconverſione ſemicycloidis circa C F) ab ipſa C F: ſimili methodo inveſtiganda erit. Cum enim ſolidum ex ſemiconverſione Trianguli υ F p circa C F, ſit aggregatum ſeriei $0\,by$, $1\,by$, $4\,by$, $9\,by$, &c, uſque ad BY, (ut ſupra § 62:) Et ſolidum ex ſemiconverſione Trapezii V β υ P circa eandem C F ſit aggregatum ſeriei $BZ+0Z+0B+00$, $BZ+bZ+yB+by$, $BZ+2bZ+2yB+4by$, $BZ+3bZ+3yB+9by$, &c (ut ſupra § 63.) Si utraque ſeries ducatur in ſeriem ſuarum reſpective diſtantiarum a recta C F; (nempe illa, in 0, y, $2y$, $3y$, &c uſque ad Y; & hæc, in $Z+0$, $Z+y$, $Z+2y$, $Z+3y$, &c uſque ad $Z+Y$;) habebitur ſeries momentorum eorundem ſolidorum reſpectu lineæ æquilibrii C F. Unde & aggregati ad aggregatum ratio; hoc eſt, momenti Semiſolidi ex Triangulo, ad momentum ſemiſolidi ex Trapezio (circa C F converſo) reſpectu rectæ C F. Nempe

$0byy$	$BZZ+0bZZ+0yBZ+0byZ+0yyB+0byy.$
$1byy$	$BZZ+1bZZ+2yBZ+2byZ+1yyB+1byy.$
$8byy$	$BZZ+2bZZ+4yBZ+8byZ+4yyB+8byy.$
$27byy$	$BZZ+3bZZ+6yBZ+18byZ+9yyB+27byy.$
&c uſque ad	&c in infinitum uſque ad
BYY	$BZZ+BZZ+2YBZ+2BYZ+YYB+BYY.$

Summa $\frac{1}{4}ABYY$ ad ſummā $ABZZ+\frac{1}{2}ABZZ+\frac{2}{2}AYBZ+\frac{2}{3}ABYZ+\frac{1}{3}AYYB+\frac{1}{6}ABYY.$

ſive $\frac{1}{4}ABYY$	ad	$\frac{3}{2}ABZZ$	$+\frac{5}{3}ABYZ$	$+\frac{7}{12}ABYY.$	
Eſt ut $\frac{1}{6}YY$	ad	$\frac{3}{2}ZZ$	$+\frac{5}{3}YZ$	$+\frac{7}{12}YY.$	
ſive ut $3YY$	ad	$18ZZ$	$+20YZ$	$+7YY.$	

Hoc eſt, ut 3 quadrata rectæ z Y, ad 18 quadrata rectæ z Z una cum 20 rectangulis Z z Y, & 7 quadratis z Y. Quod cum ubique fiat: ut habeatur ratio momenti ſolidi ex ſemiconverſione omnium Trapeziorum, hoc eſt Semicycloidis, ad momentum

ſolidi

solidi ex conversione omnium Triangulorum, hoc est Semicirculi, (circa rectam C F ;) quærenda ratio tum omnium Quadratorum z Z arithmetice proportionalium, tum omnium Rectangulorum Z z Y, in respectiva Triangula v F p, sive (propter æquales ubique v p) in respectivas Altitudines Y F ; ad omnia Quadrata z Y in eadem respectiva sive Triangula sive Altitudines. Atque ista demum ratio si ducatur in rationem 18 ad 3, sive 6 ad 1 ; atque hæc quidem in rationem 20 ad 3 ; & utrisque tandem (sic ductis) adjungatur ratio 7 ad 3 : Habebitur ratio ea quam habet momentum solidi ex semiconversione Semicycloidis circa C F, ad momentũ solidi ex Semicirculi circa eandem CF semiconversione, respectu ejusdem C F lineæ æquilibrii. Unde si eximatur ratio magnitudinum ; habebitur ratio distantiarum centrorum gravitatis.

Fig. 1.

66. Similiter si sumantur (in fig. 1 vel 8) omnes Z Y æqualibus intervallis dissitæ ; ex quarum semiconversione circa C F fit solidum Cycloidale, sicut ex semiconversione Semicirculi sive omnium in eo ordinatim-applicatarum circa eandem rectam fit Hemisphærium : Erit momentum illius ad momentum hujus, respectu ejusdem C F rectæ, ut omnes cubi rectarum C Y, ad omnes cubos rectarum z Y: Hoc est, ut omnes z Z c + 3 z Z q × z Y + 3 z Z × z Y q + z Y c, ad omnes z Y c. Quæ quidem omnia similibus methodis ad calculum revocanda sunt atque superiora.

Segmenta Circuli & Sphæræ.

67. Porro, siquis de Segmentorum Circularium & Sphæricalium sive Magnitudinibus sive gravitatis Centris hæsitet, (quæ supra § 33, 40, dari supponimus,) sic habeat. De circulo, nemo nescit, ex ductu Semiradii in arcum z C vel z z Fig. 6. haberi sectorem z G C vel z G z ; cui si auferatur Triangulum z G C, vel z G z, manebit segmentum z C vel z z C ; (intellige, si z C z arcus non excedat Semiperipheriam; ubi enim excedit, non auferendum est, sed addendum Triangulum z G z:) Tum, addendo Triangulum zFC vel zFz, haberi Sectorem zFC vel zFz. Et sic alibi. Et in Sphæra similiter, superficies sphærica zCz, abscissa plano z Y z est ad totam sphæræ superficiem, sive quadruplum circuli maximi, ut C Y ad C F, (uti notum est:) ea vero ducta in trientem radii, dat sectorem sphæricum G z z C (factum ex con-

Fig. 6.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [38] - 22
PUBLIC DOMAIN

converſione ſectoris circuli z G C circa G C;) unde ſublato cono G z z, manebit portio z z C ; (intellige de portione quæ hemiſphærium non excedit ; ſin excedat , addendus eſt, non auferendus, conus ille :) cui portioni ſi addatur conus F z z, habetur ſphæricus ſector F z z C, ſive ſolidum ex converſione ſectoris circularis z F C circa C F factum. Et ſimiliter de ſegmentis aliis.

68. Vel etiam idem Sector Sphæricus ſic colligi poterit non ineleganter : Inventis nempe tum circumducti Sectoris circularis magnitudine , ut ſupra, tum centro gravitatis, per § ſeq. Sector ille circularis ductus in peripheriam hujus centri converſione deſcriptam, dat ſectoris Sphærici magnitudinem. Sed & memorata ſuperficiei Sphæricæ portio plano abſciſſa, eodem modo colligi poterit : habitis nempe arcus z C tum magnitudine tum centro gravitatis : quippe arcus ille in peripheriam hoc centro circumducto deſcriptam ductus, dat illam ſuperficiei Sphæricæ portionem : (quæ quidem omnia, quod oppidò notandum eſt, non tantum de converſionibus integris ſed & partialibus perinde valent ;) unde non modo portiones jam dictæ, ſed & aliæ variis modis poſitæ, menſuræ ſubjiciuntur : (Vel, vice verſa , Habitis tum portionis ſuperficiei Sphæricæ , tum & arcûs circularis magnitudinibus, invenietur ipſius arcûs centrum gravitatis. Centrum autem gravitatis arcus cujuſvis, in radio biſecante ſitum, diſtat à centro circuli eâ radii parte quæ ſit ad radium integrum, ut iſtius arcûs ſubtenſa ad ipſum arcum : Diſtat vero idem gravitatis centrum à diametro huic arcui conterminâ , ſimili ſemiſubtenſæ parte. Arcuum denique, ut C z, momenta , reſpectu conterminæ diametri , ut C F, ſunt ad invicem, ut eorum ſinus verſi, C Y. Sed hæc obiter, atque ex abundanti.)

69. De centro gravitatis in Segmentis circuli, res item conſtat. Cum enim, ob datam (quæ dari ſupponitur) rationem altitudinis ad baſin Cycloidis, hoc eſt , Diametri ad Circumferentiam circuli , detur etiam arcûs (puta z C z fig. 6.) magnitudo ; dabitur etiam ſegmenti centrum gravitatis. Nempe ſi fiat (in radio G C qui arcum biſecat) ut z C z arcus, ad ſui ſubtenſam z z ; ſic $\frac{2}{3}$ radii , ad G E : erit E centrum gravitatis Sectoris z G z ; ſive Semicirculo majus ſit , ſive minus, ſive æquale. [Quod quidem tum ab aliis, & nominatim Hugenio, demonſtratum

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Circularis.

tum est ; tum si opus est, sic more nostro poterit demonstrari : Si intelligatur G z C z Sector, ex æqualibus similibusque triangulis numero infinitis conflari, quæ totidem radii repræsentent ; per horum omnium centra gravitatis quæ transit curva, adeoque radiorum illorum duas tertias abscindit, erit similis arcus circuli radium habentis $\frac{2}{3}$ G C ; cujus quidem arcus singula puncta (utpote æqualium triangulorum centra gravitatis) cum supponenda sint æque onerata, idem erit tum hujus arcus, tum exposiri Sectoris, centrum gravitatis : Hujus autem arcûs centrum gravitatis habetur, si fiat (quod modo dictum est & mox probabitur) ut arcus ille ad suam subtensam (hoc est, ut arcus similis z C z, ad subtensam suam zz,) sic radius dicti arcûs $\frac{2}{3}$ G C (nempe $\frac{2}{3}$ radii Sectoris expositi) ad quartam, quæ erit G E : Est itaque punctum E tum hujus arcûs, tum propterea Sectoris expositi, centrum gravitatis: Quod ostendendum erat. Quod autem arcûs centrum gravitatis illud est quod diximus ; sic probatur. Quoniam parallela plana eâdem ratione secant superficiem Sphæricam, quâ secant axem, (quod ab Archimede & aliis demonstratum est ;) Manifestum est, portionem superficiei Sphæricæ quæ arcu z C z Semicirculum non excedente circa b b axem converso describitur, eam rationem ad totam sphæræ superficiem habere, quam habet z z subtensa (vel axis portio huic respondens) ad b b axem integrum : Puta, ut axis D, ad subtensam s ; sic tota Sphæræ superficies $D\,P$, ad portionem arcu descriptam ; quæ itaque est $s\,P$. Quæ quidem portio si, per magnitudinem arcus a, dividatur, prodibit $\frac{s}{a}P$ peripheria centro gravitatis istius arcûs descripta, adeoque hujus peripheriæ radius, hoc est distantia centri gravitatis dicti arcus a centro circuli, $\frac{s}{a}R$: Nempe ea pars radii $G\,C = R$; quæ est ad totum, ut s ad a, subtensa dicti arcus ad ipsum arcum : Quod probandum suscepimus. Et similiter de centro gravitatis Sectoris z G C (aut alîus cujusvis) eodem processu constabit. Et speciatim, semicirculi centrum gravitatis, a circuli centro distat, $\frac{8\,R}{3\,P}R$, sive $\frac{2\,D^2}{3\,P}$: Nempe ut $\frac{1}{4}P$ ad $D = 2\,R$, sic $\frac{2}{3}R$ ad $\frac{8\,R^2}{3\,P} = \frac{2\,D^2}{3\,P}$. Datis

Fig. 6.

vero

vero Sectoris cujusvis z G C, & z C G trianguli, tum magnitudinibus tum centris gravitatis, datur etiam centrum gravitatis segmenti z C. Datis autem tum segmenti z C, tum trianguli z C Y, magnitudinibus & gravitatum centris, datur etiam centrum gravitatis aggregati z Y C. Et similiter de Sectoris z F C, alíusve, centro gravitatis constabit.

Centrum Gravitatis Sectoris, vel Segmenti, Spharici.

70. In portionibus Sphæræ, centrum gravitatis sic colligitur. Quadratum rectæ z Y fig. 6. æquat ubique quadratum Radii minus quadrato G Y, (quod patet.) Dicamus autem, ut alibi, Radium R, ejusque partem aliquotam infinite exiguam r. Erunt igitur quadrata omnium z Y (quadrantem b C G complentium) $R^2 - 0$, $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c usque ad $R^2 - R^2$, (quod est punctum verticis C.) Sin pro Quadratis hisce substituamus ubique circulos, lateribus quadratorum ut Radiis descriptos, (adeoque quadratis illis proportionales:) pro omnibus R^2 habebimus circulos Cylindri, hemisphærio circumscripti; pro omnibus $0 0$, r^2, $4r^2$, $9r^2$, &c, Circulos Coni, cujus vertex G centrum Sphæræ, basis eadem cum basi Cylindri, in plano quod Sphæram in C tangit; pro utrorumque vero differentiis $R^2 - 0$, $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c, Circulos hemisphærii, (quadratis utique rectarum z Y proportionales;) qui propterea æquales deprehenduntur planis annulis cylindri conice excavati: Sed & eadem habebunt gravitatis centra, (nempe respectiva puncta Y, in recta G C:) æquiponderabunt itaque tum singula singulis respectivè, tum omnia omnibus; idemque erit centrum gravitatis cylindri hujus conice excavati, atque hemisphærii: Nempe in eo axis hemisphærii puncto quo ita dividitur, ut pars ad centrum Sphæræ sit ad reliquam ut 3 ad 5, sive $\frac{3}{8}$ totius: Id enim ob datum tum Cylindri, tum exempti coni, magnitudines & gravitatis centra facile colligitur.

71. Vel sic. Cum circuli hemisphærium complentes, sint (quod modo dictum est) ut $R^2 - r^2$, $R^2 - 4r^2$, $R^2 - 9r^2$, &c, (hoc est, juxta nostram Arithmeticam Infinitorum, ut series Æqualium dempta serie Secundanorum, quæ ad correspondentem seriem Æqualium, est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, hoc est ut $\frac{2}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3; quæ itaque est ratio Hemisphærii ad circumscriptum Cylindrum;) sintque eorundem Circulorum distantiæ à centro sphæræ, ut r, $2r$, $3r$, &c, nempe series Primanorum:

Hæc distantiarum series in seriem magnitudinum respective ducta, dat seriem $rR^2 - r^3$, $2rR^2 - 8r^3$, $3rR^2 - 27r^3$, &c; hoc est seriem Primanorum dempta serie Tertianorum, quæ ad correspondentem seriem Æqualium est ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, hoc est ut $\frac{1}{4}$ ad 1, sive ut 1 ad 4. Quæ quidem series cum sit momentis dictorum Circulorum respectu Centri sphæræ proportionales, (quorum utique rationes sunt ex rationibus magnitudinum & distantiarum compositæ;) erunt eorundem omnium in suis locis momenta, ad momenta totidem maximo æqualium in maxima distantia; hoc est, momentum Hemisphærii in suo situ, ad momentum circumscripti Cylindri ex puncto C suspensi, (respectu centri G;) ut 1 ad 4. Est autem magnitudo ad magnitudinem (quod jam ostensum est) ut 2 ad 3: Ergo, propter $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{8}$, distantia ad distantiam, ut 3 ad 8. Distat itaque centrum gravitatis Hemisphærii a centro Sphæræ, $\frac{3}{8}$ Radii. Ut prius.

72. Et simili processu (juxta utramvis methodum) de centro gravitatis in aliis Sphæræ partibus judicandum est. Nempe idem esse centrum gravitatis Segmenti Sphærici plano z z abscissæ, atque segmenti sic excavati Cylindri eodem plano abscissæ. Sed & similiter judicandum est de centro segmenti Sphærici duobus planis axi rectis interjecti: Et quidem sive in eodem sint sive in oppositis Hemisphæriis ea plana; si & circa reliquum Hemisphærium constituatur Cylindrus similiter excavatus. Cum itaque tum Cylindri, tum allati Coni vel frusti conici magnitudines & centra gravitatis non ignorentur; nec ignorabitur centrum gravitatis figuræ excavatæ, adeoque nec Segmenti Sphærici planis quibuscunque parallelis abscissi.

73. Datis autem segmenti Sphærici z z C (sive Hemisphærium sit, sive majus aut minus hemisphærio) tum magnitudine tum centro gravitatis; si eidem adjiciatur, vel auferatur, conus z z G, vel zzF, vel aliud quodvis solidum cujus tum magnitudo tum centrum gravitatis innotescunt; dabitur & aggregati vel residui centrum gravitatis. Et quidem, quantum ad Sectores Sphæricos, ut G z z C, sunt illi respectivis superficiei Sphærici segmentis z z C, adeoque & Y C rectis, proportionales; (æquales utique $\frac{1}{3}$ Radii in illam superficiem ducto:) Suorumque centrorum gravitatis a centro circuli distantiæ, sunt rectis G E (si intelligatur E punctum medium inter C & Y) proportionales; æquales.

æquales utique $\frac{3}{4}$ G E. Idem nempe erit centrum gravitatis Sectoris Sphærici G z z C, atque segmenti superficiei sphæricæ segmento z z C similis & concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C. Ut enim E (punctum medium rectæ C Y) est centrum gravitatis segmenti Superficiei sphæricæ z z C (propter segmenta superficiei sphæricæ segmentis Axis iisdem planis abscissis ubique proportionalia;) ita Segmenti similis concentrici radium habentis $\frac{3}{4}$ G C (cujus singula puncta, utpote conorum vel pyramidum totidem æqualium Sectorem Sphæricum complentium centra gravitatis, æqualiter onerari intelligenda sunt) centrum gravitatis erit in suo radico similiter situm. Quod ipsum est & centrum gravitatis Sphærici Sectoris, sive pyramidum simul omnium numero infinitarum Sectorem illum complentium.

74. Quam superius (§ 30) suscepimus rationem, 9 A F q — 4 C F q ad 2 C F q, ostendendum; eam sic investigamus. Primo quidem cum Trilineum C Z A F z fig. 1. in Semicycloide (propter Semicirculi interpositionem inter trilineum illud ejusque axem C F) sit distortum; intelligamus (exempto semicirculo) *trilineum illud restitui* in situm debitum, protrusis scilicet omnibus Z z ad rectam C F, ut puncta z coincidant punctis Y: & sic ubique. (Quod tantundem est atque superficiem curvam trilineam τ ζ F z C fig. 2. in planum expandere.) Quo facto, rectæ ζ Z &c prius inclinatæ in Fig. 1. erigentur ut in Fig. 7. Exemptis nempe Trapeziorum omnium Triangulis (quæ Triangulis Semicirculi ubique æquantur) manebunt tantum Parallelogramma, Triangulorum illorum dupla: puta Parallelogrammum V P ν β in *Trilineo restituto*, duplum Trianguli ν F p in Semicirculo, (& sic ubique:) Ut eadem jam sit ratio omnium z Z in hæc respectiva Parallelogramma, ad omnes z Y in eadem Parallelogramma; atque prius in sua respectivè Triangula, vel horum eorumve altitudines.

Momentum semicycloidis respectu Axis, & solidum conversione circa Axem factum.

Fig. 7.

75. Cum, sumptis Y, y, æqualiter utrinque à centro G remotis, altitudines binæ F y F Y simul sumptæ æquent ubique F C, sintque z Y m y æquales; erit ubique z Y × F Y + m y × F y = z Y × F C. Sive, quod tantundem est, quadrilineum M μ λ L una cum quadrilineo Z ζ ν N, complent Parallelogrammum basis ζ ν altitudinis F C, (altero scilicet supplente quod in altero deest.) Adeoque perinde est sive ducamus omnia Parallelogramma

rallelogramma vel Quadrilinea Trilinei restituti C Z A F in omnes respectivè rectas z Y totius Semicirculi, sive omnia minuta Parallelogramma Parallelogrammi Cβ in omnes respective rectas z Y unius quadrantis; hoc est, in omnes sinus rectos arcuum arithmetice proportionalium in Quadrante; hoc est, in omnes respectivè rectas, æqualibus intervallis sumptas, trilinei C B b ipsi C b parallelas, incipiendo a B (quod statim ostendetur.) Hoc Fig.7. est, perinde est sive super basi A F $\varkappa$, erigamus figuram altitudinum respectivè earundem cum trilineo restituto C A F: sive super basi F β $\varkappa$, hoc est B b C, figuram altitudinis C F ubique; (posito nimirum figuras tum A β $\varkappa$, tum F β $\varkappa$, figuræ B b C congruere.) Quod autem rectæ Trilinei C B b sint arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, sic constat: Cum enim propter tum Semiperipheriam C b F, tum rectam A F, in partes æquales divisam, omnes F Y, hoc est omnes ζ Z (trilinei C A F fig. 7.) sint sinus versi arcuum F z arithmetice proportionalium totius Semiperipheriæ; erunt similiter omnes G Y (earundem excessus supra semidiametrum) hoc est, omnes rectæ trilinei BbC, arcuum b z arithmetice proportionalium in b C quadrante, Sinus recti; (uti &, eâdem ratione, G y defectus rectarum F Y sive F y a radio, hoc est rectæ trilinei similis B b F, sunt sinus recti arcuum arithmetice proportionalium quadrantis b F:) quod suscepimus ostendendum.

76. Est autem (ut calculus § 23 indicabit) prismatis modo dicti, basis B b C, æqualis R^2 quadrato radii circuli generantis. [Nam si ponatur punctum Y fig. 1. in centro circuli, ut G, erit tum F Y $= \mathcal{R}$, tum z Y $= R$, & z Z $=$ z C $= \frac{1}{4} P$; adeoque Z Y $= R + \frac{1}{4} P$, quæ si in $\frac{3}{2} R$ ducatur, habetur $\frac{3}{2} R^2 + \frac{3}{8} RP$ magnitudo quadrilinei ζ Z C F, hoc est, in hoc casu, quadrilinei βBCF, Fig.1. fig. 1. unde si auferamus trapezium β B G F; hoc est, tum parallelogrammum β B b F $=$ G F $\times$ β F $= R \times \frac{1}{4} \mathcal{P} = \frac{1}{4} RP$, tum triangulum F b G $=$ G F $\times \frac{1}{2}$ b G $= R \times \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} R^2$, manebit $R^2 + \frac{3}{8} RP$ magnitudo segmenti C G B; unde si iterum subducamus quadrantem C b G $= \frac{1}{8} \mathcal{R}P$, manebit R^2 magnitudo trilinei C b B fig. 1. hoc est C b B fig. 7.] Quæ quidem basis B b C $= R^2$ in altiFig.7. tudinem F C $= 2R$ ducta, dat $2R^3$ mensuram dicti Prismatis; sive aggregatum omnium z Y in respectiva parallelogramma ductarum. Si autem pro omnibus z Y, substituamus ubique peri-

phe-

pheriæ his radiis (convertendo) descriptas; pro $2R^3$, prodibit $2R^2P$. [Quod quidem est triplum Sphæræ circuli genitoris: (quod hinc oritur, quia tum parallelogramma $V\beta\nu P$ sunt triangulorum νFp dupla, tum zY distantia mediæ basis trianguli, est $\frac{3}{2}$ distantiæ centri gravitatis Trianguli a conversionis axe CF; adeoque $\frac{3}{2} \times 2 = 3$:) Sicut &, iisdem de causis $2R^3$, triplum Momenti Semicirculi respectu rectæ CF, est Momentum omnium parallelogrammorum sic suspensorum. Quod & in solidis, mutatis mutandis, perinde valet. Verbi gratia. Si intelligatur tum super Trilineo restituto CAF, tum super semicirculo CbF, insistere corpus Cylindricũ sive Prismaticum eodem plano oblique sectum, ita ut in puncto F & recta AF altitudinem habeat nullam, & in C maximam; atque intelligantur singula prismata parallelogrammis ut $V\beta\nu P$ incumbentia suspendi in distantiis zY respectivè: erunt eorum omnium Prismatum sic suspensorum pondus, ad pondus pyramidum triangulis νFp incumbentium, hoc est ad pondus portionis cylindri semicirculo insistentis, respectu rectæ CF; ut 2 ad 1. Cum enim Parallelogrammorum Prismata sint sigillatim ad Triangulorum Pyramides, ut 3 ad 2; atque zY distantia suspensi Prismatis, sive distantia mediæ basis Pyramidis, est ad distantiam centri gravitatis istius Pyramidis, ut 4 ad 3; erit quæ ex his componitur ratio 2 ad 1. (propter $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque pondus sic suspensorum Prismatum, erit ponderis Pyramidum in suo situ, hoc est ponderis dictæ portionis cylindri, (respectu rectæ CF,) duplum. Et similiter alibi. Sed hæc obiter hic loci, quorum tamen usus esse poterit in sequentibus. Redimus ad suspensa Parallelogramma.]

77. Si vero eadem trilinei restituti CAF Parallelogramma $V\beta\nu P$ fig. 7. ducantur in omnes respective rectas zZ arithmetice proportionales (quippe arcubus arithmetice proportionalibus æquales:) hoc est in omnes parallelas rectas Trianguli FAα (quarum maxima Aα = AF;) habebitur portio Prismatis, basin CAF altitudinem Aα habentis, oblique abscissa plano per basis lineam CF & verticis punctum α transeunte; (quæ quidem portio exhibebit momentum dicti trilinei CAF respectu rectæ CF.) Sin pro trianguli rectis Aα &c (ut pridem pro rectis $\beta\kappa$ &c) sumantur aliæ quæ ad has sint ut peripheriæ circuli ad ejusdem

radium: abſciſſa priſmatis portio æqualis erit ſolido ex Triſinei C A F converſione circa C F facta; (tunc enim Trianguſum F A α æquale fiet circulo radii F A; reliquaque reſpective triangula reliquis circulis parallelis:) Quod ſolidum, tantiſper dum illius magnitudo innoteſcat, appellabimus A^3.

78. Solidum igitur ex omnibus Triangulis υ F p &c, vel Parallelogrammis V β γ P &c in reſpectivas rectas zZ, vel peripherias his radiis deſcriptas; ad ſolidum ex iiſdem triangulis vel parallelogrammis in reſpectivas rectas z Y, vel peripherias his radiis deſcriptas; eſt ut A^3, ad $2\,R^2P$, (per §§ 76, 77:) Adeoque noncuplum iſtius ad duplum hujus ut $9\,A^3$ ad $4\,R^2P$: Cui ſi addatur ratio 5 ad 2, ſive $10\,R^2P$ ad $4\,R^2P$; habebitur ratio ſolidi ex converſione Semicycloidis, ad ſolidum ex converſione Semicirculi, (circa axem C F,) ut $9\,A^3 + 10\,R^2P$ ad $4\,R^2P$, per § 30.

79. Porro, eorundem Solidorum ad invicem ratio ſic alias colligitur. Solidum ex converſione Semicycloidis (Fig. 1. vel 8.) ad Solidum ex converſione Semicirculi, (circa axem C F,) eſt, ut omnes circuli radiorum Z Y (æqualibus ab invicem intervallis ſumptorum,) ad omnes circulos radiorum z Y reſpective; hoc eſt, ut omnia quadrata ZY, ad omnia quadrata z Y; hoc eſt, ut omnia z Z q + 2 □ Zz Y + z Y q ad omnia z Y q. Fig. 8.

80. Sed omnia z Y q (per prop. 133, 135. *Arithm. Infin.*) æquant $\frac{1}{6}D^3$, vel $\frac{4}{3}R^3$. (Sunt enim omnes ordinatim applicatæ in ſemicirculo, ut ſeries $\sqrt{:aD - a^2}$: adeoque earum quadrata, ut ſeries $aD - a^2$: quæ eſt ad ſeriem æqualium, nempe D^2 toties ſumptum, hoc eſt, ad D^3; ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ad 1; ſive ut 1 ad 6.)

81. Item omnia rectangula Z z Y, æquantur ſolido cylindrico, baſem habenti ſemicirculum C b F, altitudines vero z Z reſpective ſumptas, hoc eſt (propter z Y = m y, & Z z + M m = A F = N n + L l, &c,) ſolido Cylindrico habenti baſin G b F quadrantem, altitudinem vero ubique A F; hoc eſt $\frac{1}{16}RP^2$: (quod fit ex $\frac{1}{8}RP$ quadrante circuli genitoris, in A F = $\frac{1}{2}P$ ducto:) Adeoque omnium rectangulorum dupla, ſive 2 □ Z z Y, ſunt $\frac{1}{8}RP^2$.

82. Sunt igitur $\frac{4}{3}R^3 + \frac{1}{8}RP^2$ (hoc eſt, omnia z Y q + 2 □ Zz Y,) una cum omnibus z Z q, æqualia omnibus quadratis Z Y. Et (pro radiorum quadratis ſubſtituendo circulos, hoc eſt, dividendo

do per R & multiplicando per $\frac{1}{2}P$,) erunt $\frac{2}{3}K^2\mathcal{P} + \frac{1}{16}P^3$ una cum omnibus circulis radiorum zZ (æqualibus intervallis sumptorum,) hoc est, una cum solido ex conversione trilinei restituti CAF fig. 7. circa CF, hoc est una cum A^3; nempe $\frac{2}{3}K^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$, æqualia solido ex conversione semicycloidis circa CF: cujus itaq; ratio ad sphæram circuli genitoris (ex conversione semicirculi circa eandem rectam CF factam) est ut $\frac{2}{3}K^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$ ad $\frac{2}{3}K^2P$.

83. Verum eadem ratio superius reperta est (§ 78) ut $9A^3 + 10R^2P$ ad $4K^2P$, hoc est (dividendo utrinque per 6,) ut $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}R^2P$: quam jam reperimus (§ 82,) ut $\frac{2}{4}K^2\mathcal{P} + \frac{1}{16}\mathcal{P}^3 + \mathcal{A}^3$ ad $\frac{2}{4}K^2\mathcal{P}$. Sunt igitur $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}K^2P = \frac{2}{3}K^2P + \frac{1}{16}P^3 + A^3$. Adeoque (subductis utrinque æqualibus) $\frac{1}{2}A^3 + K^2\mathcal{P} = \frac{1}{16}P^3$. Hoc est, $\mathcal{A}^3 = \frac{1}{8}P^3 - 2R^2\mathcal{P}$. (Hoc est AE in AFq — CFq. fig. 1 vel 8.) Habemus itaque magnitudinem solidi ex conversione Trilinei restituti CAF fig. 7. circa CF, (nempe $\frac{1}{8}P^3 - 2K^2P$;) Adeoque ipsius rationem ad Sphæram circuli genitoris (hoc est, ad $\frac{2}{3}K^2P$,) nempe ut $\frac{1}{8}\mathcal{P}^3 - 2K^2$ ad $\frac{2}{3}K^2$, sive ut $\frac{3}{4}P^2 - 12K^2$ ad $4K^2$, hoc est, ut 3 AFq — 3 CFq ad CFq. [Atque eadem est ratio momenti istius Trilinei, ad momentum semicirculi, respectu CF rectæ. Est utique illud $\frac{1}{8}KP^3 - 2K^3$; (momentum autem Semicirculi $\frac{2}{3}R^3$:) Adeoque (dividendo per magnitudinem Trilinei $\frac{1}{2}KP$) distabit centrum gravitatis Trilinei ab FC, $\frac{1}{4}P - \frac{4K^2}{P}$; & à β B, $\frac{4R}{P}R$. Distat autem (per superius tradita) ab AF, $\frac{3}{4}R$: Cum enim momentum Trilinei ad momentum Semicirculi (respectu AF rectæ) sit ut 3 ad 2, & magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 1; erit propter $\frac{2}{1}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{4}$, distantia ad distantiam ut 3 ad 4. Distantia autem centri gravitatis semicirculi, est R; Ergo distantia centri gravitatis Trilinei ab AF est $\frac{3}{4}R$.]

84. Cum igitur $\frac{2}{3}R^3P$ æquetur Sphæræ circuli genitoris; erit (per § 82) $\frac{2}{3}K^2\mathcal{P} + \frac{1}{16}P^3 + A^3$, hoc est, $\frac{2}{3}R^3P + \frac{1}{16}P^3 + \frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, hoc est $\frac{1}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2\mathcal{P}$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam CF.

85. Vel etiam (per § 78,) cum ejusdem solidi ad Sphæram ratio, sit, ut $9A^3 + 10R^2\mathcal{P}$ ad $4R^2P$, hoc est, ut $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$ ad $\frac{2}{3}K^2P$; sitque $\frac{2}{3}K^2P$ æquale Sphæræ: erit etiam $\frac{3}{2}A^3 + \frac{5}{3}R^2P$, hoc

hoc est $\frac{3}{16} P^3 - 3R^2P + \frac{5}{2} A^2P$, hoc est $\frac{3}{16} P^3 - \frac{4}{3} R^2P$, æquale solido ex conversione Semicycloidis circa rectam C F, ut prius.

86. Simiter, cum (per § 78) ratio omnium z Z arithmetice proportionalium, in respectiva Triangula υ F p, ad correspondentes omnes z Y in eadem Triangula, sit ut $\mathcal{A}^3$ ad $2\mathcal{R}^2P$; hoc est, $\frac{1}{8} P^3 - 2R^2P$ ad $2R^2P$, sive, ut $\frac{1}{8} P^2 - 2\mathcal{R}^2$ ad $2R^2$ vel $\frac{1}{4} P^2 - 4R^2$ ad $4\mathcal{R}^2$; (hoc est, ut AFq — CFq ad CFq:) Adeoque noncuplum illius ad duplum hujus, $9\mathcal{A}^2$ ad $4R^2P$; hoc est, ut $\frac{2}{8} P^3 - 18R^2P$ ad $4R^2P$, sive ut $\frac{2}{4} P^2 - 36R^2$ ad $8R^2$; (hoc est ut 9 A F q — 9 C F q ad 2 C F q:) Si adjungatur ratio 5 ad 2, sive 20 R^2 ad 8 R^2: Habetur iterum ratio $\frac{2}{4} P^2 - 36R^2 + 20\mathcal{R}^2 = \frac{2}{4} P^2 - 16R^2$, ad 8 R^2: Hoc est 9 A F q — 4 C F q ad 2 C F q. Quod supra (§ 30) suscepimus demonstrandum.

Momentum solidi circa A F respectu C F, & circa C F respectu rectæ A F.

87. Ostensum est supra (§ 46,) Momentum solidi ex conversione (vel semiconversione) Semicycloidis circa A F (fig. 1.) respectu rectæ C F, ad momentum solidi annularis ex conversione, (vel semiconversione) semicirculi C b F circa eandem A F respectu ejusdem C F rectæ; esse, ut 7 ad 3, atque insuper ut *decuplum* momenti solidorum ex tali conversione Triangulorum υFp in distantiis z Z suspensorum, ad *triplum* momenti eorundem solidorum in distantiis z Y respective suspensorum. Cujus rationis investigationem sic aggredimur. Omnes z Z (æquales arcubus in semicirculo arithmetice proportionalibus) in respectiva solida ex sic conversis triangulis υ F p, ad omnes z Y (arcuum illorum sinus rectos) in eadem respective solida; Hoc est (propter υ p ubique æquales) omnes illæ z Z in quadrata altitudinum F Y (hoc est, sinuum versorum residuorum arcuum,) ad omnes illas z Y in eadem respective quadrata; sunt, ut momenta omnium circulorum (vel cylindrulorum) Z ζ (æqualibus intervallis sumptorum) conversione trilinei restituti C A F fig. 7. circa A F factorum, suspensorum in distantiis $\zeta\,\Xi$ (trianguli F A α) hoc est z Z (trilinei restituti;) ad momenta eorundem circulorum (vel cylindrulorum) suspensorum in distantiis $\zeta\,\xi$ (bilinei F α x;) Hoc est, ut momentum solidi ex conversione Trilinei restituti C A F (circa A F) respectu rectæ C F, ad *duplum* momenti annuli ex simili conversione C b F semicirculi, respectu C F rectæ. (Dico, ad *duplum* momenti annuli; propter, tum magnitudinem solidi ex conversione Parallelogrammi in trilineo, ad magnitudinem solidi

Fig. 7.

ex

ex converſione correſpondentis Trianguli in ſemicirculo, ut 3 ad 2 ; tum z Y diſtantiam mediæ baſis, ad diſtantiam centri gravitatis ſolidi ex triangulo ſic converſo, ut 4 ad 3 : Eſt autem $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.) Adeoque *decuplum* omnium zZ in dicta ſolida vel quadrata, ad *triplum* omnium ZY in eadem ſolida vel quadrata ; erit, ut *decuplum* momenti ſolidi ex converſione Trilinei reſtituti (circa A F) reſpectu rectæ C F ad *ſextuplum* momenti ſolidi ex ſimili converſione ſemicirculi reſpectu C F rectæ ; ſive, ut *quintuplum* illius, ad *triplum* hujus.

88. Eſt autem Annulus converſione Semicirculi factus, $\frac{1}{4} RP$, (ex ductu nempe ſemicirculi $\frac{1}{4} RP$ in P peripheriam centri converſione deſcriptam;) qui quidem ductus in $\frac{8R^2}{3P}$ (diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi, adeoque & annuli ſemicirculi converſione facti, à recta C F,) dat $\frac{2}{3} R^2 \mathcal{P}$, momentum annuli reſpectu rectæ C F : (cujus itaque triplum eſt $2\ \mathcal{R}^3 P$.) Momentum autem ſolidi converſione Trilinei reſtituti CAF circa A F, reſpectu C F rectæ, dicamus aliquantiſper B^4. Quintuplum igitur hujus, ad Triplum illius, eſt ut $5\ B^4$ ad $2\ R^3 P$: Cui rationi ſi adjungatur ratio 7 ad 3, ſive $\frac{14}{3} R^3 \mathcal{P}$ ad $2\ \mathcal{R}^3 P$, habetur ratio momenti ſolidi ex converſione Semicycloidis ad momentum ſolidi ex converſione ſemicirculi (circa AF) reſpectu rectæ CF; nempe $5\ B^4 + \frac{14}{3} R^3 P$ ad $2\ R^3 \mathcal{P}$, vel $15 B^4 + 14\ R^3 P$ ad $6\ R^3 P$.

89. Sed (quod § 64 dictum eſt) eadem plane ratio eſt momenti, reſpectu rectæ A F, ſolidi ex converſione (vel ſemiconverſione) Semicycloidis circa C F, ad momentum ſolidi ex ſimili converſione (vel ſemiconverſione) ſemicirculi, reſpectu ejuſdem AF lineæ æquilibrii. Quod hinc evenit, quia eædem rationes utrobique componuntur ; cum hoc ſaltem diſcrimine, quod duæ magnitudines reciprocantur ; nempe Z Y quæ in hoc ſolido ingreditur compoſitionem ſolidi, in altero notat diſtantiam à linea æquilibrii ; contra verò recta F Y.

90. Hæc autem eadem ratio ſic alias colligitur. Nempe (ſumptis rectis ZY fig. 8. æqualiter ab invicem diſtantibus,) momentum illud ſolidi ex converſione Semicycloidis, ad momentum ſolidi ex ſimili converſione Semicirculi, eſt ut momentum omnium Circulorum radiis Z Y deſcriptorum, ad momentum omnium circulorum deſcriptorum radiis zY; hoc eſt, ut momentum omnium

nium zZq + 2 □ Z zY + zYq, ad momentum omnium z Y q, (respectu ejusdem AF rectæ:) Hoc est, ut momentum (respectu ejusdem AF rectæ) solidi ex conversione trilinei restituti CAF fig. 7. circa C F (quod, propter quantitatum reciprocationem, æquipollet isti quod jam diximus B^4) una cum momento solidi ex semicirculo sic converso (quod æquipollet nuper invento $\frac{2}{3} R^3 P$, § 88) atque insuper momento solidi ex conversione plani cujus rectæ sint mediæ proportionales inter Zz zY (quod dicamus C^4) bis sumpto; ad momentum sphæræ ex simili conversione semicirculi, respectu ejusdem AF rectæ: Hoc est, ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$.

91. Cum igitur hæc ratio $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{4} R^3 P$ ad $\frac{2}{3} R^3 P$ (§ 90) hoc est, $9B^4 + 18C^4 + 6R^2 P$ ad $6R^2 P$, eadem sit atque illa (§ 88,) $15B^4 + 14B^2 P$ ad $6R^2 P$; erit $9B^4 + 18C^4 + 6R^2 P = 15B^4 + 14B^2 P$; adeoque $18C^4 = 6B^4 + 8R^2 P$, sive $9C^4 = 3B^4 + 4R^2 P$. Hoc est, $C^4 = \frac{1}{3} B^4 + \frac{4}{9} R^2 P$. Unde cognito vel B^4 vel C^4, reliquum cognoscetur.

92. Ut autem habeamus B^4, hoc est, momentum solidi ex conversione Trilinei restituti C A F fig. 7. circa A F, respectu rectæ C F, (vel circa C F, respectu A F, quæ tantundem sunt:) Primò pro omnibus circulis radiorum ζ Z, substituamus totidem triangula rectangula super ipsas ζ Z bases constituta, & altitudines (in ipsis Z punctis) basibus æquales habentia; adeoque portionem prismatis plano oblique secti complentia, basin habentis trilineum illud C A F, altitudinem verò in A F nullam, sed continuè crescentem donec ad punctum C altitudinem obtineat æqualem ipsi F C rectæ; adeoque ad singula basis puncta altitudinem habeat æqualem eorundem ab A F distantiæ. Quæ quidem Triangula, tum magnitudine, tum & momento respectu C F rectæ, sunt respectivis illis circulis proportionalia.

93. Deinde in hujus prismaticæ portionis basi C A F, duci intelligamus curvam B F, curvis B C & B A omnino similem. Cui B F curvæ, intelligatur erecta superficies curva insistere, dirimens portionem illam prismatis in duo segmenta; quorum alterum trilineo B F A, alterum trilineo B F C, insistant. Quorum segmentorum momentum, respectu C F rectæ, sic seorsim inquirimus.

94. Est

94. Est utique (per § 23. ut supra § 76 ostensum est) Trilineum BbC $= R^2$: adeoque Trilineum B F C (quippe istius duplum) $2R^2$. Hujus autem centrum gravitatis in recta B b jacere, manifestum est; adeoque ipsius ab A F distantia est $R =$ b F. Quę quidem distantia R in magnitudinem $2R^2$ ducta, dat $2R^3$, momentum dicti trilinei B F C, respectu A F rectæ: (Adeoque æquale planè ejusdem momento respectu B b, ut ex §. 99 patet.) Sed & (propter portionis altitudines, ut dictum est, distantiis punctorum quibus insistunt ab A F æquales; adeoque altitudinem super basis centrum gravitatis, æqualem rectæ $bf = R$;) idem $2R^3$ est magnitudo prismaticæ portionis trilineo BFC insistentis.

95. Est autem totius C A F trilinei, momentum respectu A F, (adeoque & prismaticæ portionis toti insistentis magnitudo,) $\frac{3}{8}R^2P$; (nempe $\frac{3}{2}$ momenti semicirculi, per § 24.) Unde si auferatur momentum trilinei B F C, hoc est $2R^3$, (per præced.) manebit $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ momentum trilinei B F A respectu ejusdem A F rectæ: (unde, si opus est, colligetur distantia centri gravitatis dicti Trilinei BFA ab AF recta, nempe $\frac{3P-16R}{4P-16R}R$ quod provenit ex divisione momenti $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ per trilinei magnitudinem $\frac{1}{2}RP - 2R^2$; adeoque ejusdem centri a B b distantia, est $\frac{P}{4P-16R}R$; quæ nempe cum illa altera complet rectam B $\beta = R$.) Quod ipsum $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ (ob causam modo dictam) est etiam magnitudo portionis prismaticæ eidem BFA trilineo insistentis.

96. Hujus autem prismaticæ portionis (trilineo B F A insistentis) centrum gravitatis in recta B β jacere, manifestum est. Est itaque ejusdem a C F distantia, $\beta F = \frac{1}{4}P$. Quæ quidem distantia in portionis magnitudinem $\frac{3}{8}R^2P - 2R^3$ ducta, dat $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$, momentum dictę portionis (trilineo BFA insistentis) respectu CF rectæ.

97. Porro, cum (per § 94) portio prismatis trilineo B F C insistentis sit $2R^3$; æquipolleat autem, tum magnitudine tum & momento respectu C F rectæ, prismati super eadem basę, altitudinem mediam habenti; hoc est, ęqualem ei quam habet dicta portio super basis suæ centrum gravitatis, hoc est, altitudi-

nem $\mathcal{R}$: Centrum gravitatis dictæ portionis tantundem a C F recta distabit (seu potius ab æquilibrii plano super hanc rectam erecto; quod hic nobis loci perinde est; quod & similiter alibi ubi opus est intellectum volo,) quantum inde distat centrum gravitatis æquipollentis prismatis; hoc est, quantum ab eadem C F distat centrum gravitatis Trilinei B F C. Quod quantum sit, sic inquirimus.

98. Trilineum, totum C A F, est $\frac{1}{2}RP$ (nempe duplum Semicirculi, per § 22) unde si auferamus trilineum B F C, hoc est, $2R^2$ (per § 94) manebit $\frac{1}{2}RP - 2\mathcal{R}^2$ æquale trilineo B F A; cujus trilinei centrum gravitatis (in recta $B\beta$ situm) a recta C F distat $\frac{1}{4}P$. Quæ distantia, in $\frac{1}{2}RP - 2R^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{2}R^2P$, momentum trilinei B F A respectu C F rectæ. Fig. 7.

99. Totius autem C A F trilinei respectu ejusdem C F, momentum, est $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$, (per § 83; cum enim solidum ex conversione circa C F, sit $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$; erit, substituendo radios pro peripheriis, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$ momentum plani.) Unde si auferamus $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{4}\mathcal{R}^2P$ (momentum trilinei BFA, per præced.) manebit $\frac{1}{2}\mathcal{R}^2P - 2R^3$ momentum trilinei BFC. Quod momentum si per trilinei magnitudinem $2R^2$ dividatur, prodibit $\frac{1}{4}P - R$ distantia centri gravitatis dicti Trilinei BFC a recta CF. (adeoque R ejusdem distantia a puncto B.)

100. Cum igitur distantia centri gravitatis, tum B F C trilinei, tum & (§ 97) portionis trilineo huic insistentis, a C F, sit $\frac{1}{4}P - R$; sitque dictæ portionis magnitudo (per § 94) $2R^3$: Erit istius, respectu C F, momentum $\frac{1}{4}R^2P - 2R^4$.

101. Huic itaque momento, si adjungamus $\frac{3}{32}\mathcal{R}^2P^2 - \frac{1}{2}R^3P$ (momentum portionis trilineo B F A insistentis, respectu rectę C F, per § 96,) habetur $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2\mathcal{R}^4$ momentum totius portionis trilineo C A F insistentis, respectu rectæ C F. Sin porro, pro triangulis § 92 substitutis, restituamus circulos, (dividendo per R, & multiplicando per P,) habebitur $\frac{3}{32}RP^3 - 2\mathcal{R}^4 = B^4$, momentum solidi ex conversione trilinei CAF circa A F, respectu rectę C F. Quod § 92 proponitur inquirendum.

102. Invenimus autem (§ 88) momentum solidi ex conversione semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione semicirculi (circa A F) respectu rectæ C F; esse, ut $15B^4 + 14R^3P$ ad

$6R$

$6R^3P$; sive ut $\frac{5}{3}B^4 + \frac{14}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$: Hoc est, (propter $B^4 = \frac{3}{32}RT^3 - 2R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^2 - \frac{10}{3}R^3T + \frac{14}{9}R^3P = \frac{5}{32}RT^3 - \frac{16}{9}R^3P$, ad $\frac{2}{3}R^3P$. (Quod § 46,87, suscepimus ostendendum.) Est autem $\frac{2}{3}R^3P$ momentum annuli ex ea conversione semicirculi: Ergo & $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ est momentum solidi ex dicta conversione semicycloidis (circa AF) respectu ejusdem CF. Quod momentum si per solidi magnitudinem $\frac{5}{8}RP^2$ (per § 24) dividatur, prodibit $\frac{1}{45}P - \frac{128R^2}{45P}$ distantia centri gravitatis dicti solidi (ex conversione semicycloidis circa AF) a recta CF: (adeoque $\frac{128R^2}{45P}$, ejusdem centri distantia a recta Bβ.)

103. Si vero intelligatur idem Semicycloidis planum circa CF converti; momentum solidi inde facti respectu AF rectæ, (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem,) idem plane erit atque momentum jam inventum solidi ex ejusdem plani circa AF conversione, respectu rectæ CF, (ut supra § 64 & 89 dictum est:) nempe $\frac{5}{32}RT^2 - \frac{16}{9}R^3P$. Quod momentum, si per magnitudinem dicti solidi dividatur, hoc est, per $\frac{3}{16}P^3 - \frac{64}{2}R^2P$ (per § 85) prodibit $\frac{45F^2 - 512R^2}{54F^2 - 384R^2}R$, distantia centri gravitatis istius solidi a recta AF. (vel $\frac{9P^2 + 128R^2}{54P^2 - 384R^2}R$ ejusdē distantia a BG.)

104. Possunt hæc eadem item inferri ex § 90. Cum enim ratio momenti solidi ex conversione Semicycloidis, ad momentum solidi ex conversione Semicirculi, circa AF ut axem, respectu CF ut lineæ æquilibrii; vel, circa CF ut axem, respectu AF ut lineæ æquilibrii; ibidem esse ostenditur, ut $B^4 + 2C^4 + \frac{2}{3}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; hoc est, (propter $B^4 = \frac{3}{32}RP^2 - 2R^3P$, per § 101, & $C^4 = \frac{1}{3}B^4 + \frac{4}{9}R^3P$, per § 91; adeoque $2C^4 = \frac{2}{3}B^4 + \frac{8}{9}R^3T = \frac{2}{32}RP^3 - \frac{4}{3}R^3P + \frac{8}{9}R^3P = \frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{9}R^3P$,) ut $\frac{5}{32}RP^3 - \frac{16}{9}R^3P$ ad $\frac{2}{3}R^3P$; (omnino ut supra § 102:) Habentur inde tum solidorum momenta, tum centrorum gravitatis distantiæ a respectivis æquilibrii lineis, eodem plane modo quo § 102,103.

105. Sed & simul colligitur tum momentum (respectu rectæ AF) tum centri gravitatis distantia, solidi cujus omnia plana sunt ipsa ZzY rectangula, hoc est solidi cylindrici basin habentis

semicirculum C b F, altitudines vero Zz (fig. 7. vel 8.) respective. Cum enim (§ 90) ponatur C^* momentum solidi ex circulis radiorum $\sqrt{}: Zz \times zY$: qui sunt itaque ad rectangula ZzY vel Zz× zY, ut circulus ad quadratum radii, hoc est ut $\frac{1}{2}P$ ad R, sive ut P ad 2 R; sitque (per præced.) $C^* = \frac{1}{3}B^* + \frac{4}{9}R^3P - \frac{1}{12}RP^3 - \frac{2}{9}R^3P$: Si pro circulis substituantur radiorum quadrata (dividendo per P & multiplicando per 2 R,) habebitur $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$ momentum dicti solidi (ex omnibus Z z Y rectangulis) respectu rectæ A F. Est autem solidi hujus magnitudo $\frac{1}{16}RP^2$ (æqualis utique Cylindro quadrantali, cujus basis b G F quadrans, altitudo F A $= \frac{1}{2}P$; vel Semicylindro cujus basis CbF Semicirculus, altitudo $\frac{1}{2}$AF $= \frac{1}{4}P$: propter duas ubique altitudines, a medio utrinque æque remotas, rectæ F A simul æquales:) Per quam magnitudinem si dividatur momentum, prodibit, $R - \frac{64R^2}{9P^2}$ distantia centri gravitatis a recta A F: adeoque $\frac{64R^2}{9P^2}$ R ejusdē distantia a b G.

Fig. 8.

106. At, quantum ad rectam C F, vel planum huic insistens; æquipollet, ut magnitudine, sic & momento, Semicylindro ejusdem basis, & altitudinis dimidiæ. Adeoque momentum habet $\frac{1}{6}R^3P$, & $\frac{8R^2}{3P}$ distantiam centri gravitatis a CF: Nempe dummodo intelligatur Semicirculo C b F recte insistere.

Quæ autem de *Cycloide* primariâ ostensa sunt, eadem omnia aliis *Cycloidum* generibus, sive protractis sive abbreviatis facile applicantur. Id siquidem solum interest, ut pro Zz rectis ubiq; substituantur aliæ quæ sint ad has in eadem ratione qua Basis *Cycloidis* ad Peripheriam Circuli generantis.

Pars

Pars Secunda.

§ 1. AD centrum gravitatis curvæ semicycloidis A C fig. 1. hoc est A C fig. 8. inveniendum, assumo tanquam a D. Wren* demonstratum, tum curvam C A duplam esse rectæ C F, tum ubique C Z curvam rectæ C z duplam esse. Adeoque posita recta C z = a, erit correspondens curva C Z = 2 a. Et propterea, sumptis chordis circuli C z arithmetice proportionalibus, erunt item correspondentes curvæ C Z arithmetice proportionales; & curva C A in punctis Z in æquales partes divisa.

Centrum curvæ C A. Fig. 1. 8.

** Vide ad calcem hujus*

2. Harum vero partium æqualium (quas supponamus numero infinitas, & totidem Z punctis designatas) distantia ab A F rectâ est ubique F Y = $\frac{D^2 - a^2}{D}$. Nam, propter similia triangula, ut F C = D, ad F z = $\sqrt{:D^2 - a^2}$: sic eadem F z = $\sqrt{:D^2 - a^2}$: ad F Y, quæ igitur est $\frac{D^2 - a^2}{D}$. (Exponendo nempe quantitatem a successive per 1 2, 3, *&c.* quarum maxima sit D.)

3. Si igitur curvæ C A fig. 8. æqualis extendatur recta C A fig. 9. quæ intelligatur similiter divisa in punctis Z: atque à punctis Z erigi intelligantur Z X rectæ, respectivis distantiis F Y æquales; perque omnia puncta X duci curvam A X F: Exhibebunt tum singulæ rectæ Z X fig. 9. (respectivis Z X fig. 8. æquales) singularum Z partium æqualium, in curva C A fig. 8. momenta respectu A F rectæ; tum omnes omnium. Adeoque omnium Z partium æqualium, hoc est totius curvæ C A fig. 8. momentum in suo situ, respectu A F rectæ, est ad momentum æqualis lineæ in distantia F C maxima suspensæ, (hoc est, ad momentum maximum toties sumptum,) ut trilineum A F C fig. 9. ad sibi circumscriptum parallelogrammum: Hoc est, ut semiparabola (quod mox ostendetur § 6.) ad circumscriptum parallelogrammum; sive ut 2 ad 3. Et consequenter, centrum gravitatis curvæ C A fig. 8. distabit ab A F recta, duabus tertiis rectæ C F, sive $\frac{2}{3}$ D.

Centri distantia ab A F. Fig. 9.

NB. In citationibus § notat paragraphos hujus partis, & § paragraphos partis præcedentis.

4. Et

Centrum segmentorum curvæ C A.

4. Et similiter de segmenti cujusvis tum momento, tum centro gravitatis judicandum erit: Habent utique momenta partium curvæ C A fig. 8. respectu A F rectæ, eam inter se rationem, quam respectivæ partes semiparabolæ A F C fig. 9. rectis diametro parallelis abscissæ: quamque habent hæ parabolæ partes ad respectivas partes parallelogrammi circumscripti, eam habent distantiæ centrorum gravitatis earundem partium (ab A F recta) ad totam F C.

Superficies circa A F descriptæ.

5. Si vero pro singulis rectis Z X fig. 9. hoc est radiis circulorum punctis Z fig. 8. circa A F rectam conversis descriptorum, substituantur ubique rectæ quæ sint ad has ut circuli peripheria ad ejusdem radium: Hoc est, si semiparabola quæ basin jam habet A C = 2 $\mathcal{D}$ & altitudinem C F = $\mathcal{D}$, intelligatur, super eadem base constituta, altitudinem habere 4 A F = 2 P; esset ea semiparabola æqualis superficiei conversione curvæ C A fig. 8 circa A F rectam descriptæ; (nempe $\frac{8}{3}\mathcal{D}P$, sive $\frac{32}{3}$ circuli genitoris:) ejusque partes respectivæ respectivis partibus hujus æquales.

6. Quod autem F X A fig, 9. sit parabola, sic ostenditur. Rectæ Z X sunt ubique ut $\frac{\mathcal{D}^2 - a^2}{D}$ per ∽ 2.. Hoc est, ut $\mathcal{D}^2 - a^2$; adeoque residuæ X ζ, hoc est ξ F diametri, ubique ut a^2; hoc est in duplicata ratione Z C, hoc est X ξ ordinatim applicatarum. Quod Parabolæ proprium est.

Centri curvæ distantia a C F.

7. Porro, ejusdem curvæ C A fig. 8. divisæ ut prius in punctis Z, omnium punctorum Z (seu partium æqualium his punctis designatarum) distantiæ à C F, sunt Z Y, hoc est Z z ∔ z Y.

Fig. 10.

8. Adeoque si curvæ C A fig. 8. æqualis extendatur recta C A fig. 10. similiter divisa; atque per divisionum puncta Z ducantur rectæ V Z v, ita quidem ut Z V fig. 10. sint respectivis z Z fig. 8. æquales, & Z v respectivis z Y: exhibebunt hæ rectæ V Z v singulæ singulorum curvæ punctorum Z momenta respectu rectæ C F fig. 8. adeoque omnes omnium. Hoc est, figura F V C v A momentum totius A C curvæ (respectu rectæ C F,) & illius partes, partes respectivas hujus.

9. Cum vero rectæ C Z fig. 10. hoc est C Z curvæ fig. 8. sint ut C z chordæ in semicirculo æqualiter crescentes, hoc est, ut sinus recti in quadrante crescentes æqualiter, puta ut B V in trilineo B C c fig. 7. (si nempe intelligatur c B in punctis V æqua-

Fig. 7.

liter

liter divisa:) ipsæque rectæ Z V fig. 10. hoc est z Z fig. 8. sive arcus z C, hoc est arcus chordarum in semicirculo (vel sinuum in quadrante) arithmetice proportionalium, ut rectæ V Z trilinei B C c fig. 7. (Nam sicut recta Z z fig. 7. hoc est recta Z z fig. 8. æquatur arcui Z C, sic recta Z V fig. 7. quæ una cum Z z complet totam V z = B b, hoc est b C arcum quadrantalem, æquatur arcui ad quadrantem residuo Z b, cujus sinus rectus est Y b = B V fig. 7. adeoque omnes V Z trilineum B C c fig. 7. complentes, æqualibus distantiis sumptæ, sunt ut arcus sinuum arithmetice proportionalium in quadrante, sive chordarum æqualiter crescentium in semicirculo; hoc est, ut Z z fig. 8. correspondentes punctis Z æqualibus intervallis in curva C A sumptis:) Erunt omnes V Z trilinei C Z A F fig. 10. ad F A toties positam, hoc est trilineum illud ad circumscriptum parallelogrammum; ut trilineum B C c fig. 7, ad parallelogrammum circumscriptum sibi. (Et illius partes partibus hujus respective sumptis proportionales.)

10. Trilinei autem B C c fig. 7. (aut etiam partis hujus cujuslibet) mensura, habetur ex calculo § 23. Est enim B b = $\frac{1}{4}P$, & b C = R; ergo parallelogrammum B b C c = $\frac{1}{4}RP$: trilineum autem B C b = R^2 (ut § 76 dictum est,) ergo trilineum reliquum B C c = $\frac{1}{4}RP - R^2 = \frac{1}{8}D\mathcal{P} - \frac{1}{4}\mathcal{D}^2$; (Hoc est $\frac{1}{4}$ A F − $\frac{1}{4}$ C F in C F.) Unde & trilinei C F A mensura colligitur; quippe ipsius octupla, (propter A F = $\frac{1}{2}P$, & A C = $2D = 4R$, adeoque parallelogrammum F C = $2RP$,) nempe $2RP - 8R^2$ vel $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$. (Et partium similiter mensura, mutatis mutandis, eodem modo colligitur.) Momentum itaque curvæ C Z A fig. 8. respectu rectæ C F, quantum ad distantias Z z, esset ad ejusdem curvæ momentum in distantia F A suspensæ; ut C Z A F fig. 10. ad circumscriptum parallelogrammum; hoc est, ut $\mathcal{D}\mathcal{P} - 2\mathcal{D}^2$ ad $\mathcal{D}P$, sive ut $\mathcal{P} - 2\mathcal{D}$ ad P; hoc est, ut A F − C F ad A F.

11. Tum vero, quantum ad distantias z Y fig. 8. (quæ simul cum Z z complent integras Z Y,) hoc est, Z υ (bilinei A C υ) fig. 10. Cum rectæ C Z fig. 10. hoc est curvæ C Z fig. 8. sint ut chordæ C z = a: erunt respectivæ z Y: (= Z υ fig. 10.) = $\frac{a\sqrt{:D^2 - a^2:}}{D}$ Nam (propter similia triangula) ut C F = D, Fig. 10.

ad C z = a, sic z F = $\sqrt{: D^2 - a^2 :}$ ad z Y = $\frac{a\sqrt{: D^2 - a^2 :}}{D}$

Qui itaque est character rectarum Z v bilinei A C v fig. 10. positâ rectâ C z (fig. 8.) = a. adeoque curvâ C Z fig. 8. hoc est, rectâ C Z fig. 10. = 2 a.

Fig. 11. 12. Hujus autem Bilinei, hoc est omnium simul Z v, mensura sic colligitur. Omnes $\sqrt{: D^2 - a^2 :}$ sunt ut ordinatim applicatæ in Circuli vel Ellipseos quadrante. Adeoque si radio D = C F describatur circuli quadrans C F x fig. 11. ipsius omnes rectæ Z S, radio C x parallelæ, sunt $\sqrt{: D^2 - a^2 :}$ (ponendo C z = a.) Deinde, si super hoc circuli quadrante erigatur quadrans Cylindri recti, altitudinem habens F φ = C F = D, qui oblique secetur plano φ C x; & abscissa portio secetur plano super Z S rectâ erecto: sectio Z σ erit parallelogrammum, cujus basis Z S = $\sqrt{: D^2 - a^2 :}$: altitudo Z ζ = C z = a; adeoque ipsum parallelogrammum Z σ = $a\sqrt{: D^2 - a^2 :}$. Cumque hæc omnia parallelogramma numero infinita, portionem Cylindri complentia, sint respectivis rectis Z v fig. 10. proportionalia (ut quæ ad eandem D = C F applicata, dant ipsas Z v = $\frac{a\sqrt{: D^2 - a^2 :}}{D}$.) Si fiat ubique ut CF fig. 11. ad Cz = zζ, sic zS ad zY; erunt omnes rectæ z Y fig. 11. æquales respectivis rectis Z v fig. 10. Neque aliter differt Bilineum ACv fig. 10. à Bilineo F C Y fig. 11. quam quod (propter rectam AC duplam rectæ FC) alterum sit alterius duplum. (Et partes illius respectivarum partium hujus duplæ.) Est autem C Y F curva, curvæ hujusmodi

(in se, post decussationem in itinere, recurrentis) Pars quarta.

13. Sed & pari ratione Bilinei F C Y fig. 11. segmenta C z Y, sunt Cylindricæ portionis segmentis C z σ proportionalia. Totumque Bilineum F C Y, ad quadratum rectæ C F, eam habet rationem quam exposita portio Cylindrica ad ejusdem rectæ C F cubum. Adeoque ut 1 ad 3. Sunt enim omnia triangula Σ S σ (triangulo C F φ parallela & similia) portionem Cylindri complentia, ad totidem triangulo C F φ æqualia, ut omnia quadrata Σ S, ad omnia quadrata C F cubum rectæ C F complentia; nempe ut omnia $D^2 - a^2$ ad totidem D^2, hoc est ut $1 - \frac{1}{3}$ ad 1, sive ut 2 ad 3. (Vel, quod eodem redit, ut omnes circuli

circuli radiorum Σ S ad totidem circulos radii C F; hoc est, ut hemisphærium ad circumscriptum Cylindrum; hoc est, ut 2 ad 3, ut prius:) Adeoque omnia triangula Σ S σ (quadratorum dimidia) portionem complentia, hoc est ipsa portio cylindrica, ad eundem rectæ C F cubum, ut 1 ad 3. Et consequenter, Bilineum F C Y fig. 11. ad eundem C F quadratum, ut 1 ad 3: Et Bilineum A C υ fig. 10. (prioris duplum) ad idem quadratum, ut 2 ad 3. Hoc est, $\frac{2}{3} D^2$, sive $\frac{2}{3} R^2$.

14. Et simile de partibus fiet judicium. Cum enim triangula Σ S σ fig. 11. sint ad invicem ut circuli in hemisphærio; erit portionis segmentum Σ S σ κ, ad totam portionem, ut respectivum hemisphærii segmentum plano abscissum, ad totum hemisphærium; adeoque magnitudinis notæ: Cui portionis segmento Σ S σ κ, si addatur prisma Σ S σ ζ z C, habetur segmentum κ S σ ζ z C; adeoque & ipsius ratio ad D^3 cubum diametri circuli genitoris: hoc est, ratio segmenti C z Y, tum ad totum bilineum F C Y, tum ad quadratum rectæ C F. (Bilinei autem istius F C Y, latitudo maxima, sive maxima altitudo ratione basis F C, est $R = \frac{1}{2}$ C F, quæ quidem illic contingit, ubi sumitur $Cz = CF\sqrt{\frac{1}{2}} = D\sqrt{\frac{1}{2}}$; hoc est, ubi C z ad C F est, ut finus rectus graduum 45, ad Radium: quod tamen ad præsens negotium cognitu non videtur necessarium.) Potest autem idem etiam sic colligi. Cum z σ parallelogramma, sint ubique rectarum z S momentis, respectu rectæ C κ, proportionalia, (ut patet;) Erunt κ S σ ζ z C segmenta, tunc inter se, tum ad totam κ φ F C portionem, ut momenta planorum κ S z C respectu rectæ κ C, tum inter se, tum ad momentum κ F C quadrantis, respectu ejusdem κ C, (quam § 67 & seqq. exhibendam docuimus;) eadem igitur & ratio planorum C Y z Et quidem, cum omnium rectarum z S, illa maximum, respectu C κ rectæ, sortiatur momentum quæ grad. 45 subtendit; ea similiter quæ huic correspondet erit omnium z Y maxima, adeoque bilinei C F Y verticem designabit.

15. Cum igitur habeamus (fig. 10.) tum Trilineum C Z A F $= 2RP - 8R^2$ per ∽ 9; tum Bilineum C A υ $= \frac{8}{3} R^2$, per ∽ 13: Forum aggregatum $2RP - \frac{16}{3} R^2$, æquatur facto ex omnibus particulis curvæ C A fig. 8. in suas respective distantias Z Y. Fig. 10.

Tota vero curva C A = 2 D = 4 R; in rectam A F = ½ P ducta, est 2 R P. Momentum igitur curvæ C A fig. 8. in suo situ, ad momentum ejusdem ex puncto A suspensæ (respectu C F rectæ) est ut 2 R P − $\frac{16}{3}$ R² ad 2 R P, vel ut ½ P − $\frac{4}{3}$ R ad ½ P; hoc est, ut A F − $\frac{2}{3}$ C F, ad A F. Adeoque centrum gravitatis curvæ C A fig. 8. à recta C F distat, ea parte rectæ F A quæ sit ad totam ut F A − $\frac{2}{3}$ F C ad F A. Hoc est, (ductâ A α rectæ F C parallelâ,) ab A α distat, $\frac{2}{3}$ F C = $\frac{2}{3}$ D: Tantundem scilicet quantum supra invenimus (∽ 3.) ab A F distare. Adeoque sumptis tum A ♪, tum A ɾ, = $\frac{2}{3}$ C F, ductisque ♪ Δ, ɾ γ, (rectis A F, F C, parallelis,) se decussantibus in D, erit D centrum gravitatis curvæ C A F fig. 8.

Superficies conversione circa C F descripta.

16. Sin porro, pro rectis omnibus Z V & Z υ fig. 10. substituantur aliæ quæ ad has sint ut percipheria circuli ad ejusdem radium; adeoque pro 2 R P − $\frac{16}{3}$ R² (quæ est magnitudo figuræ ex trilineo & bilineo fig. 10. compositæ,) substituatur 2 P² − $\frac{16}{15}$ R P; habetur superficies quæ ex conversione curvæ C A fig. 8. circa C F describitur. Æquat itaque duo quadrata basis integræ cycloidis (hoc est, peripheriæ circuli genitoris) minus $\frac{32}{3}$ genitoris circuli. Adeoque (cum, per ∽ 5, superficies ejusdem conversione circa A F descripta sit $\frac{32}{3}$ genitoris circuli) superficies duæ ab eadem curva C A fig. 8. descriptæ, (altera circa A F, altera circa C F,) simul sumptæ, æquant præcise duo quadrata basis integræ cycloidis sive peripheriæ genitoris circuli. Puta, si, ut in fig. 12. intra semissem quadrati cujus latus intelligatur = 2 P, describatur semiparabola æque alta, basin habens 2 D; dirimetur semi quadratum illud in duas partes, quarum altera uni, altera reliquæ, superficierum illarum curvarum æquatur. Sin converti intelligatur, illic tota A C D, semicycloidis A C dupla; hic vero ejusdem item dupla, nempe AC infra basin continuata donec productæ C F occurrat; pro semiparabola & semiquadrato, integra prodibunt parabola & quadratum.

Fig. 12.

17. Completo autem parallelogrammo F α fig. 8. Quæ C A curvâ, circa A α conversâ, describitur superficies, est æqualis ei quæ ab eadem circa A F conversâ describitur; (propter A ♪ = A ɾ:) Quæ autem ab eadem circa C α conversa describitur, est dimidia illius quæ describitur conversione circa A F; (propter D ɾ duplam rectæ D γ.) Et universaliter superficies quæ à curva C A

C A circa quamvis rectam (quæ ipsam non secet) conversa describitur, eam rationem habet ad harum quamlibet, vel quamvis aliam sic descriptam, quam inter se habent distantiæ puncti D ab illis rectis. Et quidem (nam & hoc adjungere non erit forsan incommodum) si circa rectam quæ ipsam secet convertatur eadem C A curva; *Differentia* superficierum, quam ea pars curvæ quæ ex uno rectæ secantis latere sita est describit, & quam (vel quas, si binis punctis secet,) describit illius curvæ residuum ex altero secantis latere positum, eam habet rationem ad superficiem circa superius memoratarum rectarum quamvis descriptam, (puta quæ circa A F,) quam habet distantia istius rectæ ad distantiam hujus à centro gravitatis D. Quodque de superficiebus totâ curvâ descriptis dictum est, superficiebus ipsius parte quavis descriptis similiter accommodabitur, invento prius (per jam tradita) istius partis centro gravitatis.

18. Absoluto jam opere de gravitatis centro, tum curvæ semicycloidis C A fig. 8. tum partium ejus, inquirendo; deque superficiebus istius conversione, tum circa A F, tum circa B F, descriptis: De superficierum harum centris gravitatis inquirendum. Incipiemus autem ab ea superficie quæ conversione circa rectam A F describitur. Peripherias autem hanc complentes, adeoque & semiperipherias complentes illius semissem, à singulis curvæ punctis descriptas, proportionales esse diximus (∽ 3.) semipararabolæ rectis Z X fig. 9. diametro parallelis. Earundem autem semipheriarum Momenta respectu rectæ A F, cum ex ratione tum magnitudinum tum distantiarum centrorum gravitatis dependeant, suntque hæ ipsæ centrorum distantiæ ab A F recta ipsarum peripheriarum radiis, adeoque & magnitudinibus, proportionales; erunt ea momenta in radiorum ratione duplicata; hoc est, in duplicata ratione rectarum Z X fig. 9. semiparabolæ diametro parallelarum; hoc est, in ratione circulorum radiis illis descriptorum. Adeoque ea omnia momenta, ad totidem maximo æqualia; hoc est, momentum superficiei quæ hac curvæ C A conversione describitur, in suo situ, ad momentum superficiei Cylindricæ ex æqualis rectæ in distantia F C conversione, est ut solidum ex conversione semiparabolæ circa basin suam, ad cylindrum ex conversione circumscripti parallelogrammi circa eandem basin, descriptum; Hoc est, ut 8 ad 15 (per prop. 119. Arithm. Infin.)

Superficiei, semiconversione circa A F factæ, centrum quantum ab A F distat. Fig. 9.

Infin.) superficierum autem magnitudo ad magnitudinem est ut 2 ad 3 (per ∽ 3.) Ergo, propter $\frac{2}{3}$) $\frac{8}{15}$ ($\frac{4}{5}$, centrorum gravitatis distantia ad distantiam ut 4 ad 5. Distantia igitur centri gravitatis, dempta curvatura semicirculari, esset $\frac{4}{2}$ F C, $= \frac{4}{5} D$. Sed, propter illam curvaturam, sumendum adhuc, ut semiperipheria ad diametrum, sive ut $\frac{1}{2} P$ ad D, sic $\frac{4}{5} D$ ad quartam, $\frac{8 D^2}{5 P}$, quæ itaque est distantia centri gravitatis superficiei ex semi conversione curvæ C A circa A F, ab A F; nempe ea pars rectæ F C
Fig. 8. fig. 8. quæ est ad totam, ut 8 F C ad 10 F A. (Et quidem simili processu facile esset idem indicare in aliis integræ conversionis datis partibus; puta non modo in semi conversione, sive $\frac{1}{2}$ conversionis integræ, sed etiam in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. vel $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, &c. integræ conversionis: Nempe sumpta rectæ $\frac{4}{5}$ F C ea parte quæ sit ad ipsam $\frac{4}{5}$ F C, ut chorda ad arcum conversionis.)

Quantum distat a C F. 19. Ut autem ejusdem centri distantia à recta F C (fig. 8.) habeatur; componendæ sunt rationes rectarum Z X fig. 9. atque V v fig. 10. (quarum quidem illæ notant distantias punctorum Z fig. 8. à recta F A, hæ vero eorundem ab F C distantias.)
Fig. 9. 10. Hoc est, propter V v = Z V + Z v, componendæ sunt rationes illæ Z X, tum cum Z V, tum etiam cum Z v; quæque emergunt binæ rationes compositæ, sunt conjungendæ; earumque aggregata, sunt rationes momentorum peripheriarum, vel semiperipheriarum, punctis Z fig. 8. circa F A descriptarum, respectu rectæ F C.

20. Rationes autem rectarum Z X, hoc est $\frac{D^2 - a^2}{D}$, cum rationibus Z v, hoc est $\frac{a \sqrt{:D^2 - a^2:}}{D}$: compositæ, sunt ut $\frac{a D^2 - a^3}{D^2}$ $\times \sqrt{: D^2 - a^2:}$ (nempe, ut rectangula ex ductu rectæ Z X fig. 9. in Z v fig. 10.) Quæ omnia ad D^2 toties sumptum, hoc est (propter A C = 2 D) ad $2 D^3$: sunt ut 1 ad 5; (quod seorsum probabitur ∽ 52 & seqq.) Adeoque solidum ex Bilineo A C v fig. 10. in altitudines respectivas Z X fig. 9. est $\frac{2}{5} D^3$.

21. Rationes vero rectarum; Z X fig. 9. cum rationibus Z V fig. 10. compositæ; sunt rationes rectangulorum rectis Z V Z X contentorum; hoc est rectarum Z V in $\frac{D^2 - a^2}{D}$ respective ductarum

ductarum; sive in $D - \frac{a^2}{D}$.

22. Omnes autem Z V in D; hoc est, trilineum C Z A F in D; hoc est (per ∽ 10) $DP - 2D^2$ in D; est, $D^2P - 2D^3$. Unde si auferamus omnes Z V in $\frac{a^2}{D^2}$, hoc est $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$ (ut deinceps ostendetur ∽ 25 & seqq.) manebit $\frac{2}{3}D^2P - \frac{14}{9}D^3$ quod itaque est solidum ex Trilineo C Z A F fig. 10. in altitudines respectivas Z X fig. 9. ducto.

23. Huic igitur solido, si addatur solidum ex Bilineo C A υ in easdem respectivas altitudines ductorum, nempe $\frac{2}{5}D^3$ (per ∽ 20;) aggregatum $\frac{2}{3}D^2P - \frac{14}{9}D^3 + \frac{2}{5}D^3 = \frac{2}{3}D^2P - \frac{52}{45}D^3$, est solidum ex Trilineo C υ A F fig. 10. in altitudines Z X fig. 9. respective ducto; sive ex omnibus V υ fig. 10. in respectivas Z X fig. 9. sive ex omnibus Z Y in Z X fig. 8. respective.

24. Quam autem rationem habet hoc solidum (ex omnibus Z X fig. 9. in V υ fig. 10. respective,) ad solidum ex semiparabola F A C (hoc est, omnibus, Z X) fig. 9 in A F fig. 8. ubique ducta, hoc est, ad $\frac{2}{3}D^2P$: (nam propter A C = 2D, & C F = D, adeoque rectangulum A C F = $2D^2$, erit ea semiparabola $\frac{4}{3}D^2$, quippe $\frac{2}{3}$ rectanguli; quæ semiparabola, ducta in F A = $\frac{1}{3}P$, dat $\frac{2}{3}D^2P$ magnitudinem solidi, sive prismatis parabolici:) Eam habet momentum superficiei, in suo situ, quæ fit ea semiconversione curvæ C Z A fig. 8. circa A F, respectu rectæ C F, (hoc est, factum ea semiperipheriis, ipsis Z X proportionalibus, in distantias V υ, hoc est Z Y, respective,) ad momentum ejusdem superficiei ex puncto A suspensæ, (hoc est, ad factum ex iisdem semiperipheriis in distantiam A F ubique.) Et consequenter, eadem est ratio distantiæ centri gravitatis ejusdem superficiei à recta F C, ad distantiam F A. Nempe ut $P - \frac{26}{15}D$ ad P. Fig. 10.

25. Quod autem omnes Z V in $\frac{a^2}{D^2}$, sit $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$, sic pedetentim ostendetur. Omnes Z V fig. 10. in $4a^2$, hoc est (propter C A = 2D) in respectiva quadrata distantiarum C Z; ad easdem omnes in quadratum C A; sunt ut momentum (respectu rectæ c C) portionis prismatis in suo situ, oblique plano secti, super trilineo C Z A F erectæ, altitudinem habentis in puncto C nullam, at super A F recta æqualem rectæ C A; ad momen-

momentum (respecta ejusdem c C) integri prismatis super eadem base, altitudinem habentis rectæ A C æqualem, ex puncto A suspensi. (Omnes enim Z V ductæ tum in C Z = 2 *a* propter distantiam, tum iterum in eandem C Z = 2 *a* propter altitudinem distantiæ æqualem, tantundem est atque in $4a^2$: & similiter, eædem omnes ductæ tum in altitudinem maximam, tum iterum in maximam distantiam, tantundem est atque in quadratum A C ductæ.) Hoc est, (propter binarum figurarum parallelas rectas proportionales,) ut momentum ejusmodi portionis prismatis super trilineo B c C fig. 7. in suo situ, ad momentum similis prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu rectæ B b. Quam rationem sic investigamus: Fig. 7.

26. Distantia Centri gravitatis Triliniti B b C fig. 7. & consequenter trilinei B c C, à recta B b, sic colligitur. Quadrantis G b C fig. 1. vel 8. centrum gravitatis à recta G b distat $\frac{2D^2}{3P}$, (quantum scilicet à centro circuli distat centrum gravitatis semicirculi;) à recta igitur A F distat, $\frac{2D^2}{3P} + \frac{1}{2}D$; quæ distantia in ejusdem quadrantis magnitudinem $\frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{24}D^3 + \frac{1}{32}D^2P$, momentum quadrantis G b C respectu rectæ A F; cui si addatur momentum trianguli G b F, (factum ubique ex magnitudine in distantiam centri gravitatis) $\frac{1}{24}D^3 = \frac{1}{2}R^2 \times \frac{2}{3}R$, habetur $\frac{1}{12}D^3 + \frac{1}{32}D^2P$ momentum sectoris F b C respectu A F rectæ.

27. Est autem momentum quadrilinei B β F C fig. 1. ad momentum dicti sectoris F b C (respectu ejusdem A F rectæ) ut 5 ad 2 (per § 26;) Adeoque momentum quinquilinei B β F b C fig. 1. hoc est quadrilinei B β F C fig. 7. ad idem sectoris momentum, ut 3 ad 2; adeoque $\frac{1}{8}D^3 + \frac{3}{64}D^2P$.

28. Unde si auferatur momentum parallelogrammi B F; nempe $\frac{1}{8}DP \times \frac{1}{4}D = \frac{1}{32}D^2\mathcal{P}$, manebit $\frac{1}{8}D^3 + \frac{1}{64}D^2\mathcal{P}$ momentum trilinei B b C (fig. 1. vel 7.) respectu rectæ A F.

29. Hoc autem momentum, per trilinei hujus magnitudinem $R^2 = \frac{1}{4}D^2$ divisum, dat $\frac{1}{2}D + \frac{1}{16}P$ distantiam centri gravitatis dicti trilinei B b C ab A F recta; Adeoque $\frac{1}{16}P$ ejusdem distantiam a Bb: Et consequenter $\frac{1}{4}\mathcal{D}^2 \times \frac{1}{16}P = \frac{1}{64}D^2P$ momentum dicti trilinei B b C respectu rectæ B b.

30.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [64] - 48
PUBLIC DOMAIN

30. Quod quidem momentum $\frac{1}{64} D^2 P$, si ex Parallelogrammi B C momento $\frac{1}{8} D P \times \frac{1}{4} D = \frac{1}{32} D^2 P$ auferatur; manebit $\frac{1}{64} D^2 P$ momentum trilinei B c C respectu ejusdem B b. (Idem utique atque momentum trilinei B b C respectu ejusdem B b.)

31. Quod denique trilinei B c C momentum, per ejusdem magnitudinem $\frac{1}{8} D P - \frac{1}{4} D^2$ divisum, dat $\frac{D P}{8 \mathcal{P} - 16 D}$ distantiam centri gravitatis dicti B c C trilinei à recta B b. Quæ itaque est ea pars rectæ b C $= \frac{1}{2} \mathcal{D}$, quæ est ad totam $\frac{1}{2} D$, ut 2 P ad $8 P - 16 \mathcal{D}$, sive $\frac{1}{2} \mathcal{P}$ ad $2 P - 4 D$; hoc est, ut A F ad 4 A F − 4 F C. Quod ↷ 26 proposuimus inquirendum.

32. Habita vero distantiâ centri gravitatis trilinei B c C à B b; adeoque portionis altitudine super idem gravitatis centrum, (quippe distantiæ quæ isti æqualis est, propter altitudinẽ maximã æqualem maximæ distantiæ, adeoque & reliquas reliquis, utpote proportionales;) nempe $\frac{D \mathcal{P}}{8 P - 16 D}$: Si hæc altitudo in basis magnitudinem $\frac{1}{8} \mathcal{D} P - \frac{1}{4} D^2$ ducatur; habetur $\frac{1}{64} \mathcal{D}^2 P$ dictæ portionis prismatis (trilineo B c C insistentis) magnitudo: (æqualis quidem momento supra invento.)

33. Ejusdem vero portionis prismatis (trilineo B c C insistentis) Momentum, his passibus investigamus. Si super semicirculum F b G fig. 1. erigatur semicylindri portio, qualis F c C Y z fig. 5. altitudinem habens in F nullam, in C vero C c = C F: Semicirculus basis est $\frac{1}{8} D \mathcal{P}$; hic in altitudinem super centro gravitatis plani, hoc est in $\frac{1}{2} D$, ductus, dat $\frac{1}{16} D^2 P$ magnitudinem expositæ portionis Semicylindri. Fig. 5.

34. Hujus vero portionis Semicylindri, centrum gravitatis distat à plano in F tangente, rectâ F g $= \frac{5}{8}$ D (ut supra § 57;) quæ distantia in magnitudinem $\frac{1}{16} D^2 \mathcal{P}$ ducta, dat $\frac{5}{128} D^3 P$ momentum expositæ portionis Semicylindri respectu tangentis in F, hoc est F A fig. 1.

35. Ex hac vero Semicylindri portione, auferamus primò eam istius partem quæ quadranti F Y z fig. 5. insistit, (hoc est, quadranti F G b fig. 1. vel 7.) cujus magnitudinem primò, deinde momentum, sic investigamus.

36. Quadrantis F Y z fig. 5. centrum gravitatis, à recta Y z,

distat $\frac{2}{3}\frac{D^2}{P}$; adeoque ab F A distabit $\frac{1}{2}D - \frac{2D^2}{3P}$; quæ distantia (cum sit altitudini super idem gravitatis centrum æqualis) ducta in basis magnitudinem $\frac{1}{16}DP$, dat portionis huic quadranti insistentis magnitudinem, $\frac{1}{32}D^2P - \frac{1}{24}D^3$, vel $\frac{3P-4D}{96} \times D^2$.

37. Si autem intelligatur hæc portio (quadranti F Y z fig. 5 insistens) plano Y z ζ υ abscindi, & sic super reliquam partem replicari, ut cum ea compleat Cylindrum quadrantalem: Facta hæc replicatione, tanto ultra Y constituetur istius replicatæ partis centrum gravitatis, quanto prius citrà constitutum erat: ut patet.

38. Momentum verò hujus Cylindri quadrantalis, sic habetur; Centrum gravitatis quadrantis Y z C fig. 5. distat ab A F, $\frac{2D^2}{3P} + \frac{1}{2}D$, (quod modo ostensum est ∽ 26;) quæ itaque est distantia centri gravitatis quadrantalis Cylindri (super Y z C constituti) a plano φ F A: Quæ quidem distantia in quadrantalis cylindri magnitudinem $\frac{1}{16}D^2P$ ducta, dat $\frac{1}{24}D^4 + \frac{1}{32}D^3P$ ejusdem momentum respectu rectæ F A.

39. Hinc vero si auferamus momentum portionis ante replicationem factam, $\frac{5}{128}D^3P$ (ut supra ∽ 34.) manebit $\frac{1}{24}D^4 - \frac{1}{128}D^3P$, sive $\frac{16D-3P}{384}D^3$, augmentum momenti ob promotum gravitatis centrum partis replicatæ. Quod quidē momenti augmentum, per $\frac{3P-4D}{96}D^2$ replicatæ partis magnitudinē, divisum, dat $\frac{16D-3P}{12P-16D}D$, mensuram promotionis centri gravitatis: Cujus itaque semissis $\frac{16D-3P}{24P-32D}D$ est centri gravitatis partis replicatæ distantia à medio: Quæ quidem si ex $\frac{1}{2}D$ auferatur, quod restat $\frac{15P-32D}{24P-32D}D$ vel $\frac{15P-32D}{3P-4D} \times \frac{1}{8}$, est ejusdem centri distantia à plano φ F A. Atque hæc demum

mum distantia, in $\frac{3P-4D}{96}D^2$ magnitudinem ducta, dat $\frac{15P-32D}{768}D^3$, sive $\frac{5}{256}D^3P-\frac{1}{24}D^4$, expositæ portionis quadranti F Y z insistentis momentum, respectu rectæ F A. Quod ∽ 35 proponitur inquirendum.

40. Hoc igitur momentum, ex $\frac{5}{128}D^3P$ momento totius portionis semicylindri, ablatum, relinquit $\frac{5}{256}D^3P+\frac{1}{24}D^4$, portionis residuæ z Y υ c C, quadranti z Y C insistentis, momentum.

41. Deinde, post hoc ablatum, restituendum est quantum triangulo quadranti F Y z inscripto (hoc est, triangulo F G b fig. 1.) insistit: Nempe Pyramis, basin habens $Y\upsilon\zeta z=\frac{1}{4}D^2$, altitudinem $FY=\frac{1}{2}D$, quæ in basim ducta dat $\frac{1}{8}D^3$, cujus triens $\frac{1}{24}D^3$ est pyramidis magnitudo; atque hæc in $\frac{3}{8}\mathcal{D}$, distantiam sui centri gravitatis à plano φ F A, ducta, dat $\frac{1}{64}D^4$ pyramidis momentum respectu F A rectæ: Quod quidem momentum, momento reliquæ partis $\frac{5}{256}D^3\mathcal{P}+\frac{1}{24}D^4$ additum, dat $\frac{5}{256}D^3P+\frac{11}{1152}D^4$ momentum istius omnis quod sectori F b C fig. 1. insistit, respectu rectæ A F.

42. Cognito autem momento Portionis sic secti prismatis Sectori C F b insistentis; cognoscitur etiam momentum portionis prismatis Quadrilineo C F β B fig. 1. insistentis, eodem plano secti, (respectu ejusdem A F rectæ:) Est utique ad illud, ut 7 ad 3 (per § 45:) Adeoque illius quod Quinquilineo CbFβD fig. 1. hoc est Quadrilineo C F β B fig. 7. (utpote quod ad idem momentum est 4 ad 3;) nempe $\frac{1}{192}D^3P+\frac{11}{1152}D^4$.

43. Unde si auferatur momentum istius quod Parallelogrammo F B fig. 7. insistit, (hoc est, prismatis basem habentis triangularem, semissem utique quadrati F b, adeoque $\frac{1}{8}D^2$, altitudinem vero $Bb=\frac{1}{4}\mathcal{P}$, cujus itaque magnitudo est $\frac{1}{32}\mathcal{D}^2\mathcal{P}$, quæ in $\frac{2}{3}Fb=\frac{1}{3}\mathcal{D}$ distantiam centri gravitatis à plano rectæ F A insistente ducta, dat $\frac{1}{96}\mathcal{D}^3P$ prismatis momentum respectu F A rectæ;) manebit $\frac{1}{64}D^3P+\frac{11}{1152}D^4$ momentum istius omnis quod trilineo C B b insistit, respectu rectæ A F.

44. Quod autem Trilineo huic jam insistit, (altitudinem jam nactum in puncto b æqualem ipsi $Fb=\frac{1}{2}\mathcal{D}$, & deinceps continue crescentem,) constat ex prismate super illa base, altitudinis

$\frac{1}{2}D$, & æqualis insuper prismatis portione oblique secti. (Eodem plane modo quo super YzC quadrante fig. 5. insistit tum zYuxC Cylindrus quadrantalis, tum ejusmodi Cylindri Portio obliquæ secti ζυcκ.)

45. Hujus vero Prismatis momentum respectu rectæ AF, est $\frac{1}{96}D^4 + \frac{1}{128}D^3P$. (Momentum enim trilinei BbC repertum est ∽ 28 esse $\frac{1}{8}D^3 + \frac{1}{64}D^2P$, quod in Prismatis altitudinem $\frac{1}{2}D$ ductum, dat momentum prismatis dictum.) Quod quidem ex $\frac{1}{64}D^3P + \frac{1}{144}D^4$ (∽ 43) subductum, relinquit $\frac{1}{128}D^3P + \frac{1}{72}D^4$ momentum portionis prismatis oblique secti trilineo BbC insistentis, respectu AF rectæ. (Adeoque centri gravitatis ab AF distantia est $\frac{1}{2}D + \frac{8D^2}{31P}$. & momentum respectu Bb, $\frac{1}{72}D^4$.)

46. At vero integri parallelepipedi æque alti parallelogrammo BC fig. 7. insistentis, eodem plano secti, portio, nempe $\frac{1}{32}D^2P$, in sui centri gravitatis à plano rectæ FA insistente distantiam, nempe $Fb + \frac{2}{3}bC = \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}D = \frac{5}{6}D$, ducta, dat $\frac{5}{192}D^3P$ momentum istius prismatis, sive portionis parallelepipedi, respectu istius AF. Unde si auferamus $\frac{1}{128}D^3P + \frac{1}{72}D^4$ momentum portionis trilineo BbC insistentis, ∽ præced. inventum restabit $\frac{7}{384}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ momentum portionis trilineo BcC insistentis respectu rectæ AF.

47. Quod quidem momentum, per solidi magnitudinem $\frac{1}{64}D^2P$ (∽ 32 inventam) divisum, dat $\frac{7}{6}D - \frac{8D^2}{9P}$ centri gravitatis ab AF distantiam; adeoque $\frac{2}{3}D - \frac{8D^2}{9P}$ ejusdem distantiam a Bb; quæ in magnitudinem $\frac{1}{64}D^2P$ ducta, dat $\frac{2}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ expositæ portionis momentum trilineo BcC insistentis, respectu Bb rectæ. (Vel etiam, ex prismatis parallelogrammo BC insistentis momento respectu Bb, nempe $\frac{1}{32}D^2P \times \frac{1}{3}D = \frac{1}{96}D^3P$, subducto $\frac{1}{72}D^4$ momento portionis insistentis trilineo BbC, restat $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ momentum portionis BcC trilineo insistentis respectu Bb, ut prius.) Quod ∽ 33 proponitur investigandum.

48.

48. Integri vero Prismatis, eidem B c C trilineo insistentis, ex puncto C suspensi, momentum respectu ejusdem B rectæ, sic habetur. Prismatis hujus basis est ipsum trilineum B c C $= \frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ (per ∽ 10) quæ in altitudinem $\frac{1}{2}D$ ducta, dat $\frac{1}{16}D^2P - \frac{1}{8}D^3$ prismatis magnitudinem, quæ in distantiam b C $= \frac{1}{2}D$ ducta, dat $\frac{1}{32}D^3P - \frac{1}{16}D^4$ prismatis ex puncto C suspensi momentum respectu rectæ Bb,

49. Ratio igitur momenti Portionis prismatis in suo situ, ad momentum prismatis integri ex puncto C suspensi, respectu ejusdem Bb rectæ, est (per ∽ 47, 48,) ut $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ ad $\frac{1}{32}D^3P - \frac{1}{16}D^4$; hoc est, ut $3P - 4D$ ad $9P - 18D$. Quæ ratio ∽ 25 proponitur investiganda.

50. Hanc autem rationem sic inventam, eandem esse atque rationem omnium ZV fig. 10. in $4a^2$ respective ductorum, ad easdem omnes ZV in quadratum rectæ CA; jam supra ostensum est ∽ 25. At omnes ZV, hoc est trilineum C Z A F, hoc est $DP - 2D^2$ (per ∽ 10) in CA $= 2D$ ductæ, dant $2D^2P - 4D^3$ prismatis magnitudinem; quæ iterum in $2D$ distantiam ducta, dat $4D^3P - 8D^4$ momentum dicti prismatis integri trilineo C Z A F fig. 10. insistentis, ex puncto A suspensi, respectu rectæ C c.

51. Adeoque (propter rationem $3P - 4D$ ad $9P - 18D$, ∽ 49 inventam) erit $\frac{3P-4D}{9P-18D}$ in $4D^3P - 8D^4$, hoc est $\frac{12P-16D}{9}D^3$, momentum expositæ portionis prismatis trilineo C Z A F insistentis, in suo situ, respectu C c rectæ; hoc est, factũ ex omnibus Z V in $4a^2$ respective: Et consequenter (dividendo per $4D$) erit $\frac{3P-4D}{9}D^2$, hoc est $\frac{1}{3}D^2P - \frac{4}{9}D^3$, factũ ex eisdem omnibus Z V in $\frac{a^2}{D}$ respective ductis. Quod ∽ 22, 25. suscepimus ostendendum.

52. Quod autem omnes $\frac{aD^2-a^3}{D^2}\sqrt{:}\ D^2 - a^2$; sint ad D^2 toties sumptum, ut 1 ad 5, (quod ∽ 20 probandum suscepimus,) sic ostenditur, ex principiis nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*. Infinita

finita series Primanorum, sive Arithmetice proportionalium, ut a, (vel eadem series in 1 ducta,) est ad convenientem seriem Æqualium, ut 1 ad 2. Eadem Primanorum series in seriem Residuorum $D^2 - a^2$ (hoc est in seriem Æqualium mulctatam serie secundanorum,) nempe $aD^2 - a^3$, est ad seriem Æqualium, ut $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ad 1, sive ut 1 ad 4. Eadem series Primanorum in Residuorum Quadrata, hoc est, in $D^4 - 2a^2D^2 + a^4$, nempe $aD^4 - 2a^3D^2 + a^5$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}$ ad 1, sive ut 1 ad 6. Eadem primanorum series in Cubos Residuorum, hoc est, in $D^6 - 3a^2D^4 + 3a^4D^2 - a^6$, nempe $aD^6 - 3a^3D^4 + 3a^5D^2 - a^7$, ad seriem Æqualium, est ut $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8}$ ad 1, sive ut 1 ad 8. Et sic deinceps, (ut sigillatim probabitur ex prop. 64. Arithm. Infin.) Nempe series Primanorum, respective ducta in

seriē, o. Unit. Resid. Qu: Resid. Cub: Resid. Biquad. Residuorū, &c.

dat rationes $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{2} - \frac{4}{4} + \frac{6}{6} - \frac{4}{8} + \frac{1}{10}$, &c.

Hoc est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{10}$ &c.

53. Sin hi loci pro paribus habeantur, & fiat congrua interpolatio pro locis imparibus, (juxta progressionis analogiam,) prodibit ea quæ sequitur rationum series. Nempe series Primanorum a respective ducta in

seriem o.	Recipr:	Unita-	√Resi-	Resi-	√qCub.	Quadr:	√:	Surfol.	Cub:	&c.
	√Resid·	tum.	duorū.	duorū.	Resid.	Resid.	Resid.		Resid.	

dat rationes $\frac{1}{0} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} : \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} : \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7}$ &c.

54. Adeoque series $a\sqrt{:}D^2 - a^2$ (nempe series Primanorum in Radices Quadraticas Residuorum,) erit ad seriem Æqualium, hoc est, ad totidem D^2, ut 1 ad 3; (quod etiam superius demonstravimus alias ∽ 12, 13.) Et series $aD^2 - a^3$ in $\sqrt{:}D^2 - a^2$: sive $a\sqrt{:}D^6 - 3a^3D^4 + 3a^5D^2 - a^6$: (nempe series Primanorum in seriem Radicum Quadraticarum Cuborum ex Residuis $D^2 - a^2$,) ad seriem Æqualium; hoc est, ad totidem D^4, est ut 1 ad 5. Adeoque & series $\frac{aD^2 - a^3}{D^2}\sqrt{:}D^2 - a^2$: ad totidem D^2, erit item ut 1 ad 5. Quod demonstrandum suscepimus ∽ 20. Adeoque absolvimus omnia quæ ad centrum gravitatis superficiei ex

ex semiconversione curvæ A C (fig. 1. vel 8) circa A F, designandum requiruntur.

Superficiei semiconversione circa C F factæ, centrum; quantum distat ab A F.

55. Supereſt, ut centrum gravitatis ſuperficiei, quæ ſemiconverſione ejuſdem C A curvæ circa C F converſæ deſcribitur, inveſtigemus. Quod quidem jam partim peractum eſt. Quum enim (propter binarum quantitatum reciprocationes, ut aliquoties dictum eſt,) idem ſit, reſpectu rectæ A F, momentum ſuperficiei quæ converſione C A curvæ circa C F deſcribitur; atque, reſpectu rectæ C F, momentum ſuperficiei quæ ejuſdem circa A F converſione deſcribitur: Sitque hoc ſuperius inventum ∽ 23: Etiam illud ſimiliter inventum erit.

Fig. 8.

56. Invenimus utique (∽ 23) facta ex omnibus Z X in Z Y fig. 8. reſpectivè ductis (curvâ C A in punctis Z æqualiter diviſâ,) eſſe $\frac{2}{3}D^2P - \frac{52}{45}D^3$. Adeoque (pro Radiis reſtituendo ubique Peripherias, hoc eſt, dividendo per $\frac{1}{2}D$ & multiplicando per P,) erit $\frac{4}{3}DP^2 - \frac{104}{45}D^2P$ momentum circulorum omnium punctis Z deſcriptorum, ſive radiis Z X in diſtantiis Z Y ſuſpenſorum, ſive radiis Z Y in diſtantiis Z X ſuſpenſorum; hoc eſt, ſuperficiei converſione C A curvæ circa A F deſcriptæ, reſpectu rectæ C F; vel, converſione circa C F, reſpectu rectæ A F.

57. Hoc itaque ſuperficiei momentum converſione circa C F deſcriptæ, ſi per ejuſdem magnitudinem, hoc eſt, per $2P^2 - \frac{16}{3}RP$ (ut ſupra ∽ 16,) vel $2P^2 - \frac{8}{3}DP$, dividatur; habebitur $\frac{30P - 52D}{45P - 60D}D$ diſtantia centri gravitatis ſuperficiei converſione (vel ſemiconverſione) curvæ C A circa C F deſcriptæ, ab A F recta.

Quantum diſtat à C F.

58. Quantum autem idem gravitatis centrum (ſuperficiei ex ſemiconverſione C A curvæ circa F C deſcriptæ) ab F C diſtat, ſic inquirimus. Semiperipheriarum punctis Z fig. 8. circa F C deſcriptarum, tum magnitudines, tum & earundem centrorum gravitatis ab F C diſtantiæ, ſunt rectis Z Y proportionales. Ergo ſingularum momenta reſpectu ejuſdem F C, ſunt ut quadrata rectarum Z Y fig. 8. hoc eſt (per ∽ 8) rectarum V v fig. 10. Adeoque omnium momenta ſunt ad momenta totidem radio F A deſcriptarum; Hoc eſt, momentum ſuperficiei quæ ſemiconverſione curvæ C A fig. 8. circa F C deſcribitur, ad momentum

Fig. 8, 10.

ſuperficiei

ſuperficiei ſemicylindricæ rectâ CA æquali deſcriptæ, diſtantiam à converſionis axe habentis ipſi FA æqualem; ut omnia quadrata Vv fig. 10. ad totidem quadrata AF; hoc eſt, ut omnia VZq + 2VZ × Zv + Zvq, ad totidem AFq.

59. Quam autem habent rationem omnia Zvq ad omnia AFq, ſic colligitur. Eſt recta $Zv = \frac{a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$ (per ∽ 11,) ergo $Zvq = \frac{a^2D^2 - a^4}{D^2}$. Sed omnia a^2D^2 ad totidem D^4, ſunt ut 1 ad 3; & omnia a^4 ad totidem D^4, ut 1 ad 5: Ergo omnia $a^2D^2 - a^4$ ad totidem D^4, ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ad 1, ſive ut 2 ad 15. Adeoq; omnia $\frac{a^2D^2 - a^4}{D^2}$ ad totidē D^2, hoc eſt (propter $CA = 2D$) ad $2D^2$, ut 2 ad 15. Ideoque $\frac{2}{15}D^2$ aggregatum omnium Zvq.

Fig. 10.

60. Deinde omnia VZq ad totidem AFq, ſunt ut omnes circuli radiorum ZV ad totidem circulos radiorum AF: hoc eſt, ut ſolidum converſione trilinei CZAF circa CA deſcriptum, ad ſolidum deſcriptum ſimili converſione circumſcripti Parallelogrammi; hoc eſt, ut momentum ejuſdem Trilinei ad momenti circumſcripti Parallelogrammi, reſpectu ejuſdem CA rectæ; hoc eſt, ut momentum Trilinei BcC fig. 7. ad momentum BC parallelogrammi ſibi circumſcripti, reſpectu rectæ cB; hoc eſt, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2. Nam trilinei CBb magnitudo eſt $\frac{1}{4}D^2$; ejuſque centri gravitatis a cB diſtantia, (eadem utique cum diſtantia centri gravitatis trilinei CBF ab eadem cB,) eſt $\frac{1}{2}D$, (per § 99;) Adeoque momentum $\frac{1}{4}D^2 \wedge \frac{1}{2}D - \frac{1}{8}D^3$: Quod quidem momentum ſi ex Parallelogrammi CB momento, $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$, auferatur; relinquit $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, momentum trilinei BcC reſpectu Bc rectæ. Quod itaque ad $\frac{1}{64}DP^2$ momentum CB parallelogrammi, eſt ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2, ſive ut FAq − 2FCq ad FAq.

61. Quod ipſum ſic etiam probamus alias. Si duci intelligatur, in fig. 7. recta CA (quam per B tranſituram certum eſt) Triangulum rectilineum CAF æquale fiet Trilineo CZAF miſtilineo: Quod quidem miſtilineum a rectilineo in hoc tantum differt, quod ſegmentum illud BA curvâ & rectâ comprehenſum, a ſitu BA in ſitum BC transfertur. Ex hac autem dicti ſegmenti tranſlatione, quod oritur diſcrimen hoc eſt: Solidum ex converſione trilinei miſti circa FC ortum, eſt (per § 83) $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$, ſive $\frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}D^2P$; Solidum ſeu Conus ex ſimili converſione

Fig. 7.

sione trianguli rectilinei est $\frac{1}{12}\mathcal{P}^2$, (nam circulus radii R est $\frac{1}{2}RP$; ergo circulus radii $\frac{1}{2}P$, utpote in radiorum ratione duplicatâ, est $\frac{1}{8}\frac{P}{R}P^2$ vel $\frac{P}{4D}P^2$; qui circulus, cum sit coni basis, ductus in $\frac{1}{3}D$ trientem altitudinis, dat $\frac{1}{12}P^2$ magnitudinem coni:) Horum solidorum differentia, nempe excessus coni supra reliquum solidum, est $\frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{24}P^3$. Sin utrobique, pro circulorum peripheriis substituamus radios, (facta divisione per P, & multiplicatione per $\frac{1}{2}D$,) habebimus planorum momenta respectu rectæ CF; nempe illic $\frac{1}{16}DP^2 - \frac{1}{48}D^3$, hic vero $\frac{1}{64}DP^2$; adeoque momentorum differentiam $\frac{1}{48}D^3 - \frac{1}{48}DP^2$. Hæc vero differentia per segmenti magnitudinem divisa, hoc est per $\frac{1}{24}D^2 - \frac{1}{16}DP$, (est enim trilineum mistum BbC $= \frac{1}{48}D^2$, unde si auferatur triangulum sibi inscriptum, quod est circumscripti parallelogrammi dimidium, adeoque $\frac{1}{16}DP$, manebit $\frac{1}{48}D^2 - \frac{1}{16}DP$ magnitudo segmenti BA vel BC rectâ & curvâ comprehensi;) dat $\frac{12D^2 - \mathcal{P}^2}{12D - 3\mathcal{P}}$ mensuram promotionis centri gravitatis, dicti segmenti translocati, versus F C rectam: Cujus itaque semissis $\frac{12D^2 - P^2}{24D - 6\mathcal{P}}$ est ejusdem centri distantia a recta cBβ: Quæ quidem distantia, in segmenti magnitudinem $\frac{1}{48}D^2 - \frac{1}{16}DP$ ducta, dat $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}\mathcal{D}P^2$ ejusdem momentum respectu cBβ rectæ. Momentum autem trianguli rectilinei BcC respectu ejusdem cB rectæ est $\frac{1}{192}DP^2 = \frac{1}{16}DP \times \frac{1}{12}P$. Unde si auferatur segmenti dicti momentum $\frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{96}\mathcal{D}P^2$; manebit $\frac{1}{64}\mathcal{D}P^2 - \frac{1}{8}D^3$ momentum trilinei misti B c C respectu rectæ c B. Est autem totius BC Parallelogrammi, respectu ejusdem c B, momentum $\frac{1}{64}DP^2 = \frac{1}{8}DP \times \frac{1}{8}P$. (Unde obiter liquet, residui B C b trilinei momentum esse $\frac{1}{8}D^3$; adeoque, propter ipsius magnitudinem $\frac{1}{4}D^2$, distantiam sui centri gravitatis à c B esse $\frac{1}{2}D$; & consequenter, a bC erit $\frac{1}{4}\mathcal{P} - \frac{1}{2}D$, ut supra § 99.) Ratio igitur momenti trilinei misti BcC, ad momentum circumscripti Parallelogrammi, (respectu ejusdem c B rectę,) est ut $\frac{1}{64}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{64}DP^2$; sive, ut $P^2 - 8D^2$ ad P^2: ut prius.

62. Vel denique, sic etiam eadem ratio investigabitur. Momentum trilinei misti CZAF fig. 7. respectu rectæ C F est (ut supra) $\frac{1}{16}D\mathcal{P}^2 - \frac{1}{48}\mathcal{D}^3$. Momentum autem æqualis parallelogram-

mi C β, respectu ejusdem C F, est $\frac{1}{3}\frac{1}{2}DP^2 - \frac{1}{4}DP \times \frac{1}{8}P$. Horum momentorum differentia $\frac{1}{3}\frac{1}{2}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$ (cum ex sola trilinei B β A in situm B c C translatione oriatur) si per $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ (trilinei B c C magnitudinem) dividatur; prodibit $\frac{P^2 - 8D^2}{4P - 8D}$ mensura promotionis centri gravitatis trilinei B β A in situm BcC translati. Hujus igitur semissis $\frac{P^2 - 8D^2}{8P - 16D}$ erit ejusdem centri a cB distantia: Quæ in $\frac{1}{8}DP - \frac{1}{4}D^2$ magnitudinem ducta; dat $\frac{1}{6}\frac{1}{4}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ejusdem BcC trilinei momentum respectu c B rectæ. Vel, quod eodem recidit, differentiæ momentorum inventæ $\frac{1}{3}\frac{1}{2}DP^2 - \frac{1}{4}D^3$, semissis $\frac{1}{6}\frac{1}{4}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$, est trilinei translocati momentum quæsitum. (Nam Quotientis dimidium, in Divisorem ductum, restituit Dividui semissem.) Unde eadem quæ prius oritur ratio $\frac{1}{6}\frac{1}{4}DP^2 - \frac{1}{8}D^3$ ad $\frac{1}{6}\frac{1}{4}DP^2$, sive $P^2 - 8D^2$ ad P^2; quæ ∽ 60 quærebatur.

63. Hac itaque ratione inventa, sic procedimus. Quadratum A F fig. 10. est $\frac{1}{4}P^2$ quod ductum in C A = 2 D, dat $\frac{1}{2}DP^2$ aggregatum omnium AFq. Si fiat itaque (propter rationem modò inventam) ut P^2 ad $P^2 - 8D^2$, sic $\frac{1}{2}DP^2$ ad quartum; erit illud $\frac{1}{2}DP^2 - 4D^3$ aggregatum omnium ZVq.

64. Superest ut inquiramus, quam ad eadem omnia AFq, rationem habeant, omnia bina rectangula 2 V Z × Z v fig. 10. (∽ 58 memorata;) hoc est, omnes VZ in 2Zv, hoc est (per ∽ 11) omnes V Z in $\frac{2a\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: Hoc est, omnes VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: in 2a. Quam rationem his passibus investigamus. Fig. 10.

65. Rectæ ZV trilinei CZAF fig. 10. sunt rectis VZ trilinei BVcC fig. 7. proportionales: Item rectæ CZ = 2a fig. 10. rectis BV fig. 7. Et $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: rectis z Y quadrantem CbG complentibus proportionales. Omnes igitur VZ in $\frac{\sqrt{:D^2 - a^2}}{D}$: sunt ut omnia rectangula VZxzY fig. 7. Quæ iterum in 2a ductæ, sunt ut horum rectangulorum momenta respectu rectæ F b fig. 7. Quantum autem sit horum omnium momentum sic colligimus. Fig. 7.

66. Intelligatur primò super planum trilinei C Z A F fig. 7. erigi semicirculum C b F ad angulos rectos; ita quidem ut C F dia-

diameter ſemicirculi, congruat C F lateri trilinei. Deinde ſuper idem planum, moveri intelligatur idem ſemicirculus invariato angulo, a CF ad C β, & ſic deinceps uſque ad A; hoc motu deſcribens Semicylindrum: Quem Semicylindrum ſi ſecet planum rectæ A C perpendiculariter inſiſtens, abſcinditur Semicylindri Portio (ſuper CAF triangulo jacens) ex infinitis Parallelogrammis conflata, quorum baſes intelligantur ordinatim-applicatæ in baſis Semicylindricæ ſemicirculo, altitudines arithmetice-proportionales triangulum CAF complentes. Sin eundem ſemicylindrum ſecet ſuperficies curvata perpendiculariter inſiſtens curvæ CZA, abſcindetur Semicylindri Fragmentum (ſic enim libet, diſtinctionis cauſa, vocare) ſuper C Z A F trilineo miſto jacens, ex Parallelogrammis item infinitis conflatum, quorum baſes intelligantur eædem zY ordinatim-applicatæ in ſemicirculo, altitudines vero Zz trilineum CZAF complentes.

67. Hæc autem duo ſolida, nempe Portio ſemicylindri, plano abſciſſa, & ſemicylindri Fragmentum, abſciſſum ſuperficie curvatâ, ſunt quoad magnitudinem inter ſe æqualia. (Propter, tum binas quaſvis rectas zY in baſe, utrinque à medio æqualiter remotas, invicem æquales; tum binas ubique his baſium rectis congruentes altitudines, ſive in trilineo miſto, ſive in triangulo rectilineo, ſimul æquales rectæ AF.) Utrumvis ſiquidem Semicylindro ejuſdem baſis, ſemialto, æquale.

68. Sunt autem eadem duo ſolida, quoad momentum reſpectu A F rectæ, inæqualia: Propter tranſlatum id totum quod in altero inſiſtit bilineo BA; ad ſitum BC in reliquo.

69. Eſt autem Portionis, triangulo rectilineo incumbenris, momentum reſpectu A F rectæ, $\frac{3}{256}\mathcal{D}^2P^2 = \frac{1}{32}\mathcal{D}P^2, \frac{1}{8}\mathcal{D}$. (Eſt enim ſemicirculus) F b C $= \frac{1}{8}\mathcal{D}P$, & ſemialtitudo $\frac{1}{2}$ AF $= \frac{1}{4}P$, adeoque portionis magnitudo $\frac{1}{32}DP^2$; quæ in $\frac{3}{8}D$ diſtantiam centri gravitatis ab AF (per § 57) ducta, dat $\frac{3}{256}D^2P^2$ portionis momentum.) Fragmenti verò, trilineo miſto inſiſtentis, momentum reſpectu ejuſdem AF rectæ, eſt (per § 105) $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4 - \frac{1}{64}\mathcal{D}^2P^2 - \frac{1}{36}D^4$. Unde ſi auferatur Portionis momentũ $\frac{3}{256}D^2P^2$, habetur $\frac{1}{256}D^2P^2 - \frac{1}{36}D^4$ momentorũ differentia.

70. Et conſequenter (cum hæc momentorum differentia non aliunde proveniat quam ex ſegmenti bilineo B A inſiſtentis in ſitum B C tranſlatione,) ſi illa momentorum differentia intelli-

gatur per magnitudinem translocatæ partis divisa, unde habeatur mensura promotionis centri gravitatis quantum ad A F rectam; hujusque semissis, distantia utique ejusdem centri à Bb, in eandem magnitudinem iterum multiplicata; prodibit Dividui semissis, nempe $\frac{1}{512}D^2P^2 - \frac{1}{72}D^4$, momentum illius translocatæ partis, bilineo BC insistentis, respectu rectæ B b.

71. Deinde, super triangulo C B b rectilineo, incumbit cylindri quadrantalis portio, cujus basis CbG quadrans circuli, altitudo $Bb = \frac{1}{4}P$; momentum vero ejusdem respectu rectæ B b, est $\frac{1}{96}D^2P - \frac{1}{512}D^2P^2$. Quod eodem modo colligitur quo supra (∽ 35 & seqq.) colligitur momentum ejusmodi portionis FYυζz fig. 5. Cum enim illic ∽ 39 habetur $\frac{1}{24}D^4 - \frac{1}{128}D^3P$ momenti augmentum (ob dictę portionis ibidem translationem) respectu rectæ F A (si nempe intelligatur Y F A planum horizonti parallelum) vel rectæ F φ (si scilicet planum Y F φ horizonti parallelum intelligatur:) Adeoque ejusdem semissis $\frac{1}{48}D^4 - \frac{1}{256}D^3P$, portionis dictæ momentum respectu rectæ Y z vel Yυ (prout hæc vel illa intelligatur horizonti parallela,) positâ quidem (quod illic supponitur) segmenti altitudine $Y\upsilon = \frac{1}{2}D$: Unde, si posita fuisset $Y\upsilon = \frac{1}{4}P$ (prout jam in casu simili supposuimus super æqualem basem portionis altitudinem $B b = \frac{1}{4}P$) fuisset ejusdem momentum respectu rectæ Yz vel Yυ, $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{512}D^2P^2$: Quod igitur est momentum portionis Cylindri quadrantalis, triangulo C B b incumbentis, respectu rectæ Bb fig. 7.

72. Totius autem Cylindri quadrantalis, parallelogrammo BC incumbentis, momentū respectu ejusdem Bb rectæ, est $\frac{1}{96}D^3P = \frac{1}{64}DP^2 \times \frac{2D^2}{3P}$. Unde si auferatur tum momentum solidi bilineo BC insistentis, $\frac{1}{512}D^2P^2 - \frac{1}{72}D^4$ (∽ 70;) tum $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{512}D^2P^2$ (∽ 71) momentum portionis semicylindri triangulo CBb incumbentis; hoc est, $\frac{1}{96}D^3P - \frac{1}{72}D^4$ momentum solidi totius trilineo mixto CBb incumbentis; manebit $\frac{1}{72}D^4$ momentum (respectu ejusdem B b rectæ) solidi insistentis trilineo mixto BcC fig. 7. nempe solidi ex omnibus VZ×zY fig. 7. Quod ∽ 65 proponitur inquirendum.

Fig. 7, 10. 73. Hoc habito; propter tum AF fig. 10. duplam rectæ c C fig. 7. adeoque & ZV fig. 10. duplas rectarum VZ fig. 7. tum $\sqrt{:D^4 - \square}$

$-a^2$ (propter D duplam rectæ CC fig. 7.) duplas rectarum z Y fig. 7. adeoque singula $\sqrt{:D^2-a^2}$: in ZV fig. 10. quadrupla singulorum BV×ZV fig. 7. Et (propter altitudinem CA fig. 10. quadruplam altitudinis cB fig. 7.) omnia omnium sedecupla (est enim $4\times4=16$:) Et denique (propter eandem AC$=4$ cB) distantiam centri gravitatis à cC fig. 10. quadruplam distantiæ à B b fig. 7. erit (propter $16\times4=64$) momentum ad momentum ut 64 ad 1. Adeoq; omnes *VZ fig.* 10. *in* $\sqrt{:D^2-a^2}$: *in* $2a$, $=\frac{8}{9}D^4$; (nempe ad momentum omnium VZ×zY×bV fig. 7. hoc est $\frac{1}{72}D^4$ per præced. ut 64 ad 1.) Et propterea, factâ applicatione ad D, omnes VZ (fig. 10.) in $\frac{2a\sqrt{:D^2-a^2}}{D}$: hoc est, omnia 2VZ×Zv bina rectangula (∽ 58 memorata) $\frac{8}{9}D^3$. Quod ∽ 64 proponitur inquirendum.

74. Cum igitur sint omnia Zvq (per ∽ 59) $\frac{4}{15}D^3$, & omnia ZVq (per ∽ 63) $\frac{1}{2}DP^2-4D^3$, & denique omnia 2VZ×Zv (per ∽ 73) $\frac{8}{9}D^3$. Erunt omnia VZq+2VZ×Zv+Zvq fig. 10. $\frac{1}{2}DP^2-\frac{128}{45}D^3$. Omnia vero AFq sunt $\frac{1}{2}DP^2=\frac{1}{4}P^2\times2D$. Eorum igitur ad hæc ratio constat; nempe ut $\frac{1}{2}P^2-\frac{128}{45}D^2$ ad $\frac{1}{2}P^2$, sive ut $45P^2-256D^2$ ad $45P^2$. Quam quidem eandem esse quam habet momentum superficiei ex semiconversione curvæ CA fig. 8. circa CF, ad momentum curvæ semicylindricæ ejusdem basis, altitudinis vero $2D=$ CA respectu rectæ CF sive plani per axem; jam ∽ 58 ostensum est. Est autem istius magnitudo (per ∽ 16) $P^2-\frac{8}{3}RP$ sive $P^2-\frac{4}{3}DP$; hujus autem P^2 (quod nempe fit ex altitudine $2D$, in $\frac{P^2}{2D}$ semiperipheriam radio AF$=\frac{1}{2}P$ descriptam:) adeoque illius ad hanc ratio, ut $P-\frac{4}{3}D$ ad P, sive ut $3P-4D$ ad $3P$. Ideoque propter $\frac{3P-4D}{3P})\frac{45P^2-256D^2}{45P^2}($ $\frac{45P^2-256D^2}{45P^2-60DP}$, distantiarum centrorum gravitatis ratio est, ut $45P^2-256D^2$ ad $45P^2-60DP$. Est autem centri gravitatis expositæ curvæ semicylindricæ à plano per axem distantia D, (nempe radii AF$=\frac{1}{2}$P ea pars quæ est ad totam, ut chorda ad arcum, hoc est ut D ad $\frac{1}{2}$P;) Et propterea $\frac{45P^2-256D^2}{45P^2-60DP}D$ distantia centri gravitatis superficiei

perficiei ex semiconversione curvæ CA circa CF ab eodem plano sive à CF recta. Quod erat ultimo inquirendum.

APPENDIX.

Cum ex Wrennii nostri Demonstratis de Cycloidibus(quæ sub initium Julii anni 1658 amicis quibusdam ostendit)Semicycloidis curvam Axis duplam esse ∽1 assumpserim: Istius demonstrationē prout eam ab eodem D. *Christophero Wren*, Socio Collegii *Omnium Animarum* dicti, Oxoniæ, & in Collegio *Greshamensi*, Londini, Astronomiæ Professore, acceperim, visum est hic subjunctam exhibere.

De rectâ Tangente Cycloidem primariam.

Lemma.

Fig.13. SI sit Circulus A o D, Diameter A D, tangens VD,& o V subtensæ cuivis D o ad rectos angulos. Dico Tangentem esse Arcu o p D majorem.Ducatur Tangens o T. Quoniam anguli ToD, TDo sunt æquales,ergo anguli ToV, TVo sunt æquales.Ergo VTD æqualis est OT,TD simul sumptis.Sed ipsæ oT,T D superant arcum opD. Ergo VD major est Arcu opD.

II. Iisdem positis si ducatur u r p e(vel υ ϱ ϖ ε) tangenti VD parallela: dico segmentū externum u p, esse arcu p o,(vel υ ϖ arcu ϖ ω) majus: segmentum vero internum p e esse arcu p o (vel ϖ ε arcu ϖ ω) minus. Ducatur subtensa p o (vel p ω) & p m (vel ϖ μ) subtensæ ad rectos angulos. Angulus igitur o p u vel acutus est, vel obtusus ut ω π υ.

Sit primo obtusus. Quoniam anguli VDω, ϱ ω D sunt æquales, & υ ε parallela ipsi VD,ergo Isosceles est ϱ ω ε, ergo υ ϱ, ϱ ω sunt etiam æquales, & quoniam ω ϖ ϱ est obtusus ergo ω μ minor est υ ϱ, & adhuc minor ipsâ υ π; sed cùm ω μ sit tangens, & π μ subtensæ ad rectos angulos,ergo demonstratum est ω μ, majorem esse arcu ω π, ergo υ π major est arcu ω π.

Sit secundò angulus u p o acutus, ergo in triangulo o m p, angulus o m p est æqualis recto minus angulo m o p; & in triangulo r p m, angulus r p m, est æqualis recto minus angulo u p o: sed angulus u p o est major angulo u e o, vel angulo m o D: & ang. m o p est minor angulo m o D,

ergo

ergo complementum anguli u p o ſcilicet r p m, eſt minus complemento anguli m o p, ſcilicet angulo o m p; ergo in triangulo r p m latus r m, eſt minus latere r p. Sed u r, r o æquales eſſe jam demonſtrantur, ergo u p major eſt ipſâ o m, & o m major arcu o p: ergo u p eſt major arcu o p.

Dico poſtremo ſegmentum internum p e eſſe minus arcu o p. Quoniam enim anguli r o e, r e o ſunt æquales, ergo minor eſt angulus p o e angulo p e o, ergo in triangulo p o e latus p e minus eſt latere p o; recta autem p o minor eſt arcu p o; ergo p e minor eſt arcu p o. Similiter demonſtratur de π ε.

Problema.

Ad datum punctum t in Cycloide s t a d Tangentem ducere. Fig. 14.

Ducatur t o baſi parallela, & per punctum o Genitoris ducatur ſubtenſa a o u, cui parallela ducatur x t y, dico rectam x y tangere in puncto t. Nam ſi non tangat, ergo ſecat in t, ergo cadit intra curvam aut verſus baſim, aut verſus verticem.

Cadat primo ſi fieri poſſit verſus Baſim & ſit punctum aliquod x intra curvam: & ducatur baſi parallela x u p, & producta ſecet curvam in g, & producatur ſubtenſa ad u. Quoniam ergo alibi demonſtratur é primis Cycloidis proprietatibus eſſe quod Parallelæ baſi inter Cycloidem & Genitorem terminatæ, ſint arcubus Genitoris ad verticem abſciſſis æquales: ergo g p eſt æqualis arcui p o p a, & t o arcui o p a, ergo t o plus arcu o p æqualis eſt ipſi g p: ſed x u æqualis eſt ipſi t o, & ſegmentum externum u p eſt majus arcu o p; ergo x u p major eſt ipſis t o, o p ſimul ſumptis: ergo p x major eſt ipſâ p g: ergo cadit extra punctum g curvæ, ergo idem punctum eſt intra & extra curvam, quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Cadat jam intra curvam verſus verticem; & ſit punctum aliquod y rectæ t y intra curvam. Ducatur baſi parallela y p e, & producta ſecet Cycloidem in h. Quoniam ergo y e eſt æqualis ipſi t o, & h p plus arcu p o æqualis ipſi t o, & p e ſegmentum internum eſt minus arcu p o; ergo h p e minor eſt ipſis h p, p o ſimul ſumptis, ergo minor eſt ipſâ t o ergo e y major eſt ipſâ e h. Ergo punctum y eſt extra & intra curvam quod eſt abſurdum: ergo non eſt intra. Similiter demonſtratur nullum punctum rectæ x y eſſe intra curvam, ergo non ſecat curvam in puncto t; ergo ducta eſt t y tangens Cycloidem in dato puncto t; quod erat faciendum.

Ἐυθυγράφος

Ἐυθυσμὸς Curvæ lineæ Cycloidis primariæ secundum methodum Antiquorum demonstratus.

Definitio.

MAgnitudines in infinitum decrescentes sunt quarum non datur minima.

Problema.

In dato Semicirculo AD'D subtensas quotcunque AD in datâ ratione continuâ disponere. Sit Ratio A M' ad A D. Ducatur circulus AM''M'; tangens in A; & fiat ubique AD (subtensa majoris circuli) æqualis ipsi AM (antecedenti subtensæ minoris circuli.) Dico ipsas A D esse in continuâ ratione ipsius A D ad AM'. Junctis M''M', & D'D, vel M'''M'', & D''D', & sic ubivis; quoniam MM, DD sunt parallelæ, ob æquales in similibus segmentis Angulos: ergo patet propositum.

Fig. 15.

Scholium.

Iisdem positis dico hanc subtensarum rationem in infinitum continuari posse. Nam si non possit, ergo datur minima subtensa, quo minor duci non potest: sit ea verbi gratiâ AD''', secans minorem circulum in M''''; & ducatur ut prius A♌ æqualis ipsi A M'''': ergo A♌ est minor minimâ, quod est absurdum; ergo non datur minima, ergo ratio subtensarum potest in infinitum continuari.

Lemma.

Sint tres circuli, tangentes se invicem in puncto A, quorum diametri AE, A F, AG sunt in continuâ proportione. Circulos autem secet recta AMDC; item recta Aμ♌κ, ita ut A♌ aptetur in medio circulo æqualis ipsi A M minimi Circuli. Per puncta denique ♌ & D medii circuli, ducatur tam ♌ N O, diametro perpendicularis, quam Dβ ipsi ♌N parallela. Dico ipsas NM, μ♌ esse æquales: item MD, ♌κ: item DC, κβ. Jungantur κC; item μM: item ME. Quoniam AμME est quadrilaterum circulo inscriptum; ergo angulus externus ♌μM æqualis est opposito interno AEM; sed anguli ANO, AEM ob similitudinem triangulorum sunt æquales: ergo anguli ♌μM, ♌NM sunt æqua-

Fig. 16.

les:

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [80] - 72
PUBLIC DOMAIN

les: æqualia sunt ergo Triangula A♌N, Aμ M; & quoniam βD parallela est ipsi ♌ N, & κ C ipsi μ M, æqualia sunt etiam Triangula Aβ D, ACκ: æquales sunt igitur AN & Aμ; AM & A♌; AD & Aκ; AC & Aβ: quare demptis continuo æqualibus, æquales erunt NM & μ♌; MD & ♌κ; DC & κβ.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium, & differentiâ extremarum, dare extremas. Fig. 17.

Sit media data A D, eique ad rectos angulos ponatur DZ æqualis differentiæ extremarum, & dividatur bifariam in S, centro autem S & intervallo S D describatur circulus Dμκ, & per S ductâ Aμ Sκ; ponatur AM æqualis Aμ, & AC æqualis Aκ. Quoniam A D tangit circulum, ergo quadratum A D æquale est rectangulo μAκ; ergo AM, AD, AC, sunt in continuâ proportione, & MC (differentia extremarum) æqualis est ipsi DZ.

Lemma.

Si fuerint magnitudines in infinitum decrescentes Summa Differentiarum æquatur maximo Termino. Fig. 19.

Sint Magnitudines a Z, b, c, d, &c, in infinitum: dico omnes earum differentias æquari ipsi a Z. Si negetur; sint majores, & fiant aβ, aγ, a♌, &c. æquales ipsis b, c, d, &c; erunt ergo Zβ, βγ, γ♌, &c, partes ipsius a Z; non sunt ergo majores Toto. Sint jam minores, quare æquales sint ipsi Z♌, reliquo autem a♌ æqualis ponatur d, ipsâ etiam d ponatur aε minor; ergo addita est alia differentia ♌ε, quare Zε est æqualis summæ omniũ differentiarũ, ergo Z♌ æqualis est ipsi Zε, major minori, quod est absurdi. Ergo Z a (cum sit neque major neque minor) æqualis est summæ omnium in infinitum differentiarum.

Lemma.

Binarum magnitudinum differentia, æqualis est differentiæ inter summam & duplum utriusvis. Patet addendo utriquè magnitudini minimam, vel utriquè maximam.

Definitio.

Polygonum Serratum est figura constans alternatim ex lateribus sibi invicem parallelis, & lateribus obliquis. Sola autem latera non parallela vocentur simpliciter Latera.

Polygonum Serratum circulo Circundari dicitur, quando unusquisque angulus internus circulum attingit. Atque idem circulo inseri dicitur, quando unusquisque angulus externus circu- Fig. 17.

lum attingit, & angulum internum polygoni circundati ad verticem habet.

Problema.

Polygonum Serratum semicirculo dato inserere, cujus summa laterum sit duplo diametri minor; atque aliud circundare cujus summa laterum sit duplo diametri major; ita tamen ut utriusque summæ differentia sit datæ cuicunque magnitudini æqualis.

Sit semicirculus datus A D D, cujus diameter sit A D; magnitudo data X. Data igitur mediâ proportionalium A D, fiant A M', A D, A C continue proportionales, ita ut differentia extremarum M' C, æqualis sit ipsi X. Disponantur autem subtensæ A D ubique in datâ ratione A D ad A M', & continuetur ratio in infinitum. Productis deinde subtensis, per unumquodque D ducantur parallelæ N D B, ad proximam utrinque subtensam. Patet ex iis quæ dicta sunt, Polygonum semicirculo insertum esse. Atque aliud circundatum. Dico autem insuper latera Inserti simul sumpta (scilicet omnes in infinitum DN) deficere à duplo diametri defectu D M'; Latera vero circundati (scilicet omnes in infinitum B D) excedere duplum diametri, excessu D C: differentiam denique laterum utriusque polygoni æqualem esse datæ magnitudini X.

Diametris A M' & A C, ducantur circuli tangentes etiam in A & secantes subtensas in M & C ubique. Quoniam ergo subtensæ A D disponuntur in datâ ratione AD ad A M'; ergo A M' (antecedentis subtensæ) æqualis est (consequenti) A D; ergo M' N' (antecedentis) æqualis est ipsi D' M'' (consequentis) & sic ubique: ergo differentia ipsarum D M', M' N' (ejusdem subtensæ) æqualis est differentiæ ipsarum D M', D M'' (antecedentis & consequentis:) Ipsæ vero D M cum sint magnitudines in infinitum decrescentes differentiarum summam æqualem habent maximæ D M; ergo summa omnium D M minus M N (ejusdem subtensæ,) æquatur maximæ D M. Sed quoniam D M' minus M' N', æqualis est duplo D M' minus D N' & sic ubique; & quoniam summa omnium D M, cum sint differentiæ subtensarum in infinitum decrescentium, æquatur maximæ A D (scilicet diametro:) Ergo duplum summæ ipsarum D M (hoc est duplum diametri) minus summâ Laterum D N, æqualis est ipsi D M'. Ergo omnium polygoni Inserti Latera deficiunt à duplo diametri defectu D M'.

Rursus

Rursus quoniam A M', A D, A C sunt in continuâ proportione; ergo C' D' (antecedentis subtensæ) æqualis est ipsi B'' C'' (consequentis) & sic ubique. Ergo (eodem modo quo supra) demonstratur, quod duplum summæ ipsarum B C (hoc est duplum subtensæ AB') minus summâ laterum B D, æqualis sit maximæ B' C'; ergo omnia Polygoni circundati latera deficiunt à duplo subtensæ AB', defectu B' C'. Sed A B' æqualis est ipsi A C, & B' C' ipsi C D. Ergo omnia Polygoni circundati latera superant duplum Diametri excessu D C.

Addatur demum defectus, & excessus quibus, hinc inde polygona differunt à duplo diametri; ergo C M' est utriusque differentia; & æqualis quidem ponitur ipsi X. Ergo semicirculo A D D polygonum serratum insertum est, & simile est circundatum, hoc majus, illud minus duplo dimetri, utriusque autem differentia æqualis est datæ magnitudini X. Quod erat faciendum.

Scholium.

Dato circuli segmento quovis A D', eodem prorsus modo polygonum serratum inseritur & circundatur; & demonstratur latera inserti deficere à duplo basis segmenti A D', defectu D' M''; Latera vero circundati excedere duplum ejusdem, excessu D' C'; utriusque vero differentiam esse C' M''; quæ cum minor sit quam C M', minor est quam X.

Lemma.

Si à puncto quovis O in Cycloide primariâ S P O A D, ducatur Tangens O V versus Basin, item basi parallelæ N O D, & V P C secantes Genitorem in D, C, quibus A jungatur, & ducatur O E, parallela ipsi A C. Dico tangentem O V majorem, ipsam vero O E minorem esse portione Curvæ inter parallelas interceptæ O P.

Ducatur P T N ipsi O E parallela, item, subtensa portionis P O. Quoniam angulus P E O est obtusus (cum sit æqualis ipsi P C A) ergo E O minor est rectâ P O, ergo minor etiam curvâ P O.

Rursus quoniam P N parallela est ipsi A C, ergo tangit Cycloidem in puncto P, & quoniam angulus V P T est obtusus, ergo T P minor est ipsa T V, ergo O T V major est ipsis O T, T P, simul sumptis, ergo major est portione O P.

Definitio.

Polygonum ſerratum Cycloidi circumſcribi dicitur quando unuſquiſque angulus internus Cycloidem contingit, atque idem inſeri dicitur quando unuſquiſque externus attingit.

Theorema.

Curva linea Cycloidis primariæ eſt quadrupla diametri Genitoris.

Fig. 18. Sit Curva ſemicycloidis o o A, cujus Baſis ſit o D, Diameter A D tam Cycloidis quam Genitoris A ♪ D' D. Dico curvam o o A eſſe duplam ipſius A D. Si negetur ſit Curva vel major vel minor duplo A D. Et ſit ſive exceſſus, ſive defectus X.

Genitori polygonum ſerratum inſeratur, atque aliud circundetur, ita ut differentia ſummæ laterum utriuſque ſit æqualis ipſi X. Et producantur parallela Polygonorum latera N D B ut ſecent curvam in o o. Et ductis tangentibus o u, o u circumſcribatur Cycloidi polygonum ſerratum infinitum. Et ab iiſdem punctis o ductis o e, o e, ita ut quæque parallela ſit ei ſubtenſæ A D quæ in eandem e D parallelam incidit, inſeratur Cycloidi polygonum ſerratum infinitum. Quoniam igitur ipſæ o u tangunt Cycloidem, ergo parallelæ ſunt & æquales ipſis D B ſingulæ ſingulis; & quoniam ipſæ o e parallelæ ſunt, & æquales ipſis N D, ergo latera polygoni Cycloidi circumſcripti æqualia ſunt lateribus polygoni quod Circulo circundatur, & latera polygoni cycloidi inſerti, ejus quod circulo inſeritur. Quare latera polygoni circumſcripti ſimul omnia excedunt duplum diametri exceſſu D C, ſcilicet minore quam X, & curva quidem adhuc minor eſt: & latera polygoni Cycloidi inſerti deficiunt à duplo diametri defectu D M', ſcilicet minore quam X, & curva quidem adhuc major eſt. Atque idem demonſtratur dato quovis defectu vel exceſſu X. Ergo Curva ſemicycloidis non eſt major neque minor duplo diametri. Ergo curva Cycloidis primariæ eſt quadrupla Diametri Genitoris. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Eodem prorſus modo demonſtratur, portionem quamcunque curvæ, à vertice abſciſſam, ut o' o A, duplam eſſe ſubtenſæ A D', ſcilicet quæ à ſectione Baſis portionis, & genitoris ducitur.

De

De Dimensione Cycloidum Contractarum & Protractarum.

Proprietates quædam Cycloidum.

SUper eandem Basim GM constituantur tres Cycloides genere differentes, scilicet GaMA Primaria, cujus genitor est AHD: GoOM Cyclois quædam Contracta, cujus genitor est OFD: & GeEM, Cyclois quædam Protracta, cujus genitor est EKD. Fig. 20.

Primò, quoniam Cyclois cujusvis generis fit ex motu æquabili in peripheriâ genitoris, dum interim genitor motu æquabili transfertur, super datam basim, donec punctum generans circulum absolverit, à puncto contactus incipiens & ad idem rediens: Ergo utrique Motus, tam circularis quam rectus, erunt ubique in eadem ratione. Quare in omni Cycloide, si ducatur Basi parallela à Genitore ad curvam, ut FX, vel HY, vel KZ; erit ut motus in arcu OF, ad motum in semicirculo OFD, ita motus rectus FX, ad semissem totius motus recti, scilicet semibasim DM. Similiter ut arcus AH ad semicirculum suum AHD, ita HY ad semibasin. Idem dicitur de arcu EK & rectâ KZ.

Quare positis in directum punctis DKHF, quoniam arcus OF, AH, EK sunt in eâdem ratione ad semicirculos suos, erunt rectæ FX, HY, KZ. In eadem ratione ad communem basim DM; sunt ergo æquales, & puncta Cycloidum XYZ in directum posita sunt; rectæ igitur XYZN, FHKD, sunt æquales, & similiter sectæ & positæ: sed FD & OD similiter sectæ sunt: ergo *recta* XYZN, OAED *similiter sectæ sunt à Curvis Cycloidum.*

Secundò, quoniam angulus ODF est ad rectum, ut arcus OF ad semicirculum suum, seu ut FX vel DN ad DM; ergo, *ut* MN *ad* DM, *ita angulus* MNX *ad Rectum.*

Tertio, jungantur HA, eique parallela ducatur YQ. Quoniam demonstratum est YQ tangere Cycloidem primariam in Y: ergo NY *cadit normaliter in Curvam primariæ.*

Theorema.

Curva Cycloidis primariæ est quadrupla Diametri: & portioni cuivis assignatur recta æqualis.

SIt semibasis GD divisa in partes æquales mm indefinitè minimas; & à punctis m incidant ubique in primariam normaliter

maliter rectæ m a, & in proxime majorem m a rectæ m u: ducantur, D n (subtensa genitoris) & m z, parallelæ ipsi m′ a′; item A n, a′ z, a″ s parallelæ: quare a′ z tangit Cycloidem in a, & parallela & æqualis est ipsi m″ u′. Quoniam igitur ipsæ m a (quum sint æquales & parallelæ subtensis genitoris) sunt sinus angulorum suorum a m G ad Radium A D; & in Triangulis rectangulis m u m, latera m u sinus eorundem angulorum ad Radium m m; ergo est ut A D ad m″ m′, ita m′ a′ ad m″ u′, vel a′ z. Et quoniam anguli a m G æqualiter sese excedunt, ergo in Triangulis similibus A D n, a″ m″ s, est ut A D ad A n ita m″ a″ ad a″ s, & (quum A n sit indefinite minima, & propterea æqualis arcui A n, sive ipsi m″ m′) est ut A D ad m″ m′, ita m″ a″ ad a″ s; erat autem ut A D ad m′ m′, ita m′ a′ ad a′ z; quare est ut m′ a′ ad m″ a″, ita a′ z ad a″ s, sed differentia inter a′ m′ & a″ m″ est ad a′ m′ data quavis ratione minor, ergo a′ z, a″ s sunt æquales, & simul sumptæ portioni curvæ a″ a′ æquales. Est ergo portio a″ a′ duplum ipsius m″ u′: atque idem ubique demonstratur. Omnes igitur a a sunt duplæ omnium m u. Et si abscindatur à vertice portio quælibet A a″, ea dupla est omnium m u quæ sunt inter D & m″: Sed omnes m u (quum ipsi m u sint sinus complementi, quorum sinus recti sunt u m) sunt æquales omnibus u m: omnes autem u m (quum sint differentiæ ipsarum m a) sunt æquales maximæ m a, hoc est ipsi A D. *Ergo semicurva* A a g *dupla est diametri* A D. Et quoniam omnes u m inter G & m″, sunt æquales maximo sinui scilicet m″ a″; ergo omnes m u inter G & m″ sunt æquales sinui complementi ipsius m″ a″. Quare Portio quælibet ut A Y (cujus normalis N Y est sinus rectus anguli Y N M ad radium A D) dupla est sinus complementi A H.

Curvis Cycloidum Protractarum & Contractarum assignantur semiellipses æquales.

IN Cycloide contractâ G o O M, demittantur ubique o g perpendiculares in proxime majorem o m, cui parallela ducatur a″ y & junctis o o inscribatur polygonum. Quoniam est ut A D a l A O, ita m″ a″ ad a″ o″, & in Triangulis similibus m″ a″ s, a″ o″ y, est ut m″ a″ ad a″ o″, ita a″ s ad o″ y; ergo est ut A D ad A O, ita a″ s ad o″ y, & converse ut 2 A D, ad 2 A D ± A O,

ita

ita 2 a'' s ad 2 a'' s + o'' y, sed 2 a'' s. est curvæ portio a'' a', & 2 a'' s + o'' y est o'' g': est ergo ut 2 AD ad 2 AD + AO, ita portio a'' a' ad o'' g'. Quare omnes o g simul sumptæ sunt æquales duplo AD + AO & unaquæque o g est in eadem ratione ad portionem suam a a; & omnis a o, ad suam m a primariæ, hoc est, sunt ao ut sinus recti angulorum suorum G m o ad Radium AO. Quare si ponatur recta P T æqualis duplo AD plus AO, eique ad rectos angulos P Q æqualis ipsi AO, & fiant Pα', Pα'', Pα''', sinus complementi æqualium angulorum ad Radium P T, & ducantur tam α ω, eorundem sinus recti ad Radium PQ, quam γ ω ipsi P T ubique parallelæ & jungantur ω ω; patet ex iis quæ dicta sunt ipsas γ ω æquales esse ipsis g o singulæ singulis, & ipsas α ω ipsis a o, quare ipsæ etiam γ ω æquales erunt ipsis g o, & Triangula rectangula ω ω γ triangulis rectangulis o o g. Ex vulgaribus autem Ellipseos principiis patet Figuram T ω Q P esse polygonum quadranti Ellipseos inscriptum; ergo Polygonum Laterum indefinite minimorum quadranti Ellipseos inscriptum, æquale est Polygono Semicycloidi contractæ inscriptum: Ergo *Cycloidis contractæ curva* G o O M, *æqualis est semiellipsi cujus Axis transversus est duplum* A D *plus* A O, *& Axis minor* A O.

Eodem modo ductâ e'' x parallelâ ipsis m'' s, demonstratur ut 2 A D ad 2AD — AE, ita esse 2 a'' s ad 2 a'' s — a'' x (sive ad e'' d) quare procedendo ut supra demonstratur curvam Cycloidis Protractæ æqualem esse semiellipsi cujus Axis transversus est duplum A D minus A E, & Axis minor A E.

Scholium.

PAtet Figuram G o X M Y a, Curvis Primariæ & Contractæ terminatam, esse meram semiellipsin in arcum flexam ita ut Axis transversus applicetur Cycloidi Primariæ à parte convexâ: & Figuram G a Y M Z e, Curvis Primariæ & Protractæ terminatam, esse semiellipsin, cujus Axis transversus applicatur, Primariæ à parte Concavâ; hujus autem axis proportionaliter protrahitur, manente Curvæ Ellipticæ dimensione licet recurvetur, Illius autem proportionaliter contrahitur manente Curva, licet magis curvetur. Patet etiam ipsas o a, & a e esse meras Ellipseon ordinatas. Quare non est per accidens, Ut Clarissimo Detonvilio placuit, quod Curva Primariæ sit rectæ æqualis, ex eo quod Curvæ obliquarum sint Ellipsibus æquales; sed e contra Curvæ Obliquarum

Epist. ad Hugen. Pag. 7.

rum Cycloidum ſunt Ellipſibus æquales per accidens, ex eo quod earum Axes applicentur ejuſmodi Curvæ, quæ ex naturâ ſua ſint Euthyſmi patiens; quod de nullâ Curvâ, hactenus notâ (ne quidem aſſumptâ Circuli Quadratura) prius demonſtratum fuit, quam ego hæc de Cycloide Primariâ a meis communicaveram; niſi quod Illuſtris Juvenis Gulielmus Nelius, Curvam quandam ita conſtruendam ut ſit Euthyſmi capax, ſumma cum laude invenerit.

De problemate Kepleriano per Cycloidem ſolvendo.

Aſſeruit Keplerus, ex cauſis phyſicis, planetas ita ferri circa ſolem in Orbitâ Elliptica, ut velocitas planetæ ſit ubique diſtantiæ ejuſdem à Sole reciproce proportionalis; unde ſequentem Hypotheſin ingenioſe commentus eſt. Secat ſcilicet aream Ellipſeos Planetariæ lineis à ſole ductis in infinita Triangula Mixtilinea æqualia; unde fit ut Curva Ellipſeos dividatur in portiones inæquales, minores quidem circa Aphelium, majores circa Perihelium: per has autem portiones ponit Planetam æqualibus temporibus ferri. Quare ex Medio motu Anomaliam coæquatam ut indagaret, ſecanda eſt ſemiellipſis per Focum in datâ ratione; vel (quod perinde eſſe ab eodem demonſtratur) ſecandus eſt Semicirculus per quodvis punctum Diametri in datâ ratione. Mirum eſt quantum in hoc problemate ſudaverit Keplerus, Orbitas ſuas ——————*volvens nitendo neque proficit hilum.* Tandem anhelus, Geometrarum opem implorat; interim veritus ne propter arcuum & ſinuum ἐπεγγύειαν inveniatur Problema inexplicabile. Quod nihilominus ope Cycloidis protractæ nos olim ſic exhibuimus.

Problema.

Semicirculum per datum punctum Diametri in datâ ratione ſecare.

Fig. 21. SIt Semicirculus AKB, cujus Centrum D. Punctum datum C. Ratio data R ad S. Fiant DC, DB, Dβ continue proportionales; & centro D deſcribatur αxβ, cui æqualis ponatur recta BM; datâ autē baſi BM, & Genitore AKB, deſcribatur ſemicyclois Protracta MAB;

MAB; fiat deinde BG ad BM ut R ad S, & ducatur GP ad angulos rectos secans Cycloidem in P, item PF Basi parallela secans Genitorem in E. Jungantur denique EC. Dico mixtilineum AEC esse ad semicirculum ut R ad S. Ducatur radius DE ε; & demittatur ε φ; & jungantur EB.

Quoniam segmenta α ε φ, AEF sunt similia, ergo ut arcus α ε ad ε φ, ita arcus AE ad EF; & quoniam arcus AE ductus in semiradium æqualis est sectori AED, & semissis basis DB sive semiradius ductus in altitudinem EF æqualis est Triangulo DEB: ergo ut AE ad EF, ita sector AED ad Triangulum DEB; & ut α ε ad ε φ ita AED, ad DEB: sed ut ε φ ad EF, ita Triangulum DEB ad Triangulum DEC (quia sunt ut Bases DB, DC:) erit igitur ex æquo ut α ε ad EF, ita sector AED, ad Triangulum DEC, & converse simul & inverse erit, ut α ε plus EF, ad α ε, ita AED plus DEC, ad AED; sed α ε est ad semiperipheriam α κ β, ut sector AED ad semicirculum AKB; erit igitur ex æquo ut α ε plus EF ad semiperipheriam, ita AED plus DEC ad semicirculum: sed ex iis quæ demonstrata sunt de Cycloide, quoniam EP est ad Basin BM, ut angulus ABE ad rectum, sive arcus α ε ad semiperipheriam α κ β quæ quidem æqualis est ipsi BM; ergo α ε plus EF æqualis est ipsi FP: est ergo ut FP (vel BG) ad BM (sive ut R ad S,) ita Mixtilineum AEC ad semicirculum AKB. Quare semicirculus AKB per punctum datum C ita secatur a linea CE ut pars sit ad totum in datâ ratione R ad S. Quod erat faciendum.

Scholia.

Quod si punctum C sit in ipsa extremitate Diametri, puncta C, B, β, coincident & Basis BM æqualis est peripheriæ Genitoris; Quare Cyclois est Primaria, & ductis GP, PF eodem modo perficitur Problema, & facilius demonstratur.

Quod si punctum C sit extra circulum productâ Diametro, Cyclois erit contracta, & Mixtilineum AEC, non solum assignatur semicirculo minor in data ratione, sed potest etiam major esse vel æqualis.

Demonstratur à Keplero ex datâ sectione semicirculi à puncto Diametri, posse semiellipsin quoque à puncto Axis transversi in datâ ratione secari; sed idem etiam perficitur à puncto cujusvis Axis.

Hinc patet ex contemplatione Cycloidum ad eundem modum innumera alia problemata perfici posse de segmentis, Triangulis mixtilineis, & Lunulis, sive componantur ex portionibus circularibus, sive ellipticis. Quod indicâsse sufficiat.

Veruntamen, cum Cyclois sit Linea Mechanica non Geometrica; non vere solvuntur problemata, sed Mechanice perficiuntur, non enim magnitudine datur Linea G P; unde intersectio P non datur Geometrice. Fatendum est enim nullas Intersectiones Geometrice dari præterquam Rectarum, & Intersectionem Rectæ & Curvæ (ut quando Recta secat Circulum aut sectionem Conicam) non dari quatenus talis est, sed quatenus est communis intersectio binarum Rectarum in ipsa Curva, ita ut (ex naturâ Curvæ) uniformem quandam ad invicem habeant ubique Relationem, quæ æquatione aliqua possit exprimi. In Cycloide, vero Relatio inter P G & P F, sive inter Arcum majoris circuli Sinumque minoris simul sumptos, & sinum Versum, perpetuo varia est & difformis. Posito autem punctum P dari, non deest contemplationi veritas & pulchritudo Geometrica.

Quicquid perficitur hoc modo per rectam secantem Cycloidem, habetur etiam si circulus secet Evolutæ curvam. Evolutam autem appellamus superficiem Ungulæ Cylindriacæ. Sunt aliæ etiam Curvæ quæ tantundum præstant, quarum etiam intersectiones Geometrice non dantur.

Non inutilis est contemplatio Cycloidum quæ generantur ex circulo super Basim circularem revoluto, hujus generis vocentur Epicycloides, tales enim curvas Planetæ in Epicyclis vecti describunt. Quasdam habent proprietates Cycloidum proprietatibus non absimiles, quasdam diversas & magis perplexas, præcipue Epicycloides Planetariæ, in quibus motus non sunt æquales. Verum hæc omnia prosequi non est præsentis Instituti.

FINIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [90] - 74
PUBLIC DOMAIN

Nobiliſſimo Doctiſſimoque Viro,

D. CHRISTIANO HUGENIO
Conſt. F.

JOHANNES VVALLIS
S.

DUM ea quæ cum his accipies, Vir Nobiliſſime, diutinas preli moras exſpectabant, literas Tuas 9° Junii datas, poſt menſem circiter accipiebam. Quæ partim promiſſa mea, de hiſce tibi communicandis pridem facta, memorant; partim libros aliquot à Dettonvilio ſive Paſcalio editos, quos Illuſtriſſimus Carcavius diſtribuendos miſerat, huc deferendos curant; quos ego ſtatim atque accepi, cum officioſa Carcavii ſalutatione, ut imperatum erat, diſtribuebam.

Promiſſi mei fidem quod attinet, habes eam his ſcriptis liberatam. Dettonvillii vero Tractatum, (de quo & ſententiam meam ſive Tuo ſive & Carcavii nomine petis,) tum arripiebam avidus, tum eodem poſteroque die evolvebam; & acuminis plenum invenio. Eumque itinere eò minus impedito aut inoffenſo pede pervolabam, quia nec à noſtris plane diſſentientem reperi, nec multum abſimili methodo incedentem: quod poſtquam ſua cum noſtris contuleris, citò deprehendes. *Dettonvilii tractatus.*

Cum autem Vir Clariſſimus jamdudum de hoc negotio multa meditatus fuerit, (quod Gallos jam à viginti vel etiam quadraginta annis occupavit;) illaque ipſe propoſuerit problemata, (num ſibi tum temporis penitus perſpecta nec ne, mihi nondum conſtat;

ſtat; at magnam ſaltem eorum partem ſibi jam perſpectam eſſe, non dubitandum, credo:) omniumque undecunque ex eo tempore de hoc negotio ſcripta, atque hac occaſione ad D. Carcavium (ut deſiderabatur) tranſmiſſa, evolvendi nactus opportunitatem, indeque quod ad rem ſuam faciat tranſumendi, vel ad ſua ſaltem ſenſa perficienda anſas non leves arripiendi: non diffiteor, accuratiora longe ab ipſo forſan expectanda; quam à me, qui ſolus & rudis huc acceſſi. Præter enim ea quæ apud Toricellium exſtant, quæque apud Schotenium in ſuis ad Carteſium annotationibus, (neſcio an & quæ apud Tacquetum,) non memini me, ante expoſita hæc problemata vel legiſſe de Cycloide quicquam, vel meditatum eſſe. At interim non piget, ea quæ & nobis in hoc negotio obvenerunt palam facere, nec (ſpero) iſtarum rerum peritis diſplicebit.

Verum orandus erit vir Doctiſſimus, ne plagii nos inſimulare velit, (quod de Toricellio inſinuatum video; quam juſte, neſcio, ſaltem parum candide poſtquam per tot annos fuerit demortuus:) ſi forte eadem & ſibi & nobis non raro occurrerunt, (præſertim cum ipſe mea prius inſpexerit quam ego ſua:) neque etiam ut inventis noſtris derogatum ire velit, ſi forte horum nonnulla vel ipſe vel Robervallius (quem pro conjuncta perſona habeo,) prius invenerit. Dummodo enim ipſi ſua apud ſe premunt inventa, nec publici juris faciunt, iniquum plane eſſet ni & alios patiantur ea quæ ipſi celant itidem invenire, atque interim inveniendi (ſiqua ſit) gloriam reportare. Si enim nobis, verbi gratia, (inter alia) proponatur inveſtigandum (& quidem ſub præmio) tanquam res ardua & difficultatis plena & quæ mercedem mereatur; *Quanta ſit ſolidi ex Cycloidis circa baſem converſione magnitudo*: Non nobis id obeſſe debuit aut famæ noſtræ, ſi Robervallius aliquando (ante aliquot forſan annos,) clam nobis, id etiam invenerit; neque ſi tum ego, tum & alii, id ipſum proprio marte inveniamus (nec interim alius alium incuſamus plagii,) minus propterea inveniſſe cenſendi ſumus, quam ipſe Robervallius: (eadem enim in eodem aperto naturæ campo à variis inveniri nihil prohibet.) Quam quidem inveniendi laudem ſi præripuiſſe vellent; oportuit id nobis ut jam inventum exhibuiſſe, non ut nunc inveſtigandum proponere. Quod & de reliquis utrinque inventis pariter dictum, eſto.

Et quidem maluiſſem, vel hoc nomine, ut abſtinuiſſet Author Hiſtoriolæ *de la Roulette*, ſaltem eis quæ in *Torricellium* dicta ſunt; (in Torricellium, inquam; nam de *Lalouera* minus ſum ſolicitus, ut qui ſuperſtes adhuc eſt in ſui Apologiam;) quam ut meritiſſimum virum, jam per multos annos demortuum, ſuggillaret. Torricellium utique ex ſcriptis novimus tum virum doctum eſſe & Mathematicum, tum de Mathematicis optime meritum; credo, & ingenuum. Nec video quid apud illum admiſſum ſit, quod Clariſſimo Viro, vel Robervallio etiam, cujus partes agit, bilem moveret. Edidit Torricellius, anno 1644, inter alia, demonſtrationes ſuas de Cycloidis area circuli genitoris tripla: quod quidem cur ipſi non liceret, non video. Demonſtrationes illas, ſuas eſſe, non negant; nec cauſantur illum Robervallii quicquam pro ſuo venditaſſe. Non dixit quidem, (neſciebat enim, vel ipſis id fatentibus,) ſed nec negavit, Robervallium hoc etiam demonſtraſſe. Quod jam tum vel publice notum erat, vel non; Si ſic, Robervallio id injurium eſſe non poteſt, ſi poſt illum alius idem ſolvat problema, magis quam Archimedi quod poſt illum idem Torricellius demonſtraverit quadraturam parabolæ; Si minus, ſaltem Torricellio ſuccenſendum non erit quod ipſe neſciverit quid vel in ſcriniis ſuis apud ſe premeret Robervallius, vel etiam amicis ſuis communicaret. Nos ſaltem Torricellio plus debemus, qui demonſtrationes ſuas jam palam factas vulgavit, quam, qui ſuas adhuc ſupprimit, Robervallio. Et quidem iniquum plane judicamus, ut, ſi ſuas nolit Robervallius typis mandare, non igitur liceat Torricellio ſuas. At Galilæo, inquiunt, id aſſcribit Torricellius quod Merſenno debetur, &, quod Robervallio, ſibi. At bona verba, quæſo: Siquidem ego neutrum horum video. Erat utique ſuarum ſolutionum Author Robervallius, & Torricellius ſuarum non minus. Sin ſua intereſſe putaverit Robervallius ut ſciat orbis priores ſuas eſſe, ut ut id neſciverit Torricellius; liberum id illi fuit, hoc indicaſſe, nec erat ad hoc neceſſe ut Torricellium, hujus neſcium, ſuggillet, aut iniquis ſuſpicionibus oneret. Et quidem tantum abeſt ut, in derogationem Robervallii, ſe problematis hujus ſolutionem inveniſſe *primum* affirmaverit, ut ne quidem ſe *inveniſſe* dicat: Sed ſolummodo propoſitionis veritatem profeſſus, ſuis eam demonſtrationibus confirmat. Quod quid ni impune poſſit, non video.

At fieri poſſit, ut inter Galilæi ſchediaſmata, Beaugrandi ſcriptum viderit, quo demonſtrationem Robervallii, celato nomine, ad Galilæum miſerat; unde anſam ſuis arripuiſſe poſſit. Nempe hoc ſuſpicantur: Num autem pro comperto habeant, ignoro; nec niſi hoc faſſus fuerit ipſe, quod non affirmant, unde id ſibi conſtare poſſit non docent. Sed, ut ut ſit; non ſurreptas inde demonſtrationes cauſantur ipſum pro ſuis venditâſſe, nec negant ſuas eſſe quas exhibet. Quodnam igitur ſit, cujus inſimulent criminis, plane non intelligo: nec, præter ſiniſtras ſuſpiciones, quicquam quo id conſtet afferunt. Imo vero, inquiunt, (quod palmarium eſt apud eos argumentum,) literas ipſius manu ſcriptas habent, quas ut κειμήλιον quoddam in hunc diem conſervant, (quaſi quidem res ipſa tanti eſſet,) quibus Robervallio primas concedit in hujus Problematis ſolutione. Nempe Vir ingenuus, cum tandem intellexerit, quod dum librum ederet neſciebat, Robervallium etiam (clam ipſo) hoc idem demonſtraſſe, utut typis illud non vulgaverit, (quod necdum, credo, fecit,) non ægre faſſus illud erat. Verum hoc ſibi tum innotuiſſe cum librum ederet, nec illum confeſſum dicunt, nec affirmant ipſi; imo contrarium docent. Quid itaque culpent neſcio, niſi nefas eſſe velint, ut quiſquam vel inveniat alius, vel in publicum emittat, quod ſibi forte clam cognitum, apud ſe premit Robervallius, vel ſuis ſolis notum malit. Merſennum vero quod ſpectet, cui derogatum inſinuant quod Galilæo tribuitur: vel nullo quidem, vel perexiguo, mihi viſum eſt fundamento niti. Eſto enim quod volunt ipſi, Merſennum ſaltem anno 1615 hanc conſiderâſſe curvam, *la Roulette* ſibi dictam; atque de hac tum temporis Geometras interrogâſſe: ſi tamen & verum ſit, quod prodit Torricellius (quod quidni ſit, non video, nec dicunt illi,) hanc ipſam lineam *à Galilæo jam ſupra* 45 *annum*, (adeoque anno ſaltem 1599, prodiit enim liber ille anno 1644,) *Cycloidem vocatam*: Ecquid, quæſo, Merſenno derogatum itur, dum hoc dicitur? Nec quidem aliud de Galilæo dictum, quod huc ſpectet, apud illum quicquam reperio: de Merſenno, nihil. Et quamquam nolim ſibi ſuum reponere, *ce fut un ſujet de rire en France*; at nos certe, qui minus forte ſumus quam Galli ſui ad riſum proclives, miramur ſaltem (dum Torricellii verba cum hac hiſtoriola comparamus,) quid illud tanti ſit, quod tantis hiſce queſtibus ſublit fundamentum. (Quaſi quidem

Nelius

Nelius noſter Heuratium veſtrum ejuſdem inſimularet criminis, qui id ipſum ſe primum proferre putat, quod jam ultra duos annos apud noſtros paſſim innotuit, ſe tamen inſcio, & à pluribus demonſtratum.) Sed nimius forte videar in alieno negotio. Ignoſcent interim Clariſſimi Viri (quos ego veneror, & Merſennum ſuum) ſi parcius iſta dicta malim, quibus in doctiſſimi Viri, & bene olim meriti, famam, nulla neceſſitate involatur. Optaſſem potius, ut, ſi quid apud ſe tanti habent, quod ſibi ab aliis præreptum nollent, quò tum id ſibi ſecurius aſſerant, tum in uſus publicos magis conducat, divulgent ipſi; ut non ſit opus ea ſibi tandem ex poſtliminio vendicandi. Saltem, ſi, dum hoc ipſi negligunt, id alii aliunde diſcant, vel tum ſibi fieri injuriam non cauſentur, vel ſibi à ſe factam intelligant. Sed his miſſis ad Dettonvilium noſtrum redeo.

Quam autem ſua pleraque, aliis licet verbis, in meis etiam extent, erat quidem mihi aliquando in animo, collatis locis, digito indicare, atque in eum finem jam ante accuratius perlegiſſe, (vix enim aliter, quam, quod aiunt, tanquam canis ad Nilum, intra biduum illud quod diximus, ſumma quæque delibando perlegimus;) quod cum per otium hactenus non licuerit, id tibi tamen ubi utrumque perlegeris facile patebit. Quæ tamen non eo animo dicta velim intelligas, quaſi Clariſſimi Viri meritis derogare velim; vel ſiniſtræ quicquam ſuſpicionis alere; ſed ſaltem ut reipſa conſtet, quàm in rebus hujuſmodi mirum non ſit, varios, eoſque longe diſſitos, nec ab invicem edoctos, dum eaſdem verſant res Geometricas, in eaſdem item ſpeculationes incidere; adeoque non temere alius alium inſimulare plagii, (in hoc præſertim, ingeniorum feraci ſeculo,) vel etiam aliis, quod ipſe prior invenerit, vanus inſultare. Nam *Inveniſſe*, quidem Acuminis eſt; at, *primum inveniſſe*, Fortunæ: neque enim minore vel ſubtilitate vel acumine poſterior idem non raro invenit, quod alius (ſe neſcio) invenerat primus.

Cur autem exiſtimem Cl. Viro, hæc omnia ſua problemata non ſibi tunc perſpecta eſſe, cum ea propoſuerit; nec antequam aliorum hac de re ſcripta, ad D. Carcavium miſſa, inſpexerit, quæ perpoliendis & perficiendis inventis ſuis adjumento eſſe poſſint: multa ſunt quæ ſuadent. Suſcepit utique vir. Cl. jam ab initio cum ſua primum expoſuit Problemata, non quidem ſe illa

poſſe

posse omnia absolvere; sed saltem, nisi quis alius interea solverit, *se, ea quæ invenerit ipse, non aliis invisurum, unde majora jam inventis nanciscantur*: Quæ quam caute dicta sunt, vides. Fallor etiam, vel ipsius solutiones (quantum ex levi inspectione colligo) dependent ex cognitione longitudinis Cycloidalis lineæ, ejusque in data ratione divisione, (neque enim, citra hæc, illius figura 13ª ad præsentes casus omnes accommodabitur;) quarum cum inventionem Wrennio nostro attribuat, non ante inspectas Wrennii literas cognovisse censendus erit. Et quamvis hoc inventum Wrennii extenuatum ire satagat, Gallosque suos innuat istius, cum innotuit, demonstrationem suppeditare posse: non tamen affirmare sustinet, vel id sibi prius innotuisse, vel Gallorum suorum quempiam, ne privatim quidem, cuiquam innuisse perspectam sibi esse istius lineæ vel longitudinem vel in data ratione divisionem. (At interim candore forte desideremus, cum video exterorum inventa, quæ apud D. Carcavium clam reponenda videbantur, cum Gallis suis etiam ante indictum diem statim communicata; quo, si non aliàs, saltem ex his inspectis valeant quæsita solvere.) Addo insuper, Posteriora quæsita, quæ tandem ipsa proponit Historiola, quæ ex istius curvæ in data ratione divisione dependent, indicio sunt illius longitudinem, & partium suarum, ignoratam prius esse. Neque alia apparet ratio, cur non eadem unà cum prioribus proponerentur. Sin mea me hac in re fefellit conjectura, eaque sibi omnia pridem perspecta dixerit, Pascalius dicam? an Dettonvillius; non contendo: nec invidebo sibi, sed gratulor inventa sua.

De singulis autem sententiam sigillatim ferre, ob causam jam memoratam, nondum valeo. Non video tamen quin, quæ aliquatenus perpendi, sana sint, & rite demonstrata. Atque ea speciatim (de quibus interrogas) de lineæ Parabolicæ & Spiralis æqualitate. Quamvis enim istius demonstrationem nondum perlegerim; cum tamen propositio illa vera sit; eamque sic esse, ut aliàs, sic ex demonstratione per inscriptiones & circumscriptiones figurarum, ipse antehac perspexerim: non pronus sum ut suspicer Cl. Virum demonstrando lapsum esse. Quod eo liberius pronuncio, quia Robervallium antehac conquestum intelligo, me *propositionem illam falsam esse temere affirmasse*: quam quidem ego neque temere nec omnino repudiaveram, sed demonstrationem

tantum-

tantummodo ut ab Hobbio prolatam, ut insufficientem improbabam: Propositionem ipsam, ubi illam examinaveram, veram deprehendi.

Calculum, quem ille totum omittit, fundamenta tradidisse contentus, nos integrum exhibuimus, usque ad casum illum quem ipse ex omnibus selegerat, nempe de centro gravitatis semisolidi semiconversione semicycloidis circa basin descripti, (& quidem solidi integri ejusdem conversione circa axem facti.) Putaveram etiam ad reliquos item casus (prius quam rem operæ absolverint) calculum perduxisse; eum saltem qui ex §65, 66, collatis supplendus est. Sed cum interea temporis prodierit Dettonvilii tractatus, nihil deinceps addendum censui; ne ipsius vitulâ arasse videar: Adeoque prout Mense Martio conscriptus erat, atque ad Honoratiss. Vicecom. *Brounker* statim transmissus, eodem plane statu in publicū jam emissum tractatum habes. Potuissem quidem prolixius multo, & magis ad pompam, hoc totum opus perduxisse, quod & tyronibus forsan & rebus hisce minus exercitatis fuisset gratius, si per Definitionum, Lemmatum, Problematum, Theorematum, Scholiorum solennitates incedere, & longo apparatu lineares ubique demonstrationes adornare vellem: Sed tibi, credo, non minus placebit concinna brevitas, & in paucis multa; qui, vel digito ad fontes intento monitus, demonstrationis vim succincte traditam non minus assequêris, quam si tantâ esset solennitate in longum protracta. Sicubi vero in multiplici calculo (quod omnino est possibile) numerum pro numero positum deprehendes, id indicare non gravaberis & condonare. Atque hæc sunt quæ tum de Illius tum de Nostro tractatu monuisse visum erat.

Sed, priusquam Cycloidem penitus dimittam; non ingratum tibi fore credo si magnam illius cum Cissoide convenientiam ostendam.

Proposuisti non ita pridem, de Cissoide propositionem perelegantem; Nempe in exposita linea Cissoide, C Z Z, cujus hæc natura est, ut rectam Z z ad C tendentem, cissoide & semicirculi C z z peripheria interceptam, bifariam secet G H recta diametro F C perpendiculariter insistens in centro G: *Spatium* F C Z A F *longitudine infinitum*, C Z Z *cissoidi &* F A *circulum tangenti interjectum, semicirculi* F z C, *triplum esse*, asseris. Petis autem, Num, ut *Hyperbolas Infinitas* (de quibus cum D. *De Cissoide.*

Fermatio paulo ante diſſerueram) ſic & ſpatium hoc *Ciſſoidale* ex noſtra *Infinitorum Arithmetica* ſuppeditare poſſem.

Id itaque ſtatim quî fieri poſſit, ſequenti demonſtratione indicabam; quam non pigebit hic repetere.

Si ducantur tum z G K diameter, tum rectæ K C, & K Z (diametro C F in L occurrens:) oſtendit Pappus l. 3. p. 5. propter tum Z z biſectam in H, tum z K in G, rectam K Z rectæ G H parallelam eſſe: Adeoque tum z C K angulum in ſemicirculo, tum angulos ad L, rectos eſſe: Et conſequenter rectas L F, L K, L C, L Z, continue proportionales. Quod quidem non minus valet de puncto Z quovis in Ciſſoidis continuatione extra ſemicirculum, quam (qui Pappi caſus eſt) ubi intra ſemicirculum contingit. Fig. 22.

Ponamus jam rectam F C diametrum in æquales partes numero infinitas infinitis punctis L dividi. Erunt itaque omnes C L, ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales, quæ ſucceſſive dicantur, a; quarum maxima C F dicatur $\mathcal{D}$. Eritque L K, (quippe media proportionalis inter C L & L F, hoc eſt, inter a & $D - a$,) $\sqrt{:} a D - a^2$. Cumque ſit ut L K ad L C, ſic L C ad L Z; erit $L Z = \frac{a^3}{\sqrt{:} a D - a^2}$; hoc eſt $\frac{a^2}{\sqrt{a} \times \sqrt{:} D - a}$ ſive $\frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{:} D - a}$, ſive $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{:} D - a}$ vel $\sqrt{\frac{a^3}{D - a}}$. Hoc eſt, omnia quadrata L Z, ſunt ſeries Tertianorum, per ſeriem Primanorum inverſe poſitorum, reſpective diviſa: ipſæque L Z rectæ, in horum quadratorum ratione ſubduplicata.

Quod autem omnes $\sqrt{\frac{a^3}{D - a}}$ hoc eſt, omnes L Z ſpatium F C Z A F complentes, ad omnes $\sqrt{:} a D - a^2$: vel $\sqrt{a} \times \sqrt{:} \mathcal{D} - a$: hoc eſt, ad omnes L K complentes ſemicirculum, ſint in ratione tripla; ex principiis *Arithmeticæ Infinitorum* ſic colligimus.

Si ſeries ſubſecundanorum ſive $\sqrt{a}$, in ſeriem primanorum a inverſam (hoc eſt, in $D - a$) reſpective ducatur, fiet ſeries $D \sqrt{a} - a \sqrt{a}$ ſive $D \sqrt{a} - \sqrt{a^3}$; quæ eſt ad ſeriem Æqualiũ ſive totidem $\mathcal{D} \sqrt{\mathcal{D}}$ vel $\sqrt{\mathcal{D}^3}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ad 1, ſive ut 4 ad 15. (per prop.

prop. 64 & 73 *Arithm. Infin.*) Eodem modo si respective ducatur eadem series $\sqrt{a}$, in seriem a^2 inversam, hoc est in seriem $Q: D - a$: vel $D^2 - 2aD + a^2$, fiet series $D^2\sqrt{a} - 2Da\sqrt{a} + a^2\sqrt{a}$, vel $\mathcal{D}^2\sqrt{a} - 2\mathcal{D}\sqrt{a^3} + \sqrt{a^5}$, quæ est ad seriem Æqualium, sive totidem $D^2\sqrt{D}$ vel $\sqrt{D^5}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}$ ad 1, sive ut 16 ad 105. Et similiter, si eadem series $\sqrt{a}$ respective ducatur in alias series inversas, prodibunt hæ rationes subjectæ. Nempe si series $\sqrt{a}$ ducatur inverse in

series 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. prodibunt

rationes $\frac{2}{3}\bullet\ \frac{4}{15}\bullet\ \frac{16}{105}\bullet\ \frac{96}{945}\bullet\ \frac{768}{10395}\bullet$ &c.

hoc est $\frac{2}{3}\bullet\ \frac{2\times2}{3\times5}\bullet\ \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}\bullet\ \frac{2\times2\times4\times6}{3\times5\times7\times9}\bullet\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{3\times5\times7\times9\times11}\bullet$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & suppleantur interjecti loci impares; ponendo, in loco tertio, (inter 1 & a,) pro serie $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ inverse ductâ, rationem 1 ad 2 □ (per prop. 167. *Arith. Infin.*) Sicut ratio loci quarti multiplicat rationem secundi per $\frac{2}{5}$, & hanc ratio sexti per $\frac{4}{7}$, &c. manifestum est (ex consecutione seriei) rationem quinti multiplicare rationem tertii per $\frac{3}{5}$; & similiter in reliquis. Nempe series $\sqrt{a}$ ducta inverse in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}$. 1. $\sqrt{a}$. a. $\sqrt{a^3}$. a^2. $\sqrt{a^5}$. &c. dabit

rationes $\frac{1}{4}\Big)\ \frac{1}{2\,\square}\bullet\ \frac{2}{3}\bullet\ \frac{1}{2\,\square}\bullet\ \frac{2\times2}{3\times5}\bullet\ \frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}\bullet\ \frac{2\times2\times4}{3\times5\times7}\bullet\ \frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\bullet$ &c.

Unde, in præsens negotium hoc saltem seligendum est, series $\sqrt{a}$ & $\sqrt{a^3}$ invicem inverse ductas, ad seriem æqualium, sive ad $\mathcal{D}^2 = \sqrt{\mathcal{D}^4}$ toties sumptum, ut $\frac{1}{2\,\square}\times\frac{3}{6}$ ad 1; sive ut 1 ad 4□.

Deinde, ut seriem $\sqrt{a}$ jam perpendimus, perpendamus similiter seriem $\sqrt{a^3}$. Ea nempe ducta in seriem a inversam, hoc est, in $D - a$ dat seriem $D\sqrt{a^3} - a\sqrt{a^3}$, vel $\mathcal{D}\sqrt{a^3} - \sqrt{a^5}$ cui convenit ratio $\frac{2}{5} - \frac{2}{7}$ ad 1, sive 4 ad 35. Et similiter in reliquis.

Nempe series $\sqrt{a^2}$ inverse ducta in

series $1.\ a.\ a^2.\ a^3.\ a^4.$ &c. dabit

rationes $\frac{2}{5}.\ \frac{4}{35}.\ \frac{16}{315}.\ \frac{96}{3405}.\ \frac{768}{45045}.$ &c.

hoc est $\frac{2}{5}.\ \frac{2\times2}{5\times7}.\ \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\ \frac{2\times2\times4\times6}{5\times7\times9\times11}.\ \frac{2\times2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}.$ &c.

Si vero hi loci pro paribus habeantur, & suppleantur loci impares, ponendo (per inquisitionem modo factam) loco tertio (inter 1 & a) rationem $\frac{1}{4}\square$: Ut ratio loci quarti multiplicat rationem secundi per $\frac{2}{7}$; & illam ratio sexti per $\frac{4}{9}$; sic rationem loci tertii multiplicabit ratio loci quinti per $\frac{3}{8}$, ratio tertii rationem primi per $\frac{1}{6}$; & de reliquis similiter. Nempe series $\sqrt{a^2}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $1.\ \sqrt{a}.\ a.\ \sqrt{a^3}.\ a^2.\ \sqrt{a^5}.$ &c. dat rationes $\frac{1}{6}) \frac{1}{4\square}.\ \frac{2}{5}.\ \frac{1}{4\square}.\ \frac{2\times2}{5\times7}.\ \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{4}.\ \frac{2\times2\times4}{5\times7\times9}.\ \frac{1}{4\square}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{10}$, &c.

Cum igitur series $\sqrt{a^2}$ in seriem $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ducta; hoc est series $\sqrt{a^2}$ per seriem $\sqrt{a}$ inverse divisa, hoc est divisa per $\sqrt{:D-a}$, sit ad seriem æqualium, sive D toties sumptum, ut $\frac{1}{6}) \frac{1}{4\square}$ ad 1, hoc est, ut 6 ad $4\square$, vel 3 ad $2\square$; Erunt omnes $\sqrt{\frac{a^2}{D-a}}$, hoc est omnes L Z, hoc est F C Z A F spatium, ad D toties sumptum, hoc est ad D^2, ut 3 ad $2\square$. Sed (per prop. 167 Arith. Infin.) omnes $\sqrt{:aD-a^2}$: hoc est L K, hoc est C z F semicirculus, est ad D^2, ut 1 ad $2\square$. Ergo Spatium illud est Triplum Semicirculi. Quod erat ostendendum.

Sed & ex abundanti ostendebam, Dicti spatii lineam centri gravitatis rectæ F A parallelam ab eadem distare sextâ parte diametri: Item, solidum factum ex conversione dicti spatii circa FA ut axem, æqualem esse solido ex conversione F z C semicirculi

circa

circa eandem FA tangentem, hoc est, semicylindro cujus basis sit idem semicirculus, & altitudo æqualis totius circuli peripheriæ: Item, solidum ex ejusdem conversione circa rectam C α solidi prioris quintuplum: Solidum vero ejusdem conversione circa CF, magnitudine infinitum: Centrum denique gravitatis nusquam esse. Nempe hoc modo.

Positâ linea æquilibrii C α, erunt momenta rectarum L Z, series composita ex serie magnitudinum L Z, hoc est $\sqrt{D \overline{-} a}$ & distantiarum C L hoc est a; adeoque series momentorum $a\sqrt{D \overline{-} a}$, vel $\sqrt{D \overline{-} a^3}$. Cujus ratio ad seriem æqualium, hoc est ad momentum quadrati diametri ex puncto F suspensi, sic colligitur. Series $\sqrt{a^3}$ inverse ducta in

series 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes $\frac{2}{7} \cdot \frac{2\times2}{7\times9} \cdot \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11} \cdot \frac{2\times2\times4\times6}{7\times9\times11\times13} \cdot \frac{2\times2\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$ &c.

Adeoque cum series $\sqrt{a}$ in seriem $\sqrt{a^3}$ inverse ducta, rationem exhibeat (supra inventam) $\frac{1}{2\square} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8}$ ad 1. hoc est 5 ad $32\square$; supplebimus interjecta loca vi analogiæ, ad hanc formam. Nempe series $\sqrt{a^3}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot$ 1. $\sqrt{a}$. a. $\sqrt{a^3}$. a^2. $\sqrt{a^5}$. &c. dabit rationes $\frac{1}{8}) \frac{5}{32\square} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{32\square} \cdot \frac{2\times2}{7\times9} \cdot \frac{5}{32\square} \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2\times2\times4}{7\times9\times11} \cdot \frac{5}{32\square} \times \frac{3}{10} \times \frac{5}{12}$ &c.

Momenta itaque omnium L Z, (hoc est spatii F C Z A F) in suo situ, ad momentum totidem C F, sive D, hoc est D^2, in distantia maxima, hoc est ex puncto F suspensi, ut $\frac{1}{8}) \frac{5}{32\square}$ ad 1; sive ut 5 ad $4\square$: Adeoque (propter magnitudinem semicirculi ad diametri quadratum, ut 1 ad $2\square$) ad momentum semicirculi ibidem suspensi, ut 5 ad 2; vel suspensi ex G centro, hoc est, in

ſuo ſitu, ut 5 ad 1. Spatium igitur FCZAF in ſuo ſitu, æquiponderat quintuplo ſemicirculi in ſitu ſuo, ſive in diſtantia CG ſuſpenſo; adeoque ſemicirculo in diſtantiæ CG quintuplâ. Et conſequenter (propter diſtantias magnitudinibus reciproce proportionales) cum ſpatium ſit ſemicirculi triplum, erit diſtantia diſtantiæ ſubtripla, hoc eſt $\frac{5}{3}$ C G, vel $\frac{5}{6}$ C F, nempe a recta C α: Adeoque $\frac{1}{3}$ C G vel $\frac{1}{6}$ C F a rectâ F A. Tantundem itaque diſtat iſtius ſpatii linea centri gravitatis (&, ſiquod eſt, ipſum gravitatis centrum) à rectis illis C α, F A. Quod erat oſtendendum.

Fig. 22.

Idem eodem modo colligitur, ſumptâ ab initio, æquilibrii lineâ F A. Nempe cum ſeries magnitudinum L Z ſit $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ & diſtantiarum $D-a$; Eſt ex utriſque compoſita ſeries momentorum $\sqrt{\frac{a^3}{D-a}}$ in $D-a$: hoc eſt $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:}\, D-a$: hoc eſt ſeries $\sqrt{a^3}$ in ſeriem $\sqrt{a}$ inverſe ducta; cui convenit (ut ſupra) ratio 1 ad 4 □. Momentum itaque dicti ſpatii in ſuo ſitu (reſpectu F A rectæ) eſt ad momentum quadrati F C in diſtantia F C ſuſpenſi, ut 1 ad 4 □; adeoque ad momentum ſemicirculi ſic ſuſpenſi, ut 1 ad 2: Hoc eſt, æquiponderat ſemicirculo ſuſpenſo in diſtantia $\frac{1}{2}$ F C, hoc eſt ex puncto G centro, hoc eſt in ſuo ſitu. Cum igitur ſpatium illud Ciſſoidale in ſuo ſitu æquiponderat Semicirculo in ſuo, (reſpectu rectæ F A;) ſitque ſpatium illud Semicirculi triplum: Erit diſtantia diſtantiæ ſubtripla; hoc eſt $\frac{1}{3}$ F G, vel $\frac{1}{6}$ F C, nempe a recta FA; Adeoque $\frac{1}{4}$ F G, vel $\frac{1}{6}$ FC, a recta C α. ut prius.

Atque hinc ſtatim colligimus; Solidum ex converſione dicti ſpatii Ciſſoidalis, ad ſolidū ex converſione ſemicirculi, circa eandem rectam C α, eſſe ut 5 ad 1, (nempe ut planorum momenta reſpectu ejuſdem C α rectæ:) Circa rectam autem FA (propter æqualia planorū momenta reſpectu hujus rectæ) æqualia eſſe ſolida.

Si quis autem quærat, de ſolidorum hujuſmodi ſemiconverſione factorum, centri gravitatis linea, ſive ejuſdem ab F A vel C α diſtantia: Id eodem plane modo inveſtigabitur. Quippe cum ſemicylindricæ ſuperficies rectarum LZ ſemiconverſione factarum, ſint rectarum illarum momentis proportionales, hoc eſt (reſpectu rectæ C α) ut $\sqrt{\frac{a^5}{D-a^3}}$; ſuorumque centrorum ab eadem recta,

in

in ratione radiorum C L, hoc est a: erunt omnia momenta superficierum illarum semicylindricarum, series $a\sqrt{\frac{a^5}{D-a^3}}$, vel $\sqrt{\frac{a^7}{D-a^3}}$. Cujus seriei ratio ad seriem æqualium, sic colligitur: Series $\sqrt{a^7}$ inverse ducta in

series 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes $\frac{2}{9}\cdot\frac{2\times2}{9\times11}\cdot\frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}\cdot\frac{2\times2\times4\times6}{9\times11\times13\times15}\cdot\frac{2\times2\times4\times6\times8}{9\times11\times13\times15\times17}$ &c.

Adeoque cum series $\sqrt{a}$ in seriem $\sqrt{a^7}$ inverse ducta (ut ex inquisitione primum factâ colligitur) sit ut $\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}$ ad 1. hoc est ut 7 ad $64\square$; supplebimus interjecta loca ad hanc formam. Nempe series $\sqrt{a^1}$ inverse ducta in

series $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot$ 1. $\sqrt{a}$. a. $\sqrt{a^3}$. a^2. $\sqrt{a^5}$. &c. dabit rationes $\frac{1}{10})\frac{7}{64\square}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{64\square}\cdot\frac{2\times2}{9\times11}\cdot\frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\cdot\frac{2\times2\times4}{9\times11\times13}\cdot\frac{7}{64\square}\times\frac{3}{12}\times\frac{5}{14}$ &c.

Momentum igitur superficierum omnium ex rectarum L Z circa C α semiconversione factarum, in suo situ; hoc est, solidi ex semiconversione spatii Cissoidalis circa C α momentum in suo situ, respectu C α rectæ; est, ad totidem Æqualia, nempe momenta totidem superficierum, rectis C F æqualibus in distantiis C F semiconversis factarum, in distantia maxima suspensarum, ut $\frac{1}{10})\frac{7}{64\square}$ ad 1, sive ut 35 ad $32\square$. Est autem magnitudo ad magnitudinem, ut 5 ad $4\square$, (momentis utique planorum proportionales:) Ergo distantia ad distantia ut 7 ad 8: Nempe $\frac{7}{8}$ istius distantiæ quam habet centrum gravitatis semicirculi radio C F descripti ab ipso C: quæ quidem non est tota CF recta, sed (propter curvaturam semicircularem) illa ejus pars quæ est ad totam ut Diameter ad Semiperipheriam.

Similiter, facta conversione circa F A, semicylindricæ superficies rectis L Z descriptæ sunt ut $\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:D-a}$: (quippe momentis rectarum proportionales;) distantiæ vero centrorum superficierum illarum sunt ut radii conversionis, sive distantiæ $D-a$; Ergo superficierum illarum momenta sunt ut $\sqrt{a^3}$, in $D-a$, in $\sqrt{:D-a}$. sive ut $D\sqrt{a^3}-\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{:D-a}$.

Est

Est autem (per supra demonstrata) series $D\sqrt{a^3}$ in $\sqrt{:}\ D - a$: sive series $D\sqrt{a^3}$ in seriem $\sqrt{a}$ inverse, ad seriem æqualium ut 1 ad $4\square$: Et $\sqrt{a^5}$ in $\sqrt{a}$ inverse, ut 5 ad $32\square$: Ergo $D\sqrt{a^3} - \sqrt{a^5}$ in $\sqrt{a}$ inverse; ut $\frac{1}{4\square} - \frac{5}{32\square}$ ad 1; hoc est, ut 3 ad $32\square$. At series magnitudinum ad æqualium seriem, inventa est ut 1 ad $4\square$. Ergo, propter $\frac{1}{4\square}) \frac{3}{32\square} (\frac{3}{8}$, distantia, ad distantiam, ut 3 ad 8. Distantia itaque lineæ centri gravitatis hujus semisolidi circa F A, ab ipsa F A, $\frac{3}{8}$ istius rectæ quæ est ad F C ut diameter ad semiperipheriam circuli.

Denique, Si spatium illud Cissoidale F C Z A F converti intelligamus circa rectam C F: Circuli radiorum L Z, (quippe in radiorum ratione duplicata) erunt series $\frac{a^3}{D-a^3}$; quæ ad seriem æqualium, nempe totidem circulos radiorum D vel C F, rationem habent infinitam; adeoque est infinitæ magnitudinis. Quod sic colligitur. Series a^3 inverse ducta in

series, 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes, $\frac{1}{4}$. $\frac{1\times1}{4\times5}$. $\frac{1\times1\times2}{4\times5\times6}$. $\frac{1\times1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$. $\frac{1\times1\times2\times3\times4}{4\times5\times6\times7\times8}$. &c.

Cum igitur rationes continuentur (ut patet) multiplicando proxime præcedentes per $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}$, &c. harum prima multiplicare debet præcedentem per $\frac{0}{4}$, quę igitur esset $\frac{0}{4}) \frac{1}{4} (\frac{4}{0}$. Adeoque series eadem a^3 inverse ducta in seriem $\frac{1}{a}$, (hoc est, series $\frac{a^3}{D-a}$) rationem haberet ad seriem æqualium 4 ad 0: quæ est infinita. Ipsumque solidum propterea esset magnitudinis infinitæ. Quod item ostendendum erat.

Sed & propterea, momentum plani Cissoidalis F C Z A F respectu F C rectæ, esset ad momentum quadrati F C, vel D^2, ut 4 ad 0, (propter planorum momenta solidis conversione factis proportionalia,) hoc est infinitum. Et consequenter, cum spatium sit magnitudinis finitæ, distantia centri gravitatis esset infinita:

infinita: quod igitur nusquam est. Quod ultimo suscepimus ostendendum.

Sin de solidorum hujusmodi semiconversione circa F C centro gravitatis inquiratur. Cum semicirculorum radiis L Z descriptorum momenta respectu ejusdem F C rectæ, sint in radiorum ratione triplicata: erunt igitur ut Series $\frac{\dot{a}^{\frac{1}{2}}}{D-a}\sqrt{D-a^{\frac{2}{2}}}$: sive ut series $\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{2}}}{D^3-3aD^2+3a^2D-a^3}}$: hoc est ut series $\sqrt{a^{\frac{2}{2}}}$ in seriem $\sqrt{a^3}$ inverse ducta. Series autem $\sqrt{a^{\frac{2}{2}}}$ inverse ducta in

series 1. a, a^2. a^3. a^4. &c. dabit

rationes $\frac{2}{29}\cdot\frac{2\times2}{29\times31}\cdot\frac{2\times2\times4}{29\times31\times33}\cdot\frac{2\times2\times4\times6}{29\times31\times33\times35}\cdot\frac{2\times2\times4\times6\times8}{29\times31\times33\times35\times37}$, &c.

Cum igitur, (ut ex prima inquisitione continuatâ patebit,) series $\sqrt{a^{\frac{2}{2}}}$ & $\sqrt{a}$ inverse multiplicatæ rationem exhibeant

$\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{10}\times\frac{9}{12}\times\frac{11}{14}\times\frac{13}{16}\times\frac{15}{18}\times\frac{17}{20}\times\frac{19}{22}\times\frac{21}{24}\times\frac{23}{26}$

$\times\frac{25}{28}\times\frac{27}{30}$, quæ (supplendo loca intermedia) interponenda erit inter 1 & a; eadem ratio per $\frac{1}{30}$ divisa convenit seriei $\sqrt{a^{\frac{2}{2}}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a}}$ inverse ductæ, atque hæc iterum per $\frac{-1}{28}$ divisa conveniret seriei momentorum expositæ, nempe seriei $\sqrt{a^{\frac{2}{2}}}$ in $\frac{1}{\sqrt{a^2}}$ inverse ductæ, sive per $\sqrt{a^2}$ inverse divisa. Ex qua denique ratione si eximatur item ratio magnitudinum $\frac{4}{0}$ modo reperta, prodibit $\frac{4}{0}\times\frac{-1}{28}\times\frac{1}{30}\Big)\frac{1}{2\square}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{8}\times$&c. *usque ad* $\times\frac{27}{30}$ *ut supra;*

vel $\frac{0}{4} \times \frac{28}{-1} \times \frac{30}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{4\square}$ &c. quæ etiam adhuc (propter -1 quantitatem negativam) erit ratio infinita; (nempe ut 0 ad numerum negativum; quæ non minus est ratio infinita quam ut numerus positivus ad 0:) Adeoque centrum gravitatis nusquam.

Vides itaque quomodo ex *Infinitorum Arithmetica*. Expositam propositionem (cum lucro) absolvimus. Atque hæc fere sunt quæ directâ methodo hac de re jam (anno superiori 1658) ad te scripseram.

Hæc autem hîc repetendi ansam dedit, quod secutis literis & ipse mones; Nempe non modo totum illud spatium F C Z A F, totius F C z semicirculi triplum esse; sed & particulatim segmentum F C Z F (cissoidali C Z & rectis F C Z F comprehensum) respectivi segmenti circularis F z F, ubique triplum esse. Nos autem jam supra demonstravimus § 22, similis segmenti circularis F z F fig. 1 vel 8, triplum esse segmentum Cycloidale ζ Z A. Id ipsum itaque præstat in spatio Cissoidali F Z, atque in Cycloidali ζ Z; utraque siquidem segmentum abscindit segmenti circularis F z correspondentis triplum. Mirum igitur vides, sed qui non displicebit, figurarum tam dissimilium consensum. Atque de Cissoide quidem hactenus. Tempus est ut ad ea redeam quæ novissima tua suggerit Epistola.

Curvarum Εὐθυνσις. Heuratii vestri, quod memoras, nuperum inventum, (sub initium præsentis anni, vel præcedentis finem, quod ex tuis literis conjicio, excogitatum,) quo curvam rectæ æqualem invenit; confirmat id quod superius insinuavimus; Nempe, plurium non rarò, in iisdem rebus inveniendis *συμφώνιαν*: Et simul, ut de curvarum Εὐθύνσει dicam? an Εὐθυσμῷ, pauca differam, ansam subministrat.

Tradideram ego jampridem, in Scholio prop. 38. *Arith. Infinitorum*, methodum curvas cum rectis comparandi; Nempe, *continuas subtensas inscribendo quarum quadrata, quadratis differentiarũ ordinatim-applicatarũ, quadratis invicem æqualibus auctis, æquentur*: Et speciatim in Parabola (propter ordinatim-applicatas in parabolæ complemento, ut numeros quadraticos, adeoque illarum differentias ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionales,) subtensas illas esse ut $\sqrt{} : A^2 \dagger 1$. $\sqrt{} : A^2 \dagger 9$. $\sqrt{} : A^2 \dagger 25$. &c. Fig. 26.

hoc

hoc est, ut *quadratorum æqualium, quadratis arithmetice-proportionalium auctorum*, *radices quadraticas*: (Quas esse ut ordinatim-applicatas ad conjugatum axem hyperbolæ, prius demonstraveram prop. 35, & 41, *Con. Sect.*) In Paraboloidibus autem Cubicalibus, Biquadraticalibus, *&c.* ut *radices quadraticas quadratorum æqualium auctorum quadratis differentiarum Cuborum*, *Biquadratorum*, *&c.* Quarum quidem subtensarum omnium aggregatum cum perpetuò minus sit ipsâ curvâ, sed ad eam ita propius semper accedat ut differentiâ, datâ quavis minore, tandem deficiat: Et Tangentium pariter ope haberi simili modo possit rectarum summa quæ differentiâ, datâ quavis minore, eandem curvam excedat: Posse hinc terminos veris quantumvis proximos inveniri intra quos curvæ longitudo vera caderet: (Adeoque in infinitum procedendo, ipsam curvam exhibitum iri:) docuimus.

Et quidem, quum scholium illud ibidem inserebam, currente prelo, (unde in Propositionum censum non erat redactum,) animum habebam speculationem illam, cum per otium liceret, resumendi & perficiendi. (Animadvertebam enim jam tum, rectas ad curvas esse, ut Figuras congruas ad figurarum quasi Truncos: sed, ut quas figuras ad quos truncos, prout cujusque curvæ natura postulet; ut &, quænam ex figuris illis cum truncis respondentibus notam rationem subeant; considerandum adhuc restabat.) Sed (ut clavus, quod aiunt, clavum pellit,) aliis se subinde interponentibus speculationibus, priorem illam resumere negligebam, donec prævertens Nelius noster me excitavit.

Selegit autem D. *Gulielmus Nelius*, Equitis *Pauli* filius, (num ex nostris ansam nactus, nescio,) Curvam eam quæ ordinatim-applicatarum differentias habeat ordinatim-applicatis in parabola proportionales; quarum itaque quadrata quadratis æqualibus aucta, erunt item arithmetice-proportionalia, eorumque radices ut ordinatim-applicatæ in parabolæ trunco; & propterea, ut parabolæ truncus ad parabolam, sic curva illa ad rectam. Nelium secutus *Wrennius* item, & post illum Illust. *Brounkerus* id ipsum demonstrarunt, & tandem ego; nescio an & alii. Quo primum tempore invenit Nelius, non certus scio: vulgavit autem sub Julii vel saltem Augusti mensem Anni 1657, primus (credo) omnium qui ulli curvæ æqualem rectam assignavit.

Vertente Anno, mense Julio 1659, Curvam Cycloidis, axis

sui quadruplam, demonstravit Cl. V. Chr. *Wren*; Quod post illum ab aliis item demonstratum est. Et tandem, quod prius Nelius noster, *Heuratius* item vester (nescius, puto, id nostris passim prius in notuisse) invenit denuo, quod *Schotenius* vester scriptis suis hoc anno editis inseruit.

Curva Paraboloidis Semicubicalis.

Nelii demonstratio, quam (ut dictum est) ante duos annos vulgavit, hæc erat.

Fig. 23. *Sit* A b C D *parabola recta; cujus axis* A D *dividatur in æquales partes minimas* e e; *atque ad puncta* e *ordinatim applicentur* e f *rectæ, parabolis* A e b *proportionales. Et fiat* D S I *rectangulum, ad parabolam* A D C, *ut* A D *ad* D C. *Denique sit* e h *ubique æqualis potentiâ utrisque* e s, e b.

Dico primo, eandem esse inter se proportionem figuræ A D H I, *rectanguli* D I, *& parabolæ* A D C, *quæ est linearum* A f C *curvæ, & rectarum* A D, D C.

2°. *Rectas* e h *esse ordinatim applicatas in Parabola.*

Sunt enim rectæ e f, *per constructionem, parabolis* A e b *proportionales; & propterea rectarum differentiæ, commode repræsentantur per rectangula* e e b. *Rectangula* e e s *sunt æqualia: (eorumque omnium summa, ad summam omnium* e e b, *ut* A D *ad* D C;) *repræsentant itaque rectas* e e. *Rectæ* f f *sunt æquales potentia tum rectis* e e *tum rectarum* e f *differentiis. Et rectangula* e e h *sunt ubique in eadem proportione ad quantitatum illarum repræsentativas. Constat itaque propositionis pars prior.*

Quadrata rectarum e b *sunt arithmetice proportionalia. Quadrata rectarum* e e *sunt æqualia. Ergo & quadrata* e h *sunt Arithmetice proportionalia; ipsæque* E H *rectæ quadratorum arithmetice proportionalium latera: adeoque sunt ut series ordinatim-applicatarum in parabola.*

Et consequenter; Exhiberi poterit linea recta æqualis curvæ A F C.

Hanc D. Nelii demonstrationem ubi conspexerat Illustriss. Bronkerus; suam ille statim, quæ sequitur, non absimilẽ concinnavit, & impertivit mihi, quam jam ultra duos annos apud me habui. Et parum abfuit quin eam *Commercio Epistolico* à me non ita pridem edito inseruerim; (eodem siquidem tempore accepi primò, quo inter nos & D D. Fermatium, Frenicliumque, alternabantur illæ literæ.) Sed, cum ipsius Nelii (qui primus invenit) demonstra-

demonstrationem nondum videram; non commodum videbatur, ipsius intermissâ, aliorum demonstrationes edere; sed vel sibi permittendum ut suam ipse edat Nelius, vel aliam saltem expectandam opportunitatem. Hæc autem erat.

Sit A B C *parabola recta; cujus diameter* A B = *a, basis* B C = *b, sitque* B E = *c; & fiat ubique, ut parabola* A B C *ad parabolam* A a c, *sic* B E *ad* a e; (*num autem coincidant necne puncta* C E, *perinde est.*) *Dico rectam* A B *ad* A e E *curvam, esse ut* $27\,ac^2$, *ad* $4a^2 + 9c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4a^2 + 9c^2$. *minus* $8a^2$. Fig. 24.

Cum enim sint ubique ut A a c, A a c, *parabolæ; sic* a e, a e, *rectæ: erunt etiam* p e, p e, *rectarum differentiæ; ut* a c c a, a c c a, *differentiæ parabolarum; hoc est,* (*sumptis* a a *infinite exiguis,*) *ut* a c, a c, *rectæ; sive ut* a a c, a a c, *rectangula.*

Fiat autem, ut AB *ad* BE, (*sive ut a ad c;*) *sic* BK *rectangulum æque altum, ad* A B C *parabolam.*

Cum igitur sit $\frac{\square\, BK}{AK} = AB$, *erit* $\frac{Par.\ ABC}{AK} = BE$, & $\frac{Par.\ Aac}{AK} = ae$, & $\frac{\square\, aac}{AK} = pe$.

Ducantur a h *rectæ, quæ utrisque* a k, a c, *æque possint; (quæ propterea parabolæ segmentum complent:) Eritque* $\frac{\square\, aah}{AK} = ee$.

Ut igitur omnes a k, *hoc est rectangulum* B K; *ad omnes* a h, *hoc est parabolæ segmentum* A K H B: *sic omnes* a a, *hoc est* A B *recta, ad omnes* e e, *hoc est* A e E *curvam.*

Est autem B K *rectangulum, ad segmentum parabolæ* A K H B, *ut* $27\,ac^2$, *ad* $4a^2 + 9c^2$, *in* $\sqrt{:}\,4a^2 + 9c^2$: *minus* $8a^3$. *Quod sic ostenditur.*

Parabola A B C *est* $\frac{2}{3}ab$. *Ideoque* B K *rectangulum est* $\frac{2a^2b}{3c}$ & $AK = BD = \frac{2ab}{3c}$. *Ergo* B H $(= \sqrt{:}\,BCq + AKq:)$ $= \sqrt{:}\,b^2 + \frac{4a^2b^2}{9c^2}: = \frac{b}{3c}\sqrt{:}\,9c^2 + 4a^2$.

Fiat autem, ut B H q, *ad* A K q; *(hoc eſt, ut* $b^2 + \frac{4a^2b^2}{9c^2}$ *ad* $\frac{4a^2b^2}{9c^2}$; *ſive, ut* $9c^2 + 4a^2$, *ad* $4a^2$;*) ſic* B H $= \frac{b}{3c}\sqrt{:9c^2 + 4a^2}$, *ad* A M; *quæ eſt igitur* $\frac{4a^2b}{27c^3 + 12a^2c}\sqrt{:9b^2 + 4a^2}$.

Et propterea N H (= B H − A M) $= \frac{3bc}{9c^2 + 4a^2}\sqrt{:9b^2 + 4a^2}$.

Et quoniam, ut N H *ad* A M: *(hoc eſt, ut* $9c^2$ *ad* $4a^2$;*) ſic* N M *ſive* B A $= a$, *ad* A F: *erit* A F $= \frac{4a^3}{9c^2}$: *Et* F B $= \frac{9c^2a + 4a^3}{9c^2}$. *Adeoque parabola* F A K $= \frac{16a^4b}{81c^3}$: *Et parabola* F B H $= \frac{18abc^2 + 8a^3b}{81c^3}\sqrt{:9c^2 + 4a^2}$. *Ideoque parabolæ ſegmentum* A K H B $= \frac{18abc^2 + 8a^3b, \text{ in } \sqrt{:9c^2 + 4a^2}. \text{ minus } 16a^4b}{81c^3}$.

Eſt autem rectangulum B K $= \frac{2a^2b}{3c}$, *Ergo Rectangulum* B K, *ad parabolæ ſegmentum* A K H B; *adeoque (ut ſupra probatum eſt)* A B *recta, ad curvam* A e E; *ut* $27ac^2$, *ad* $9c^2 + 4a^2$, *in* $\sqrt{:}$ $9c^2 + 4a^2$. *minus* $8a^2$. *Quod erat demonſtrandum.*

Meam denique hanc habe.

Fig. 25. Eſto A D P parabola recta; cujus latus rectum dicatur *L*. Adeoque, ſumptis diametris A d, A d, *&c*, arithmetice proportionalibus, quæ ſigillatim dicantur *d*; ipſaque A D, *D*: Erunt ordinatim-applicatæ d p $= \sqrt{dL}$; ipſaque D P $= \sqrt{DL}$: Et parabolæ abſciſſæ A d p $= \frac{2}{3}d\sqrt{dL}$; adeoque ad invicem, ut $d\sqrt{d}$, vel $\sqrt{d^3}$: Et d d p rectangula (quæ, ſumptis d d particulis infinite exiguis, quæ dicantur *A*, parabolarum differentiis æquipollent) $A\sqrt{dL}$; quę itaque ſunt ad invicem, ut $\sqrt{d}$, (ſive ut ipſæ d p ordinatim-applicatæ;) atque ad parabolas ſuas, ut *A* ad $\frac{2}{3}d$.

Ducatur deinde curva A e E (parabolæ in P occurrens,) eâ lege

lege ut ſingulæ d e rectæ, ſint A d p parabolis proportionales; adeoque ut $d\sqrt{d}$, ſive $\sqrt{d^3}$. Quam igitur curvam, ex Paraboloidum genere eſſe conſtat; quam *Semicubicalem* appellemus: utpote cujus Ordinatim-applicatæ Diametrorum, ſi ponatur A D diameter; vel, Diametri Ordinatim-applicatarum, ſi ponatur diametur A △; ſunt in ratione *ſubduplicata-triplicatæ*.

Cum igitur ſint d e ad invicem, ut $d\sqrt{d}$; ſitque $DE = DP = \sqrt{DL}$: Erunt $de = \frac{d}{D}\sqrt{dL}$. Nempe, ut $D\sqrt{D}$ ad $d\sqrt{d}$; ſic $\sqrt{DL}$ ad $\frac{d}{D}\sqrt{dL}$.

Cumque ſint d e, parabolis A d p proportionales; erunt & differentię differentiis proportionales: Adeoque differentiæ f e, tum inter ſe, tum ad integras d e; eaſdem habebunt rationes, quas parabolarum differentiæ, tum inter ſe, tum ad ſuas parabolas: Nempe illic, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{d}$; hic, ut A ad $\frac{2}{3}d$. Adeoque $FE = \frac{3}{2}\frac{A}{D}\sqrt{DL}$; (nempe ut $\frac{2}{3}D$, ad A, ſic $DE = \sqrt{DL}$, ad $\frac{3}{2}\frac{A}{D}\sqrt{DL} = FE$:) & $fe = \frac{3}{2}\frac{A}{D}\sqrt{dL}$. Quibus igitur ſi ponantur æquales d c erit A D C parabola, cujus latus rectum $\frac{9A^2L}{4D^2}$: quod nempe in diametros d ductum, quadratis ordinatim-applicatarum d c æquabitur.

Earundem vero f e quadrata $\frac{9dLA^2}{4D^2}$, quadratis d d hoc eſt A^2 addita, exhibent rectarum e e quadrata $A^2 + \frac{9dLA^2}{4D^2}$. Quorum quidem quadratorum augmenta ſupra A^2 cum ſint ipſis d proportionalia; ſi rectis e e ponantur æquales d b, erit AbBD truncus parabolæ, cujus latus rectum eſt idem $\frac{9A^2L}{4D^2}$, ordinatim-applicata minima $db = A$; adeoque altitudo abſciſſa A V =

$= \frac{4D^2}{9L} \cdot \left(\text{Nempe } \frac{9A^2L}{4D^2}\right) A^2 \left(\frac{4D^2}{9L}\cdot\right)$ Quam quidem altitudinis designationem cum A quantitas neutiquam ingrediatur; eadem plane futura est, quantulacunque ponatur $A = dd$ diametri particula.

Denique, propter tum $fe = dc$, tum $ee = db$; erit, ut ADC parabola ad ADBb truncum; hoc est (propter idem utrobique latus rectum) ut $\sqrt{}dA$ *cub.* ad $\sqrt{}dV$ *cub.* $-\sqrt{}AV$ *cub.*: (ut latus quadraticum cubi dA, ad latus quadraticum cubi dV minus latere quadratico cubi AV:) sic omnes fe, hoc est de recta; ad omnes ee, hoc est curvam Aee. Quod erat investigandum.

Exempli gratia. Si ponatur $AD = 4$, & $DE = \frac{16}{3}$; erit $AV = 1$, & $AeE = \frac{10\sqrt{5} - 2}{3}$.

Quodque de hac Paraboloidis curva demonstratum est, id aliis non paucis curvarum generibus, quatenus res feret, mutatis mutandis accommodabitur.

Vides itaque quod Heuratius vester, id ipsum nostri demonstrarunt; & quidem priores. Eadem enim est linea quam Nelius noster, vesterque Heuratius considerarunt, (quod tibi, ubi animadverteris, ignotum esse non potest.) Id maxime interest, quod per Tangentes vester, nostri per Inscriptas demonstrarunt. Fundamentum utriusque methodi, nos in dicto scholio prop. 38. Arith. Infin. tradideramus.

Quamquam autem non minore forsan jure licuisset, rectarum hanc curvis æqualium inventionem ex postliminio mihimet ascribere; quam quo alios video eorum avide sibi asscribentes inventionem quorum ipsi fundamenta se jeciisse putaverint; præsertim si familiarium aliquibus hæc fundamenta patefecerint, ut ut scripto edito nondum divulgaverint; saltem si suspicio aliqua esse possit hæc sua fundamenta inventoribus illis perspecta fuisse, aut illos inde ansam nactos: Nolim tamen, quum in ipsa praxi me præverti video, hanc suam Nelio nostro εὕπυξίαν invidere; nequidem si constaret (quod non est impossibile) ex nostris traditis ansam accepisse: Neque enim alio fine nostra edimus, quam ut aliis usui esse possint. Quantillum autem inde abfuerim, ex dictis vides.

Hoc

Hoc interim addamus : Eâdem operâ haberi etiam convexam Conoidis ſuperficiem, converſione curvæ A e E circa axim ſuum A Δ deſcriptam. Cum enim rectæ d c, d b, ipſis f e rectarum differentiis, & e e ſubtenſis, hoc eſt, (proceſſu in infinitum continuato,) curvæ particulis, proportionales ; atque in iiſdem ab A Δ diſtantiis: Erit ut ſolidum ex A c D parabolâ, ad ſolidum ex A b D trunco, circa b A Δ converſo factum: ſic ſuperficies ex omnibus f e in ſuis diſtantiis (quæ eſt ut ſeries $a\sqrt{a}$) ſive $\frac{2}{3}$ (tres quintæ) ſuperficiei Cylindricæ quæ deſcribitur rectâ D E, (hoc eſt, omnibus f e in maximâ diſtantia, quæ itaque eſt ut ſeries $\sqrt{a}$;) ad ſuperficiem convexam quæ ab A e E curva ſic converſa deſcribitur. Eſt autem ſolidorum eorum ratio (ex noſtræ Arithmeticæ Infinitorum principiis) nota: (cognitis enim tum magnitudinibus, tum momentis, adeoque & centris gravitatis, parabolarum A D C, V A b, V D B, adeoque & trunci A b D, ſolidorum converſione factorum magnitudo pariter innoteſcet:) Ergo & harum ſuperficierum. *Superficies Conoidis.* Fig. 25.

De ipſius trilinei A e d magnitudine, aut centro gravitatis, aut ſolidis iſtius converſione factis, nihil adjicio: nota utique ſunt ea omnia; & ex principiis in noſtra Infinitorum Arithmetica & alibi traditis facile deducuntur.

Sed ad Parabolam reverto; quam (ut dictum eſt) in memorato ſcholio prop. 38. Arith. Infin. Speciatim conſideravimus. Reſumptâ igitur quæ ibidem eſt figura; oſtendimus, propter d d vel o s (rectarum o t in parabolæ complemento ordinatim applicatarum differentias) ut 1, 3, 5, &c. ſubtenſas o o eſſe ut $\sqrt{:}\ A^2+1 : \sqrt{:}\ A^2+9 . \sqrt{:}\ A^2+25$. &c. hoc eſt, ut ordinatim applicatas ad Hyperbolæ conjugatum axim : ipſas autem o s vel d d, ut ordinatim applicatas in Triangulo eſſe, notius eſt quam ut dictu opus ſit. *Curva Parabolæ.* Fig. 26.

Sin quæratur adhuc, quænam cuique parabolæ conveniant Triangulum & Hyperbola: quamquam ea nullius difficultatis res ſit: paucis tam expediam. Intelligantur K L, L m, ad angulos rectos conſtitutæ; omneſque L m, L m, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. differentiis d d vel o s æquales, vel ſaltem proportionales; ut & K L ipſi t t vel *A*: Erunt omnes K m, ſubtenſis o o ſimiliter æquales vel proportionales ; illis nempe ſingulæ quæ cum ordinatim applicatis d o angulos faciunt reſpectivis m K L angulis æquales; Fig. 27.

hoc est, sumptis t t infinite exiguis, curvæ particulis quarum vel subtensæ vel tangentes angulos faciunt iisdem m K L vel n K L æquales. Si fiat igitur N K L triangulum rectangulum, simile triangulo F O D (fig. 26.) quod semiparabolæ circumscribitur: Erit ut omnes K m, ad omnes L m; sic omnes o o subtensæ, hoc est A O curva, ad omnes o s vel d d differentias, hoc est A D diametrum. Hoc est, (sumptis parallelis m $\varkappa$ = m K, & m λ = m L,) ut omnes m $\varkappa$ (hyperbolâ K $\varkappa$, ejusque conjugato axe L N interceptæ) complentes L N $\varkappa$ K quadrilineum, ad omnes m L complentes L λ N triangulum; sive, ut quadrilineum illud, ad hoc triangulum; sic expolitæ parabolæ curva A O, ad A D diametrum. Et consequenter, Datâ parabolicæ lineæ longitudine, dabitur quadratura hyperbolæ; & vice versa. Quod & tu aliunde observasti.

Fig. 28. Vel sic etiam, (ut uno schemate totum complectar,) si fiat ut F D, ad D O, & O F; sic D O vel T A, ad A K; & T $\varkappa$ = K T: & describatur K $\varkappa$ hyberbola, verticem habens K, centrum A: &, sumpta T λ = T A, fiat A T λ triangulum: Erit, ut A T λ triangulum, ad A T $\varkappa$ K quadrilineum; sic axis A D, ad A O curvam parabolæ. Addo, Et partes partibus respective sumptis proportionales esse: ut ex demonstratis patet. (Habet autem hæc Hyperbola latus rectum lateri transverso æquale, & utrumvis lateri recto Parabolæ æquale, duplum autem rectæ A K: Estque A, hyperbolæ centrum; K, vertex; A T, axis conjugatus; A λ, Asymtota; K δ, axis interceptus; & δ $\varkappa$ = A T ordinatim applicata basis.) Atque hactenus de Parabolæ curvâ.

Conoidis Parabolici superficies. Sed & eâdem operâ, de conoidis Parabolici superficie judicandum erit. Cum enim singulæ rectarum t o differentiæ, ad respectivas curvæ particulas, sint ut t λ ad t $\varkappa$, sintque in iisdem ab axe distantiis: Erit ut solidum ex conversione A T λ trianguli, ad solidum ex conversione A T $\varkappa$ K quadrilinei, circa A K rectam; sic superficies ex omnium curvarum t o differentiis sic conversis, ad conoidis superficiem ex conversis curvæ particulis. Quæ autem ex differentiarum illarum, arithmetice proportionalium, in distantiis item arithmetice proportionalibus, conversione describitur; ad superficiem earundē arithmetice proportionalium, in distantia maximâ, conversione descriptam, (series Secundanorū ad seriem Primanorum;) hoc est, ad curvam Cylindri circumscripti; est, ut 2 ad 3. Ergo, ut solidum ex A T λ trianguli conversione, ad solidum

ex

ex converſione A T ϰ K quadrilinei, circa A K, deſcriptum; ſic $\frac{2}{3}$ ſuperficiei curvæ Cylindri circumſcripti, ad curvam conoidis parabolici ſuperficiem. Eſt autem quod ſit ex illa trianguli converſione, $\frac{2}{3}$ Cylindri altitudinis T λ: Quod autem ex quadrilineo ſic converſo efficitur, eſt Cylindrus (ejuſdem baſis) altitudinis T ϰ, dempto Conoide Hyperbolico. Eſt autem Conoides illud Hyperbolicum (per prop. 163, 164. Arith. Infin.) ad circumſcriptum Cylindrum, ut $\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}D$ ad $T+D$, (ſemiſſis lateris tranſverſi una cum triente diametri interceptæ, ad ejuſdem lateris tranſverſi & diametri aggregatum:) Hoc eſt, ut A K + $\frac{1}{2}$ K ♌ ad A K + T ϰ: Adeoque cylindrus ſic hyperbolice excavatus, ad eundem plenum; ut $\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}D$ ad $T+D$, ſive ut A K + $\frac{2}{3}$ K ♌ ad A K + T ϰ. Ergo (propter æquales omnium baſes,) Ut $\frac{2}{3}$ T λ; ad T ϰ minus $\frac{AK+\frac{1}{2}K♌}{AK+T\varkappa}$ K ♌; vel ad A K + $\frac{AK+\frac{2}{3}K♌}{AK+T\varkappa}$ K ♌: ſic $\frac{2}{3}$ ſuperficiei curvæ cylindri circumſcripti, ad curvam conoidis parabolici ſuperficiem: Et (multiplicatis antecedentibus in $\frac{3}{2}$,) ut T λ, ad eandem A K + $\frac{AK+\frac{2}{3}K♌}{AK+T\varkappa}$ K ♌; ſic cylindri circumſcripti ſuperficies curva, ad curvam Conoidis parabolici ſuperficiem. Quæ num inventis tuis conſentiant, vide ſis.

Quam vero eadem parabolæ curva circa A T converſa ſuperficiem deſcribit, (propter tum differentiarum rectarum to, tum partiularum curvæ, ab A T diſtantiam to, in earundem ab A K diſtantiæ ratione duplicatâ,) erit ea ſuperficies curva, ad circulum ſemidiametri A D; non quidem ut ipſa ſolida modo dicta, (ex converſione quadrilinei A K ϰ T, & trilinei A λ T, circa A K,) ſed ut ſemiſolidorum horum momenta reſpectu A K rectæ; vel ut omnes t ϰ ad omnes t λ, in reſpectivarum ſuarum ab A K diſtantiarum quadrata. Quæ quidem ratio, non magis explicabilis eſt, quam ipſa Quadrilinei ad Trilineum ratio.

Ellipſis expanſa. Fig. 7.

Verum (ut ad alia etiam, extra Paraboloidum genera, tranſeamus:) Perpendamus curvam A B C fig. 7. quam *Ellipſin expanſam* dicimus. Quadrata particularum hujus, vel earundem ſubtenſarum, ſunt ut quadrata differentiarum ſinuum verſorum (incipiendo ab A vel C,) ſive differentiarum ſinuum rectorum (utrinque a B procedendo,) quadratis æqualibus aucta. (Quod ex

ipso Schematis inspectu patet.) Quam igitur rationem habent eorundem quadratorum sic auctorum latera quadratica, vel ad quadratorum æqualium latera, vel ad omnes illas sinuum differentias, eam habet A B C curva, vel ad A F vel ad F C. (Quod & de partibus respectivis intelligendum est.) Quæ tamen ratio non magis explicabilis est, quam perimetri Ellipseos, ad peripheriam Circuli, vel hujus diametrum. Quæ enim erant in fig. 2. F z C, F ζ r, Circuli & Ellipseos semiperimetri in superficie Cylindricâ; eædem sunt in eadem expansa, fig. 7. A F recta, & A B C curva. Ut igitur A F recta, ad A B C curvam; sic semiperimeter Circuli, ad semiperimetrum Ellipseos; cujus minor axis æqualis sit diametro circuli; major, ejusdem duplum possit. Uti &, in fig. 10. F A, & F C, sunt ut quadrans perimetri circularis, ad quadrantem Ellipseos, cujus major Axis minoris posset quintuplum. Et in aliis similiter, variatâ curvaturæ mensura, pro variâ conjugatorum axium ratione.

Cycloidis socia.

Estque hæc, ni fallor, ea recta quam *Cycloidis Comitem vel Sociam* (*la Compagne de la Roulette*) appellat Author Historiolæ, utut aliter apud ipsum atque me generata. Quam enim ille dimidiam *ductu circini in superficie Cylindri recti*, descriptam dicit; nos simplicius *sectione Cylindri plano factâ*, totam describimus. Nesciviſſe sicut videtur, curvam A B C fig. 7. non aliam esse quam Ellipsin F ζ r fig. 2. in planum expensam. Si autem centro C, Fig. 2. distantia C F, in superfice cylindri fig. 2. circini ductu describatur linea, non erit illa F ζ r Ellipsis, (communi plani & Cylindri sectione facta,) sed alia curva, communi Sphæræ & cylindri sectione facta, quæ in planum expansa omnino similis erit curvæ B C fig. 7. prioris semissi. Si enim intelligatur, (in fig. 2.) F ζ r circini ductu descripta, adeoque C ζ recta, ubique ipsi C F æqualis, unde demissa ζ z in superficie cylindri occurrat basi in z: Quia tum C z & z F subtensæ, tum C z & z ζ, æque possint ipsi C ζ rectæ, hoc est C F; erit z F subtensa æqualis ipsi z ζ; Adeoque omnes z ζ (divisa F z C in partes æquales in punctis quotlibet z) erunt ut chordæ arcuum in semicirculo arithmetice proportionalium, hoc est, ut sinus recti in quadrante, hoc est, ut rectæ trilineũ B b C fig. 7. complentes, ipsi B b ordinatim applicatæ.

Adeoque si intelligatur semicylindro F z C r fig. 2. similis alius cujus basis diameter sit semissi hujus F C æqualis; Curva

ut F ζ r circini ductu descripta in superficie minoris; & semissis F ζ r semiellipseos in superficie majoris, si in planum utraque expandatur, congruent.

Curva Ellipseos. Fig. 29. & 30.

Porro si intelligatur, non jam F A ut in fig. 7, hoc est F z C fig. 2. sed F C ut in fig. 30. sive C r, vel C F recta, vel etiam F r, fig. 29. dividi æqualiter; adeoque F A fig. 30. hoc est F z C fig. 29. dividi pro ratione arcuum ordinatim applicatis sive sinubus rectis æqualiter distantibus respondentium: Erunt (in partibus infinite exiguis) quadrata particularum A B C curvæ, huic divisioni respondentium; ut quadrata differentiarum horum arcuum, quadratis æqualibus aucta. (Quorum omnium radices, ad omnes illas vel differentias, vel diametri particulas æquales, sunt, ut A B C curva ad rectam A F, vel ad F C: quibus quidem aggregatis proportionales superficies planas, facile est concipere; sed non ita facile ratione notâ explicare, magis quam rationem curvæ Ellipseos, ad circuli vel peripheriam, vel diametrum.) Sunt autem illæ arcuum differentiæ (propter arcuum infinite exiguorum & chordarum quasi-coincidentiam, adeoque & centrorum gravitatis, utpote quæ arcui & chordæ interjecta esse debent,) ut $\frac{R A}{s}$, hoc est factum ex R radio & diametri aliquota parte exigua A, per sinum rectum s divisum: (Quod ex Archimedis & aliorum demonstratis, qui superficierum, Sphæricæ & circumscriptæ Cylindricæ, segmenta, parallelis planis abscissa, æqualia esse ostenderunt, facile colligitur: nempe $R A = s c$, factum ex Radio in A, æquale esse facto ex s ejusdem distantia à diametro, in c correspondentem curvæ particulam:) Adeoque illarum quadrata $\frac{R^2 A^2}{s^2}$; quæ quadratis æqualibus A^2 (propter F C = C r) aucta, exhibent $\frac{R^2 A^2}{s^2} + A^2$, quadrata particularum curvæ A B C; eorumque omnium radices, curvam ipsam: Hoc est, (propter $s = \sqrt{: R^2 - a^2}$: sumptis a utrinque à medio, ut 1, 2, 3, &c, successive,) $\frac{R^2 A^2}{R^2 - a^2} + A^2$ =

$= \frac{2R^2A^2 - a^2A^2}{R^2 - a^2}$ ipsa quadrata; eorumque radices $A\sqrt{:} \frac{2R^2 - a^2}{R^2 - a^2}$. Ipsæ autem arcuum circularium differentiæ $\frac{R \cdot A}{s} = A\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - a^2}}$. Adeoque ut illæ omnes, ad omnes has; sic Ellipseos expositæ perimeter, F ζ r, vel A B C, ad peripheriam circuli F z C, vel A F. (Quod & aliis Ellipsium speciebus facile accommodabitur, ut mox docebitur.)

Sphæroidis oblongi superficies.

Deinde, Si intelligantur tum Ellipseos illæ, tum hæ perimetri circularis particulæ, in iisdem respective à suis axibus distantiis converti; unde fiat illic, Sphæroidis oblongi; hic, Sphæræ superficies: Erit superficies illa ad hanc; ut omnes $A\sqrt{:} 2R^2 - a^2$: ad totidem AR; sive, ut omnes $\sqrt{:} 2R^2 - a^2$: ad totidem R: Hoc est, (si intelligatur in parallelogrammo (fig. 31.) Fig. 31. A B $= R\sqrt{2}$, & A R $= R$, adeoque a r $= a$, reliquaque ut in schemate constructa,) ut R C B A quadrantis circuli segmentum, ad quadratum A R minoris semidiametri. Sunt enim omnia b r b rectangula, hoc est $R\sqrt{2} + a$ in $R\sqrt{2} - a$, hoc est, $2R^2 - a^2$; ut rectarum r c quadrata: adeoque omnes r c rectæ, ut $\sqrt{:} 2R^2 - a^2$. Quod etiam ex prop. 124 Arith. Infin. fusius patebit.

Eodem modo, ad alias Ellipsium species res accommodabitur. Si hoc saltem advertatur; In præsenti casu, propter F C $=$ C r fig. 2. vel 29. aliquotas partes tum rectæ F C tum rectæ C r, eodem symbolo A designari. Sin recta C r (quæ potest excessum quadrati axis longioris supra brevioris quadratum) vel longior esset vel brevior quam F C (circuli diameter, vel Ellipseos axis minor,) puta ut H ad R; posità A aliquota parte diametri circularis (ut prius,) erit $\frac{H}{R}A$ eadem pars rectæ C r: Adeoque pro $\frac{R^2A^2}{R^2 - a^2} + A^2$, sumendum erit $\frac{R^2A^2}{R^2 - a^2} + \frac{H^2}{R^2}A^2$. Adeoque Sphæroidis illa superficies, ad superficiem Sphæræ, erit ut omnes $\sqrt{:} R^2 + H^2 - a^2$

$\frac{a^2 H^2}{R^2}$: ad totidem R. Ideoque ponendum erit, fig. 31. A B $=$ $\sqrt{:R^2 + H^2:}$ & A R $=$ H (ſemiſſi rectæ C r fig. 29,) quare & a r $=$ $\frac{a H}{\mathcal{R}}$. Eritque, ut prius, Ut A B C R quadrantis circularis ſegmentum, ad totidem R, hoc eſt ad $H \times R$: ſic ſuperficies illa Sphæroidica ad Sphæricam. (Ut partes partibus reſpectivè proportionales.) Eſt autem, ut patet, A B, ellipſeos ſemiaxis maior; R C, ſemiaxis minor; A R, diſtantia foci à centro, ſive recta quæ poteſt differentiam quadratorum ſemiaxium.

Dico igitur, *Si in circuli quadrante cujus radius* A B *ellipſeos ſemiaxis maior, ordinatim applicetur* R C *ſemiaxi minori æqualis, & compleatur* A R C *rectangulum: Erit ut* R C B A *quadrilineum ad* A R C *rectangulum; ſic Sphæroidis oblongi ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ Sphæræ.*

Intelligatur jam Cylindrus F r C z fig. 29, obliquus eſſe, cujus baſis F ζ r circulus; & F z C Ellipſis, axi recta, cujus minor axis F C. Cum igitur, diviſâ F r circuli diametro in partes æquales numero infinitas, quorum quælibet dicatur A, & particulæ peripheriæ (ut prius oſtenſum eſt) $\frac{R A}{s}$ vel $\frac{\mathcal{R} A}{\sqrt{:R^2 - a^2:}}$, & harum particularum quadrata $\frac{R^2 \mathcal{A}^2}{R^2 - a^2:}$; unde ſi auferantur quadrata æqualium particularum rectæ C r, puta $\frac{H^2}{R^2} A^2$ (ſumpto ſcilicet, ut C r ad F r, ſic H ad $\mathcal{R}$;) erunt $\frac{R^2 a^2}{\mathcal{R}^2 - A^2} - \frac{H^2}{R^2} A^2$ quadrata particularum Ellipſeos F z C; eorumque radices $\sqrt{:} \frac{R^2}{R^2} \frac{\mathcal{A}^2}{- a^2} - \frac{H^2}{R^2} A^2$: ipſæ particulæ. Quæ quidem utræque particulæ (tum Peripheriæ, tum Ellipſeos,) ſi in ſuas eaſdem a ſuis axibus reſpectivas diſtantias $s = \sqrt{:R^2 - a^2:}$ ducantur: Facta (ſuperficiebus harum converſione circa ſuos axes proportionalia) ſunt, illic $R A$; hic, $A \sqrt{:\mathcal{R}^2 - H^2 + \frac{a^2 H^2}{R^2}:}$

Adeoque

Fig. 29. 30.

Sphæroidis lati ſuperficies.

Adeoque Sphæroidis lati superficies (conversione Ellipseos circa minorem axem descripti) ad superficiem Sphæræ circumscriptæ,

Fig. 28. ut omnes $\surd: R^2 - H^2 + \frac{a^2 H^2}{R^2}$; ad totidem $\mathcal{R}$. Hoc est, ut quadrilineum A T ϰ K fig. 28. hyperbolæ suoque axi conjugato interjectum (cujus semilatus transversum A K $= \surd: \mathcal{R}^2 - H^2$: & A T $= H$, T ϰ $= R$;) ad A T λ rectangulum.

Hoc est, *Si, ab Hyperbola cujus semilatus tum rectum tum transversum* A K, *Ellipseos semiaxi minori æquetur; ad conjugatum axem ordinatim applicetur* ϰ T *semiaxi Ellipseos majori æqualis; & compleatur* A T ϰ *rectangulum: Erit, ut* A T ϰ K *quadrilineum, ad* A T ϰ *rectangulum; sic superficies Sphæroidis lati, ad circumscriptæ Sphæræ superficiem.*

Fig. 32. Vel sic, elegantius paulo, utrumque simul efferamus. *Sint ellipseos axes conjugati,* A C E *major,* B C H *minor, &* B D (*parallela* C E) *circumscripti circuli quadranti* E K *occurrens in* D: *& compleatur* C B D F *rectangulum. Sumatur, in* D F *continuatâ,* F G *æqualis* C E. *Denique centro* C *vertice* H, *scribatur* H G *hyperbola; & compleatur* C F G I *rectangulum. Intelligatur autem tum axe* A E *sphæroides oblongum, tum axe* B H *sphæroides latum, ellipseos conversione describi. Erit, ut* C F D K *quadrilineum, ad inscriptum rectangulum* C F D B; *sic Sphæroidis oblongi superficies, ad superficiem inscriptæ Sphæræ: Atque, ut* C F G H *quadrilineum, ad rectangulum circumscriptum* C F G I; *sic superficies sphæroidis lati, ad circumscriptæ sphæræ, superficiem.* Addo ~~etiam,~~ *& partes partibus respective sumptis proportionales esse*, (nam & de partibus etiam procedit demonstratio:) Hoc est, si in eadem ratione, ordinatim applicatis sectæ intelligatur recta C F, qua sphæroideos & comparatæ Sphæræ Axes secantur plano. Datâ verò ratione quam habet Sphæroideos ad Sphæræ superficiem, vel etiam istius partes ad partes hujus; rationem item ad circuli planum dari nemo nescit. Sed de his hactenus.

Lineæ Spiralis longitudo.

Fig. 33. Accedo ad Spiralem, quam & memorato loco (Schol. prop. 38. Arith. Infin.) consideravimus. Intelligatur, intra spiralem lineam inscribi, figura ex similibus sectoribus conflata. Horum arcus, propter æqualia radiorum augmenta (ut C A $= A$) arithmetice proportionales esse ostendimus: Adeoque & arcuum horum

rum (quippe similium) tum chordas (S C = c,) tum sinus rectos (S V = s) & versos (V C = v) arithmetice item proportionales esse: Et propterea Subtensarum Spiralis quadrata, S A q = S V q + V A q = $s^2 + v^2 + 2vA + A^2 = c^2 + 2vA + A^2$, ut quadrata Æqualia, tum quadratis arithmetice proportionalium, tum planis arithmetice proportionalibus, aucta: (Quod ibidem fusius ostensum est.) Hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbolà, quadratis æqualibus aucta. Adeoque, dummodo determinatus est numerus Sectorum, unde & angulus ad centrum determinatæ magnitudinis, manifestum est has spiralis subtensas subtensis in parabola supra memoratis (quarum utique quadrata, quadratis æqualium quadratis arithmetice-proportionalium sive ordinatim-applicatarum in triangulo auctis, æqualia suprà diximus,) minime convenire. Quoniam vero, in minoribus angulis ratio sinus versi ad rectum minor est, eaque semper prout minuuntur anguli diminuitur, adeo ut eò tandē perveniatur ut datâ quâlibet minor sit; unde in angulis infinite exiguis, propter rationem sinus versi ad rectum infinite exiguam, evanescere intelligendus est V C sinus versus (coincidentibus quasi tum arcu tum chordâ tum sinu recto; quod quidem intelligendum erit, ubi SA subtensæ pro spiralis particulis reputantur;) adeoque quantitas v, & propterea $2vA$, pro nullâ reputanda: Erit, hoc casu, $c^2 + 2vA + A^2$ tantundem atque $c^2 + A^2$; Adeoque particulæ Spiralis, non minus quam Parabolæ, erunt, ut quadratorum æqualium, quadratis Arithmetice-proportionalium auctorum, latera, sive ut rectæ t x fig. 28. unde linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitatem manifestam esse constat.

Fig. 33.

Linearum Spiralis & Parabolicæ æqualitas.

Quæ quidem inventio, num Hobbio, an Robervallio, debeatur, (uterque enim vendicat,) non determino; an inter utrumque dividenda. Certum est, Mersennum Robervallio tribuere: contendit autem Hobbius se primum invenisse, prætendit utique (quam suam prætensionem cum *Elenchum* meum scripsi non audiverem) se Robervallio rem totam pridie communicasse, eum autem, hac ansa datà, postride demonstrationem suam adornasse. Quicquid sit, cum res facti sit, nolo ego me arbitrum interponere. Propositionem autem, cujuscunque demum sit, veram esse, comprobat hæc nostra demonstratio.

Hanc autem demonstrationem nostram, figurarum inscriptione

& circumscriptione ad morem veterum, fusius tradi posse, non opus est ut ego te moneam; qui probè nôris quam facile hujusmodi demonstrationes contractę, ad operosas illas veterum reduci possint, modo quis id tanti esse putaverit. Atque hactenus de Spirali Archimedea.

Spiralis alia.

Intelligamus jam alius generis Spiralem describi; in qua, verbi gratia, radiorum incrementa C A non sint æqualia, sed eâdem ratione continue crescant qua crescunt arcus S C, vel M S radii. Id autem fiet si intelligamus, vel, manente circumductæ rectæ MA motu æquabili, punctum lineans moveri ab M ad A motu æqualiter accelerato; vel, manente puncti lineantis ab M ad A motu æquabili, rectam M A circumduci motu æquabiliter retardato, nempe ut quo longius à medio recesserit punctum lineans eo tardius circumferatur recta; (unde consequetur puncti lineantis, in ipsa curvâ descriptâ, motus æquabilis, vel æque velox.)

Fig. 33.

Re sic constructa, manifestum est, tum omnia similium sectorum triangula S V C inter se esse similia, tum omnia S V A, vel S C A, triangula rectilinea vel mistilinea, tum omnia S M A item inter se similia. Unde & angulus ad A, (quem vel S A curva, vel ejusdem subtensa S A, vel etiam tangens, cum M A faciat,) tum quivis esse potest (pro varia motuum inter se ratione) tum ubique idem erit.

Erunt autem omnes S A rectæ, hoc est (in partibus exiguis) omnes SA curvæ ad omnes A V, hoc est (in partibus exiguis) ad omnes AC, hoc est ad A M rectam, ut A S ad A V; sive ut Hypothenusa ad Basin Trianguli rectanguli, angulum habentis ad basin, angulo A æqualem; illi nempe, quem curvæ Tangens cum Radiis constituit.

Fig. 34, 35.

Construetur autem hujusmodi Spiralis; si sumptis, (ut in fig. 34,) rectis M A, M1, M2, M3, &c. continue proportionalibus, radiis hisce describantur totidem sectores similes, eisque circumscribatur A 1 2 3 &c curva.

Si fiat autem, ut fig. 35, super æquali M A basi, triangulum rectangulũ MAS, angulum A æqualẽ habens: Erunt curvæ A1, 1 2, 2 3, &c, in spirali, rectis A 1, 1 2, 2 3, &c, in trianguli hypotenusa, singulæ singulis respective æquales, & omnes omnibus: Adeoque A 1 2 3 &c curva, rectæ AS æqualis. Spatia vero trilinea Spirali adjacentia A M 1, 1 M 2, 2 M 3, &c, trapeziorum in tri-

angulo

angulo ſubdupla. Totumque triangulum, totius ſpatii Spiralis duplum; ſi nempe intelligantur convolutiones interiores toties repeti quoties novis circulationibus iterato deſcribuntur.

Nam revera; uti Spiralis Archimedea, non aliud eſt quam Parabola convoluta; aut etiam Circulus vel Circuli Sector, convolutum Parallelogrammum, (quod prop. 16. Arith. Infin. oſtendimus:) Sic ſpiralis hæc, fig. 34, non aliud eſt quam ipſum M A S triangulum (fig. 35.) convolutum; contractâ nempe in punctum rectâ S M, adeoque parallelogrammis (ſive inſcriptis ſive circumſcriptis numero infinitis) in totidem triangula redactis.

Notandum autem hic eſt; Tum propter radiorum M A, M 1, M 2, &c. (vel rectarum in triangulo his reſpondentium) continue proportionalium proceſſum in infinitum, decreſcendo; tum etiam propter eundem ubique Tangentis angulum cum rectâ circunductâ factum, (unde, circuendo, ad punctum M medium, nunquam perveniri poterit;) Manifeſtum eſt, Spiralem hanc introrſum (non minus quam extrorſum) eſſe interminabilem. Neque enim ab A per 1 2 3 &c. quotcunque demum circulationibus peractis, ad medium unquã pervenietur, magis quam, ſumptis A 1, 1 2, 2 3, &c. proportionalibus, exhaurietur unquam A S recta. Ut autem hæ omnes in infinitum continuatæ, ſic A 1 2 3 &c. continuata introrſum in infinitum, æquabit rectam A S. Habes itaque *curvam interminabilem terminatæ rectæ æqualem.*

Sed & fatendum erit, Tangentem ſpiralis hujus, non magis duci poſſe Geometrice, quam ſpiralis Archimedeæ, (ut quæ ex quadratura circuli dependeat, ut & Spiralium omnium Tangentes;) adeoque nec angulum A geometrice aſſignari. Linea tamen interminabilis terminatæ rectæ æqualis, non minus ſine hoc aſſignabitur: Si nempe, ſumatur triangulum, non rectangulum, ut A S V fig. 33. ſed triangulo A S C ſimile; ut enim A C ad A S, ſic omnes A C hoc eſt A M rectaad omnes A S rectas arcubus A S numero infinitis inſcriptas.

Hanc ipſam curvam, aliâ occaſione, contemplatus item eſt Wrennius noſter. Nec tantum curvæ longitudinem, partiumque ipſius, & magnitudinem adjacentis plani: ſed &, ipſius ope, Limacum & Conchiliorum demunculos metitur. Exiſtimat utique, magna verſimilitudine, domunculos hoſce non alios eſſe quam Pyramides convolutas; quarum Axis ſit, iſtiuſmodi Spiralis; non

quidem in plano jacens, sed sensim in convolutione (circa erectum axim) assurgens: pro variis autem curvæ, sive ad rectam circumductam, sive ad subjacens planum, angulis; variæ Conchiliorum formæ enascantur. Atque, hac hypothesi, mensuratâ Pyramide, meritur etiam ea conchiliorum spatia. Et quidem de hac spirali hactenus.

Spirales aliæ.

Putâram hic aliam Spiralis speciem tradidisse; eam nempe quæ ex convolutâ Paraboloide Semicubicali ortum duceret. Cujus itaque curva quum Paraboloidis illius curvæ æquetur, quam æqualem esse rectæ jam ostendimus; etiam Curva Spiralis inde oriundæ, æqualis rectæ ostenderetur. Sufficiet autem universim dixisse, Spirales omne genus, ex hujusmodi planis (sive triangula sint, sive trapezia, vel parallelogramma, sive Parabolæ, aut paraboloides, aut etiam hyperbolæ, aliæve vel rectilineæ vel mistilineæ figuræ,) sic convolutis oriundas, curvas habere curvatis planorum sic convolutorum lateribus, ut A S, æquales; & quidem, oppositio latere, ut A M, in punctum contracto, spatium spirali adjacens, figuræ nondum convolutæ semissem.

Fig. 35.

Atque hactenus specimina tradidimus methodi nostræ, subtensarum ope, rectificandi curvas.

Quoniam vero, Tangentium ope (in memorato Scholio *prop.* 38 *Arith. Infin.*) id etiam fieri posse insinuavimus: libet & hujusmodi exemplaria exhibere.

Curva Parabolæ.

Atque à Parabola initium desumam, id ipsum Tangentium ope demonstraturus, quod supra per Inscriptas ostendimus. Intelligatur itaque in fig. 36. A T, parabolam rectam in vertice tangens, in punctis t quotlibet æqualiter divisa; adeoque A t, sive d o, arithmetice proportionales, quæ dicantur p; earumque communis excessus b o = t t dicatur A: Erit autem o t = d A $= \frac{p^2}{L}$; adeoque (propter t s $= \frac{1}{2}p$) tangens o s $= \sqrt{: \frac{1}{4}p^2 + \frac{p^4}{L^2}} := \frac{p}{2L}\sqrt{: L^2 + 4p^2}$. Occurrat autem quælibet o t, proximæ tangenti o s, in c. Eritque ut s t $= \frac{1}{2}p$, ad s o; sic b o = t t = A, ad o c $= \frac{A}{L}\sqrt{: L^2 + 4p^2}$. Sive AL, ad $A\sqrt{: L^2 + 4p^2}$: vel

Fig. 36.

L,

L, ad $\sqrt{:} L^2 + 4p^2$: aut $\frac{1}{2}L$ ad $\sqrt{:} \frac{1}{4}L^2 + p^2$. Adeoque ut omnes $\sqrt{:} \frac{1}{4}L^2 + p^2$: ad totidem $\frac{1}{2}L$; sic omnes o c tangentes, hoc est, (in partibus exiguis) o o curvæ, hoc est A O curva, ad omnes t t, hoc est rectam A T vel D O. Hoc est, si fig. 28. ponatur A K $= \frac{1}{2}L$ semilatus tum rectum tum transversum hyperbolæ K $\varkappa$; & A T ut in parabola: Erit, ut T A K k rectangulum, ad T A K $\varkappa$ quadrilineum: sic A T tangens, vel basis D O, ad A O curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales. Quod quidem supra inventis convenit, ubi axem A D ad A O curvam esse ostendimus, ut T A λ triangulum, ad idem T A K $\varkappa$ quadrilineum. Nam ut Triangulum T A $\lambda = \frac{1}{2}d\,L$, ad rectangulum T A K $= \frac{1}{2}L\sqrt{d\,L}$; hoc est, ut d ad $\sqrt{d\,L}$: sic A D ad A T. Fig. 28.

Sed & hinc simili modo atque supra, inveniemus superficiem convexam conoidis parabolici. Nempe (ob easdem particularum t t & $\varkappa\varkappa$ distantias ab A K,) Erit ut Cylindrus ex conversione T K parallelogrammi, ad Cylindrum ex simili conversione parallelogrammi T δ minus conoide hyperbolico ex conversione K $\delta\varkappa$ hyperbolæ, (circa eandem A δ rectam;) sic circulus radio A T descriptus, ad conoidis superficiem conversione A O curvæ descriptam. Quod & supra traditis etiam convenit. Nam eadem est ratio circuli radio A T descripti, ad duas tertias superficiei cylindricæ rectæ T O descriptæ, quæ est solidi ex conversione T A K rectanguli, ad solidum ex conversione trianguli T A λ, circa eandem A K. Quare & eadem superficies Conoidis utrovis modo proveniet. *Conoidis Parabolici superficies.*

Sed intelligamus jam (non A T, sed) A D in punctis d æqualiter divisam: adeoque d A $= d$ arithmetice proportionales, & d d $= A$ æquales, & d o $= \sqrt{d\,L}$, & (propter d f duplam rectæ d A) tangentes o f $= \sqrt{:} 4d^2 + d\,L$. Item (continuatis d o donec proximæ cuæque tangenti o f occurrat in i) ut d f $= 2d$, ad f o: sic d d $= A$, ad o i $= \frac{A\sqrt{:} 4d^2 + d\,L}{2d}$. $= \frac{A\sqrt{:} d^2 + \frac{1}{4}dL}{d}$. *Curva Parabolæ.* Fig. 36.

Adeoque si ad eundem A D axem construatur tum A D Δ triangulum isosceles rectangulum, tum ADH hyperbole (cujus tum latus rectum tum transversum sit $\frac{1}{4}L$,) atque A D E rectangulum cujuscunque latitudinis, (adeoque singulas e d singulis A

vel æquales vel saltem proportionales;) Et fiat, ubique, ut d ♌ = *d*, ad d e = *A*; sic d h = $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4} dL}$: ad d g: erit ut ADE rectangulum, ad A D G g quadrilineum (interminabile quidem, sed magnitudine finitum;) sic axis A D, ad A O curvam parabolæ. Et partes partibus respective proportionales.

Fig. 36.

Conoidis superficies.

Porro, si ducantur omnes tum d d, tum i o, in suas easdem à vertice respectivas distantias *d*: reperiuntur momenta (respectu A T rectæ) rectarum d d, ad momenta rectarum o i, hoc est (in partibus exiguis) curvarum o o; ut *d A* ad $A\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4} dL}$: sive ut *d* ad $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4} dL}$: Hoc est ut d ♌ ad d h. Omnium igitur o b, hoc est d d, hoc est A D rectæ, momenta, ad momenta omnium o i, hoc est o o, hoc est A O curvæ, (respectu ejusdem A T;) est, ut triangulum A D Δ, ad A D H hyperbolam: Et consequenter (utpote momentis proportionalium) eadem est ratio Circuli radio A D descripti, ad curvam conoidis superficiem (convexo-concavam) curvæ A O circa A T conversione descriptam.

Centrum gravitatis.

Denique, Quoniam o b (rectarum t o differentiæ) & o o, in iisdem reputandæ sunt ab A D distantiis; adeoque & superficies earundem respective circa A T conversione descriptæ, in iisdem item distantiis, nempe d o = $\sqrt{dL}$; sintque superficies illæ, ad has, (quod modo ostensum est,) ut d ♌ = *d*, ad d h = $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4} dL}$: Ductis utrisque in eandem $\sqrt{dL}$ distantiam; reperitur superficierum omnium rectis illis o b, ad superficierum omnium curvis o o, sic descriptarum, momenta, ut omnes $d \times \sqrt{dL}$, ad omnes $\sqrt{:d^2 + \frac{1}{4} dL} \times \sqrt{dL}$; hoc est ut, $\sqrt{d^3 L}$, ad $\sqrt{:d^3 L + \frac{1}{4} d^2 L^2}$: hoc est ut $d\sqrt{dL}$, ad $d\sqrt{:dL + \frac{1}{4} L^2}$: Hoc est, ut momentum parabolæ qualis ADC fig. 25. ad momentum trunci, qualis ADBb, respectu ejusdem A b rectæ: (Si nempe intelligatur A V altitudo abscissa fig. 25. æquare $\frac{1}{4} L$ quadrantem recti lateris parabolæ expositæ fig. 36. Et axis A D utrobique æqualis: & latus rectum *L*.) Manifestum utique est, omnes $\sqrt{dL}$ esse ut ordinatim-applicatas in parabola, & omnes $\sqrt{:dL + \frac{1}{4} L^2}$ ut ordinatim-applicatas in parabolæ trunco: quæ utræque in *d* ductæ exhibent rationes momentorum: Quæ quidem ratio, (propter cognitas tum magnitudines, tum centra gravitatis, parabolæ & trunci,) cognita est. Habetur autem momentum planorum rectis o b, circa A T conversis descriptorum; est utique (propter plana ipsa

æqualibus

æqualibus rectis o b in distantiis ab A T arithmetice proportionalibus conversis descripta, arithmetice proportionalia; eorumque distantias ab A D in illarum ratione subduplicata; adeoque ipsorum momenta ut series $a\sqrt{a}$: eorundem vero planorum in distantiis maximæ æqualibus, hoc est circuli radio T O descripti, momentum, ut series a:) ad momentum circuli radio T O descripti respectu A D rectæ: ut series $a\sqrt{a}$, ad seriem a: adeoque ut $\frac{2}{3}$, ad $\frac{1}{2}$: sive ut 4, ad 5. Et propterea, datâ superficiei magnitudine, dabitur ejusdem centrum gravitatis.

Cum autem (ut vides) in demonstrationibus assumpserim, nunc o c, nunc o i, tangentium particulas, in divisionibus exiguis ipsi o o curvæ particulis coincidere: ne hæsites tamen num hoc temere fecerim; id tutò factum intelligas, modo animadvertas rectas o i, o c, angulo contactus subtensas, pro diminutione o c, o i, tangentium, ita minui, ut illæ ad has rationem tandem subeant datâ quâvis minorem, (secus enim, angulus rectilineus assignari posset angulo contactus minor,) ideoque evanescentibus o i, o c, tangenti & curvæ interjectis, coincident, tum o c, tum o i, tangentis particulæ, particulis curvæ o o.

In *Paraboloide semicubicali*, quam supra memoravimus, similiter atque in Parabola, per Tangentes item id ipsum expediri posse, quod per subtensas superius absolvimus, paucis ostendam. *Paraboloides semicubicalis.*

Intelligatur itaque A O fig. 36. (non jam Parabola, sed) Paraboloides semicubicalis: cujus nempe ordinatim-applicatæ d o = A t, sint in diametrorum d A ratione *subtriplicatæ duplicata*: (adeoque d A diametri in ipsarum A t ratione *subduplicatæ triplicata*:) Et propterea d f ad d A, ut 3 ad 2; & t s ad t A, ut 2 ad 3. Sumptis itaque A t, A t, arithmetice-proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis excessus $A = tt$, Fig. 36.

diameter vero $dA = d = \sqrt{\frac{p^3}{L}}$: Erit tangens $os = \sqrt{:\frac{4}{9}p^2 + \frac{p^3}{L}} = p\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}}$. Item ut $ts = \frac{2}{3}p$, ad o s: sic $bo = tt = A$, ad $oc = \frac{2}{3}A\sqrt{:\frac{4}{9} + \frac{p}{L}} = A\sqrt{\frac{L + \frac{2}{4}p}{L}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes

nes $A\sqrt{\frac{L+\frac{2}{4}p}{L}}$; hoc eſt, ut omnes $\sqrt{L}$, ad omnes $\sqrt{:L+\frac{2}{4}p}$. hoc eſt, ut omnes L, ad omnes $\sqrt{:L^2+\frac{2}{4}pL}$: ſic A T recta, ad curvam A O. Hoc eſt, ut parallelogrammum cujus latitudo L, altitudo $P=$ A T: ad truncum parabolæ æquealtum, cujus latus rectum $\frac{2}{4}L$, ordinatim-applicata minima L, adeoque altitudo abſciſſa $\frac{4}{5}L$. Quæ quidem cum ſupra traditis convenire, qui examinaverit, deprehendet. (Notandum interim L quo hic deſignatur latus rectum paraboloidis Semicubicalis, illic deſignari latus rectum Parabolæ, unde Paraboloides illa originem ducit.) Atque hinc etiam conoidis ſuperficies ſimili modo colligitur, atque illic; ut non ſit opus repetere.

Paraboloidum aliarum Curvæ.

Idem ſimiliter in aliis non paucis Paraboloidum generibus obtinebitur. Verbi gratia. Sunto ordinatim-applicatæ d o $=$ A t, in diametrorum ratione *ſubquintuplicatæ quadruplicata*. Et propterea d f ad d A, ut 5 ad 4: & t s ad t A, ut 4 ad 5. Sumptis A t, A t, arithmetice proportionalibus, quæ dicantur p, earumque communis exceſſus $A=$ t t, diameter d A $=d=\sqrt{\frac{p^5}{L}}=p\sqrt{\frac{p}{L}}$. Erit tangens o s $=\sqrt{:\frac{16}{25}p^2+p^2\sqrt{\frac{p}{L}}:}=p\sqrt{:\frac{16}{25}+\sqrt{\frac{p}{L}}:}$ Item, ut t s $=\frac{4}{5}p$, ad o s: ſic b o $=$ t t $=A$, ad o c $=A\sqrt{:1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}}$. Ergo, ut omnes A, ad omnes $A\sqrt{:1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{p}{L}}:}$ hoc eſt, ut totidem L, ad totidem $\sqrt{:L^2+\frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$: ſic A T recta, ad curvam A O. Nempe, ut Parallelogrammum, ad figuræ truncum, cujus ordinatim-applicatæ ſint $\sqrt{:L^2+\frac{25}{16}L\sqrt{pL}}$. Similiter: Si eſſent ordinatim-applicatæ in diametrorum ratione *ſubſeptuplicatæ ſextuplicatæ*, aut *ſubnoncuplicatæ octuplicata*, *&c.* in infinitum: Quas omnes pariter εὐθυνσιμους capaces recte aſſerit Heuratius. (Hæ autem omnes, à Paraboloide Biquadraticali, Bicubicali, Triquadraticali, cæteriſque quarum poteſtates à numero pari denominantur, eodem planè modo deri-

vantur,

rivantur, quo supra, ab ipsa Parabola, Semicubicalis: Si enim intelligatur A p P fig. 25. Paraboloides Biquadraticalis, vel Bicubicalis, &c, adeoque d p, ut $\sqrt{^{4}}\, d\, L^{3}$, $\sqrt{^{6}}\, d\, L^{5}$, &c; erit de, ut $d\sqrt{^{4}}\, d\, L^{3}$, $d\sqrt{^{6}}\, d\, L^{5}$, &c, hoc est, ut $\sqrt{^{4}}\, \frac{d^{3}}{L^{3}}$, $\sqrt{^{6}}\, \frac{d^{5}}{L^{5}}$ &c.

Εὐθυπῶς autem eas capaces, (ne gratis dictum videatur) paucis ostendemus. Ponamus autem (quia generatim agendum est) n numerum potestatum quemvis, & $m = n+1$, $i = n-1$, & $s = \frac{1}{2}$. & $n = 2\,i$. Esto autem curva rectificanda A O (fig. 28. vel 30.) parabola vel paraboloides quævis quæ ita constituatur ut d o vel A t sit $p = \sqrt{m}\, d^{n} L$, adeoque A d vel t o, $d = \sqrt{n}\, \frac{p^{m}}{L^{n}} = \frac{p}{\sqrt{n}\, p L i}$. Ponamus item (quo factiones vitentur) ut n ad m, sic K ad L. Invenietur, eodem processu quo nuper, fig. 36 (propter d A ad d f, sive t s ad t A, ut n ad m; quod universaliter demonstravimus ad prop. 23. 46. 49. *Con. Sect.*) t t, ad o o vel o c, ut K ad $\sqrt{:} K^{2} + \sqrt{s}\, p L i$: Adeoque, si ponatur fig. 28. A K $= K$, & t $\chi = \sqrt{:} K^{2} + \sqrt{s}\, p L i$: Erit ut T A K rectangulum, ad T A K χ quadrilineum; sic recta A T, ad A O curvam. Atque hoc quidem universaliter, sive sit n numerus par, sive impar, sive etiam fractus.

Quoties autem n est numerus par; trilineum K χ δ, (adeoque T A K χ quadrilineum,) quadrari posse (adeoque & A O rectificari) sic ostendimus.

Ponamus K δ quotlibet æqualiter crescentes, quæ figillatim dicantur a (quarum maxima sit Δ:) quibus respondeant totidem $\delta\chi$ trilineum K χ δ complentes. Est autem a ($= t\chi - A K$) $= \sqrt{:} K^{2} + \sqrt{s}\, p L i : - K$; adeoque $a + K = \sqrt{:} K^{2} + \sqrt{s}\, p L i$: Et $a^{2} + 2\,a K + K^{2} = K^{2} + \sqrt{s}\, p L i$; & $a^{2} + 2\,a K = \sqrt{s}\, p L i$; Cujus æquationis utraque pars multiplicata secundum exigentiam potestatis s, dat $S{:} a^{2} + 2\,a K{:} = p L i$: adeoque $\frac{S{:} a^{2} + 2\,a K{:}}{L i} = p = A t = \delta\chi$, quæ omnes complent K χ δ trilinium: quod itaque (quantacunque sit potestas S numero integro designanda) quadrari poterit. Ergo &c.

Exempli gratia. Si $S = 2$ (quadratum designans) adeoque $n = 4$, $i = 3$, & $K = \frac{4}{1} L$: erit $\frac{S: a^2 + 2aK:}{Li} = \frac{a^4 + 4a^3 K + 4a^2 K^2}{L^4}$:

Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum; ut $\frac{1\Delta^4}{5L^4} + \frac{4\Delta^3 K}{4L^3} + \frac{4\Delta^2 K^2}{3L^2}$, ad $AT = \sqrt{}^5 D L^4$; sive, ut $\frac{1}{5}\Delta^4 + \Delta^3 K + \frac{4}{3}\Delta^2 K^2$, ad $L^3 \sqrt{}^5 D L^4$.

Si $S = 3$, adeoque $n = 6$, & $i = 5$, & $K = \frac{6}{7} L$: Erit $S: a^2 + 2aK: = a^6 + 6a^5 K + 12 a^4 K^2 + 8 a^3 K^3$: Adeoque Trilineum ad circumscriptum Parallelogrammum ut $\frac{1}{7}\Delta^6 + \Delta^5 K + \frac{12}{7}\Delta^4 K^2 + 2\Delta^3 K^3$, ad $L^3 \sqrt{}^7 D L^6$. Et in reliquis similiter.

Sin $n = 2$, adeoque tum S, tum i, $= 1$, potestatem primam designans, multiplicatione opus non erit; (cum ipsa quantitas exposita, ejusque potestas prima tantundem sunt:) sunt itaque omnes p (trilineum complentes,) omnibus $a^2 + 2aK$ sigillatim proportionales, hoc est, ut quadrata ordinatim-applicatarum in hyperbola; sive, ut ipsæ rectæ (diametro parallelæ) in complemento trunci parabolici, (quod nempe cum ipso trunco complet circumscriptum parallelogrammum,) quæ quidem rectæ, quadratis ordinatim-applicatarum in hyperbola sunt proportionales.

Quoties vero n est numerus impar; adeoq; s numero integro nõ assignabilis: Pro $\frac{S: a^2 + 2aK:}{Li} = p$, sistendum erit in $\frac{N: a^2 + 2aK}{Lu} = p^2$. Quæ casu, licet K x ♪ quadraturæ capax non sit, adeoque nec A O εὐθωίσεως: Ilt tamen Conoides, ipsius conversione circa K ♪, magnitudinis notæ; adeoque & complanari poterit superficies curva conoidis quæ rectâ A O circa A D describitur. Sed non & exinde, propterea, ; exhibebitur etiam semisuperficiei Conoidicæ momentum respectu axis. Quoties vero n est numerus par; poterunt ea omnia exhiberi. Atque de his hactenus.

Denique, ut totum hoc de paraboloidibus negotium simul & semel absolvam. Sit n numerus quilibet, $m = n + x$, $i = n - x$, sitque $z = 2x$, & $u = 2i$: designet autem ipsius n ad m respectus, quota potestas diametri quotæ ordinatim applicatæ potestati

propor-

proportionalis sit. Habebitur $\frac{N:a^2+2aK}{L^n}:: p^n$. Adeoque aggregatum omnium p^z exhiberi poterit; ut & omnium potestatum ipsius p, quæ denominantur à numeri z multiplici. Si vero insuper n & z numeri, communem aliquem divisorem admittant, puta f; sitque $f) N(S, \& f) z(e$. Exhibebitur etiam omnium p^e aggregatum, ut & potestatum ipsius p quæ à numeri e multiplo denominantur. Atque hinc dijudicandum erit, quatenus vel ipsa A O curva, vel conoidis superficies ab hac descripta, aut hujus semisuperficiei momentum respectu axis, aliave hujusmodi, exhiberi possint vel non possint. Atque de Paraboloidibus hactenus.

Tandem, Coronidis loco, ipsam Cycloidis curvam ad examen revocabimus. Notum est Cycloidis tangentes ZT, subtensis Circuli Genitoris z C, parallelas esse, & æquales; Adeoque & earum particulas ZI, ipsis z s. Quæ quidem tangentium particulæ (in partibus exiguis) ipsis Z Z Cycloidis particulis (ob rationes supra insinuatas) coincidere censendæ sunt. Divisâ autem C F in partes æquales quotlibet in punctis Y, quæ dicantur A; sint YY; unde fiant C Y arithmetice-proportionales, quæ dicantur d, totaque C F $= D$: Erunt ubique z C $= \sqrt{dD}$. Item, ut C Y $= d$, ad z C $= \sqrt{dD}$; sic Y Y vel A, ad z s $=$ Z I $= \frac{A\sqrt{dD}}{d} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Adeoque, omnes A, ad omnes $A\sqrt{\frac{D}{d}}$ vel $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$; hoc est, C F recta, ad curvam C Z A; ut series Æqualium, ad seriem Reciprocam subsecundanorum. Hoc est (per prop. 87. & seqq. Arith. Infin.) ut C F B rectangulum, ad congruam figuram interminabilem C F B $\beta\delta$ C: (& partes partibus respective proportionales.) Hoc est (per prop. 102. Arith. Infin.) ut 2 ad 1. Et propterea C Z A semicycloidis curva, diametri genitoris circuli C F, dupla. *Curva Cycloidis.* Fig. 37.

(Habentur autem ipsæ Y β, si intelligantur tum semiparabola (cujus vertex C, axis C F, & basis axi æqualis, adeoque & lateri recto,) tum huic circumscriptum quadratum; & fiat, ut rectæ in parabola, ad rectas in quadrato; (hoc est, ut $\sqrt{dD}$, ad D;) sic

F B, vel A, ad quartam; erit ea Y $\beta = \frac{AD}{\sqrt{dD}} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Vel etiam, si intelligatur eadem parabola inverse posita, (verticem habens F, axem, basin, & latus rectum, $= D$,) & sumatur ut ordinatim-applicata in semicirculo, ad ordinatim-applicatam in parabola; hoc est ut $\sqrt{} : dD - d^2$: ad $\sqrt{} : D - d$, in $D : = \sqrt{} : D^2 - dD$: sic F B, vel A, ad Y β vel $A\sqrt{\frac{D^2 - dD}{dD - d^2}} = A\sqrt{\frac{D}{d}}$. Utrovis modo eadem prodibit Y β recta.)

Porro; Ductis tum ipsis A, tum $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$, in $d =$ C Y, (distantiam à vertice,) habetur ratio momento um respectu rectæ C T tangentis in vertice; nempe ut omnes dA, ad totidem $A\sqrt{dD}$; series primanorum, ad seriem subsecundanorum; hoc est (per prop. 64. Arith. Infin.) ut $\frac{1}{2}$, ad $\frac{2}{3}$; vel 3 ad 4. Quæ eadem est & ratio Circuli radio C F descripti, ad superficiem curvâ C Z A circa C T descriptam.

Deinde; propter linearum rectæ & curvæ magnitudines, ut 1 ad 2; & momenta ut 3 ad 4; Erit, propter $\frac{1}{2}\frac{3}{4}(\frac{3}{8}$, distantia centrorum gravitatis à C T, ut 3 ad 2; adeoque curvæ centrum gravitatis distat $\frac{2}{3}$ radii, hoc est $\frac{1}{3}$ diametri, à C T; adeoque $\frac{4}{3}$ radii, vel $\frac{2}{3}$ diametri ab F A.

Et consequenter; (propter centrorum distantias ut 3 ad 4, & magnitudines linearum ut 1 ad 2;) circulus radio F C descriptus, ad superficiem curva C Z A circa A F descriptam, ut 3 ad 8.

Quod ipsum similiter colligitur, ductis tum A, tum $A\sqrt{\frac{D}{d}}$, in $D - d$ distantiam ab F A. Erunt utique momenta, ut $AD - dA$, ad $\frac{A\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ in $D - d$, vel $\frac{AD\sqrt{D} - Ad\sqrt{D}}{\sqrt{d}}$ vel $\frac{AD\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{dD}$: Adeoque, ut $1 - \frac{1}{2}$, ad $2 - \frac{2}{3}$; Hoc est, ut 3 ad 8.

Similiter de centris gravitatum semisuperficierum tum circa C T, tum circa F A, constabit. Ductis nempe superficiebus, tum rectis Y Y, tum curvis Z Z, descriptis, in distantias suas, sive ab à C T, sive ab A F; habetur ratio momenti semisuperficiei curvæ,

ad

ad momentum semicirculi. Reliquaque facilius quam ut iis opus sit insistere.

Nempe, ductis tum dA, tum $A\sqrt{dD}$, in d; reperitur momentum (respectu rectæ C T) Semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ circa eandem C T; ut series d^2A, ad seriem $Ad\sqrt{dD}$; hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{2}{5}$, sive ut 5 ad 6.

Item, ductis tum $AD - dA$, tum $\frac{AD\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - A\sqrt{dD}$, in $D - d$. Habetur ratio momenti (respectu rectæ A F) semicirculi, ad momentum semisuperficiei curvæ, circa eandem A F; ut series $AD^2 - 2dAD + d^2A$, ad seriem $\frac{AD^2\sqrt{D}}{\sqrt{d}} - 2AD\sqrt{dD} + Ad\sqrt{dD}$. Hoc est, ut $1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$, ad $2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}$. Hoc est, ut 5 ad 16.

Habitis autem, tum magnitudinum, tum momentorum rationibus, & unius centro gravitatis; distantia centri gravitatis alterius non latebit.

Sed & de partibus similiter instituetur judicium. Diviso utiq; quadilineo interminabili in ratione datâ (quod per no. *Arith. Infin.* facile fiet,) dividitur & C Z A curva in eadem ratione. Nempe, sumptâ C Y ad C F, in ratione p^2: ad q^2. erit tum C Y $\beta\delta$ ad C F B $\beta\delta$, tum C Z ad C Z A, in ratione p ad P. (Et consequenter, sumptis C Y, C Y, &c. quotlibet, in duplicata ratione Arithmetice proportionalium; erunt correspondentes C Z, C Z, &c, arithmetice proportionales, ipsaque C Z A, in æquales partes in punctis Z divisa.) Distat autem à T C δ rectâ verticis, sive C Y $\beta\delta$ figuræ, sive C Z curvæ, centrum gravitatis, $\frac{2}{3}$ (parte tertia) rectæ C Y: (per regulam generalem quam *Epistolæ 16 Commercii Epistolici* subjecimus.) Unde reliqua facile investigantur.

Vides itaque quam facile fluant horum Problematum solutiones.

Si vero ad Cycloides Protractas aut Contractas libeat procedere; etiam sic res non infeliciter succedet. Esto enim, eodem C z F circulo genitore, semicyclois, sive contracta, sive protracta, *Cycloides secundariæ.*

$\alpha \zeta C$; cujus basis αF æquet semiperipheriam $\varphi \kappa$, (majorem in protracta, minorem in contracta;) ducantur $F z$, φz, rectæ, eisque ad rectos angulos $z C$, $z t$. His autem parallelas esse $Z I$, $\zeta \iota$, Cycloidum tangentes; ex Torricellio, Schotenio, aliisque notum est. Adeoque (protractâ proximâ $Y z$ per puncta s, σ, I, ι,) erunt $Z I$, $\zeta \iota$, ipsis $z s$, $z \sigma$, æquales.

Divisâ jam, ut prius, $C F$ in partes quotlibet æquales in punctis Y; positisque $C F = D$, $F Y = D - d = a$; erit $Y z = \sqrt{: a D - a^2 :}$: quæ dicatur s: & propter $F Y$, ad $Y z$, ut $Y z$ ad $Y C$, erit $Y C = \frac{s^2}{a}$; adeoque $z C = \sqrt{: \frac{s^4}{a^2} + s^2 :} = \sqrt{\frac{s^4 + s^2 a^2}{a^2}}$ $= \frac{s}{a} \sqrt{: s^2 + a^2}$. Item, ut $Y C$, ad $z C$; sic $Y Y = \mathcal{A}$, ad $z s = \frac{\mathcal{A} \sqrt{: s^2 + a^2}}{s}$.

Ponamus deinde, $\varphi Y = \alpha$. Adeoque, propter $\varphi z t$ angulum rectum, ut $\varphi Y = \alpha$, ad $Y z = s$; sic $Y z$, ad $Y t = \frac{s^2}{\alpha}$: & $z t = \sqrt{: \frac{s^4}{\alpha^2} + s^2 :} = \frac{s}{\alpha} \sqrt{: s^2 + \alpha^2}$. Item, ut $Y t$ ad $z t$, sic $Y Y = \mathcal{A}$, ad $z \sigma = \frac{\mathcal{A} \sqrt{: s^2 + \alpha^2}}{s}$.

Et consequenter, ut $\sqrt{: s^2 + a^2 :}$ ad $\sqrt{: s^2 + \alpha^2 :}$ (hoc est, ut $F z$ ad φz;) singulæ $z s$ vel $Z I$, ad singulas $z \sigma$ vel $\zeta \iota$. Et, si sic fiat ubique, $Y \beta$ ad aliam; erit, ut $C F B$ rectangulum ad figuram sic constructam, sic $C F$ ad curvam semicycloidis secundariæ, (sive protractæ sive contractæ;) & partes partibus respective proportionales.

Fatendum interim est, figuram, sic constructam, non magis quadraturæ capacem esse, quam est ellipsis curva capax εὐθυσπείας.

Sin libeat paulo adhuc explicatius rem efferre; ponamus $F \varphi = B$, adeoque $\alpha = a \pm B$, & $\alpha^2 = a^2 \pm 2 a B + B^2$; Ideoque (propter $s = \sqrt{: a D - a^2 :}$) erit $s^2 + \alpha^2 = a D \pm 2 a B + B^2$; & $\frac{\mathcal{A} \sqrt{: s^2 + \alpha^2}}{s} = \sqrt{\frac{a D \pm 2 a B + B^2}{a D - a^2}}$. Sunt autem omnes $a D \pm$

$\pm 2aB + B^2$ quadrata ordinatim applicatarum in parabolæ trunco cujus altitudo $D =$ F C: latus rectum parabolæ, $D \pm 2B = \phi\chi$; ordinatim applicata infima & minima, B; adeoque altitudo abscissa $\frac{B^2}{D \pm 2B}$. Si igitur fiat ubique, ut $Y z = \sqrt{: aD - a^2}$: ordinatim- applicata in semicirculo, ad $\sqrt{: aD \pm 2aB + E^2}$: ordinatim-applicatam in hoc trunco parabolæ; sic A vel F B, ad quartã, quæ itaq; est $A\sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$. Quæ ex hisce quartis constatur figura, ea est quam diximus ad C F B parallelogrammum fic esse, ut est curva semicycloidis protractræ contractæve ad C F circuli genitoris diametrum; & partes partibus respective proportionales,

Hoc igitur interest inter curvam Cycloidis primariæ, & secundariæ; quod faciendum est, Ut ordinatim-applicatæ in semicirculo; ad ordinatim-applicatas, illic, in parabola; hic, in parabolæ trunco: sic data recta; ad quartas.

Si vero libeat curvæ cycloidis secundariæ particulas comparare, non ad axis C F partes æquales, sed ad æquales partes curvæ cycloidis primariæ: dividenda erit C Z A curva in partes quotlibet æquales in punctis Z; adeoque C F inæqualiter in punctis Y; puta (sumptis p arithmetice-proportionalibus, quarum maxima $P = D$,) $CY = \frac{p^2}{D}$; Et Y Y, ut 1, 3, 5, &c. arithmetice proportionales, quæ omnes æquent ipsam C F, dicantur autem y. Positis igitur ubique $\mathcal{D} - \frac{p^2}{D}$, pro $a = D - d =$ F Y; & y, pro A;(& congrua reductione factâ:)Pro $A\sqrt{\frac{aD \pm 2aB + B^2}{aD - a^2}}$ prodibit $\frac{y}{p} B \sqrt{: \frac{D^2}{D^2 - p^2} + \frac{D^2 \pm 2BD}{B^2}}$: (ejusdem plane formæ cum $A\sqrt{: \frac{K^2}{K^2 - a^2} + \frac{H^2}{K^2}}$: qua quadrãtis Ellipseos particulas, earumve subtensas, æqualibus semiaxis longioris partibus respondentes,

dentes, designandas supra docuimus:) Unde liquet, curvæ semicycloidis secundariæ particulas, primariæ partibus æqualibus respondentes, esse ut particulas curvæ quadrantis Ellipseos respondentes longiori semiaxis partibus æqualibus; Ellipseos, inquam, cujus semiaxis minor, est $D = CF$; & $D\sqrt{\frac{D^2 \pm 2BD^2}{B^2}}$ distantia foci à centro; (cujus quadratum quadrato semiaxis minoris additum, dat quadratũ semiaxis majoris;) adeoque $\frac{D \pm B}{B} D$ semiaxis major; (nempe, si fiat, ut $F\varphi = B$, ad $\varphi C = D \pm B$; sic $FC = D$, ad quartam; erit hæc quarta, semiaxis major:) Quod ex supra traditis patet.

Hujus autem quadrantis Ellipseos particulis, quibus particulas semicycloidis secundariæ diximus proportionales, non tamen æquales dicimus, (adeoque nec totam toti;) sunt utique ad illas, ut $\frac{y}{p} B$, ad A (partem aliquotam ipsius $D = FC$:) ut ex jam traditis patet: Hoc est, ut $\frac{2A}{D} B$ ad A; (est enim y ad p, ut $2A$ ad D, quod mox ostendetur:) sive ut $2B$ ad D. Adeoque si fiat quadrans ellipseos cujus conjugati axes, ad axes conjugatos ellipseos modo dictæ, sint ut $2B$ ad D: (hoc est cujus semiaxis minor sit $2B = 2F\varphi$; maior $2D \pm 2B = FC + \varphi x$:) Erit quadrans ille, curvæ semicycloidis secundariæ, æqualis; & partes partibus respectivæ. Quæ Wrennii nostri traditis comparata, invenio convenire.

Quod autem y ad p, sit ut $2A$ ad D; sic, si opus est, probabitur. Omnes p (tot numero quot in D supponuntur partes æquales A) sunt series arithmetice proportionalium quarũ maxima D; cujus semissis (propter terminum minimũ infinite exiguum) ductus in numerum terminorum $\frac{D}{A}$, exhibet $\frac{D^2}{2A}$, omnium summam. Sunt autem omnes y arithmetice proportionales, & quidem totidem numero, quarum item terminus primus est infinite exiguus; omnium vero summa est ipsi D. Adeoque (cum utraque sit progressio arithmetica, ab infinite exiguis inchoata) erunt tum omnes

omnes y ad omnes p, tum ad singulas singulæ, ut D ad $\frac{D}{2A}$, hæc est, ut $2A$ ad D. Quod dictum erat.

Atque hæc sunt, Vir Nobilissime, methodi nostræ, curvas & rectas comparandi,(adeoque tum Lineas *Rectificandi*,tum *Complanandi* Superficies *Curvas*,) aliquot specimina; cujus, ut vides, examini, tum tuorum quædam, tum & aliorum nupera inventa subjeci. Putâram alia quædam addidisse; sed ne in volumen exeat Epistola, prospiciendum est.

Methodum, quam memoras, *de Maximis & minimis*, ejusque ad Tangentes utilitatem: vide an non & apud nos, utut nominis ignaros, istius passim existent specimina; tum *Con. Sect. prop.* 23. 27. 28. 30. 36. 39. 46. 49. *&c.* tum de *Angulo contactûs* aliquoties; sic *Operis Arithmetici* pag. 199. 200. tum alibi sæpe. Quod autem tu de hac re commentus es, si placeat proferre, non dubito quin Mathematicis gratum sit futurum, ut tua solent esse omnia.

Item *Elementa Conica seorsum à Cono*, nos etiam tradidimus, uti nosti, in meo *De Conicis Sectionibus* tractatu, parte saltem posteriori. Sed non eò minus gratum erit, *D. de Witt*, quod memoras proditurum opus.

Horologium tuum ingeniosissimum; & felicissimum *De Saturni facie* Systema, (de quibus antehac ad te scripsimus;) intacta jam prætereo.

Supereſt, ut tædio, quo te hactenus detinui, tandem liberem. Valeas interim, oro, nobisque faveas, & amare pergas.

FINIS.

Pag. 23. *l.* 20. § 68. *post* subjiciuntur, *Adde*

Figuræ in superficie Sphærica.

Et quidem, suppositâ circuli quadraturâ, quæ hic supponitur, quadrabitur Figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis (sive maximorum sive minorum) arcubus terminata. Quod quamvis non sit hujus loci fusius prosequi, paucis tamen ostendam. Nam 1. Posse figuram hanc quamcunque in Trilinea Sphærica circulorum peripheriis dirimi, manifestum est. 2. Trilinea hæc si sint vera Sphærica Triangula (circulorum maximorum arcubus terminata) data sunt: Quippe, ut Excessus quo angulorum in Triangulo Sphærico aggregatum superat duos rectos, ad duos rectos; sic Triangulum illud, ad Circulum in Sphæra maximum. 3. Si quod vero Trilineorum non sit tale Triangulum Sphæricum; habetur tamen illius à Sphærico Triangulo, iisdem punctis angularibus terminato, differentia, habitis Bilineis quæ circulorum maximi & minoris arcubus conterminis interjiciuntur. 4. Habetur autē hujusmodi Bilineū, si intelligantur ab extremis arcûs circuli minoris ad polum suum duci duos arcus circuli maximi: Qui, cum arcu illo circuli minoris, continebunt Trilineum Isosceles, cujus magnitudinem hic (§ 68.) exhibemus; Iidemque, cum contermino arcu circuli maximi, continent Triangulum Sphæricum; Quorum differentia, est Bilineum quæsitum. Adeoque, *Suppositâ circuli quadraturâ, quadrabitur figura quælibet in superficie Sphæræ circulorum quorumvis arcubus terminata; non minus quam, in Plano, Figura rectilinea.* Quod nos, ni fallor, primi docemus.

Pag. 90. *l.* 20. *post* hactenus. *Adde*

Conchoides.

Est autem & magna, inter Conchoidem & Cycloidem, convenientia. Resumptâ enim, quæ est *Epist.* 39. *Commercii Epistolici*, *p.* 167, figurâ; Manifestum est, rectam M D, Sinum esse anguli M C D, ad radium C A; & rectam M O, hoc est (propter parallelas) C H, ejusdem anguli Tangentem, ad radium P C. Ut igitur Ordinatim-applicata in *Cycloide*, est *Sinûs & Arcûs, ejusdem anguli, Aggregatum*, (ejusdem circuli, in Primariâ; sed, in Secundariis, diversorum:) Sic, in *Conchoide*, Ordinatim-applicata est *Aggregatum Sinus & Tangentis*, ejusdem anguli; (& quidem ejusdem circuli in Primariâ, *viz.* ubi PC = CA; sed diversorum in aliis:) Quod nos, quod sciam, primi detegimus.

Fig. 38.

Conchoidis Solidum.

Hinc autē porro colligimus, utut Conchoidis Planum OACH, infinite continuatum, infinitæ sit magnitudinis, esse tamen Solidum

dum hujus converſione circa axem CH genitum, magnitudinis finitæ. Quod utique ſic converſo quadrante ARC deſcribitur, hemiſphærium eſſe liquet. Quod autem reliquo RAO infinito deſcribitur, æquatur Cylindro, cujus baſis ARC quadrans, altitudo æqualis peripheriæ radio CP deſcriptæ. Quod ſic probamus. Quoniam eſt ut CD ad DM, ſic PC ad GH hoc eſt MO; erit ubique DM×PC = CD×MO; Hoc eſt, Factum ex DM in PC vel peripheriam hoc radio deſcriptam, æquale facto ex MO in CD ſeu peripheriam hoc radio deſcriptam: Ergo & omnia omnibus æqualia; hoc eſt, dictus Cylindrus, dicto ſolido converſione facto. Quod nos, credo, primi demonſtramus.

Plani vero centrum gravitatis, nuſquam eſt: utpote cujus diſtantia à CA intelligenda erit infinita, & à CH infinite exigua. Sed neque Solidi aut Semiſolidi. Diſtat utique Semiſolidi Centrum gravitatis, à CH, diſtantiâ finitâ, & facile aſſignabili; ſed, à CA, diſtantiâ infinitâ. Hæc autem, & hiſce gemina, fuſius proſequi, non eſt hujus loci. *Centrum gravitatis.*

ERRATA

Preli admiſſa, quæ obſervavimus, alicujus momenti; partim calamo emendanda curavimus, partim ſic emendet Lector, & ſiquæ alia deprehendet ipſe.

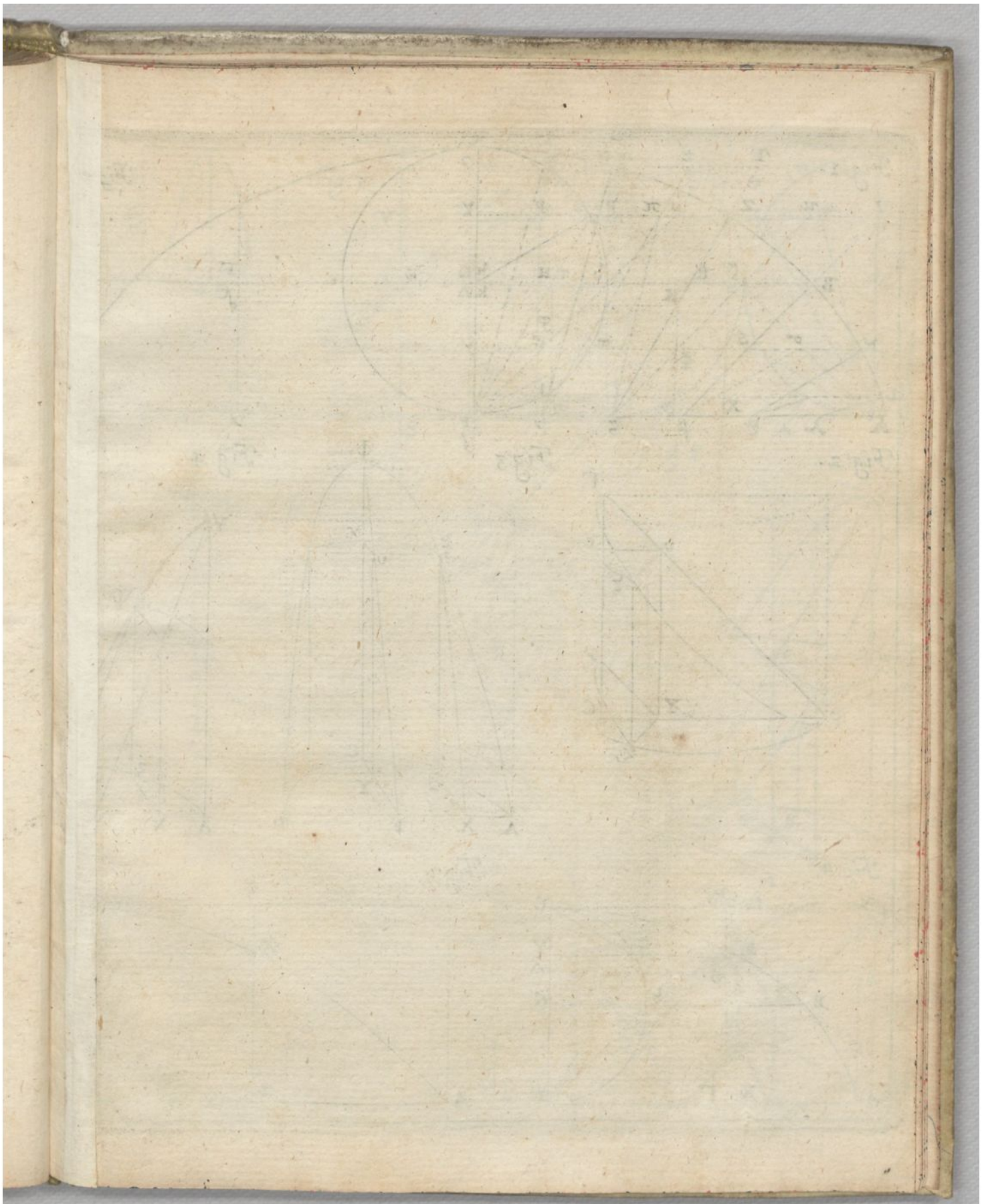
PAg. 2. l. 5. Si ſuper. p. 6. l. 15. centro. p. 11. l. 16. utravis. p. 14. l. 30. ducatur. p. 15. l. 7. ZY. p. 18. l. 34. ſunt ut. p. 24. l. 16. gravitatis illud. p. 27. l. 11. radio. p. 41. l. 18. Trilinei. p. 43. l. 25. tum. p. 44. l. 14. peripheria. p. 45. l. 24. ſemiparabolæ. l. 25. ſemiperipheriarum. l. 27. ſintque. l. 33, 35. ſemiconverſione. p. 47. l. 23. ex. p. 48. l. 1. reſpectu. l. 13. trilinei. l. 20. utique. p. 52. l. 4. oblique. p. 57. & quindecim ſequentes, numeris non ſuis notantur. p. (67. vel) 75. l. 24. (marg.) Fig. 18. p. (69. vel) 77. l. 5. GaAM. p. (71. vel) 79. l. ult. (bis) reliquarum. p. 106. l. 2. moneam. p. 113. l. 11. fractiones. l. 30. trilineum.

FIGURÆ

Ita ſunt ad calcem ſuffigendæ, ut, quum explicantur, totæ extra libri oram conſpiciantur.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [139] - 123
PUBLIC DOMAIN

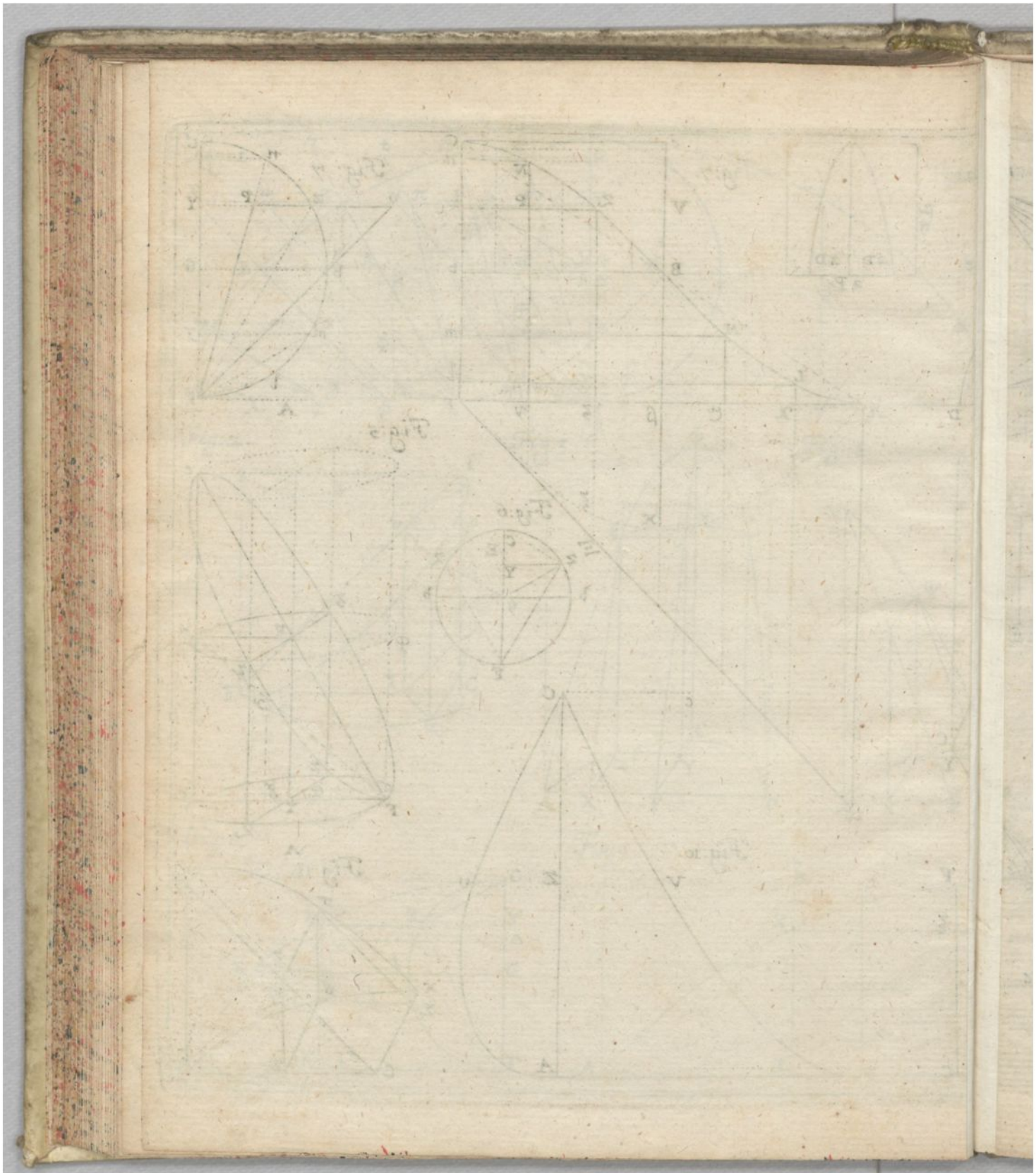
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [140] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [141] - -

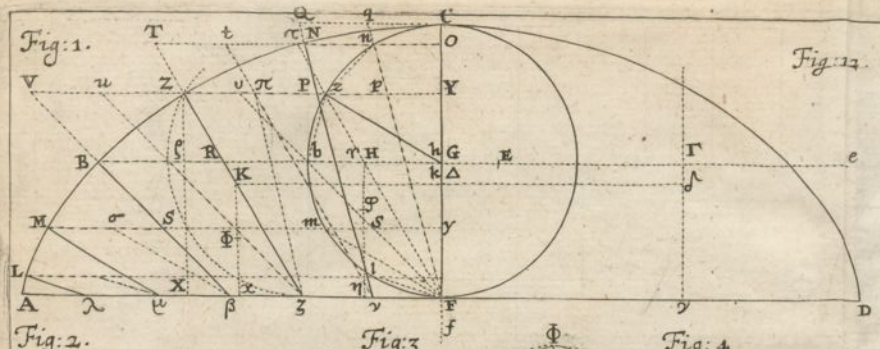
PUBLIC DOMAIN

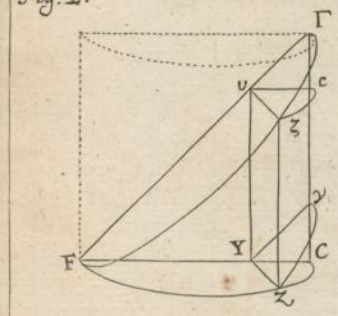


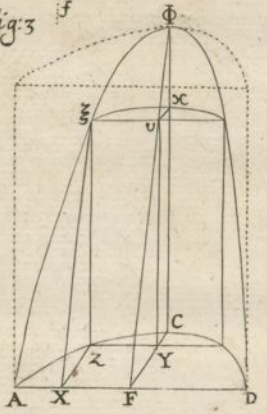
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

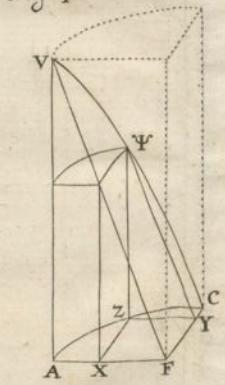
Signatur: Leibn. Marg. 103, [142] - -

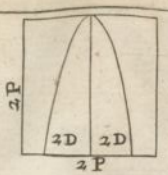
PUBLIC DOMAIN

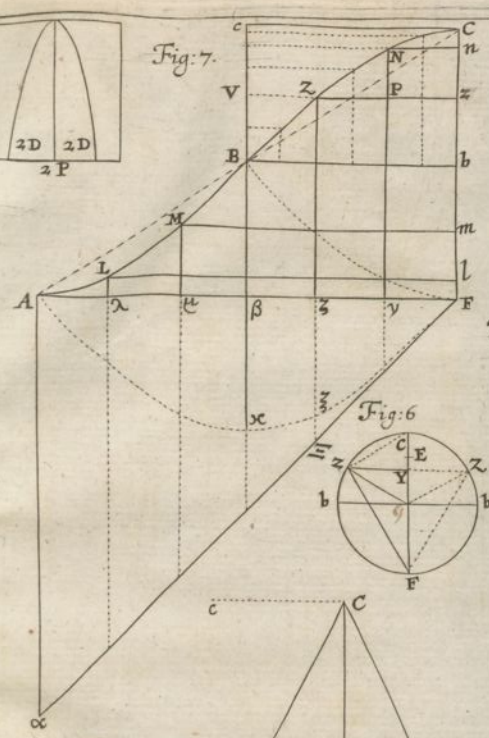


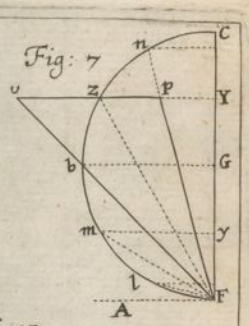


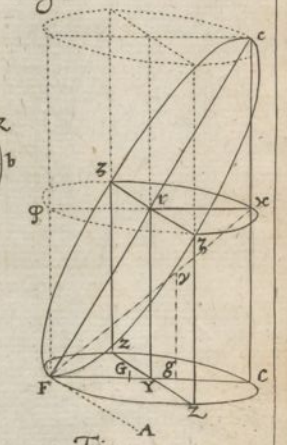


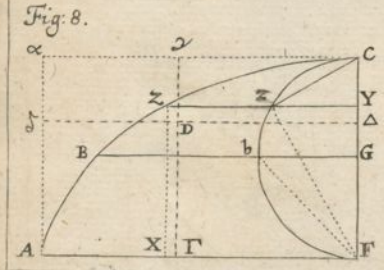


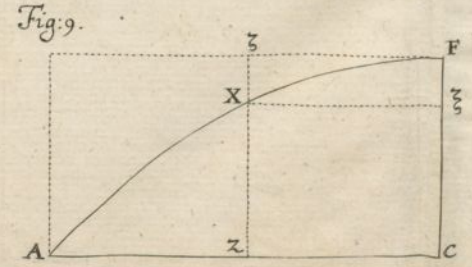


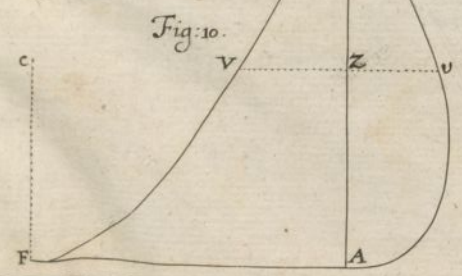


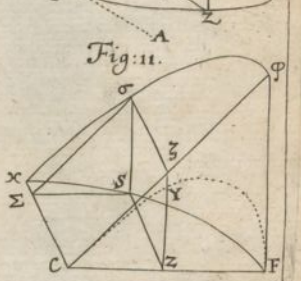








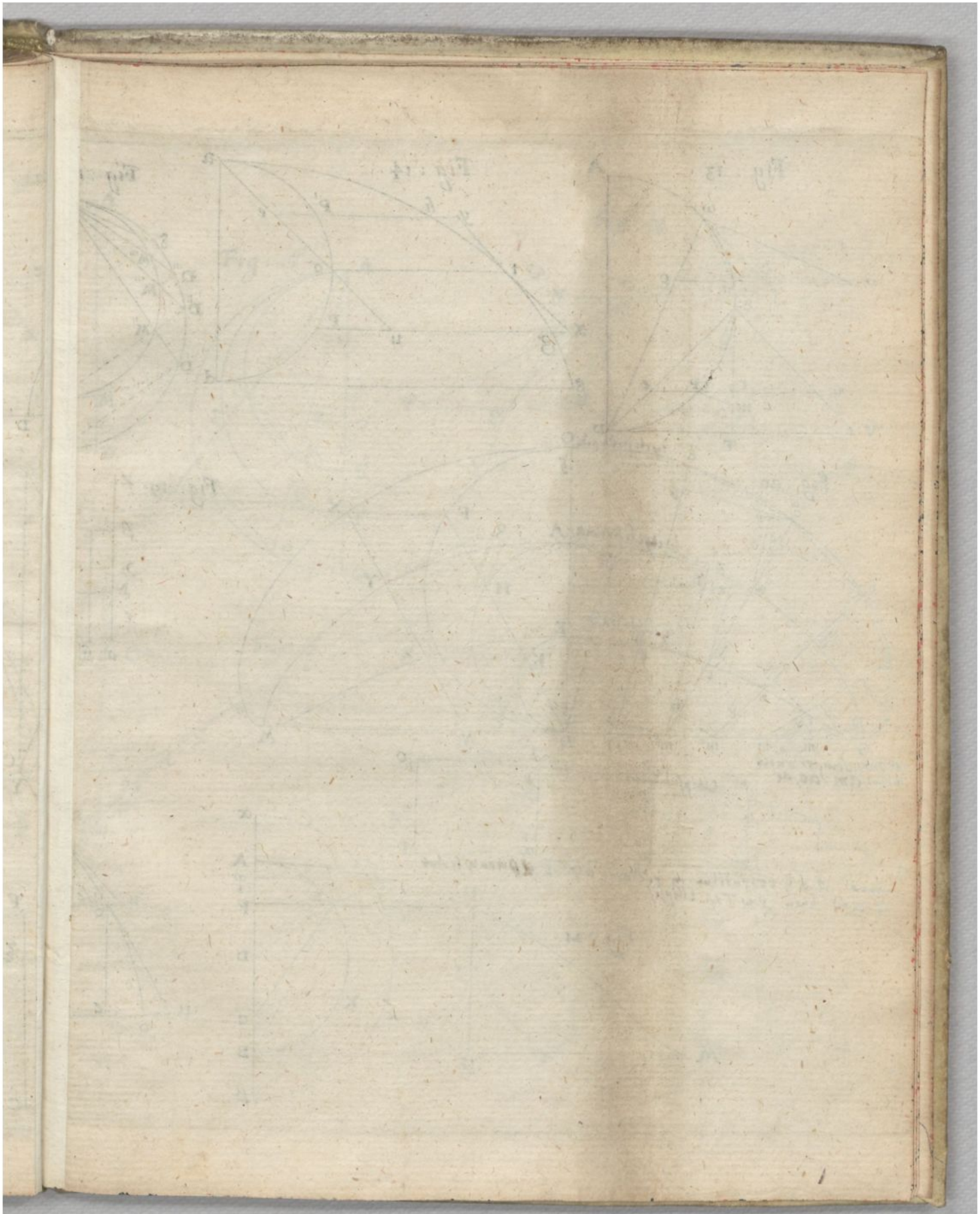




GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [143] - -

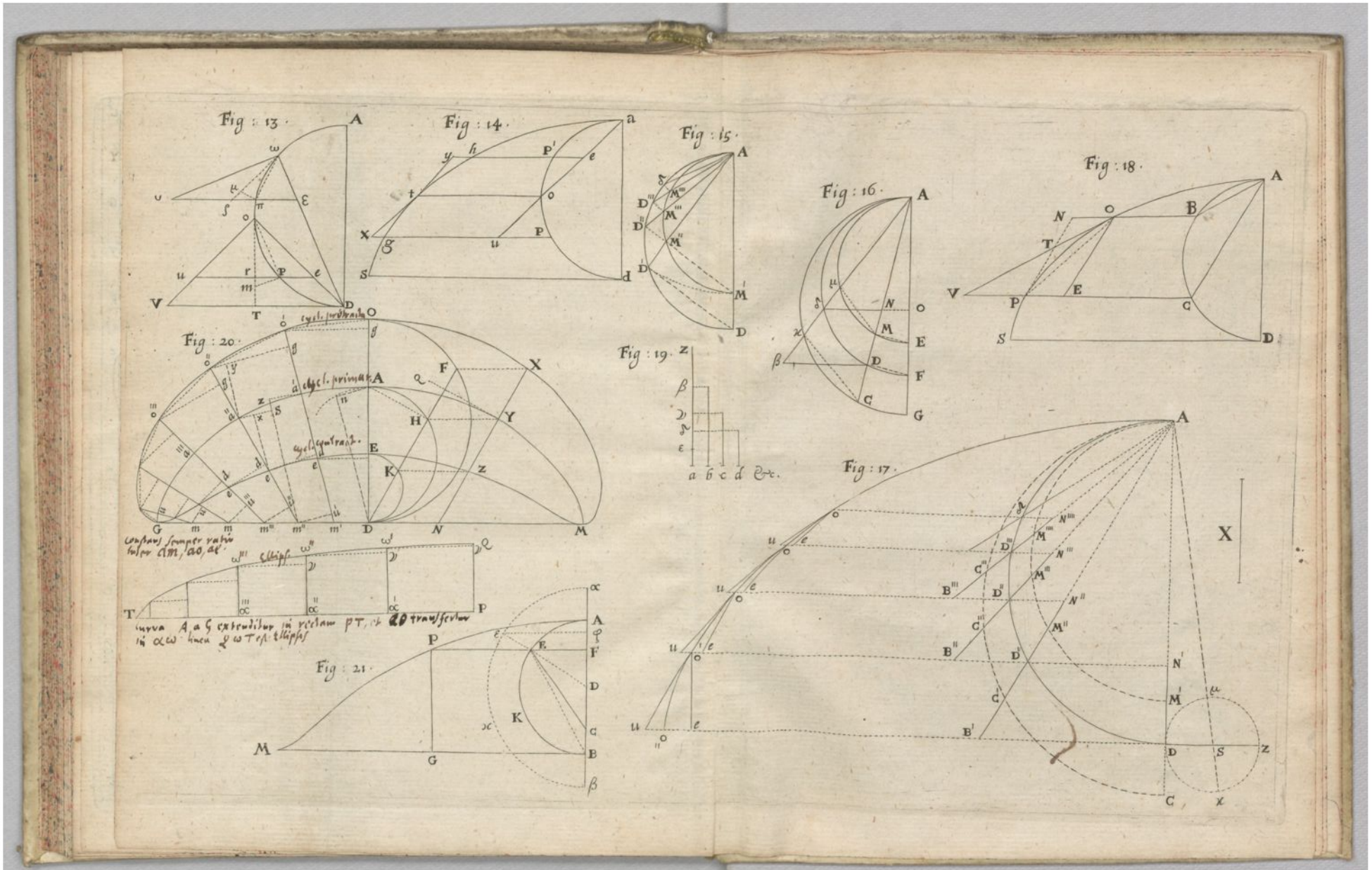
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [144] - -

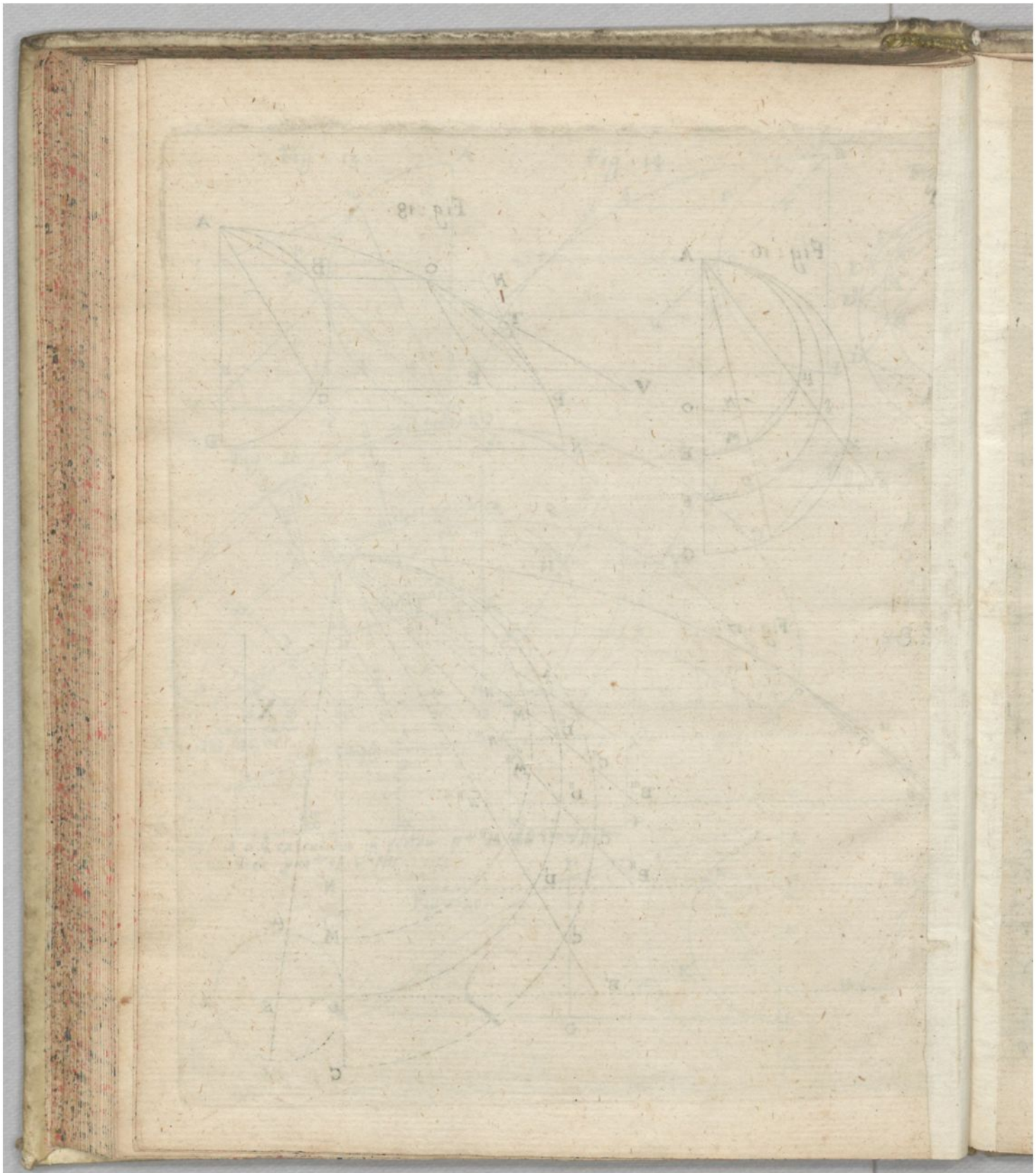
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [145] - -

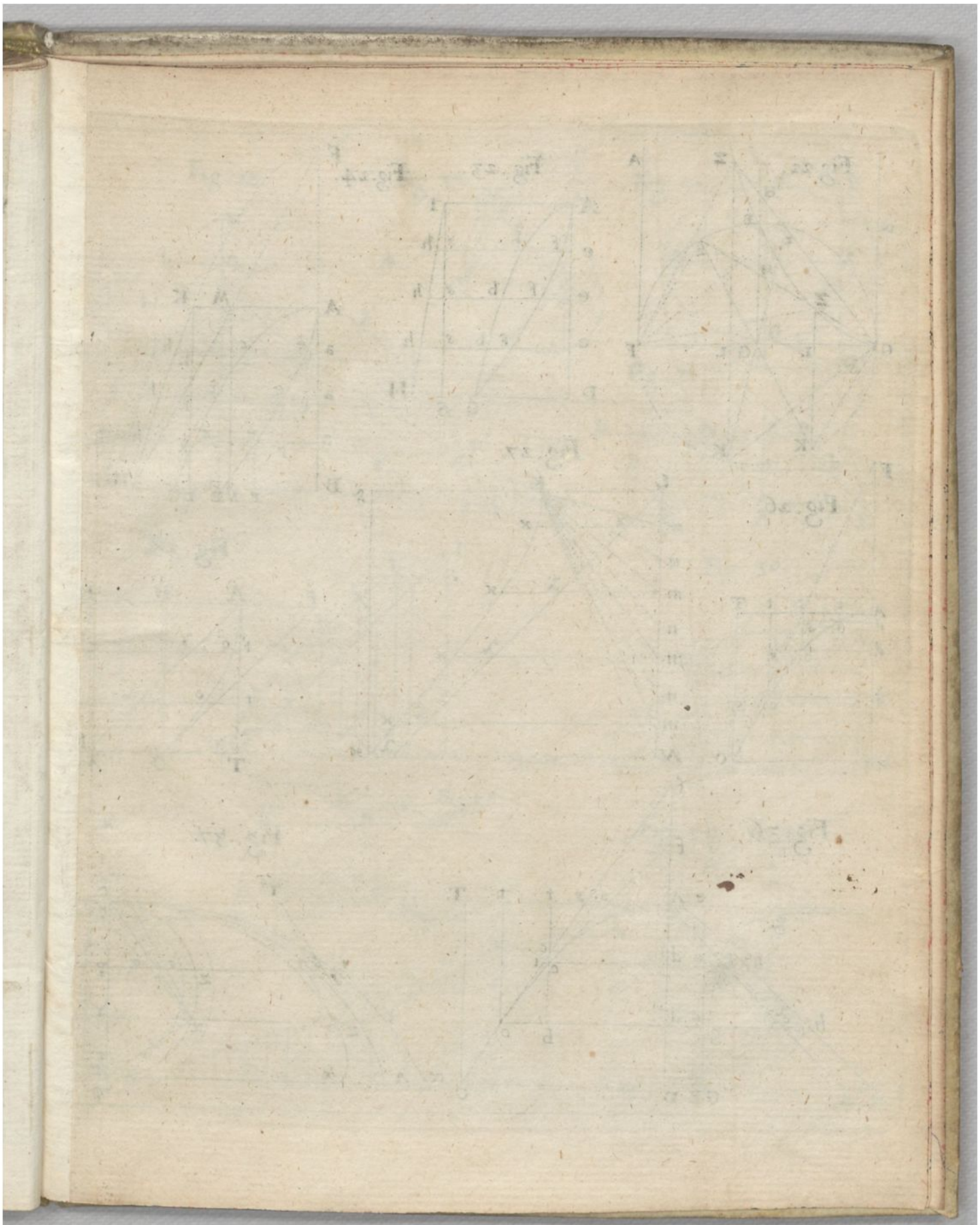
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [146] - -

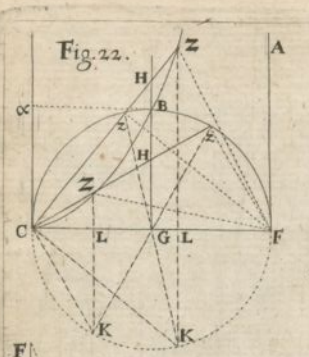
PUBLIC DOMAIN

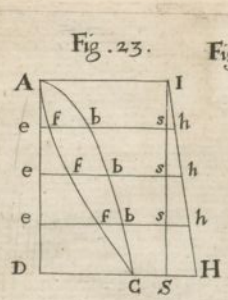


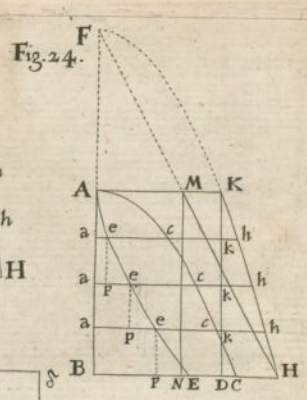
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

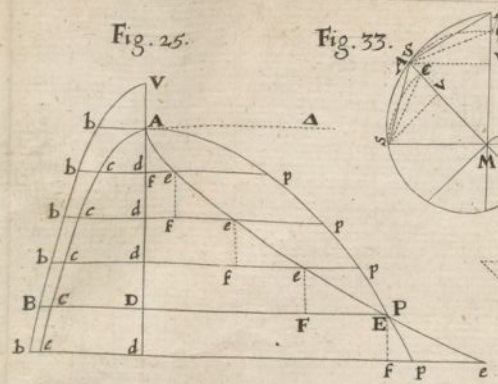
Signatur: Leibn. Marg. 103, [147] - -

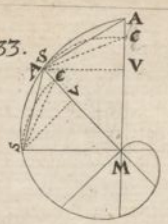
PUBLIC DOMAIN

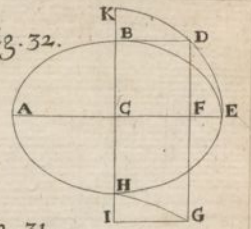


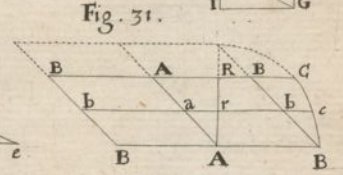


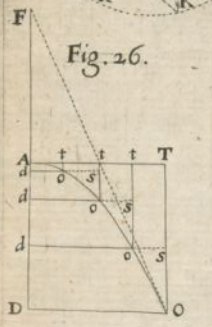


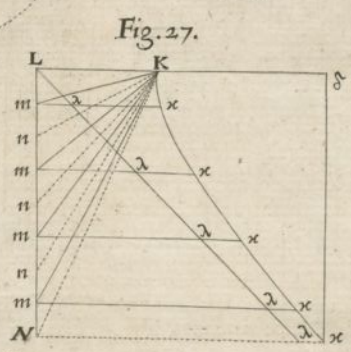


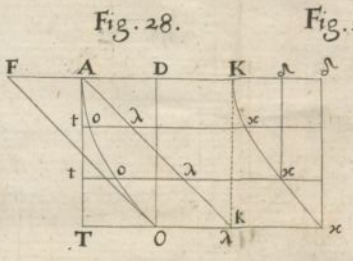


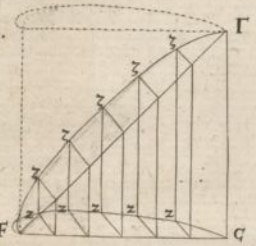


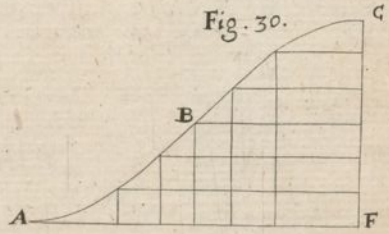


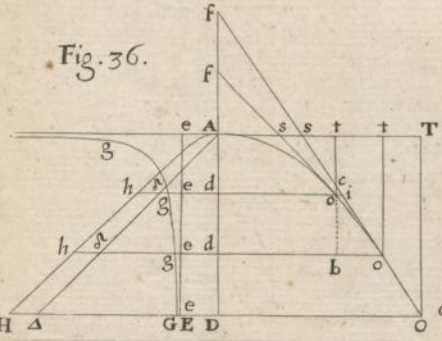


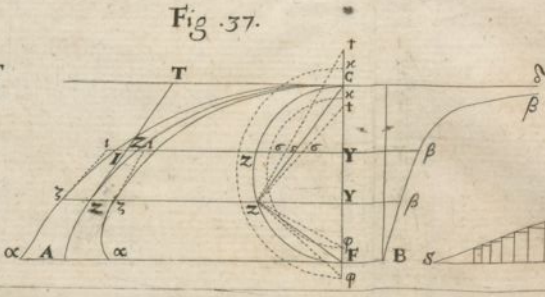


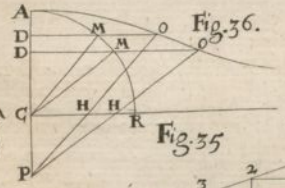


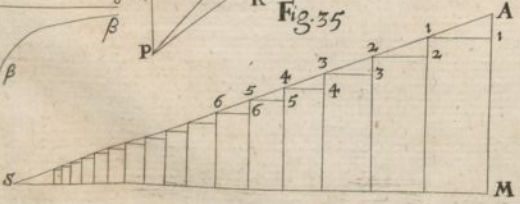


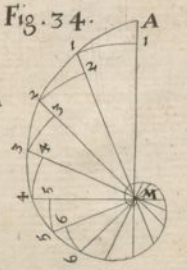








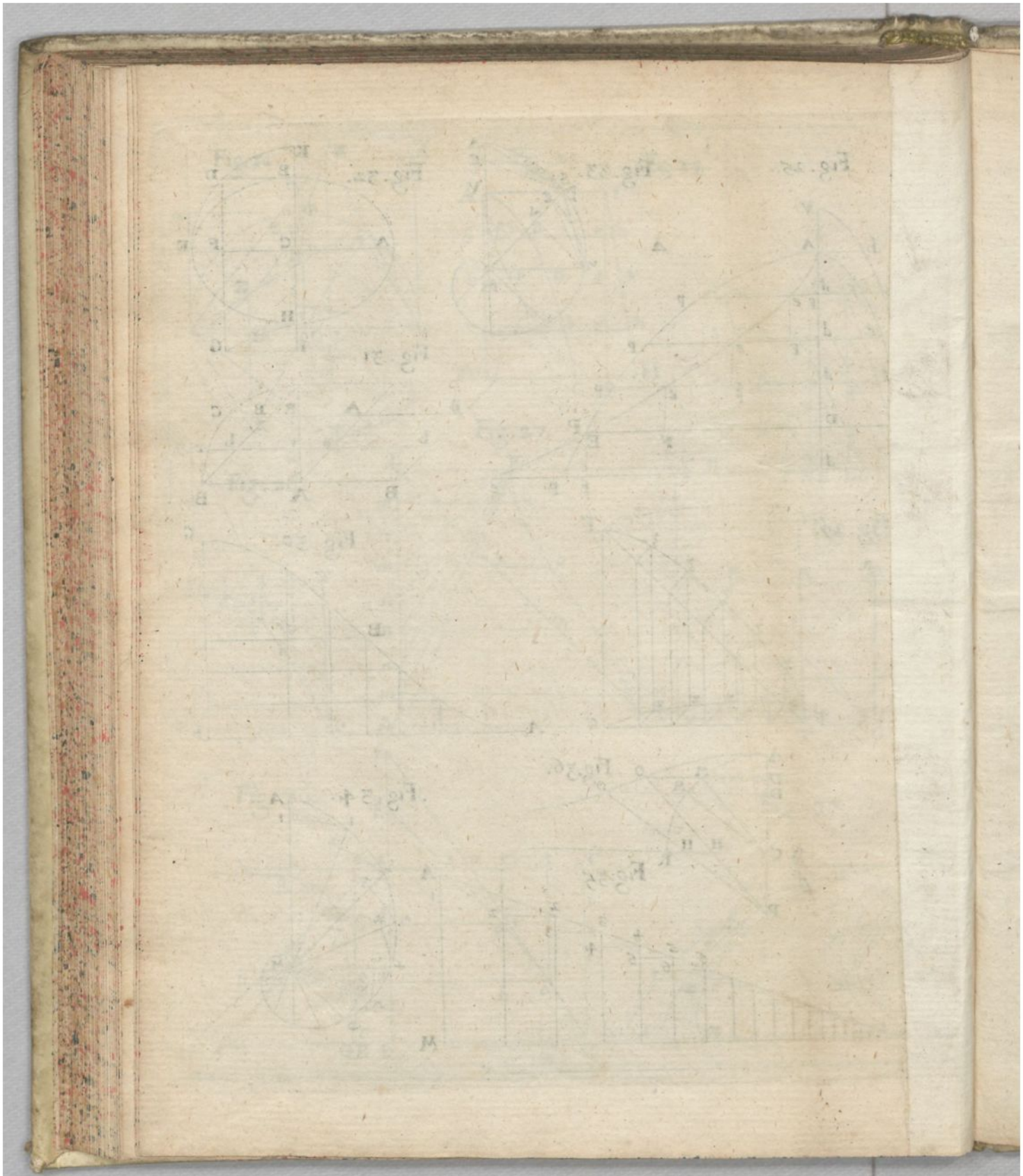




GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [148] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [149] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 103, [150] - -
PUBLIC DOMAIN

GWLB Hannover 35
036 828 36X

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [151] - -

PUBLIC DOMAIN

1061

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

IV 6 B 1061

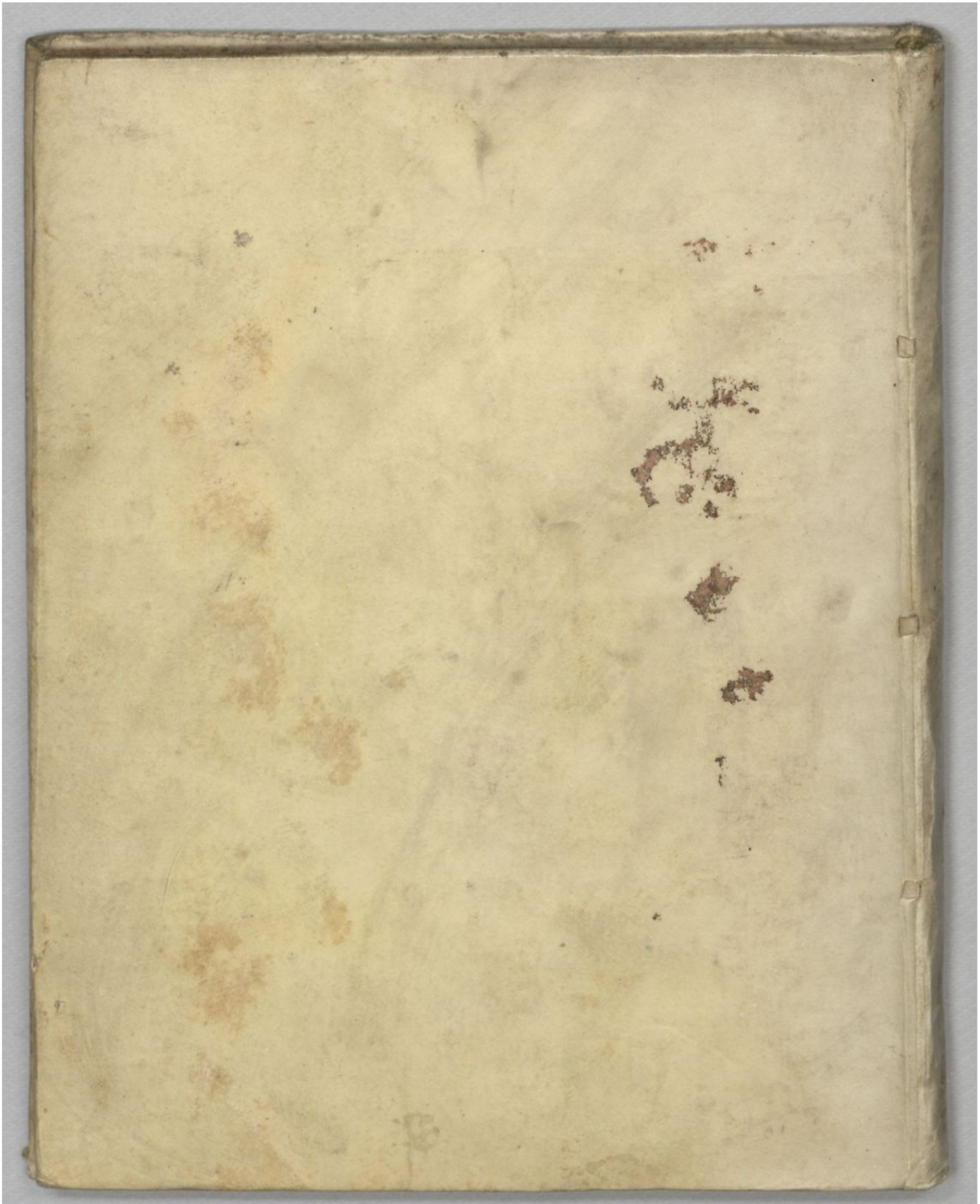
40

Z

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [152] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [153] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 103, [154]