

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

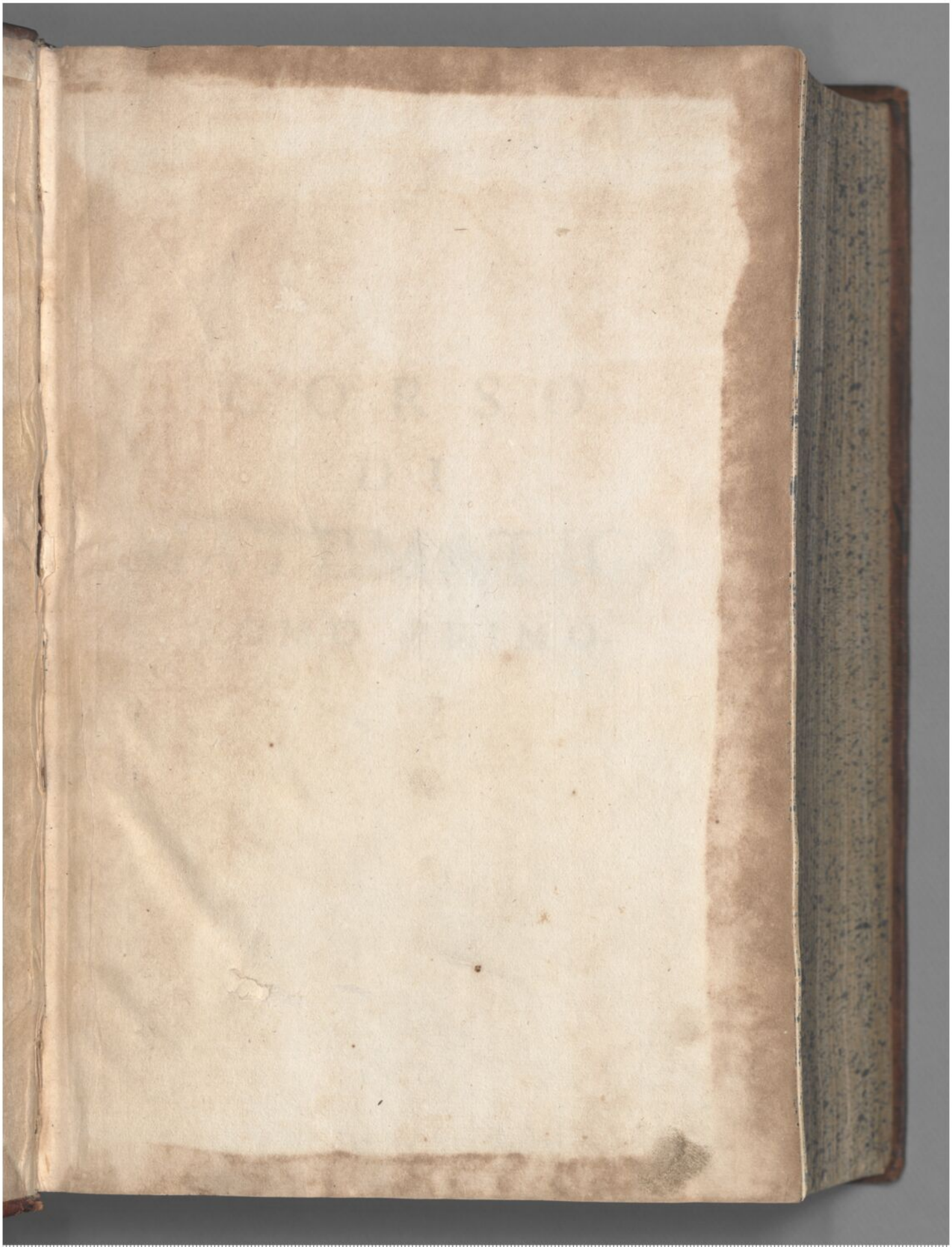
Signatur: Leibn. Marg. 115, [1] - -

Leibn. Marg. 115

Niedersächsische
Landesbibliothek
Hannover

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [2] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [3] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [4] - -

CORSO
DI
MATEMATICA
TOMO PRIMO.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [5] - -
PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [6] - -

EVCLIDE
RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANO
DA BITONTO

Lettore delle Matematiche nella Sapienza di Roma;
e nella Reale Academia ſtabilita dal
RE' CRISTIANISSIMO
nella medeſima Città.

LIBRI XV.

Ne i quali principalmente ſi dimoſtra la compoſitione delle
proportioni ſecondo la definitione datane
dal ſuo antico Autore.

Seconda Impreſſione con nuoue Additioni.



IN ROMA, Per Angelo Bernabò. M.DC.LXXXVI.

Con Licenza de' Superiori.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [7] - -

EVCLIDE
RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANO
DA BITONTO

Lettore delle Matematiche nella Sapienza di Roma;
e nella Reale Academia ſtabilita dal
RE' CRISTIANISSIMO
nella medeſima Città.

LIBRI XV.

Ne i quali principalmente ſi dimoſtra la compoſitione delle
proportioni ſecondo la definitione datane
dal ſuo antico Autore.

Seconda Impreſſione con nuoue Additioni.



IN ROMA, Per Angelo Bernabò. M.DC.LXXXVI.

Con Licenza de' Superiori.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [8] - -

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [9] - -

ALLA SACRA, E REAL MAESTA'
CHRISTIANISSIMA
DI
LODOVICO XIV.
IL GRANDE
RE' DI FRANCIA, E DI NAVARRA.

SIRE.

QVELLA vaghezza, che trà le rouine delle paterne Scuole de' Pittagorici mi venne già di applicare alle Matematiche, ſpenta ſenz'alcun dubio da vna peruerſa fortuna in me ſtata ſarebbe, ſe la Maeſtà Voſtra, intenta ad arricchire colle buone arti il Mondo tutto, agio dato non mi haueſſe di mantenerla ſempre più viua à beneficio della giouentù Franceſe in queſta

ſta ſua Reale Accademia: Nella quale perciò, dopo molte fatiche da me ſoſtenute, non ſolo per ageuolar le materie con chiaro metodo, e breue, all'intelligenza de' diſcepoli poco eſperti dell'Italiana fauella: ma per dar anche fuori qualche mia particolare inuentione, mi è non sò come riuſcito di comporre alcune Opere, che partitamente la Machina tutta di così alta ſcienza diſcuoprono. Contiene la Prima, in cui le fondamenta ſi gettano, gli Elementi di Euclide, da me nella primiera lor giacitura reſtituiti, e confermati con quelle *pruoue, di* che *ſpecialmente i principij* delle Parallele, e delle Proportioni hauer biſogno fin quì ſi è creduto, ancorche la pruoua dependeſſe dagli antecedenti, e noti principij, non sò in che modo da tanti celebrati Scrittori non mai auuertita, non ſenza qualche ſcherno di Euclide, che per queſto difetto in più forme, che il fauoloſo Proteo, ſi è laſciato vedere. Hora queſti Elementi, che primi nell'ordine ſono, e primi Parti del mio debile ingegno, conſacro humilmente al Nome ſempre Inuitto di V. M. ed à i raggi del ſuo profondo intendimento gli eſpongo, ch'è quan-

to dire gli espongo alla publica luce, quando dal suo gradimento quello anche dipende dell' Vniuerso. Con questo così tenue tributo io non presumo però di satisfare, ne pure in piccio-la parte all'infinito debito, in che mi veggio costituito dalla sua Regia Beneficenza; sapendo io bene, che appresso la M.V. la stessa satisfatione, se fia gradita, riceue tanto di grazia, che si conuerte in debito, e che il debito stesso è così prezioso, che di qualunque satisfatione è maggiore. Ma poiche la presente Opera quanto *fà più apparire* la sua Verità per la mia poca industria, *tanto può esser più esposta* all'odio altrui, ed all'inuidia, io solamente intendo di stabilirla sotto il potentissimo Patrocinio della M.V. che coll'eccelsa prerogatiua di Primogenito della Chiesa, e di Promotor zelantissimo della Religione, quella ben giustamente vanta frà l'altre di perpetuo Difensore della Verità. Difenderà ella nel tempo stesso la Matematica tutta, la quale dalla Verità de' suoi principij appunto questo nome à tutte l'altre discipline commune meritare hà potuto. E difenderà con merauiglia vniuersale lo stesso Euclide,

quasi

quasi dalle tombe di Megara risorto, non tanto forse per vendicar le proprie offese, quanto ambizioso di viuere anch'egli con tanti Eroi Letterati sotto gli auspicij di V. M. che il presente secolo hà reso già co'suoi fatti egregij sopr'ogn'altro memorabile à posteri, e gli angoli più remoti della terra, hà con gli applausi empiuto delle sue glorie immortali. Si degni dunque la M. V. di accoglier con lieto ciglio, questa ancorche lieue dimostrazione del mio riuerentissimo ossequio; giàche (se grata non le fia, come al commodo della guerra insieme, e della pace *ordinata*) il riflettere *in mezzo alle sue* più alte occupationi alle cose più humili, non è disdiceuole à quella fortezza, che vnicamente risplende nell' animo suo, e che sola per eccellenza, fù dagl' Antichi appellata Virtù. Ed à V. M. profondissimamente m'inchino.

DI VOSTRA MAESTA'.

Humilissimo, e diuotissimo Seruo.

Vitale Giordani.

INDICE

Delle materie delle quali si tratta in questo corso di Matematica.

NEL PRIMO TOMO.

SI spiegano tutti i quindeci Elementi d'Euclide, ne i quali senza perturbare l'ordine datoli dal medesimo Euclide, sono ristaurati gl'Elementi delle parallele. Il principio attinente alla similitudine delle proportioni, e si è dimostrata la compositione delle proportioni.

NEL SECONDO TOMO.

SI spiega tutto quello, che delle settioni Coniche è necessario à saperſi dal Geometra, con la quadratura della Parabola. Ed oltre à ciò le opere di Archimede, cioè la dottrina delle linee spirali; de i conoidi, e sferoidi; della sfera, e cilindro; gl'equiponderanti; ed i *galleggianti, à i quali* è aggiunto quanto fà bisogno circa il centro della grauità *de'solidi, col rimanente della mechanica*.

NEL TERZO TOMO.

PRima si spiegano le passioni de i moti, cioè equabile, e del vniformamente accelerato del Galileo. Secondo si tratta delle acque correnti, doue si dimostrano geometricamente tutte le passioni, che accadono à i moti delle acque, che corrono, si dà la regola da misurarle, e si assegna il modo certo da distribuire le acque tanto per le fontane, come per altri vsi. Terzo si dimostra la vera maniera da dirizzare i fiumi per leuare le corrosioni, che fanno le acque alle ripe di essi leuando l'abuso delle spese perpetue, che apportano li pignoni, ò ale, e le parate, che sin hora si sono vsate, e si vsano. Quarto si dà il modo da scauare i fondi dei fiumi senza rimuouerne l'acqua, il che serue ancora à tener purgate le bocche doue i fiumi s'vniscono col mare, e per il medesimo effetto serue à i porti, ed alle lagune. Quinto si mostra la regola da vuotare le Paludi, e mantenerle vote, ed in fine si tratta Geometricamente della diuisione degl'Alluuioni in difesa di Bartolo il Leggista.

NEL QVARTO TOMO.

SI dimostra tutta la prattica dell'Aritmetica. Si spiega vn breue trattato d'Algebra con vna regola generale da estrarre le infinite radici pure, ed affette. Si dimostra l'vso delle infinite Iperbole, ed Ellisse del

Signor

Signor Michel Angelo Ricci, e ſucceſſiuamente ſi ſpiegano le regole di miſurare tutti i piani, e ſolidi. Si tratta poi della trigonometria, e del miſurare da lontano, doue ſi propone la coſtruttione, ed vſo d'vn nuouo iſtrumento atto à dare le oſſeruationi à gradi, minuti, ſecondi, terzi &c. al che ſegue l'algoritmo delle quantità continue, con le quadrature delle varie lunule, ed oltre à ciò ſi dilucida la determinata ſettione, la ſettione della proportione, e la ſettione dello ſpatio di Snellio, ſi ſpiega la ſettione de'piani rettilinei, e finalmente con ogni chiarezza ſi dimoſtrano le inclinazioni di Marino Ghetaldi, con le tattioni di Franceſco Vieta, e tutto il rimanente della geometria prattica, leuare i ſiti in pianta, e liuellare.

NEL QVINTO TOMO.

SI tratta generalmente di tutta la militare. E prima della coſtruttione delle fortezze Regolari, ed Irregolari comparando i tre vulgati modi, cioè Franceſe, Olandeſe, ed Italiano, doue ſi moſtrano le loro particolari perfettioni, ed imperfettioni. Nel ſecondo luogo ſi parla delle fortificationi eſteriori, loro vtilità, ed vſi. Terzo delle piazze alte, e baſſe, falze braghe, barba cannoni, vie ſotteranie, contromine, caualieri, piatteforme, ponti, porte, e ſaracineſche. Quarto degl'alloggiamenti, fortini Campali, Battarie, Caponiere, *approcci, fornelli, Gallerie*, tagliate, e del modo da *ſuentare le mine*, e *li fornelli*. Quinto della *prattica delle Artigliarie*. *Sesto* del moto de *proietti* del Galileo, e *Torricelli*, *cioè la theorica*, e prattica per *i tiri* delle artigliarie, e particolarmente per le Bombe. Settimo del moderno ſquadronare comparato all'antico, e finalmente della difeſa, ed offeſa delle piazze, e del Campeggiare.

NEL SESTO TOMO.

SI tratta dell' Optica, Catoptrica, Diaptrica, con gli loro anneſſi, come ancora della Proſpettiua, e machine per le ſcene.

NEL SETTIMO TOMO.

SI ſpiegano gli sferici di Teodoſio, con la prattica della sfera Armillare, ſi comparano frà loro le tre theorie de'pianeti, ſecondo i tre ſiſtemi del Mondo, cioè di Filolahe, Tolomeo, e Ticone. Si moſtra il modo da oſſeruare le Stelle, con tutta la prattica dell'Aſtronomia, e finalmente ſi tratta della Gnomonica, e della Geografia.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [15] - -

LO STAMPATORE

A chi Legge.

NELLA prima Impreſſione di queſt' Opera i Lemmi aggiunti dall' Autore per la reſtaura*tione* del paralleliſmo, ſono talmente concatenati *con le propoſitioni* d'Euclide, che queſte non ſi poſſono dimoſtrare ſenza quelli; hora in queſta ſeconda Impreſſione per maggior breuità di chi ſtudia, i detti Lemmi ſono ordinati à dimoſtrare ſolamente la definitione data da Euclide alle parallele; ſi che, ſupponendo queſta come già dimoſtrata, chi non voleſſe dimorare nella lettura di eſſi Lemmi, può dopo la vigeſima ſeſta propoſitione del preſente Libro fare ſubito il paſſaggio alla vigeſima ſettima propoſitione, e da queſta alle altre ſuccedenti, ſenza interponimento alcuno. Oltre à ciò la dimoſtratione dell' vndecimo aſſioma, poſta nella prima Impreſſione dopo la trenteſima prima propoſitione del primo Libro, quì ſi troverà nel fine di eſſi Lemmi ſeparata dalle propoſitioni d'Euclide, e più chiaramente dimoſtrata. Di più le due dimoſtrationi poſte auanti all'ottaua definitione del quinto Libro, che nella prima Impreſſione ſono ordinate in forma di Theoremi, in queſta l'Autore le hà commutate in for-

forma di Problemi, perche in tal guiſa ſpiegano più chiaramente l'intento, ch'iui ſi ricerca. Finalmente accioche queſt' Opera non manchi in coſa alcuna, ſe l' è aggiunto nel fine vna eſatta errata corrige per gli errori occorſi nella Stampa, E viui felice.

SEBA.

SEBASTIANO MATTEI
AL LETTORE.



A Matematica, che Platone annouerò frà le parti primarie della ſua Philoſofia, hebbe in ogni ſecolo quella prima veneratione, con la quale i Sacerdoti antichi dell'Egitto s'eleuarono alle ſupreme dignità della Republica, mentre nell'Oriente, e nell'Oſtro s'apprezzaua la razionalità, ed erano tenuti, e reputati Sauij, Maghi, Bragmani, e Gimnoſophiſti quegli huomini, che dimoſtrauano le coſe per le loro cauſe formali, come de' Matematici diſſe Auerroe; e però queſta ſcienza appreſſo i Greci s'inalzò col nome di Dottrina, e Diſciplina, quaſi per Antonomaſia, che altro non voglion ſignificare le voci Matheſis, e Mathema. Eſſa laſciate le conſiderationi di buono, e male appartenenti alla morale, e gli eſtremi di materialità, ed aſtrattione proprij della Fiſica, e Metafiſica, ſi contentò della ſtrada media per dedurre, e dimoſtrare le paſſioni più importanti del ſuo obietto, ch'è la quantità, non da primi generi, ne dall'vltime formalità, ſecondo Proclo, ma da mezzi così proportionati, che le dimoſtrazioni Matematiche non poſſono contradirſi per la loro cuidenza; e fù forzato Platone à dire, che haueua queſta Dottrina ſortito vna ottima, e perfetta natura; ed Ariſtotele, emulo della ſetta Megarenſe, quando volle ridurre à perfettione la ſua Filoſofia rationale, altro non fece, che vna Matematica delle operazioni intellettiue, dirette, e refleſſe; e mentre procuraua sfuggire la materia, inciampò nella forma della ſcuola contraria, per verificarſi la dottiſſima cenſura di Filone, qui Mathematicam appellauit ſcientiam vniuerſalem, quod hæc rerum intelligibilium imagines, verique veſtigia tanquam in Polytiſſimo Speculo demonſtret, mentemque purgatam paulatim abducat à ſenſu. *Quindi è, che gli Aſſirij colle figure Geometriche, e Pitagora co'i numeri, procurauano ſciogliere i Fenomeni più difficili, e gli arcani della natura; e Platone ſcriſſe in modo Matematico la ſua Filoſofia; anche la parte Morale, e Politica, & i libri della Republica.*

Auer. 1. phiſ. com. 1.

Lib. 1. cap. 1. ſup. 1. Eucl.

Eraſm. in Adag.

L'origine di queſta ſcienza fù creduto nell'Egitto, ed è fama, che Talete Mileſio la traſportaſſe in Grecia da quella celebre Prouincia,

doue

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [18] - -
PUBLIC DOMAIN

doue ò per la potenza della Monarchia, ò per l'inclinazione de' Prencipi, che fauoriuano i Matematici con honori, e ſtipendij, ò ſia per la neceſſità de' Popoli coſtretti à profeſſare la Geometria per l'inondationi del Nilo, fiorì più che in neſſuna altra parte del Mondo; però il Filoſofo di Stagira credeua, non ſenza improbabilità, che anco le ſcienze, come le più coſe dell'Vniuerſo, ſi riuolgeſſero col moto del primo mobile, e gli parue facile ſapere le loro vltime digreſſioni, e difficiliſſimo affermare coſa di certo nelle ſue prime progreſſioni, quantunque molti habbiano ſcritto degl'inuentori dell'arti, e delle ſcienze; quaſi nel ſuo ſenſo diceſſe, che hebbero principio, e col Mondo, e col moto. E fù ſentenza di Socrate, poiche tutte le Dottrine, principalmente le Matematiche riſiedono nella parte cogitatiua dell'anima, ſe è vera la Filoſofia Pitagorica, e Platonica, che il ſapere ſia ricordarſi l'huomo delle ſue ragioni, e così ſempre, ch'il Mondo fù popolato d'huomini, è credibile foſſe anche adornato, ed arrichito di ſcienze, le quali ſono, ſenza dubio, proportionate all'intelletto, perche la verità conſiſte in vna ſola conformità indiuiſibile dell'atto all'obietto, ancorche il modo ſia lungo, e diffuſo, comparato alla breuità della noſtra vita. Nè diſcorda queſta Dottrina dalle communi opinioni, mentre tutti i Dottori di Santa Chieſa, e più interpreti delle ſacre carti affermano, ch'il noſtro primo Padre fù dottiſſimo in qualunque ſcienza, dal quale ſi trasfuſe ne i ſucceſſori, tanto che i figlioli di Seth, nepoti di Adamo, laſciarono le figure Aſtronomiche auanti del diluuio impreſſe in due colonne, e rimaſero le veſtigie ſino à tempi di Gioſeppe Hebreo. Da quì è che i Chaldei, Meſopotamij, ed Aſſirij furono nelle Matematiche peritiſſimi in guiſa tale, che Ariſtotele altro non impoſe à Calliſtene ſuo familiare, il quale diede per compagno ad Aleſſandro mentre partiua per l'Aſia, ſe non che gli traſmetteſſe dagli Archiuij di Babilonia, quando foſſe eſpugnata quella Città, tutte le Aſtronomiche oſſeruazioni de' Caldei, che ſi trouarono fatte per lo ſpatio di trè mila nouecento, e trè anni. Gli Egitij finalmente nell'Africa ſi conobbero deuoti, ed in vn certo modo ſuperſtitioſi de' Matematici, ne contenti delle dimoſtrazioni de i Rè, inalzarono ne i tempij, ed altri luoghi publici, ò ſcolpito, ò dipinto l'animale Orige, ch'era figura del Matematico.

Ne pare improbabile, che dall'Aſia, e dall'Africa ſi transfondeſſe nell'Europa, doue ſimilmente queſta ſcienza fù venerata come Diuina, non che profeſſata, e ſeguita come humana; ed i Matematici ſtimati felici, e più che huomini, cantò Ouidio nel primo de' faſti.

Feli-

1. de Cel.

Socr. in Memnone.

Hypoc. ſec. 1. aph. 1.

Ioſep. lib. 1. antiq. Iud. cap. 3.

P. Ramus lib. 1. proem.

Pier. Valer. lib. 10. pag. mihi 90.

Felices animæ, quibus hæc cognoscere primis,
Inque domos superas scandere, cura fuit.
Credibile est, illos pariter vitijsque, iocisque
Altius humanis exseruisse caput.

Ma che Talete Milesio fosse il primo Geometra frà gli Assirij mi pare difficilissimo, ed improbabile, perche Euforbo Frigio, e Palamede Greco, che fioriuano nel tempo della guerra Troiana, lasciarono in carte non poche opere piene di figure Geometriche; e Talete visse dopo centenaia d'anni intorno al 580. auanti la nostra redentione; e ben vero che de i primi, ò per l'ingiuria de' tempi, ò per l'incuria de i Scrittori, non si legge, che hauessero seguaci, come Talete, il quale fù imitato da Pitagora Samio, Anassagora, Clazomene, e successiuamente da i migliori Filosofi del Peloponesso fino al secolo d'Euclide, che ridusse la Matematica à tutta perfettione.

Di questo Autore dubitano, ed anco ne fanno lunghe discussioni i Commentatori, se fù il Prencipe della Setta Megarense, ò altro Geometra celebre negli anni seguenti, perche del Megarense si sa, che nell' infantia d'Alessandro occupò la Catedra ad Aristotele, quando passaua legato degli Atenieſi in Persia, e del Matematico si legge, che fù familiare à Tolomeo primo Rè d'Egitto, ma in venticinque, ò trenta anni soli di differenza non sò per qual ragione non possa essere il medesimo giouane nel tempo d'Alessandro, ed antiano in quel di Tolomeo; in qualunque modo, esso fù il Geometra più insigne frà tutti quelli, de' quali rimane la memoria nella nostra età. S'accorse che Socrate Geometriam discendam esse aiebat, donec quis possit, & vsus ita ferat; *che Platone non accettaua discepolo alcuno nell' Accademia auanti d' hauer inteso i principij Geometrici, per li quali passauano tutti i Filosofi della Grecia come per consuetudine antica, e compresa la necessità della Matematica, ò mosso dal delettabile della parte speculatiua, e dall'vtile della prattica, s'affaticò à cercare vn modo, che nè la rendesse oscura per la breuità, ne improportionata per la diffusione, e lo trouò tale, che domandato dal Rè Tolomeo se vi era altra strada più breue, e più facile, rispose,* Nullam esse aliam viam regiam. *Conobbe che l'Aritmetica, e la Geometria sono le parti principali della Matematica, e che per meritar nome di Matematico è necessario esser buon Geometra, e dimostrare geometricamente tutte le cose, che cadono nell'arte, e però senza sparmiar fatica scielse quelle dimostrazioni, che conduceuano al suo fine, con tale artificio, che se vna sola ne mancasse, precipita-*

pitarebbe il bello, ed ammirabile di queſto Coloſſo, mentre ſi ſcorgono le ſuſſeguenti coſe concatenate con l'antecedenti, che mal potrebbe la terza ſenza la ſeconda, e queſta ſenza la prima dimoſtrarſi.

È ancorche quaſi tutti dopo d'Euclide ſtudiarono di trouare nuoui modi, ò inuertendo l'ordine de' libri, ò tralaſciando alcune propoſizioni, e reducendole à Corollarij, ò aggiungendone delle nuoue, non oſtante è certiſſimo, che queſti huomini inſigni hanno arricchito di belliſſimi penſieri le buone lettere, ma non sò ſe apportano vtile ſi grande agli ſtudioſi, come s'eſperimenta dagl'Elementi d'Euclide. Eſſi ritengono quella ammirabile diſpoſizione, che nota Proclo, le di cui parole ſono: Elementaris verò ipſius perita: Geometricarum rerum contemplationis inſtitutio inuincibilem, perfectamque habet enarrationem, dalle definitioni, da i Poſtulati, e dagli Aſſiomi, che ſono quei ſempliciſſimi principij, ne i quali ſi fonda tutta la ſtruttura Matematica, procede alla proua di propoſizioni ſemplici, che chiama Elementi, e ſeruono come di mezzi termini per dimoſtrare le coſe più difficili, e più compoſte; e diuiſe tutta l'opera in quindici Elementi, nel primo de' quali tratta della generatione de i triangoli, e parallelogrammi, dell'vgualità degli angoli, de i lati, e loro ſuperficie; nel ſecondo dimoſtra le paſſioni, e proprietà, che accadono alla retta linea variamente diuiſa, ed aſſegna la differenza di quanto il quadrato d'vn lato del triangolo obliquangolo ſupera, ò manca da i quadrati degli altri due lati; nel terzo manifeſta le paſſioni delle rette tirate nel circolo, e degli angoli, ed archi, che contengono; nel quarto s'eſpongono l'inſcrittioni, e circoſcrittioni de' Poligoni regolari nel circolo; nel quinto compara le proportioni, che cadono frà le grandezze in genere; nel ſeſto dimoſtra le proportioni de i piani rettilinei, e loro lati, introduce la compoſitione delle proportioni, e dichiara la proportione degli archi, ed angoli ne i circoli vguali; nel ſettimo parla delle paſſioni, e proportioni de i numeri primi, e compoſti ſecondo i varij modi di miſurarſi; nell'ottauo proua varie paſſioni de' numeri proportionali, e ſimili, e de' loro lati; nel nono manifeſta le paſſioni de' numeri continui proportionali, pari, e diſpari; nel decimo le paſſioni delle quantità rationali, ed irrationali; nell'vndecimo ſpiega la generazione de' corpi ſolidi, loro ſimilitudine, e la proportionalità de i parallelepipedi; nel duodecimo fà la comparatione della proportione de' circoli à quella, che cade frà i quadrati de' loro diametri, de' ſimili Poligoni inſcritti in eſſi, e la proportionalità delle ſfere, Piramidi, Coni, e Cilindri; e nel decimoterzo aſſegna varie paſſioni, che accadono

Proc. ſup. 1. Eucl. cap. 5. lib. 2.

dono alla linea diuisa secondo l'estrema, e media proportione, fà la generazione di cinque corpi regolari, li comprende nella data sfera, compara il diametro della sfera à i lati de' corpi regolari iscritti, e i medesimi lati frà di loro. L'Elemento decimoquarto, col seguente, alcuni ò per la consonanza della materia, ò per la similitudine della forma, l'attribuiscono ad Euclide, altri ad Ipsicle Alessandrino, di che si parla nel principio d'esso libro, e nel discorso si legge la comparatione del Dodecaedro all'Icosaedro tanto in solidità, quanto in superficie; e finalmente nel decimoquinto si vede la scambieuole iscrittione de i corpi regolari frà di loro.

Sò che si potrebbe auanti ogn'altra cosa trattare delle proportionalità, cioè similitudini delle proportioni nelle grandezze in genere facendone il primo Elemento, quasi independente dagl'altri, ma se si considera bene la dispositione data da Euclide à questi Elementi, in nissun' altro luogo fuorche nel quinto poteuano meglio collocarsi, stante che la proportionalità è del genere de' relatiui, mentre risulta dalla comparatione di due, ò più proportioni frà loro; onde prima di saperssi, che cosa è quantità, e che cosa è figura, e prima di concepirsi il modo della comparatione, e la relatione frà due sole grandezze, mal potranno scorgersi le proportionalità, che frà più di due quantità accadono; e perciò con grande artifitio Euclide, conoscendo che l'intelletto humano procede da i noti à i men cogniti, da i principij alli principiati, da semplici à compositi, e dagl'assoluti à i relatiui, prima d'ogn'altra cosa, spiega la generatione della quantità, e delle figure più semplici, e comparandone due per volta, come fà ne i primi quattro Elementi, con le voci d'vguale, duplo, triplo &c. insinua il modo della comparatione, con che viene ad introdurre vna certa abilità à potersi poi più facilmente concepire la natura delle altre relationi meno semplici, come sono le comparationi delle proportioni frà loro spiegate nel quinto Elemento; e ritenendo sempre il medesimo ordine, nel sesto Elemento introduce la compositione delle proportioni, ed in questa forma dalla comparatione frà due sole quantità, che è la semplicissima, passa alla comparatione delle proportioni frà loro, che è la meno semplice, e da questa s'inoltra alla compositione delle proportioni, che è la composta. Del medesimo modo il settimo Elemento, che pare si regga da per se, non poteua occupare altro luogo, ò perche regge i seguenti Ottauo, Nono, e Decimo, ò perche i numeri, che possono considerarsi come linea, superficie, e corpo, sono medij di participatione frà piani, e solidi, e doueuano frà essi con-

stituir-

ſtituirſi, e collocarſi; quindi è che l'Vndecimo, e Duodecimo; ancorche dipendano da i primi ſei, e non da i quattro intermedij, ſi ſerbarono all'vltimo, e riuſcì felicemente per la commodità di continuare il trattato de' ſolidi ne i libri conſecutiui.

E però il Signor Vitale Giordano, Autore di queſt'Opera, Geometra celebre frà i migliori della noſtra età, dopo lunghe fatiche fatte nello ſpatio di ventiquattr'anni, hauendo aggiuſtato vn Corſo Matematico, oue pienamente ſi tratta non ſolo la parte Teorica, però anche la prattica vtiliſſima alle indigenze della vita humana, gli parue in queſto primo Tomo degli Elementi ſeguitare il bell'ordine d'Euclide, col quale il Megarenſe ſi reſe ammirabile al Mondo, come diſſe Proclo: Procl. ſup. 1. Eucl. lib. 2. cap. 5. Præcipuè verò circa Geometricam elementorum inſtitutionem eum quiſpiam admirabitur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit theorematum, atque problematum; etenim non ea aſſumpſit omnia, quæ poterat dicere, ſed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. E perche ne anche nel nome diſcrepaſſe dal ſuo Anteſignano, volle al volume dargli quello d'Euclide reſtituto, hauendolo reſtituito al ſuo priſtino ſplendore, e con tal chiarezza, e facilità ſpiegato, che ogni principiante potrà goderlo ſenza interpretatione di Maeſtro alcuno. Del Signor Vitale, ſenza adulatione può dirſi; Quod totam artem prudentiſſimè, ac planiſſimè tractatam, admirabili, ac penè diuina demonſtrandi facilitate complectatur. Vedonſi ſpeſſi luoghi appartenenti ad altre parti della Filoſofia addotti con ogni grauità, ornati d'eleganze, sfugge ſempre la temeraria conſuetudine di biaſimare i Scrittori, anzi loda i celebri, e compatiſce i deboli, & adducendo le ſue ragioni, perſuade colla verità più toſto, che con artificio; non dice tutto quello, che poteua dire, ne tralaſcia tutto ciò, che altri hanno tralaſciato, ma ben sì adduce quel che appartiene alla materia d'Elementi. Rimuoue affatto tutti i principij, che non ſono per ſe noti, ò che non poſſono ſenza immenſa fatica dimoſtrarſi, come improprij dell'inſtituto Matematico; commuta la definitione delle parallele in altra atta à ſpiegare la loro propria natura; dimoſtra qual poſitione debbano hauere le rette, che diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate in infinito mai ſcambieuolmente s'auuicinano, ne ſi ſcoſtano, e dopo la propoſizione 26. del primo Elemento, comparando la linea retta alla curua, e conoſcendo eſſer impoſſibile, che vna retta ſia parallela ad vna curua, ſenza turbare in coſa alcuna l'ordine d'Euclide, con quel ſolo principio dimoſtra tutti gli Elementi delle

paral-

parallele, proua il postulato, ch'è quinto in Proclo, Campano, e Commandino, ed assioma 13. nel commento di Clauio. Conuince le opposizioni fatte ad Euclide sopra i principij della proporzione, e sostenendo la 6. definizione del quinto Elemento, dimostra, che si danno quattro grandezze in natura, delle quali presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicazione, e presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, parimente secondo qualunque multiplicazione, sempre gli vguali multiplici della prima, e terza, ò superano, ò sono vguali, ò minori degli vguali multiplici della seconda, e quarta; e riuoltosi al principio, che riguarda la composizione delle proportioni, materia, ò non toccata, ò infelicemente trattata dagli altri, dopo la decima ottaua proposizione del sesto Elemento, dimostra, che di quante grandezze si vogliano la proportione della prima all'vltima è composta delle proportioni intermedie, e dopo facilmente conuince, che di quante grandezze si vogliano continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice della proportione della prima alla seconda per vno meno il numero de i termini continui proportionali.

Alla publicazione di questa vtilissima opera resisteua inuincibilmente la naturale modestia dell'Autore, ma non meno le di lui grauissime occupazioni cagionateli dalla quotidiana lettura priuata in sua casa, e publica nella Reale Accademia stabilita dal Rè Christianissimo in Roma, le quali non lasciandolo vn momento di tempo respirare, non che à potersi impiegare in altra cosa di rilieuo, giustificauano la sua impossibilità di attender alla perfettione di quest'opera necessaria, come esso diceua, per poter vscire alla stampa. Ma non cessando io di combattere colla mia importunità la di lui renitenza, l'indussi alla fine à cedere al mio desiderio, anzi al publico beneficio; l'ottenni però con vna condizione à me indespensabilmente da lui prescritta, di douermi io precisamente prender la cura, ed il peso di darle quell'vltima perfettione, la quale esso stimaua necessaria per la stampa, e per la quale si dichiaraua inhabilitato dalle predette sue occupazioni. Conoscendo però io essere quest'opera già ridotta dall'Autore à segno, che poco, anzi nulla vi mancaua per quella perfetta forma, che esso richiedeua, accettai di buon'animo l'incumbenza, la quale perciò da me facilmente adempiuta, stabilì in poco tempo la publicazione di quest'opera; à questa, ò Cortese Lettore, per tuo maggior vtile, e minor incommodo, volli aggiungere del mio la presente prefazione per renderti con essa instrutto (prima di obligarti à tutta la lettura del Volume) dell'ordine, e qualità

delle

delle materie, ch'in essa si trattano, credendo io di poter ciò fare, se non più elegantemente, almeno più esattamente d'ogn'altro, sì per esser à quest'hora sopra venti anni, che come discepolo, & amico godo familiarmente della conuersazione de' suoi pensieri, e de suoi studij, come ancora per il dett'obligo dall'Autore impostomi, e da me religiosamente adempito, di hauerla à riuedere attentamente più volte prima di consegnarla alla stampa; intorno alla quale, con l'aiuto di molti amici, ottenni ancora dall'Autore; per lo stesso fine di seruire alla maggior tua commodità, ed vtilità, che te la concedesse nel nostro volgare idioma Italiano, perche essendo questo copiosissimo, e bastante à spiegare in qualunque scienza con somma facilità, e felicità tutti i concetti del nostro intelletto; già nell'auuenire non parrà necessità miserabile, ma più tosto consuetudine antica, ò assuefattione degli huomini quella di fraudare gli anni migliori della vita allo studio della Filosofia, per impiegarli nella grammatica delle lingue Greca, e Latina.

Io non saprò spiegare l'vtile grande, che apporterà quest'opera à tutti gli affettionati alla facoltà Matematica meglio, che con le parole di Dionisio Lambino, parlando di Cicerone à Carlo Rè Christianissimo: Quantum autem ex omnibus operibus fructum percepturi simus ex eo cognoscere licet, quod ex hoc volumine tantam ad litterarum studiosos vtilitatem peruenire videamus. Da per sè medesimo dichiara questo primo Tomo il commodo grande, che deuono apportare gli altri, quali sono già in ordine per seguire la stampa, se tù gradirai, e la buona intentione dell'Autore, e la mia passione di giouarti, e seruirti, la quale doucrà scusarmi, ò farmi compatire di qualunque eccettione, che per qualsiuoglia riguardo possa mai trouarsi in quest'opera, come prouenuta per mio solo difetto, sì come deuesi alla gloria dell'Autore tutto ciò, che vi trouerai di buono. Viui felice.

Imprimatur,
Si videbitur Reuerendiss. Patri Magistro Sacri Palatij Apostolici.
I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,
Fr. Raimundus Capisuccus, Sacri Palatij Apost. Mag. Ord. Præd.

CHE

CHE COSA SIA MATEMATICA, E quali sieno le sue parti.

MATEMATICA chiamiamo tutta quella parte di Filosofia, che riguarda la quantità.

Due generi di quantità hà per oggetto la Matematica, cioè la quantità continua, e la quantità discreta.

Qualunque estensione si chiama quantità continua, ed ogni moltitudine si dice quantità discreta.

La quantità continua si diuide in trè generi d'estensioni. La prima è quell'estensione, che costituisce lo spazio. La seconda è la duratione, che volgarmente vien chiamata tempo; e la terza è il moto successiuo, che si dice moto perenne.

Quindi è, che la quantità continua cade sotto la nostra cognitione, alle volte come cosa mobile, ed altre volte come cosa immobile; cioè la consideriamo immobile quando ci forma lo spatio, e mobile, quando la consideriamo come tempo, ò moto successiuo. Li Matematici però, benche intendano per quantità continua l'estensione materiale, con tuttociò la considerano astratta, cioè disgiunta, da ogni materia.

La quantità discreta si considera, ò assoluta per se, ouero comparatiua ad altra cosa.

Assoluta per se s'intende, quando quella moltitudine ò è considerata in astratto, come se si proferisse cento, mille &c. senz' altra espressione; ouero è considerata in concreto, cioè applicata à qualche oggetto, come se dicessimo, trenta Naui, mille huomini &c.

Comparatiua ad altro s'intende, quando quella moltitudine è comparata al suono, ò voce &c. come succede nelle cose della musica.

Finalmente la quantità si diuide in quantità rationale, ed irrationale.

Rationale si dice quella quantità, della quale, rispetto à qualche misura, se ne possono esprimere le parti; e quella quantità, della quale, in riguardo à qualche misura, non se ne possono esprimere le parti, si chiama irrationale.

La Matematica si diuide in quattro generi di Dottrine, cioè Geometria, Aritmetica, Armonica, ed Astronomia.

La Geometria è scienza, la quale, col mezzo d'alcuni *notissimi* principij, dimostra tutte le passioni, ò proprietà, che accadono alla quantità continua immobile; onde insegna anco à misurare la grandezza della Terra, e di tutte l'altre cose materiali.

L'Aritmetica è scienza, che riguarda la quantità discreta, cioè la moltitudine assoluta per se, si riuolge intorno alle passioni numeriche, ed esplica l'arte di ben conteggiare.

L'Armonica è ſcienza, che riguarda la quantità diſcreta, cioè la moltitudine comparatiua ad altro, conſidera, ed eſplica l'Armonia, ò concento ſonoro.

L'Aſtronomia è ſcienza, che conſidera le paſſioni della quantità continua mobile, eſplica, e dimoſtra l'apparenze, e moti de'Corpi Celeſti.

Annotatione.

PErche, come s'è detto, la quantità ſi diuide in quantità continua, e diſcreta, delle quali la continua ſi diſtingue in mobile, ed immobile, e la diſcreta in aſſoluta per sè, e comparatiua ad altro; hauendo gl'Antichi Matematici conſiderato nella quantità queſti quattro accidenti, vollero, che la Matematica ſi diuideſſe in quattro ſoli membri; cioè, in Geometria, che riguarda la quantità continua immobile; in Aritmetica, che riguarda la quantità diſcreta, ò moltitudine aſſoluta per se; in Armonica, ò Muſica, che riguarda la quantità diſcreta comparatiua ad altro; ed in Aſtronomia, che conſidera la quantità continua mobile: Queſti quattro membri, ò parti (ciaſcuna delle quali riceue altre ſubdiuiſioni, come à ſuo luogo ſi dirà) ſi diuidono in ſpeculatiua, e pratica.

La ſpeculatiua è quella, che *riguarda ſolamente la dimoſtratione* delle *coſe; e la pratica è quella*, che riguarda ſemplicemente l'operatiua.

La Dimoſtratione ò è Theorematica, ouero Problematica.

La Dimoſtratione Theorematica è quella, che ne certifica delle paſſioni, ò proprietà d'vna, ò più quantità in qualche modo eſpoſte, ò ſcambieuolmente adattate; laonde il Theorema non è altro, ſe non che la dimoſtratione da farſi in qualche coſa propoſta, ſecondo vna data Ipoteſi.

La Dimoſtratione Problematica è quella, che ci rende certi della poſſibilità di coſtruire qualche coſa propoſta, e perciò il Problema è quello, che c'inſegna à ſoluere, per alcune quantità date, qualche coſa propoſta.

Delli Theoremi, e Problemi, alcuni ſi dicono elementi, altri elementari, ed altri ve ne ſono ſeparati dalla forza, e ſignificato di queſti.

Elementi ſi dicono quei Theoremi, e Problemi, che ſeruono per la coſtruttione, e dimoſtratione dell'altre coſe, cioè che ſono come principij ordinati à dimoſtrare, e coſtruire altri Theoremi, e Problemi, e che, ſenza quelli, tutte le altre coſe non ſi potrebbero coſtruire, e dimoſtrare.

Quei Theoremi, e Problemi ſi dicono elementari, li quali ſeruono alla coſtruttione, e dimoſtratione di molte altre coſe, ma non ſeruono così vniuerſalmente per la coſtruttione di tutte l'altre coſe, come ſi diſſe degl'Elementi.

Quel-

Quelli poi, che non seruono per la costruttione, e dimostrationedi più cose, nè dimostrano qualche cosa di cospicuo, sono fuori di questo nome elementari.

Doppo d'hauer definito, che cosa sia Theorema, e Problema, parmi à proposito, prima che si entri in altro, definire, che cosa sia Lemma, Scolio, Corollario, Porisma, Deduttione, Caso, ed Istanza.

Il Lemma è vn premesso, che si fà in aiuto alla propositione seguente.

Quando, in aiuto di qualche propositione di materia particolare, fà bisogno premettere qualche Theorema, ò Problema, che tratti d'altra materia, quel premesso da Matematici vien chiamato Lemma.

Lo Scolio denota vna breue espositione, ò interpretatione, ed alle volte qualche aggiuntione all'antecedente propositione.

Il Corollario è vna certa conseguenza, che si caua da quel che si è dimostrato nella propositione antecedente, diuersa da quello, che si è concluso in essa propositione.

Porismi, secondo gl'Antichi, sono certe propositioni, che si possono esporre in forma di Problemi, ed anco in forma di Theoremi; non sono assolutamente Problemi, ne meno Theoremi, ma tengono misto significato, che possono denotare, e l'vno, e l'altro.

Secondo i Moderni poi, per Porisma si prende qualche conclusione, che si caua dal problema risoluto, la quale non hà niente di commune con quello, che s'è proposto, e si prende come Theorema certo, e dimostrato.

La Deduttione, nel Problema, è il passaggio, che si fà dal proposto ad vn altro Problema, il quale serue di mezzo per la solutione del Problema proposto.

Il Caso è la traspositione della costruttione, ò dimostratione.

Nè i Problemi, e Theoremi, qualche volta vna cosa può accadere in varij modi, e perciò, secondo vn modo, si fà la costruttione, e dimostratione, che si richiede, come à suo luogo si dirà; e di nuouo, per ogn'altro modo, si fà parimente la costruttione, e dimostratione, che per lo più è differente dall'altra, e così verrà dimostrato quanto s'è proposto, secondo tutti i varij modi, e questi modi varij sono quelli, che si chiamano casi.

L'Istanza è quella, che impedisce tutt' il corso dell'oratione, opponendosi ò alla costruttione, ouero alla dimostratione, la quale non deue essere riceuuta per vera, ma bisogna rifiutarla, e dimostrare, che sia falsa.

Premessa la cognitione di quanto s'è detto, parmi tempo di dare principio alla spiegatione degl'Elementi d'Euclide, per esser quelli la base di tutto questo nostro corso di Matematica; e per procedere coll'ordine del medesimo Euclide, spiegheremo prima tutti li principij necessarij per l'intiera cognitione di questi Elementi, i quali si diuidono in trè generi, cioè, Definitioni, Postulati, & Assiomi.

Definitioni si chiamano, in Matematica, quei principij, che spiegano la natura delle cose, e li vocaboli dell'Arte.

Quei principij, li quali ſono per sè tanto noti, e chiari, che non hanno biſogno d'alcuna dimoſtratione, ſi che ſono conceduti da tutti per veri ſenz'alcuna dubitatione, ſi dicono Poſtulati.

Gli aſſiomi, ò communi ſentenze, ſono certe cognitioni dell'animo, che non ſolo in Matematica, ma in tutte l'altre Dottrine, ſono talmente manifeſte, & euidenti, che, chiunque ne concepiſce rettamente i vocaboli, per niſſuna ragione può diſſentire, e non riceuerli come veri, e reali.

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO PRIMO.

DEFINITIONI.

I.



L PVNTO è quello, che non hà parte alcuna, *cioè, che non occupa ſpatio alcuno.*

I I.

La linea è vna lunghezza ſenza larghezza.

I I I.

Gli eſtremi della linea ſono punti, *cioè, la linea terminata comincia dal punto, e finiſce nel punto.*

I V.

Di tutte le linee, che ſi poſſono ſtendere da punto à punto, la breuiſſima ſi chiama linea retta.

Quella poi, che non è la breuiſſima, ſi chiama linea curua.

V.

Superficie ſi chiama quella, che hà ſolamente lunghezza, e larghezza, *ouero il fluſſo laterale della linea ſi chiama ſuperficie.*

V I.

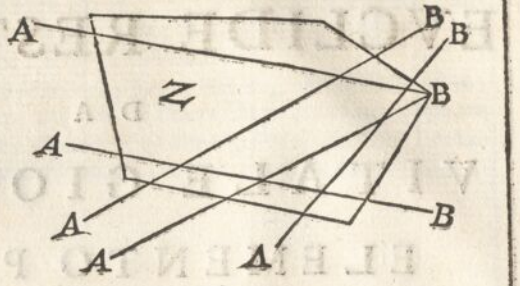
Gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

Perche la ſuperficie è il fluſſo laterale, ò tranſuerſale della linea, perciò la ſuperficie comincia dalla linea, e finiſce nella linea; onde gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

V I I.

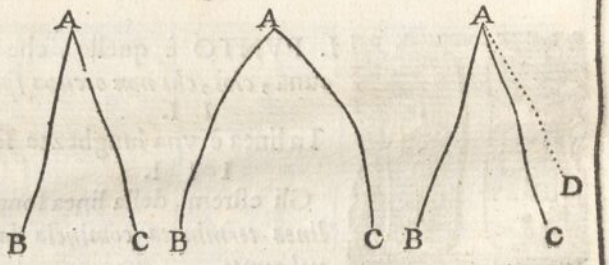
Quando vna retta linea è diſteſa, ſecondo tutte le poſiture, ſopra d'vna ſuperficie, ed in ogni poſitura giace con tutte le ſue parti in eſſa ſuperficie, quella ſuperficie, ſecondo Herone, la chiameremo ſuperficie piana.

S'intenda qualsiuoglia retta linea A B, distesa sopra la superficie Z, secondo qualunque positura; se tutte le parti della retta A B, sempre, ed in ogni positura, saranno nella superficie Z, all' hora la superficie Z la chiameremo superficie piana.



VIII.

La scambieuole inclinatione di due linee, poste in vn medesimo piano, e concorrenti frà di loro in modo, che nõ siano nella medesima dirittura, si chiama angolo piano.



Si concepiscano le due linee B A, C A, poste in vn medesimo piano, e concorrenti in qualche punto A in modo, che non facciano vna sola linea, ma l'vna sia inclinata all'altra: Hor quella scambieuole inclinatione, cioè quell'apertura, che le linee B A, C A costituiscono nel punto A, si chiama angolo piano.

Quindi è, che la quantità dell'angolo non consiste nella lunghezza delle linee B A, C A, mà nella scambieuole inclinatione, ò apertura, che costituiscono nel concorso A. Et è d'auuertirsi, che qualunque angolo piano si nota con tre lettere, come si vede nella figura, e quando si nomina, si fà col mezzo di quelle tre lettere, ponendo nel secondo luogo quella lettera, doue le linee fanno il concorso, cioè doue stà l'angolo, e cosi, volendo nominare vno delli notati angoli, si dirà l'angolo B A C, ò vero l'angolo C A B.

E anco da notarsi, che l'angolo non è lunghezza, ne superficie, ne meno corpo, mà è solamente il modo, col quale due linee sono scambieuolmente inclinate; e l'angolo piano si dice essere maggiore, ò minore, secondo che l'inclinatione, ò apertura di quelle linee, che lo contengono, è maggiore, ò minore; e così diremo, che quanto la linea A C è più inclinata alla linea A B, tanto l'angolo si dirà essere minore; e, quanto sarà meno inclinata, tanto l'angolo B A C si dirà essere maggiore.

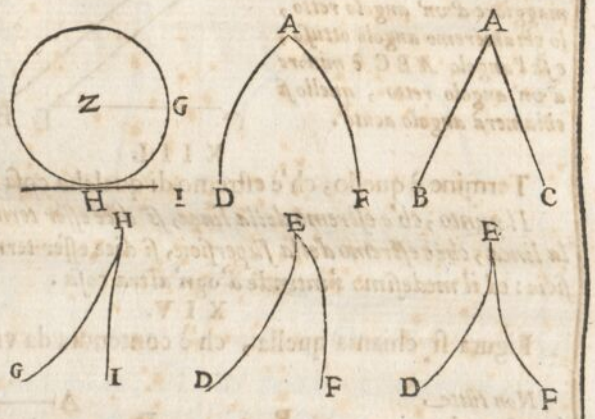
Oltre à ciò intendasi tirata la retta A D in modo, che faccia qualche angolo con la retta A C, la medesima retta A D farà angolo con la retta A B, donde è manifesto, che la retta A C, diuide l'angolo D A B nelli due angoli

li B A C, C A D, e perciò l'angolo di natura sua è diuisibile; hor se l'angolo è diuisibile per necessaria conseguenza sarà ancora quantità, e stimo tanto difficile à potersi concepire, che il diuisibile non sia quantità, per quanto è difficile ad intendere, che l'indiuisibile sia quantità: conchiudiamo dunque, che l'angolo benche non sia lunghezza, non superficie, ne corpo; contuttociò essendo cosa diuisibile non può lasciare di non essere quantità.

I X.

Quell'Angolo, ch'è contenuto da linee rette, si chiama angolo rettilineo.

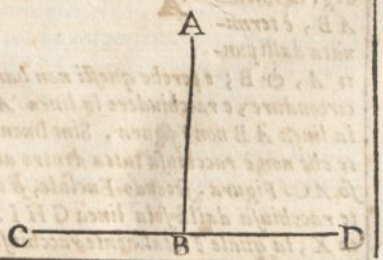
Quello ch'è contenuto da linee curue, si dice angolo curuilineo; e quello, ch'è contenuto da vna retta, e da vna curua, si chiama angolo mistilineo.



Nella figura seguente, l'angolo B A C, contenuto dalle rette B A, C A, si chiama angolo rettilineo, l'angolo D E F, contenuto dalle curue D E, F E, ouero D A, F A, si dice angolo curuilineo; e l'angolo G H I, contenuto dalla retta H I, e dalla curua G H, si chiama angolo mistilineo. Oltre à ciò, quando l'angolo è contenuto da vna linea curua, e da vna linea retta, e la retta continuata non sega in modo alcuno la linea curua, quell'angolo si dice angolo del contatto, come l'angolo G H I della figura Z, ed il punto H si chiama punto del contatto.

X.

Se vna retta linea cade sopra d'vn altra linea retta, e gli angoli, che fà dall'vna, e l'altra parte, sono frà di loro vguali, quelli si chiamano angoli retti; e la linea, che cade, si dice essere perpendicolare à quella, sopra la quale cade.



Cada la retta A B sopra la retta C D, e faccia l'angolo A B D vguale all'angolo A B C, in tal caso gli angoli A B D, A B C, si chiameranno angoli retti, e la linea retta A B, si dirà essere perpendicolare alla retta C D.

Ango-

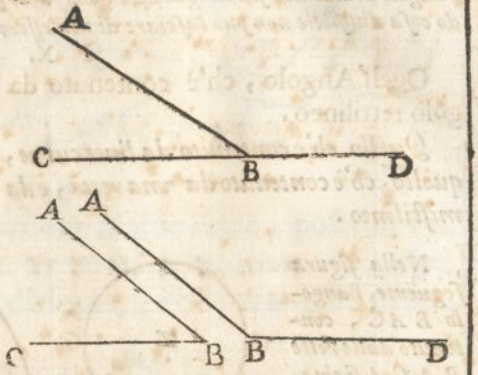
X I.

Angolo ottuſo ſi chiama quello, ch' è maggiore del retto.

X I I.

Quell' angolo, ch'è minore del retto, ſi chiamerà angolo acuto.

Cada la retta A B ſopra la retta C D, e faccia gli angoli A B D, A B C, frà di loro ineguali, cioè l'angolo A B D maggiore dell'angolo A B C; ſe l'angolo A B D ſarà maggiore d'vn' angolo retto, lo chiameremo angolo ottuſo; e ſe l'angolo A B C è minore d'vn' angolo retto, quello ſi chiamerà angolo acuto.



X I I I.

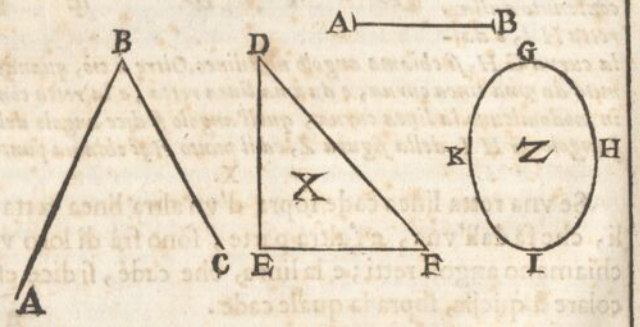
Termine è quello, ch'è eſtremo di qualche coſa.

Il punto, ch'è eſtremo della linea, ſi dice eſſer termine della linea; la linea, che è eſtremo della ſuperficie, ſi dice eſſer termine della ſuperficie: ed il medeſimo s'intende d'ogn'altra coſa.

X I V.

Figura ſi chiama quella, ch'è contenuta da vno, ò più termini.

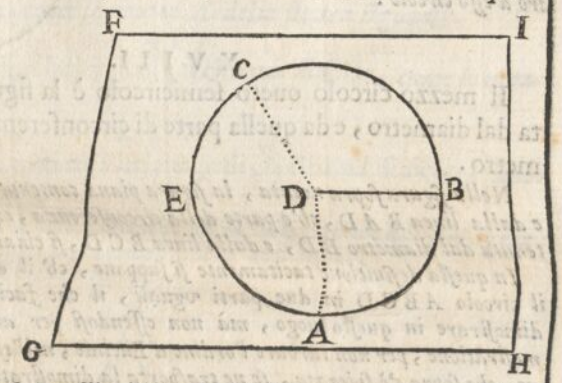
Non tutte le coſe, che hanno termini, ſi chiamano figure, ma ſolo quelle, che ſono circondate, e totalmente racchiuſe dentro à i ſuoi termini. v. g. la linea A B, è terminata dalli punti A, & B; e perche queſti non hanno eſtenſione alcuna, perciò non poſſono circondare, e racchiudere la linea A B; e, ſecondo il ſenſo della definitione, la linea A B non è figura. Similmente, la ſuperficie A B C non è figura, ſtante che non è racchiuſa tutta dentro alli ſuoi termini, ma è indeterminata verſo A C. Figura, ſecondo Euclide, ſi chiama la notata Z, la quale è totalmente racchiuſa dalla ſola linea G H I K; come anco ſi chiama figura la notata X, la quale è totalmente racchiuſa dentro i termini D E, E F, F D.



X V.

Il circolo è vna figura piana, contenuta da vna ſola linea, che ſi chiama circonferenza, alla quale tutte le rette linee, che dal punto di mezzo vi cadono, ſono frà di loro vguali.

In queſta definitione Euclide c'inſegna, che coſa dobbiamo intendere per circolo, e dice; ch'ogni qual volta s'hauerà vna figura piana, contenuta da vna ſola linea, che chiameremo circonferenza, e tutte le rette linee, tirate dal punto di mezzo alla circonferenza, ſaranno frà di loro vguali, quella figura ſi chiamerà circolo: laonde, acciòche quella figura ſia circolo, è neceſſario che habbia tre conditioni, cioè; la prima, che ſia figura piana; la ſeconda, che ſia contenuta da vna ſola linea, come la notata A B C, la quale ſi chiama circonferenza; e la terza, che tutte le rette linee, come D A, D B, D C, tirate dal punto di mezzo D, alla circonferenza, ſiano frà di loro vguali. Quando ſi troverà dunque vna figura, che habbia le tre antedette conditioni, quella ſi chiamerà circolo.



Il Signor Gio: Alfonſo Borelli, imitando Euclide nella definitione della Sfera, pone la definitione del Circolo nel ſeguente modo.

La figura piana deſcritta dalla reuolutione d'vna terminata retta linea, intorno ad vno delli ſuoi eſtremi fiſſo immobile, fin che ritorna nel luogo d'onde partì, ſi chiamerà circolo, e la linea deſcritta dall'eſtremo mobile di quella retta linea, ſi chiamerà circonferenza di circolo.

Cioè, ſe concepiremo immobile vno degli eſtremi di qualunque retta D C, come l'eſtremo D, intorno al quale, nel piano F G H I, ſia reuoluta la retta D C, fin che ritorna nel luogo, d'onde partì, ſarà deſcritta la figura piana A B C E, la quale hà le tre conditioni antedette, cioè; ſarà figura piana, ſtante che la reuolutione è fatta nel piano F G H I, ſarà contenuta dalla ſola linea A B C E, diſegnata dall'eſtremo C, che ſi chiama circonferenza, e tutte le rette D C, D A, D B &c. ſono frà di loro vguali, poiche rappreſentano la longhezza della retta D C in tutti i ſiti del piano F G H I, mentre nella ſua reuolutione deſcriſſe il circolo A B C.

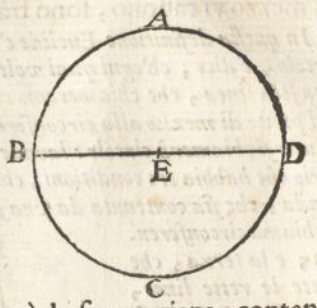
X V I.

Quel punto, intorno al quale ſi riuolſe quella retta linea, che deſcriſſe il circolo, ſi chiama centro del medeſimo circolo, che, nella figura antecedente, *ſarà il punto D.*

XVII.

Ogni retta linea, che passa per il centro del Circolo, e termina con ambi gli estremi nella circonferenza del medesimo circolo, si chiama diametro del Circolo.

Per il centro E, del circolo ABCD, passi qualunque retta BED, e concorra con la circonferenza del circolo da ambe le parti in B, & D, sarà la retta BD quella, che chiamaremo diametro d'esso circolo.



XVIII.

Il mezzo circolo ouero semicircolo è la figura piana, contenuta dal diametro, e da quella parte di circonferenza, detratta dal diametro.

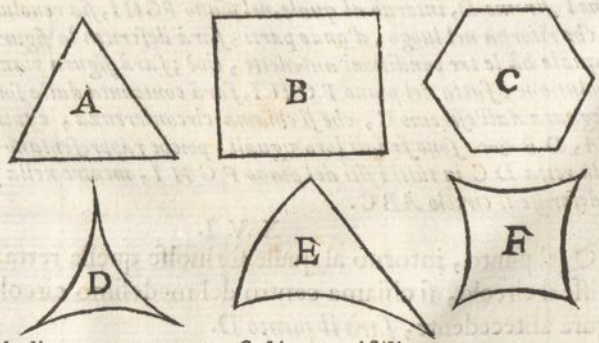
Nella figura sopra notata, la figura piana contenuta dal diametro BD, e dalla linea BAD, ch'è parte della circonferenza, ouero quella, ch'è contenuta dal diametro BD, e dalla linea BCD, si chiama mezzo circolo.

In questa definitione tacitamente si suppone, ch' il diametro BD diuida il circolo ABCD in due parti vguali, il che facilmente si potrebbe dimostrare in questo luogo, mà non essendosi per anco parlato della dimostratione, per non turbare l'ordine d'Euclide, nell'esporne quì la definitione, che sopra s'è spiegata, se ne trasporta la dimostratione dopo la terza propositione del primo libro.

XIX.

Le figure, che sono contenute da linee rette, si dicono rettilinee; quelle, che sono contenute da linee curue, curuilinee; e quelle, che sono contenute da linee rette, e da linee curue, si dicono mistilinee.

Nella figura seguente, le notate A, B, & C, che sono contenute da linee rette, si dicono rettilinee; le notate F, & D, curuilinee; e la notata E, ch'è contenuta da linee curue, e rette, si chiama mistilinea.



Delle

XX.

Delle figure piane quella, ch'è contenuta da tre sole linee, si dice trilatero, ouero triangolo; *come le notate A, D, E.*

XXI.

Quella, ch'è contenuta da quattro linee, si chiama quadrilatero, ò quadrangolo; *come le notate B, F.*

XXII.

E se sarà contenuta da più di quattro linee, si chiamerà moltilatero; *come la notata C.*

XXIII.

Delle figure trilatere quella, che hà tre lati vguali, si chiama triangolo equilatere, *come la notata A. della figura seguente.*

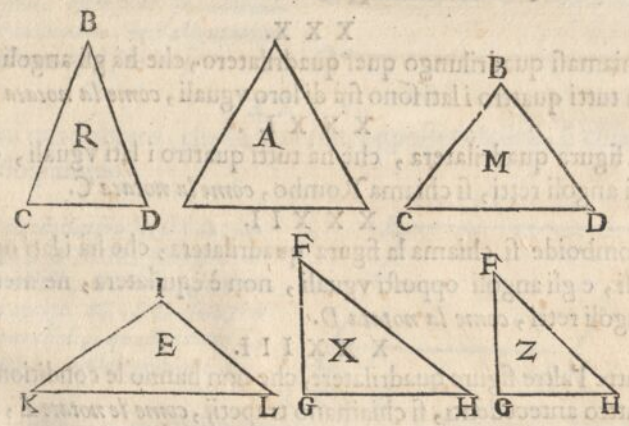
XXIV.

Quella che hà due lati vguali, si chiama isoscele, *come le notate R M Z.*

XXV.

E quella, che hà tutti tre i lati ineguali, si chiama scaleno, *come le notate X, ed E.*

Sin quì Euclide hà definito i triangoli per la comparatione de'i lati, e conseguentemente li definisce per la comparatione degl'angoli.



XXVI.

Ogni triangolo, che haurà vn'angolo retto, si chiama triangolo rettangolo, *come li notati X, Z.*

XXVII.

Se hauerà vn'angolo ottuso, si dirà ambligonio, *come il notato E.*

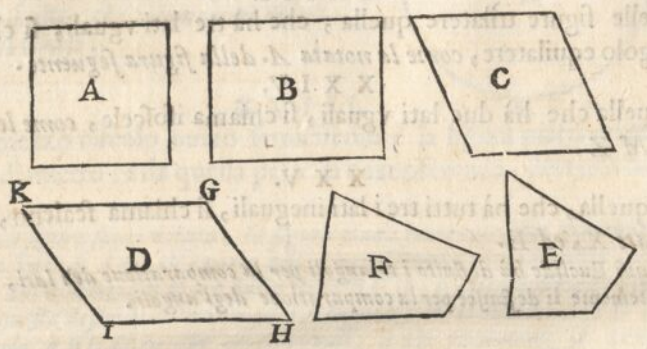
XXVIII.

E se tutti tre gli angoli saranno acuti, si chiamerà triangolo ossigonio, *come li notati A, R, M.*

D'onde è manifesto, ch'il triangolo scaleno può essere rettangolo, ed ambligonio; il triangolo isoscele può essere ambligonio, ed ossigonio.

XXIX.

Delle figure quadrilatere quella, che hà i quattro lati vguali, e tutti gli angoli retti, si chiama quadrato, *come la notata A.*



XXX.

Chiamasi quadrilungo quel quadrilatero, che hà gli angoli retti, e non tutti quattro i lati sono frà di loro vguali, *come la notata B.*

XXXI.

La figura quadrilatera, che hà tutti quattro i lati vguali, e non hà gli angoli retti, si chiama Rombo, *come la notata C.*

XXXII.

Romboide si chiama la figura quadrilatera, che hà i lati opposti vguali, e gli angoli opposti vguali, non è equilatera, ne meno hà gli angoli retti, *come la notata D.*

XXXIII.

Tutte l'altre figure quadrilatere, che non hanno le conditioni delle quattro antecedenti, si chiamano trapetij, *come le notate E, F.*

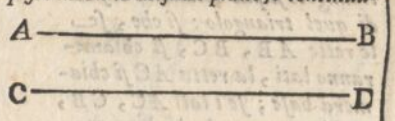
XXXIV.

Due rette linee, che sono in vn medesimo piano, e continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai scambieuolmente s'auuicinano, ò allontano, le chiameremo Rette linee parallele.

Spiega Euclide la natura delle rette parellele, per la negatiua del loro scambieuole concorso, come è manifesto da quel, che definisce con le seguenti parole.

Due

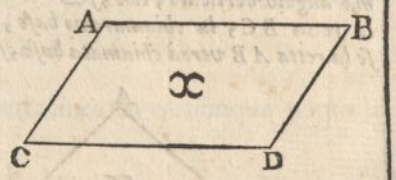
Due rette linee, che diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate in infinito dall'vna, e l'altra parte non concorrono, ſi chiameranno rette linee parallele. *Mà perche ſi trouano alcune linee, le quali diſteſe in vn medeſimo piano, e, continuate in infinito, ſempre ſcambieuolmente s'auuicinano, e mai concorrono, benche queſte ò ſono due linee curue, ouero vna linea retta, ed vna curua, come à ſuo luogo ſi dimoſtrerà, e le linee delle quali parla Euclide, ſono linee rette; con tutto ciò, dandoſi in Natura due linee in vn medeſimo piano, le quali, continuate in infinito, ſempre s'auuicinano, e mai concorrono, cade in dubio, ſe due rette linee diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate mai concorrono, habbiano queſta paſſione d'auuicinarſi, ò diſcoſtarſi ſcambieuolmente nella loro infinita eſtenſione, il che ſuccedendo biſognarebbe fare concetto diuerſo da quello, che habbiamo delle rette parellele: hor, acciòche la definitione delle rette parallele non ſia mancante, è neceſſario ſpiegarui la loro propria natura, che è di non auuicinarſi, ne ſcoſtarſi in niſſun luogo della lor'eſtenſione, e, ſecondo tal difinitione, diriggere il metodo alle dimoſtrationi, attinenti agl'elementi di eſſe parallele; ed à queſt'effetto, ſeguendo la ſentenza di Poſſidonio, Gemini, e Proclo, hò ſtimato neceſſario mutare la definitione d'Euclide, ed, in ſuo luogo, porui la ſeguente. Due rette linee, che ſono in vn medeſimo piano, e, continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai ſcambieuolmente s'auuicinano, ò allontanano, le chiamaremo rette linee parallele; ſe poi ſia poſſibile, che ſi diano in Natura due rette linee come A B, C D le quali poſte in vn medeſimo piano, e continuate in infinito, in luogo alcuno della loro infinita eſtenſione ſcambieuolmente s'auuicinino, ne s'allontanino, lo dimoſtraremo à ſuo luogo.*



XXXV.

Ogni quadrilatero, che hauerà i lati oppoſti paralleli, ſi chiamerà Parallelogrammo.

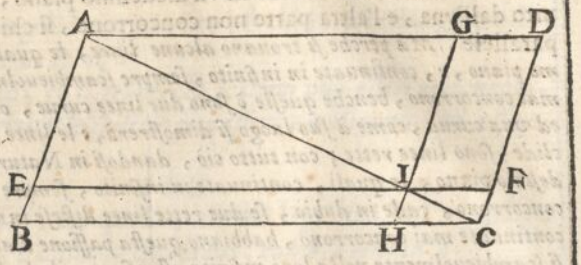
Nel quadrilatero X, ſe i due lati oppoſti A B, C D, ſono frà di loro paralleli, ed ancora gli altri due lati oppoſti AC, B D, ſono frà di loro paralleli, il quadrilatero X, ſi chiamerà parallelogrammo.



XXXVI.

Quando in vn parallelogrammo è tirato il diametro, ò diagonale, e due rette linee, parallele à due lati di eſſo parallelogrammo, ſi ſegano ſcambieuolmente in vn ſol punto col diametro, in modo che ſia diuiſo il detto parallelogrammo in quattro parallelogrammi, de'quali i due, che ſono ſegati dal diametro, ſi dicono ſtare intorno al diametro, e gli altri due, per li quali non paſſa il diametro, ſi chiamano complementi.

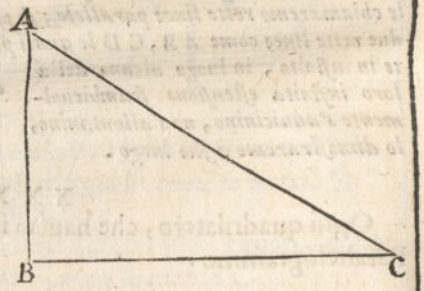
In ogni quadrilatere, la retta tirata da vn angolo all'angolo opposto, si chiama diametro, ouero diagonale, e considerando il parallelogrammo ABCD, il di cui diametro AC, nel quale si concepiscano tirate le rette EF, GH, cioè EF parallela al lato BC, e la retta HG, parallela al lato CD, le quali si seghino scambieuolmente col diametro AC nel solo punto I in modo, che tutto il parallelogrammo ABCD sia distribuito in quattro parallelogrammi AEIG, IHGF, EBHI, GIFD, li due AEIG, IHGF, che sono segati dal diametro AC, si diranno stare intorno al diametro AC, e gli altri due EBHI, GIFD, i quali non sono segati dal diametro AC, si chiameranno complementi.

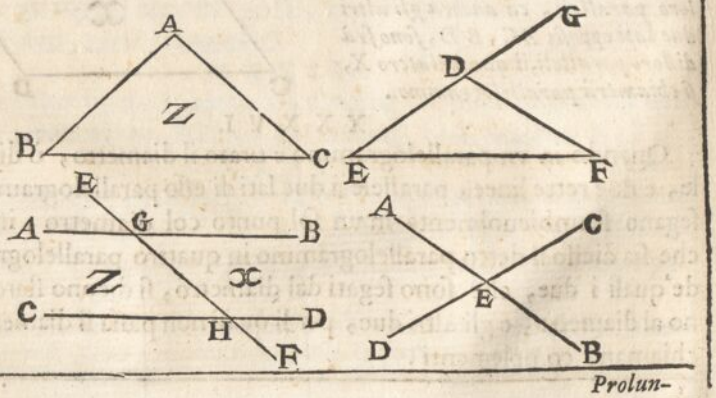


ANNOTATIONE.

1. *Ogni lato di qualunque triangolo si può chiamare base di quel triangolo: si che, se le rette AB, BC, si chiameranno lati, la retta AC si chiamerà base; se i lati AC, CB, si chiameranno lati, la retta AB, sarà la base &c.*

2. *In qualunque triangolo, l'angolo opposto alla base si chiama angolo verticale; cioè, se la retta BC, la chiamaremo base, l'angolo verticale sarà il notato A; e se la retta AB verrà chiamata base, sarà C l'angolo verticale.*





Prolun-

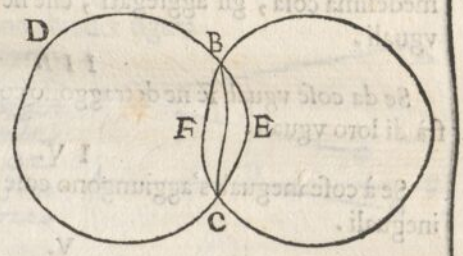
3. *Prolungato vn lato di qualunque triangolo D E F, come il lato E D, verſo G, l'angolo G D F ſi chiamerà angolo eſterno, e li due angoli D E F, D F E, ſi diranno angoli interni, ed oppoſti, riſpetto all' angolo eſterno G D F.*

4. *Se due rette linee, come A B, C D, ſono ſegate in qualunque modo da vn'altra retta E F, tutto quello, che ſi vede dalla retta E F verſo X, ſi dice eſſere da vna medeſima parte; e tutto quello, ch'è dalla retta E F verſo Z, ſimilmente ſi dice eſſere da vna medeſima parte.*

Oltre à ciò, gli angoli C H G, B G H ſi dicono eſſere alterni: e ſimilmente gli angoli A G H, D H G ſi dicono angoli alterni: l'angolo poi E G B, ſi chiama angolo eſterno; e l'angolo G H D, interno, ed oppoſto, riſpetto all'eſterno E G B; come anco gli angoli F H D, F H C ſono eſterni; e gli angoli H G B, H G A ſi dicono interni, ed oppoſti. Finalmente gli angoli B G H, D H G, ſi dicono interni, e dalla medeſima parte X: come anco gli angoli A G H, C H G, ſono interni, e dalla medeſima parte Z.

5. *Quando due linee rette, come A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in qualche punto E, gli angoli A E C, D E B, ſi dicono al vertice; e ſimilmente gli angoli A E D, C E B ſi chiamano angoli al vertice.*

6. *I circoli, e circonferenze de' circoli, ſi dicono ſegarſi ſcambieuolmente, quando qualche parte dell'vno cade dentro dell'altro in modo, che habbiano vna commune parte.*



Si concepiſcano i circoli B F C, D B E C, talmente collocati in vn medeſimo piano, che qualche parte B E C F del circolo D B E C, cada dentro del circolo B F C in modo, che la portione B F C E ſia parte commune; in tal caſo i circoli, e loro circonferenze B F C, D B E C, ſi diranno ſegarſi ſcambieuolmente.

POSTVLATI.

I.

Ci ſi conceda poter tirare vna retta linea da qualunque punto à qualſiuoglia altro punto.

II.

Chẽ vna retta linea terminata ſi poſſa continuamente, e direttamente prolongare.

III.

Che intorno à qualſiuoglia centro, e con qualunque interuallo, ſi poſſa deſcriuere vn circolo.

IV.

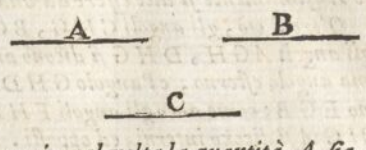
Che di qualunque quantità propoſta ſia poſſibile poterne immaginare, ò prendere vn'altra maggiore, ò minore.

ASSIOMI.

I.

Quelle cose, che sono vguali ad vna terza, sono ancora frà di loro vguali; e se vna delle vguali è maggiore, ò minore d'vna terza, l'altra delle vguali sarà maggiore, ò minore di quella medesima terza.

Siano esposte le quantità A, B, C; se A sarà vguale à C, e la quantità B sarà vguale alla medesima C, sarà manifesto, che le quantità A, & B, sono fra di loro vguali. In oltre, se le quantità A, & B, sono fra di loro vguali, ogni qual volta la quantità A sia maggiore di C, ancora B sarà maggiore di C; e se A sarà minore di C, ancora B sarà minore di C.



II.

Se à cose vguali s'aggiunghino cose vguali, ouero vna medesima cosa, gli aggregati, che ne vengono, sono frà di loro vguali.

III.

Se da cose vguali se ne detraggono cose vguali, *i rimanenti* sono frà di loro vguali.

IV.

Se à cose ineguali s'aggiungono cose vguali, gli aggregati sono ineguali.

V.

Se da cose ineguali se ne detraggono cose vguali, i rimanenti sono ineguali.

VI.

Le cose, che sono il doppio d'vna medesima cosa, sono frà di loro vguali.

VII.

Quelle cose, che ogn'vna da per se è la metà d'vn altra cosa, sono fra di loro vguali.

VIII.

Le cose, che scambieuolmente congruono insieme, sono frà di loro vguali.

IX.

Il tutto è maggiore della sua parte.

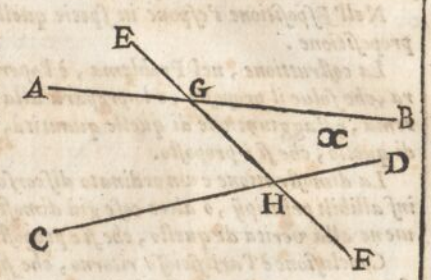
X.

Tutti gli angoli retti sono frà di loro vguali.

X I.

Se due rette linee sono segate da vn altra retta linea, e gli angoli interni da vna medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle continuate concorreranno da quella parte, doue sono gli angoli minori di due retti.

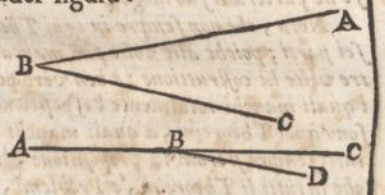
Nella figura seguente, siano le rette A B, C D, segate dalla retta E F, e li due angoli B G H, D H G, insieme giunti, siano minori di due angoli retti, vuole Euclide per concesso, che le rette A B, C D, continuate vadano à concorrere verso X. E benche questo assioma habbia di bisogno d'esser dimostrato, con tuttociò l'hò posto in questo luogo, per non turbare l'ordine d'Euclide, e la dimostratione si può vedere dopo la propositione 31. di questo Libro.



X I I.

Due rette linee non possono chiuder figura.

Le due rette A B, C B concorrenti in B non possono chiudere figura verso le note A, & C, senza distruggere il concetto delle rette linee: e benche questo assioma sia assai chiaro, con tutto ciò, per leuare ogni dubio, se ne pone la dimostratione dopo la terza propositione di questo.



X I I I.

Vna medesima retta linea non può essere parte commune di due rette linee, che scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura.

S'intendano le rette C B, D B, non nella medesima dirittura, le quali concorrino scambieuolmente in qualche punto B; se saranno continuate verso B, le loro continuationi non costituiranno la sola retta A B, in modo che A B sia parte di A C, e sia ancora parte della retta A B D; il che tutto si dimostrerà dopo la terza propositione di questo primo Libro.

Delle Parti, che compongono il Theorema, e Problema.

TVtti questi Elementi d'Euclide sono diuisi in Theoremi, e Problemi, de' quali i Theoremi riguardano la sola dimostratione delle cose, ed i Problemi l'operatiua, e dimostratione dell'operato, come à suo luogo fù definito.

Hor acciò che il Theorema, e Problema sia perfetto, deue costare di cinque parti; cioè Propositione, Espositione, Costruttione, Dimostratione, e Conclusione.

Nella propositione si propone in genere quello, che si vuol fare, e dimostrare.

Nell'Esposition s'espone in specie quello, che in genere fù proposto nella propositione.

La costruttione, nel Problema, è l'operatione, ò descrittione di quella figura, che solue il proposto, e lo prepara alla dimostratione da farsi; e, nel Theorema, è l'aggiuntione di quelle quantità, che bisognano per la dimostratione di quello, che si è proposto.

La dimostratione è vn ordinato discorso, col quale, mediante li primi, ed inf allibili principij, ò altre cose già dimostrate, per continuati sillogismi, si perutene alla verità di quello, che si è proposto fare, e dimostrare.

Conclusione è l'artificioso ritorno, che si fà alla propositione, col quale si conferma tutto quello, che si è fatto, e dimostrato.

Succede solamente nel Problema, che qualche volta, oltre le cinque sopranotate parti, sia necessaria la determinatione, la quale dichiara quando, e per qual ragione, come anco in quanti modi si può soluere il Problema, e di questa se ne parlerà à suo luogo.

Nota, che non sempre in ogni Theorema, ò Problema, si trouano queste sei parti; poiche alle volte può mancare l'esposition, e determinatione, ed altre volte la costruttione; è ben vero però, che pochissimi sono quei Problemi, à i quali manchi totalmente l'esposition, e determinatione; e pochissimi ancora sono quei Theoremi, à quali manchi la costruttione: è necessario però, che in tutti sempre si troui la propositione, la dimostratione, e la conclusione, stante che in tutti li Theoremi, e Problemi, è necessario prima conoscere quello, che si cerca; secondo dimostrare il medesimo, mediante li primi principij, ò altre cose dimostrate; e finalmente concludere quello, che si è fatto, e dimostrato.

La Dimostratione poi, ò è affirmatiua, ouero negatiua.

La Dimostratione affirmatiua è quella, con la quale, mediante li primi principij, ò altre propositioni dimostrate, si perutene direttamente alla conclusione di quello, che fù proposto fare, e dimostrare.

La Dimostratione negatiua (che si dice procedere per impossibile) è quando si prende il contrario di quello, che si vuole dimostrare per vero, e secondo tal'Ipotesi, procedendo per le cose concesse, si peruiene à qualche impossibilità, mediante la quale conosciamo quell'Ipotesi presa per vera essere falsa. E perche la verità, nelle dimostrationi Geometriche, ò stà nella cosa, che si propone, ouero nel contrario della cosa proposta, ritrouato che il contrario della cosa proposta sia falso, si conclude, che la cosa proposta necessariamente sia vera.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Propositione.

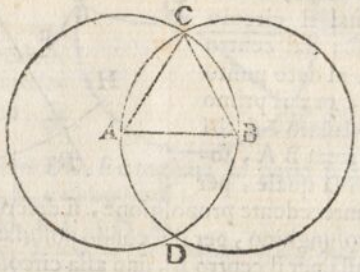
Sopra di qualunque data retta linea terminata, descriuere vn triangolo equilatere.

Esposition e

Sia data qualsiuoglia retta linea terminata A B, sopra la quale si voglia descriuere vn triangolo equilatere.

Costruttione.

Si faccia centro in vno degli estremi della retta data A B, come in A, e coll'interuallo A B, per il terzo postulato, si descriua il circolo C B D: di nuouo si faccia centro nell'estremo B, e col medesimo interuallo B A, per il terzo postulato, si descriua il circolo C A D. Perche A B è semidiametro del circolo C B D, ed ancora del circolo C A D, perciò cade dentro dell'vno, e l'altro circolo; per la qual cosa parte d'vn circolo cade dentro dell'altro, e per l'annotatione dopo la 36. definitione, i circoli, e loro circonferenze si segano scambieuolmente. Sia dunque la loro intersegatione doue si voglia, come in C, & D, dal punto C alli centri A, & B, per il primo postulato, si tirino le rette C A, C B. Dico che il trilatere A B C è triangolo equilatere.



Dimostratione.

Perche nell'antecedente costruttione, intorno al centro A, s'è descritto il circolo C B D, e le rette linee A B, A C, sono tirate dal medesimo centro A alla medesima circonferenza C B D, per la decimaquinta definitione, la retta A C è vguale alla retta A B. Similmente, perche il punto B, nella costruttione, è fatto centro del circolo C A D, e le rette linee B A, B C sono tirate dal medesimo centro B alla medesima circonferenza C A D, per la decimaquinta definitione, sarà la retta C B, vguale alla retta A B; mà fù dimostrata la retta A C vguale alla medesima A B, sarà, per il primo assioma, A C vguale alla retta C B; e tutti trè i lati A B, B C, C A sono frà di loro vguali. Quel triangolo, che hà trè lati vguali, per la vigesimaterza definitione, è triangolo equilatere; mà il triangolo A B C, per quel, che s'è dimostrato, hà trè lati vguali; il triangolo dunque A B C è triangolo equilatere.

Conclusione.

Per la qual cosa, sopra qualunque data retta linea terminata, si può descriuere vn triangolo equilatere, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

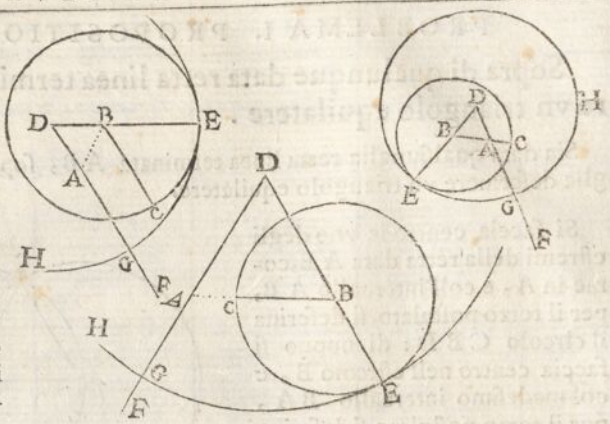
Propositione.

Dato vn punto, e data vna retta linea terminata, si può dal dato punto tirare vna retta linea vguale alla retta data.

Esposition e

Sia dato il punto A, e la retta linea terminata B C, si vuole dal dato punto A tirare vna retta linea vguale alla retta data B C.

Costruttione.



Si faccia centro in vno degli estremi della retta data B C, come nel punto B, e coll'interuallo B C, per il terzo postulato, si descriua il circolo E C; dal centro B, al dato punto A, per il primo postulato, si tiri la retta B A, sopra la quale, per l'antecedente propositione, si descriua il triangolo equilatere D A B; si prolunghino, per il secondo postulato, i lati D B, D A, cioè D B, che passa per il centro B, fino alla circonferenza in E, ed il lato D A, che passa per il punto dato, si prolunghi indeterminatamente, verso F; e, fatto centro in D, coll'interuallo D E, per il terzo postulato, si descriua il circolo E G H, la di cui circonferenza segarà la retta *indeterminata in* qualche punto G. Dico che la retta A G è *vguale alla data retta* B C.

Dimostratione.

Essendo per costruttione; *il punto D centro del circolo* E G H, e le *rette linee* D E, D G, *sono tirate dal centro* D alla medesima circonferenza E G H, per la decimaquinta definitione, la retta D E sarà vguale alla retta D G. In oltre, perche i lati D B, D A sono vguali (stante che sono lati del triangolo equilatere) detratto dalle vguali rette D E, D G, le vguali D B, D A, resta, per il terzo assioma, la retta A G, vguale alla retta B E. Finalmente, perche il punto B, per costruttione, è centro del circolo E C, e le rette B E, B C, sono tirate dal centro B, alla medesima circonferenza E C, per la decimaquinta definitione, la retta B C sarà vguale alla retta B E; ma fù mostrata la retta A G vguale alla medesima retta B E, per il primo assioma, la retta A G sarà vguale alla retta B C.

Conclusione.

Per la qual cosa, dal dato punto A si è tirata la retta A G vguale alla data retta B C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Propositione.

Date due rette linee ineguali, dalla maggiore tagliarne vna parte vguale alla minore.

Esposition

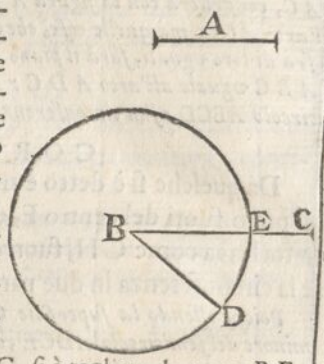
Sia la minore delle rette date A, e la maggiore B C; Dico esser possibile dalla maggiore B C tagliarne vna parte vguale alla minore A.

Costruttione.

Da vno delli estremi della maggiore data B C, come dal punto B, possiamo, per l'antecedente propositione, tirare vna retta linea, vguale

alla

alla data minore A; se dunque in questo luogo concepiremo fatto quanto s'è detto nell'antecedente propositione, e la retta tirata dal punto B, vguale alla minore A, sia BD; fatto centro in B, coll'Interuallo BD, si descriua il circolo DE, il quale segarà la maggiore BC in qualche punto E. Dico, che la retta BE sarà vguale alla data minore A.



Per la definitione del circolo, la retta B E è vguale alla retta B D, ma, per costruttione, la retta A è vguale alla medesima B D, sarà, per il primo assioma, la parte BE vguale alla minore A. Dimostratione.

Per la qual cosa dalla maggior retta BC, si è tagliata la parte B E, vguale alla minore A, che era da farsi, e dimostrarsi. Conclusione.

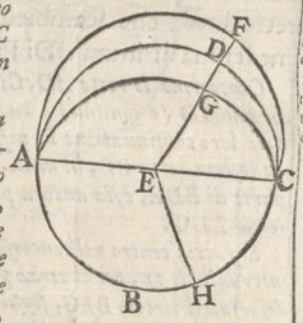
ANNOTATIONE.

Per non lasciare indietro cos'alcuna, che non sia esattamente dimostrata, come ancora per facilitare la quarta propositione, premetto le seguenti dimostrationi.

I.

Ogni diametro sega il circolo, è circonferenza di quello, in due parti vguali. Questa dimostratione è di Talete Milesio, e proua quel, che si suppone nella decima ottaua definitione.

Sia qualunque circolo ABCD, il di cui centro E, ed il diametro A C. Dico che il Diametro A C diuide il circolo, e la circonferenza ABCD in due parti vguali.

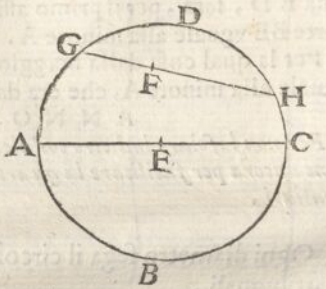


Intorno al Diametro AC s'intenda riuoluta la parte ABCE in modo che cada sopra del rimanente ADCE: ò il piano ABCE cade dentro della figura ADCE, come fà la notata A G C, ouero cade fuori, come la notata AFC, ò pure congrue con la figura ADC. Supposto prima, che cada fuori; si prenda nell'arco AFC qualunque punto F, e nell'arco ABC qualunque punto H, e dal centro E alli punti F, H, per il primo postulato, si tirino le rette EH, EF: la retta EF, segarà la circonferenza A D C in qualche punto D, e per la decima quinta definitione, le rette ED, EH, che sono tirate dal centro E alla circonferenza BCD, sono frà di loro vguali; e perche tutte le rette, tirate dal centro E alla circonferenza ABC, per la decimaquinta definitione, sono frà di loro vguali, e la figura ABC, riuoluta occupa il sito AFC, in conseguenza le rette EF, EH sono frà di loro vguali; ma la retta ED è dimostrata vguale alla medesima retta E H, per il primo assioma, la retta E D sarà vguale alla retta EF, la parte sarebbe vguale al suo tutto, che per il nono assioma è impossibile; non dunque cade fuori. Supposto di nuouo, che cada di dentro come la notata AGCE: sarà EG vguale ad EH; mà la retta ED è stata dimostrata vguale ad EH; sarà, per il primo assioma, la retta E G vguale ad ED, la parte vguale al suo tutto, che per il nono assioma, è impossibile; non dunque cade

di dentro, per la qual cosa riuoluta la figura A B C E, intorno al diametro A C, congruerà con la figura A D C E, dal che l'arco A B C congruerà con l'arco ADC; mà quelle cose, che congruono insieme, per l'ottauo assioma, sono frà di loro vguali, sarà il piano A B C E vguale al piano A D C E, e l'arco A B C vguale all'arco A D C: Per la qual cosa il diametro A C diuide il circolo ABCD, e sua circonferenza, in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi

COROLLARIO.

Da quelche si è detto è manifesto, che se per qualunque punto F preso fuori del centro E, di qualche circolo A B C D, passi vna retta linea come G H, fuori del centro E, questa segarà il circolo, e la circonferenza in due parti ineguali.

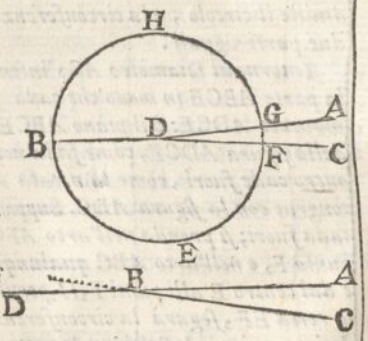


Poiche essendo la superficie GFHD minore del semicircolo ADCE, ouero A BCE, sarà molto più minore della superficie GFHBA, & essendo la linea G DH minore della linea A D C, ouero A BC la medesima sarà molto più minore della linea G B H.

I I.

Si dimostra il decimoterzo assioma.

Vna medesima retta linea non può essere parte commune di due rette linee, che scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura. Di Proclo.



Concorrino le rette AD, CD, in qualche punto D, e continuate ambedue verso B, la loro continuatione s'è possibile, sia la medesima retta BD, in modo che D B sia parte di BDA, e sia ancora parte della retta BDC.

Si faccia centro nel concorso D, ed all'interuallo B D, per il terzo postulato, si descriua il circolo BEG, segarà le rette B A, BC, come in G, ed F. e se non le sega, si prolunghino finche concorrano con la circonferenza in G, & F.

Perche la retta BDA passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, & G. per la decimasettima definitione la retta BG sarà diametro del circolo BEGH, e per l'antecedente dimostratione, diuide il circolo BEGH in due parti vguali, dal che la figura BEGD sarà la metà del circolo BEGH. Similmente, perche la retta BDF passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed F, per la decimasettima definitione, la retta BDF è diametro del circolo BEFH, e per l'antecedente dimostratione, diuide il circolo in due parti vguali; per la qual cosa la figura BEFD sarà la metà del circolo BEFH: ma si disse, che la figura BEGD è metà del medesimo circolo, sarà per il settimo assioma, la figura BEFD vguale alla figura BEG D, la parte

sa-

sarebbe vguale al tutto, che per il nono assioma, è impossibile; non dunque la retta BD è parte commune delle rette BDG, BDF, ed in conseguenza due rette, che concorrono, e non sono nella medesima dirittura, non è possibile, che habbiano vna parte commune, come fù proposto dimostrare.

COROLLARIO.

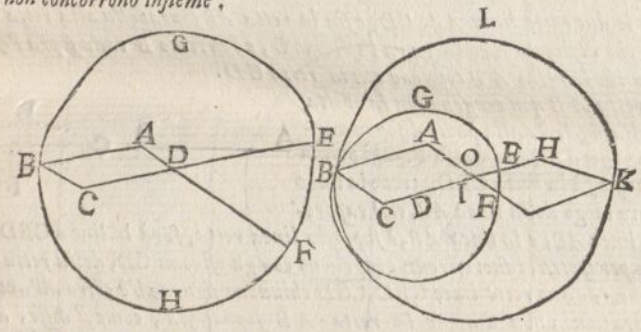
Da quel che s'è detto, è manifesto, che due rette linee, le quali scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura, continuate si segaranno nel punto del concorso.

Perche se le rette AB, CB, concorrenti in B, continuate non si segassero in B, la loro continuatione sarebbe vna sola retta, come BD, ed all'hora la retta DB sarebbe parte di DA, ed anco della retta DBC, ch'è contro l'antecedente dimostratione.

III.

Due rette linee, che scambieuolmente concorrono, è impossibile, che possano chiudere figura. Di Proclo.

Concorrino le rette linee AB, CB, in qualunque punto B. Dico che non possono chiudere figura verso A, & C, cioè che continuate le rette AB, CB, verso A, & C, quelle non concorrono insieme.



Concorrino s'è possibile, in qualche punto D, e fatto centro in D, coll'interuallo DB, per il terzo postulato, si descriua il circolo BGF, si prolunghino, per il secondo postulato, le rette BA, BCD, fino alla circonferenza in E, ed F.

Perche la retta BADF passa per il centro D, per la decimasettima definitione, sarà diametro del circolo BFE, e per la prima delle antecedenti dimostrationi, diuide la circonferenza del circolo in due parti vguali, dal che l'arco BGEF sarà la metà di tutta la circonferenza: Similmente, perche la retta BCDE passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed E, per la decimasettima definitione, la retta BCDE sarà diametro del medesimo circolo, e per la prima delle antecedenti dimostrationi, diuide la circonferenza del circolo BGEFH in due parti vguali; per la qual cosa l'arco BGE sarà la metà di tutta la circonferẽza del circolo BHFEG, ma l'arco BGEF, per quel, che s'è dimostrato, è la metà della medesima circonferenza, per il settimo assioma, sarà l'arco BGE vguale all'arco BGEF, la parte vguale al suo tutto, che per il nono assioma, è impossibile: non dunque due rette linee possono chiudere figura, ch'era da dimostrarsi.

Il P. Clauio rigetta vna nuoua istanza, ed è, che le rette BAO, BCO nella seconda figura, continuate possino andare ad vnirsi in qualche punto K, nella circonerenza del circolo BLK, ed il modo da rigettarla è il seguente.

Si

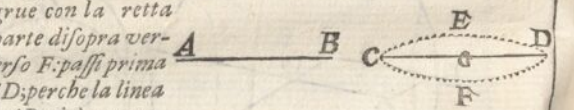
Si suppone anco che siano diuersi

Si prenda nella retta BCO qualunque punto D; essendo la retta BCO, per la decimaquinta definitione, vguale alla retta OHK, sarà BD minore di DHK; si che, fatto centro in D, e coll'interuallo DB, si descriua il circolo BGF, segarà le rette AOI, COH nelli punti, come E, ed F; Perche il punto D è centro del circolo BGEF, la retta BDE sara diametro di esso circolo, e per la prima delle antecedenti, dimostrationi la linea BGE sarà la metà della circonferenza di tutto il circolo: In oltre perche il punto A è fuori del centro D, e la retta BAF, che sega il circolo, passa per il punto A, per il corollario alla citata prima dimostratione, segarà il circolo DGEF indue parti inuguali, di cui la minor parte sarà il piano BGEFA, e la linea BGEF sarà minore della metà di tutta la circonferenza di esso circolo, cioè minore della linea BGE, il tutto minore della sua parte, ch'è impossibile. Non dunque le rette BAF, BCH, continuate concorrono nella circonferenza B L K nel solo punto K, come fù proposto di mostrare.

I V.

Se di due rette linee, vna sia soprapoſta all'altra, e gl'eſtremi dell'vna cadono ſopra gl'eſtremi dell'altra, quelle due rette linee congrueranno inſieme.

Siano le due rette linee AB, CD, e sia la retta AB soprapoſta alla retta CD, e suppoſto che l'eſtremo A cada ſopra l'eſtremo C, e l'eſtremo B cada ſopra l'eſtremo D. Dico che la retta A B congrue con la retta C D.



Se la retta A B non congrue con la retta CD, ò quella passerà dalla parte disopra verſo E, ouero passerà di sotto verso F: passi prima di sopra, come fà la linea CED; perche la linea CED stà in luogo della linea AB, cioè rappreſenta la linea AB, e la linea AB, è suppoſta linea retta, sarà la linea CED linea retta; ma, per ipoteſi, i suoi eſtremi congruono con gli eſtremi CD, della retta CD, in conſeguenza, le due rette linee CED, CGD chiudono figura, ch'è cõtro all'antecedente dimoſtratione; non dunque la retta A B soprapoſta, come si diſſe, alla retta CD, passa di sopra. Nell'iſteſſo modo si dimoſtrerà, che non passa di sotto, e perciò congrue con la retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.

C O R O L L A R I O.

Da quel, che s'è dimoſtrato, è manifeſto, che ſe le rette AB, CD ſono frà di loro vguali, ſoprapoſta l'vna all'altra in modo, che il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D, la retta A B congruerà con la retta CD.

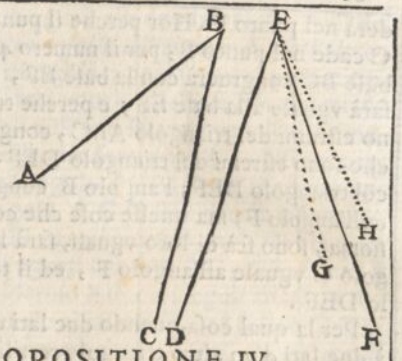
V.

Se di due vguali angoli rettilinei A B C, D E F, vno sarà ſoprapoſto all'altro, come l'angolo ABC ſopra l'angolo DEF, in modo che la retta BA cada ſopra la retta ED, ed il punto B nel punto E. Dico che la retta BC cade ſopra la retta EF e l'angolo A B C cõgrue coll'angolo DEF.

Se la retta B C non cade sopra la retta E F, ò caderà dentro all'angolo D E F, ouero fuori. Cada prima fuori, come fà la retta E H, perquel, che si diſſe nel fine dell'ottaua definitione, l'angolo DEF sarà minore dell'angolo DEH, mà l'angolo DEH rappreſenta l'angolo ABC, sarà l'angolo DEF minore dell'an-

golo

golo ABC, ch'è contro all'ipotesi, mentre fù supposto l'angolo DEF vguale all'angolo ABC: non dunque la retta BC cade fuori dell'angolo DEF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che non cade dentro, come fà la retta EG, e perciò la retta BC cade sopra la retta EF. Per la qual cosa gli angoli ABC, DEF, soprapposti l'vno all'altro, congrueranno insieme, ch'era da dimostrarsi.

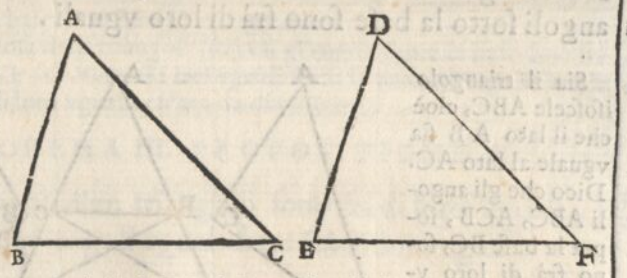


THEOREMA I. PROPOSITIONE IV.

Propositione.

Se due lati d'vn triangolo rettilineo sono vguali à due lati d'vn altro triangolo rettilineo, ogn'vno al suo relatiuo, e l'angolo contenuto dalli due lati dell'vno, sia vguale all'angolo contenuto dalli due lati dell'altro; sarà la base dell'vno vguale alla base dell'altro, li rimanenti due angoli dell'vno saranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro; *cioè quelli angoli saranno frà di loro vguali, che sono opposti à i lati vguali; ed il triangolo* sarà vguale al triangolo.

Espositione



Siano li triangoli rettilinei ABC, DEF, e sia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC, vguale al lato DF, l'angolo A, vguale all'angolo D. Dico, che la base BC sarà vguale alla base EF, l'angolo B vguale all'angolo E, (che sono opposti alli vguali lati AC, DF) l'angolo C vguale all'angolo F (che sono opposti alli vguali lati AB, DE) e che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF.

Costruttione. Dimostratione.

Si concepisca soprapposto il triangolo ABC al triangolo DEF in modo che il lato AB cada sopra del lato DE; perche l'interuallo delli estremi A B, si suppone vguale all'interuallo delli estremi D, E, posto il punto A nel punto D, e l'estremo B nell'estremo E, la retta AB, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, congruerà col lato DE; ed essendo l'angolo A vguale all'angolo D, per il numero 5. della citata annotatione, la retta AC caderà sopra la retta DF, e l'angolo A congruerà coll'angolo D: e perche la retta AC è posta vguale alla retta DF, il punto C ca-

derà nel punto F. Hor perche il punto B cade nel punto E, ed il punto C cade nel punto F, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, la baſe BC congruerà con la baſe EF, e per l'ottauo Aſſioma, la baſe BC ſarà vguale alla baſe EF; e perche tutti trè i lati AB, BC, CA, che ſono eſtremi del triangolo ABC, congruono con i trè lati DE, EF, FD, che ſono eſtremi del triangolo DEF, tutto il triangolo ABC congruerà col triangolo DEF; l'angolo B congruerà coll'angolo E, e l'angolo C coll'angolo F; ma quelle coſe che congruono inſieme, per l'ottauo Aſſioma, ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F, ed il triangolo A B C vguale al triangolo DEF.

Concluſione. Per la qual coſa, quando due lati d'vn triangolo rettilineo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo rettilineo, e l'angolo contenuto &c. ch' era da dimoſtrarſi.

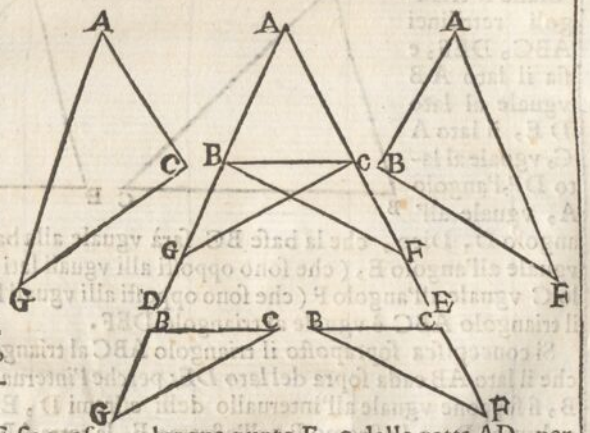
ANNOTATIONE.

Nelle coſe ſeguenti ſempre che ſi nominerà il triangolo, ſenz'altra conditione, ſi deue intendere triangolo rettilineo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE V.

Propoſitione. **Delli triangoli iſoſceli, gl'angoli ſopra la baſe ſono frà di loro vguali, e continuati i lati vguali verſo la baſe, gli angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.**

Eſpoſitione Sia il triangolo iſoſcele ABC, cioè che il lato A B ſia vguale al lato AC. Dico che gli angoli ABC, ACB, ſopra la baſe BC, ſono frà di loro vguali. E continuati i lati vguali A B, AC verſo E, & D, li angoli D B C, E C B ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.



Coſtruttione. Nella retta CE ſia preſo qualunque punto F, e dalla retta AD, per la terza propoſitione, ſi tagli la parte AG, vguale alla retta AF, ſi tirino le rette GC, BF.

Dimoſtratione. Si conſiderino i triangoli ABF, ACG; perche il lato A G è fatto vguale al lato AF, ed il lato AC è ſuppoſto vguale al lato AB, li due la-

ti FA, AB, del triangolo A B F, sono vguali alli due lati G A, A C del triangolo AGC, l'angolo A dell'vno è vguale all'angolo A dell'altro, stante che è commune à tutti due li triangoli, e, per la quarta propositione, la base GC, del triangolo GAC sarà vguale alla base BF, del triangolo ABF, ed i rimanenti due angoli dell'vno saranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli, che sono opposti à i lati vguali; e perciò l'angolo ABF sarà vguale all'angolo ACG, stante che sono opposti alli vguali lati AG, AF; e l'angolo A G C sarà vguale all'angolo AFB, che similmente sono opposti alli vguali lati AB, AC. Hor se dalli vguali lati AG, AF, se ne leuano gli vguali lati AB, AC, resta il lato B G vguale al lato CF. In oltre si considerino li due triangoli BGC, FCB: perche il lato BG è stato mostrato vguale al lato C F, ed il lato G C vguale al lato BF, i due lati B G, G C, del triangolo B G C, sono vguali alli due lati CF, FB del triangolo FCB, l'angolo BGC fù dimostrato vguale all'angolo CFB, e, per la quarta propositione, la base B C dell'vno sarà vguale alla base CB dell'altro, cioè sarà base commune, e li rimanenti due angoli dell'vno saranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli sono vguali, che sono opposti à i lati vguali, e così gli angoli GBC, FCB saranno frà di loro vguali, stante che sono opposti alli vguali lati GC, FB; e similmente gl'angoli FBC, GCB sono frà loro vguali, che sono opposti alli vguali lati BG, CF. Hor perche gli angoli *ABF, ACG furono* dimostrati frà loro vguali, se da questi se ne leuano *gli vguali angoli GCB, FBC, restano* gli angoli ABC, ACB, sopra la *base, frà di loro vguali, e perche gli angoli GBC, FCB furono* dimostrati vguali, e questi sono angoli sotto *la base BC, in consequenza gli* angoli sotto la base sono frà di loro vguali.

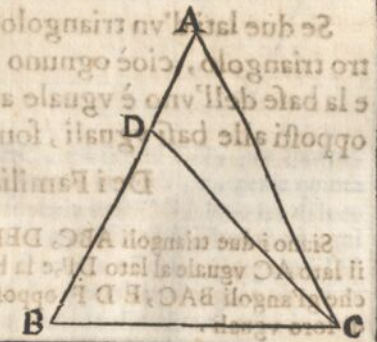
Per la qual cosa delli triangoli Isosceli gl'angoli sopra la base sono frà di loro vguali, e, continuati i lati vguali sotto la base, gl'angoli sotto la base sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi. Conclusione.

THEOREMA III. PROPOSITIONE VI.

Se due angoli d'vn triangolo sono frà di loro vguali, i lati opposti à gl'angoli vguali sono frà di loro vguali. Proposition e.

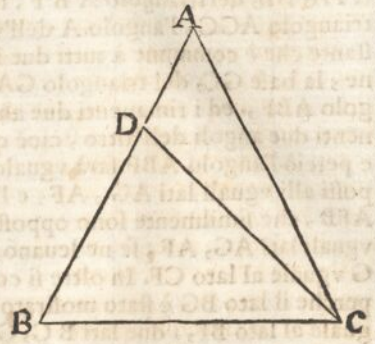
Sia il triangolo A B C, del quale l'angolo A B C sia vguale all'angolo ACB. Dico che il lato AC è vguale al lato AB. Esposition e.

Se il lato AB non è vguale al lato AC, vno delli due sarà maggiore; supposto che il lato AB sia maggiore del lato A C, si può per la terza propositione, dal maggior lato A B tagliarne vna parte vguale al minor lato AC, sia dunque fatto, e sia DB vguale ad AC, si tiri la retta D C. Costruttione.



Dimoſtratione.

Si conſiderino li due triangoli A B C, DCB; perche il lato DB, per coſtruttione, è vguale al lato AC, ed il lato B C è lato commune di tutti due li triangoli, perciò li due lati D B, BC, del triangolo DCB, ſono vguali alli due lati AC, CB del triangolo ABC, l'angolo DBC, per ipoteſi, è vguale all'angolo A C B, e, per la quarta propoſitione, il triangolo D C B ſarà vguale al triangolo ABC, la parte vguale al tutto, che, per il nono aſſioma, è impoſſibile, non dunque il lato AB è maggiore del lato AC, ed in conſeguenza i lati AB, AC ſono frà di loro vguali.



Concluſione.

Per la qual coſa, quando due angoli d'vn triangolo ſono frà di loro vguali, i lati oppoſti alli angoli vguali ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VII.

Quando dalli eſtremi d'vna retta linea *eſcono due rette, e concorrono in qualche punto, ſe dalli medeſimi* eſtremi *eſcono due altre rette linee* vguali alle prime in modo, che quelle ch'eſcono dal medeſimo punto ſiano frà di loro vguali, e tutte ſiano diſteſe dalla medeſima parte, le ſeconde paſſaranno ſopra le prime, e concorreranno nel medeſimo punto:

Queſta propoſitione ſi laſcia per non eſſer neceſſaria.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VIII.

Propoſitione.

Se due lati d'vn triangolo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo, cioè ognuno vguale al ſuo corriſpondente, e la baſe dell'vno è vguale alla baſe dell'altro, gli angoli, oppoſti alle baſi vguali, ſono frà di loro vguali.

De i Familiari di Filone.

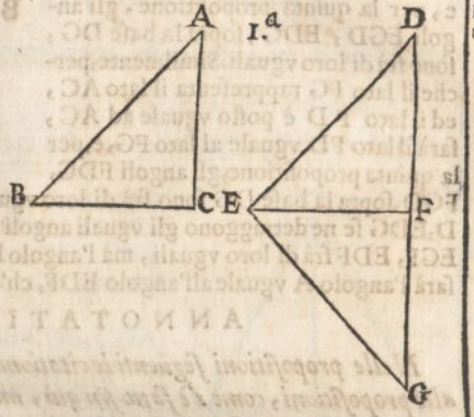
Eſpoſitione

Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e la baſe BC vguale alla baſe EF. Dico, che gl'angoli BAC, E D F oppoſti alle vguali baſi B C, EF ſono frà di loro vguali.

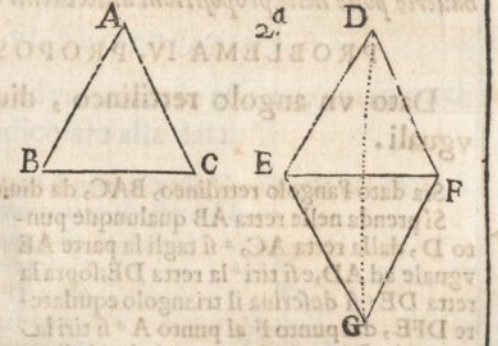
Si

Si concepiſca traſportato il triangolo ABC nel modo, che ſi vede notato per le lettere G F E talmente, che la baſe BC cada ſopra la baſe EF in modo, che il punto B cada nel punto E, il punto C cada nel punto F, e l'angolo A cada come in G. Perche le baſi B C, E F ſono ſuppoſte vguali, per il Corollario al numero 4. della paſsata Annotatione, congrueranno inſieme. Costruttione.

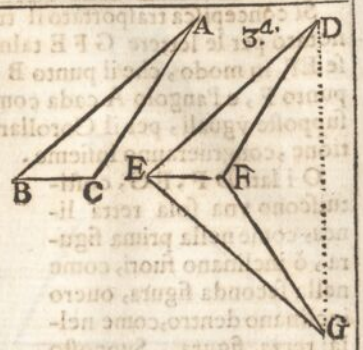
O i lati D F, F G, coſtituiſcono vna ſola retta linea, come nella prima figura, ò inclinano fuori, come nella ſeconda figura, ouero inclinano dentro, come nella terza figura. Suppoſto prima, che facciano vna ſola retta linea, come nella prima figura. Perche il lato EG rappreſenta il lato AB, ed il lato DE, per ipoteſi, è vguale al medeſimo lato A B, per il primo aſſioma, il lato DE ſarà vguale al lato E G, ed il triangolo D E G ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſitione, gli angoli EDG, EGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; ma l'angolo G rappreſenta l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. Dimoſtratione.



Inclinino i lati D F, FG di fuori, come nella ſeconda figura, ſi tiri la retta D G. Perche il lato EG rappreſenta il lato AB, ed il lato DE è poſto vguale al lato AB, ſarà per il primo aſſioma, il lato DE vguale al lato EG, il triangolo E GD ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſitione, gli angoli EGD, EDG, ſopra la baſe D G, ſono frà di loro vguali. Similmente, perche il lato FG rappreſenta il lato AC, ed il lato F D, per ipoteſi, è vguale al lato AC, ſarà il lato DF vguale al lato FG, e, per la quinta propoſitione, gli angoli FDG, FGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; à queſti s'aggiungano gli vguali angoli EDG, EGD, cioè ad ogni vno il ſuo contiguo, ne viene, per il ſecondo aſſioma, l'angolo EDF vguale all'angolo EGF: ma l'angolo EGF rappreſenta l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimoſtrarſi nel 2. luogo.



Final-



Finalmente inclinino i lati DF, FG di dentro, come nella terza figura, si tiri la retta DG. Perche il lato GE rappresenta il lato AB, ed il lato DE è posto vguale ad AB, sarà DE vguale ad EG, il triangolo E G D sarà isoscele, e, per la quinta propositione, gli angoli EGD, EDG, sopra la base DG, sono frà di loro vguali. Similmente, perche il lato FG rappresenta il lato AC, ed il lato F D è posto vguale ad AC, sarà il lato FD vguale al lato FG, e, per la quinta propositione, gli angoli FDG, FGD, sopra la base DG sono frà di loro vguali; se dalli vguali angoli EG D, EDG se ne detraggono gli vguali angoli FGD, FDG, restano gl'angoli EGF, EDF frà di loro vguali, mà l'angolo EGF rappresenta l'angolo A, sarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimostrarsi.

ANNOTATIONE.

Nelle propositioni seguenti le citationi non si porranno in corpo alle propositioni, come s'è fatto sin quì, mà si porranno nel margine, con le letterine in testa, che corrisponderanno à quelle, poste nel corpo della propositione, è dinoteranno, che iui deue esser considerata tale citatione; oltre à ciò non si porrà più nel margine quale sia la propositione, e quale l'espositione, e costruttione, perche stimo esser sufficiente hauerle poste nelle propositioni antecedenti.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IX.

Dato vn angolo rettilineo, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'angolo rettilineo, BAC, da diuidersi in due parti vguali.

Si prenda nella retta AB qualunque punto D, dalla retta AC, [a] si tagli la parte AE vguale ad AD, e si tiri [b] la retta DE; sopra la retta DE [c] si descriua il triangolo equilatere DFE, dal punto F al punto A [d] si tiri la retta FA. Dico che la retta FA diuide l'angolo BAC in due parti vguali.



Si considerino i due triangoli ADF, FEA: perche il lato AE è fatto vguale al lato AD, ed il lato AF è lato commune di ambidue i triangoli, perciò i due lati DA, AF, del triangolo ADF, [e] sono vguali alli due lati EA, AF del triangolo AEF; la ba-

[a] 3. Propositione.
[b] 1. Postul.
[c] 1. Propositione.
[d] 1. Postul.
[e] 2. Assioma

se

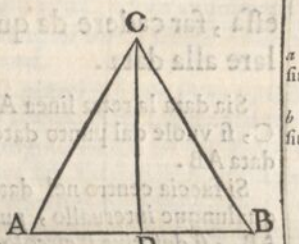
se DF, per costruttione, è vguale alla base EF (stante che sono lati del triangolo equilatere) sarà l'angolo DAF, *f* ch'è opposto alla base DF, vguale all'angolo EAF, ch'è opposto alla base FE: per la qual cosa l'angolo BAC è diuiso dalla retta AF in due parti vguali, ch'era da farsi, e dimostrarsi. *f* 8. Propositione.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE X.

Data vna retta linea terminata, diuiderla in due parti vguali.

Sia la data retta linea terminata AB, la quale si voglia diuidere in due parti vguali.

Sopra la retta AB, *a* si descriua il triangolo equilatere ABC; poi si diuida l'angolo ACB *b* in due parti vguali con la retta CD. Dico che la retta CD continuata, sega la retta AB in due parti vguali, come in D.



Si considerino i due triangoli CDB, CDA: perche il lato CA è vguale al lato CB (per esser lati del triangolo equilatere) ed il lato CD è lato commune d'ambidue i triangoli, saranno *li due lati AC, CD, del triangolo ACD, c* vguali alli due lati BC, CD, *del triangolo CDB, l'angolo ACD, per costruttione*, è vguale all'angolo BCD, sarà la base AD *d* vguale alla base DB. *Per la qual cosa* la retta AB è diuisa in due parti vguali in D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

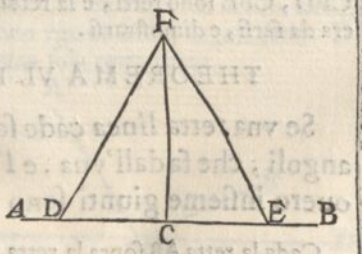
a 1. Propositione.
b 9. Propositione.
c 1. assioma
d 4. Propositione.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XI.

Data vna retta linea, ed vn punto in essa, erigere in quel punto vna retta perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB, ed il punto in essa C, si vuole nel punto C erigere vna retta linea perpendicolare alla data AB.

Si prenda in AC qualunque punto D, dalla retta CB *a* se ne tagli la parte CE vguale alla retta CD; sopra la retta DE *b* si descriua il triangolo equilatero FDE, dal punto F al punto C *c* si tiri la retta FC. Dico che la retta FC è perpendicolare ad AB.



Si considerino li triangoli FCE, FCD: perche *il lato* CE, per costruttione, è vguale *al lato* CD, ed il lato FC è commune ad ambidue li triangoli, *i due lati* EC, CF, del triangolo ECF *d* sono vguali alli due lati

a 3. Propositione.
b 1. Propositione.
c 1. Postulato.
d 2. assioma.

lati DC, CF del triangolo DCF, la baſe FE è vguale alla baſe FD (ſtante che ſono lati del triangolo equilatere FDE), perciò l'angolo FCE, *e* oppoſto alla baſe FE, ſarà vguale all'angolo FCD, oppoſto alla baſe FD: ma, per la decima definitione, quando vna retta linea cade ſopra d'vn altra, e fà gli angoli dall'vna, e l'altra parte vguali, quelli gli habbiamo chiamati angoli retti, e la retta linea, che cade, perpendicolare à quella ſopra la quale cade; eſſendoſi dimoſtrato, che gli angoli FCD, FCE ſono vguali, in conſequenza ſono angoli retti, e la retta linea FC ſarà perpendicolare alla retta AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

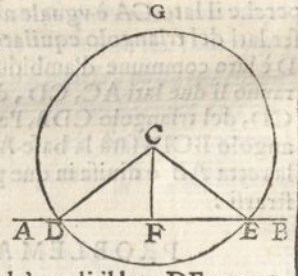
e 8. Propoſitione.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XII.

Data vna retta linea indeterminata, ed vn punto fuori di eſſa, far cadere da quel punto vna retta linea perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB indeterminata, ed il punto fuori di eſſa ſia C, ſi vuole dal punto dato C far cadere vna retta perpendicolare alla data AB.

Si faccia centro nel dato punto C, ed à qualunque interuallo, purche ſeghi la retta AB, *a* ſi deſcriua il circolo DEG, il quale ſegarà la retta AB nelli punti come *D, ed E: ſi diuida la retta DE b in due parti vguali in F, dal dato punto C al punto F c ſi tiri la* retta CF. *Dico che la retta CF è perpendicolare alla data retta AB.*



Per dimoſtrar queſto dal punto C *alli* pũti D, E *d ſi tirino le rette CD, CE,*

Si conſiderino li due triangoli CFD, CFE, de' quali il lato DF, per coſtruttione, è vguale al lato FE, il lato CF è commune ad ambidue; li due lati dunque CF, FD, del triangolo CFD, *e* ſono vguali alli due lati CF, FE, del triangolo CFE, la baſe CD, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe CE, ſarà l'angolo CFD, *f* oppoſto alla baſe CD, vguale all'angolo CFE, oppoſto alla baſe CE, e, per la decima definitione, gli angoli CFD, CFE ſono retti, e la retta CF è perpendicolare alla retta AB, ch' era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 3. Poſtulato.
b 10. Propoſitione.
c 1. Poſtulato.
d 1. Poſtul.
e 2. Aſſioma
f 8. Propoſitione.

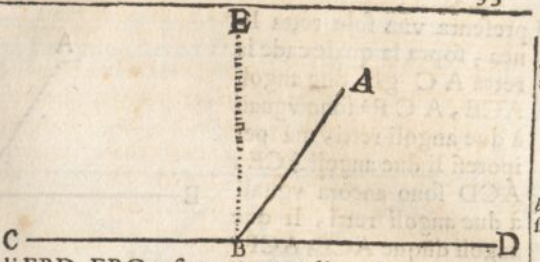
THEOREMA VI. PROPOSITIONE XIII.

Se vna retta linea cade ſopra d'vn' altra linea retta, gli angoli, che fa dall'vna, e l'altra parte, ò ſono angoli retti, ouero inſieme giunti ſono vguali à due angoli retti.

Cada la retta AB ſopra la retta CD, e faccia li due angoli ABC, ABD. Dico che queſti due angoli, ò ſono angoli retti, ouero preſi inſieme ſono vguali à due angoli retti.

Se

Se la retta AB è perpendicolare alla retta CD, [a] gli angoli ABC, ABD ſono angoli retti. Se poi la retta AB non è perpendicolare alla retta CD, nel punto B, ſopra la retta CD, [b] ſi erigga la perpendicolare BE, laonde gli angoli EBD, EBC, [c] ſaranno angoli retti.



[a] 10. definitione.

[b] 11. propoſitione.

[c] 10. definitione.

Perche gli angoli EBA, ABD, inſieme giunti, ſono vguali à tutto l'angolo EBD, che lo compongono, e l'angolo EBD, è retto, in conſeguenza gli angoli EBA, ABD, giunti inſieme, ſono vguali ad vn'angolo retto; ſe gli aggiũghi l'angolo retto EBC, li tre angoli EBC, EBA, ABD, [d] inſieme giunti, ſaranno vguali à due angoli retti.

[d] 2. aſſioma.

Di nuouo, perche li due angoli ABE, EBC, giunti inſieme ſono vguali all'angolo ABC, che lo compongono, tanto all'angolo ABC, quãto alli angoli ABE, EBC, giunti inſieme, s'aggiunghi l'angolo ABD, ne verranno li due angoli ABC, ABD [e] vguali alli tre angoli CBE, EBA, ABD: mà li tre angoli CBE, EBA, ABD, furono dimoſtrati vguali à due angoli retti; li due angoli dunque ABC, ABD, [f] giunti inſieme ſono vguali à due angoli *retti, ch'era da dimoſtrarſi.*

[e] 2. aſſiom.

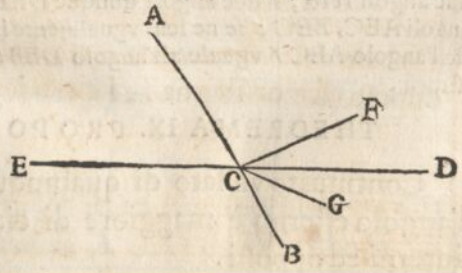
[f] 1. aſſioma.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE XIV.

Se da vn punto, preſo in qualche retta linea, ſono tirate due rette linee, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte, le quali facciano con la prima retta, due angoli vguali à due angoli retti; quelle due rette linee ſaranno poſte in vna medeſima drittura e conſtituiranno vna ſola retta linea.

Sia qualunque retta linea AB nella quale ſia preſo qualche punto C, e dal punto C ſi concepiſchino tirate due rette linee come CE, CD, cioè la retta CE tirata da vna parte, e la retta CD dall'altra in modo, che gli angoli ACE, ACD, inſieme giunti, ſiano vguali à due angoli retti. Dico che le rette CE, CD coſtituiſcono vna ſola retta linea.

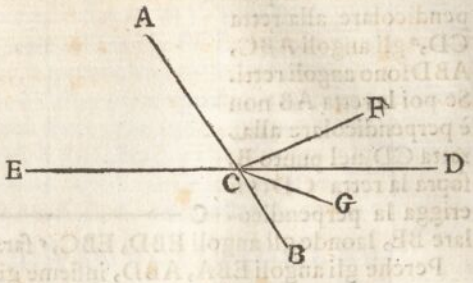
Se le rette CE, CD non coſtituiſcono vna ſola retta linea, continuata la retta EC, [a] la continuatione ò paſſarà ſopra la retta CD, come la notata CF, ouero paſſerà ſotto, come la notata CG: paſſi prima di ſopra come fà la retta CF.



[a] 2. poſtulato.

Perche la linea ECF rap-

presenta vna sola retta linea, sopra la quale cade la retta A C gli due angoli ACE, A C F [b] sono vguali à due angoli retti, mà per ipotesi li due angoli ACE, ACD sono ancora vguali à due angoli retti, li due angoli dũque ACE, ACF [c] sono vguali alli due angoli A C E, A C D; Se ne leui il comune angolo ACE, resta l'angolo ACF [d] vguale all'angolo ACD, la parte vguale al tutto, [e] ch'è impossibile; non dunque la continuatione CF passa sopra della retta CD. Nell'istesso modo si dimostrerà, che non passa di sotto, come fa la retta CG, in consequenza, continuata la retta EC, quella passerà per la dirittura CD. Per la qual cosa le rette EC, CD costituiscono la sola retta ECD, ch'era da dimostrarsi.



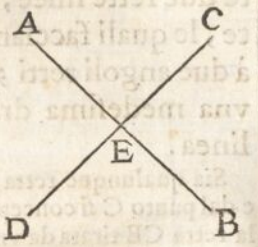
b 13. propositione.
c 10. assioma.
d 3. assioma.
e 9. assioma.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE XV.

Se due rette linee scambieuolmente si segano, gli angoli al vertice sono frà di loro vguali.

Si seghino le rette AB, CD, in qualche punto E. Dico che gli angoli AEC, DEB, al vertice E, sono frà di loro vguali, e che gli angoli AED CEB al vertice, sono frà di loro vguali.

Cade la retta AE sopra la retta CD, e fà gl'angoli AED, AEC [a] vguali à due angoli retti. Similmente cade la retta CE sopra la retta AB e fà gli angoli AEC, CEB vguali à due angoli retti: dal che li due angoli AED, AEC [b] saranno vguali alli due angoli AEC, CEB; Se ne leui vgualmente il cõmune angolo AEC resta l'angolo AED [c] vguale all'angolo CEB, al vertice. In oltre, cada la retta BE sopra la retta CD, e fà li due angoli DEB, BEC [d] vguali à due angoli retti, mà li due angoli AEC, CEB, si disse essere vguali à due angoli retti; li due angoli dunque DEB, BEC, [e] sono vguali alli due angoli AEC, BEC; se ne leui vgualmente il commune angolo BEC, resta l'angolo AEC *f* vguale all'angolo DEB al vertice, ch'era da dimostrarsi.

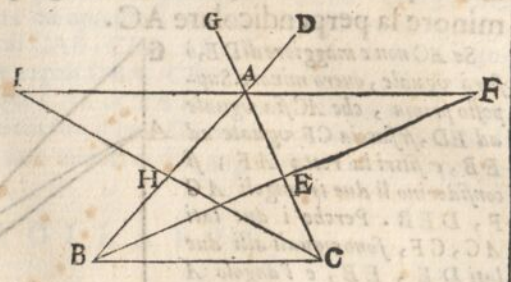


a 13. propositione.
g 13. propositione.
b 10. assioma.
c 3. assioma.
d 13. propositione.
e 10. assioma.
f 3. assioma.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XVI.

Continuato vn lato di qualunque triangolo rettilineo, l'angolo esterno è maggiore di ciascheduno delli angoli interni ed opposti.

Sia il triangolo rettilineo ABC, e di quello sia continuato qualunque lato BA verso D. Dico che l'angolo esterno DAC è maggiore dell'angolo ACB interno, ed opposto, & è anco maggiore dell' altro angolo interno, ed opposto ABC.



Si diuida il lato AC [a] in due parti vguali in E, dal punto B al punto E [b] si tiri la retta BE, la quale si prolunghi [c] verso F, si faccia EF [d] vguale alla retta EB, e si tiri [e] la retta AF.

Si considerino li due triangoli AEF, EBC; perche il lato AE, per costruttione, è vguale al lato EC, ed il lato EF è fatto vguale al lato EB; li due lati AE, EF, del triangolo AEF, [f] saranno vguali alli due lati CE, EB, del triangolo EBC, gli angoli al vertice AEF, CEB [g] sono frà di loro vguali, e per la quarta propositione, la base AF sarà vguale alla base BC, e l'angolo FAE sarà vguale all'angolo ECB, per essere opposti alli vguali lati FE, EB. Hor perche l'angolo DAC [h] è maggiore dell'angolo FAE, *che lo contiene*, e l'angolo FAE, è dimostrato vguale all'angolo ECB, *sarà l'angolo esterno DAC; maggiore* dell'angolo ECB, cioè dell'angolo *ACB interno, ed opposto. Di nuouo s'intenda continuato il lato AC verso G, e si proui, come prima s'è fatto, che l'angolo esterno GAB, è* maggiore dell'angolo ABC; cioè si diuida AB [k] in due parti vguali in H, si tiri [l] la retta CH, la quale si prolunghi [m] verso I, e si faccia IH [n] vguale ad HC, si tiri [o] la retta AI, ed haurem due triangoli AHI, HBC, de' quali li due lati AH, HI, sono, per costruttione, vguali *à i* due lati BH HC, gli angoli AHI, BHC, [p] al vertice, sono frà di loro vguali; *dal che* la base AI [q] sarà vguale alla base BC, e l'angolo IAH vguale all'angolo HBC; mà l'angolo GAB è maggiore dell'angolo IAH, perche lo contiene, sarà l'angolo GAB [r] esterno, maggiore dell'angolo ABC interno, ed opposto. Finalmente perche le rette DB, GC si segano scambieuolmente in A, gli angoli al vertice GAB, DAC, [s] sono frà di loro vguali; mà l'angolo GAB è dimostrato maggiore dell'angolo ABC, l'angolo dunque DAC [t] sarà maggiore dell'angolo ABC; per la qual cosa l'angolo esterno DAC è maggiore dell'angolo interno ed opposto ACB, ed ancora dell'angolo ABC, ch'era da dimostrarsi.

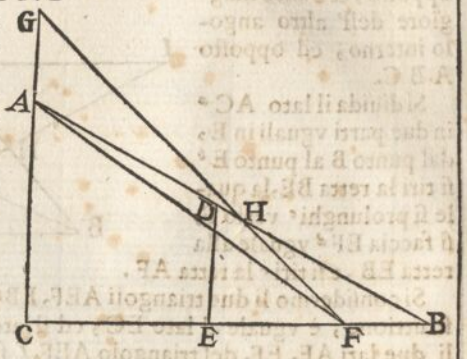
[a] 10. propos.
[b] 1. post.
[c] 2. post.
[d] 3. propos.
[e] 3. post.
[f] 2. assiom.
[g] 15. propos.
[h] 9. assiom.
[i] 1. assiom.
[k] 10. prop.
[l] 1. post.
[m] 2. post.
[n] 3. propos.
[o] 2. post.
[p] 15. propos.
[q] 4. propos.
[r] 1. assiom.
[s] 15 propos.
[t] 1. assiom.

S C O L I O.

Coll'antecedente propositione si può dimostrare il seguente Theorema.

Se sarà qualche angolo acuto ABC, e da varij punti A, & D, presi nella retta AB, cadano sopra la retta CB quante si voglia perpendicolari AC, DE; Dico che la più

vicina all'angolo B sarà minore, cioè se il punto E, ouero D sarà più vicino al punto B, la perpendicolare D E sarà minore la perpendicolare AC.



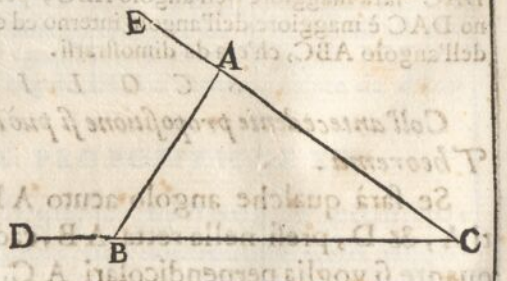
Se AC non e maggiore di DE, ò sarà vguale, ouero minore. Supposto prima, che AC sia vguale ad ED, si faccia CF vguale ad EB, e sitiri la retta AF; si considerino li due triangoli AC F, DEB. Perche i due lati AC, CF, sono vguali alli due lati DE, EB, e l'angolo A CF è vguale all'angolo DEB, sarà la base AF vguale alla base AB, e l'angolo AFC vguale all'angolo DBE: si che nel triangolo ABF, l'angolo AFC esterno è vguale all'angolo ABF interno, ed opposto, ch'è contro all'antecedente propositione; non dunque AC è vguale alla retta DE.

Di nuouo supposto, che AC sia minore di DE; si prolunghi CA verso G, e si faccia CG vguale ad ED, si tiri la retta GF, la quale segarà la retta AB in qualche punto H, e considerando i triangoli GCF, DEB, si prouerà come prima, che l'angolo GFC è vguale all'angolo DBE, si che nel triangolo HBF l'angolo esterno HFC è vguale all'interno, ed opposto HBF, ch'è contro all'antecedente propositione. Non dunque la retta AC è minore di DC, non è vguale, per quel che s'è dimostrato, e perciò sarà maggiore, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XVII.

Due angoli di qualunque triangolo rettilineo presi, come si voglia sono minori di due angoli retti.

Sia qualunque triangolo rettilineo ABC. Dico che li due angoli ABC ACB, presi insieme, sono minori di due angoli retti; che li due angoli CAB, CBA sono minori di due retti; e che li due angoli BAC, BCA sono minori di due retti.



Si continui il lato CB[a] verso D, l'angolo DBA[b] è maggiore dell' angolo BCA interno, ed opposto, tanto al maggior angolo DBA, quanto al minor angolo C, s'aggiunga l'angolo ABC; li due angoli ABC, ACB insieme[c] saranno minori delli

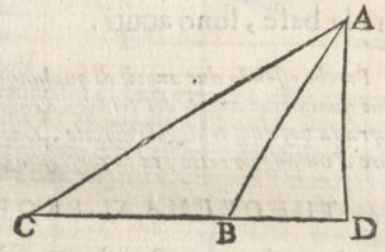
a 2. post.
b 16. propos.
c 4. assiom.

due

due angoli ABD, ABC, mà li due angoli ABD, ABC, [d] sono vguali à due angoli retti, perciò i due angoli ABC, ACB [e] sono minori di due angoli retti. Similmente, perche l'angolo DBA esterno [f] è maggiore dell'angolo CAB interno, ed opposto; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo CBA, i due angoli CAB, CBA, [g] saranno minori de i due angoli DBA, CBA; ma li due angoli DBA, CBA [h] sono vguali à due angoli retti: li due angoli dunque CAB, CBA sono minori di due angoli retti. Nell'istesso modo, continuando il lato CA verso E, si proverà, che li due angoli BAC, BCA sono minori di due angoli retti, come fù proposto dimostrare.

[d] 12. Propos.
[e] 1. assiom.
[f] 16. propos.
[g] 4. assiom.
[h] 11. propos.

COROLLARIO I.

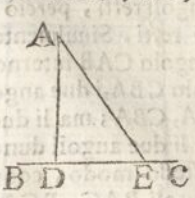


Dall'antecedente propositione si caua, che se vna retta linea, come AB, sega qualche altra retta linea CD ad angoli obliqui, cioè che l'vno, come ABC sia ottuso, e l'altro ABD acuto, se dal punto A cade vna retta perpendicolare alla retta CD, quella caderà dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD; perche, se non cade dalla parte dell'angolo acuto; cada, s'è possibile, dalla parte dell'angolo ottuso, come fà la retta AC; perche l'angolo ACB è retto, e l'angolo ABC è ottuso, i due angoli ABC, ACB, del triangolo ACB, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro all'antecedente propositione; non dunque la perpendicolare cade dalla parte dell'angolo ottuso, mà cade dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD.

COROLLARIO II. DI PROCLO

Appare da quel, che si è detto, che da vn medesimo punto ad vna medesima retta linea non può cadere più, che vna sola perpendicolare.

Cadano, se è possibile, dal medesimo punto A le due rette AE, AD, perpendicolari alla retta BC, i due angoli AED, ADE saranno retti, che è contro all'antecedente propositione; Non dunque dal medesimo punto A alla medesima retta BC, può cadere più d'una perpendicolare, come si disse.



COROLLARIO III.

E anco manifesto, che tutti li angoli del triangolo equilatero, come ancora nel triangolo isoscele gli angoli sopra la base, sono acuti.

a 17. del 1. *Perche essendo due angoli di qualunque triangolo, minori di due retti, e due qualunque angoli del triangolo equilatere, come parimente gl' angoli sopra la base del triangolo isoscele, sono frà loro vguali, ogn'vno sarà minore d'vn angolo retto, ed in conseguenza ogn'vno sarà acuto.*

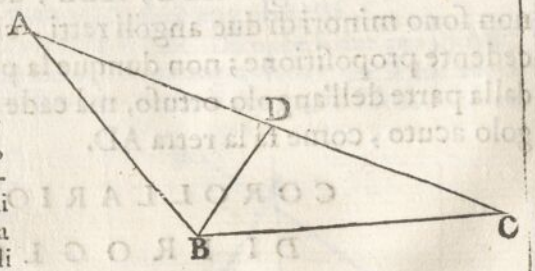
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVIII.

L'angolo opposto al maggior lato di qualunque triangolo rettilineo è maggiore dell'angolo opposto al minor lato.

Nel triangolo rettilineo ABC, sia il lato AC maggiore del lato AB. Dico, che l'angolo ABC, opposto al maggior lato AC, è maggiore dell'angolo ACB, opposto al minor lato AB.

Dal maggior lato AC [a] se ne tagli la parte AD vguale al minor lato AB, e si tiri [b] la retta BD.

a 3. propos. b 1. postulat.



Perche il lato AD è fatto vguale al lato AB, il triangolo ABD [c] sarà isoscele, e gli angoli ABD, ADB, sopra la base DB [d], sono frà di loro vguali, e perche, nel triangolo DBC, è continuato il lato DC in A, l'angolo ADB esterno [e] è maggiore dell'angolo C interno, ed opposto, mà l'angolo ADB, è mostrato vguale all'angolo ABD, sarà l'angolo ABD [f] maggiore dell'angolo C. Per la qual cosa l'angolo ABC, [g] opposto al maggior lato AC,

c 24. defin. d 5. propos. e 16. propos. f 1 assiom. g 9. assiom.

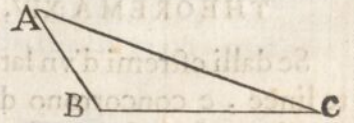
è mag

è maggiore dell'angolo C, opposto al minor lato AB; ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIX.

Il lato opposto al maggior'angolo di qualunque triangolo rettilineo, è maggiore del lato opposto al minor'angolo.

Nel triangolo ABC sia l'angolo B maggiore dell'angolo C. Dico che il lato AC opposto al maggior angolo B, e maggiore del lato AB opposto al minor angolo C.



Se il lato AC non è maggiore del lato AB, ò sarà minore, ouero vguale. Supposto prima, che il lato AC sia vguale al lato AB, in tal caso il triangolo ABC [a] sarà isoscele, e gli angoli ABC, ACB [b] sopra la base BC, saranno frà di loro vguali, ch'è contro al nostro supposto; non dunque il lato AC è vguale al lato AB. Di nuouo supposto che il lato AC sia minore del lato AB, all'hora l'angolo B, opposto al minor lato AC [c] sarà minore dell'angolo C, opposto al maggior lato AB; mà si è supposto l'angolo B maggiore dell'angolo C, sarebbe *l'angolo B maggiore, e minore dell'angolo C*, ch'è impossibile; non dunque *il lato AC è minore del lato AB, non è vguale, per quel che s'è dimostrato; in conseguenza il lato AC sarà maggiore del lato AB*, come fù proposto dimostrare.

[a] 24. defin.
[b] 5. propos.
[c] 18. propos.

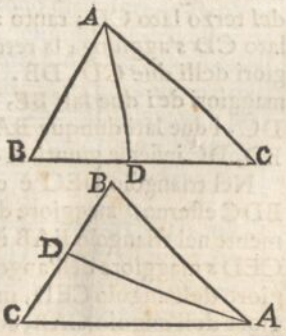
THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XX.

Due lati di qualunque triangolo rettilineo, presi come si voglia, sono maggiori del terzo lato.

Di Proclo.

Sia il triangolo ABC. Dico che li due lati AB, BC, insieme giunti, sono maggiori del terzo lato AC; che li due BC, CA, sono maggiori del terzo AB, e che li due BA, AC sono maggiori di BC.

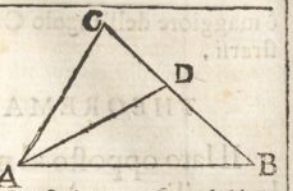
Si diuida l'angolo BAC [a] in due parti vguali con la retta AD, la quale continuata [b] concorra col lato BC in qualche punto D.



Si consideri il triangolo ADC, nel quale è continuato il lato CD, verso B, sarà l'angolo BDA esterno [c] maggiore dell'angolo DAC interno, ed opposto: mà l'angolo DAC, per costruttione, è vguale all'angolo DAB, sarà l'angolo BDA [d] maggiore dell'angolo BAD, e, per l'antecedente propositione, il lato AB, opposto al maggior angolo BDA, sarà maggiore del lato BD, opposto al minor angolo BAD.

[a] 9. propos.
[b] 2. postulat.
[c] 16. propos.
[d] 1. assioma.

Simil-

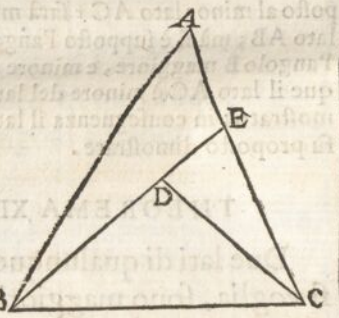


Similmente si consideri il triangolo BDA del quale è continuato il lato BD verso C, sarà l'angolo esterno CDA [e] maggiore dell'angolo DAB interno, ed opposto : ma l'angolo DAB, per costruttione è vguale all'angolo DAC, sarà l'angolo CDA [f] maggiore dell'angolo CAD, ed in consequenza il lato AC [g] sarà maggiore del lato CD : fù dimostrato il lato AB maggiore del lato BD, li due lati, dunque BA, AC, giunti insieme, sono maggiori del lato BC, ch'era da dimostrarsi.

e 16.propos.
f 1. assioma.
g 19.propos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XXI.

Se dalli estremi d'vn lato d'vn triangolo escono due rette linee, e concorrono dentro del medesimo triangolo, quelle prese insieme, sono minori degl'altri due lati del triangolo, e contengono angolo maggiore.



Sia il triangolo ABC, e dalli estremi B, & C, del lato BC, escano le rette BD, CD, e concorrino dentro del triangolo in qualche punto D. *Dico che le due BD, CD, insieme giunte, sono minori de' i due lati BA, AC, presi insieme*, e che l'angolo BDC è maggiore dell'angolo BAC.

Si continui la retta BD [a] fino, che cõcorre col lato AC in qualche punto E.

Nel triangolo ABE i due lati BA, AE, giunti insieme, [b] sono maggiori del terzo lato BE ; tanto à i due lati BA, AE, giunt'insieme, quanto al lato BE, si aggiunghi la retta EC, ne verranno i due lati BA, AC [c] maggiori delli due lati BE, EC. Di nuouo, nel triangolo CED, i due lati CE, ED, presi insieme, [d] sono maggiori del terzo lato CD ; tanto à i due lati CE, ED, giunti insieme, quanto al lato CD s'aggiunga la retta DB, ne verranno i due lati CE, EB [e] maggiori delli due CD, DB. Hor essendosi dimostrato li due lati BA, AC, maggiori de i due lati BE, EC, e li due BE, EC maggiori delli due BD, DC, i due lati dunque BA, AC presi insieme, sono maggiori delli due BD, DC insieme giunti, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

Nel triangolo DEC è continuato il lato ED verso B, sarà l'angolo BDC esterno, [f] maggiore dell'angolo DEC interno, ed opposto. Similmente nel triangolo EAB è continuato il lato AE verso C, sarà l'angolo CED [g] maggiore dell'angolo CAB, mà fù mostrato l'angolo CDB maggiore dell'angolo CED, in consequenza l'angolo CDB sarà molto maggiore dell'angolo CAB, come fù proposto dimostrare.

a 2.postulat.
b 20.prop.
c 4. assioma
d 20.prop.
e 4. assioma
f 16.propos.
g 16. propos.

PRO-

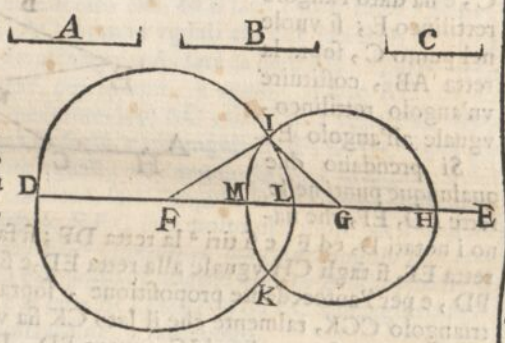
PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXII.

Date tre rette linee, costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle tre rette linee date.

Determinatione.

E necessario però, che le tre rette date habbiano questa determinatione, che due, in qualunque modo prese, siano maggiori della terza, stante che s'è dimostrato nella vigesima propositione, che due lati d'vn triangolo sono maggiori del terzo lato.

Siano date le tre rette linee A, B, C, in modo che le due A, & B, insieme giunte, siano maggiori della terza C; le due B, & C, siano maggiori della terza A; e le due A, & C, siano maggiori della terza B. Dico esser possibile costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle tre rette date.



S'esponga la retta DE indeterminata verso E, dalla quale [a] se ne tagli la parte DF vguale alla retta A; similmente si tagli FG [a] vguale alla retta B; e si tagli GH [a] vguale alla retta C: poi, centro in F, coll'interuallo FD, [b] si descriua il circolo DIK; & di nuouo, fatto centro in G, coll'interuallo GH [b] si descriua il circolo HIK.

[a] 3. propos.
[a] 3. propos.
[a] 3. prop.
[b] 3. postulat
[b] 3. postul.

Perche la retta A, per costruttione, è vguale ad FD, e la retta FL [c] è vguale alla medesima FD, sarà la retta A [d] vguale alla retta FL. Similmente essendo la retta C, per costruttione, vguale alla retta GH, e la retta GM [e] è vguale alla medesima GH, sarà la retta C [f] vguale alla retta GH; e così le due rette A, & C [g] saranno vguali alle due FL, GM; mà per ipotesi, le due A, & C, insieme giunte, sono maggiori della retta B, le due dunque FL, GM, [b] sono maggiori della retta B; fù fatta FG, per costruttione, vguale alla retta B, le due rette dunque FL, GM sono maggiori della retta FG. Se dunque da FG se ne detrae FL resta GL [i] minore di GM; dal che il punto M cade dentro del circolo ILK, ed il punto L dentro del circolo IMK, per la qual cosa vn circolo cade dentro l'altro, e, per l'annotatione dopo la 26. definitione, i circoli IMK, ILK, scambieuolmente si segano. Siano le loro intersegationi come in I, & K, dal punto I alli centri F, & G [k] si tirino le rette IF, IG. Dico che il triangolo IFG, ha li tre lati vguali alle tre rette date A, B, C.

[c] 15. defin.
[d] 1. assioma
[e] 15. defin.
[f] 1. assioma
[g] 2. assioma
[b] 1. assioma
[i] 5. assioma
[k] 1. postul.

Per la definitione del circolo la retta FI, è vguale alla retta FD, mà, per costruttione, la retta A è vguale alla medesima retta FD, sarà la retta FI [l] vguale alla retta A. Similmente la retta GI, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GH, mà la retta C, per costruttione, è vgua-

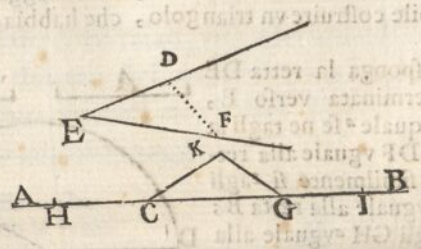
[l] 1. assioma

l 1. assiom. m 2. assiom.

le alla retta GH, sarà la retta C l vguale alla retta GI; dalche le due A, & C m sono vguali alli due lati FI, IG, la retta FG, per costruttione, è vguale alla retta B, in conseguenza li tre lati FI, IG, FG sono vguali alle tre rette date, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIII.

Data vna retta linea, ed vn punto in essa, e dato vn'angolo rettilineo, è possibile nel dato punto sopra la retta data, costituire vn'angolo rettilineo vguale all'angolo dato.



Sia la data retta linea AB, ed il punto in essa C, e sia dato l'angolo rettilineo E; si vuole nel punto C, sopra la retta AB, costituire vn'angolo rettilineo, vguale all'angolo E.

Si prendano due qualunque punti nelle rette ED, EF, che siano i notati D, ed F, e si tiri a la retta DF; si faccia poi CG b vguale alla retta EF, si tagli CH vguale alla retta ED, e si tagli GI vguale alla retta FD, e per l'antecedente propositione, sopra la retta CG si descriua il triangolo CGK, talmente che il lato CK sia vguale ad HC, ouero ED, ed il lato GK sia vguale ad IG, ouero FD. Dico che l'angolo KCG è vguale all'angolo E.

a 1. post. b 3. propos.

Si considerino i due triangoli DEF, KCG; perche i due lati KC, CG sono vguali, per costruttione, à i due lati DE, EF, e la base KG è vguale alla base DF, l'angolo KCG sarà c vguale all'angolo E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 8. propos.

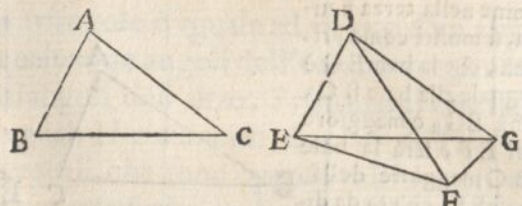
THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXIV.

Se due lati d'vn triangolo sono vguali à due lati d'vn'altro triangolo, ogn'vno vguale al suo corrispondente, è l'angolo contenuto dà i due lati dell'vno sia maggiore dell'angolo contenuto dà i due lati dell'altro; la base dell'vno, ch'è opposta all'angolo maggiore, sarà maggiore della base dell'altro, ch'è opposta all'angolo minore.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e sia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF. Dico che la base BC sarà maggiore della base EF.

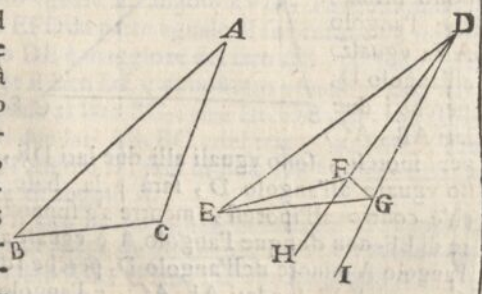
Nel

Nel punto D, sopra la retta DE, [a] si costituisca l'angolo EDG, vguale all'angolo A, e perche l'angolo A è posto maggiore dell'angolo EDF, sarà l'angolo EDG [b] maggiore dell'angolo EDF, per la qual cosa la retta DG cade fuori del triangolo DEF; si tagli DG, [c] vguale al lato AC, e si tiri [d] la retta EG; ò la retta EG passa sopra del punto F, come nella prima figura, ò passa sotto al punto F, come nella seconda fig. ouero passa per il medesimo punto F, come nella terza figura. Passi prima sopra, come nella prima figura, si tiri [e] la retta FG, e si considerino li triangoli ABC, DEG; perche il lato AB, per ipotesi, è vguale al lato DE, ed il lato DG è fatto vguale al lato AC, i due lati BA, AC saranno vguali alli due lati ED, DG, l'angolo EDG è fatto vguale all'angolo A, sarà la base EG [f] vguale alla base BC. In oltre perche DF, per ipotesi, è vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medesimo lato AC, sarà DG [g] vguale al lato DF, il triangolo DFG [h] sarà isoscele, e gli angoli DGF, DFG, [i] sopra la base FG, saranno frà di loro vguali; mà l'angolo D GF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, sarà l'angolo D F G [K] maggiore dell'angolo E G F, e tutto l'angolo E F G sarà molto maggiore dell'angolo EGF; per la qual cosa il lato EG [l] opposto al maggior' angolo EFG sarà maggiore del lato EF, ch'è opposto all'angolo minore EGF; e perche il lato EG fù mostrato vguale al lato BC, sarà la base BC [m] maggiore della base EF, ch' era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo passi la retta E G sotto del punto F, come nella seconda figura, si tiri [n] la retta FG, e considerando i due triangoli ABC, DEG si mostri, come prima si fece, che la retta EG è vguale alla base B C.

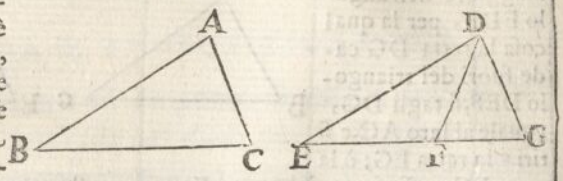
Perche il lato D F è posto vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medesimo lato AC, sarà il lato D F [o] vguale al lato DG, il triangolo DFG [p] sarà isoscele, e gli angoli IGF, HFG [q] sotto la base FG saranno frà di loro vguali; mà l'angolo IGF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, sarà l'angolo HFG [r] maggiore dell'angolo EGF; per il che tutto l'angolo EFG; sarà molto maggiore dell'angolo EGF. Per la qual cosa nel triangolo EFG, il lato EG opposto al maggior'angolo EFG [s] sarà maggiore del lato E F opposto all'angolo minore EGF; e perche la retta EG fù mostrata vguale alla base B C, sarà



a 23. prop. pos.
b 1. assiom.
c 3. propos.
d 1. post.
e 1. post.
f 4. propos.
g 1. assiom.
h 24. defin.
i 5. propos.
K 1. assiom.
l 19. propos.
m 1. assiom.
n 1. post.
o 1. assiom.
p 24. defin.
q 5. propos.
r 1. assiom.
s 19. propos.

t 1. assiom. rà la base B C t maggiore della base E F, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo. Finalmente passi per il medesimo punto F, come nella terza figura, si mostri come prima, che la base E G è vguale alla base B C, mà E G u è maggiore di E F, sarà la base B C maggiore della base E F, ch'era da dimostrarsi.

u 9. assio m.



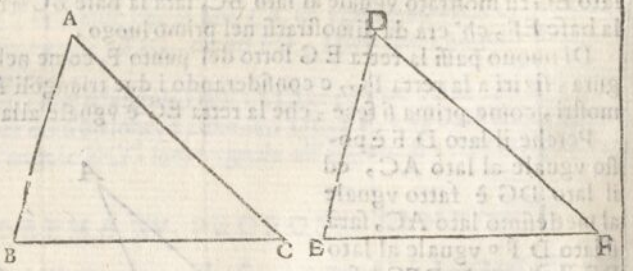
THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXV.

Se due lati d'vn triangolo sono vguali à due lati d'vn altro triangolo, ciascuno vguale al suo corrispondente, e la base dell'vno è maggiore della base dell'altro, l'angolo opposto alla base maggiore sarà maggiore dell'angolo opposto alla base minore.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e sia il lato *AB vguale al lato DE*, il lato AC vguale al lato DF, *la base BC maggiore della base EF. Dico, che l'angolo A sarà maggiore dell'angolo D.*

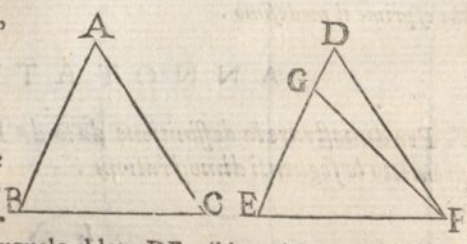
Se l'angolo A non è maggiore dell'angolo D, ò sarà minore, ouero vguale. Supposto prima, che l'angolo A sia vguale all'angolo D; perche i due lati AB, AC, per ipotesi, sono vguali alli due lati DE, DF, e l'angolo A è posto vguale all'angolo D, sarà a la base B C vguale alla base EF, ch'è contro all'ipotesi, mentre s'è supposto, che BC è maggiore di EF, non dunque l'angolo A è vguale all'angolo D. Di nuouo sia l'angolo A minore dell'angolo D, perche i due lati DE, DF per ipotesi sono vguali à i due lati AB, AC, e l'angolo D è maggiore dell'angolo A, sarà, per l'antecedente propositione, la base EF maggiore della base BC; fù supposta la base B C maggiore di EF, sarebbe BC maggiore, e minore di EF, ch'è impossibile; non dunque l'angolo A è minore dell'angolo D; non è vguale, per quel che s'è dimostrato; per la qual cosa l'angolo A sarà maggiore dell'angolo D, come fù proposto dimostrare.

a 4. propos.



THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXVI.

Se vn lato d'vn triangolo è vguale ad vn lato d'vn altro triangolo, e due qualunque angoli dell'vno siano vguali à due corrispondenti angoli dell'altro, i rimanenti due lati dell'vno saranno vguali à i rimanenti due lati dell'altro, cioè quei lati sono vguali, che sono opposti alli angoli vguali, ed il restante angolo sarà vguale al restante angolo



Siano i due triangoli ABC, DEF, e sia nel primo luogo il lato BC vguale al lato EF, l'angolo ABC vguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB vguale all'angolo DFE, cioè che gli angoli vguali siano sopra gli vguali lati BC, EF.

Dico, che il lato AC sarà vguale al lato DF, il lato AB vguale al lato DE, e che l'angolo A è vguale all'angolo D.

Se il lato AB non è vguale al lato DE, vno de'i due sarà maggiore. Supposto, che il lato DE sia maggiore del lato AB, dal maggior lato DE se ne tagli la parte GE [a] vguale al minor lato AB, si tiri [b] la retta GF, e si considerino i due triangoli ABC, GEF; perche il lato GE è fatto vguale al lato AB, ed il lato EF è supposto vguale al lato BC, saranno i due lati GE, EF vguali à i due lati AB, BC, l'angolo GEF è supposto vguale all'angolo ABC; sarà [c] la base GF vguale alla base AC, l'angolo BAC vguale all'angolo EGF, e l'angolo BCA vguale all'angolo EFG; mà l'angolo BCA è supposto vguale all'angolo EFD, l'angolo dunque EFG [d] sarà vguale all'ãgolo EFD, la parte vguale al suo tutto, ch'è impossibile [e]: Non dunque il lato DE è maggiore del lato AB, mà sono frà di loro vguali. In oltre perche il lato DE è dimostrato vguale al lato AB, ed il lato EF è supposto vguale al lato BC, i due lati DE, EF, del triangolo DEF, sono vguali alli due lati AB, BC, del triangolo ABC, l'angolo E è supposto vguale all'angolo B, sarà la base DF [f] vguale alla base AC, e l'angolo D vguale all'angolo A.

a 3. propos.
b 1. post.
c 4. propos.
d 1: assiom.
e 9. assiom
f 4. propos.

Supposto di nuouo, che il lato BC sia vguale al lato EF, l'angolo B, vguale all'angolo E, e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico similmente, che il lato DE è vguale al lato AB, il lato DF vguale al lato AC, e l'angolo C vguale all'angolo DFE.

Si faccia la medesima costruttione di prima, e si mostri, come prima si fece, che l'angolo EGF è vguale all'angolo BAC; mà nel triangolo DGF l'angolo EGF esterno [g] è maggiore dell'angolo D interno, ed opposto, sarà l'angolo A maggiore dell'angolo D; fù supposto l'angolo A vguale all'angolo D, sarebbe l'angolo A maggiore, ed vguale all'angolo

g 16. propos.

D,

D, ch'è impossibile; non dunque il lato DE è maggiore del lato AB, mà sono frà di loro vguali,

Finalmente perche i due lati AB, BC, del triangolo ABC, sono vguali à i due lati DE, EF, del triangolo DEF, l'angolo B, per ipotesi è vguale all'angolo E, sarà la base AC [h] vguale alla base DF, e l'angolo C vguale all'angolo EFD, ch'era da dimostrarsi.

h 4. propos.

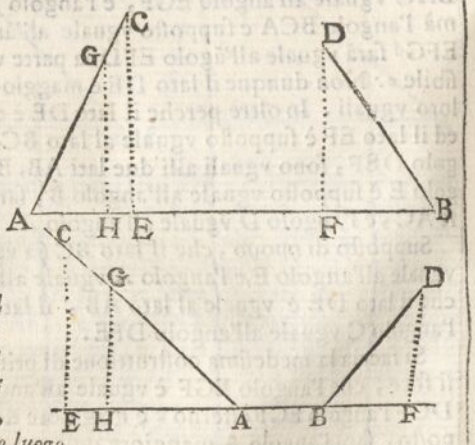
Nota che antecedentemente non si è posto nella propositione, che i lati vguali, ò siano ambi due adiacenti alli angoli vguali, ò siano opposti à due delli angoli vguali, come fanno tutti i Commentatori, ma per più politezza è posto, che due angoli dell'vno siano vguali à due corrispondenti angoli dell'altro, il che esprime il medesimo.

ANNOTATIONE

Per dimostrare la deffinitione data da Euclide alle rette parallele, premetto le seguenti dimostrationi.

I.

Se due rette linee come CA, DB, sono segate da qualche retta AB, e gli angoli DBA, CAB sono frà di loro vguali: Dico che se la retta CA è vguale alla retta DB, le rette DF, CE, che da i punti D, & C, cadono perpendicolari alla retta AB, sono frà di loro vguali, e se la retta CA è maggiore della retta DB, la perpendicolare CE sarà maggiore della perpendicolare DF.



Supposto prima, che la retta CA sia vguale alla retta BD. Dico che la perpendicolare CE è vguale alla perpendicolare DF. Perche gli angoli in E, ed F sono retti, e gl'angoli DBF, CAE sono supposti vguali, i due angoli CEA, CAE, del triangolo CAE, saranno vguali alli due angoli DFB, DBF, del triangolo DFB, il lato CA è supposto, vguale al lato DB, [a] sarà BF vguale ad AE, e la perpendicolare DF vguale alla perpẽdicolare EC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 26. del 1.

Di nuouo, supposto, che la retta CA sia maggiore della retta DB. Dico che

la

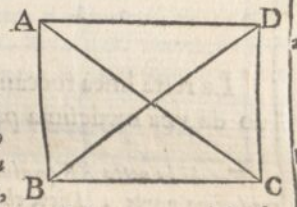
la perpendicolare CE [b] *è maggiore della perpẽdicolare DF. sifaccia* [a] *GA vguale alla retta DB, dal punto G* [c] *si faccia cadere la retta GH perpẽdicolare alla retta AB, ed operandosi come si fece prima, si moſtrerà, che la retta GH è vguale alla retta DF, ma, per lo ſcolio alla 16 propoſitione, la retta CE è maggiore di GH, ſarà la perpendicolare CE maggiore della perpendicolare DF, ch'era da dimoſtrarſi.*

b 3. del 1.
c 12 del 1.

II.

Se due lati oppoſti dun quadrilatero ſono frà di loro vguali, e fanno angoli vguali con vno degli altri due lati, i rimanenti due angoli ſono frà di loro vguali.

Sia il quadrilatero ABCD, e ſiano i lati oppoſti AB, DC frà di loro vguali, e gli angoli ABC, DCB ſiano frà di loro vguali. Dico, che i reſtanti due angoli BAD, CDA ſono frà di loro vguali. Si tirino [a] *le diagonali AC, DB, e ſi conſiderinò i due triangoli ABC, DCB, de' quali il lato AB, per ipoteſi, è vguale al lato DC, il lato BC, è commune, perciò i due lati AB, BC ſono vguali alli due lati DC, CB; gli angoli ABC, DCB, per ipoteſi ſono frà di loro vguali, ſarà la baſe AC* [b] *vguale alla baſe DB; Inoltre ſi conſiderino i due triãgoli BAD, CDA; perche il lato AB, è vguale al lato DC, il lato AD è commune, i due lati BA, AD ſaranno vguali alli due lati CD, DA; la baſe AC è dimoſtrata vguale alla baſe BD, ſarà l'angolo BAD* [c] *vguale all'angolo CDA, ch'era da dimoſtrarſi.*

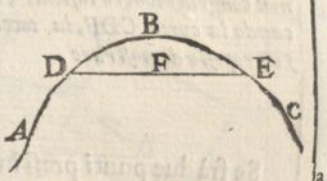


a 1. poſt.
b 4. del 1.
c 8. del 1.

III.

La linea retta chiude figura con la curua, che hà il concauo dalla medeſima parte, quando la retta termina nella curua con tutti due gli eſtremi.

Concorra la retta linea DE con tutti due gli eſtremi D, ed E, nella curua ABC. Dico, che le linee DFE, DBE, chiudono figura, cioè frà la linea curua DBE, e la retta DFE s'interpone ſpatio. Perche le linee DBE, DFE concorrono inſieme negli eſtremi D, ed E, ſe frà di loro non ſi racchiude ſpatio, l'vna congruerà con l'altra; ma quelle coſe che congruono inſieme [a] *ſono frà di loro vguali, ſarà la linea retta DFE vguale alla linea curua DBE; ma per la diffinitione 4. la linea curua DBE non è la breuiſſima di quelle, che ſi ſtendono frà i punti D, E, la linea dunque DFE non ſarà la breuiſſima di quelle, che ſi ſtendono dal punto D al punto E; e perciò non ſarà linea retta, ch'è contro all' ipoteſi, ſtante che la linea DFE fù ſuppoſta linea retta. Non dunque le linee DBE, DFE, congruono,*



a 8. aſſiom.

ma

ma frà di loro s'interpone qualche spatio, cioè chiudono figura, che era da dimostrarsi,

ANNOTATIONE

Se poi la linea sarà tortuosa come la notata GNHIKLM, e frà i punti G ed M, presi in essa curua sia tirata la retta GM, la quale seghi la detta curua come in H, & K, all' hora la Curua GNHIKLM, e la retta GM chiudono più d'vna figura, stante che per l'antecedente dimostratione la retta GH, e la curua GNH chiudono la figura X, la retta HK con la curua HIK chiudono la figura Z. e la retta KM cõla curua KLM chiudono la figura Y, è qui d'auertirsi, che quãdo si dice linea curua senz'altra aggiuntione, non s'intende vna linea tortuosa (ch'è sempre composta di più linee) mà s'intende vna linea seguita, che hà il concauo da vna medesima parte.

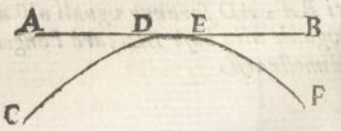


I V.

La retta linea toccando qualunque linea curua, che hà il concauo da vna medesima parte, la tocca in vn sol punto.

Tocchi la retta AB qualunque curua linea CDF, che hà il concauo dalla medesima parte. Dico, che la tocca in vn sol punto.

Se la retta AB non tocca la curua CDF in vn sol punto, necessariamente la toccarà in qualche parte, sia quella parte, se è possibile, DE; sarà dunque DE parte commune della retta AB, e della curua CDF; dal che, la retta DE congruerà con la curua DE. In oltre perche li punti D, E, che sono estremi della retta DE, sono nella curua CDF, per l'antecedente dimostratione, la retta DE, e la curua DE chiudono figura; per la qual cosa la retta DE non congrue con la curua DE: ma si disse, che congruono insieme, congruerebbero, e non congruerebbero insieme, ch'è impossibile. Non dunque la retta AB, toccando la curua CDF, la tocca in parte, ma la tocca in vn sol punto, come fu proposto dimostrare.

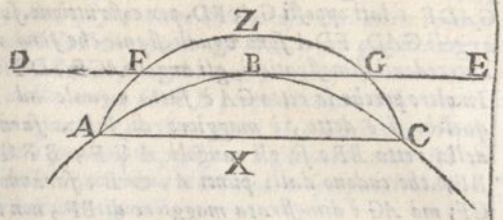


V.

Se frà due punti presi in qualche linea curua, che habbia il concauo da vna medesima parte, è tirata vna retta linea, quella cade da quella parte, che riguarda il cauo della curua.

Nella curua ABC, il di cui cauo sia verso X, siano presi due qualunque punti A, & C. Dico, che la retta tirata dal punto A, al punto C, cade dalla parte X, che riguarda il cauo della curua.

Si concepisca la retta linea DE indeterminata in modo, che tocchi la curua ABC in qualche punto B preso in ABC, parte interposta frà i punti A, & C, e per l'antecedente dimostratione la retta D E toccarà la curua ABC nel solo punto B; d'onde la linea curua ABC caderà tutta dalla parte X, sotto la retta DE; se dunque frà i punti A, & C, è tirata la retta AC, quella, per la dimostratione terza, chiuderà figura con la curua ABC, per il che sarà distante dal punto B, e caderà dalla parte del cauo X; Perche se non cade dalla parte del cauo X, cada, se è possibile, dalla parte Z, come fà la linea AZC, che per il nostro supposto sarà linea retta. Perche la curua ABC cade tutta dalla parte X, i punti A, & C saderanno similmente dalla parte X, cioè sotto la retta DE; si disse, che la retta tirata dal punto A al punto C, cioè la retta AZC, cade verso Z, ed il punto B è posto nella linea ABC interposta frà li punti A, & C; in conseguenza la retta AZC segarà la retta indeterminata DE come in F, & G; per la qual cosa le rette FZG, FBG chiudono figura, ch'è contro alla terza dimostratione posta nell'annotatione dopo la terza propositione Non dunque la retta AC cade dalla parte Z, mà cade dalla parte del cauo X, ch'era da dimostrarsi.



V I.

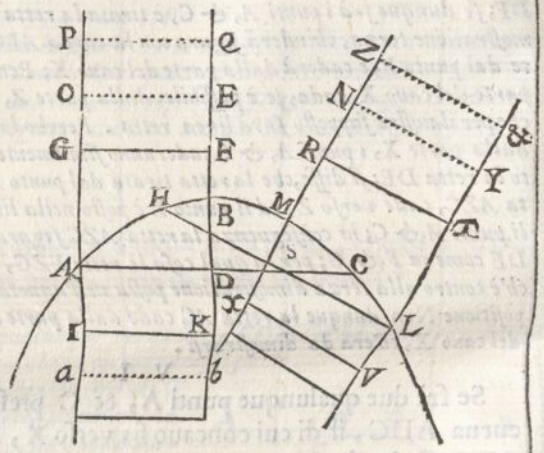
Se frà due qualunque punti A, & C presi in qualunque linea curua ADC, il di cui concauo sia verso X, sia tirata la retta linea ADC; se dagl'infiniti punti immagginati nella curua ADC cadono rette linee perpendicolari à qualche retta linea. Dico, essere impossibile, che tutte quelle perpendicolari siano frà di loro vguali.

Si prenda nella curua A B C qualunque punto B, dal quale si faccia cadere la retta BD a perpendicolare alla retta AC, e si continui la retta DB verso E; nel punto A sopra la retta AC b s'erigga la perpendicolare A G, poi nella prolongatione BE si prenda qualunque punto F, sarà FD maggiore di BF, stante che A C chiude figura con la curua ABC, e cade verso il concauo X; si fac-

a 12. del 1.

b 11. del 1.

c 3. del 1. faccia AG [c] vguale alla retta F D, si tiri la retta G F. Nel quadrilatero GADF i lati oppositi GA, FD, per costruttione, sono frà di loro vguali, gli angoli GAD, FDA sono vguali, stante che sono retti, e per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli AGF, D F G sono frà di loro vguali. In oltre perche la retta GA è fatta vguale ad FD, e la retta F D, per quelche si è detto, è maggiore di F B, sarà la retta G A maggiore della retta BF: se gli angoli A G F, B F G sono retti, le rette A G, d 1. difin. del 1. BF, [d] che cadono dalli punti A, & B, saranno perpendicolari alla retta GF; mà AG è dimostrata maggiore di BF, non tutte le perpendicolari dunque, che cadono dalla curua ABC alla retta GF, sono frà di loro vguali. Se gli angoli AGF, BFG non sono retti; perche le rette A G, B F sono segate dalla retta GF, e gli angoli AGF, BFG, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro vguali, per la prima delle antecedenti dimostrationi, essendo la retta AG maggiore di BF, la retta, che dal punto A cade perpendicolare alla retta G F continuata indeterminatamente, sarà maggiore della retta, che dal punto B cade perpendicolare alla medesima retta GF, non dunque tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta GF, sono frà di loro vguali.



S'intendano continuate le rette DF, AG indeterminatamente verso P Q; si facciano FE, GO frà di loro vguali, e si tiri la retta E O; sarà A O vguale ad ED, e procedendosi come prima, si dimostrerà, che non tutte le rette, che cadono perpendicolari dalli punti A, & B alla retta OE, sono frà di loro vguali; e nell'istesso modo pigliandosi sempre parti vguali dall'vna, e l'altra parte, come E Q, OP, e con quest'ordine in infinito, e tirata la retta P Q, si dimostrerà, che non tutte le rette, che dalli punti A, & B cadono perpendicolari alla retta P Q, sono frà di loro vguali.

Di nuouo si prendano due qualunque altri punti nella curua ABC, come H, ed L, tirata la retta linea HL, per la terza dimostrat. HL chiude figura con la curua HML, e per l'antecedente dimostratione, cade dalla parte caua della curua HML; preso poi nella curua HML qualũque altro pũto M, dal quale si faccia cadere la retta MS [e] perpendicolare ad HL; nel punto L s'errigga LY [f] perpendicolare ad HL; si prenda in MN qualunque punto R, si faccia LT [g] vguale ad SR, e si tiri RT; e procedendosi come prima, si dimostrerà, che non tutte le rette, che dalla curua HML cadono perpendicolari-

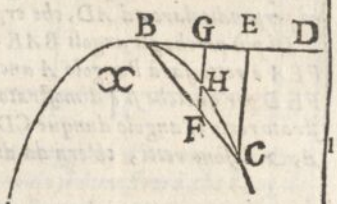
e 12. del 1.
f 11. del 1.
g 3. del 1.

lari alla retta RT, sono frà di loro vguali. In oltre continuate le rette SR, LT indeterminatamente verso Z, &, si prendano dall'vna, e dall'altra, parti vguali, come TY vguale ad RN; Y & vguale ad NZ, e con quest'ordine in infinito, si tirino le rette NY, Z&, e si mostri come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla curua HML perpendicolari alle rette NY, Z&, &c. sono frà di loro vguali; e perche i punti H, M, L sono presi ad arbitrio nella curua ABC, perciò qualunque positione habbiano le rette RT, NY, Z&, le linee rette, che dalla linea curua ABC cadono perpendicolari à quelle, mai saranno tutte frà di loro vguali.

Di più si prolunghino le rette FD, GA, indeterminatamente verso I, K, si prenda in DK qualunque punto K, si faccia AI h vguale à KD, e si tiri la retta IK, per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gl'angoli DKI, AIK, sono frà di loro vguali, e perche BK, per costruttione, è maggiore di AI, per la prima delle antecedenti dimostrationi, la retta, che dal punto B cade perpendicolare alla retta KI, è maggiore della retta, che dal punto A cade perpendicolare alla medesima retta KI; dal che non tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta IK, sono frà di loro vguali, se poi si prendano le parti Kb, Ia, frà loro vguali, tirata la retta a b, si mostrerà come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla curua ABC perpendicolari ad a b sono frà di loro vguali. Oltre à ciò si continui MS verso X, & LT verso V, si prenda in SX qualunque punto X, e si faccia LV k vguale ad XS; sarà MX maggiore di LV; si tiri la retta XV, e si mostri, come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalli punti M, L perpendicolari ad XV, sono frà di loro vguali; e perche i punti K, M, L furono presi ad arbitrio, in ogni positione, che sarà posta la linea XV, le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari ad XV, mai saranno tutte frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.

h 3. del 1.

k 3. del 1.



Se poi la retta linea, sopra la quale cadono le perpendicolari, continuata concorre con la curua BHC, come fà la retta BD, all'hora da qualunque punto C, preso nella curua BC, l si faccia cadere la retta CE, perpendicolare alla retta BD, si tiri la retta BC, la quale per la terza dimostratione chiude figura cõ la curua BHC, e per l'anteced. dimostratione, cade dalla parte caua X, si prenda nella retta BC qualunque punto F, e dal punto F si faccia cadere la retta FG m perpendicolare à BD, segarà la curua BHC in qualche punto H, e sarà FG maggiore di GH; essendo l'angolo rettilineo CBD acuto, e nella retta CB sono presi li punti C, F, da i quali cadono le rette CE, FG perpendicolari alla retta BD, essendo il punto F più vicino al punto B di quello, ch'è il punto C, per lo scolio alla 16. propos. la perpendicolare CE più remota dal punto B, sarà maggiore di FG, ch'è più vicina: mà FG è maggiore di GH, sarà CE maggiore di GH, ch'era da dimostrarsi.

l 12. del 1.

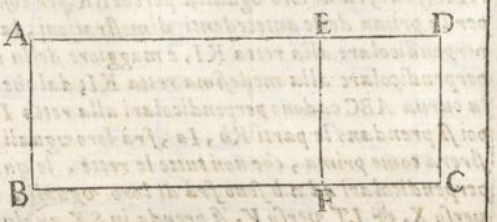
m 12. del 1.

VII.

Se due rette linee vguali, come AB, CD, sono in vn medesi-

mo piano, e fanno angoli retti con qualche altra linea retta BC, tirata la retta AD, se dalla retta AD cade qualche retta linea EF perpendicolare à BC, ed vguale ad AB, ouero CD. Dico, che la retta FE sarà perpendicolare ad AD, e gli angoli in A, & D saranno retti.

Perche le rette AB, CD sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con BC, per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli A, & D sono frà di loro vguali, si consideri il quadrilatero ABCD, del quale i lati opposti AB, DC sono frà di loro vguali, stante che sono retti, e per la 2. dimostratione li angoli in A, & D, sono frà di loro vguali. Similmente nel quadrilatero ABFE i lati AB, FE, per ipotesi, sono frà di loro vguali; gli angoli in B, ed F sono vguali, stante che sono retti, e per la seconda dimostratione, gli angoli BAE, FEA sono frà di loro vguali: In oltre nel quadrilatero EFCD i lati opposti EF, CD, per ipotesi sono frà loro vguali, gli angoli in F, & C sono retti, e per la citata seconda dimostratione, gli angoli CDE, FED sono frà di loro vguali: l'angolo CDE fù mostrato vguale all'angolo BAE; sarà l'angolo FED vguale all'angolo BAE: e perche l'angolo BAE fù mostrato vguale all'angolo FEA, gli angoli dunque FED, FEA sono frà di loro vguali, e per la decima definitione gli angoli in E sono retti, e la retta FE sarà perpendicolare ad AD, che era prima da dimostrarsi.



Di più perche gli angoli BAE, FEA furono mostrati vguali, e l'angolo FEA è retto, sarà l'angolo A ancora retto. Finalmente perche gli angoli CDE, FED per quelche si è dimostrato, sono frà loro vguali, e l'angolo FED è mostrato retto; l'angolo dunque CDE sarà retto. Per la qual cosa gli angoli in A, & D sono retti, ch'era da dimostrarsi.

VIII.

Se due rette linee vguali, come AB, CD, sono in vn medesimo piano, e fanno angoli retti con qualche altra linea retta BD, tirata la retta AC, se dalla retta AC cade qualche retta EF perpendicolare à BD, ed vguale ad AB, ouero CD. Dico, che ogn'vna delle altre rette, che dalla linea AC cade perpendicolare alla retta BD, sarà vguale ad AB, ouero CD.

Si prenda nella retta AC qualunque punto G, dal quale cada la retta GH [a] *perpendicolare alla rettta BD. Dico, che GH è vguale ad AB, ouero CD; perche se non è vguale, ò sarà maggiore, ouero minore; sia prima, se è*

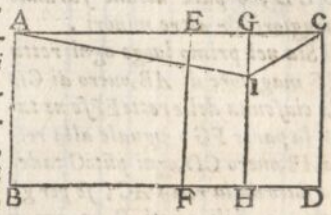
[a] 12. del 1.

possi-

possibile, la retta GH maggiore di AB, ouero CD. Si faccia IH [b] vguale ad AB, ouero CD, e si tirino le rette AI, CI. Essendo gli angoli DCA, BAC, per l'antecedente dimostratione, retti, sarà l'angolo BAI minore d'vn angolo retto, e l'angolo ancora DCI sarà minore del retto. Nel quadrilatero ABHI, i lati opposti AB, HI sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BD, per la seconda dimostratione, gl'angoli BAI, HIA sono frà di loro vguali: mà l'angolo BAI è minore del retto; sarà l'angolo HIA minore d'vn angolo retto, ed il supplimento, cioè l'angolo AIG, [c] sarà maggiore d'vn angolo retto. Similmente nel quadrilatero IHDC, essendo i lati IH, CD frà loro vguali, e gli angoli in H, & D retti, gli angoli HIC, DCI saranno frà loro vguali: fù mostrato l'angolo DCI minore d'vn angolo retto, sarà l'angolo HIC minore d'vn retto, ed il supplimento, cioè l'angolo CIG [d], sarà maggiore d'vn angolo retto; dalche tutto l'angolo AIC sarà maggiore di due angoli retti, e perciò i due angoli AIC, ACI, del triangolo AIC saranno molto maggiori di due angoli retti, che è contro alla decimasettima propos., non dunque la retta GH è maggiore di AB, ouero CD.

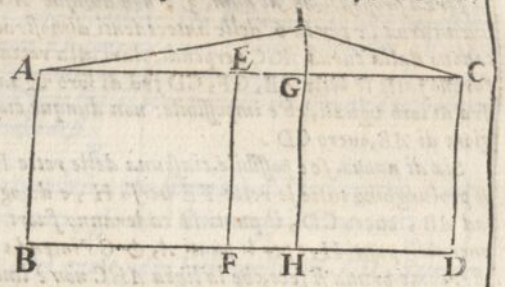
b 3. del 1.

c 13. del 1.



d 13. del 1.

Di nuouo, posto che GH sia minore di AB, ouero CD, si prolunghi HG verso I, e si faccia HI vguale ad AB, ouero CD, si tirino le rette AI, IC: Perche gli angoli DCA, BAC, per l'antecedente dimostratione, sono retti, gli angoli DCI, BAI saranno ottusi: Nel quadrilatero ABHI, i lati opposti AB, HI sono frà di loro vguali, gli angoli in B ed H sono retti, e per la 2. dimostratione, gli angoli BAI, HIA sono frà di loro vguali: fù mostrato l'angolo BAI, maggiore d'vn retto, sarà l'angolo HIA maggiore d'vn angolo retto. Considerando il quadrilatero IHDC, nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo HIC è maggiore d'vn angolo retto, dal che tutto l'angolo AIC sarà maggiore di due angoli retti, e li due angoli AIC, ACI, del triangolo ACI, saranno molto maggiori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione; non dunque la retta GH è minore di AB, ouero CD: fù mostrata non maggiore, in conseguenza la retta GH è vguale ad AB, ouero CD, come fù proposto dimostrare.

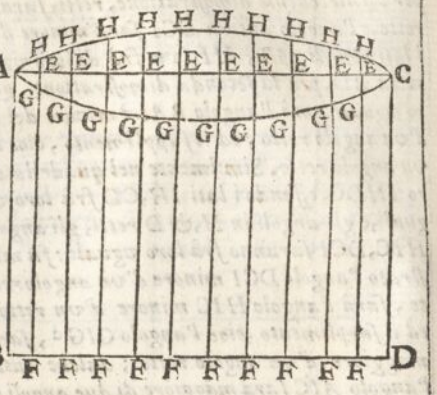


IX.

Se due rette linee vguali, come AB, CD sono in vn medesimo piano, e fanno angoli retti con qualche altra retta linea BD; tirata la retta AC, dagli innumerabili punti E immagginati in AC, s'intendano cadere le innumerabili rette EF ad angoli retti sopra la retta BD. Dico, che ogni retta linea EF è vguale alla retta AB, ouero CD.

Se

Se ogni retta EF non è vguale alla retta AB, ouero CD, niuna di quelle sarà vguale ad AB, perche se qualch' vna fosse vguale ad AB, ouero CD, per l'anteced. dimostratione tutte sarebbero vguali ad AB, ouero CD, ed vguali frà di loro, hor se nissuna sarà vguale ad AB, ouero CD, ogn' vna di quelle, ò sarà maggiore, ò sarà minore di AB, ouero CD, ò pure alcune saranno maggiori, & altre minori.



Sia nel primo luogo ogni retta EF maggiore di AB, ouero di CD da ciascuna delle rette EF se ne tagli la parte FG [a] *vguale alla retta AB, ouero CD, ogni pũto G caderà sotto della retta AC; se per gl' innumerabili punti G, e per li punti A C, s'intenderà passare la linea AGC, quella non sarà linea retta, perche se AGC fosse linea retta, perche li punti G cadono fuori della retta AC, le due rette linee AEC, AGC chiuderebbero figura, ilche è impossibile, per quel che si è dimostrato nell' annotatione dopò la terza propositione al num. 3.; non dunque AGC è linea retta, mà sarà linea curua, e per la 6 delle antecedenti dimostrationi non tutte le rette, che cadono dalla curua AGC perpendicolari alla retta BD sono frà di loro vguali; furono fatte le rette AB, GF, CD frà di loro vguali; sarebbero, e non sarebbero frà di loro vguali, ch'è impossibile: non dunque ciascuna delle rette EF è maggiore di AB, ouero CD.*

a 3. del 1.

Sia di nuouo, se è possibile, ciascuna delle rette EF minore di AB, ouero CD, si prolunghino tutte le rette FE verso H, e da ogn' vna si tagli FH [b] *vguale ad AB, ouero CD, li punti H caderanno fuori della retta AC. Per gl'innumerabili punti H, e per li punti A, & C s'intenda passare la linea AHC, si mostri come prima si fece, che la linea AHC non è linea retta, mà che è curua, e per la 6. dimostratione non tutte le rette, che dalla curua AHC cadono perpendicolari alla retta BD, sono frà di loro vguali; per costruttione le rette AB, H F, CD sono frà di loro vguali, sarebbero, e non sarebbero frà di loro vguali, ch'è impossibile; non dunque ciascuna retta HF è minore di AB, ouero CD.*

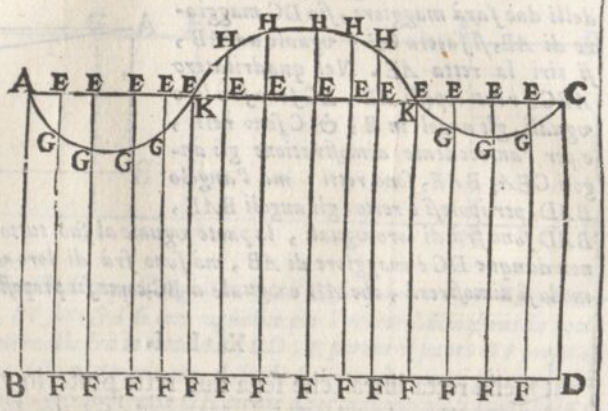
b 3. del 1.

Finalmente se alcune delle rette EF sono maggiori, ed altre minori di AB, ouero CD, le minori si prolunghino, e da ciascuna si tagli FG, ouero FH vguale ad AC, ouero CD, come nella seguẽte fig. Perche le rette FG, FH sono innumerabili, i punti G, H, saranno innumerabili; per gl'innumerabili punti G, H, A, C s'intenda passare la linea AGKHKGC; perche alcune delle linee FG, FH, sono continuate, come le notate FH, ed altre sono state tagliate come in G, gl'innumerabili punti G cadono sotto della linea AC, e li notati H sopra della medesima retta AC; d'onde la linea AGHC segarà la retta AC, come in K; e perche i punti G, H, K, sono infiniti, le rette KF saranno di quelle fatte vguali ad AB, ouero CD, e per l'antecedente propositione ogni retta EF sarà vguale ad AB, ouero CD, ch'era da dimostrarsi.

c 3. del 1.

Que-

Queſt'vltima parte ſi può anco dimoſtrare in queſto modo. Perche i punti G cadono ſotto della retta AC, li punti H ſopra, e li punti K nella retta AC; parte della linea AGHC cade ſotto, e parte cade ſopra della retta AC, dal che le parti AGK, CGK, chiudono figura con le rette AK, CK, la parte KHK chiude figura con la retta KK; per la qual coſa le linee AGK, KHK, KGC ſono linee curue, e la linea AGHKC ſarà vna linea curua compoſta di molte curue, e perche, per l'antecedente dimoſtratione, non tutte le rette, che dalla curua AGHC cadono perpendicolari alla retta BD, ſono frà di loro vguali; e per coſtruttione tutte le rette AB, GF, KF, HF, CD ſono frà di loro vguali, ſarebbero, e non ſarebbero frà di loro vguali, ch'è impoſſibile: non dunque alcune delle rette EF ſono maggiori, ed altre minori di AB, ouero CD; ſi è dimoſtrato, che non ſono tutte maggiori, ne tutte minori di AB, ouero CD, in conſeguenza le rette EF ſono frà di loro vguali, e ciaſcuna è vguale ad AB, ouero CD, che era da dimoſtrarſi.

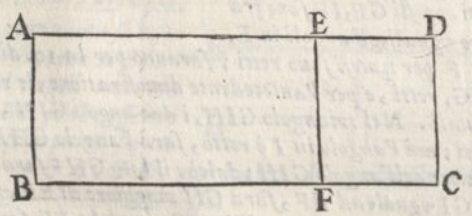


X.

Se due lati oppoſti d'vn quadrilatero ſono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con vn altro lato, gli altri due angoli ſono retti.

Sia il quadrilatero ABCD, del quale i due lati oppoſti AB, CD, ſiano frà di loro vguali, e facciano angoli retti col lato BC. Dico, che gli angoli in A, & D ſono retti.

Si prenda in AD qualunque punto E, dal quale cada la retta EF [a] perpendicolare al lato BC. Perche le rette AB, DC ſono frà loro vguali, gli angoli in B, & C ſono retti, per l'antecedente dimoſtratione la retta EF ſarà vguale ad AB, ouero DC, e per la dimoſtratione ſettima, gli angoli in A, & D ſono retti, ch'era da dimoſtrarſi.



[a] 12. del 1.

X I.

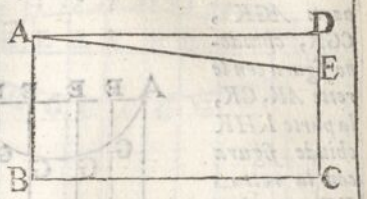
Se tutti gli angoli d'vn quadrilatero ſono retti, i lati oppoſti ſono frà di loro vguali.

Sia

Sia il quadrilatero ABCD, del quale i quattro angoli B, C, D, A siano retti. Dico, che il lato AB è vguale al lato DC, & il lato AD vguale al lato BC.

Se il lato DC non è vguale ad AB, vno delli due sarà maggiore, sia DC maggiore di AB, si faccia CE a *vguale ad AB, si tiri la retta AE. Nel quadrilatero ABCE i lati oppositi AB, EC sono frà loro vguali, gli angoli in B, & C sono retti, e per l'antecedente dimostratione gli angoli CEA, BAE, sono retti: mà l'angolo BAD, per ipotesi è retto, gli angoli BAE, BAD sono frà di loro vguali, la parte vguale al suo tutto, ch'è impossibile; non dunque DC è maggiore di AB, mà sono frà di loro vguali; Nell'istesso modo si dimostrerà, che AD è vguale à BC, come fù proposto dimostrare.*

a 3. del 1.



XII.

Quella retta linea, che sega due rette poste in vn medesimo piano ad angoli retti, è il minimo interuallo frà esse due rette linee.

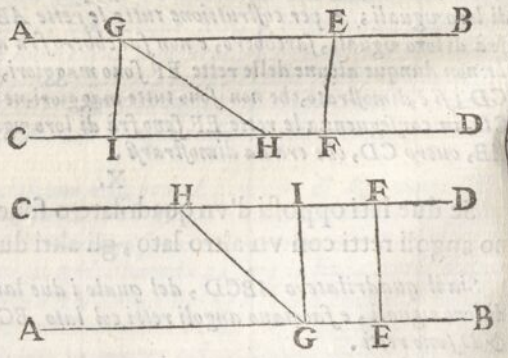
Siano le rette AB, CD, in vn medesimo piano segate dalla retta EF, ad angoli retti in E, ed F. Dico, che la retta EF è il minimo interuallo. Sia, se è possibile, il minimo interuallo qualche altra retta GH, che non seghi la retta CD ad angoli retti.

Si faccia FI a *vguale ad EG, e si tiri la retta GI. Nel quadrilatero GIFE i lati oppositi GE, IF sono frà loro vguali, gli angoli in E, ed F per ipotesi sono retti; saranno per la 10. dimostratione gli angoli EGI, FIG, retti, e per l'antecedente dimostratione, le rette GI, EF sono frà di loro vguali. Nel triangolo GIH, i due angoli GIH, GHI* b *sono minori di due retti; mà l'angolo in I è retto, sarà l'angolo GHI minore del retto, e perciò minore dell'angolo GIH; dalche il lato GH* c *sarà maggiore di GI; fù mostrato GI vguale ad EF, sarà GH maggiore di EF, non dunque GH è il minimo interuallo, che è contro all'ipotesi, perilche EF sarà il minimo interuallo frà le rette AB, CD, ch'era da dimostrarsi.*

a 3. del 1.

b 17. del 1.

c 19. del 1.

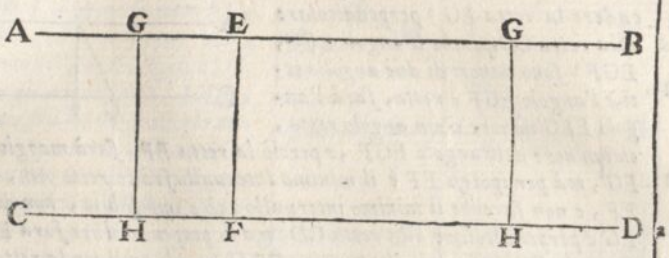


XIII.

Se due rette linee indeterminate sono in vn medesimo piano, e sono segate da vn altra retta linea ad angoli retti, quelle sono frà loro parallele.

Siano

Siano le rette AB, CD, indeterminate, poste in vn medesimo piano, le quali siano segate da qualche altra retta EF ad angoli retti in E, ed F. Dico, che le rette AB, CD, sono frà loro parallele. Si prenda in AB qualũque punto G, si faccia FH a vguale ad EG, e si tiri la retta GH; per la dimostrat. 10. gli angoli in G, ed H sono retti, e per l'11. dimostrat. le rette GH, EF sono frà di loro vguali: e per l'anteced. dimostrat. la retta GH è il minimo interuallo frà le rette AB, CD; E perche il punto G è preso ad arbitrio nella retta AB indeterminata, il simile si prouerà in tutti gli altri punti, dalche tutte le innumerabili rette GH tirate dagl'innumerabili punti presi in AB alla retta CD, secondo la costruttione anteced. saranno frà di loro vguali, saranno angoli retti con le rette AB, CD, e disegneranno i minimi interualli frà le rette AB, CD, per la qual cosa le rette AB, CD indeterminate, ritenendo sempre il medesimo interuallo, non si auuicinano, ne si scostano, e per la 34. definitione sono frà di loro parallele, come fù proposto dimostrare.



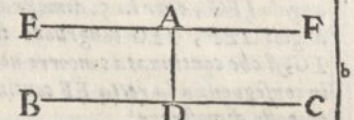
a 3. del 1.

COROLLARIO.

Dall'antecedente dimostratione si caua il modo, come per vn dato punto fuori d'vna data retta indeterminata si può far passare vna retta parallela alla data.

Intendasi la retta BC indeterminata, fuori della quale sia qualunque punto A, e si voglia per il punto A far passare vna retta parallela alla retta BC. Dal punto A si faccia cadere la retta AD a perpendicolare alla retta BC, continuata se bisogna, poi nel piano ADC per il punto A si faccia passare la retta EF b ad angoli retti con AD, sarà EF parallela à BC, poiche essendo le rette EF, BC in vn medesimo piano, segate dalla retta AD ad angoli retti in A, & D, per l'antecedente dimostratione le rette EF, BC sono frà loro parallele, come si disse.

a 12. del 1.



b 11. del 1.

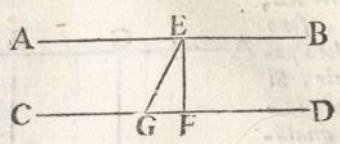
XIV.

Il minimo interuallo frà due rette parallele sega quelle parallele ad angoli retti.

Sia la retta EF il minimo interuallo frà le rette parallele AB, CD; Dico, che li angoli in E, ed F sono rètti. Se la retta EF non fà angoli retti con le rette AB, CD, dal punto E, si faccia

a 12. del 1. *cadere la retta EG* [a] *perpendicolare alla retta CD; perche li angoli EFG,*

b 17. del 1. *EGF* [b] *sono minori di due angoli retti, e l'angolo EGF è retto, sarà l'angolo EFG minore d'vn angolo retto, cioè minore dell'angolo EGF, e perciò la retta EF*



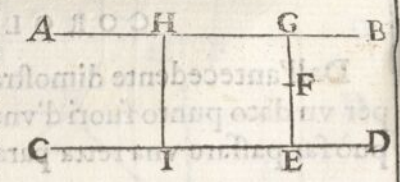
c 19. del 1. *sarà maggiore della retta EG, mà per ipotesi EF è il minimo interuallo frà le rette AB, CD, sarebbe EF, e non sarebbe il minimo interuallo, ch'è impossibile, non dunque la retta EG è perpendicolare alla retta CD, mà la perpendicolare sarà EF; Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta EF fà angoli retti con la retta AB, per la qual cosa il minimo interuallo EF, sega le rette parallele AB, CD, ad angoli retti, come fù proposto dimostrare.*

X V.

Se qualche retta linea sega vna di due rette parallele ad angoli retti, continuata segarà l'altra parallela ad angoli retti.

Siano le rette AB, CD frà di loro parallele, e qualche retta EF, seghi CD ad angoli retti. Dico, che prolongata la retta FE segarà la retta AB ad angoli retti. Sia HI il minimo interuallo frà le rette parallele AB, CD, per l'antecedente dimostratione, li angoli in H, & I sono retti. Si faccia GH

a 3. del 1. *vguale ad IE e si tiri la retta GE: Si considiri il quadrilatero HIEG, del quale i lati opposti HG, IE sono per costruttione frà di loro vguali, li angoli in H, & I, per quel che si è detto, sono retti, e per la dimostratione 1. li angoli HGE, IEG sono ancora retti, mà per ipotesi l'angolo IEF è retto, sarà l'angolo IEF vguale all'angolo IEG, e per la 5. dimostratione posta dopo la 3. propositione di questo, li angoli IEF, IEG congruono insieme, e la retta EF cade sopra della retta EG, si che continuata concorre nel punto G, mà l'angolo HGE fù mostrato retto in conseguenza la retta EF continuata sega la retta AB ad angoli retti, come fù proposto dimostrare.*



X V I.

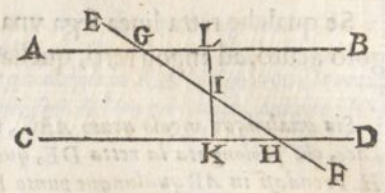
Se due rette linee poste in vn medesimo piano sono segate da vn altra linea retta, e gli angoli alterni sono frà di loro vguali, quelle due rette linee sono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD in vn medesimo piano, segate dalla retta EF, come

in G,

in G, ed H, egli angoli alterni CHG, BGH siano frà di loro vguali. Dico, che le rette AB, CD, sono frà di loro parallele.

Si diuida GH [a] *in due parti vguali in I, dal punto I si tirino le rette IL, IK* [b] *ad angoli retti con le rette AB, CD; si considerino li due triangoli ILG, IKH; perche gli angoli IGL, IHK, per ipotesi, sono frà loro vguali, gli angoli in L, & K sono retti, ed i lati IG, IH per costruttione sono frà loro vguali, per la 26. propositione i restanti angoli GIL, KIH sono frà di loro vguali: vgualmente se gli aggiunghi il commune angolo LIH, li due angoli GIL, LIH saranno vguali alli due angoli KIH, HIL; mà li due angoli GIL, LIH* [c] *sono vguali à due angoli retti, perciò li duè angoli, KIH, HIL saranno vguali à due angoli retti, dal che le rette LI, IK* [d] *costituiscono vna sola retta linea. In oltre perche le rette AB, CD sono in vn medesimo piano, e sono segate dalla retta LK ad angoli retti in L & K, per la 13. dimostratione, le rette AB, CD, sono frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi.*



a 10. del 1.
b 12. del 1.
c 13. del 1.
d 14. del 1.

XVII.

Se due rette linee parallele sono segate da vn altra retta, gli angoli alterni sono frà di loro vguali, ogn'angolo esterno è vguale all'angolo interno, ed opposto dalla medesima parte: e due angoli interni da vna medesima parte sono vguali à due angoli retti.

Siano le rette parallele AB, CD segate dalla retta EF, come in G, ed H. Dico, che gli angoli alterni BGH, CHG sono frà di loro vguali; che l'angolo EGB esterno è vguale all'angolo GHD interno, ed opposto dalla medesima parte BD, e che li due angoli BGH, DHG interni, e dalla medesima parte BD sono vguali à due angoli retti. Si diuida la retta GH [a] *in due parti vguali in I, dal punto I si faccia cadere la retta IK* [b] *perpendicolare à CD; perche le rette AB, CD sono parallele, e la retta IK sega ad angoli retti la retta CD, continuata la retta KI, per la 15. dimostratione concorrerà con AB ad angoli retti; concorra dunque in qualche punto L, si considerino li due triangoli ILG, IKH, gli angoli al vertice* [c] *HIK, GIL sono frà di loro vguali, gli angoli in K, ed L sono retti, il lato IG per costruttione è vguale al lato IH, e per la 26. propositione il restante angolo IGL è vguale al restante angolo IHK, per la qual cosa gli angoli alterni CHG, BGH sono frà di loro vguali, e perche gli angoli IHC, IHD* [d] *sono vguali alli due angoli IGB, IGA, leuatone gli vguali angoli IHC, IGB restano gli angoli AGH, DHG frà di loro vguali; mà l'angolo AGH* [e] *è vguale all'angolo EGB; sarà l'angolo EGB esterno vguale all'angolo DHG interno, ed opposto; vgualmente se gli aggiunghi l'angolo BGH, i due angoli EGB, BGH, saranno vguali alli due angoli DHG, BGH; mà li due angoli BGE, BGH* [f] *sono vguali à due angoli retti, i due angoli dunque DHG, BGH saranno vguali à due angoli retti, come fù proposto dimostrare.*

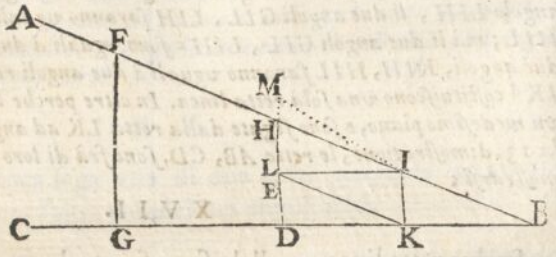
a 10. del 1.
b 12. del 1.
c 15. del 1.
d 13. del 1.
e 15. del 1.
f 13. del 1.

XVIII.

Se qualche retta linea sega vna delle rette, che contengono vn angolo acuto, ad angoli retti, quella continuata concorrerà con l'altra.

Sia qualunque angolo acuto ABC, e la retta ED seghi CB ad angoli retti. Dico, che prolongata la retta DE, quella concorrerà con AB in qualche punto H. Prendasi in AB qualunque punto F, ouero H, ouero I, dal quale a *si faccia cadere vna retta perpendicolare alla retta CB: ò quella cade nel punto D, ò cade nella continuatione DC, ouero nella parte DB; Cada prima nel punto D, come fà la retta HD, sarà l'angolo HDC retto; mà per ipotesi l'angolo EDC è retto, l'angolo dunque HDC sarà vguale all'angolo EDC, e per la dimostratione 5. dopo la 3. propositione, la retta DE cade sopra della retta HD, per la qual cosa continuata la retta DE concorre con AB nel punto H.*

a 12. del 1.



Di nuouo non cada quella perpendicolare nel punto D, mà cada nella continuatione DC, come fà la retta FG. Perche le rette FG, ED sono in vn medesimo piano, segate dalla retta CB ad angoli retti in G, & D, per la dimostratione 13. sono frà di loro parallele; dal che la retta DE continuata non si accosta alla retta FG, ed in conseguenza segarà AB in qualche punto H.

In oltre cada quella perpendicolare nella parte DB, come fà la retta IK; e posto prima, che DK sia vguale à KB; Si faccia DL b *vguale ad IK, e si tiri la retta IL. Se il punto L cade fuori dello spatio ABC, come in M, la retta DE segarà AB in qualche punto H. Cada il punto L dentro dello spatio ABC. Nel quadrilatero LDKI, perche i lati LD, IK sono frà loro vguali, gli angoli LDK, IKD sono retti, per la dimostratione decima, gli angoli DLI, KIL saranno angoli retti, e per la dimostratione vndecima, il lato LI sarà vguale al lato DK,*

b 3. del 1.

cioè à KB; si faccia IH c *vguale ad IB, e si tirino le rette HL, LK. Si considerino i due triangoli LIK, IKB. Perche i due lati LI, IK, sono vguali alli due BK, KI, e gli angoli LIK, BKI, sono retti; sarà la base IB,* d *ouero HI, vguale alla base LK, e l'angolo BIK vguale all'angolo LKI; se gli aggiunghino gli vguali angoli BKI, LIK, tutto l'angolo BKL sarà vguale*

c 3. del 1.

d 4. del 1.

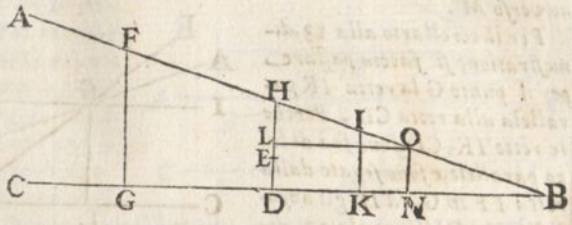
à tutto l'angolo BIL; ed il supplimento, cioè l'angolo DKL, e *sarà vguale al supplimento, cioè all'angolo LIH; si considerino i due triangoli HLI, LDK. Perche i due lati LK, KD, sono stati mostrati vguali alli due HI, IL, l'angolo LKD vguale all'angolo HIL; sarà la base HL* f *vguale ad LD, e l'angolo HLI vguale all'angolo KDL; Mà l'angolo KDL è retto, sarà l'angolo*

c 13. del 1.

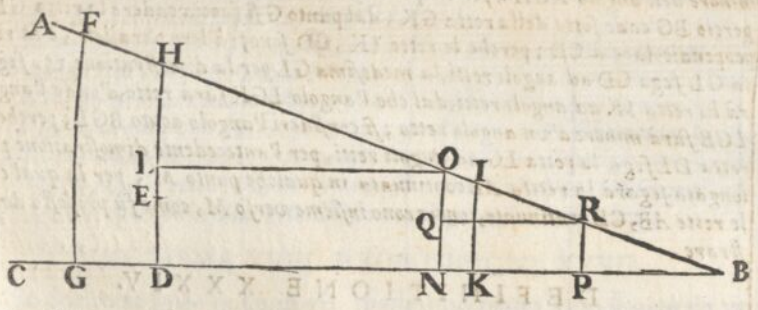
f 4. del 1.

ILH retto; dal che li due angoli ILD, ILH sono retti, e le rette HL, LD g *constituiscono vna sola retta linea, per la qual cosa la retta DE continuata concorre con AB in qualche punto H.* g 14. del 1.

Se DK non è vguale à KB, si diuida DB h *in due parti vguali in N, e posto prima, che il punto N cada frà li punti K, & B; nel punto N si erigga la retta NO* K *ad angoli retti con BD; Perche gli angoli in K, & N sono retti, le rette KI, NO, per la 13. dimostratione, sono frà di loro parallele, dal che NO continuata mai concorre con IK, e perciò segarà IB in qualche punto O. Si faccia DL* l *vguale ad ON, si faccia OH vguale ad OB, e si tirino le rette HL, OL, e si mostri come prima si fece, che le rette DL, LH constituiscono vna sola retta linea, per la qual cosa la retta DE continuata concorre con AB in qualche punto H.* h 10. del 1. K 11. del 1. l 3. del 1.



Se il punto N cade frà li punti D, K; si diuida NB m *in due parti vguali in P; nelli punti N, & P si eriggano le rette QN, PR* n *perpendicolari à CB,* m 10. del 1. n 11. del 1.



e si mostri, come prima si fece, che PR concorre con AB in qualche punto R; si faccia NQ o *vguale à PR, & RO vguale ad RB, e si tirino le rette OQ, QR, e procedendosi, come prima si fece, si dimostri, che le rette OQ, QN costituiscono vna sola retta linea; poi si faccia DL vguale ad ON, e si faccia HO vguale ad OB, e si tirino le rette HL, LO; e procedendosi come prima, si mostrerà, che le rette DL, LH costituiscono vna sola retta linea, dal che la retta DE continuata concorrerà con AB in qualche punto H, come fù proposto dimostrare.* o 3. del 1.

SCOLIO

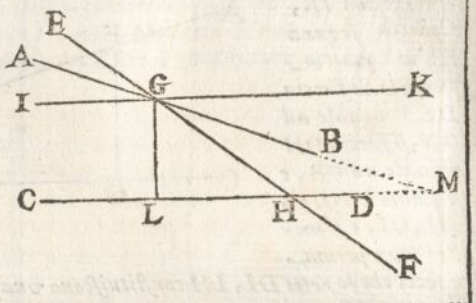
Nel seguente Theorema si dimostra l'vndecimo assioma d'Euclide.

Se due rette linee poste in vn medesimo piano sono segate da vn altra

linea

linea retta, e due angoli interni dalla medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle due rette linee prolongate concorreràno insieme da quella parte, doue sono i due angoli minori di due angoli retti.

Siano le rette AB, CD, in vn medesimo piano, segate dalla retta EF, come in G, ed H, e gli angoli BGH, DHG interni dalla medesima parte BD siano minori di due angoli retti. Dico, che le rette AB, CD, prolongate concorreranno verso M.



Per il corollario alla 13. dimostratione si faccia passare per il punto G la retta IK parallela alla retta CD. Perche le rette IK, CD, sono frà di loro parallele, e sono segate dalla retta EF in G, ed H, gli angoli KGH, DHG, per la 17. dimostratione, sono vguali à due angoli retti; mà i due angoli BGH, DHG, per ipotesi, sono minori di due angoli retti, perciò i due angoli BGH, DHG saranno minori delli due KGH, DHG; leuatone il commune angolo DHG, resta l'angolo BGH minore dell'angolo KGH, per la qual cosa la retta GB sega l'angolo KGH, e perciò BG cade sotto della retta GK; dal punto G si faccia cadere la retta GL [a] *perpendicolare à CD; perche le rette IK, CD sono frà loro parallele, e la retta GL sega CD ad angoli retti, la medesima GL per la dimostratione 15. segarà la retta IK ad angoli retti, dal che l'angolo LGK sarà retto, d'onde l'angolo LGB sarà minore d'vn angolo retto; si consideri l'angolo acuto BGL; perche la retta DL sega la retta LG ad angoli retti, per l'antecedente dimostratione prolongata segarà la rettta AB continuata in qualche punto M, per la qual cosa le rette AB, CD continuate, concorrono insieme verso M, come fù proposto dimostrare.*

a 12 del 1.

DEFINITIONE XXXIV.

D'EVCLIDE DIMOSTRATA

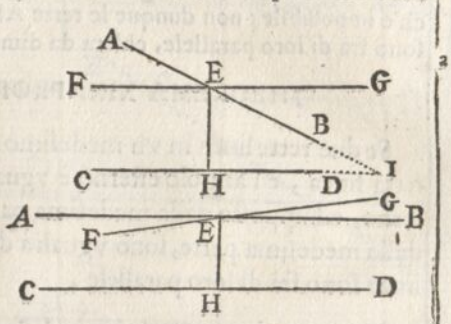
THEOREMA

Se due rette linee in vn medesimo piano non sono frà di loro parallele, quelle continuate concorrono scambieuolmente in qualche punto: e se due rette linee in vn medesimo piano continuate nõ concorrono, quelle sono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD in vn medesimo piano, e supposto prima, che non siano frà di loro parallele. Dico, che continuate concorrono scambieuolmente in qualche punto.

Pren-

Prendaſi nella retta AB qualunque punto E, per il quale ſi faccia paſſare la retta FG, per il Corollario alla 13. dimoſtratione, parallela à CD, quella ſegarà la retta AB, perche ſe paſſaſſe ſecondo l'eſtentione AB, ſarebbe AB parallela à CD, ch'è contro all'ipoteſi; ſeghi dunque FG la retta AB, e la parte EG cada fuori dello ſpatio ABDC, dal pũto E a ſi faccia cadere la retta EH perpendicolare à CD; e perche FG, CD ſono parallele, e la retta FH ſega CD ad angoli retti, per la 15. dimoſtratione la medeſima EH ſegarà FG ad angoli retti, dal che l'angolo HEG ſarà retto, d'onde l'angolo HEB ſarà minore del retto: mà l'angolo DHE è retto, i due angoli dunque BEH, DHE ſono minori di due angoli retti; e per l'antecedente Theorema le rette AB, CD, continuate concorrono inſieme verſo I, ch'era dà dimoſtrarſi nel primo luogo.



a 12. del 1.

Di nuouo. Dico, che ſe le rette AB, CD, continuate non concorrono, ſono frà di loro parallele.

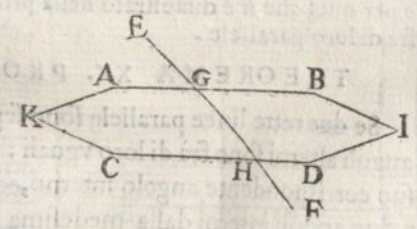
Prendaſi in AB qualunque punto E, per il quale ſi faccia paſſare per il Corollario alla 13. dimoſtratione la retta FG parallela alla retta CD; la retta FG paſſarà ſopra della retta AB, perche ſe non paſſa ſopra della retta AB quelle ſi ſegaranno: cada la parte EG fuori dello ſpatio ABDC, dal punto E ſi faccia cadere la retta EH b perpendicolare à CD, e per là 15. dimoſtratione, HE farà angoli retti con la parallela FG, dal che l'angolo HEG ſarà retto, e l'angolo HEB minore del retto: mà l'angolo in H è retto, i due angoli dunque BEH, DHE ſaranno minori di due angoli retti, e per l'antecedente Theorema, le rette AB, CD continuate concorreranno inſieme, ch'è contro all'ipoteſi; non dunque la retta FG ſega la retta AB, mà l'vna paſſa ſopra dell'altra, per la qual coſa la retta AB è parallela alla retta CD, come fù propoſto dimoſtrare.

b 12. del 1.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXVII.

Se due rette linee poſte in vn medeſimo piano ſono ſegate da vn altra linea retta, e gli angoli alterni ſono frà di loro vguali, quelle rette linee ſono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD in vn medeſimo piano ſegate dalla retta EF, come in G, & H, e gli angoli BGH, CHG alterni ſiano frà di loro vguali. Dico, che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele. Se non ſono parallele, prolongate concorreranno in qualche punto I, ouero K; concorrano per eſempio nel punto I; perche HDI è vna ſola retta, & GBI è



vna

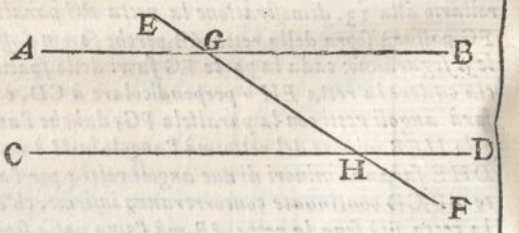
vna ſola retta, ſarà IGH triangolo rettilineo, nel quale il lato IH è continuato verſo C, d'onde l'angolo eſterno CHG [a] ſarà maggiore dell'angolo BGH, interno ed oppoſto; mà per ſuppoſitione l'angolo BGH è vguale all'angolo CGH, ſarebbe l'angolo GHC vguale, e maggiore dell'angolo BGH, ch'è impoſſibile; non dunque le rette AB, CD continuate concorrono, mà ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

a 16. del 1.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due rette linee in vn medeſimo piano ſono ſegate da vn altra retta linea, e l'angolo eſterno è vguale al corriſpondente angolo interno, ed oppoſto dalla medeſima parte; ouero due angoli interni, e dalla medeſima parte, ſono vguali à due angoli retti, quelle due rette linee ſono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD in vn medeſimo piano, ſegate dalla retta EF, come in G, ed H, e l'angolo EGB eſterno ſia vguale all'angolo DHG interno ed oppoſto; ouero i due angoli BGH, DHG interni, e dalla medeſima parte BD, ſiano vguali à due angoli retti. Dico, che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.



Perche gli angoli EGB, AGH al vertice [a] ſono frà di loro vguali, e l'angolo EGB, per *ipoteſi*, è vguale all'angolo DHG, ſaranno gli angoli alterni AGH, DHG frà di loro vguali, dal che le rette AB, CD [b] ſono frà loro parallele.

a 15. del 1.

b 27. del 1.

Di nuouo poſto, che gli angoli BGH, DHG ſiano vguali à due angoli retti. Dico, che le rette AB, CD, ſono frà loro parallele. Perche gli angoli EGB, BGH [c] ſono vguali à due angoli retti, e gli angoli DHG, BGH, per ipoteſi, ſono vguali à due angoli retti, i due angoli EGB, BGH, ſaranno vguali alli due angoli DHG, BGH; ſe ne leui il commune angolo BGH, reſta l'angolo eſterno EGB, vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto, e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.

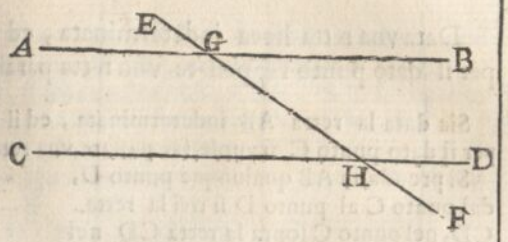
c 13. del 1.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIX.

Se due rette linee parallele ſono ſegate da vna altra retta linea, gli angoli alterni ſono frà di loro vguali; ogni angolo eſterno è vguale al ſuo corriſpondente angolo interno, ed oppoſto dalla medeſima parte: e due angoli interni dalla medeſima parte ſono vguali à due angoli retti.

Siano

Siano le rette parallele AB, CD, segate dalla retta EF, come in G, ed H; Dico, che gli angoli alterni BGH, CHG sono frà loro vguali, l'angolo EGB esterno è vguale all'angolo DHG interno, ed opposto; e li due angoli BGH, DHG interni, e dalla medesima parte BD, sono vguali à due angoli retti.



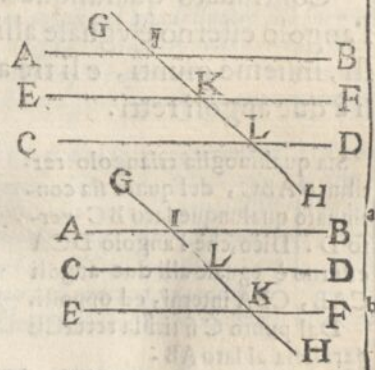
Se l'angolo CHG non è vguale all'angolo BGH, vno delli due sarà maggiore; posto che l'angolo CHG sia maggiore dell'angolo BGH, s'aggiunga all'vno, ed all'altro l'angolo DHG: i due angoli BGH, DHG saranno minori delli due angoli CHG, GHD; mà li due angoli CHG, GHD [a] sono vguali à due angoli retti, saranno i due angoli BGH, DHG minori di due angoli retti, per il che le rette AB, CD [b] continuate concorrono insieme, ch'è contro all'ipotesi, non dunque l'angolo CHG è maggiore dell'angolo BGH, mà sono frà di loro vguali, ed i supplimenti, cioè gli angoli alterni AGH, DHG, [c] sono ancora frà di loro vguali; e perche l'angolo AGH è vguale [d] all'angolo al vertice EGB, sarà l'angolo EGB esterno vguale all'angolo DHG interno, ed opposto: all'vno ed all'altro s'aggiunga l'angolo BGH, due angoli EGB, BGH saranno vguali alli due angoli BGH, DHG: mà i due angoli EGB, BGH [e] sono vguali a due angoli retti, i due angoli dunque BGH, DHG, interni dalla medesima parte saranno vguali à due angoli retti, ch'era da dimostrarsi.

[a] 13. del 1.
[b] 11. assiom.
[c] 15. del 1.
[d] 15. del 1.
[e] 13. del 1.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXX.

Quelle rette linee, che in vn medesimo piano sono parallele ad vna terza, sono parallele frà di loro.

Sia la retta AB parallela alla retta EF, e la retta CD parallela alla medesima EF. Dico, che le rette AB, CD sono frà di loro parallele.



Si concepiscano segate tutte da qualche retta GH, come in I, K, L. Perche le rette AB, EF, sono frà di loro parallele, l'angolo [a] GIB sarà vguale all'angolo IKF; similmente perche le rette CD, EF, per ipotesi, sono frà loro parallele, segate da GH, l'angolo IKF [b] sarà vguale all'angolo KLD: mà l'angolo IKF fù mostrato vguale all'angolo GIB; sarà l'angolo GIB vguale all'ãgolo ILD.

[a] 29. del 1.
[b] 29. del 1.

Inoltre perche le rette AB, CD poſte in vn medeſimo piano, ſono ſegate dalla retta GH, e l'angolo eſternoGIB è vguale all'angolo ILD interno, ed oppoſto, le rette AB, CD [c] ſaranno frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

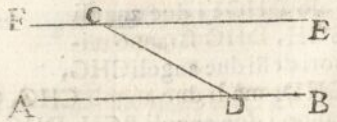
c 27. del 1.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXI.

Data vna retta linea indeterminata, ed vn punto fuori di eſſa, per il dato punto far paſſare vna retta parallela alla data

Sia data la retta AB indeterminata, ed il punto fuori di eſſa ſia C, per il dato punto C ſi vuole far paſſare vna retta parallela ad AB.

Si prenda in AB qualunque punto D, dal punto C al punto D ſi tiri la retta CD, nel punto C ſopra la retta CD nel piano CDB [a] ſi coſtituiſca l'angolo ECD vguale all'angolo ADC. Dico, che la retta EC è parallela ad AB.



a 23. del 1.

Perche le rette CE, AB per coſtruttione ſono in vn medeſimo piano, ſegate dalla retta CD, e gl'angoli ADC, ECD alterni ſono frà di loro vguali, perciò le rette CE, AB [b] ſono frà di loro parallele, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

b 27. del 1.

SCOLIO.

Nella prima impreſſione di queſt'opera la dimoſtratione dell' 11. *aſſioma d'Euclide occupa preciſamente queſto luogo; mà in queſta ſeconda impreſſione è ſtata traſportata nel primo ſcolio poſto auanti alla* 27. *propoſitione, à cauſa che iui è ſtato biſogno dimoſtrare la diffinitione data da Euclide alle parallele, alla quale deue precedere eſſo* 11. *aſſioma, però ſi guardi il citato ſcolio.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Continuato qualunque lato d'vn triangolo rettilineo, l'angolo eſterno è vguale alli due angoli interni, ed oppoſti, inſieme giunti, e li trè angoli del triangolo ſono vguali à due angoli retti.

Sia qualſiuoglia triangolo rettilineo ABC, del quale ſia continuato qualunque lato BC verſo D. Dico, che l'angolo DCA eſterno è vguale alli due angoli CAB, CBA interni, ed oppoſti.



Dal punto C ſi tiri la retta CE parallela al lato AB.

Perche le rette parallele AB, EC ſono ſegate dalla retta BD

l'an-

l'angolo esterno ECD [b] sarà vguale all'angolo ABC interno, ed opposto dalla medesima parte. Similmente perche le parallele AB, EC sono segate dalla retta AC, gli angoli ECA, BAC alterni, sono frà di loro vguali, dal che li due angoli DCE, ECA, cioè tutto l'angolo esterno DCA, [c] è vguale alli due angoli CAB, CBA, interni, ed opposti, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

[b] 29.prop.

[c] 2.assiom.

Di nuouo essendosi dimostrato l'angolo D C A vguale alli due angoli C A B, C B A, giunti insieme, all'vna, ed all'altra parte s'aggiunga vgualmente l'angolo ACB, li trè angoli CAB, CBA, A C B [c] saranno vguali alli due angoli DCA, ACB, mà li due angoli DCA, A C B, [d] sono vguali à due angoli retti; li tre angoli dunque CAB, CBA, ACB, del triangolo A B C, sono vguali à due angoli retti, ch'era da dimostrarsi.

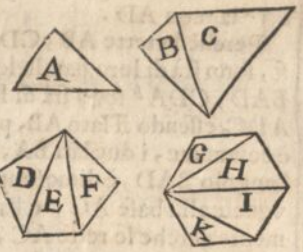
[c] 2.assioma

[d] 13.prop.

SCOLIO

Da quel, che s'è detto, facilmente si viene in cognitione à quanti angoli retti siano vguali gli angoli d'ogni figura rettilinea.

Tutti gli angoli di qualunque figura rettilinea sono vguali à tanti angoli retti, per quanto è il duplo numero de' lati, che restano, detrattone due.



Per essempio, il triangolo A hà tre lati, detrattone due, resta vno, il di cui duplo sarà due, e così diremo, che trè angoli d'vn triangolo sono vguali à due retti, come s'è dimostrato nell'antecedente propositione.

Il quadrilatero B C si diuide nè i due triangoli B, & C; e perche li tre angoli d'vn triangolo [a] sono vguali à due retti, li sei angoli dunque delli due triangoli B, & C, sono vguali à quattro retti; mà li sei angoli dei triangoli B, & C sono vguali à i quattro angoli del quadrilatere BC, saranno i quattro angoli del quadrilatere BC, [b] vguali à quattro retti, cioè, leuato due dal numero de' lati, resta due, il di cui duplo è quattro, e così diremo, che i quattro angoli della figura quadrilatera sono vguali à quattro angoli retti.

[a] 32.prop.

[b] 1.assiom.

Similmente la figura di cinque lati DEF si diuide in trè triangoli, gli angoli d'ogni triangolo [c] sono vguali à due retti, saranno tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F vguali à sei angoli retti, ma tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F, sono vguali alli cinque angoli della figura di cinque lati, perciò tutti gli angoli della figura di cinque lati, [d] sono vguali à sei retti, cioè, leuato due dal numero de' lati della figura di cinque lati, resta trè, il di cui duplo è sei, e così diremo, che i cinque angoli della figura di cinque lati sono vguali à sei angoli retti.

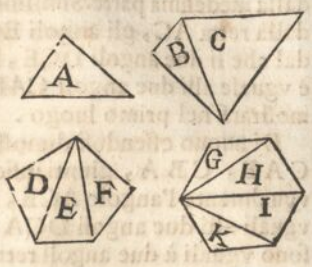
[c] 32.prop.

[d] 1.assiom.

Di nuouo la figura di sei lati G H I K, si diuide nè i quattro triangoli

G, H, I, K; e perche trè angoli d'vn triangolo [e] *ſono vguali à due retti, tutti gli angoli de'i quattro triangoli G, H, I, K, ſono vguali ad otto angoli retti, mà tutti gli angoli delli quattro triangoli G, H, I, K ſono vguali alli ſei angoli della figura di ſei lati GHIK, gli angoli dunque della figura di ſei lati ſono vguali ad otto angoli retti, cioè leuato due dal numero de' lati, che ſono ſei, reſta quattro, il di cui duplo è otto, e coſi diremo, che gli angoli della figura di ſei lati ſono vguali ad otto angoli retti, e con queſt'ordine ſi procederà in tutte le altre figure rettilinee.*

e 32. prop.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se due rette linee ſono vguali, e parallele, quelle, che che congiungono gl'eſtremi dalle medeſime parti, ſono frà di loro vguali, e parallele.



Siano le rette linee A B, C D, frà di loro vguali, e parallele; tirate le rette AC, BD, Dico che le rette AC, B D ſono frà di loro vguali, e *parallele*. *Si* tiri [a] la retta AD.

a 1. poſtul.

Perche le rette *AB, CD*, per *ipoteſi*, ſono frà di loro parallele, ſegate dalla retta AD, gli angoli alterni BAD, CDA [b] ſono frà di loro vguali. *Si conſiderino i triangoli ADB, ADC*, eſſendo il lato *AB*, per *ipoteſi* vguale al lato CD, ed il lato A D è commune, *i due lati BA*, A D, [c] ſono vguali alli due lati C D, D A, l'angolo *BAD*, è dimoſtrato vguale all'angolo CDA, ſarà la baſe B D [d] vguale alla baſe AC, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD. Finalmente perche le rette AC, BD ſono ſegate dalla retta AD, e gli angoli alterni BDA, CAD, ſono frà di loro vguali, le rette AC, BD [e] ſaranno frà di loro parallele. Per la qual coſa le rette AC, BD, ſono frà di loro vguali, e parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

b 27. prop.
c 2. aſſiom.
d 4. prop.
e 27. prop.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

In ogni parallelogrammo i lati oppoſti ſono frà di loro vguali, gli angoli oppoſti ſono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali.

Sia qualunque parallelogrammo A B D C, il di cui *diametro* A D, come nella figura della propoſitione antecedente. *Dico che il lato* A B è vguale al lato oppoſto CD, il lato AC è vguale all'oppoſto BD, l'angolo B è vguale all'angolo oppoſto C, l'angolo B A C è vguale all'angolo op-

poſto

posto BDC, ed il diametro AD diuide il parallelogrammo ABDC in due parti vguali.

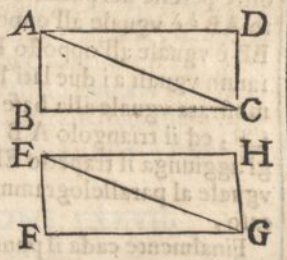
Perche il quadrilatero ABDC è suppoſto parallelogrammo, illato AB [a] sarà parallelo al lato D C, ed il lato A C sarà parallelo al oppoſto DB, ed eſſendo i lati AB, DC frà di loro paralleli ſegati dalla retta A D, gli angoli alterni BAD, CDA [b] ſono frà di loro vguali. Similmẽte perche la retta AD ſega le parallele AC, BD, gli angoli C A D, BDA alterni [b] ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i triangoli BAD, DCA, de' quali i due angoli B A D, B D A, dell'vno, ſono vguali alli due angoli CAD, C D A, dell'altro, il lato AD è commune à tutti due, ſaranno i rimanenti due lati BD, BA [c] dell'vno, vguali à i rimanenti due lati AC, DC dell'altro, cioè il lato AB vguale al lato DC, ed il lato AC vguale al lato D B, ed il reſtante angolo B ſarà vguale al reſtante angolo C; e perche l'angolo BAD è moſtrato vguale all'angolo C D A, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD, ſarà tutto l'angolo BAC [d] vguale all'oppoſto angolo B D C. Finalmente perche i due lati AB, B D, del triangolo BAD, ſono moſtrati vguali à i due lati A C, D C del triangolo A DC, e l'angolo B è moſtrato vguale all'angolo C, ſarà il triangolo A B D [e] vguale al triangolo ACD: per la qual coſa i lati oppoſti d'ogni parallelogrammo ſono vguali, gli angoli oppoſti ſono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali, ch'era da *dimoſtrarſi*.

[a] 25. defin.
[b] 29. prop.
[b] 29. prop.
[c] 26. prop.
[d] 2. aſſiom.
[e] 4. prop.

SCOLIO.

Li rettangoli contenuti da linee rette vguali ſono frà di loro vguali.

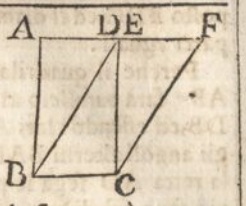
Siano li rettangoli BD, FH, e ſia AB vguale ad EF, ed il lato BC vguale ad FG. Dico che li rettangoli BD, FH ſono frà di loro vguali; ſi tirino li diametri AC, EG, perche li lati AB, BC ſono vguali à i lati EF, FG, e li angoli in B ed F ſono vguali, ſtante che ſono retti, ſarà il triangolo ABC [a] vguale al triangolo EFG ed i loro dupli, cioè li rettangoli BD, FH [b] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.



[a] 4. prop.
[b] 34. prop.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXV.

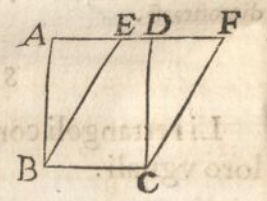
I Parallelogrammi coſtituiti ſopra d'vna medeſima baſe, e frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali.



Siano i parallelogrammi ABCD, EBCF, sopra la medesima base BC, e collocati frà le medesime parallele AF, BC; dico che la superficie parallelogramma A B C D è vguale alla superficie parallelogramma EBCF.

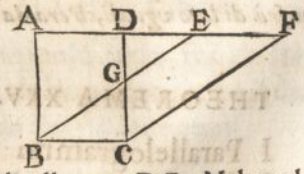
O' gli angoli ADC, FEB terminano in vn solo punto come appariſce nella prima figura, ò l'angolo FEB cade nel lato AD, come nella ſeconda figura; ò pure cade fuori del lato AD nella continuatione DF, come nella terza figura. Suppoſto prima che l'angolo FEB, termini nel punto D, perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [a] è vguale all'oppoſto lato BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato E F, è vguale all'oppoſto lato B C, ſarà il lato AD vguale al lato EF. Similmente nel parallelogrammo ABCD il lato AB è vguale all'oppoſto lato D C, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale al lato oppoſto FC, però i due lati AB, BD del triãgolo ABD, [b] ſono vguali à i due lati EC, CF del triangolo ECF; la baſe AD fù moſtrata vguale alla baſe EF, ſarà l'angolo ABD [c] vguale all'angolo ECF, ed il triangolo ABD [d] vguale al triangolo ECF, vgualmente ſe gl'aggiunga il commune triangolo EBC, ne verrà il parallelogrammo ABCD, [e] vguale al parallelogrammo EBCF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 34. prop.
b 2. aſſiom.
c 8. prop.
d 4. prop.
e 2. aſſiom.



Cada il punto E frà i punti A, & D, come nella ſeconda figura. Perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [f] è vguale all'oppoſto BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EF è vguale all'oppoſto BC, ſarà il lato A D [u] vguale al lato EF, ſe ne leui la commune parte E D, reſta A E [g] vguale alla retta D F. In oltre perche nel parallelogrãmo ABCD il lato AB [h] è vguale all'oppoſto DC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale all'oppoſto FC, i due lati AB, BE, del triangolo ABE, ſaranno vguali a i due lati DC, CF del triangolo DCF, la baſe AE è dimoſtrata vguale alla baſe D F, ſarà l'angolo A B E [i] vguale all'angolo D CF, ed il triangolo A B E [K] vguale al triangolo D C F; vgualmente ſe gl'aggiunga il trapetio EBCD, ne viene il parallelogrammo A B C D vguale al parallelogrammo E B C F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo caſo.

f 34. prop.
u 1. aſſiom.
g 3. aſſiom.
h 34. prop.
i 8. prop.
K 4. prop.
l 2. aſſiom.



Finalmente cada il punto E nella cõtinuatione D F, come nella terza figura. Perche il lato A D [m] è vguale all'oppoſto BC, ed il lato E F è vguale all'oppoſto BC, ſarà il lato A D [n] vguale al lato EF; vgualmente ſe gli aggiunga la retta D E, ne viene la retta A E [o] vguale alla retta D F. Nel parallellogrammo B D il lato A B [p] è vguale all'oppoſto D C, e nel parallelogrammo E B C F il lato E B è vguale all'oppoſto F C; però i due lati AB, BE, del triangolo ABE, ſono vguali à i due lati DC, CF, del

m 34. prop.
n 1. aſſiom.
o 2. aſſiom.
p 34. prop.

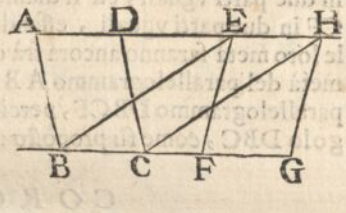
trian-

triangolo D C F; la baſe AE è moſtrata vguale alla baſe DF, ſarà l'angolo A B E [q] vguale all'angolo D C F, ed il triangolo A B E [r] vguale al triangolo DCF; da i quali ſe ne leui il commune triangolo D G E, reſta il trapetio ABGD [ſ] vguale al trapetio GCFE, à i quali s'aggiunga vgualmente il triangolo GBC, ne viene il parallelogrammo A B C D [t] vguale al parallelogrammo EBCF. Per la qual coſa i parallelogrammi, che hanno vna medeſima baſe, e ſono frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

[q] 8. propoſ.
[r] 4. propoſ.
[ſ] 3. aſſiom.
[t] 2. aſſiom.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVI.

I Parallelogrammi, che hanno vguali baſi, e ſono collocati frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali.



Siano li parallelogrammi A B C D, E F G H, i quali habbiano le baſi B C, F G vguali, e ſiano collocati frà le medeſime parallele A H, BG. Dico che ſono frà di loro vguali.

Per dimoſtrar queſto dal punto B al punto E [a] ſi tiri la retta BE, e dal punto C al punto H ſi tiri la retta CH.

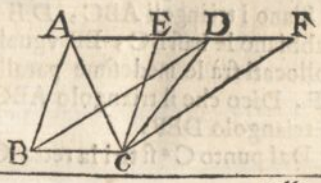
[a] 1. poſt.

Perche la baſe B C è ſuppoſta vguale alla baſe F G, ed il lato F G [b] è *vguale all'oppoſto EH, ſarà la retta BC* [c] *vguale alla retta EH;* e perche la retta AH è parallela, per ipoteſi, alla retta BG, ſaranno le rette EH, C B, frà di loro vguali è parallele, dal che le rette linee E B, H C, che congiungono gli eſtremi, [d] ſaranno vguali, e parallele; ed il quadrilatero EBCH [e] ſarà parallelogrammo. Si conſiderino li due parallelogrammi ABCD, EBCH, i quali hanno la medeſima baſe BC, e ſono coſtituiti frà le medeſime parallele AH, BG, e perciò ſaranno, [f] frà di loro vguali. Similmente i due parallelogrammi E B C H, EFGH, hanno la medeſima baſe EH, e ſono coſtituiti frà le medeſime parallele A H, B G inconſeguenza ſono frà di loro vguali; ma il parallelogrammo A B C D fù moſtrato vguale al parallelogrammo EBCH; il parallelogrammo dunque ABCD [g] ſarà vguale al parallelogrammo E F G H, ch'era da dimoſtrarſi.

[b] 34. prop.
[c] 1. aſſiom.
[d] 33. prop.
[e] 35. defin.
[f] 35. prop.
[g] 1. aſſiom.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXVII.

I triangoli, che hanno la medeſima baſe, e ſono collocati frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali.



Siano i triangoli A B C, D B C, i quali habbiano la medeſima baſe BC, e ſiano collocati frà le medeſime parallele AF, BC. Dico che ſono frà di loro vguali.

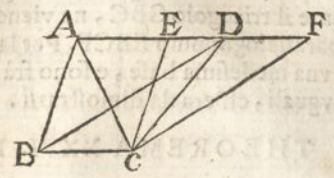
Dal punto C [a] ſi tiri la retta CE pa-

[a] 31. prop.

ralle-

rallela alla retta A B, che concorra con E F in qualche punto E ; e dal medesimo punto C si tiri la retta CF parallela alla retta B D , la quale concorrerà con la retta AD continuata in qualche punto F .

Perche le rette AF, BC, per ipotesi, sono parallele , e la retta C E per costruttione è parallela ad A B , come anco la retta C F è parallela al lato B D ; i quadrilateri ABCE , D B C F, [b] saranno parallelogrammi , i quali, hauendo la medesima base BC, ed essendo collocati frà le medesime parallele AF, BC, [c] saranno frà di loro vguali; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo ABCE in due parti vguali, ed il diametro DC, diuide il parallelogrammo DB CF in due parti vguali , essendo essi parallelogrammi frà di loro vguali, le loro metà saranno ancora frà di loro vguali: mà il triangolo A B C è la metà del parallelogrammo A B C E, ed il triangolo D B C è la metà del parallelogrammo DBCF, perciò il triangolo ABC sarà vguale al triangolo DBC, come fù proposto dimostrare .

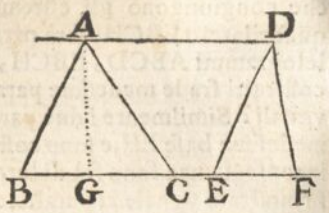


[b] 35. defin.
[c] 35. prop.
[d] 34. prop.

COROLLARIO.

Da qui è manifesto, *che se li triangoli posti frà le* medesime *parallele hanno ineguali basi*, quello sarà maggiore, che haurà la base maggiore .

Per essempio siano li triangoli ABC, D EF, frà le medesime parallele A D, BF, e sia la base B C maggiore della base E F. Dico che il triangolo ABC sarà maggiore del triangolo D E F. Si faccia CG vguale ad EF, e si tiri la retta GA, sarà BC maggiore di GC, ed il triangolo A B C maggiore del triangolo AGC, mà per l'antecedente propositione il triangolo A G C è vguale al triangolo D E F, sarà il triangolo ABC maggiore del triangolo DEF, come si disse .

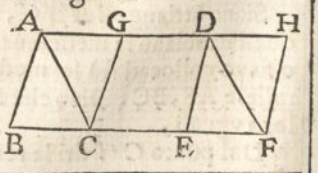


THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

I triangoli, che hanno vguali basi , e sono collocati frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali.

Siano i triangoli ABC, D E F, i quali habbiano le basi BC, EF vguali, e siano collocati frà le medesime parallele A H, BF. Dico che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF.

Dal punto C [a] si tiri la retta CG paral-



[a] 31. prop.

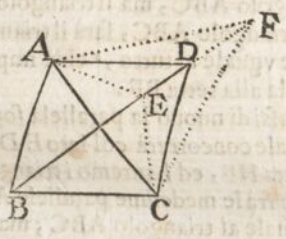
lela

lela alla retta BA, e dal punto F si tiri la retta FH parallela al lato E D; essendo, per ipotesi, AH parallela à BF, i quadrilateri BG, EH [b] saranno parallelogrammi, i quali, hauendo le basi BC, EF vguali, ed essendo collocati frà le medesime parallele AH, B F, sono [c] frà di loro vguali; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo BG in due parti vguali, ed il diametro D F diuide il parallelogrammo E H in due parti vguali, essendo i parallelogrammi BG, EH vguali, le loro metà, cioè li triangoli ABC, DEF, [e] saranno frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi

[b] 35. defin.
[c] 36. prop.
[d] 34. prop.
[e] 3. assiom.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIX.

I triangoli vguali costituiti in vna medesima base, e collocati dalla medesima parte, sono frà le medesime parallele.



Siano gli vguali triangoli A B C, DBC, i quali habbiano la medesima base B C, e siano collocati dalla medesima parte AD. Dico che sono frà le medesime parallele, cioè che la retta AD è parallela alla retta B C.

Se la retta AD non è parallela alla *retta B C, si può dal punto A* [a] *tirare vna retta linea parallela alla retta BC;* ò quella passerà sotto, ò sopra *la retta AD; passi prima sotto la retta A* D, e sia AE, *la* quale concorra col lato BD *in qualche punto* E, si tiri [b] la retta CE; e si considerino *i* due triangoli ABC, EBC, che hanno la medesima base BC, e sono *collocati* frà le medesime parallele AE, BC, [e] sarà il triangolo EBC vguale *al* triangolo ABC, mà per ipotesi, il triangolo DBC è vguale al medesimo triangolo ABC, sarà *il* triangolo EBC [f] vguale al triangolo DBC, la parte vguale al tutto, ch'è [g] impossibile, non dunque la retta AE è parallela alla retta BC.

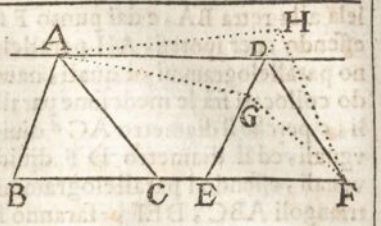
[a] 31. prop.
[b] 1. post.
[e] 37. prop.
[f] 1. assiom.
[g] 9. assiom.

Di nuouo passi la tirata parallela sopra la retta AD, e sia la notata AF; si continui il lato BD [b] fino che concorra con AF in qualche punto F, si tiri [i] la retta CF. Hauremo i triangoli ABC, FBC costituiti sopra la medesima base BC, e frà le medesime parallele AF, BC, [K] dal che il triangolo FBC sarà vguale al triangolo ABC; ma il triangolo DBC, per ipotesi, è vguale al triangolo ABC, sarà il triangolo DBC [l] vguale al triangolo FBC, la parte vguale al tutto, ch'è [m] impossibile, non dunque la retta AF è parallela alla retta BC; fù dimostrato, che ne meno la retta AE è parallela alla retta BC, in conseguenza sarà la retta AD parallela alla retta BC, come fù proposto dimostrare.

[b] 2. post.
[i] 1. post.
[K] 37. prop.
[l] 1. assiom.
[m] 9. assiom.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XL.

I triangoli vguali, che hanno vguali basi poste nella medesima dirittura, e collocati dalla medesima parte, sono frà le medesime parallele.



Siano gli vguali triangoli A B C, D E F, e ſia la baſe BC vguale alla baſe EF, nella medeſima dirittura BF, ed i triangoli ſiano collocati dalla medeſima parte AD. Dico che ſono frà le medeſime parallele, cioè che la retta A D è parallela alla retta BF.

[a] 31. prop. Se la retta AD non è parallela alla retta BF, ſi tiri dal punto A [a] vna retta linea parallela alla retta B F, la quale ò paſſerà ſotto la retta A D, ouero ſopra. Paſſi prima, s'è poſsibile, ſotto la retta A D, quella

[b] 1. poſt. concorrerà col lato ED in qualche punto G, ſi tiri [b] la retta GF; ed hauremo i due triangoli ABC, GEF, ſopra le vguali baſi BC, EF, e frà le me-

[c] 38. prop. deſime parallele A G, B F, [c] e perciò ſarà il triangolo G E F vguale al triangolo ABC, ma il triangolo D E F, per ipoteſi, è vguale al medeſi-

[d] 1. aſſiom. mo triangolo ABC, ſarà il triangolo GEF [d] vguale al triangolo DEF, la

[e] 9. aſſiom. parte vguale al tutto, [e] ch'è impoſsibile, non dunque la retta A G è parallela alla retta BF.

Paſsi di nuouo la parallela ſopra la retta A D, che ſia la notata A H, la quale concorrerà col lato E D continuato in qualche punto H. Si tiri la retta HF, ed hauremo i triangoli ABC, HEF ſopra le vguali baſi BC,

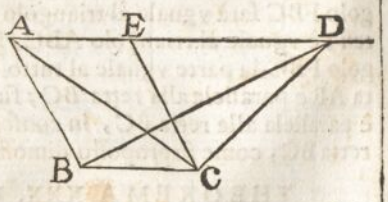
[f] 38. prop. EF, e frà le medeſime parallele AH, BF, dal che *il triangolo H E F ſarà* vguale al triangolo ABC; *ma il triangolo DEF è poſto vguale al* medeſimo *triangolo ABC, ſarà il triangolo DEF* vguale al triangolo HE

[g] 1. aſſiom. F, *la parte vguale al tutto*, ch'è [b] impoſsibile; non dunque la retta AH

[b] 9. aſſiom. è parallela alla retta BF; ma ſi diſſe, che la retta AG ne meno è parallela alla retta BF, in conſeguenza la retta AD ſarà parallela alla retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLI.

Se vn triangolo, ed vn parallelogrammo, haueranno vna medeſima baſe, e ſaranno collocati frà le medeſime parallele il parallelogrammo ſarà il doppio del triangolo.



Sia il parallelogrammo A B C E, ed il triangolo D B C ſopra d'vna medeſima baſe BC, e frà le medeſime parallele AD, BC. Dico che il parallelogrammo ABCE è il doppio del triangolo DBC.

[a] 1. poſtula. Si tiri [a] la retta AC; ſarà il trian-

[b] 34. prop. golo ABC [b] vguale al triangolo ACE, e perciò il parallelogrammo A B CE, ſarà il doppio del triangolo ABC. In oltre perche *i triangoli* ABC, DBC, hanno vna medeſima baſe BC, e ſono *collocati* frà le medeſime

[c] 37. prop. parallele AD, BC, ſarà il triangolo DBC [c] vguale al triangolo A B C;

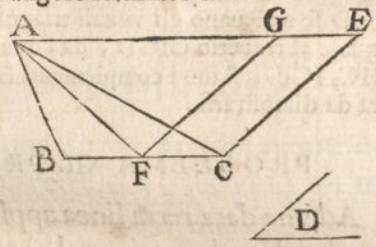
mà

mà il parallelogrammo ABCE, per quel, che s'è mostrato, è il doppio del triangolo ABC, sarà il parallelogrammo ABCE il doppio del triangolo DBC, come fù proposto dimostrare.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII.

Dato vn triangolo, ed vn angolo rettilineo, descriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo, e che habbia vn angolo vguale ad vn angolo dato.

Sia il dato triangolo rettilineo ABC, e l'angolo D. Dico esser possibile descriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo A B C, e che habbia vn angolo vguale al dato angolo rettilineo D.



Per il vertice A, del triangolo ABC, [a] si faccia passare la retta A E parallela alla base BC: si diuida la base BC [b] in due parti vguali in F, e nel punto F si costituisca l'angolo CFG [c] vguale all'angolo D, si continui la retta GF, [d] che costituisce l'angolo, fin che concorra con la retta AE in qualche punto G, dal punto C si tiri la retta CE, [e] parallela alla retta FG, la quale concorrerà con la retta AE in qualche punto E. Essendo per costruttione, la retta AE parallela alla base BC, e la retta EC parallela ad FG, il quadrilatero GFCE [f] sarà parallelogrammo. Dico che il parallellogrammo GFCE è vguale al triangolo ABC, ed hà l'angolo GFC vguale all'angolo D.

[a] 31. prop.
[b] 10. prop.
[c] 23. prop.
[d] 3. post.
[e] 31. prop.
[f] 25. defin.

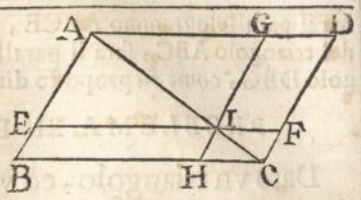
Si tiri [g] la retta FA, ed hauremo i due triangoli ABF, AFC, sopra le vguali basi BF, FC, e frà le medesime parallele AE, BC, dalche i triangoli ABF, AFC [h] sono frà di loro vguali, ed il triangolo ABC sarà il doppio del triangolo AFC. In oltre il parallelogrammo GFCE, ed il triangolo AFC, hanno la medesima base FC, e sono frà le medesime parallele AE, BC, sarà il parallelogrammo GFCE [i] il doppio del triangolo AFC; ma il triangolo ABC fù mostrato il doppio del medesimo triangolo AFC, sarà il parallelogrammo GFCE [k] vguale al triangolo ABC, e perche l'angolo GFC, per costruttione, è vguale all'angolo D, sarà dunque costrutto il parallelogrammo GFCE vguale al dato triangolo ABC, ed haurà l'angolo GFC vguale all'angolo dato D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

[g] 1. post.
[h] 38. prop.
[i] 41. prop.
[k] 6. assiom.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIII.

Se vn parallelogrammo è diuiso in quattro parallelogrammi, due de'quali siano intorno al diametro, i complementi sono frà di loro vguali.

Sia il parallelogrammo ABCD, diuiſo ne' i quattro parallelogrammi AEIG, IHCF, EBHI, GIFD, e ſiano li due AEIG, IHCF intorno al diametro AC. Dico che li complementi EBHI, IFDG, ſono frà di loro vguali.



a 4. prop. Perche il diametro AC *a* diuide il parallelogrammo ABCD in due parti vguali, ſarà il triangolo ABC vguale al triangolo ACD: Similmente il diametro A I ſega il parallelogrammo AEIG in due parti vguali, ſarà il triangolo AEI vguale al triangolo AIG; finalmente il diametro IC diuide il parallelogrammo IHCF in due parti vguali, dalche il triangolo IHC è vguale al triangolo ICF: ſe dagl'vguali triangoli ABC ACD ſe ne leuano gli vguali triãgoli AEI, AIG, reſta il trapetio CIEB *b* vguale al trapetio CIGD, da i quali ſe ne leuino gli vguali triangoli IHC, ICF, reſtano i complementi EBHI, GIFD frà di loro vguali, che era da dimoſtrarſi.

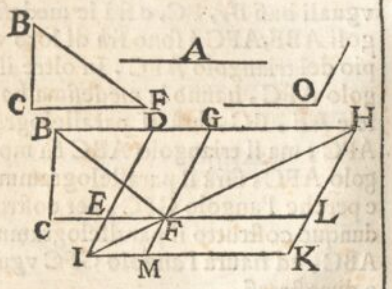
b 3. aſſiom.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XLIV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo, vguale ad vn dato triangolo rettilineo, ſecondo vn angolo rettilineo dato.

Sia data la retta linea A, il triangolo BCF, e l'angolo rettilineo O. Dico eſſer poſſibile deſcriuere vn parallelogrammo, vguale al dato triangolo BCF, che habbia vn angolo vguale all'angolo rettilineo O, e che habbia vn lato vguale alla retta linea data A.

Per la 42. propoſitione ſi deſcriua il parallelogrammo DEFG vguale al triangolo BCF, che habbia l'angolo GFE vguale al dato angolo O, poi *a* ſi prolunghi il lato DG verſo H, e ſi faccia la retta GH *b* vguale alla data linea retta A; dal punto H al punto F *c* ſi tiri la retta HF, la quale ſi continui *d* fin che concorra col lato DE, prolungato in qualche punto I; dal punto I ſi tiri la retta IK *e* parallela alla retta DH, e dal punto H ſi tiri la retta HK *e* parallela alla retta DI, la quale concorrerà con la retta IK in qualche punto K; ſi prolunghi il lato EF *f* fin che concorra con HK in qualche punto L, e ſi prolunghi il lato GF, fin che concorra col lato IK in qualche punto M. Dico che il parallelogrammo FMKL è vguale al triangolo BCF, che hà vn angolo vguale all'angolo O, ed hà vn lato vguale alla data retta linea A.



a 2. poſt.
b 3. prop.
c 1. poſt.
d 2. poſtul.
e 31. prop.
f 2. poſt.

Si

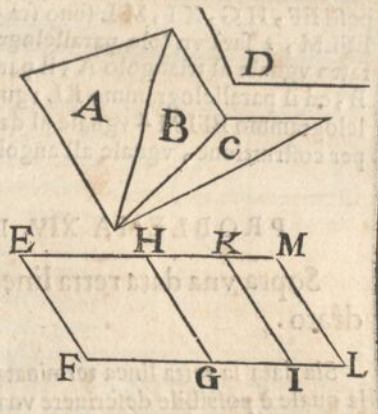
Si consideri il parallelogrammo DIKH diuiso ne i quattro parallelogrammi DEFG, EIMF, FMKL, GFLK, de'quali i due IEFM, GFLH sono intorno al diametro IH, e per l'antecedente propositione, i complementi DEFG, FMKL sono frà di loro vguali; ma il triangolo BCF per costruttione, è vguale al parallelogrammo DEFG, sarà il parallelogrammo FMKL [g] vguale al triangolo BCF; e perche gli angoli al vertice LFM, GFE [b] sono frà di loro vguali, e l'angolo O, per costruttione, è vguale all'angolo GFE, sarà l'angolo MFL [i] vguale all'angolo O. Nel parallelogrammo GFLH, i lati opposti FL, GH, [K] sono frà di loro vguali, ma la retta A, per costruttione, è vguale alla retta GH, sara la retta FL [l] vguale alla retta A. Per la qual cosa si è costrutto il parallelogrammo FMKL vguale al triangolo BCF, hà l'angolo MFL vguale al dato angolo O, ed il lato FL vguale alla retta data A, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

[g] 1. assiom.
[b] 15. prop.
[i] 1. assiom.
[K] 34. prop.
[l] 1. assiom.

PROBLEMA XIII. PROPOSITONE XLV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale à qualunque data figura rettilinea, secondo vn angolo dato.

Sia la figura rettilinea data ABC, l'angolo rettilineo D, e la data linea retta FE. Dico esser possibile costruire vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo ABC, che habbia vn angolo vguale all'angolo D, ed vn lato vguale alla retta FE.



Da vn angolo del rettilineo A B C [a] si tirino linee rette à gli angoli opposti in modo, che sia distribuito il dato rettilineo ne i triangoli A, B, C, poi alla retta EF, per l'antecedente propositione, s'applichi il parallelogrammo EFGH, vguale al triangolo A, che habbia l'angolo F, vguale al dato angolo D; similmẽte al lato HG s'applichi il parallelogrãmo HGIK vguale al triangolo B, che habbia l'angolo H G I vguale all'angolo D; ed al lato KI s'applichi il parallelogrammo KILM vguale al triangolo C, che habbia l'angolo KIL vguale all'angolo D. Dico che la figura FELM è vn solo parallelogrammo, vguale al rettilineo ABC, che hà vn angolo vguale all'angolo D.

[a] 1. Postul.

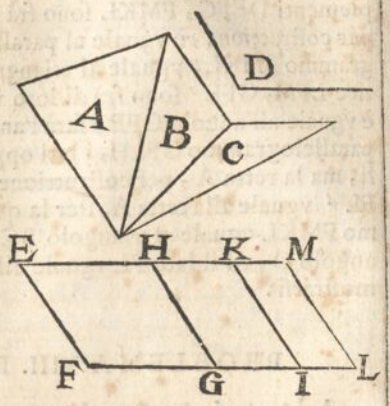
Perche l'angolo F, per costruttione è vguale all'angolo D, e l'angolo H G I è fatto vguale all'angolo D, sarà l'angolo F [b] vguale all'angolo HGI, vgualmente se gli aggiunga l'angolo HGF, ne viene l'angolo F coll'angolo HGI, [c] vguale alli due angoli HGF, HGI,

[b] 1. assiom.
[c] 2. assiom.

mà

d 29. prop. e 1. assioma. f 2. assioma. g 29. prop. b 14. prop. i 35. defin. K 2. assioma

ma gli angoli F, & HGF [d] sono vguali à due angoli retti, gli angoli dunque HGF, HGI [e] sono vguali à due angoli retti, e per la 14. propositione, le rette GF, GI, costituiscono vna sola retta linea. Similmente perche l'angolo KIL è fatto vguale all'angolo D, sarà [e] anco vguale all'angolo HGI, vgualmente s'aggiunga l'angolo KIG, i due angoli HGI, KIG, [f] saranno vguali alli due angoli KIG, KIL; mà i due angoli HGI, KIG [g] sono vguali à due angoli retti; gli angoli dunque KIG, KIL saranno vguali à due angoli retti, e le rette GI, IL [b] costituiscono vna sola retta linea; dal che le tre rette FG, GI, IL, costituiscono la sola retta FL. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le tre rette EH, HK, KM, costituiscono la sola retta linea EM. Perche le rette EH, HK, KM sono parallele alle rette FG, GI, IL, stante che sono lati opposti de i parallelogrammi EG, HI, KL, perciò tutta la retta EM è parallela à tutta la retta FL. Di più, ne'i parallelogrammi *EG, HI, KL i lati opposti* EF, HG, KI, ML *sono frà di loro paralleli; onde tutta la figura* EFLM, *i sarà vn solo parallelogrammo: mà il parallelogrammo* EG *è fatto vguale al triangolo* A, *il parallelogrammo* HI vguale al triangolo B, ed il parallelogrammo KL vguale al triangolo C, sarà tutto il parallelogrammo EFLM [K] vguale al dato rettilineo ABC, & haurà l'angolo F, per costruttione, vguale all'angolo D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



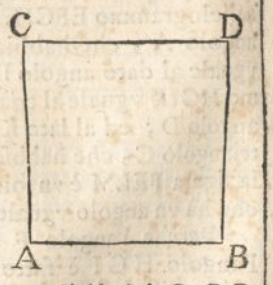
PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XLVI.

Sopra vna data retta linea terminata descriuere vn quadrato.

Sia data la retta linea terminata AB, sopra la quale è possibile descriuere vna figura quadrata.

a 11. prop. b 3. prop. c 1. postulat.

Negli estremi A, & B [a] si eriggano le rette AC, BD, perpendicolari alla retta AB, tanto AC [b] quanto DB si faccia vguale alla retta AB, si tiri [c] la retta CD. Dico che il quadrilatete ABDC è quadrato.



d 28. prop.

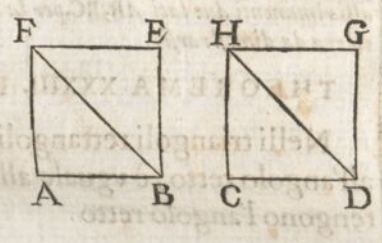
Perche gli angoli in A, & B sono retti, perciò le rette AC, BD [d] sono frà di loro parallele, mà per costruttione sono frà di loro vguali, perciò i lati AC, BD sono frà di loro vguali, e paralleli, e le rette CD, AB, che congiungo-

no gli estremi, [e] sono vguali, e parallele, ed il quadrilatero ABDC è parallelogrammo; mà il lato AB [f] è vguale, per costruttione al lato BD, ed al lato AC, perciò li quattro lati AB, BD, DC, CA [g] sono frà di loro vguali; e perche nelli parallelogrammi gli angoli opposti [h] sono frà di loro vguali, essendo gli angoli A, & B per costruttione retti, saranno gli angoli C, & D retti; ed il quadrilatero ABDC [i] sarà quadrato, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

[e] 33. prop.
[f] 35. defin.
[g] 1. assiom.
[h] 34. prop.
[i] 29. defin.

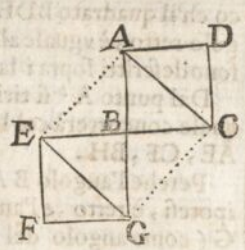
Di Proclo.

I quadrati delle rette linee vguali sono frà di loro vguali, ed i lati degli vguali quadrati sono frà di loro vguali.



Siano prima le rette AB, CD frà di loro vguali. Dico che li loro quadrati AE, CG sono frà di loro vguali. Si tirino li diametri FB, HD, per la definitione del quadrato sarà FA vguale ad AB, ed il lato HC vguale à CD, mà AB è posto vguale à CD, li due lati FA, AB [a] saranno vguali à i due lati HC, CD, li angoli in A & C sono retti, sarà la base FB [b] vguale alla base HD, ed il triangolo FAB, vguale al triangolo HCD, & i loro dupli, cioè li quadrati AE, CG [c] sono frà di loro vguali ch'era da dimostrarsi.

[a] 2. assiom.
[b] 4. prop.
[c] 34. prop.

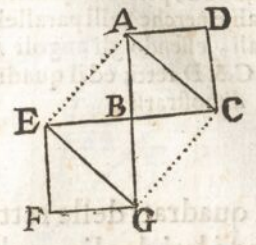


Di nuouo siano li quadrati ABCD, EBGF frà di loro vguali. Dico che i lati AB, BG sono fra di loro vguali. Si congiungano li proposti quadrati in modo che i lati EB, BC costituischino la sola retta EC, essendo gli angoli ABC, EBG vguali, se l'aggiunghi il commune angolo ABE, fa li due angoli GBE, EBA, [d] vguali alli due angoli CBA, ABE, ma li due angoli CBA, ABE [e] sono vguali à due angoli retti, saranno li due angoli GBE, EBA vguali à due angoli retti, e le rette GB, BA [f] costituiranno vna sola retta linea. Si tirino i diametri AC, EG, e si tirino le rette AE, CG, perche i quadrati BD, BF sono fra di loro vguali, le loro metà, cioè li triangoli ABC, EBG sono fra di loro vguali, se l'aggiunga il commune triangolo BGC, li triangoli AGC, EGC [g] saranno fra di loro vguali, hanno la medesima base GC, e sono costituiti dalla medesima parte, e perciò [h] sono fra le medesime parallele EA, GC; in oltre perche i lati BC, CA sono vguali à i lati DC, CA, e la base AB è vguale alla base AD sarà l'angolo DCA, [K] vguale all'angolo BCA, ma l'angolo DCB è retto sarà ognuno degli angoli DCA, BCA, la metà d'vn angolo retto; nell'istesso modo si dimostrerà che ognuno degli angoli DAC, BAC è la metà d'vn angolo retto, e perciò il diametro del quadrato diuide gli angoli opposti in due parti vguali, dalche il diametro EG del quadrato FB diuide gli angoli FEB, FGB in due parti vguali, ma gli angoli FGB, DAB sono fra di loro vguali, stante che

[d] 2. assiom.
[e] 13. prop.
[f] 14. prop.
[g] 2. assiom.
[h] 39. prop.
[K] 8. prop.

sono

ſono retti, perciò le loro metà, cioè gli angoli EGB, CAB ſono fra di loro vguali. Hor eſſendo le rette AC, EG ſegate dalla retta AG, e gli angoli alterni EGB, CAB ſono fra di loro vguali, ſarà EG [l] *parallela ad AC, ed il quadrilatero AEGC* [m] *ſarà parallelogrammo, dalche AC* [n] *ſarà vguale ad EG. Finalmente perche il diametro diuide gli angoli del quadrato in due parti vguali, perciò li diuide in due mezzi retti, e così ognuno delli angoli BGE, BEG, BCA, BAC, ſarà la metà d'vn angolo retto, e perciò li due angoli BGE, BEG ſono vguali alli due angoli BCA, BAC, il lato AC è dimoſtrato vguale al lato EG ſaranno li rimanenti due lati GB, BE vguali alli rimanenti due lati AB, BC, per la qual coſa il lato AB è vguale al lato BG, ch'era da dimoſtrarſi.*



l 27. prop.
m 35. defin.
n 34. prop.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVII.

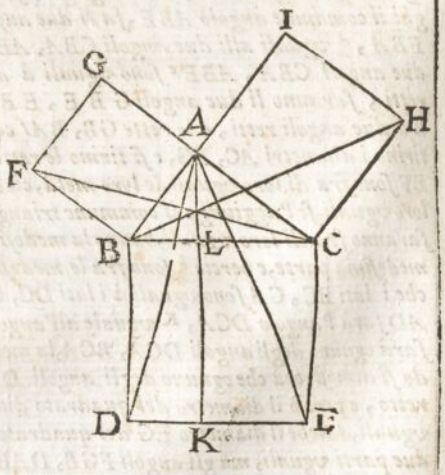
Nelli triangoli rettangoli, il quadrato del lato oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati de'i lati, che contengono l'angolo retto.

Sia il triangolo ABC, del quale l'angolo BAC ſia retto, e ſopra i lati BC, CA, AB, [a] ſiano deſcritti li quadrati BDEC, ACHI, BAGF. Dico ch'il quadrato BDEC, deſcritto ſopra il lato BC, ch'è oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati ACHI, BAGF, giunti inſieme, che ſono deſcritti ſopra i lati CA, AB, che contengono l'angolo retto BAC.

a 46. prop.

Dal punto A [b] ſi tiri la retta AK parallela al lato BD, ouero CE, la quale concorrerà col lato DE in qualche punto K, ſi tirino le rette [c] AD, AE, CF, BH.

b 31. prop.
c 1. poſt.



Perche l'angolo BAC, per ipoteſi, è retto, e l'angolo BAG (come angolo del quadrato) è retto, perciò i due angoli BAC, BAG, ſono vguali à due angoli retti, e le rette CA, AG [d] coſtituiſcono vna ſola retta linea; nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette BA, AI coſtituiſcono vna ſola retta linea: & eſſendo gli angoli in G, ed F retti, le due rette linee FB, GC [e] ſaranno frà di loro parallele, e nell'iſteſſo modo ſi proverà, che le due rette BI, HC ſono frà di loro parallele.

d 14. prop.
e 28. propoſ.

Di nuouo l'angolo FBA è retto, perche è angolo del quadrato GB, e similmente l'angolo DBC è retto per esser angolo del quadrato BE; vgualmente se gli aggiunga l'angolo ABC, ne viene l'angolo FBC, *f* vguale all'angolo ABD; e perche, nel quadrato BG, il lato FB *g* è vguale al lato BA, e nel quadrato DC il lato DB è vguale al lato BC; al lato BC s'aggiunga il lato BF, ed al lato DB s'aggiunga il lato BA, i due lati FB, BC, del triangolo FBC, *h* saranno vguali alli due lati AB, BD del triangolo ABD, l'angolo FBC è dimostrato vguale all'angolo ABD, sarà la base FC *i* vguale alla base AD, ed il triangolo ABD, vguale al triangolo FBC.

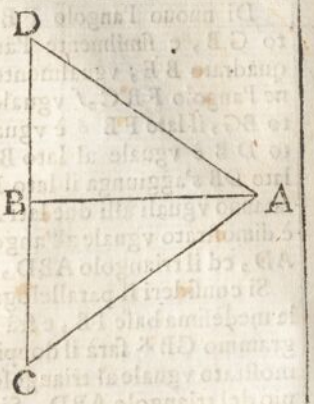
f 2. assioma. *g* 29. defin. *h* 2. assioma. *i* 4 prop.

Si consideri il parallelogrammo GB, ed il triangolo FBC, posti sopra la medesima base FB, e frà le medesime parallele GC, FB; il parallelogrammo GB *k* sarà il doppio del triangolo FBC; ma il triangolo FBC è mostrato vguale al triangolo ABD, sarà il parallelogrammo GB *l* il doppio del triangolo ABD. Similmente il parallelogrammo LBDK, ed il triangolo ABD sono sopra la medesima base BD, e frà le medesime parallele AK, BD, il parallelogrammo LBDK *m* sarà il doppio del triangolo ABD: ma il parallelogrammo GB, per quel che si è mostrato, è il doppio del medesimo triangolo ABD, sarà il parallelogrammo GB, *n* vguale al parallelogrammo LBDK. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch' il parallelogrammo IC è vguale al parallelogrammo LKEC: perche essendo l'angolo HCA retto, e l'angolo ECB retto, vgualmente se gli aggiunga l'angolo BCA, ne verrà l'angolo HCB *o* vguale all'angolo ACE; e perche HC *p* è vguale ad AC, ed il lato EC vguale al lato CB, i due lati HC, CB, *q* saranno vguali alli due lati EC, CA, l'angolo HCB è mostrato vguale all'angolo ACE, sarà il triangolo HCB *r* vguale al triangolo ACE. In oltre il parallelogrammo IC, ed il triangolo HCB, hanno la medesima base CH, e sono frà le medesime parallele, il parallelogrammo IC *s* sarà il doppio del triangolo HCB: mà il triangolo HCB è vguale al triangolo ACE, il parallelogrammo IC sarà il doppio del triangolo ACE. Di più il parallelogrammo LKEC, ed il triangolo ACE hanno la medesima base CE, e sono frà le medesime parallele AK, CE, il parallelogramo LKEC sarà il doppio del triangolo ACE: ma il parallelogrammo IC è mostrato il doppio del medesimo triangolo HCB, sarà il parallelogrammo IC *t* vguale al parallelogrammo LKEC, e perche il quadrato GB fù mostrato vguale al parallelogrammo LBKD, tutto il quadrato BDEC *u* sarà vguale alli due quadrati IC, GB giunti insieme, che era da dimostrarsi.

k 41. prop. *l* 7. assiom. *m* 41. prop. *n* 6. assiom. *o* 2. assiom. *p* 29. defin. *q* 2. assiom. *r* 4. prop. *s* 41. prop. *t* 6. assiom. *u* 2. assiom.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVIII.

Se il quadrato d'vn lato d'vn triangolo è vguale alli quadrati de i due rimanenti lati, l'angolo contenuto da quei lati sarà retto.



Sia il triangolo ABC, ed il quadrato del lato AC sia vguale alli quadrati degl' altri due lati AB, BC. Dico che l'angolo ABC sarà retto.

a 11. prop. Nel punto B sopra la retta AB *a* si erigga la perpendicolare DB, e si faccia DB *b* vguale alla retta BC, si tiri la retta *c* AD.

b 3. prop. *c* 1. postul.

d 47. prop. Perche l'angolo ABD, per costruttione è retto, il quadrato del lato AD *d* sarà vguale alli quadrati de i lati AB, BD. In oltre essendo DB, per costruttione, vguale alla retta CB, sarà il quadrato di BD vguale al quadrato di CB; vgualmente se gli aggiunga il quadrato della retta AB, i quadrati de' i due lati DB, BA *e* saranno vguali alli quadrati delli due lati CB, BA; ma i quadrati de' i due lati DB, BA si disse, che sono vguali al quadrato del lato AD, il quadrato dunque del lato AD *f* sarà vguale alli quadrati delli due lati CB, BA, ma li quadrati delli lati CB, BA, per ipotesi, sono vguali al quadrato del lato AC, sarà il quadrato del lato AD *g* vguale al quadrato del lato AC, ed il lato AD vguale al lato AC. Finalmente perche i due lati DB, BA, *sono vguali alli due lati* CB, BA, e la base AD è mostrata *vguale alla base AC, sarà l'angolo* DBA *b* *vguale all'angolo ABC, ma l'angolo* DBA, per costruttione è retto, l'angolo dunque ABC sarà retto, come fù proposto dimostrare.

e 2. assioma. *f* 1. assioma. *g* 1. assioma. *b* 8. prop.

Fine del Primo Elemento.

EVCLI-

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SECONDO.

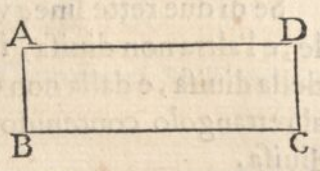
DEFINITIONI.

I.

Ogni parallelogrammo rettangolo si dice esser contenuto da due rettelinee, che contengono l'angolo retto.

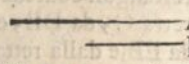


IL Parallelogrammo, che hà gli angoli retti, si chiama parallelogrammo rettangolo, e per l'auuenire si chiamerà semplicemente rettangolo. Hor, per spiegatione dell'antecedente definitione, deuesi auuertire, che ogni parallelogrammo rettangolo, benche sia racchiuso da quattro linee rette, con tutto ciò non si dice essere contenuto da tutte quattro, mà da due sole, cioè da due di quelle, che contengono l'angolo retto, le quali, prese in qualunque modo, sempre ci rappresentano la lunghezza, e larghezza di esso rettangolo, come, per essempio, il parallelogrammo ABCD, se hà tutti gli angoli retti, lo chiameremo semplicemente rettangolo, e diremo esser contenuto da'i due lati AB, BC; ouero dalli due BC, CD; o pure dalli due CD, DA; ò dalli due BA, AD ch'è sempre la medesima cosa, stanteche, per la 34. propositione del primo libro, i lati opposti sono frà di loro vguali.

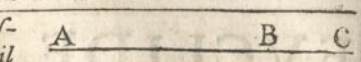


Quando dunque diremo, ch'il rettangolo A B C D è contenuto dalli due lati AB, BC, non douremo concepir'altro, se non che il rettangolo ABCD, hà per lunghezza il lato BC, e per larghezza il lato AB; e se diremo esser contenuto dalle rette AD, DC, concepiremo esser contenuto dalla lunghezza AD, e dalla larghezza DC.

E da notarsi, che se saranno esposte due qualunque linee rette, come A, & B, e si dirà il rettangolo contenuto dalle rette A, & B, si douerà concepire vn parallelogrammo rettangolo, del quale la lunghezza sia vguale alla retta A, e la larghezza vguale alla retta B; ouero la larghezza vguale ad A, e la lunghezza vguale à B.



Di più quando qualche retta linea per essempio A C è diuisa come in B, e si dirà il



rettangolo contenuto dalle rette A B, B C, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de' lati, intorno all'angolo retto, è vguale ad AB, e l'altro vguale alla retta BC.

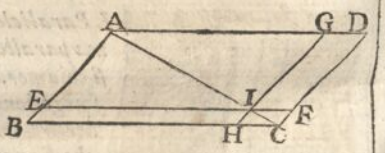
Quando poi si dirà, il rettangolo contenuto da tutta la retta AC, e dalla parte BC, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de'i lati intorno all'angolo retto è vguale à tutta la retta AC, e l'altro vguale alla parte BC.

Similmente se si dirà, il rettangolo contenuto dalle rette CA, AB, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, che habbia vno de' lati, intorno all'angolo retto, vguale à tutta la retta CA, e l'altro vguale alla parte AB.

II.

Se vn parallelogrammo è diuiso in quattro parallelogrammi, due de' quali siano intorno al diametro, i complementi con vno di quelli intorno al diametro si chiamerà Gnomone.

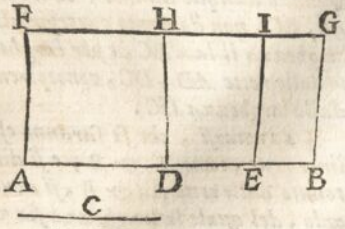
Sia il parallelogrammo A B C D, diuiso ne'i quattro parallelogrammi A E I G, I H C F, E B H I, G I F D, de' quali li due A E I G, I H C F siano intorno al diametro AC, i due complementi E B H I, I F D G, con vno di quelli intorno al diametro, come per essempio col parallelogrammo I H C F, cioè tutto il piano B C D G I E, si chiamerà Gnomone: e similmente, i due complementi B I, I D, col parallelogrammo E G, cioè tutto il piano B A D F I H, si chiamerà Gnomone.



THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due rette linee vna è diuisa in quante parti si vuole, e l'altra non diuisa, i rettangoli contenuti dalle parti della diuisa, e dalla non diuisa, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la diuisa, e dalla non diuisa.

Sia la retta linea AB diuisa in quante parti si vuole, come in D, ed E, e sia la retta C non diuisa. Dico, che i rettangoli contenuti da AD, e dalla retta C, da DE, e della retta C, e da EB, e dalla retta C, insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C.



a 11. del 1. Negl'estremi A, & B [a] si eriggano le rette AF, BG, perpendicolari alla

retta

retta AB, tanto AF, quanto BG, [b] si faccia vguale alla retta C, si tiri la retta FG. Perche gli angoli in A, & B sono retti, le due AF, BG, [c] saranno frà di loro parallele; ma [d] sono fra di loro vguali (per essersi fatta ognuna vguale alla retta C) perciò sono frà di loro vguali, e parallele; e la retta FG [e] sarà vguale, è parallela ad AB, il quadrilatero ABGF sarà parallelogrammo, e gli angoli F, & G [f] saranno retti, e perciò sarà rettangolo. Dalli punti D, E si tirino le rette DH, EI [g] parallele al lato FA, ouero GB, gli angoli in D, ed E [h] saranno retti, ed il rettangolo AG, sarà diuiso ne'trè rettangoli FD, HE, IB, de'quali gli opposti lati FA, HD, IE, GB, [K] sono frà di loro vguali; ma, per costruttione, il lato FA è vguale alla retta C, sarà la retta C [l] vguale ad ognuno de i lati HD, IE.

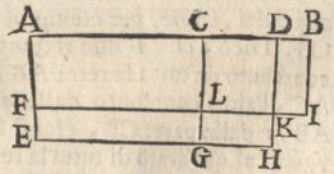
b 3. del 1.
c 28. del 1.
d 3. assioma.
e 33. del 1.
f 34. del 1.
g 31. del 1.
h 29. del 1.
K 34. del 1.
l 1. assioma.

Per la prima definitione di questo, il rettangolo FB è contenuto da i due lati FA, AB; ma, per costruttione, la retta FA è vguale alla retta C, sarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalla retta AB, e dalla retta C. Similmente il rettangolo FD è contenuto da FA, e dalla retta AD; ma FA è vguale alla retta C, sarà il rettangolo FD, vguale al rettangolo contenuto dalla retta AD, e dalla retta C. Oltre à ciò, il rettangolo HE è contenuto dalla retta HD, e dalla retta DE; fù mostrata la retta HD vguale alla retta C, sarà il rettangolo HE vguale al rettangolo contenuto dalla retta DE, e dalla retta C. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il rettangolo IB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta EB, e dalla retta C. Per il che li tre rettangoli FD, HE, IB, sono vguali à quelli contenuti dalle rette AD, DE, EB, e dalla retta C; ma i rettangoli FD, HE, IB compongono tutto il rettangolo FB; sarà tutto il rettangolo FB, vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C. Si disse ch'il rettangolo FB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta AB, e dalla retta C; il rettangolo dunque contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C, è vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Qui si può aggiungere il seguente Theorema di Snellio nel suo Apollonio Batauo.

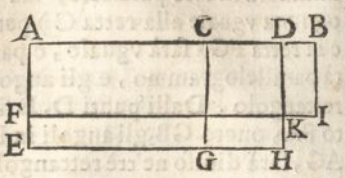
Se in qualche retta AB siano presi due qualunque punti C, & D; il rettangolo contenuto dalle due AD, CB è vguale à i due rettangoli vno contenuto dalle due AB, CD, l'altro contenuto dalle due AC, DB, giunt'insieme.



Nel

a 11 del 1. b 3.del 1. c 3.assiom. d 31.del 1. e 30.del 1. f 31.del 1. g 35. defin. del 1. h 34.del 1. K 1. assiom. l 34.del 1. m 1. assiom. n Scolio antecedente o 2.assiom. p 2.assiom. q 1. defin. del.2.

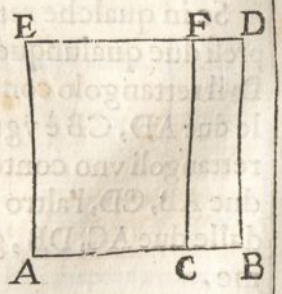
Nel punto A si erigga la retta A E [a] *perpendicolare ad A B; si faccia A E* [b] *vguale alla retta CB, e si tagli AF vguale à CD, sarà FE* [c] *vguale à DB; da'i punti C, D, B si tirino le re tte CG, DH, BI,* [d] *parallele ad AE, le quali* [e] *saranno frà di loro parallele; dalli punti F, ed E, si tirino le rette FI, EH* [f] *parallele ad AB, cioè FI si continui fin che concorre con BI in qualche punto I; e la retta EH fin che concorre con DH in qualche punto H; la retta FI segarà le rette CG, DH come in L, & K, e la retta EH segarà CG in qualche punto G. Tutti i quadrilateri, che sono in questa figura, saranno* [g] *parallelogrammi rettangoli, e sarà AE* [h] *vguale à CG, e la retta CL vguale ad AF; mà AE è vguale, per costruttione, à C B, e la retta A F vguale à CD, sarà CG* [K] *vguale à CB, ed LC vguale à DC; dal che il restante LG sarà vguale à DB. Nel rettangolo CLKD, sarà CL* [l] *vguale à DK, ed il lato CD vguale ad LK; mà CL è vguale à C D, sarà LK* [m] *vguale à KD, e tutti quattro i lati CL, LK, KD, DC sono frà di loro vguali: hor essendo LK vguale à DK, ed il lato KH vguale à DB, sarà il rettangolo GK* [n] *vguale al rettangolo KB; vgualmente s'aggiunga il rettangolo FD, ne viene il rettangolo FB* [o] *vguale al piano ADHGLF; vgualmente se gli aggiunga il rettangolo EL, ne viene il rettangolo ED* [p] *vguale al rettangolo FB, col rettangolo EL. Il rettangolo ED* [q] *è contenuto da'i due lati AD, AE, mà il lato AE è vguale, per costruttione à CB, perciò il rettangolo ED sarà contenuto dalle due rette AD, CB, ed in conseguenza i due rettangoli FB, EL sono vguali à quello, ch'è contenuto dalle due AD, CB; e perche il rettangolo FB è contenuto dalle due BA, AF, cioè dalle due AB, CD, ed il rettangolo EL è contenuto dalle due FL, FE, cioè dalle due AC, DB, (stante che FL è vguale ad AC, ed il lato EF è vguale à DB) sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, CB, vguale à i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle due AB, CD, e l'altro dalle due AC, DB, ch'era da dimostrarsi.*



THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se vna retta linea è diuisa come si vuole, il quadrato di tutta la retta è vguale alli rettangoli contenuti da tutta la retta, e dalle parti della medesima.

Sia la retta linea AB, diuisa in quante si voglia parti, come, per esempio, nelle due AC, CB. Dico, che li due rettangoli, cioè vno contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto dalla medesima retta AB, e dalla parte CB, giunt' insieme, sono vguali al quadrato di tutta la retta AB.



a 46.del 1. b 31.del 1. c 29.del 1.

Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato AD, dal punto C si tiri la retta CF, [b] parallela ad AE, ouero DB; gli angoli in C, ed F [c] saranno retti, ed il quadrato AD sarà diuiso

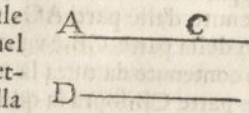
ne

ne i due rettangoli EC,FB. Perche il rettangolo EC [d] è contenuto dalle rette EA,AC,ed il lato EA,come lato del quadrato, è vguale ad AB, sarà il rettangolo EC vguale à quello, ch'è contenuto dalle due rette BA, AC. Similmente perche il rettangolo FB [e] è contenuto da i lati DB, BC, ed il lato DB è vguale al lato AB, sarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BC. Ma i due rettangoli EC, FB, giunti insieme, compongono il quadrato AD, cioè il quadrato della retta AB; saranno i due rettangoli, cioè il rettangolo contenuto da tutta la retta BA, e dalla parte AC, ed il rettangolo contenuto dalla medesima AB, e dalla parte BC, giunti insieme, vguali al quadrato di tutta la retta AB, ch'era da dimostrarsi.

[d] 1. definit. del 2.

[e] 1. definit.

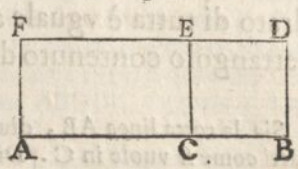
In altro modo. S'esponga la retta D vguale alla retta AB. Perche la retta AB è diuisa nel punto C, e la retta D è indiuisa, sarà il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D [f], vguale à i due rettangoli, cioè vno contenuto dalla retta D, e dalla parte AC; e l'altro contenuto dalla retta D, e dalla parte CB; ma la retta D è posta vguale ad AB, i due rettangoli dunque, cioè vno contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto da AB, e dalla parte BC, insieme giunti, saranno vguali al rettangolo contenuto dalle due AB, & D, cioè vguale al quadrato della retta AB. *Il medesimo si dimostrerà, se la retta AB sarà diuisa in più di due parti, il che era da dimostrarsi.*



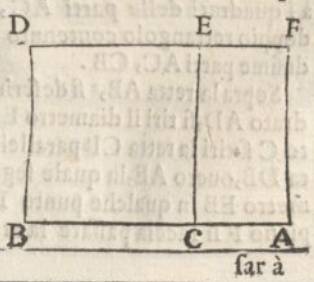
[f] 1. del 2.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il rettangolo contenuto dalle parti, col quadrato di vna delle parti, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta, e da quella parte, sopra la quale si considera il quadrato.



Sia la retta AB, diuisa in due qualunque parti, come AC, CB. Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte BC, sopra la quale si considera il quadrato.

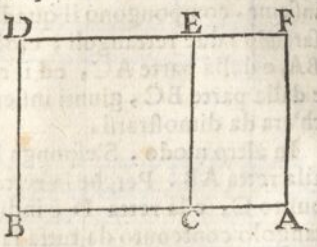


Sopra la retta CB [a] si descriua il quadrato BE, dal punto A si tiri la retta AF [b] parallela al lato CE, la quale concorrerà col lato DE continuato in qualche punto F, e saranno costrutti i due rettãgoli AD, AE. Perche il rettãgolo AD è contenuto da i lati AB, BD, ed il lato BD, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB,

[a] 46. del 1, [b] 31. del 1.

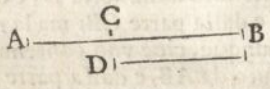
sarà il rettangolo AD vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Similmente il rettangolo AE, è contenuto dalle rette AC, CE; ma la retta EC, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB, sarà il rettangolo AE, vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, vgualmente s'aggiunga il quadrato CD, cioè il quadrato della retta CB; ne viene il rettangolo AE, col quadrato CD, [c] cioè il rettangolo AD, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di CB. Ma si disse, che il rettangolo AD è contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB; il rettangolo dunque contenuto dalle parti AC, CB col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, sopra la quale fù descritto il quadrato, come fù proposto dimostrare.

c 2. assiom.



In altro modo. S'esponga la retta D, vguale alla parte CB; sarà [a] il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AC, CB, e dalla retta D; ma la retta D è posta vguale alla retta CB, *sarà il rettangolo contenuto da* tutta la retta AB, e *dalla retta D, cioè il rettangolo contenuto da* tutta *la retta AB, e dalla parte BC, vguale al rettangolo* contenuto dalla parte AC, e *dalla retta D*, cioè dalle parti AC, CB, col rettangolo contenuto dalla parte CB, e dalla retta D, cioè col quadrato della retta CB, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 2.



THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

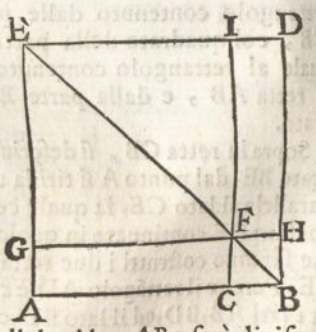
Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il quadrato di tutta è vguale à i quadrati delle parti, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.

Sia la retta linea AB, diuisa in due parti come si vuole in C. Dico, che il quadrato di tutta la retta AB è vguale à i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti AC, CB.

Sopra la retta AB, [a] si descriua il quadrato AD, si tiri il diametro EB, dal pũto C si tiri la retta CI [b] parallela alla retta DB, ouero AE, la quale segarà il diametro EB in qualche punto F, e per il piano F si faccia passare la retta GH parallela al lato AB; sarà diuiso il

a 46. del 1.

b 31. del 1.



qua-

quadrato AD in quattro parallelogrami, de'quali i due GI, CH, sono intorno al diametro EB. Perche il quadrilatero AD, per costruttione, è quadrato, sarà il lato AE vguale al lato AB, ed il triangolo ABE, sarà isoscele, dal che gli angoli ABE, AEB [c] sono frà di loro vguali; e perche li trè angoli d'ogni triangolo [d] sono vguali à due angoli retti, e l'angolo A, come angolo del quadrato, è retto, gli altri due angoli A E B, ABE, insieme giunti, saranno vguali ad vn angolo retto, ma gli habbiamo mostrati frà di loro vguali, perciò ognuno delli angoli AEB, ABE sarà la metà d'vn angolo retto. In oltre perche le rette GH, AB sono parallele, e sono segate dalla retta AE, l'angolo EGF [e] esterno sarà vguale all'angolo A interno ed opposto; ma l'angolo A è retto, sarà l'angolo EGF retto. Nel triangolo GFE, essendo l'angolo EGF retto, e l'angolo GEF la metà d'vn angolo retto, sarà il rimanente angolo GFE [f] la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli GEF, GFE [g] sono frà di loro vguali, ed il lato GF [h] sarà vguale al lato GE. Di nuouo perche in ogni parallelogrammo [K] i lati opposti sono vguali, e gli angoli opposti sono fra di loro vguali, sarà nel parallelogrammo GI, il lato EG vguale all'opposto IF, ed il lato GF vguale all'opposto EI; ma s'è mostrato il lato GF vguale al lato GE, sarà il lato EI [l] vguale al lato IF, e tutti quattro i lati EG, GF, FI, IE, saranno fra di loro vguali. Oltre à ciò l'angolo EGF sarà vguale all'angolo EIF, e l'angolo GEI, vguale all'angolo GFI; *ma gli angoli FGE, GEI, sono retti, gli angoli dunque EIF, IFG, saranno retti; per la qual cosa il parallelogrammo GI sarà quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il parallelogrammo CH è quadrato. Di più nel parallelogrammo AF i lati opposti GF, AC* [m] sono fra di loro vguali; ma GI è il quadrato del lato GF, sarà il quadrato GI vguale al quadrato di AC. Nel parallelogrammo AF, essendo gli angoli in A, & C retti, saranno gli angoli opposti in G, ed F [m] retti, dalche il parallelogrammo AF è rettangolo, il quale [n] è contenuto da i due lati AC, CF; ma il lato CF è vguale al lato CB, per essere lato del quadrato CH, sarà il rettangolo AF, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB: e perche i rettangoli AF, FD, sono frà di loro vguali, i due rettangoli AF, FD saranno vguali al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB. S'aggiunga dall'vna, e l'altra parte il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene lo gnomone ABDIFG [o] vguale al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; à i quali s'aggiunga vgualmente il quadrato G I, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AD, [o] cioè il quadrato della retta AB, vguale à i quadrati delle parti AC, CB col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti AC, CB, ch'era da dimostrarsi:

Più breue. Perche la retta AB è diuisa in C, il quadrato di AB [p] è vguale al rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col rettangolo contenuto dalla medesima AB, e dalla parte BC; ma il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC [q] è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di AC; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC è vguale al rettangolo con-

A C B

c 5. del 1.
d 32. del 1.
e 29. del 1.
f 32. del 1.
g 10. assiom.
h 6. del 1.
K 34. del 1.
l 1. assioma.
m 34. del 1.
n 1. defin. del 2.
o 2. assiom.
p 2. del 2.
q 3. del 2.

tenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; sarà il quadrato di AB vguale à i quadrati delle parti AC, CB, & al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto è manifesto, che quando vn quadrato è diuiso in quattro parallelogrammi, de'quali due siano intorno al diametro, i due intorno al diametro sono quadrati, ed i complementi sono rettangoli.

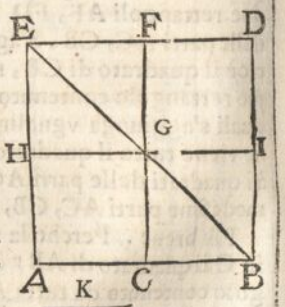
COROLLARIO II.

Prima figura dell'antecedente propos.

Quindi anco è manifesto, ch'ogni diametro del quadrato diuide gli angoli del medesimo quadrato in due parti vguali: poiche essendosi dimostrato ognuno degli angoli ABE, AEB, essere la metà d'vn angolo retto, se dagli angoli retti ABD, AED, se ne detraggano gli angoli ABE, AEB, ognuno de' i rimanenti angoli DEB, DBE *sarà la* metà d'vn angolo retto, *e perciò gli angoli retti* AED, ABD, *sono diuisi dal diametro EB in due parti vguali.*

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se la retta AB è il doppio della retta K, il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K; e se il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato di K, ancora la retta AB sarà il doppio della retta K.



a 10. del 1. *Si diuida AB* [a] *in due parti vguali in C, e si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, saranno i due HF, CI, per il primo Corollario, quadrati; cioè CI sarà il quadrato di CB, ed HF vguale al quadrato di AC: mà le rette CB, AC, per ipotesi, sono frà di loro vguali; saranno i quadrati HF, CI frà di loro vguali. Similmente essendo AC vguale à CB, sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, vguale al rettangolo contenuto dalle due GC, CB, cioè vguale al quadrato CI; mà il rettangolo AG è contenuto dalle due AC, CG: sarà il rettangolo AG*

b 43. del 1. *vguale al quadrato CI. E perche i complementi AG, GD,* [b] *sono frà di loro vguali; i quattro rettangoli dunque AG, CI, GD, FH, sono frà di loro vguali; e tutto il quadrato AD, sarà il quadruplo del quadrato*

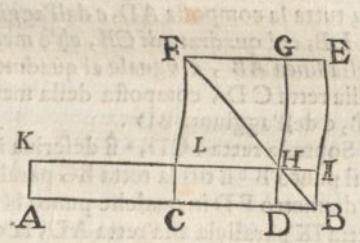
drato C I; cioè il quadrato di A B, sarà il quadruplo del quadrato di C B: ma la retta C B è vguale alla retta K, sarà il quadrato di A B il quadruplo del quadrato della retta K, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo se il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K. Dico che la retta AB, è il duplo della retta K.

Si diuida AB in due parti vguali, e si faccia la costruttione, e dimostratione di prima; sarà il quadrato di AB il quadruplo del quadrato di CB; mà il quadrato di AB è supposto il quadruplo del quadrato di K, sarà il quadrato di CB vguale al quadrato di K, e la retta CB vguale alla retta K: mà AB, per costruttione, è il doppio della retta CB; sarà AB il doppio della retta K; come fù proposto dimostrare.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e la medesima è diuisa in due parti ineguali; il rettangolo contenuto dalle parti ineguali, col quadrato dell'intermedia portione, sarà vguale al quadrato della metà della linea.



Sia la retta linea A B diuisa in due parti vguali in C, e la medesima retta AB sia diuisa in due parti ineguali in D, e sia CD la portione intermedia frà l'vguale diuisione, e la diuisione ineguale. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato della intermedia portione CD, è vguale al quadrato della metà CB.

Sopra la retta C B [a] si descriua il quadrato C E, si tiri il diametro F B; dal punto D si tiri la retta DG [b] parallela al lato EB, ouero FC, la quale segarà il diametro FB in qualche punto H; per il punto H si faccia passare la retta IK [b] parallela alla retta AB, che segarà il lato FC in qualche punto L; dal punto A si tiri la retta AK parallela ad FC, la quale concorrerà con la retta I L continuata in qualche punto K: sarà diuiso il quadrato C E in quattro parallelogrammi, de' quali i due LG, DI, intorno al diametro, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi CH, HE [c] sono frà di loro vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro il quadrato D I, ne viene il rettangolo C I [d] vguale al rettangolo DE; mà il rettangolo A L [e] è vguale al rettangolo CI (stante, che sono sopra le vguali base AC, CB, e frà le medesime parallele KI, AB) sarà il rettangolo AL [f] vguale al rettangolo DE; vgualmente se gli aggiunga il rettangolo C H, ne viene il rettangolo A H [g] vguale allo gnomone CBEGHL: all'vno, ed all'altro s'aggiunga il quadrato LG, sarà il quadrato CE, vguale al rettangolo AH col quadrato LG: il rettangolo AH [h] è contenuto dalle due AD, DH, cioè dalle due AD, DB, per essere DH

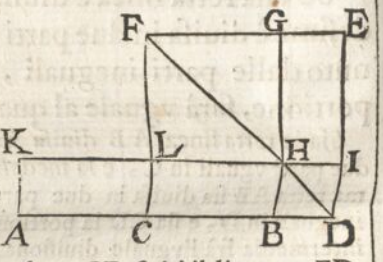
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 2. assiom.
e 36 del 1.
f 1. assioma.
g 2. assioma
h 1. defin. del 2.

vguale al lato DB, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato LG, cioè [K] col quadrato di CD, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CB; e così il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato dell'intermedia portione CD, sarà vguale al quadrato di CB, ch'è metà della linea AC, come fù proposto dimostrare.

K 34. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, ed à quella s'aggiunga vna retta ad arbitrio; il rettangolo contenuto dalla composta, e dall'aggiunta, col quadrato della metà della linea, è vguale al quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.



Sia la retta A B diuisa in due parti vguali in C, allaquale s'aggiunga nella medesima dirittura qualunque retta BD. Dico che il rettangolo contenuto da tutta la composta AD, e dall'aggiunta DB, col quadrato di CB, ch'è metà della linea AB, è vguale al quadrato della retta C D, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.

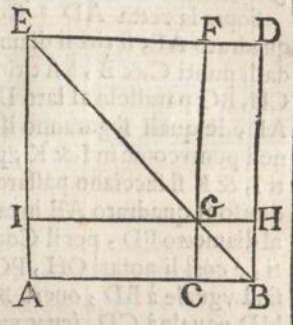
Sopra la retta, CD, [a] si descriua il quadrato CE, si tiri il diametro FD, dal punto B [b] si tiri la retta BG parallela alla retta ED, ouero FC, segarà il diametro F D in qualche punto H; per il punto H si faccia passare la retta IK parallela alla retta AD, la quale segarà FC in qualche punto L; dal punto A, si tiri la retta AK, parallela al lato FC, la quale concorrerà con IK continuata in qualche punto K, e sarà diuiso il quadrato C E in quattro parallelogrammi, de' quali i due L G, B I, che sono intorno al diametro F D, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi CH, HE sono rettangoli: e perche i complementi CH, HE [c] sono frà di loro vguali, ed il rettangolo AL [d] è vguale al rettangolo CH (stante che sono sopra le vguali basi AC, CB, e frà le medesime parallele K H, A B) sarà il rettangolo AL vguale al rettangolo HE; s'aggiunga all'vno, ed all'altro il rettangolo C I, ne viene il rettangolo AI [e] vguale allo gnomone CDEGHL; vgualmente s'aggiunga il quadrato LG, sarà il quadrato CE vguale al rettangolo AI col quadrato LG. Il rettangolo AI [f] è contenuto dalle due rette AD, DI, cioè dalle due AD, DB (stante che DI è vguale à DB) sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DB, col quadrato LG, cioè [g] col quadrato di CB, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CD. Per la qual cosa il rettangolo contenuto da tutta la composta A D, e dall'aggiunta D B, col quadrato di CB, ch'è metà della linea A B, è vguale al quadrato della retta CD, ch'è composta della metà C B, e dell'aggiunta B D, come fù proposto dimostrare.

a 46. del 1
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 36. del 1.
e 2. assiom.
f 1. definit. del 2.
g 34. del 1.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti come ſi vuole ; il quadrato di tutta, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta, e da quella parte, doue è fatto il quadrato, col quadrato dell'altra parte.



Sia la retta linea AB diuiſa in due parti, come ſi vuole in C. Dico che il quadrato di tutto la retta AB, col quadrato della parte AC, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, col quadrato dell'altra parte CB.

Sopra la retta AB [a] ſi deſcriua il quadrato AD, ſi tiri il diametro EB; dal punto C, ſi tiri la retta CF [b] parallela alla retta DB, ouero AE, la quale ſegarà il diametro in qualche punto G ; dal punto G, ſi faccia paſſare la retta HI parallela al lato AB ; ſarà diuiſo il quadrato AD in *quattro parallelogrammi, de'quali i due IF, CH, che ſono intorno al diametro EB, per il primo Corollario alla quarta propoſitione, ſono quadrati, ed i complementi AG, GD ſono rettangoli. E perche i complementi* AG, GD [c] *ſono frà di loro vguali, all'vno, ed all'altro s'aggiunga* il quadrato IF, *ne viene il* rettangolo AF [d] vguale al rettangolo ID. In oltre il rettangolo AF [e] è *contenuto da i lati* AE, AC ; ma il lato AE è vguale ad AB, per eſſere lato del quadrato AD, ſarà il rettangolo AF vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AC; *e perciò i due* rettangoli AF, ID, ſono vguali al doppio rettangolo *contenuto dalle due* BA, AC ; ma i due rettangoli AF, ID ſono vguali allo gnomone CAEDHG col quadrato IF ; ſarà lo gnomone CAEDHG, col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC; vgualmente s'aggiũga il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene tutto il quadrato AD [f] col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, AC, col quadrato di CB: ma il quadrato IF è vguale al quadrato di AC (ſtante che [g] IG è vguale ad AC) ſarà il quadrato AD, cioè il quadrato di AB col quadrato di AC, vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col quadrato del rimanente CB, ch'era da dimoſtrarſi.

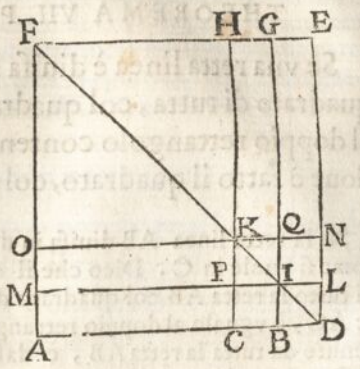
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 2. aſſiom.
e 1. definit. del 2.
f 2. aſſiom.
g 34. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti come ſi vuole, il quadruplo rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, col quadrato del reſtante, è vguale al quadrato della retta compoſta di tutta, e di quella parte.

Sia

Sia la retta linea AB diuisa come si vuole in C, alla quale s'aggiunga BD vguale alla parte CB. Dico che il quadruplo rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, * è vguale al quadrato della retta AD, composta di tutta AB, e dell'aggiunta BD.



Sopra la retta AD [a] si descriua il quadrato AE, si tiri il diametro FD; dalli punti C, & B, [b] si tirino le rette CH, BG parallele al lato DE, ouero AF, le quali segaranno il diametro ne i punti come in I, & K; per li punti I, & K si facciano passare le rette LM, NO, parallele al lato AD; sarà diuiso il quadrato AE in tanti parallelogrammi, de' quali quelli intorno al diametro FD, per il Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, e così li notati OH, PQ, BL, MG, CN, sono quadrati; e perciò IB sarà vguale à BD, ouero BC. Similmente essendo CN quadrato, sarà ND vguale à CD, leuatone le vguali LD, BD, resta NL [c] vguale à CB; ma CB è vguale à BD, le quattro CB, BD, DL, NL [d] sono frà di loro vguali. E perche ne i parallelogrammi *i lati oppositi* [e] *sono frà di loro* vguali, essendo DL vguale ad LN, *sarà BI vguale ad IQ, e sarà CP* vguale à PK. *E similmente essendo CB vguale à BD*, sarà PI vguale ad IL, & KQ vguale à QN. *Di più* perche i parallelogrammi CI, BL sono sopra le vguali basi CB, BD, e frà le medesime parallele PL, CD, perciò [f] sono frà di loro vguali, e per l'istessa ragione i parallelogrammi PQ, IN sono frà di loro vguali.

Si consideri il quadrato C N diuiso in quattro rettangoli, de' quali i complimenti CI, IN, [g] sono frà di loro vguali: fù mostrato CI vguale à BL, ed il rettangolo IN vguale à PQ; i quattro rettangoli C I, B L, PQ, IN [h] sono frà di loro vguali.

Si considerino i rettangoli KG, QE, sopra le vguali basi KQ, Q N, e frà le medesime parallele HE, KN,, e perciò [K] frà di loro vguali. Similmente i rettangoli AP, MK sono sopra le vguali basi CP, PK, e frà le medesime parallele A O, C K, in conseguenza sono frà di loro vguali: e perche il quadrato MG è diuiso ne' i quattro parallelogrammi, de' quali i due O H, P Q sono intorno al diametro, saranno i complementi MK, K G [l] frà di loro vguali; mà il rettangolo KG fù mostrato vguale al rettangolo Q E, ed il rettangolo KM vguale al rettangolo PA; i quattro rettangoli AP, MK, KG, QE [m] sono frà di loro vguali. Al rettangolo AP s'aggiunga *il* rettangolo C I; al rettangolo M K s'aggiunga P Q; al rettangolo G N s'aggiunga QL; ed al rettangolo HQ s'aggiunga BL; *ne verranno i* quattro rettangoli AI, MQ, IE, & HQ con LB, [n] frà di loro vguali; dal che tutti quattro sono il quadruplo d'vno, cioè il quadruplo del rettangolo AI: mà tutti quattro compongono lo gnomone ADEHKO, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo AI. Il rettangolo AI è conte-

nuto

* *col quadrato di CA*

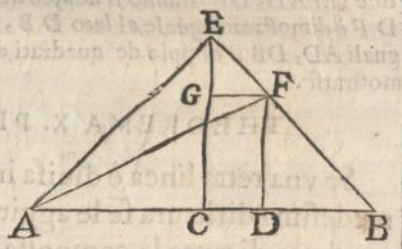
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 3. assiom.
d 1. assiom.
e 34. del 1.
f 36. del 1.
g 43. del 1.
h 1. assiom.
K 36. del 1.
l. 43. del 1.
m 1. assiom.
n 2. assiom.

nuto da tutta AB, e da BI, cioè da BC, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC: vgualmente se gli aggiunga il quadrato OH, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AE, cioè il quadrato della composta AD, vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC, col quadrato del restante AC, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e la medesima è diuisa in due parti ineguali; li quadrati delle parti ineguali sono il doppio del quadrato della metà, col quadrato dell'intermedia portione.

Sia la retta AB diuisa in due parti vguali in C, e la medesima AB sia diuisa in due parti ineguali nel punto D, e sia CD l'intermedia portione frà l'vguale, ed ineguale diuisione. Dico che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, sono il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato dell'intermedia portione CD.



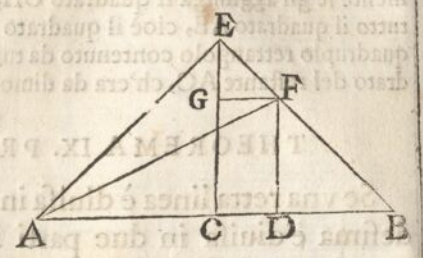
Nel punto C s'erigga la retta CE [a] *ad angoli retti con* AB, *si faccia* CE [b] *vguale ad* AC, *ouero* CB, e si tirino le rette AE, EB; *nel punto* D, s'erigga la retta DF [c] perpendicolare ad AB, la quale continuata concorrerà col lato EB in qualche punto F, dal quale si tiri la retta FG [d] parallela ad AB, segarà la retta EC in qualche punto G, *si tiri la retta* FA.

Perche la retta EC è fatta vguale ad AC sarà il triangolo AEC isoscele, e gli angoli CAE, CEA, [e] saranno frà di loro vguali; mà l'angolo in C è retto, ogn'vno de'i due angoli CAE, CEA [f] sarà la metà d'vn angolo retto. Considerando il triangolo CEB, nell'istesso modo si dimostrerà, ch'ogn'vno de'i due angoli CEB, CBE, è la metà d'vn angolo retto, dal che tutto l'angolo AEF sarà retto. Nel triangolo FDB, l'angolo in D, per costruttione è retto, l'angolo B è dimostrato essere la metà d'vn angolo retto, il rimanente angolo DFB [g] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli DFB, DBF [h] sono frà di loro vguali, ed il lato DB [K] è vguale al lato DF. Essendo GF, per costruttione parallela ad AB, l'angolo esterno EGF [l] è vguale all'angolo ECB interno, ed opposto; mà l'angolo in C è retto, sarà l'angolo EGF retto. Nel triangolo EGF, l'angolo G è retto, l'angolo GEF è la metà d'vn retto, il rimanente angolo EFG [m] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli GEF, GFE sono frà di loro vguali; ed il lato GE [n] sarà vguale al lato GF.

a 11. del 1.
b 3. del 1.
c 11. del. 1.
d 31. del. 1.
e 5. del 1.
f 32. del 1.
g 32. del 1.
h 10. assiom.
K 6. del 1.
l 29. del 1.
m 32. del 1.
n 6. del 1.

Di

o 47. del 1. Di nuouo nel triangolo ECA, angolo retto in C, il quadrato di EA o è vguale à i quadrati de'i due lati EC, CA, ma EC, per costruttione è vguale ad AC, sarà il quadrato di AE il doppio del quadrato di AC. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF o è vguale à i quadrati de'i due lati EG, GF; mà EG è dimostrato vguale à GF, sarà il quadrato di EF il doppio del quadrato di GF, p 34. del 1. cioè p il doppio del quadrato di CD: e così li quadrati delle due

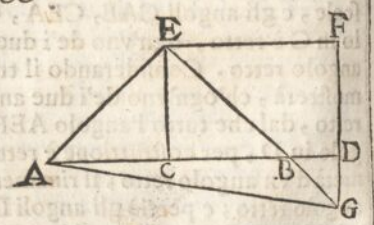


AE, EF, sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD. Nel triangolo AEF, angolo retto in E, il quadrato di AF q 47. del 1. è vguale à i quadrati de'i due lati AE, EF, mà i quadrati de' lati AE, EF sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD; sarà il quadrato di AF il doppio de' quadrati delle due AC, CD. Si consideri il triangolo ADF, angolo retto in D; il quadrato di AF è vguale à i quadrati de' due lati AD, DF, mà il quadrato di AF è il doppio de' quadrati delle due AC, CD; i quadrati de'i due lati AD, DF saranno il doppio de' quadrati delle due AC, CD; mà DF è dimostrato vguale al lato DB, saranno i quadrati delle parti ineguali AD, DB il doppio de' quadrati delle due *AC, CD, ch'era da dimostrarsi*.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e nella medesima dirittura se le aggiunga vna retta ad arbitrio; il quadrato di tutta la composta, col quadrato dell'aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.

Sia la retta linea AB diuisa in due parti vguali in C, alla quale sia aggiunta qualunque retta BD nella medesima dirittura. Dico che il quadrato di tutta la composta AD, col quadrato dell'aggiunta BD, è il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato di CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.



a 11. del 1. Nel punto C a si erigga la retta CE perpendicolare alla retta AD, si faccia EC b vguale ad AC, ouero CB, e si tirino le rette AE, EB; dal b 3. del 1. punto E c si tiri la retta EF parallela alla retta AB, e per il punto D si fac- c 31. del 1. cia passare la retta FDG parallela ad EC, la quale concorrerà con EF in qualche punto F, e con EB continuata in qualche punto G; si tiri la retta AG.

Perche

Perche il lato AC è vguale al lato CE, sarà il triangolo AEC isoscele, e gli angoli C A E, CEA, [d] saranno frà di loro vguali; mà l'angolo ACE, per costruttione è retto, ogn'vno de'i due angoli CAE, CEA [e] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo, considerando il triangolo ECB, si dimostrerà, ch'ogn'vno degl'angoli CEB, CBE, è la metà d'vn angolo retto; dal che tutto l'angolo A E B sarà retto. In oltre perche le rette EF, CD, sono parallele, segate dalla retta EC, i due angoli FEC, DCE, [f] interni, e dalla medesima parte, sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo DCE è retto, sarà l'angolo FEC retto. Nel parallelogrammo CF [g] gli angoli opposti, ed i lati opposti sono vguali; & essendo gli angoli FEC, D C E retti, saranno gli angoli opposti in F, & D retti; ed il lato C D sarà vguale al lato E F. Perche dunque l'angolo C E F è retto, leuatone l'angolo C E B, ch'è la metà d'vn angolo retto, l'angolo F E G, che resta, sarà la metà d'vn angolo retto. Nel triangolo FEG, l'angolo F è retto, l'angolo FEG è la metà d'vn retto, sarà il restante angolo FGE [h] la metà d'vn angolo retto; dal che i lati EF, FG, [K] sono frà di loro vguali. Similmente nel triangolo G D B, l'angolo D è retto, l'angolo D G B è la metà d'vn angolo retto; il rimanente angolo DBG [l] sarà la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli DBG, D G B sono frà di loro vguali, ed il lato DG [m] sarà vguale al lato DB.

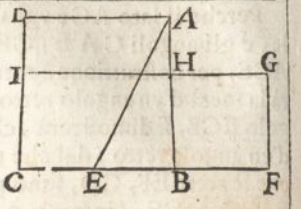
Di nuouo nel triangolo ECA, angolo retto in C, il quadrato di AE [n] è vguale à i quadrati de'i due lati AC, CE; mà E C è fatto vguale al lato CA, *sarà il quadrato di AE il doppio* del quadrato di A C. Similmente *nel triangolo E F G, angolo retto in F, il quadrato di E G* [n] è vguale à i *quadrati de'i due lati EF, F G; mà E F è vguale ad F G, sarà il quadrato di EG il doppio del quadrato di EF*, cioè il doppio del quadrato di CD; e cosi li quadrati de'i due lati A E, E G sono il doppio de i quadrati delle due rette A C; C D. *Si consideri il* triangolo A E G, angolo retto in E, il quadrato di A G [n] è vguale à i quadrati de'i due lati AE, EG; mà i quadrati de'i due AE, E G sono *il doppio de i quadrati* delle due AC, CD, sarà il quadrato di A G il doppio de'i quadrati delle due AC, CD. Nel triangolo A D G, angolo retto in D, il quadrato di AG è vguale à i quadrati de'i due lati AD, DG; mà il quadrato di AG è il doppio de' quadrati delle due A C, C D, i due quadrati de' lati A D, D G saranno il doppio de'i quadrati delle due A C, C D: fù dimostrata DG vguale à BD; sarà dunque il quadrato della composta AD, col quadrato dell'aggiunta DB, il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato della retta C D, composta della metà C B, e dell'aggiunta B D, ch'era da dimostrarsi.

d 5. del 1.
e 32. del 1.
f 29. del 1.
g 34. del 1.
h 32. del 1.
K 6. del 1.
l 32. del 1.
m 6. del 1.
n 47. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITONE XI.

Data vna retta linea, diuiderla talmente, che il rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, sia vguale al quadrato dell'altra parte.

Sia la retta linea AB, la quale s'habbia à diuidere come s'è detto.

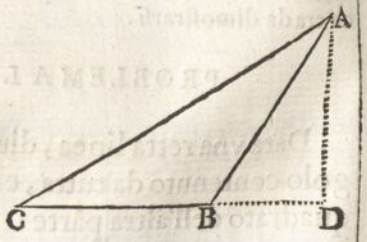


a 46. del 1. b 10. del 1. Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato DB, si diuida il lato CB [b] in due parti vguali in E, e si tiri la retta EA; poi si prolunghi CB verso F, e si faccia EF [c] vguale alla retta EA; sopra la retta BF [d] si descriua il quadrato BG, il di cui lato GH segarà il lato AB in qualche punto H. *Dico* ch'il rettangolo contenuto da tutta BA, e dalla parte AH, e vguale al quadrato di HB. Si prolunghi GH fino ad I. Perche la retta CB, per costruttione è diuisa in due parti vguali in E, e gli è aggiunta la parte BF, sarà il rettangolo contenuto dalla composta CF, e dall'aggiunta BF, col quadrato della metà, EB, [e] vguale al quadrato di EF: la retta EF è fatta vguale ad EA, sarà il rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB, vguale al quadrato di AE. Nel triangolo ABE, angolo retto in B, il quadrato di AE [f] è vguale à i quadrati de'i due lati AB, BE; mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB; i quadrati dunque delle due AB, BE, [g] sono vguali al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB: vgualmente se ne leui il quadrato di EB, resta il quadrato di AB, [h] cioè il quadrato DB, vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, cioè vguale al *rettangolo CG*, (stante, che BF è vguale ad FG) *vgualmente se ne leui il commune* rettangolo IB; *resta il rettangolo DH vguale al quadrato HF*. E perche *il rettangolo DH* [K] *è contenuto dal lato* DA, e da AH, ed il lato AD è vguale ad AB; sarà il rettangolo contenuto da BA, & AH vguale al quadrato BG, cioè vguale al quadrato di BH, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 3. del 1. d 46. del 1. e 6. del 2. f 47. del 1. g 1. assiom. h 3. assiom. K 1. definit. del 2.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Ne i triangoli ambligonij il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è tanto maggiore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo ottuso, e dalla continuatione di quello, interposta frà l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che cade dall'angolo opposto al lato continuato.



Sia il triangolo ambligonio ABC, angolo ottuso in B, e dall'angolo A [a] cada la retta AD perpendicolare al lato CB, continuato fino in D. Dico ch'il quadrato del lato AC opposto all'angolo ottuso ABC, è tanto maggiore de'i quadrati de'i lati AB, BC, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo conte-

a' 12. del 1.

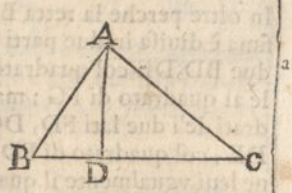
nuto dal lato CB, e dalla continuatione BD.

La retta C D è diuisa in B; sarà il quadrato di C D [b] vguale à i quadrati delle due CB, BD, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime due CB, BD: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD; i quadrati de'i due lati CD, DA [c] saranno vguali à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD: mà, per essere l'angolo D retto, il quadrato di A C [d] è vguale à i quadrati de'i due lati CD, DA; sarà il quadrato di CA vguale à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. E perche il quadrato di A B [d] è vguale à i quadrati delle due A D, D B; sarà il quadrato di AC vguale à i quadrati de'i due lati CB, BA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. Hor se à i quadrati de'i due lati CB, BA, bisogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, accioche siano vguali al quadrato di AC; il quadrato dunque del lato A C è tanto maggiore de'i quadrati de'i due lati CB, B A, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, ch'era da dimostrarsi.

b 4. del 2.
c 2. assiom.
d 47. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

In qualunque triangolo rettilineo, il quadrato del lato oppostо all'angolo acuto, è tanto minore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo acuto, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo acuto, e la parte del medesimo lato interposta frà l'angolo acuto, e la perpendicolare.



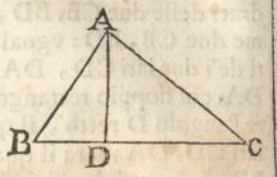
Sia qualunque triangolo rettilineo A B C, angolo acuto in C, e cada dall'angolo A [a] la retta A D perpendicolare al lato B C. Dico che il quadrato del lato A B, oppostо all'angolo acuto C, è tanto minore de'i quadrati de'i lati BC, CA, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dal lato BC, e dalla parte DC, interposta frà l'angolo acuto C, e la perpendicolare AD.

a 12. del 1.

Perche la retta BC è diuisa in D, [b] il quadrato di tutta BC, col quadrato della parte D C, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, col quadrato del restante BD: dall'vna, e l'altra parte di questa vgualità, s'aggiunga il quadrto di A D; ne vengono i quadrati delle tre BC, CD, D A, [c] vguali al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, con i quadrati delle due BD, DA: e perche nel triangolo A D B, angolo retto in D, i quadrati de'i due lati BD, D A, [d] sono vguali al quadrato di AB, sarà il quadrato di AB, col doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, vguale à i quadrati delle tre B C, C D, DA: mà nel triangolo rettangolo A D C, i quadrati de'i due lati A D, DC sono vguali al quadrato di AC; sarà il quadrato di AB, col doppio

b 7. del 2.
c 2. assiom.
d 47. del 1.

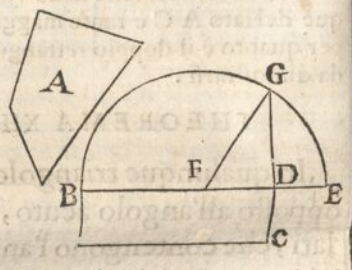
rettangolo contenuto dalle due B C, C D, vguale à i quadrati de'i due lati B C, C A. Hor ſe al quadrato del lato A B biſogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, C D, accioche ſia vguale à i quadrati de'i due lati BC, CA; ſarà il quadrato del lato A B tanto minore de'i quadrati de' lati B C, C A, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, CD, come fù propoſto dimoſtrare.



PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Coſtruire vn quadrato vguale ad vn dato rettilineo.

Habbiaſi à deſcriuere vn quadrato vguale al dato rettilineo A. Si faccia il
a 45. del 1. parallelogrammo rettangolo B C [a] vguale al dato rettilineo A; ſi continui
b 3. del 1. il lato BD verſo E, e ſi faccia DE [b] vguale al lato DC; ſi diuida la retta BE
c 10. del 1. [c] in due parti vguali in F; fatto centro in F, coll'interuallo FB, ouero F E, ſi deſcriua il mezzo circolo BGE, ſi continui il lato C D ſino, che *concorra con la circonferenza in qualche punto G*. Dico che il quadrato, che ſi deſcriue *ſopra alla retta* DG, è vguale al rettilineo dato A. Dal centro F al punto G ſi tiri la retta FG. Nel triangolo FGD, angolo retto in D,
d 47. del 1. il quadrato del lato FG [d] è vguale à i quadrati de'i due lati FD, DG.
e 5. del 2. In oltre perche la retta BE è diuiſa in due parti vguali in F, e la medeſima è diuiſa *in due parti ineguali* in D, [e] il rettangolo contenuto dalle due BD, DE, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di EF, cioè vguale al quadrato di FG; mà il quadrato di FG è dimoſtrato vguale à i quadrati de'i due lati FD, DG, ſarà il rettangolo contenuto dalle rette BD, DE, col quadrato di FD, vguale à i quadrati de'i due lati F D, D G: ſe ne leui vgualmente il quadrato del lato FD, reſta il rettangolo contenuto dalle due BD, DE,
f 3. aſſioma [f] cioè il rettangolo BC, vguale al quadrato della retta D G; mà il rettangolo B C è fatto vguale al rettilineo A, ſarà il
g 1. aſſiom. quadrato deſcritto ſopra la retta GD [g] vguale al dato rettilineo A, ch' era da farſi, e dimoſtrarſi.



Fine del *Secondo* Elemento.

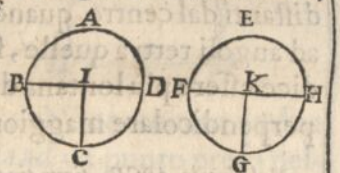
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO TERZO.

DEFINITIONI.

I.

Quei circoli sono vguali, i di cui diametri, ò semidiametri sono frà di loro vguali.

IO E' se il diametro BD, è vguale al diametro FH, ouero il semidiametro IC è vguale al semidiametro KG, il circolo ABCD, è vguale al circolo EFGH; perche generandosi i circoli ABCD, EFGH, dalle reuolutioni de' loro semidiametri IC, KG, intorno à gli estremi I, & K,

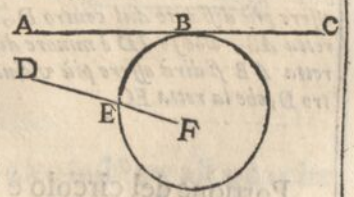


posti immobili, se li semidiametri IC, KG sono frà di loro vguali, passeranno ne i loro flussi spatij vguali, e così i circoli descritti saranno frà di loro vguali. Ed all' incontro quando i circoli sono vguali i loro diametri, ò semidiametri sonò frà di loro vguali.

II.

La retta linea si dice toccare il circolo, quando concorrendo col circolo continuata non lo sega.

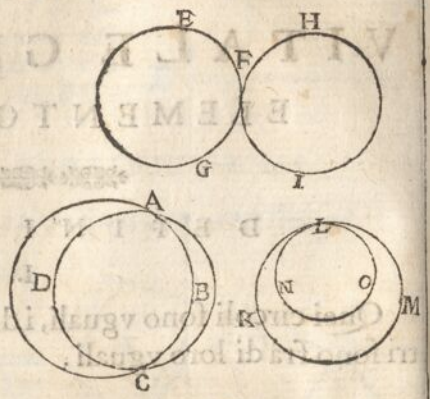
Nel circolo BE concorra la retta DE, e continuata passi dentro del circolo, come fà la parte EF, in tal caso la retta DF non si dice toccare il circolo. Quando poi concorrendo qualche retta col circolo; come fà la retta AB, e continuata passi fuori di esso circolo, come appariſce per la retta AC, all' hora la retta AC si dirà toccare il circolo BE, ed il punto B, sarà il punto del contatto.



III.

I Circoli si dicono toccarsi frà di loro, quando concorrendo insieme non si segano.

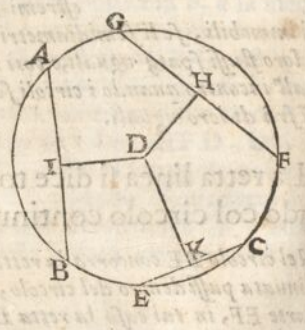
Per essempio i circoli ABC, ADC de' quali parte dell' vno cade dentro dell' altro, si dicono segarsi, ed i circoli EFG, HFI, li quali concorrono insieme nel punto F, e l'vno non sega l'altro, ma l'vno cade totalmente fuori dell' altro, si dicono toccarsi di fuori; ed i circoli KLM, NLO, le di cui circonferenze concorrono insieme nel punto L, e non si segano scambieuolmente, si dicono toccarsi di dentro.



IV.

Le rette linee nel circolo si dicono essere vgualmente distanti dal centro, quando le rette, *che dal centro cadono* ad angoli retti à quelle, *sono frà di loro* vguali; e quella si dice essere più lontana dal centro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

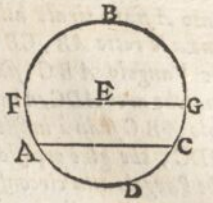
Nel circolo ABCF, siano tirate le rette AB, EC, GF, e dal centro D, s'intendano tirate le rette DH, DI, DK ad angoli retti con le rette AB, EC, GF; se la perpendicolare DH è vguale alla perpendicolare DI, le rette GF, AB si diranno essere vgualmente distanti dal centro D: e se la perpendicolare DK è maggiore della perpendicolare DI, la retta EC si dirà essere più distante dal centro D, che la retta AB, cioè se ID è minore di DK, la retta AB si dirà essere più vicina al centro D, che la retta EC.



V.

Portione del circolo è la figura contenuta dalla retta linea, e da vna parte della circonferenza di esso circolo.

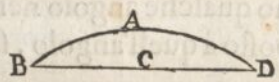
S'intenda il circolo ABCD, il di cui centro E, ed il diametro FG, e ſia ſegato il circolo A B C D dalla retta AC; la figura contenuta dalla retta A C, & dalla circonferenza ABC, ſi chiama portione del circolo; che ſe il centro E cade in eſſa, in tal caſo la portione ABC è maggiore del ſemicircolo FBG, e perciò ſi dice portione maggiore: e ſe il centro E cade fuori come nella notata A D C, la quale per eſſere minore del ſemicircolo FDG, ſi chiama portione minore: la linea ABC, ouero ADC, ſi chiama arco; e la retta AC ſi dice corda dell'arco ABC, ed anco dell'arco ADC.



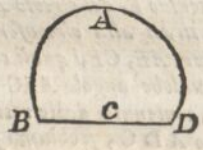
V I.

Angolo della portione è quello, ch'è contenuto dalla corda, e dall'arco.

L'angolo contenuto dall'arco A B; e dalla corda BCD, cioè l'angolo ABC, ouero ADC, ſi chiama angolo della portione.

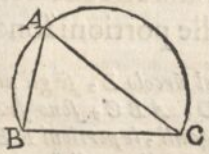


V I I.



Angolo nella portione è quello, ch'è contenuto da due rette tirate dagl'eſtremi della corda ad vn punto preſo nella circonferenza; e ſi chiama ancora angolo nella circonferenza.

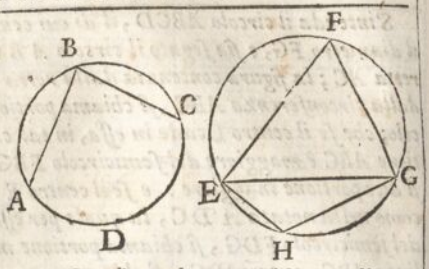
Nella portione BAC dagli eſtremi B, & C, della corda BC, ſiano tirate due rette, come BA, CA, à qualche punto A; preſo nella circonferenza BAC; l'angolo BAC, contenuto dalle rette BA, AC, ſi chiama angolo nella portione; cioè ſi dice eſſere nella portione BAC, e ſi chiama ancora angolo nella circonferenza, ouero alla circonferenza.



V I I I.

L'angolo alla circonferenza ſi dice inſiſtere all'arco, che gli è oppoſto.

Nel circolo ABCD, da qualche punto A siano tirate alla circonferenza le rette AB, CB, talmente che l'angolo ABC sia opposto à qualche arco ADC, in tal caso l'angolo ABC si dirà insistere all'arco ADC, che gli è opposto. E nota, che l'angolo alla circonferenza può essere angolo nella portione, ed ancora angolo insistente; come nella figura EFGH, l'angolo EFG, rispetto all'arco EFG, si dice essere nella portione EFG; e rispetto all'arco EHG, che gli è opposto, si dice insistente: e nell'istesso modo l'angolo EHG si dice essere nella portione EHG, e si dice insistere all'arco EFG, che gli è opposto.



I X.

La figura contenuta da due semidiametri, che contengono qualche angolo nel centro del circolo, e dall'arco opposto à quell'angolo, si chiama settore del circolo.

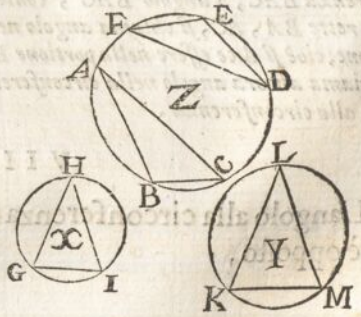
Dal centro E, del circolo ABCD, s'intendano tirati alla circonferenza i due semidiametri AE, CE, i quali contenghino nel centro qualche angolo AEC, la figura AECD, contenuta dalle rette AE, EC, e dall'arco ADC, si chiama settore del circolo.



X.

Simili portioni di circoli sono quelle, delle quali gli angoli alla circonferenza sono vguali, cioè, che gli angoli in quelle portioni sono vguali frà di loro.

Nel circolo Z, se gli angoli FED, ABC, sono frà di loro vguali, le portioni FED, ABC, nelle quali sono posti i detti angoli, si dicono essere frà di loro simili. Parimente ne i circoli ineguali X, Y, se gli angoli GHI, KLM sono frà di loro vguali, le portioni GHI, KLM si dicono essere frà di loro simili.



PRO-

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Dato vn circolo, ritrouargl' il centro.

Sia il dato circolo ABCD, al quale si voglia ritrouare il centro.

Si tiri qualunque retta AC, che seghi il circolo ABC; si diuida la retta AC [a] in due parti vguali in E, e sopra la retta AC, [b] nel punto E, si erigga la perpendicolare EB, la quale continuata concorrerà con la circonferenza come in B, & D; si diuida la retta BD [c] in due parti vguali in F. Dico ch'il punto F è il centro del dato circolo ABCD.

a 10. del 1.
b 11. del 1.
c 10. prop. 1

Se il punto F non è il centro del circolo ABCD, perche BF è vguale ad FD, necessariamente sarà qualche altro pũto fuori della retta BD, e sia quello, per esempio, il punto G; si tirino le rette GA, GE, GC. Perche il punto G è centro del circolo ABCD, le rette GA, GC [d] sono frà di loro vguali: si considerino i due triangoli GEC GEA, de' quali il lato EC, per costruttione, è vguale al lato AE, il lato EG è commune, perciò i due lati GE, EC sono vguali à i due lati GE, EA, la base GC è dimostrata vguale alla base GA, sarà l'angolo GEC vguale all'angolo GEA; dal che l'angolo GEA [e] sarà retto: mà per costruttione l'angolo BEA è retto; l'angolo dunque BEA sarà vguale all'angolo GEA, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque il punto G è centro del circolo ABCD, mà sarà il punto F, ch'era da dimostrarsi.



d 15. defin. del 1.
e 10. defin. del 1.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto, è manifesto, che se vna retta linea sega vn altra retta tirata nel circolo in due parti vguali, & ad angoli retti, quella passa per il centro del circolo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nella circonferenza del circolo sono presi due qualunque punti, la retta, che congiunge quei punti, cade dentro del circolo.

Nella circonferenza del circolo ABCF, siano presi due qualunque punti A, & C, tirata la retta AC [a]. Dico che la retta AC cade dentro del circolo.

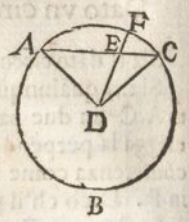
Si troui il centro del circolo, [b] che sia D, e si tirino le rette DA, DC, [c] e preso nella retta AC qualunque punto E, si tiri la retta DE, la quale si continui [d] indeterminatamente verso F, la retta DEF,



a 1. postul.
b 1. del 3.
c 1. postul.
d 2. postul.

indeterminata verſo F, ſegarà la circoferẽza del circolo in qualche punto F. Perche le rette DC, D A ſono tirate dal centro alla circonferenza, perciò e ſono frà di loro vguali, ed il triangolo D AC fè iſoſcele, dal che gli angoli DCA, D A C, g ſono frà di loro vguali. Nel triangolo DEC, il lato CE è continuato verſo A, ſarà l'angolo eſterno D E A h maggiore dell'angolo D C A interno, ed oppoſto; mà l'angolo DCA, è moſtrato vguale all'angolo DAC, ſarà l'angolo DEA maggiore dell'angolo D A E, ed il lato D E, K ſarà minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale ad FD, ſarà DE minore della retta DF, dal che il punto E cade dentro al circolo: e perche il punto E è preſo ad arbitrio nella retta AC, ogni punto dunque immaginato nella retta AC, cade dentro del circolo. Per la qual coſa la retta AC, che paſſa per quegl'infiniti punti, cade dentro del circolo, ch'era da dimoſtrarſi.

e 15. defin. del 1.
f 25. defin. del 1,
g 5. del 1.
h 16. del. 1.
Kj19. del. 1.



COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che quando vna retta linea tocca vn circolo, quella tocca il circolo in vn ſol punto; perche ſe paſſaſſe per due qualunque *punti preſi nella circonferenza, caderebbe dentro del circolo*, ed all'hora lo ſegarebbe, e non lo toccarebbe.

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

La retta, che paſſa per il centro del circolo, e ſega vn altra retta tirata in eſſo circolo fuori del centro, ſe la ſega in due parti vguali, la ſegarà ad angoli retti; e, ſe la ſega ad angoli retti, la ſegarà in due parti vguali.

Sia il circolo ABCD, il di cui centro E, per il quale paſſi la retta BD, e ſeghi la retta A C, che non paſſa per il centro. Dico prima, che ſe la retta BD ſega la retta AC in due parti vguali, gli angoli BFC, B F A ſono retti. Dal centro E à i punti A, & C, a ſi tirino le rette EA, EC. Si conſiderino i due triangoli EFC, EFA: perche FC, per ipoteſi, è vguale ad FA, ed il lato FE è commune; i due lati EF, F C ſono vguali à i due lati EF, FA; la baſe EC, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe EA, ſarà l'angolo EFC, b vguale all'angolo EFA, e per la decima definitione del primo libro, gli angoli EFC, EFA ſono retti.

a 46. poſt.
b 8. del 1.



Di

Di nuouo, ſuppoſto che gli angoli in F ſiano retti. Dico che la retta AF è vguale alla retta FC. S'intenda fatta l'antecedente coſtruttione. Perche gli angoli EFC, EFA ſono retti, ſarà il quadrato del lato EC, [c] vguale à i quadrati de'i due lati EF, FC, ed il quadrato del lato EA, ſarà vguale à i quadrati de' due lati EF, FA; mà EC, per la definitione del circolo, è vguale ad EA; ſaranno i quadrati de' due lati EF, FC vguali à i quadrati de lati EF, FA; ſe ne leui il quadrato del commune lato EF, reſta il quadrato del lato F C [d] vguale al quadrato del lato FA, ed il lato FC vguale al lato FA, come fù propoſto dimoſtrare.

c 47. del 1.

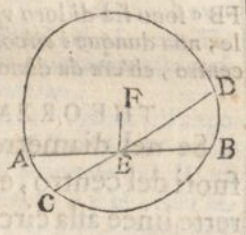
d 3. poſt.

THEOREMA III. PROPOSITIONE IV.

Se nel circolo due rette linee ſi ſegano fuori del centro, ambedue non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Nel circolo ACBD, il di cui centro F, ſi ſeghino due qualunque rette AB, CD, fuori del centro F, in qualche punto E. Dico che tutte due non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Si ſeghino s'è poſſibile in due parti vguali nel punto E, dal centro F all'interſegatione E [a] ſi tiri la retta FE. Perche la retta FE paſſa per il centro F e ſega la retta A B fuori del centro in due parti vguali, gli angoli FEB, FEA [b] ſaranno retti. Similmente perche la retta F E paſſa per il centro F, e ſega la retta CD in due parti vguali, gli angoli FED, FEC ſaranno retti; dal che l'angolo F E D [c] ſarà vguale all'angolo FEB, la parte vguale al tutto, [d] ch'è impoſſibile; non dunque tutte due le rette A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi.



a 1. poſt.

b 3. del 1.

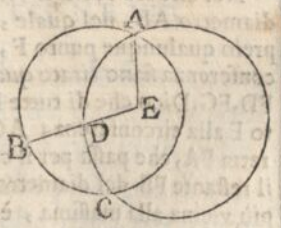
c 10. aſſiom.

d 9. aſſiom.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE V.

Se due circoli ſi ſegano ſcambieuolmente, non è poſſibile, ch' habbiano vn medeſimo centro.

Si ſeghino i circoli ABC, A D C, come in A, & C. Dico che i circoli ABC, ADC non hanno il medeſimo centro. Habbiano, s'è poſſibile, il medeſimo centro E, dal quale all' interſegatione A [a] ſi tiri la retta A E; e dal medeſimo punto E ſi tiri qualunque retta EB, che ſeghi le circonferenze de circoli fuori delle interſegationi A, & C, come in B & D. Perche il punto E è centro del circolo ADC, ſarà [b] la retta ED vguale alla retta EA. Similmente perche



a 1. poſt.

b 15. definit. del 2.

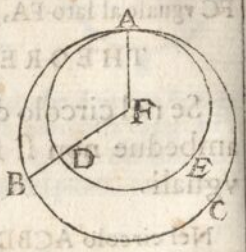
c 15.defin. del.1.

d 9. assiom.

il punto E è centro del circolo ABC, la retta EB, [c] sarà vguale alla retta EA: dal che le rette ED, EB sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si segano hanno vn medesimo centro, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VI.

Se due circoli si toccano di dentro, non è possibile, che habbiano il medesimo centro.



Si tocchino i circoli ABC, ADE, l'vno dentro l'altro in qualche punto A. Dico che non possono hauere il medesimo centro. Habbiano, s'è possibile, il medesimo centro F; dal centro F al

a 1.post.

al contatto A [a] si tiri la retta FA, e dal medesimo centro F, si tiri qualunque altra retta FB, che seghi le circonferenze de' circoli fuori del contatto A, come in B & D. Perche il punto F è centro del circolo ADE, sarà la retta DF [b] vguale alla retta FA. Similmente perche il punto F è centro del circolo ABC. La retta FB sarà vguale alla medesima retta FA; dal che le rette FD, FB [c] sono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si toccano di dentro hanno vn medesimo centro, ch'era da dimostrarsi.

b 15.defin. del.1.

c 1.assiom.
d 9.assiom.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VII.

Se nel diametro del circolo sia preso qualche punto fuori del centro, e da quello siano tirate quante si voglia rette linee alla circonferenza; quella, che passa per il centro, è la massima, il restante del diametro è la minima, e delle altre quella, ch'è più vicina alla massima, è sempre maggiore di quella, ch'è più lontana; e dal medesimo punto due sole rette linee vguali possono cadere nella circonferenza, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte della massima, ò minima.



Nel circolo ACDB, il di cui centro E, ed il diametro AB, nel quale, fuori del centro E, sia preso qualunque punto F, e dal punto F alla circonferenza siano tirate quante si voglia rette FC, FD, FG. Dico che di tutte le rette tirate dal punto F alla circonferenza ACDB, la massima è la retta FA, che passa per il centro E; la minima è il restante FB del diametro; e che la retta FC, più vicina alla massima, è maggiore di FD più lontana; ed FD, è maggiore di FG; e che dal punto F due sole rette linee vguali possono cadere alla circonferenza,

cioè

cioè vna da vna parte, e l'altra dall' altra parte della minima FB, ò maſsima FA.

Dal centro E ſi tirino le rette EC, ED, EG. [a] Per la definitione del circolo la retta EA è vguale alla retta EC; vgualmente ſe gli aggiunga la parte EF, ſarà [b] FA vguale alle due FE, EC: ma nel triangolo FEC, i due lati FE, EC [c] ſono maggiori del terzo lato FC, ſarà FA maggiore di FC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che FA è maggiore di FD, come anco di FG, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual coſa la retta FA è la maſsima.

a 1. poſt.
b 2. aſſiom.
c 20. del 1.

Nel triangolo EFG, i due lati EF, FG ſono maggiori del [d] lato EG; ma il lato EG, per la definitione del circolo, è vguale ad EB, ſaranno i due lati EF, FG maggiori della retta EB; ſe ne leui la commune retta EF, reſta FB [e] minore di FG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la retta FB è minore di FD, come anco di FC, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual coſa la retta FB ſarà la minima.

d 20. del 1.
e 3 aſſiom.

In oltre, perche la retta EC, per la definitione del circolo, è vguale ad ED, vgualmente ſe le aggiunga la retta EF: I due lati FE, EC [f] del triangolo F E C, ſono vguali à i due lati F E, ED, del triangolo FED; l'angolo FEC è maggiore dell'angolo FED, ſtante che, per coſtruttione, lo contiene, ſarà la baſe FC [g] maggiore della baſe FD. Nell'iſteſſo modo, conſiderando i triangoli EDF, EGF, ſi dimoſtrerà, che la retta FD è maggiore di FG. Per la qual coſa quelle, che ſono più vicine alla maſsima FA, *ſono maggiori di quelle*, che più ſono lontane.

f 2. aſſiom.
g 24. del 1.

Finalmente nel punto E ſi faccia l'angolo BEH [h] vguale all'angolo B E G, e ſi tiri [K] la retta FH. *Perche i due lati* F E, E G *del triangolo* F E G, *ſono vguali à i due lati* F E, E H, *del triangolo* F E H; e l'angolo F E G, per coſtruttione, è vguale all'angolo F E H, ſarà la baſe FG [l] vguale alla baſe F H: dal che le due F G, F H, tirate dall' vna, e l'altra parte della minima, ò maſsima, ſono frà di loro vguali. Che poi dal punto F non ſe ne poſſano tirare più di due vguali dall'vna, e l'altra parte della minima, ò maſsima, è chiaro da quel, che s'è dimoſtrato: poiche ſe dal punto F ſia tirata qualche altra retta alla circonferenza, quella caderà ſotto, ò ſopra alla retta FH; ſe cade ſopra come fà la retta FK, per quel, che s'è dimoſtrato, ſarà FK, maggiore di FH, e ſe cade ſotto, come fà F I, ſarà F I minore di F H, che era da dimoſtrarſi.

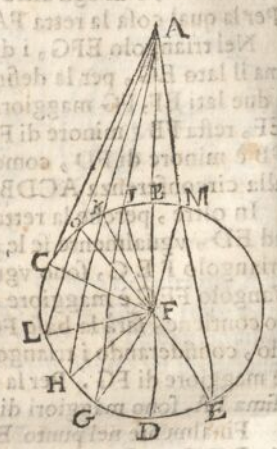
h 23. del 1.
K 1. poſt.
l 4. del 1.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VIII.

Se da qualche punto preſo fuori del circolo ſono tirate rette linee, che ſeghino il circolo, delle quali vna paſſi per il centro: di tutte quelle, che cadono nel cauo della circonferenza, la maſſima è la retta, che paſſa per il centro; dell' altre la più vicina à quella, che paſſa per il centro è maggiore d'ogn'altra più lontana. Nella parte con-

ueſſa

uessa quella, ch'è diretta al centro, è la minima; dell'altre quella, ch'è più vicina alla minima è minore d'ogn'altra più lontana, e da quel punto due sole rette linee vguali cadono nel circolo dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima.



Da qualche punto A, preso fuori del circolo BCD, siano tirate le rette A D, A G, AH, AL, AC &c. che seghino il circolo BCD, e la retta AD passi per il centro F. Dico che la retta AD, che passa per il centro F, è la massima; dell'altre, AG, più vicina alla massima, è maggiore di AH più lontana; & AH è maggiore di AL; come anco AL maggiore di AC e nella parte conuessa, la retta AB, ch'è diretta al centro F, è la minima; la retta A I, più vicina alla minima, e minore di AK più lontana, & AK è minore di AO; e finalmente dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima, due sole rette vguali caderanno nel circolo.

a 1. post. Dal centro F [a] si tirino le rette FG, FH, FL, FC, FO, FK, FI. Perche la retta

b 15. defin. del 1. F D [b] è vguale ad F G, vgualmente s'aggiunga la retta F A; sarà la

c 2. assiom. retta A D [c] vguale alle due A F, F G: ma nel triangolo A F G i due

d 20. del 1. lati AF, FG, [d] sono maggiori del terzo lato AG; sarà la retta AD maggiore della retta AG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta A D è maggiore della retta AH, e d'ogn'altra AL, AC &c. Per la qual cosa la retta AD, che passa per il centro F è la massima.

e 15. defin. del. 1. Si considerino i due triangoli AFG, A F H, de'quali il lato F G [e] è vguale al lato F H; il lato A F è commune ad ambidue, perciò i due lati AF, FG, sono vguali à i due lati AF, FH; l'angolo AFG, è maggiore dell'angolo A F H, (stante che, per costruttione, lo contiene) sarà la

f 24. del 1. base AG [f] maggiore della base AH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AH è maggiore di AL, & AL è maggiore di AC. Per la qual cosa quella, ch'è più vicina alla massima è maggiore d'ogn'altra più lontana.

Nella parte conuessa si consideri il triangolo FIA, del quale i due la-

g 20. del 1. ti AI, IF [g] sono maggiori del terzo lato AF; se ne leuino gli vguali FB,

h 3. assiom. F I, [h] resta A B minore di A I. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta AB è minore di AK, e d'ogn'altra AO, AC &c. per la qual cosa AB ch'è diretta al centro è la minima.

Si consideri il triangolo FKA. Perche dagl'estremi del lato F A sono tirate le rette FI, IA, concorrenti nel punto I, dentro di esso triangolo

21. del 1. KFA; i due lati AK, KF [K] sono maggiori de'i due AI, IF; leuatone gli

l 3. assiom. vguali FI, FK, resta AI [l] minore di AK. Nell'istesso modo si dimostrerà,

che

che AK è minore di AO, e la retta AO è minore di AC. Per la qual cosa la retta AI, più vicina alla minima, è minore d'ogn'altra più lontana.

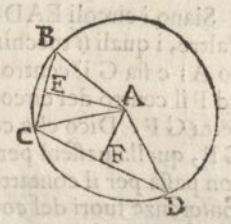
Si faccia l'angolo AEE [m] vguale all'angolo AFG, e si tiri [n] la retta AE. Perche i due lati AF, FE sono vguali à i due lati AF, FG, e l'angolo AFE è vguale all'angolo AFG; la base AE [o] sarà vguale alla base AG; l'angolo AEF, sarà vguale all'angolo AGF, e l'angolo FAE vguale all'angolo FAG. Si tiri la retta FM; sarà l'angolo FME [p] vguale all'angolo FEM, cioè vguale all'angolo FGI: ma l'angolo FGI è vguale all'angolo FIG; sarà l'angolo FIG [q] vguale all'angolo FME, ed i supplementi à due retti, cioè gli angoli FMA, FIA [r], sono frà di loro vguali; mà gli angoli FAM, FAI sono stati mostrati frà di loro vguali, i rimanenti angoli AFM, AFI, sono fra di loro vguali. Finalmente perche i lati AF, FM sono vguali à i due AF, FI, e l'angolo AFM è vguale all'angolo AFI, sarà la base AM [f] vguale alla base AI. Per la qual cosa le due AM, AI, dall'vna, e l'altra parte della minima, sono frà di loro vguali: come ancora le due AE, AG, dall'vna, e l'altra parte della massima per quel che si è dimostrato sono frà di loro vguali: ne possono essere più di due vguali, stante che nel concauo ogn'altra, che passa più vicina ad AD, è maggiore di AE, e se passa più lontana, è minore per quel che si è dimostrato; e nel conuesso, ogn'altra, che passa più vicina ad AB, è minore di AM; e se passa più lontana è maggiore, ch'era da dimostrarsi.

m 23. del 1.
n 1. post.
o 4. del 1.
p 5. del. 1.
q 1. assiom.
r 13. del 1.
f 4. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE IX.

Se dentro d'vn circolo sia preso qualche punto, dal quale cadano alla circonferenza più di due rette linee vguali; quel punto preso sarà centro del circolo.

Dal punto A, preso dentro al circolo BCD, cadano alla circonferenza più di due rette vguali, come AB, AC, AD. Dico che il punto A è centro del circolo BCD. Si tirino le rette [a] BC, CD, e si diuidano [b] in due parti vguali in E, ed F; dal punto A à i punti E, F, si tirino le rette [c] AE, AF. Perche i lati AE, EB del triangolo AEB, sono vguali à i due AE, EC del triangolo AEC, e la base AB, per ipotesi è vguale alla base AC; gli angoli AEB, AEC [d] saranno frà di loro vguali, cioè [e] retti; e per il Corollario alla prima propos. di questo, la retta EA passa per il centro del circolo. Nell'istesso modo si dimostrerà che gli angoli ad F sono retti, e la retta FA passa per il centro del circolo. E perche le rette EA, FA si segano in vn sol punto, e per costruttione passano per il punto A, sarà il punto A il centro del circolo, ch'era da dimostrarsi.



a 1. post.
b 10. del 1.
c 1. post.
d 8. del 1.
e 10. defin. del 1.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE X.

Due circoli, che si segano, non si possono segare più che in due punti.

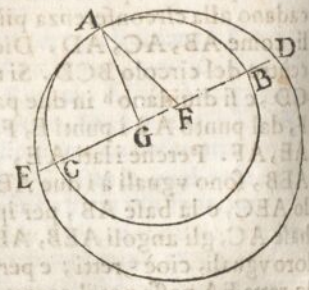


Si seghino i circoli ABCD, EFGHIK, in più di due punti, s'è possibile, come in E, K, H, si troui [a] il centro del circolo ABCD, che sia L, dal quale alle intersegationi E, K, H, [b] si tirino le rette LE, LK, LH, che, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali. In oltre perche dentro del circolo EFGHIK, è preso il punto L, dal quale cadono più di due rette linee vguali alla circonferenza EFGHIK, come sono le rette LE, LK, LH, per l'antecedente propos. il punto L sarà centro del circolo EFGHIK; mà il medesimo punto L è centro del circolo ABCD; sarà il punto L centro commune de'i due circoli ABCD, EFGHIK, che scambieuolmente si segano, il che è contro alla quinta propos. Non dunque i circoli si segano in più di due punti, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 3.
b 1. post.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XI.

Se due circoli l'vn dentro l'altro si toccano, la retta, che congiunge i loro centri, continuata passa per il punto del contatto.



Siano i circoli EAD, CAB, l'vn dentro l'altro, i quali si tocchino in qualche punto A; e sia G il centro del circolo EAD, ed F il centro del circolo CAB; si tiri la retta GF. Dico che continuata la retta GF, quella passerà per il contatto A. Se non passa per il contatto A, segarà le circonferenze fuori del contatto A, come in E, C, B, D; dal contatto A à i centri G, F, [a] si tirino le rette AG, AF. Nel triangolo AGF i due lati AF, FG, [b] sono maggiori del terzo lato AG; mà la retta GA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GD (stante che G è il centro del circolo EAD) i due lati GF, FA saranno maggiori della retta GD; se ne leui la commune GF, [c] resta FA maggiore di FD. In oltre perche il punto F è centro del circolo CAB, le rette FA, FB [d] sono frà di loro vguali; mà la retta FA è stata dimostrata maggiore di FD, sarà FB maggiore di FD, la parte maggiore

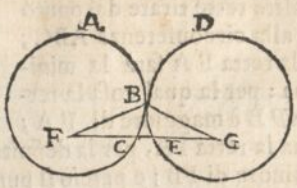
a 1. post.
b 20. del 1.
c 5. assiom.
d 15. defin. del 1.

giore del tutto, [c] ch'è impossibile; non dunque la retta, che passa per i centri sega le circonferenze de' circoli fuori del contatto, mà passa per il contatto A, ch'era da dimostrarsi.

[c] 9. assiom.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Se due circoli si toccano di fuori, la retta, che congi unge i loro centri, passa per il punto del contatto.



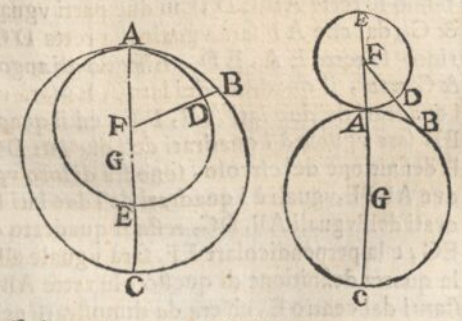
Si tocchino i circoli ABC, DBE nel loro conuesso in qualche punto B, e sia G il centro del circolo DBE, ed il punto F il centro del circolo ABC. Dico che tirata la retta FG, quella passarà per il contatto B.

Se non passa per il contatto B, seghi le circonferenze fuori del contatto, come in C ed E; dal contatto B à i centri F, & G [a] si tirino le rette BF, BG. Perche il punto F è centro del circolo ABC, le rette FC, FB [b] sono frà di loro vguali. Similmente perche il punto G è centro del circolo DBE, le rette GE, GB sono frà di loro vguali; dal che le rette FB, BG [c] sono vguali alle due FC, GE: mà nel triangolo FBG i due lati FB, BG [d] sono maggiori del terzo lato FG; le due rette dunque FC, GE sono maggiori della retta FG, la parte maggiore del tutto, [e] ch'è impossibile. Non dunque la retta, che passa per i centri sega le circonferenze fuori del contatto, mà passa per il contatto B, come fù proposto dimostrare.

[a] 1. postul.
[b] 15. defin. del 1.
[c] 2. assiom.
[d] 20. del 1.
[e] 9. assioma.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

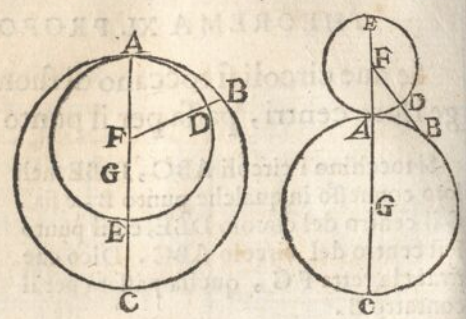
I circoli, ò si tocchino di dentro, ouero di fuori, non si possono toccare più ch'in vn punto.



Si tocchino i circoli A B C, ADE, ò di dentro, ouero di fuori, in qualche punto A. Dico che non si toccano in altro punto, che nel punto A. Sia F il centro del circolo ADE, ed il punto G sia il centro del circolo A B C; per i centri F, & G [a] si faccia passare la retta FG, la quale continuata, [b] per le due prossime antecedenti propositioni, passarà per il contatto A. Nella circonferenza ABC si prenda qualunque punto B fuori del contatto A, dal quale al

[a] 1. postul.
[b] 2. postul.

centro F si tiri la retta B F, che segarà la circonferenza ADE in qualche
c 6. del 3. punto D. Perche i circoli ABC, A D E si toccano, perciò c non hanno vn medesimo centro; mà il punto F è suppoſto centro del circolo ADE, non sarà dunque il punto F centro del circolo ABC; dal che nel circolo ABC la retta F C, che passa per il centro
d 7. & 8. del 3. G d sarà la massima di tutte l'altre rette tirate dal punto F alla circonferenza ABC; e la retta F A sarà la minima: per la qual cosa la retta F B è maggiore di F A;

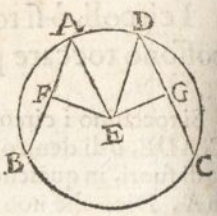


mà la retta FA, per la definitione del circolo, è vguale ad FD; sarà F D minore di FB; e perciò il punto B cade fuori del circolo A D E. E perche il punto B è preso ad arbitrio, ogni punto dunque preso nella circonferenza ABC, fuori del contatto A, caderà fuori del circolo ADE, per la qual cosa il circolo ADE non tocca il circolo in altro punto, che nel punto A, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XIII. *PROPOSITIONE XIV.*

Nel circolo, le vguali rette linee distano vgualmente dal centro, e quelle che sono vgualmente distanti dal centro sono frà di loro vguali.

Nel circolo ABCD, il dicui centro E, siano tirate l'vguali rette AB, CD. Dico prima, che l'vguali rette AB, CD, sono vgualmente distanti dal
a 12. del 1. centro E. Dal centro E si tirino le rette EG, EF a ad angoli retti cõ le rette DC, AB, le quali diuideranno le rette AB, CD,
b 3. del 3. b in due parti vguali in F, & G; dal che A F sarà vguale alla retta D G; si tirino
c 1. postul. c le rette E A, E D. Essendo gli angoli in F,
d 47. del 1. & G retti, il quadrato del lato A E d sarà vguale à i quadrati de' due lati A F, F E; ed il quadrato di ED sarà vguale à i quadrati de'i due lati DG, GE: mà le rette EA, ED, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali; saranno i quadrati de'i due AF, FE, vguali à i quadrati de'i due lati DG, G E; se ne leuino i quadrati dell'vguali AF, DG, resta il quadrato di FE
e 3. assiom. e vguale al quadrato di EG; e la perpendicolare EF, sarà vguale alla perpendicolare EG; e, per la quarta definitione di questo, le rette AB, C D, sono vgualmente distanti dal centro E, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo siano le rette A B, C D vgualmente distanti dal centro E, cioè sia E F vguale ad EG. Dico che AB è vguale alla retta D C. S'in-

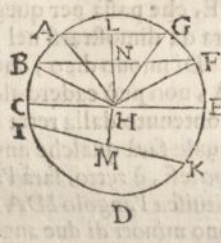
tenda

tenda fatta l'istessa costruttione, e si mostri, come prima, che i quadrati de'i due lati AF, FE sono vguali à i quadrati de'i due lati DG, GE; se ne leuino i quadrati dell'vguali FE, E G, resta il quadrato di FA [f] vguale quadrato di DG, e la retta FA, vguale alla retta D G; dalche il doppio di AF cioè AB, sarà vguale al doppio di DG cioè DC, ch'era da dimostrarsi. f 3. assioma.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XV.

Delle rette tirate nel circolo, là massima è il diametro; e delle altre, quella, ch'è vicina al centro, è maggiore d'ogn'altra più lontana.

Sia il circolo A B C D, il dicui centro H, & il diametro C E. Siano tirate in esso quante si voglia rette, come IK, & A G, cioè I K più vicina al centro, ed A G più lontana. Dico che il diametro C E è la massima, e che I K è maggiore di AG.



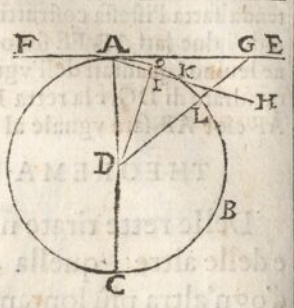
Dal centro H [a] si facciano cadere le rette HM, HL, perpendicolari alle rette I K, A G. Perche IK è più vicina al centro H, sarà MH [b] minore di HL. Si faccia HN [c] vguale ad HM, e per il punto N [d] si faccia passare BF ad angoli retti con HL. Perche le rette HM, H N sono frà di loro vguali, sarà IK [e] vguale alla retta B F. Dal centro H [f] si tirino le rette HF, HB, H G, H A. Per la definitione del circolo le rette HE, HC, cioè la retta EC, è vguale alle due HF, H B; mà nel triangolo HFB, i due lati HF, HB [g] sono maggiori del terzo lato BF, sarà la retta C E maggiore della retta B F; mà fù mostrata BF vguale ad IK, sarà il diametro C E maggiore della retta I K per la qual cosa la retta CE, che passa per il centro H è la massima. Si considerino i due triangoli BHF, AHG; perche i due lati BH, HF, per la definitione del circolo, sono vguali à i due lati AH, HG, e l'angolo BHF è maggiore dell'angolo A H G, stante che per costruttione lo contiene; sarà la base B F, [h] maggiore della base A G; mà la retta B F è vguale alla retta I K; sarà la retta IK maggiore di AG, ch'era da dimostrarsi.

a 12. del 1.
b 14. del 3.
c 3. del 1.
d 11. del 1.
e 14. del 3.
f 1. postul.
g 20. del 1.
h 24. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVI.

Se nell'estremità del diametro di qualunque circolo sia eleuata vna retta linea, che faccia col diametro angoli retti, quella cade fuori del circolo; e nel luogo, ch'è frà quella retta linea, e la circonferenza del circolo, non è possibile che vi cada alcuna retta linea.

Nel circolo ABC, il dicui centro D, ed il diametro AC, nell'estremo A sia posta la retta FAE ad angoli retti col diametro AC. Dico prima, che la retta FE cade fuori del circolo ABC.



Nella retta FE, ſi prenda fuori del punto A qualunque punto G; dal centro D al punto G [a] ſi tiri la retta DG. Nel triangolo DAG, i due angoli DAG, DGA [b] ſono minori di due angoli retti; mà l'angolo DAG è retto, ſarà l'angolo DGA minore dell'angolo DAG, ed il lato DA [c] ſarà minore del lato DG. E perche la retta DA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta DL, ſarà DL minore di DG: dalche il punto G cade fuori del circolo A B C. Hor eſſendo il punto G preſo ad arbitrio, tutti i punti dunque immaginati in FE cadono fuori del circolo A B C; per la qual coſa la retta FE, che paſſa per quegl'infiniti punti, cadè fuori del circolo A B C, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1. poſt.
b 17. del 1.
c 19. del 1.

Di nuouo dico, che nel luogo contenuto frà la retta EA, e l'arco L K A, non può cadere alcuna retta linea. Cada, s'è poſſibile, nel luogo contenuto dalla retta EA, e l'arco LOA, qualunque retta linea HA, la quale farà qualche angolo con la retta EA; e perche l'angolo EAD, per ipoteſi, è retto, ſarà l'angolo HAD minore del retto. Nel punto D ſi coſtituiſca l'angolo IDA [d] vguale all'angolo IAD: i due angoli IDA, IAD, ſono minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propoſitione, le rette AI, DI, concorrono in qualche punto I. In oltre, perche l'angolo IDA, per coſtruttione, è vguale all'angolo HAE; vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo IAD; i due angoli IDA, IAD [e] ſono vguali à tutto l'angolo EAD; mà l'angolo EAD, per ipoteſi è retto; i due angoli dunque IDA, IAD ſono vguali ad vn angolo retto; ed il reſtante angolo DIA [f] ſarà retto: dal che l'angolo DAI [g] è minore dell'angolo DIA, ed il lato ID [h] è minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale alla retta DO, ſarà DI minore della retta DO; dalche il punto I cade dentro del circolo, e la retta AH, che paſſa per il punto I, paſſa dentro del circolo. Per la qual coſa la retta AH non cade nel luogo contenuto frà la retta EA, e l'arco KOA; come fù propoſto dimoſtrare.

d 23. del 1.
e 2. aſſiom.
f 32. del 1.
g 17. del 1.
h 19. del 1.

COROLLARIO.

Perche la retta FE, facendo angoli retti col diametro AC, cade fuori del circolo, per la ſeconda definitione di queſto, la retta FE tocca il circolo nel punto A.

Se dunque per qualche punto A preſo nella circonferenza d'vn circolo A B C ſi voglia far paſſare vna retta, che tocchi il circolo, dal centro D al punto A [K] ſi tiri il ſemidiametro DA, e nell'eſtremo A ſi ponga la retta FAE, [l] che faccia angoli retti con AD; la retta FE toccarà il circolo nel punto A. Dalche ſarà manifeſto il modo di far paſſare vna retta, che tocchi il circolo in qualunque punto preſo nella circonferenza.

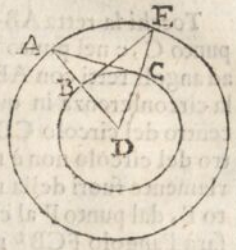
K 1. poſt:
l 11. del 1.

PROBLE-

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Da vn dato punto fuori d'vn circolo, tirare vna retta linea, che tocchi il dato circolo.

Sia il dato circolo BC, ed il punto fuori A, e si voglia dal punto A tirare vna retta, che tocchi il dato circolo BC. Si troui il centro del circolo BC, [a] che sia D, si tiri [b] la retta DA, e fatto centro in D, coll'interuallo DA, [c] si descriua il circolo AE; nel punto B, sopra la retta AD, [d] si erigga la perpendicolare BE, la quale continuata concorra con la circonferenza AE in qualche punto E; si tiri la retta DE, la quale segarà l'arco BC in qualche punto C, si tiri la retta AC. Dico che la retta AC tocca il circolo BC nel punto C.



a 1. del 3.
b 1. post.
c 3. post.
d 11. del 1.

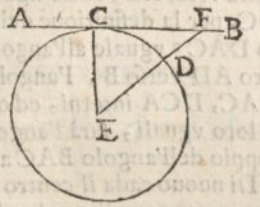
Per la definitione del circolo, la retta DA è vguale alla retta DE, e la retta DB è vguale alla retta DC; dalche i due lati AD, DC, del triangolo ADC, [e] sono vguali à i due lati ED, DB, del triangolo EDB, l'angolo D è cõmune, perciò la base AC [f] sarà vguale alla base EB, e l'angolo DCA vguale all'angolo DBE: ma l'angolo DBE è retto, sarà l'angolo DCA retto, e per l'antecedente Corollario, la retta AC tocca il circolo nel punto C, ch' era da farsi, e dimostrarsi.

e 2. assioma.
f 4. del 1.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna retta linea tocca vn circolo, e dal centro sia tirata vna retta al contatto, quella sarà perpendicolare alla tangente.

Tocchi la retta AB il circolo CD in qualche punto C, e dal centro E al contatto C sia tirata la retta EC. Dico che la retta EC, è perpendicolare alla tangente AB. Se la retta EC non è perpendicolare alla tangente AB, dal centro E [a] si faccia cadere la retta EF perpendicolare alla retta AB. Perche i due angoli ECF, EFC [b] sono minori di due angoli retti, e l'angolo EFC, per costruttione è retto, sarà l'angolo ECF minore dell'angolo retto EFC; dalche il lato EC [c] sarà maggiore di EF; ma per la definitione del circolo, la retta EC è vguale ad ED, sarà ED maggiore di EF, la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile. Non dunque la retta EF è perpendicolare ad AB; ma la retta EC sarà perpendicolare alla tangente AB, ch'era da dimostrarsi.



a 12. del 1.
b 17. del 1.
c 19. del 1.
d 9. assioma.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se vna retta linea tocca il circolo, e nel contatto si erigge vna retta perpendicolare alla tangente, quella passa per il centro del circolo.



Tocchi la retta AB il circolo CDE in qualche punto C, e nel punto C si ponga la retta linea CE ad angoli retti con AB, e continuata concorra con la circonferenza in qualche punto E. Dico che il centro del circolo CDE è nella retta CE, se il centro del circolo non è nella retta CE, sarà necessariamente fuori della retta CE; sia dunque nel punto F, dal punto F al contatto C [a] si tiri la retta FC, sarà l'angolo FCB [b] retto, ma l'angolo ECB è supposto retto, l'angolo dunque FCB sarà vguale all'angolo ECB, la parte vguale al tutto [c] ch'è impossibile; non dunque il centro del circolo è fuori della retta EC, mà sarà nella retta EC, ch'era da dimostrarsi.

a 1. postul.
b 18. del 3.
c 9. assioma.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Nel circolo, l'angolo al centro è *il doppio dell'angolo* alla circonferenza, *quando hanno vn medesimo* arco per base.



Nel circolo ABC siano gli angoli BDC al centro e BAC alla circonferenza, ed habbiano il medesimo arco BC per base. *Dico che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.* Cada *nel primo luogo* il centro D in vna delle rette che contiene l'angolo BAC alla circonferenza, come nella retta AB, della figura X. Perche le rette DA DC, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali, sarà l'angolo DAC [a] vguale all'angolo DCA. Nel triangolo DAC continuato il lato AD verso B, l'angolo BDC esterno [b] sara vguale à i due angoli DAC, DCA interni, ed opposti; mà li due angoli DAC, DCA sono frà di loro vguali, sarà l'angolo B D C al centro il doppio di vno, cioè il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

a 5. del 1.
b 32. del 1.



Di nuouo cada il centro D, frà le due BA, AC, che contengono l'angolo alla circonferenza, come nella figura Z, si tiri [c] la retta AD, e si continui fino alla circonferenza in E. Haueremo l'angolo B D E al centro, e l'angolo BAE alla circonferenza, che hanno il medesimo arco BE per base, ed il centro D cade in vna delle rette, che contiene l'angolo alla circonferenza, per quel che s'è dimostrato, sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Per

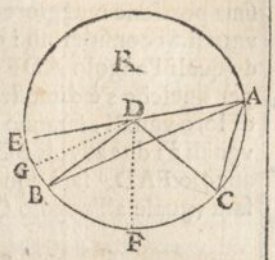
c 1. postul.

l'istessa ragione l'angolo EDC al centro è il doppio dell'angolo EAC alla circonferenza, dalche tutto l'angolo BDC al centro è il doppio di tutto l'angolo BAC alla circonferenza.

Finalmente sia l'angolo BDC al centro, e l'angolo BAC alla circonferenza, che habbiano il medesimo arco BC per base, e non cada il centro D in nissuna delle rette BA, AC, ne meno nello spatio interposto frà quelle, ma cada fuori come nella figura R. Dico similmente, che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

Si tiri la retta AD, e si prolunghi [d] fino che concorre con la circonferenza in qualche punto E. Haueremo l'angolo EDC al centro, e l'angolo EAC alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EBC per base, ed il centro D cade nella retta ADE, per quel che si disse nella prima parte, sarà l'angolo EDC il doppio dell'angolo EAC. Similmente si consideri l'angolo EDB al centro, e l'angolo EAB alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EB per base, ed il centro D cade nella retta AE, per la prima parte sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Si diuida l'angolo BDC in due parti vguali con la retta DF, e si diuida l'angolo EDB in due parti vguali con la retta DG; sarà l'angolo BDC il doppio dell'angolo BDF, e l'angolo EDB il doppio dell'angolo GDB; dalche tutto l'angolo EDC sarà il doppio dell'angolo GDF: ma l'angolo EDC è dimostrato il doppio dell'angolo EAC, sarà l'angolo GDF vguale all'angolo EAC. In oltre perche l'angolo EDB è il doppio dell'angolo GDB, ed il medesimo angolo EDB è dimostrato il doppio dell'angolo EAB, sarà l'angolo GDB vguale all'angolo EAB. Hor essendo l'angolo EAC, per quel che s'è dimostrato, vguale all'angolo GDF, e la parte EAB è vguale alla parte GDB, sarà il restante angolo BAC vguale al restante angolo BDF: ma l'angolo BDC è il doppio dell'angolo BDF, sarà il medesimo angolo BDC il doppio dell'angolo BAC, ch'era da dimostrarsi.

d 2. post.

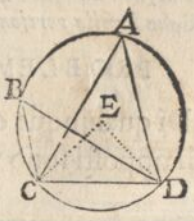


THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Gli angoli nella medesima portione del circolo sono frà di loro vguali.

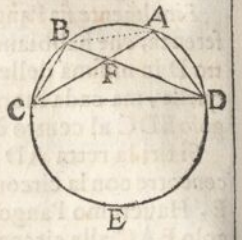
Nel circolo ABCD, il di cui centro E, siano nella medesima portione CBAD, gli angoli CBD, CAD. Dico che sono frà di loro vguali. Supposto prima, che CBAD sia portione maggiore, si tirino [a] le rette EC, ED. L'angolo CED al centro, per l'antecedente propositione, sarà il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, e sarà ancora il doppio dell'angolo CBD,

a 1. post.



alla

b 7.assiom. alla circonferenza, e perciò gli angoli C A D, C B D b nella medesima maggior portione sono frà di loro vguali, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

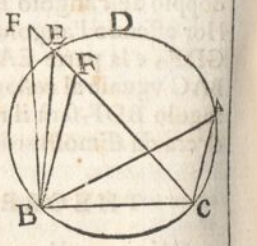


Di nuouo sia la portione CBAD, ò mezzo circolo, ouero portione minore. Dico similmente che gli angoli CBD, CAD, nella medesima portione, sono frà di loro vguali. *Si tiri* la retta AB, sarà ADECB portione maggiore, e per quel che s'è dimostrato, gli angoli ADB, ACB, nella medesima portione maggiore ADECB, sono frà di loro vguali. *Si considerino* i due triangoli FBC, FAD, de'quali l'angolo ADF è vguale all'angolo FCB, c 15. del 1. per quelche s'è dimostrato; gli angoli AFD, BFC al vertice c sono frà di loro vguali, saranno i due angoli ADF, AFD, del triangolo A F D, vguali à i due angoli BCF, BFC, del triangolo BCF, dal che il restante d 32. del 1. angolo FAD d sarà vguale al rimanente angolo FBC, cioè l'angolo CAD sarà vguale all'angolo CBD, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

La conuersa di questa propositione si può fare facilmente nel seguente modo.

Di due angoli vguali sottesi dalla medesima retta linea, e costituiti dalla medesima parte, vno sia nella portione d'vn circolo, l'altro sarà nella medesima portione.



Siano gli angoli vguali BAC, BFC sottesi dalla medesima retta BC, e collocati dalla medesima parte FA, e sia l'angolo BAC nella portione del circolo BDC. Dico che l'angolo BFC sarà nella medesima portione BDC. Se nõ è nella circonferenza BDA, ò caderà dentro, ò fuori del circolo; se cade dentro, si continui a 2. post. CF a *sino ad* E, *e si congiunga* BE b. b 1. post. *Gli angoli* B E C, BAC, *nella medesima portione, sono per l'antecedente propositione, fra di loro vguali: ma l'angolo* BFC *è posto vguale all'angolo* BAC, *sarà l'angolo* BFC c vguale *all'angolo* B E C; c 1. assiom. *l'esterno vguale all'angolo interno, ed opposto, ch'è contro alla decimasesta propositione; non dunque l'angolo* BFC *cade dentro, ne fuori della circonferenza* BDC, *ma è nella portione* BDC, *ch'era da dimostrarsi.*

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Di qualunque quadrilatero descritto nel circolo, gli angoli opposti sono vguali à due angoli retti.

THEO-

Nel circolo ABCD sia descritto qualunque quadrilatero A B C D. Dico che gli angoli opposti ABC, ADC sono vguali à due angoli retti; e che i due angoli opposti DCB, DAB sono vguali à due angoli retti. Si tirino le diagonali [a] AC, BD. La retta AD diuide il circolo in due portioni ABCD, AED; gli angoli ABD, ACD, [b] sono nella medesima portione ABCD, perciò sono frà di loro vguali. Similmente la retta DC sega il circolo in due portioni, cioè DEABC, & DFC; gli angoli D A C, D B C sono nella medesima portione DEABC, e perciò sono frà di loro vguali: all'angolo DCA s'aggiunga l'angolo DAC, ed all'angolo DBA s'aggiunga l'angolo DBC, ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli D A C, D C A insieme giunti: all'vna, e l'altra parte di questa vgualità s'aggiūga l'angolo ADC, i due angoli ABC, ADC, insieme giūti, saranno vguali à i trè angoli del triangolo ADC: ma i trè angoli del triāgolo ADC [d] sono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque ABC, ADC sono vguali à due angoli retti. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i due angoli BAD, BCD sono vguali à due angoli retti, come fù proposto dimostrare.

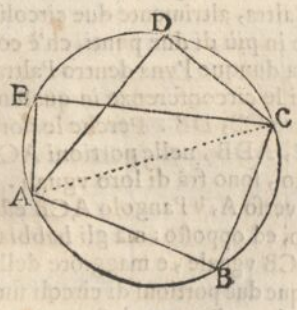


a 1. postul.
b 21. del 3.
c 2. assiom.
d 32. del 1.

SCOLIO I.

La conuersa dell'antecedente propos: facilmente si dimostra nel seguente modo.

Se due angoli opposti d'vn quadrilatero sono vguali à due angoli retti; la circonferenza di quel circolo, che passa per tre angoli di quel quadrilatero, passa ancora per il quarto angolo. Dal che intorno à quel quadrilatero si può descriuere vn circolo.



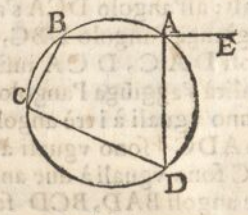
Sia il quadrilatero A B C D, del quale i due angoli opposti ADC, ABC, siano vguali à due angoli retti; e per li trè angoli A, B, C, passi la circonferenza del circolo A B C. Dico che passarà ancora per l'angolo D. Nel arco AEC si prenda qualunque punto E, e si tirino le rette E A, EC. Il quadrilatero AECB sarà descritto nel circolo, e per l'antecedente propositione gli angoli A E C, A B C sono vguali à due angoli retti: ma gli angoli ADC, ABC, per ipotesi sono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque A E C, A B C [a] sono vguali à i due angoli ADC, ABC; leuatone il commune angolo ABC, resta l'angolo ADC [b]

a 10. assiom.
b 3. assiom.

vguale all'angolo A E C: si tiri la retta AC. Perche gli angoli AEC, ADC sono fra di loro vguali, e sono sotteſi dalla medeſima retta AC, e l'angolo AEC è nella portione AEC, per lo Scolio alla propoſitione vigeſima prima, ſarà l'angolo ADC nella medeſima portione AEC, per la qual coſa l'arco AEC paſſa per il punto D, ch'era da dimoſtrarſi.

SCOLIO II. DEL CLAVIO.

L'angolo eſterno d'vn quadrilatero deſcritto nel circolo, è vguale all'angolo interno, ed oppoſto.



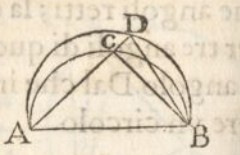
Nel circolo ABCD ſia deſcritto il quadrilatero BCDA, e ſia continuato il lato BA verſo E. Dico che l'angolo eſterno EAD è vguale all'angolo BCD interno, ed oppoſto.

Perche gli angoli DAB, DCB, per l'antecedente propoſitione, ſono vguali à due angoli retti, e gli angoli EAD, DAB [c] *ſono vguali à due angoli retti, li due angoli DAB, DCB* [a] *ſaranno vguali à i due angoli D A E, D A B; ſe ne leui il commune angolo DAB,* [b] *reſta l'angolo eſterno DAE vguale all'angolo DCB, interno, ed oppoſto, ch'era da dimoſtrarſi.*

c 13. del 1.
a 10. aſſiom.
b 3. aſſiom.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Sopra la medeſima retta linea non ſi poſſono coſtituire due portioni di circoli ſimili, ed ineguali.



Siano coſtituite, s'è poſſibile, due portioni di circoli ACB, ADB, ſimili, ed ineguali, ſopra la medeſima retta AB, e dalla medeſima parte. Perche le portioni ADB, ACB ſono ineguali, l'vna caderà dentro dell'altra, altrimente due circoli ſi ſegarebbero in più di due punti, ch'è contro alla propoſitione decima di queſto. Cada dunque l'vna dentro l'altra; e dal punto A ſi tiri la retta AD, [a] che ſeghi le circonferenze in qualunque modo, come in C, & D, ſi tirino le rette CB, DB. Perche le portioni ADB, ACB ſono ſimili, gli angoli ACB, ADB, nelle portioni ACB, ADB, per la decima definitione di queſto, ſono frà di loro vguali. Nel triangolo D C B, continuato il lato DC verſo A, [b] l'angolo ACB eſterno è maggiore dell'angolo A D B interno, ed oppoſto; ma gli habbiamo dimoſtrati vguali, ſarebbe l'angolo ACB vguale, e maggiore dell'angolo ADB, [c] ch'è impoſſibile; non dunque due portioni di circoli ſimili, ed ineguali poſſono eſſere coſtituite ſopra d'vna medeſima retta linea, e dalla medeſima parte, ch'era da dimoſtrarſi.

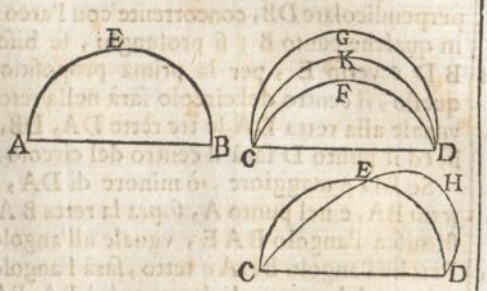
a 1. poſtul.
b 16. del 1.
c 9. aſſiom.

THEO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [147] - 122
PUBLIC DOMAIN

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Le ſimili portioni de'circoli ſopra rette linee vguali, ſono frà di loro vguali.



Sopra l'vguali rette A B, C D, ſiano coſtrutte le ſimili portioni de' circoli A E B, C K D. Dico che ſono frà di loro vguali.

Si concepiſca ſoprapoſta la portione A E B alla portione CKD in modo, che la retta AB cada ſopra la retta CD, cioè il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D. Perche le rette A B, C D ſono frà di loro vguali, per l'annotatione doppo la quarta propoſitione del primo, le rette AB, CD congruono inſieme. O la portione A E B cade fuori della portione CKD, come fà la notata CGD; ò cade dentro, come fà la notata CFD; ò inclina da vna parte, come la notata CHD; ouero congruono inſieme. Se cade dentro, ò fuori della portione CKD, *ſaranno frà di loro ineguali*; ed in tal caſo ſopra d'vna medeſima retta linea *ſaranno coſtituite due portioni di circoli* ſimili, ed ineguali, ch'è *contro all'antecedente propoſitione*. *Non dunque cade dentro*, come fà *la portione CFD*, *ne cade fuori*, come fà *la portione CGD*. *Suppoſto dũque che inclini da vna parte*, come fà *la portione C H D*: i due circoli CED, CHD, *ſi ſegaranno in più di due punti*, ch'è contro alla decima propoſitione di queſto; *non dunque inclina da vna parte*. Per la qual coſa la portione AEB congrue *con la portione CKD*; *ma le coſe*, che congruono inſieme, ſono frà di loro vguali; ſarà *la portione AEB* vguale alla portione CKD, ch'era da dimoſtrarſi.

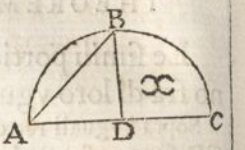
COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione è manifeſto, che le ſimili portioni de'circoli poſte ſopra rette linee vguali, hanno gli archi vguali; poiche eſſendoſi dimoſtrato, che le portioni congruono inſieme, neceſſariamente gli archi, che ſono eſtremi delle portioni, congruono inſieme, e perciò ſono frà di loro vguali.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXV.

Data vna portione di circolo, deſcriuere il circolo, del quale quella è portione.

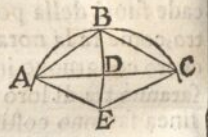
Sia data la portione ABC, alla quale s'habbia da ritrouare il centro per compire il circolo.



a 10. del 1. Si diuida la corda AC [a] in due parti vguali in D; b 11. del 1. nel punto D sopra la retta AC [b] si erigga la perpendicolare DB, concorrente con l'arco ABC in qualche punto B; si prolunghi, se bisogna, c 2. postul. B D [c] verso E, per la prima propositione di questo, il centro del circolo sarà nella retta B E. c 1. assiom. Hor se la retta B D è vguale alla retta DA, le tre rette DA, DB, DC, [c] sono frà di loro vguali, ed il punto D sarà il centro del circolo ABC, come nella figura X.



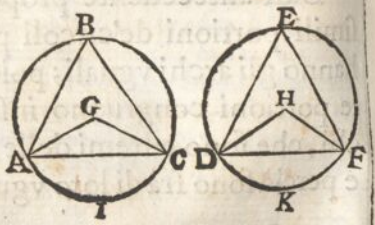
f 1. postul. g 23. del 1. Se BD è maggiore, ò minore di DA, si tiri [f] la retta BA, e nel punto A, sopra la retta B A, [g] si costituisca l'angolo B A E, vguale all'angolo A B D. h 17. del 1. Perche l'angolo BDA è retto, sarà l'angolo DBA [h] minore del retto, e li due angoli EBA, EAB saranno minori di due retti, e per lo Scolio alla trigesima prima propositione, continuata la retta BE, quella concorrerà con la retta A E continuata in qualche punto E. Dico che il punto E sarà il centro del circolo A B C: si tiri la retta E C. Perche gli angoli E B A, E A B, per costruttione sono frà di loro vguali, sarà la retta B E [K] vguale alla retta EA.



K 6. del 1. Si considerino i triangoli E D A, EDC, de'quali il lato DA è vguale al lato DC, il lato DE è commune, saranno i due lati ED, DA vguali à i due ED, D C; gli angoli l 4. del 1. in D sono vguali, stante che sono retti, sarà la base EA [l] vguale alla base EC; ma la retta EA è dimostrata vguale alla retta E B, le trè rette m 1. assiom. dunque E A, E B, E C, [m] sono fra di loro vguali, ed il punto E [n] sarà il n 9. del 3. centro del circolo ABC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Ne i circoli vguali gl' angoli vguali, ò siano à i centri, ò alle circonferenze, sono opposti ad archi vguali.



Siano gli vguali circoli A B C, DEF, i di cui centri G, ed H, e siano gli angoli à i centri AGC, DHF frà di loro vguali; e gli angoli alle circonferenze ABC, DEF frà di loro vguali. Dico che gli archi opposti A I C, DKF à gl'angoli vguali sono frà di loro vguali.

2 1. del 3. Perche i circoli sono frà di loro vguali i loro semidiametri [a] saranno frà di loro vguali; si che ne i triangoli GAC, HDF, i due lati AG, GC sono vguali alli due DH, HF; l'angolo G è supposto vguale all'angolo b 4. del 1. H, sarà la base AC [b] vguale alla base D F. In oltre, perche gli ango-

li

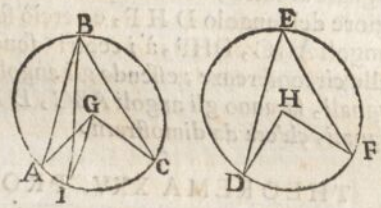
li AGC, DHF [c] sono dupli degl'angoli ABC, DEF, e gli angoli AGC, DHF sono frà di loro vguali, saranno gli angoli A B C, DEF [d] frà di loro vguali; dalche le portioni ABC, D E F [e] sono frà di loro simili; e perche sono poste sopra le rette linee vguali A C, DF, perciò sono [f] frà di loro vguali; dalli circoli vguali ABCI, D E F K se ne leuino le portioni vguali ABC, DEF, restano le portioni A I C, D K F [g] frà di loro vguali, e per il Corollario alla propositione vigesima quarta, gli archi AIC, DKF sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 20. del 3.
d 7. assiom.
e 10. defin. del. 3.
f 24. del 3.
g 3. assiom.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto, che se gli angoli al centro, ò alla circonferenza sono frà di loro ineguali, il maggiore sarà opposto al maggior arco.

Ne' i circoli vguali ABC, DEF, sia l'angolo al centro A G C maggiore dell'angolo al centro DHF, e l'angolo alla circonferenza ABC maggiore dell'angolo alla circonferenza DEF. Dico che l'arco A C è maggiore dell' arco D F. Nel punto G si faccia l'angolo C G I vguale all'angolo DHF. Perche l'angolo AGC è maggiore dell' angolo DHF, sarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo IGC; dal che la retta G I sega l'angolo A G I, e sarà l'arco A C maggiore dell'arco I C. Hor essendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, per l'antecedente propositione, sarà l'arco IC vguale all'arco DF: ma l'arco AC è maggiore dell'arco IC, in conseguenza l'arco AC sarà maggiore dell'arco DF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. Si tiri la retta IB. Perche l'angolo IGC [a] è il doppio dell'angolo IBC, e l'angolo DHF è il doppio dell'angolo DEF; essendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, saranno gli angoli IBC, D E F fra di loro vguali: ma l'angolo ABC è posto maggiore dell' angolo D E F, sarà ancora maggiore dell'angolo IBC. Per la qual cosa l'arco AC, opposto all'angolo maggiore ABC, è maggiore dell'arco IC opposto all'angolo minore IBC: ma l'arco I C è vguale all' arco DF, sarà l'arco AC maggiore dell'arco DF, ch'era da dimostrarsi.



a 20. del 3.

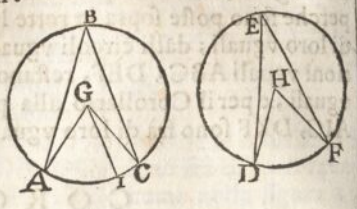
THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

Ne i circoli vguali, gli angoli, che sono opposti ad archi vguali, ò siano à i centri, ouero alle circonferenze, sono frà di loro vguali.

Siano gli vguali circoli ABC, D EF, i di cui centri G, ed H; e siano

gli

gli archi AC, DF frà di loro vguali. Dico che gli angoli AGC, DHF à i centri, ſono frà di loro vguali; e parimente gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze, ſono frà di loro vguali.

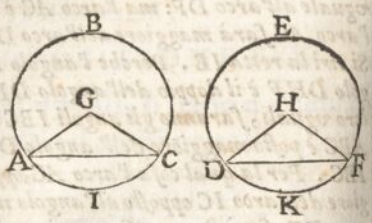


Se gli angoli AGC, DHF, à i centri, non ſono frà di loro vguali, vno de'i due ſarà maggiore: ſuppoſto che l'angolo AGC ſia maggiore dell'angolo DHF; ſi faccia l'angolo AGI [a] vguale all'angolo DHF; ſarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo AGI, e la retta GI caderà frà li punti A, & C. In oltre perche ne'i circoli vguali ABC, DEF, gli angoli AGI, DHF, à i centri, ſono per coſtruttione vguali, per l'antecedente propoſitione, ſarà l'arco AI vguale all'arco DF; mà l'arco AC è ſuppoſto vguale all' medeſim'arco DF, ſarà l'arco AI vguale all'arco AC; la parte vguale al tutto, [b] ch'è impoſsibile: non dunque l'angolo AGC è maggiore dell'angolo DHF, e perciò ſono frà di loro vguali. E perche gli angoli AGC, DHF, à i centri [c] ſono dupli de' gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze; eſſendo gli angoli AGC, DHF, à i centri frà di loro vguali, ſaranno gli angoli ABC, DEF, [d] alle circonferenze frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 23. del 1.
b 9. aſſiom.
c 20. del 3.
d 7. aſſiom.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ne i circoli vguali, l'vguali rette linee detraggono archi vguali, cioè il maggiore vguale al maggiore, ed il minore al minore.



Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e ſiano le rette linee AC, DF frà di loro vguali. Dico che l'arco ABC è vguale all'arco DEF, e l'arco AIC, vguale all'arco DKF.

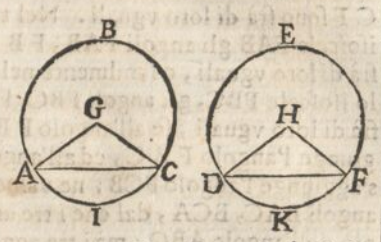
Perche i circoli ABC, DEF, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, i loro ſemidiametri [a] ſaranno frà di loro vguali; dal che i lati AG, GC, del triangolo GAC, ſono vguali à i due lati DH, HF del triangolo HDF, la baſe AC, per ipoteſi, è vguale alla baſe DF, ſarà l'angolo G [b] vguale all' angolo H. In oltre eſſendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, e gli angoli AGC, DHF, à i centri ſono frà di loro vguali; ſarà l'arco AIC [c] vguale all'arco DKF: e perche i circoli ſono ſuppoſti vguali, le loro circonferenze ſaranno frà di loro vguali, dalle quali detrattone gli vguali archi AIC, DKF, reſta l'arco ABC [d] vguale all'arco DEF, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. definit. del 3.
b 8. del 1.
c 26. del 3.
d 3. aſſiom.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXIX.

Ne gli vguali circoli, l'vguali circonferenze sono sottese da vguali rette linee.



Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e sia l'arco AIC, vguale all'arco DKF, tirate le rette AC, DF. Dico che la retta AC è vguale alla retta DF. Da' i centri G, ed H, [a] si tirino le rette GA, GC, HD, HF. Perche i circoli, per ipotesi, sono frà di loro vguali, e gli archi AIC, DKF sono suppositi vguali, gli angoli AGC, DHF, [b] à i centri sono frà di loro vguali. Similmente essendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, i loro semidiametri [c] sono frà di loro vguali. Dal che i due lati AG, GC, sono vguali à i due DH, HF; l'angolo AGC è dimostrato vguale all'angolo DHF, sarà la base AC [d] vguale alla base DF, ch'era da dimostrarsi.

a 1. po st.

b 27. del 3.

c 1. defin. del 3.

d 4. del 1.

PROBLEMA IV. PROPOSITONE XXX.

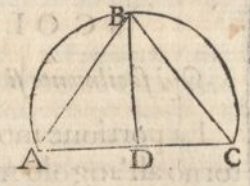
Dato qualunque arco, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'arco ABC, da diuidere in due parti vguali. Si tiri [a] la retta AC, la quale si diuida [b] in due parti vguali in D, nel punto D si erigga la retta DB [c] perpendicolare alla retta AC, concorrerà coll'arco ABC in qualche punto B. Dico che l'arco AB è vguale all'arco BC.

a 1. postul.

b 10. del 1.

c 11. del 1.



Si tirino le rette BA, BC; e si considerino i due triangoli BDC, BDA: de' quali il lato AD, per costruttione, è vguale al lato DC, il lato DB è commune, saranno i due lati BD, DA vguali à i due BD, DC; gli angoli in D sono vguali, stante che sono retti; sarà la base BA [d] vguale alla base BC; mà le rette linee vguali ne gli vguali circoli detraggono archi vguali, [e] essendo la retta BA vguale alla retta BC, sarà l'arco AB vguale all'arco BC: e così tutto l'arco ABC è diuiso in due parti vguali nel punto B, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

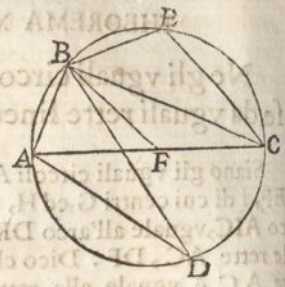
d 4. del 1.

e 28. del 3.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXI.

In ogni Circolo, l'angolo nel mezzo circolo è retto; l'angolo nella portione maggiore è minore del retto: l'angolo nella portione minore è maggiore del retto.

Nel circolo ABCD, il dicui centro F, ed il diametro A C; sia prima l'angolo A B C nel mezzo circolo ABEC. Dico che l'angolo A B C è retto. Si tiri [a] la retta F B. Per la definitione del circolo, le rette FA, F B, C F sono frà di loro vguali. Nel triangolo isoscele FAB gli angoli FAB, F B A [b] sono frà di loro vguali, e similmente nel triangolo isoscele FBC, gli angoli FBC, FCB sono frà di loro vguali; se all'angolo F B A s'aggiunge l'angolo F B C, ed all'angolo F A B s'aggiunge l'angolo FCB; ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli BAC, BCA, dal che i tre angoli del triangolo ABC sono il doppio dell'angolo ABC: mà i tre angoli d'vn triangolo sono [d] vguali à due angoli retti; sarà dunque l'angolo A B C retto, e perciò l'angolo nel mezzo circolo è retto, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 1. post.
b 5. del 1.
c 2. assiom.
d 32. del 1.

Di nuouo sia l'angolo ADB nella portione maggiore BECDA. Dico che l'angolo ADB è minore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BCA [e] minore del retto; mà gli angoli A D B, ACB, nella medesima portione A D C B, [f] sono frà di loro vguali, sarà l'angolo ADB minore del retto, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

e 17. del 1.
f 21. del 3.

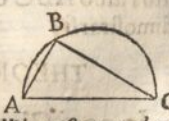
Finalmente sia la portione minore *B E C; e nell'arco B E C sia preso* qualunque punto E, *si tirino le rette B E, C E. Dico che l'angolo* BEC nella portione minore è maggiore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BAC [g] minore d'vn angolo retto. Nel quadrilatero ABEC, i due angoli opposti BEC, BAC, [h] sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo BAC è dimostrato minore del retto, sarà l'angolo BEC maggiore del retto, ch'era da dimostrarsi.

g 17. del 1.
h 22. del 3.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersa nel seguente modo.

La portione intorno all'angolo retto è mezzo circolo; intorno all'angolo minore del retto è portione maggiore; ed intorno all'angolo maggiore del retto è portione minore.



Sia nel primo luogo l'angolo ABC retto. Dico che la portione ABC è mezzo circolo; se la portione ABC non è mezzo circolo, ò sarà portione maggiore, ò portione minore; se sarà portione maggiore, per l'antecedente propositione l'angolo ABC sarà minore del retto, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione maggiore. Se sarà portione minore, l'angolo A B C sarà maggiore del retto, ch'è contro all' ipotesi; non dunque è portione minore, e perciò sarà mezzo circolo.

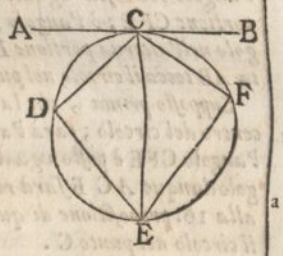
Sia nel secondo luogo l'angolo ABC minore del retto. Dico che la portione

ABC è portione maggiore. Se non è portione maggiore, ò sarà mezzo circolo, ouero portione minore. Supposto prima, che sia mezzo circolo: l'angolo ABC sarà retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione minore, l'angolo ABC sarà ottuso, ch'è contro all'ipotesi; non dunqu'è portione minore, ne mezzo circolo, e perciò è portione maggiore.

Sia finalmente l'angolo ABC ottuso. Dico, che la portione ABC è portione minore; se non è portione minore, ò è mezzo circolo, ouero portione maggiore: s'è mezzo circolo, l'angolo ABC è retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione maggiore, l'angolo ABC sarà acuto, ch'è contro all'ipotesi: non dunque è mezzo circolo, ne portione maggiore, mà sarà portione minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXII.

Se vna retta linea tocca qualche circolo, e dal contatto sia tirata vna retta linea, che lo seghi; gli angoli contenuti dalla tangente, e dalla segante, sono vguali à gli angoli costituiti nelle alterne portioni.



Tocchi la retta AB il circolo C D E F, in qualche punto C, e dal contatto C sia tirata la retta C E, che seghi il circolo. Dico, che l'angolo ACE, contenuto dalla tangente AB, e dalla segante C E, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; e l'angolo BCE è vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

Supposto prima, che la retta CE passi per il centro del circolo, quella [a] farà angoli retti con la tangente A B; mà gli angoli ne'i mezzi circoli C F E, C D E [b] sono retti; sarà l'angolo ACE vguale all'angolo nell'alterna portione C F E; e l'angolo BCE sarà vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

[a] 19. del 3.

[b] 31. del 3.

Se la retta C E non passa per il centro del circolo, nel punto C sopra la retta AB, [c] s'erigga la perpendicolare CG; sarà il centro del circolo nella retta C G, dal che le portioni CDG, CFG sono mezzi circoli; si tiri la retta EG; sarà l'angolo CEG [d] retto, e gli altri due EGC, ECG, insieme giunti, [e] saranno vguali ad vn angolo retto, cioè saranno vguali all'angolo retto ACG: se ne leui il commune angolo ECG, resta l'angolo ACE [f] vguale all'angolo CGE; mà l'angolo CGE [g] è vguale all'angolo C F E, stante che sono nella medesima portione CFGE; l'angolo dunque AC E, contenuto dalla tangente A C, e dalla segante CE, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE.

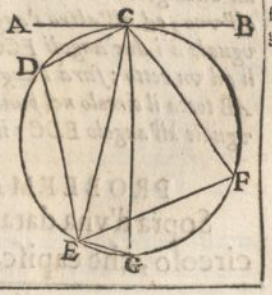
[c] 11. del 1.

[d] 31. del 3.

[e] 32. del 1.

[f] 3. assioma.

[g] 21. del 3.



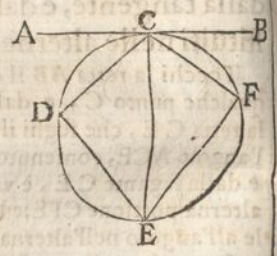
Nell'arco CDE si prenda qualunque punto D, e si tirino le rette DC, D E; si consideri il quadrilatero EFCD, descritto nel circolo, del

h 22. del 3. quale gli angoli opposti EDC, EFC h sono vguali à due angoli retti; mà i due angoli E C A, E C B sono vguali à due angoli retti; li due angoli dunque EDC, EFC sono vguali à i due angoli ECA, ECB; mà l'angolo ECA è dimostrato vguale all'angolo E F C; sarà l'angolo E C B, contenuto dalla segante E C, e dalla tangente C B, vguale all'angolo EDC nell'alterna portione CDE, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO DEL CLAVIO.

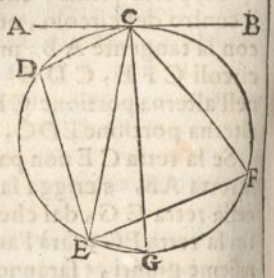
Segue la conuersa dell'antecedente propositione.

Se vna retta linea passa per l'estremità d'vn'altra retta, che sega vn circolo, e gli angoli, che fà con la segante, siano vguali à gli angoli nelle alterne portioni; quella retta linea tocca il circolo.



Sia il circolo D C F, segato dalla retta C E, e per l'estremo C passi la retta AB, in modo, che l'angolo ACE sia vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; ò l'angolo ECB sia vguale all'angolo nell'alterna portione EDC. Dico che la retta AB tocca il circolo nel punto C.

Supposto prima, che la retta C E passi per il centro del circolo; sarà l'angolo CFE a 31. del 3. *retto; mà l'angolo CFE è posto vguale all'angolo ACE; l'angolo dunque A C E sarà retto; e per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta AB tocca il circolo nel punto C.*



Non passi la retta CE per il centro del circolo; si troui il centro del circolo, b 1. del 3. *e dal punto C, per il trouato centro si faccia passare la retta C G, e si congiunga EG: sarà l'angolo C F E* c 21. del 3. *vguale all'angolo CGE; dal che l'angolo CGE sarà vguale all'angolo A C E. In oltre, perche la retta C G è diametro del circolo, l'angolo CEG* d 31. del 3. *sarà retto, e li due ECG, EGC insieme,* e 32. del 1. *saranno vguali ad vn angolo retto. Hor perche l'angolo A C E è vguale all'angolo C G E; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo E C G; tutto l'angolo A C G* f 2. assioma. *sarà vguale à i due angoli ECG, EGC: mà questi due angoli furono mostrati vguali ad vn retto; sarà l'angolo ACG retto, e per il citato Corollario, la retta AB tocca il circolo nel punto C. Il medesimo si prouarà se l'angolo E C B è vguale all'angolo EDC: il che era da dimostrarsi.*

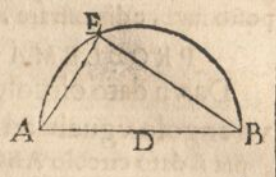
PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXIII.

Sopra d'vna data retta linea descriuere vna portione di circolo, che capisca vn angolo vguale ad vn dato angolo.

Sia

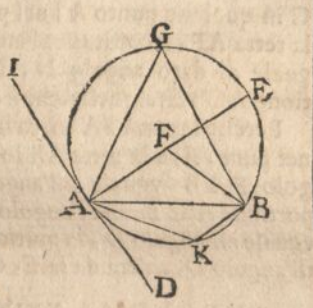
Sia data la retta linea A B, ed il dato angolo sia C; si vuole sopra la retta A B descriuere vna portione di circolo, che capisca vn angolo vguale al dato angolo C.

Se l'angolo dato sarà retto; si diuida la retta A B [a] in due parti vguali in D, e fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, [b] si descriua il mezzo circolo A E B. Perche l'angolo nel mezzo circolo [c] è retto, sarà A E B la portione, che si cerca.



a 10. del 1.
b 3. post.
c 31. del 3.

Se l'angolo C sarà acuto; nel punto A, sopra la retta A B, [d] si costituisca l'angolo B A D vguale all'angolo C; e nel punto A, si erigga la retta AE, [e] perpendicolare ad AD; sarà l'angolo EAD retto; mà l'angolo B A D è supposto acuto, il restante angolo B A E sarà acuto. Nel punto B, sopra la retta AB, [f] si costituisca l'angolo FBA, vguale all'angolo FAB; i due angoli FAB, FBA saranno minori di due retti; e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, continuata la retta BF concorrerà *con la retta A E in qualche punto F*: e perche *gli angoli FAB, F B A sono frà di loro vguali*, sarà *F A* [g] *vguale ad F B*; si che, *fatto centro in F*, e coll'interuallo FA, ouero *FB*, [h] *si descriua* il circolo ABG, *la circonferenza di quello passarà per il punto B. Dico* che la portione *BGA è quella che si cerca*.



d 23. del 1.
e 11. del 1.
f 23. del 1.
g 6. del 1.
h 3. post.

Perche la retta AD fà angolo retto col diametro A E, per il Corollario alla 16. propositione di questo, tocca *il circolo ABG nel punto A; la* retta AB lo sega, perciò l'angolo DAB, [K] *contenuto dalla tangente DA*, e dalla segante AB, è vguale all'angolo nell'alterna portione *B G A*; mà l'angolo DAB, per costruttione è vguale all'angolo C, sarà l'angolo nella portione B G A [l] vguale all'angolo C. Per la qual cosa s'è descritta la portione BGA sopra la data retta AB, la quale contiene vn angolo vguale all'angolo dato C, ch'era da farsi nel primo luogo.

K 32. del 3.
l 1. assioma.

Finalmente sia il dato angolo ottuso, come il notato H. Sopra la retta AB, nel punto A, [m] si costituisca l'angolo B A I vguale all'angolo H; sopra la retta AI, nel punto I, [n] s'erigga la perpendicolare AE; sarà l'angolo EAD retto, e perciò l'angolo EAB [o] sarà acuto. Nel punto B, sopra la retta AB, [p] si faccia l'angolo FBA vguale all'angolo FAB; i due angoli FAB, FBA, sono minori di due retti, e le rette AF, BF concorrono in qualche punto F; e perche gli angoli FAB, FBA sono frà di loro vguali, sarà FA [q] vguale ad FB; si che, fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, *si descriua* [r] il circolo ABG, quello passarà per *il* punto B. Dico che la portione AKB sarà quella, *che si cerca*.

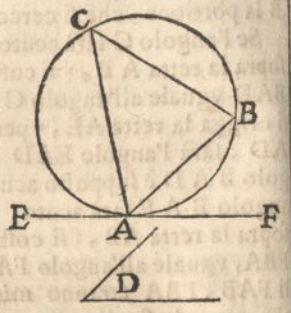
m 23. del 1.
n 11. del 1.
o 17. del 1.
p 23. del 1.
q 6. del 1.
r 3. postul.

Perche *l'angolo IAF è retto*, per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta IA tocca il circolo nel punto A, la retta AB lo sega;

f 32. del 3. e 1. assioma. sarà l'angolo I A B f vguale all'angolo nell'alterna portione A K B ; mà l'angolo IAB è fatto vguale all'angolo H, sarà l'angolo H e vguale all'angolo AKB : dalche la portione A K B è quella, che si cerca, come fù proposto fare, e dimostrare .

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXXIV.

Da vn dato circolo tagliare vna portione , che capisca vn angolo vguale ad vn angolo dato .



Sia il dato circolo ABC, dal quale si vuole tagliare vna portione , che capisca vn angolo vguale all' angolo dato D . Si a Corol. alla 16. del 3. tiri la retta EF , a che tocchi il circolo AB C in qualche punto A ; nel punto A , sopra la retta AF , si costituisca l'angolo F A B b vguale al dato angolo D . Dico che la portione ACB sarà quella, che si cerca .

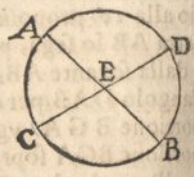
b 23. del 3.

Perche la retta FA tocca il circolo A B C nel punto A, e la retta AB lo sega ; sarà l'angolo F A B c vguale all'angolo nell'alterna portione A C B ; mà l'angolo F A B è fatto vguale all'angolo D , la portione dunque A C B capirà l'angolo vguale all'angolo D, ch'era da farsi , e dimostrarsi .

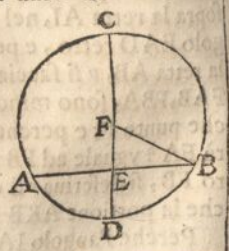
c 32. del 3.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXV.

Se nel circolo due rette linee si segano scambieuolmente , il rettangolo contenuto dalle parti dell'vna è vguale al rettangolo contenuto dalle parti dell'altra .



Nel circolo ACBD, si seghino le rette AB , C D in qualche punto E . Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti A E , E B , è vguale al rettangolo contenuto dalle parti CE,ED . O,le rette AB, CD, passano ambedue per il centro del circolo , ò passa vna di quelle per il centro , ò nissuna . Passino prima le due AB , CD per il centro E ; saranno le rette EB , ED , EA , EC frà di loro vguali , e perciò il rettangolo contenuto dalle parti AE , EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due CE,ED . ch'era da dimostrarsi per il primo caso .



Di nuouo supposto , ch'vna di quelle , come C D passi per il centro F, e diuida la retta A B fuori del centro in due parti vguali in E ; saranno gli angoli in E a retti . Dico , ch'il rettangolo contenuto dalle due A E , E B è vguale al rettangolo contenuto dalle due C E , E D . Dal centro F al punto B b si tiri la retta F B . Perche la retta CD è diuisa in due parti vguali in F, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in E , il rettangolo contenuto

a 3. del 3.

b 1. postul.

dalle

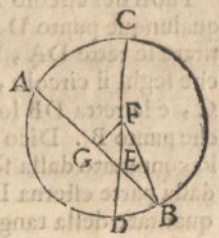
dalle parti ineguali CE, ED, col quadrato dell'intermedia portione FE, c è vguale al quadrato di FD, cioè d al quadrato di F B : mà nel triangolo FEB, angolo retto in E, il quadrato del lato FB e è vguale à i quadrati de' lati BE, EF; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di EF, f vguale à i quadrati delle due BE, EF: dall'vna, e l'altra parte se ne leui il quadrato della commune E F; restarà il rettangolo contenuto dalle due C E, E D g vguale al quadrato di E B : mà il quadrato di EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, stante che AE è vguale ad EB; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimostrarsi.

c 5. del 2.
d 15. defin. del 1.
e 47. del 1.
f 1. assioma.
g 3. assioma.

Passi similmente la retta CD per il centro F, e seghi la retta A B fuori del centro, non in due parti vguali, in qualche punto E. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Si diuida la retta A B h in due parti vguali in G, e si tiri la retta G F; gli angoli in G K saranno retti. Si tiri la retta F B: sarà il quadrato di FB l vguale à i quadrati de i due lati FG, GB, ed il quadrato di FE sarà vguale à i quadrati de due lati EG, GF.

h 10. del 1.
K 3. del 3.
l 47. del 1.

Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in G, ed in due ineguali in E, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali A E, E B, col quadrato dell'intermedia portione G E, m vguale al quadrato di G B, ch'è metà della linea; all'vna, ed all'altra parte di questa vgualità; s'aggiunga il quadrato di GF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF, n vguale à i quadrati de i due lati BG, GF; mà i quadrati de i due lati BG, GF o sono vguali al quadrato di F B; sarà il quadrato di F B vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF; e perche i quadrati de i due lati E G, G F sono vguali al quadrato di F E; sarà il quadrato di FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE.



m 5. del 2.
n 2. assioma.
o 47. del 1.

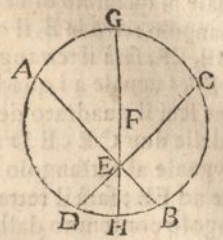
La retta CD è diuisa in due parti vguali in F, ed in due ineguali in E; il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, p è vguale al quadrato di FD, cioè vguale al quadrato di FB: ma il quadrato di FB fù mostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, q vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col medesimo quadrato di FE; se ne leui vgualmente il quadrato di FE, resta il rettangolo contenuto dalle due CE, ED r vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

p 5. del 2.
q 1. assioma.
r 3. assioma.

Finalmente, supposto, che niuna delle rette AB, CD passi per il centro F. Dico, similmente, che il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, E B. Dal centro F al punto E si tiri la retta FE, la quale si continui fino alla circonferenza in G, ed H. Perche la retta GH passa per il centro del circolo, e sega la retta AB, fuori del centro, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo

con-

contenuto dalle rette G E, E H è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Similmente la retta G H passa per il centro F, e sega la retta A B fuori del centro nel punto E, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle rette CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due GE, E H; ma si disse, che il rettangolo contenuto dalle due AE, EB è vguale al medesimo rettangolo contenuto dalle rette G E, E H; sarà il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED [t] vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, come fù proposto dimostrare.

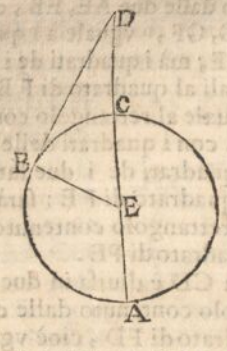


t 1. assioma.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXVI.

Se da qualche punto preso fuori d'vn circolo siano tirate due rette linee, vna che seghi il circolo, e l'altra, che lo tocchi; il rettangolo contenuto dalla segante, e dalla parte esterna, è vguale al quadrato della tangente.

Fuori del circolo A B C *sia preso qualunque punto D, dal quale siano tirate le rette DA, DB, cioè* D A, che seghi il circolo, come in A, & C, e la retta DB lo tocchi *in qualche punto* B. *Dico che il rettangolo contenuto dalla segante* A D, *e dalla parte esterna* D C, è vguale al quadrato della tangente D B. Supposto prima, che la segante D A passi per il centro E del circolo, dal contatto B al centro E [a] si tiri la retta BE; sarà l'angolo EBD [b] retto, ed il quadrato di DE [c] sarà vguale à i quadrati de i due lati DB, BE.



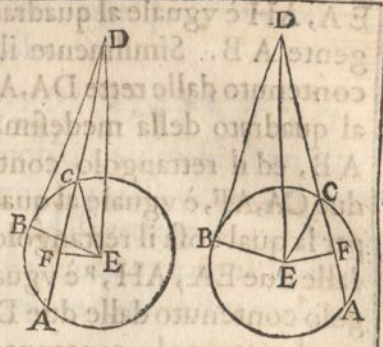
a 1. postul.
b 18. del 3.
c 47. del 1.

Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in E, e l'è aggiũta la retta CD; sarà il rettangolo contenuto dalla composta AD, e dall'aggiunta DC, col quadrato di CE, [d] vguale al quadrato della retta D E; ma il quadrato di DE è vguale à i quadrati de lati DB, BE; sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di EC, [e] vguale à *i quadrati* delle due DB, BE: se ne leuino vgualmente i quadrati delle *rette* EC, EB, [f] resta il rettangolo contenuto da tutta la segante AD, e *dalla parte esterna* DC, vguale al quadrato della tangente DB, *ch'era* da dimostrarsi nel primo luogo.

d 6. del 2.
e 1. assioma.
f 3. assioma.

Se

Se la retta D A non passa per il centro E, ma sega la circonferenza, come in A, & C: Si diuida la retta AC [g] in due parti vguali in F, si tiri la retta FE: gli angoli in F [h] saranno retti; si tirino le rette EB, EC, ED. L'angolo E B D [K] sarà retto, ed il quadrato di E D [l] sarà vguale à i quadrati de i due lati EB, BD. Similmente perche gli angoli in F sono retti; il quadrato di E D è vguale à i quadrati de i due lati EF, FD; e nel triangolo EFC, il quadrato di EC è vguale à i quadrati de' due lati EF, FC.



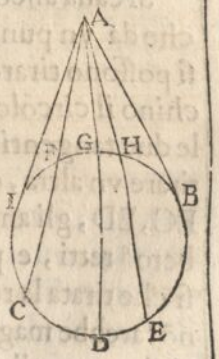
g 10. del 1.
h 3. del 3.
K 18. del 3.
l 47. del 1.

Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in F, e l'è aggiunta la retta CD; sarà il rettangolo contenuto dalla composta AD, e dall' aggiunta DC, col quadrato di CF, [m] vguale al quadrato della retta FD; all' vna, ed all'altra parte s'aggiunga il quadrato di EF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i quadrati delle due CF, FE, [n] vguale à i quadrati delle due D F, FE; i quadrati de' i due lati DF, FE sono vguali al quadrato di DE; sarà il quadrato di DE vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i due quadrati di CF, FE; mà i quadrati delle due CF, FE sono vguali al quadrato di C E; sarà il quadrato di D E vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato della retta C E: e perche il quadrato di D E è vguale à i quadrati de' due lati DB, BE; li quadrati dunque delle due DB, B E sono vguali al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di CE; se ne leuino i quadrati dell'vguali EB, EC, resta il rettangolo contenuto dalla segante AD, e dalla parte esterna DC, [o] vguale al quadrato della tangente DB, ch'era da dimostrarsi.

m 6. del 2.
n 2. assiom.
o 3. assiom.

COROLLARIO I.

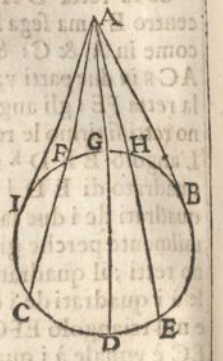
Da quel che s'è detto si caua, che se da vn punto preso fuori d'vn circolo sono tirate quante si voglia rette linee, che seghino il circolo, i rettangoli contenuti dalle seganti, e dalle parti esterne sono frà di loro vguali. Perche se dal punto A fuori del circolo CDB siano tirate quante si voglia rette AC, AD, AE, che seghino il circolo, e sia ancora tirata la tangente AB, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle rette



EA,

EA, AH è vguale al quadrato della tangente AB. Similmente il rettangolo contenuto dalle rette DA,AG, è vguale al quadrato della medesima tangente AB, ed il rettangolo contenuto dalle due CA,AF, è vguale al quadrato di AB; per la qual cosa il rettangolo contenuto dalle due EA, AH, [p] è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA,AG; ouero al rettangolo contenuto dalle due CA, AF.

p 1. assiom.



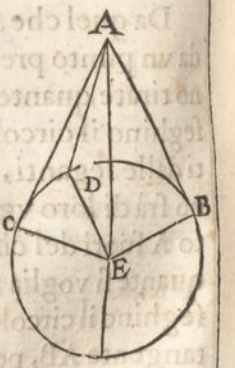
COROLLARIO II.

Se dal punto A sia tirata la retta AI, che tocchi il circolo in qualche punto I, sarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG vguale al quadrato di AI; mà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG è vguale al quadrato di AB, sarà il quadrato di AB vguale al quadrato di AI, e la retta AB vguale ad AI; d'onde è manifesto, che se da qualche punto A fuori d'vn circolo siano tirate due rette AB, AI, che tocchino il circolo, quelle due tangenti sono frà di loro vguali.

COROLLARIO III.

Si caua ancora da quel che s'è detto, che da vn punto fuori d'vn circolo non si possono tirare più di due rette, che tocchino il circolo; perche se dopo tirate le due tangenti AB, AC se ne potesse tirare vn altra, come AD, tirate le rette EC, ED, gli angoli EDA, ECA sarebbero [q] retti, e perciò frà di loro vguali; si che tirata la retta AE, l'angolo ADE nõ sarebbe maggiore dell'angolo ACE, ch'è contro alla 21. propositione del primo libro: non dun-

q 18. del 3.

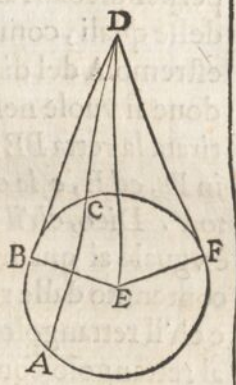


que

que dal medesimo punto si possono tirare più di due rette, che tocchino il medesimo circolo.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVII.

Se da qualche punto preso fuori d'vn circolo siano tirate due rette linee, delle quali vna seghi il circolo, e l'altra concorra con la circonferenza, ed il rettangolo contenuto dalla segante, e dalla parte esterna, sia vguale al quadrato della concorrente, la concorrente toccarà il circolo nel punto del concorso.



Sia preso qualche pũto D fuori del circolo AB C, dal quale siano tirate le rette DA, DB, cioè che la retta DA seghi il circolo come in A, & C, e la retta D B concorra con la circonferenza nel punto B in modo, ch'il rettangolo contenuto dalle rette AD, DC sia vguale al quadrato della concorrente DB. Dico, che la retta D B tocca il *circolo nel punto B*.

Dal punto D fia tirata la retta DF, [a] *che tocchi il circolo in qualche punto F, dal centro E si tirino le rette EF, ED, EB; sarà l'angolo E F D* [b] retto. Perche la retta DA sega il circolo, e la retta D F lo tocca, *il rettangolo contenuto* dalle due A D, D C, [c] sarà *vguale al quadrato* della retta DF; mà per ipotesi, *il rettangolo contenuto dalle medesime* due AD, DC, è vguale al quadrato della retta DB, sarà *il quadrato della* retta DF [d] vguale al quadrato della retta D B; e la retta D F sarà vguale alla retta DB. Si considerino i due triangoli DEF, DEB: perche i due lati DF, FE sono vguali à i due lati DB, BE, e la base DE è commune, sarà l'angolo DFE [e] vguale all'angolo DBE; mà l'angolo D F E è retto, sarà l'angolo D B E [f] retto; e per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta DB tocca il circolo nel punto B, che era da dimostrarsi.

a 17. del 3.
b 18. del 3.
c 36. del 3.
d 1. assiom.
e 8. del 1.
f 10. assiom.

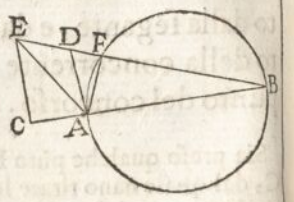
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che quãdo da vn punto fuori d'vn circolo sono tirate due rette vguali, che concorrino con la circonferenza del medesimo circolo, ed vna di quelle tocca il circolo, ancora l'altra toccarà il medesimo circolo; poiche essendosi prima dimostrato, che le due DF, DB sono frà di loro vguali, e col supposto che la retta D F

tocchi il circolo, s'è poi dimostrato, che la retta DB ancora tocca il circolo.

SCOLIO.

Trattando qui Euclide delle passioni, che accadono alle rette, che segano il circolo, non sarà inutile porre in questo luogo il seguente Theorema.



Nel circolo, il di cui diametro AB sia continuato quanto si vuole verso C, e cadano le rette DA, EC perpendicolari alla retta CB, vna delle quali, come DA, cada nell'estremo A del diametro, e l'altra doue si vuole nella continuatione CA; dall'estremo B sia tirata la retta BE, la quale seghi le perpendicolari, come in D, ed E, e la circonferenza del circolo in qualche punto F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due *DB*, *BF* è vguale al quadrato del diametro *AB*; *ch'il* rettangolo contenuto dalle rette BF, FD è vguale al quadrato di FA, e ch'il rettangolo contenuto dalle rette BF, DE, è vguale al rettangolo contenuto dalle rette BA, AG.

E prima dico, che il rettangolo contenuto dalle due DB, BF è vguale al quadrato del diametro AB. Perche l'angolo DAB è retto, la retta DA [a] *tocca il circolo in A, ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DF, sarà vguale* [b] *al quadrato di DA. In oltre perche il rettangolo contenuto dalle due DB, BF, col rettãgolo cõtenuto dalle due BD, DF* [c] *è vguale al quadrato di DB cioè vguale à i quadrati* [d] *delle due DA, AB; ma il rettãgolo delle due BD, DF* [e] *è vguale al quadrato di DA; sarà il rettangolo contenuto dalle due DB, BF* [f] *vguale al quadrato del diametro AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo dico, che il rettangolo contenuto dalle due BF, FD è vguale al quadrato di AF. Essendo l'angolo AFB nel mezzo circolo, retto, i quadrati de i due lati AF, FD [g] *saranno vguali al quadrato di AD; mà il quadrato di AD* [h] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BD, DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [K] *vguale à i quadrati delle due DF, FA: e perche il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [l] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF,* [m] *vguale à i quadrati de' due lati AF, FD; se ne leui il commune quadrato di DF, resta il rettangolo contenuto dalle due BF, FD* [n] *vguale al quadrato di AF, ch'era*

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 2. del 2.
d 47. del 1.
e 36. del 3.
f 3. assioma.
g 47. del 1.
h 36. del 3.
K 1. assiom.
l 3. del 2.
m 1. assiom.
n 3. assioma.

da

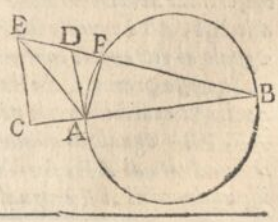
da dimostrarsi nel secondo luogo.

Finalmente dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due BF, DE è vguale al rettangolo contenuto dalle due B A, A C. Si tiri la retta A E, sarà l'angolo EAB ottuso, e perciò saranno i quadrati delle due EA, AB col doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, o vguali al quadrato di EB; mà il quadrato di A E p è vguale à i quadrati delle due A F, F E, ed il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due AF, FB; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due B F, F E, vguali al quadrato di E B. E perche il quadrato di E B è vguale à i quadrati delle due BF, FE q col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due B A, A C, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due BF, FE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE, con i quadrati delle medesime BF, FE. Dall'vna, e l'altra parte se ne leuino i quadrati delle due B F, F E, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, r col doppio quadrato di FA, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE. In oltre perche la retta FE è diuisa in D, e la retta B F è non diuisa, sarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE, t vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE: mà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, per quel che s'è dimostrato, è vguale al quadrato di FA, sarà il quadrato di FA, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE, vguale al rettangolo contenuto dalle due B F, F E; e duplata l'vna, e l'altra parte dell'egualità, ne verrà il doppio quadrato di AF, col doppio rettangolo contenuto da BF, DE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, F E. Si è dimostrato, ch'il doppio rettangolo contenuto dalle due BF, F E, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, A C, col doppio quadrato di A F; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, A C, col doppio quadrato di FA, u vguale al doppio quadrato di F A, col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE: se ne leui vgualmente il doppio quadrato di F A, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC x vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE; e le loro metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, DE, ch'era da dimostrarsi.

o 12. del 2.
p 47. del 1.
q 4. del 2.
r 3. assiom.
t 1. del 2.
u 1. assiom.
x 3. assiom.

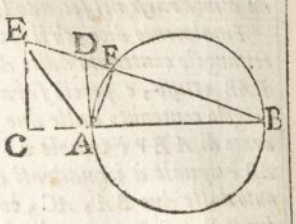
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, ch'il rettangolo contenuto dalle due B A, A C, col quadrato di A F, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE.



Perche essendo il rettangolo contenuto dalle due B F, F D vguale al quadrato di F A, ed il rettangolo contenuto dalle due BA, A C è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF DE; sarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col ret-

tangolo contenuto dalle due B F, D E: mà il rettangolo contenuto dalle due B F, F D, col rettangolo contenuto dalle due B F, D E, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, F E; ſarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE, come ſi diſſe.



COROLLARIO.

Quindi è manifeſto, che ſe ſarà vn triangolo rettangolo, come E C B, angolo retto in C, e nel lato C B è preſo qualche punto A, dal quale cada la retta A F, perpendicolare al lato EB, il rettangolo contenuto dalle parti BF, FE, ſarà tanto maggiore del rettangolo contenuto dalle parti B A, A C, per quanto è il quadrato della perpendicolare A F.

Trattandoſi delle paſſioni delle rette, che ſegano il circolo, ſtimo bene aggiungere qui il ſeguente Theorema.

Se da vn'eſtremo del diametro del circolo ſono tirate quante ſi voglia rette linee, le quali ſeghino la circonferenza del circolo, e ſeghino ancora qualche retta linea perpendicolare al medeſimo diametro; i rettangoli contenuti dalle rette interpoſte frà quell'eſtremo, e la circonferenza del circolo, e dalle rette interpoſte frà il detto eſtremo, e la perpendicolare al diametro, ſono frà di loro vguali.

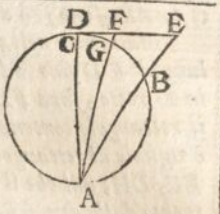
Sia il circolo ABC, il di cui diametro AC, e ſia ED perpendicolare al diametro AC, e dall'eſtremo A del diametro ſiano tirate quante ſi voglia rette linee AE, AF, le quali ſeghino la perpendicolare, come in E, ed F, e la circonferenza del circolo come in B, & G. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due EA, AB è vguale alrettangolo contenuto dalle due FA, AG; ed anco è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC.

Suppoſto prima, che la perpendicolare cada nell'eſtremo del diametro, quella [a] *toccarà il circolo nel punto D, e ſarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB* [b] *vguale al quadrato di ED. In oltre eſſendo l'angolo EDA retto, il quadrato di A E* [c] *ſarà vguale à i quadrati de i due lati A D, D E; mà il quadrato di A E è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB,* [d] *col*

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 47. del 1.
d 2. del 2.

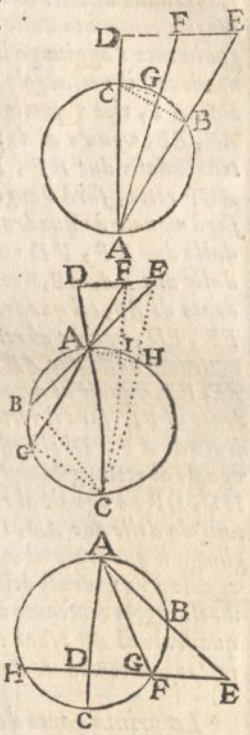
rettan-

rettangolo contenuto dalle due EA, AB; saranno queſti due rettangoli e *vguali à i quadrati de' due lati ED, DA. Fù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, eſſere vguale al quadrato di ED, ſarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB, vguale al quadrato di AD; nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due FA, AG è vguale al medeſimo quadrato di AD, e perciò il rettangolo contenuto dalle due EA, AB ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle due FA, AG, il che era da dimoſtrarſi nel primo luogo,*



e 1. aſſiom.

Di nuouo cada la perpendicolare ED nella continuatione CD; ſi tirino le rette CB, CG: ſarà l'angolo CBA f *nel mezzo circolo retto; ſi che nel triangolo ADE, angolo retto in D, dal punto C nel lato AD, cade la retta CB, perpendicolare ad AE; e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle rette AC, CD, col quadrato di CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AB, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CD,* g *con i quadrati delle due CB, BA, cioè* h *col quadrato di AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE, col quadrato di AB; cioè* K *vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB. Mà il rettangolo contenuto dalle due AC, CD, col quadrato di AC,* l *è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC; ſarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due FA, AG, è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC. Per la qual coſa i rettangoli contenuti da EA, AB; da FA, AG; e da DA, AC, ſono frà di loro vguali: ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.*



f 31. del 3.

g 1. aſſioma.
h 47. del 1.

K 3. del 2.

l 3. del 2.

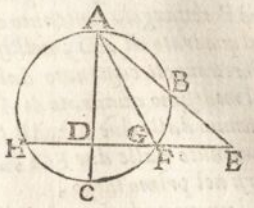
Nella terza figura ſi tirino le rette CB, CG, CE, CF, AH, AI. Gli angoli CBE, CGF, CHA, CIA, ne i mezzi circoli m *ſono retti, e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, col quadrato di AH, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CH, HE. Similmente il rettangolo contenuto dalle due BA, AE, col quadrato di AH, è vguale al medeſimo rettangolo contenuto dalle due CH, HE; dal che il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, col quadrato di AH, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AE, col quadrato di AH: ſe ne leui il commune quadrato di AH, reſta il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due GA, AF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CA, AD. Per la qual coſa i rettangoli contenuti da BA, AE; da GA, AF; e da*

m 31. del 3.

CA,

CA, AD, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente nella quarta figura ſi prolunghi E D ſino ad H. Eſſendo l'angolo in D retto, n *ſarà FD vguale ad HD, ed il rettangolo contenuto dalle due EF, FD, è vguale al rettangolo contenuto dalle due EF, DH; dal che il doppio rettangolo contenuto dalle due EF; FD,* o *è vguale al rettangolo contennto dalle due EF, FH: vgualmente s'aggiunga il quadrato di EF; ne viene* p *il rettangolo contenuto dalle due HE, EF, cioè* q *quello contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD col quadrato di EF. In oltre, eſſendo l'angolo ADF retto, ſarà l'angolo eſterno AFE* r *ottuſo, e perciò il quadrato di AE: ſarà vguale à i quadrati de' due lati AF, FE, col doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD: mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB,* u *col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; ſarà il quadrato di AF, col quadrato di EF, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB, col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; ſù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD, col quadrato di FE, ſarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB vguale al quadrato di AF. Di più eſſendo HD vguale ad FD, ſarà il quadrato di FD vguale al rettangolo contenuto dalle due HD, DF: mà il rettangolo delle due HD, DF* x *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC; ſarà il rettangolo delle due AD, DC,* y *vguale al quadrato di FD: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due CA, AD,* z *vguale à i quadrati delle due FD, DA, cioè* & *vguale al quadrato di FA: mà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB ſù dimoſtrato vguale al medeſimo quadrato di AF; ſarà il rettangolo contenuto dalle due CA, AD vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB, come ſù propoſto dimoſtrare.*



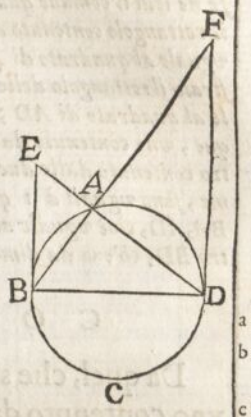
n 3. del 3.
o 1. del 2.
p 3. del 2.
q Corollario alla 36. del 3
r 16. del 1.
t 12. del 2.
u 2. del 2.
x 35. del 3.
y 1. aſſiom.
z 2. aſſiom.
& 47. del 1.

La prima parte del ſeguente Theorema la ſpiega Geronimo Cardano nel Libro 16. De ſubtilitate, però con differente dimoſtratione.

Se negli eſtremi d'vn diametro del circolo ſono eleuate rette perpendicolari à quel diametro; e dalli medeſimi eſtremi ſono tirate due rette, le quali ſcambieuolmente ſi ſeghino in vn iſteſſo punto con la circonferenza del circolo, e continuate concorrano con le perpendicolari; il rettangolo contenuto da ogn'vna delle ſeganti nella ſua parte interna è vguale al quadrato del diametro; e l'vno, e l'altro rettangolo, contenuto dalle parti delle ſeganti, in-

terpo-

terpoſte frà la circonferenza, e le perpendicolari, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro.



Sia il circolo ABCD, il di cui diametro BD, e negli eſtremi B, & D ſiano eleuate le rette BE, DF perpendicolari al diametro BD, e da qualche punto A preſo nella circonferenza BAD à gli eſtremi B, & D del diametro, ſiano tirate le rette BA, DA, le quali continuate concorrino con le perpendicolari, come in E, ed F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle rette FB, BA; ouero il rettangolo contenuto dalle rette ED, DA, è vguale al quadrato del diametro BD, e che i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle parti FA, AB, l'altro dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro BD.

Perche l'angolo BAD [a] *nel mezzo circolo è retto, ſarà il quadrato di BD* [b] *vguale à i quadrati de i due lati BA, AD; in oltre eſſendo gli angoli FDB, EBD retti, le rette FD, EB* [c] *toccaranno il circolo ne i punti D, & B, e ſarà il quadrato di FB* [d] *vguale à i quadrati de due lati FD, DB, ed il quadrato di ED vguale à i quadrati de i due lati EB, BD; Hor perche i quadrati de i due lati FD, DB ſono vguali al quadrato di FB; ed il quadrato di FB* [e] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA, i due quadrati de' lati FD, DB, ſaranno vguali al rettangolo contenuto dalle due BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA; ma il rettangolo contenuto dalle due BF, FA* [f] *è vguale al quadrato della tangente FD; ſarà il rettangolo contenuto dalle due FB, BA,* [g] *vguale al quadrato di BD. Similmente eſſendo i quadrati de i due lati EB, BD vguali al quadrato di ED, ed il quadrato di ED* [h] *è vguale à i rettangoli contenuti, cioè vno dalle due ED, DA, l'altro dalle due DE, EA; ſaranno i quadrati de i due lati EB, BD* [K] *vguali al rettangolo contenuto dalle due ED, DA, col rettangolo contenuto dalle due DE, EA; ma il rettangolo delle due DE, EA* [l] *è vguale al quadrato di EB; ſarà il rettangolo contenuto dalle due ED, DA* [m] *vguale al quadrato di BD, ch' era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Dico di nuouo, che il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col rettangolo contenuto dalle due EA, AD, è vguale al quadrato di BD. Perche il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col quadrato di AB, [n] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FB, BA, cioè, per le coſe dimoſtrate, vguale al quadrato di BD, ed il quadrato di BD* [o] *è vguale à i quadrati de i due lati BA, AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due FA, AB,* [p] *col quadrato di AB, vguale à i quadrati de i due lati BA, AD. Se ne leui il commune quadrato di AB, reſta il rettangolo contenuto dalle due FA, AB* [q] *vguale al quadrato di AD.*

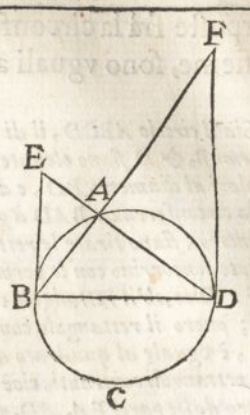
Finalmente perche il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, è vguale [r] *al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA; ed il rettangolo contenuto da ED, & DA, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale*

a 31. del 3.
b 47. del 1.
c Corollario alla 16. del 3
d 47. del 1.
e 2. del 2.
f 16. del 3.
g 3. aſſiom.
h 2. del 2.
K 1. aſſiom.
l 36. del 3.
m 3. aſſiom.
n 2. del. 3.
o 47. del 1.
p 1. aſſiom.
q 3. aſſiom.
r 3. del 2.

al

al quadrato di BD, cioè [t] alli due quadrati di BA, AD; sarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, [u] vguale à i quadrati de i due lati BA, AD; se ne leui il cõmune quadrato di AD, resta il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, [x] vguale al quadrato di AB; Mà fù dimostrato il rettangolo delle due FA, AB vguale al quadrato di AD; i due rettangoli dunque, vno contenuto dalle due EA, AD, l'altro contenuto dalle due FA, AB, giunti insieme, sono vguali à i quadrati de i due lati BA, AD, cioè vguale al quadrato del diametro BD, ch'era da dimostrarsi.

t 47. del 1.
u 1. assiom.
x 3. assiom.



COROLLARIO.

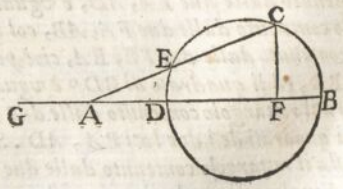
Da quel, che s'è detto, appariſce, che i due rettangoli, vno contenuto dalle parti FA, AB, e l'altro contenuto dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al rettangolo contenuto da tutta FB, e dalla parte BA, ouero *al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA.*

Il ſeguente Theorema è di Pappo Aleſſandrino nel Settimo Libro.

Se da qualche punto A, preſo fuori del circolo B C D, ſiano tirate due rette AB, AC, delle quali AB paſſi per il centro del circolo, ed AC lo ſeghi, come in E, & C, e dal punto C cada la retta CF perpendicolare al diametro B D. Dico, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto dalla retta compoſta delle due AB, AD, e dalla parte BF.

Si continui D A verſo G, e ſi faccia AG [a] vguale ad AD, ſi conſideri la retta A F diuiſa in D, e la retta FB non diuiſa; ſarà il rettangolo cõtenuto dalle due AF, FB [b] vguale à i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BF, FD, e l'altro dalle due BF, DA; ma il rettangolo contenuto dalle due DF, FB [c] è vguale al quadrato

a 3. del 1.
b 1. del 2.
c Corol. alla 14. del 2.



drato di FC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AF, FB, vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di FC.

In oltre si cõsideri la retta GB diuisa in A, e la retta FB come nõ diuisa; sarà il rettangolo cõtenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due GA, BF, [d] vguale al rettangolo contenuto dalle due GB, BF: ma il rettangolo contenuto dalle due GA, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF (per essere DA vguale ad AG) sarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF. d 1. del 2.

Di nuouo, perche la retta AB è diuisa in F, il rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due BA, AF, [e] è vguale al quadrato di AB: ma il rettangolo contenuto dalle due BA, AF [f] è vguale al rettangolo delle due BF, FA, col quadrato di AF; sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due BF, FA, e col quadrato di AF, vguale al quadrato di AB; ma il rettangolo delle due BF, FA, per il num. 1. è vguale al rettangolo delle due AD, FB, col quadrato di CF; sarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF, con i quadrati delle due AF, FC, vguali al quadrato di AB: e perche i quadrati delle due AF, FC [g] sono vguali al quadrato di AC; sarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: ma per il num. 2. il rettangolo delle due GB, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF; sarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: e perche la retta GB è composta di AB, e d'vna parte vguale ad AD; sarà dunque il rettangolo contenuto dalla retta, ch'è composta di AB, AD, e dalla retta BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB. Per la qual cosa il quadrato di AB supera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto da quella retta, ch'è composta delle due BA, AD, e dalla retta BF, ch'era da dimostrarsi. e 2. del 2. f 3. del 2. g 47. del 1.

Fine del Terzo Elemento.

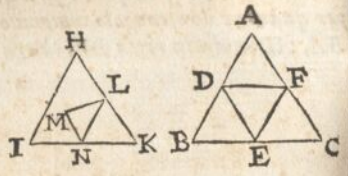
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVARTO.

DEFINITIONI.

I.

La figura rettilinea si dice essere iscritta dentro vn altra figura rettilinea, quando ciascun'angolo della figura iscritta tocca ciascun lato di quella, nella quale è iscritta.

La figura rettilinea, accioche sia iscritta dentro d'vn altra figura rettilinea, deue con tutti i suoi angoli toccare i lati della figura, nella quale è iscritta. Per esempio la figura rettilinea MNL, la quale tocca i lati HK, KI, con gli angoli L, ed N, ma non tocca il lato HI coll'angolo M, non si dice essere iscritta nella figura HIK; ma la figura DEF, che tocca i lati della figura ABC con tutti i suoi angoli, si dice essere iscritta nella figura ABC.



II.

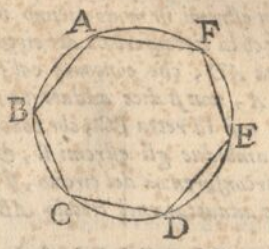
La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno alla figura rettilinea, quando tutti i lati della circoscritta toccano gli angoli della figura iscritta.

Per esempio la figura HIK, che tocca con due soli lati gli angoli della figura MNL, non si dice essere circoscritta, stante che tutti i lati della circoscritta deuono toccare gli angoli dell'iscritta, come appare nella figura ABC, che con tutti i suoi lati tocca gli angoli della figura DEF iscritta.

III.

La figura rettilinea si dice essere iscritta nel circolo, quando ogn'angolo della figura iscritta tocca la circonferenza del circolo, nel quale è iscritto.

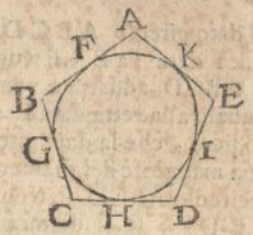
La figura rettilinea ABCDEF, che con tutti i suoi angoli tocca la circonferenza, si dice essere iscritta nel circolo ACE.



IV.

La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno al circolo, quand'ogni lato della figura circoscritta tocca il circolo.

La figura rettilinea ABCDE tocca il circolo con tutti i suoi lati ne i punti F, G, H, I, K, e questa si dice essere circoscritta al circolo: ma se uno, ò più lati non toccassero il circolo, benche lo toccassero gli altri, non si direbbe circoscritta al circolo.



V.

Il circolo si dice essere iscritto nella figura rettilinea, quando tocca tutti i lati della figura circoscritta.

Com'apparisce nel circolo F G H I K, che tocca tutti i lati della figura rettilinea ABCDE, che gli è circoscritta.

VI.

Il circolo si dice essere circoscritto intorno alla figura rettilinea, quando la circonferenza tocca tutti gli angoli della figura iscritta.

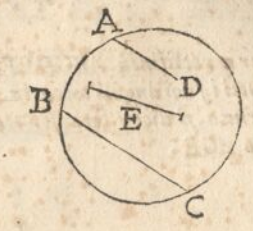
Cioè il circolo ABCDEF, che con la sua circonferenza tocca tutti gli angoli della figura interna, si dice essere circoscritto alla figura interna.

figura della 3. defin.

VII.

La linea rètta si dice essere addattata nel circolo, quando concorre con tutti due gli estremi nella circonferenza del circolo, al quale è addattata.

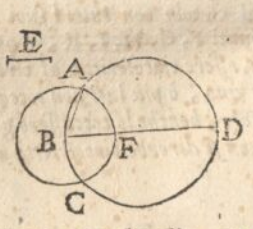
Nel circolo ABC la retta E, che con i suoi estremi in modo alcuno non concorre cõ la circonferẽza del circolo, e la retta AD, che concorre col solo estremo A, non si dice addattata nel circolo; mà la retta BC, che concorre con ambidue gli estremi B, & C con la circonferenza del circolo, si dice essere addattata nel circolo ABC.



PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Dato vn circolo, ed vna retta linea, che non sia maggiore del diametro, addattare nel dato circolo vna retta linea vguale alla retta data.

Sia il dato circolo A B C D, e la retta linea data sia E, si vuole nel circolo ABCD addattare vna retta linea vguale alla retta data E: è necessario però, che la data retta linea E non sia maggiore del diametro.



Nel circolo ABCD si troui il diametro B D [a]; se il diametro BD è vguale alla retta data, sarà BD la retta addattata, vguale alla retta E; Se il diametro BD è maggiore della retta E, dal diametro BD si tagli la parte BF [b] vguale alla retta E; fatto centro in B, coll'interuallo BF, e si descriua il circolo CFA, il quale segarà il primo, come in A, & C; dal pũto A al punto B [d] si tiri la retta AB. Dico che la retta AB è addattata nel circolo ABC, ed è vguale alla data retta E.

Perche il punto B è centro del circolo CFA, sarà BA [e] vguale alla retta BF; ma la retta E, per costruttione, è vguale alla medesima retta BF; sarà la retta BA [f] vguale alla retta E; e perche i punti A, & B sono nella circonferenza del circolo ABC; sarà la retta AB addattata al circolo ABC; ch'era da farsi, e dimostrarsi.

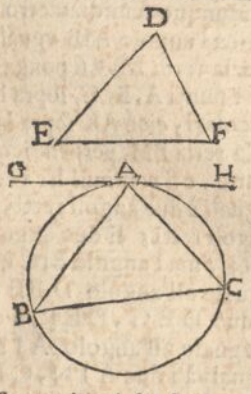
a 1. del 3.
b 3. del 1.
c 3. postul.
d 1. postul.
e 15. defin. del 1.
f 1. assioma.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

In vn dato circolo iscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

Sia

Sia dato il circolo ABC, ed il triangolo DEF; nel circolo ABC si vuole iscriuere vn triangolo equiangolo al triangolo DEF.



Si tiri la retta GH, [a] che tocchi il circolo ABC in qualche punto A; nel punto A, sopra la retta AG, [b] si costituisca l'angolo GAB vguale all'angolo F; e nel medesimo punto A, sopra la retta AH, si costituisca l'angolo HAC vguale all'angolo E. Perche gli angoli HAC, GAB, sono vguali à i due angoli E, ed F, e li due angoli E, ed F, [c] sono minori di due angoli retti; li due angoli HAC, GAB, sono minori di due angoli retti; mà i tre angoli HAC, CAB, BAG [d] sono vguali à due angoli retti: perciò i due angoli HAC, GAB, sono minori di due angoli retti, per quanto è l'angolo CAB, che s'interpone; e perciò la retta AC, non cade nello spatio GAB, ne la retta AB cade nello spatio CAH: si prolunghino dunque le rette AC, AB fino alla circonferenza, come in B, & C, e si tiri la retta BC. Dico, ch'il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF.

a 17. del 3.
b 23. del 1.
c 17. del 1.
d 32. del 1.

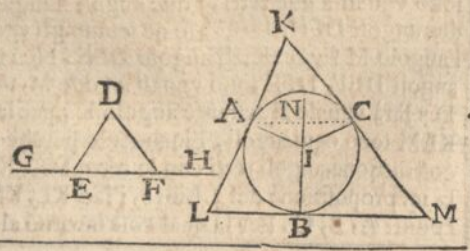
Perche la retta GA, per costruttione, tocca il circolo nel punto A, e la retta AB sega il medesimo circolo; l'angolo GAB, [e] contenuto dalla tangente GA, e dalla segante AB, è vguale all'angolo ACB nell'alterna portione; ma l'angolo GAB è vguale per costruttione all'angolo F, sarà l'angolo ACB [f] vguale all'angolo F. Similmente la retta HA tocca il circolo nel punto A, la retta AC lo sega; l'angolo dunque HAC [g] è vguale all'angolo ABC nell'alterna portione; ma l'angolo HAC è fatto vguale all'angolo E, sarà l'angolo ABC [h] vguale all'angolo E. Finalmente i triangoli DEF, ABC, i due angoli E, ed F, sono vguali à i due ABC, ACB, ed il rimanente angolo D [K] sarà vguale al rimanente angolo BAC. Per la qual cosa nel circolo ABC è iscritto il triangolo ABC; equiangolo al triangolo DEF, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 32. del 3.
f 1. assioma.
g 32. del 3.
h 1. assioma.
K 32. del 1.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Intorno ad vn dato circolo circoscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

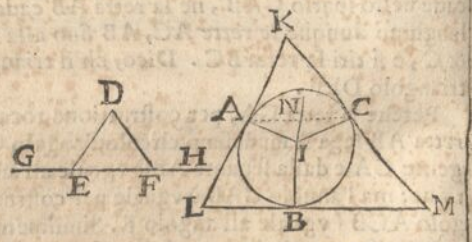
Sia dato il circolo ABC intorno al quale s'habbia à circoscriuere vn triangolo equiangolo al dato triangolo DEF: si continui il lato EF [a] verso G, & H; si troui il centro del circolo ABC, [b] che sia il punto I, dal quale si tiri



a 2. post.
b 1. del 3.

qua-

c 23. del 1. qualunque ſemidiametro A I ; nel punto I ſopra la retta A I, c ſi coſtituiſca l'angolo AIB vguale all'angolo eſterno DEG ; e nel punto I, ſopra la retta BI, d ſi ponga l'angolo BIC, vguale all'angolo eſterno DFH; d 25. del 1. ne i punti A, B, C, ſopra le rette AI, IB, IC, e ſi eriggano rette perpendicolari, cioè AK ſopra la retta AI, la retta KC perpendicolare ad IC, e la retta BM, perpendicolare ad IB ; ſi prolunghino dall'vna, e l'altra e 11. del 1. parte, e ſi continui BI verſo N. Perche i due angoli CIB, CIN f ſono f 13. del 1. vguali à due angoli retti, e li due angoli DFH, DFE ſono vguali à due g 1. aſſiom. angoli retti ; li due angoli CIB, CIN, ſaranno vguali g à i due DFH, DFE ; ma l'angolo BIC è vguale all'angolo DFH ; ſarà l'angolo CIN vguale all'angolo D F E. Conſiderando i due angoli A I B, A I N, e li due D E G, D E F, ſi dimoſtrarà nell'iſteſſo modo, che l'angolo DEF è vguale all'angolo A I N ; dalche li due angoli D F E, D E F ſono h 17. del 1. vguali à i due A I N, C I N : ma i due angoli D E F, D F E ſono h minori di due angoli retti, perciò i due A I N, C I N ſono minori di due K 14. del 1. angoli retti ; dalche K le rette C I, I A, non coſtituiſcono vna ſola retta linea, ma contengono l'angolo CIA ; ſi tiri la retta AC, quella caderà frà i punti I, & K, e ſegarà gli angoli KCI, KAI. E perche gli angoli KCI, KAI ſono retti, i due angoli KCA, KAC ſaranno minori di due angoli retti, e per lo Scolio dopo la 31. propoſitione del 1. le rette AK, CK continuate concorrono in qualche punto K. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette KM, LM, concorrono in qualche punto M ; e che i lati M L, KL, concorrono in qualche punto L.



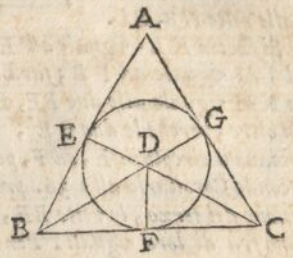
Nel quadrilatero LAIB, i due angoli LBI, LAI ſono per coſtruttione retti, ma tutti li quattro angoli del quadrilatero, per lo Scolio alla 32. propoſitione del primo, ſono vguali à quattro angoli retti, li due angoli AIB, ALB ſarãno vguali à due angoli retti ; e perche li due angoli DEG, l 13. del 1. DEF l ſono vguali à due angoli retti ; li due angoli DEG, DEF ſaranno m 1. aſſiom. vguali m à i due AIB, ALB ; ſe ne leuino gli vguali angoli AIB, DEG, n 3. aſſiom. reſta l'angolo L, n vguale all'angolo DEF. Nel quadrilatero I B M C, gli angoli MCI, MBI ſono per coſtruttione retti ; dalche i due C M B, o 13. del 1. CIB ſono vguali à due angoli retti : E perche i due angoli DFH, DFE o ſono vguali à due retti, i due angoli dunque BIC, BMC ſono vguali à i due angoli DFH, DFE ; ſe ne leuino gli vguali angoli DFH, BIC reſta p 3. aſſioma. l'angolo M p vguale all'angolo DFE. Ne i triangoli KLM, DEF, i due angoli DEF, DFE ſono vguali à i due M, ed L, ed il rimanente angolo q 32. del 1. D q ſarà vguale al reſtante angolo K ; per la qual coſa i triangoli DEF, KLM ſono equiangoli. Finalmente perche le rette IC, IA, IB fanno, per coſtruttione, angoli retti con le rette MK, KL, LM, per il Corollario alla 16. propoſitione del 3. Libro, i lati KL, KM, LM toccano il circolo ne i punti A, B, C. Per la qual coſa intorno al circolo ABC s'è circoſcritto

il triangolo KLM, equiangolo al dato triangolo DEF, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA IV. PROPOSITONE IV.

Dentro d'vn dato triangolo iscriuere vn circolo.

Sia il dato triangolo A B C, dentro del quale s'habbia ad iscriuere vn circolo.



Si diuidano gli angoli B, & C [a] in due parti vguali con le rette BD, C D, le quali concorreranno in qualche punto D; dal punto D à i lati del triangolo si facciano cadere [b] le perpendicolari DE, DF, DG; fatto centro in D, coll'interuallo DE, ouero DF, ouero DG, [c] si descriua il circolo EFG. Dico che il Circolo EFG è iscritto dentro del triangolo ABC.

a 9. del 1.

b 12. del 1.

c 3. postul.

Perche gli angoli DGC, DFC sono retti, e gli angoli DCG, D C F, per costruttione, sono frà di loro vguali, saranno i due angoli D G C, DCG, del triangolo DGC, vguali à i due angoli DFC, DCF, del triangolo DFC; il lato DC è commune, sarà il lato FC [d] vguale al lato CG, ed il lato DG vguale al lato DF. Similmente gli angoli DFB, DEB sono retti, gli angoli DBF, DBE sono frà di loro vguali; saranno i due angoli DFB, DBF, del triangolo DFB vguali à i due angoli DEB, DBE, del triangolo DEB; il lato B D è commune, sarà il lato BF [e] vguale al lato BE, ed il lato ED vguale al lato DF; mà il lato DF fù dimostrato vguale al lato DG, le tre rette DE, D F, D G [f] sono frà di loro vguali, ed il punto D sarà il centro del circolo, che passa per i punti F, G, E. In oltre, perche i semidiametri DF, DG, DE fanno, per costruttione angoli retti con i lati del triangolo; perciò i lati AB, BC, C A, [g] toccano il circolo ne i punti E, F, G. Per la qual cosa dentro del triangolo A B C s'è iscritto il circolo EFG, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

d 26. del 1.

e 26. del 1.

f 1. assioma.

g Corollario alla .6. del 1.

SCOLIO.

Accioche si sappia di quanto due lati d'vn triangolo superano il terzo, Gio: Battista Benedetti fece il seguente Theorema.

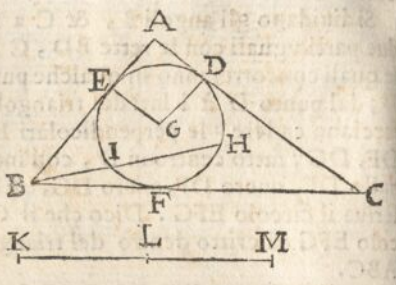
Se dentro à qualunque triangolo sia iscritto vn circolo, e da vn angolo del triangolo sia tirata vna retta fino al concauo della circonferenza; i due lati, che contengono l'angolo, dal quale è stata tirata la retta, che sega il circolo, sono maggiori del terzo lato per vna retta, il di cui qua-

drato

drato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalla retta, che sega il circolo, e dalla parte esterna.

Sia iscritto il circolo EFD dentro à qualunque triangolo ABC, e da vno de gli angoli, come B, sia tirata la retta BH, che seghi il circolo in qualsiuoglia modo, come in H, ed I. Dico che i lati AB, BC sono maggiori del lato AC, per vna retta, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI.

a 3. del 1. *Si faccia KL a vguale ad EB, ed LM vguale ad FB; sarà tutta KM vguale alle due BE, BF. In oltre, perche le due BE, BF toccano il circolo in E, ed F, per il secondo Corollario alla 36. propositione del terzo, le rette BE, BF sono frà di loro vguali. Per l'istessa ragione EA è vguale ad AD, e la retta DC è vguale alla retta CF. Hor essendo BE vguale à BF, sarà KL vguale ad LM, ed il*



b Scolio alla 4. prop. del 2 *quadrato di KM sarà b il quadruplo del quadrato di LM; mà LM è vguale ad FB; il quadrato dunque di KM sarà il quadruplo del quadrato di BF.*

c 36. del 3. *E perche il quadrato di BF c è vguale al rettangolo contenuto dalle rette HB, BI; sarà il quadrato di KM il quadruplo rettangolo cõtenuto dalle rette HB, BI; dal che il quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI sarà vguale al quadrato di KM; supposto questo. Perche CF è vguale à CD, ed AD vguale ad AE; se alla retta CF s'aggiunge la retta AE, ed alla retta CD*

d 2. assioma. *s'aggiunge la retta AD, ne vengono le due CF, AE insieme, d vguali alla retta AC: per la qual cosa i lati AB, BC superano il lato AC per la quantità delle rette BF, BE, cioè per la quantità KM: mà il quadrato di KM è dimostrato vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, i lati dunque AB, BC superano il lato AC per quanto è la retta KM, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, ch'era da dimostrarsi.*

COROLLARIO I.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che i lati AB, BC superano il lato AC, per la retta vguale alle due tangenti BE, BF, cioè vguale al doppio di BE, ouero di BF. E per l'istessa ragione i lati AB, AC superano il lato BC per il doppio di AE, ouero AD, ed i lati AC, CB superano il lato AB per il doppio della retta CD, ouero CF.

COROL-

COROLLARIO II.

Appare da quel, che s'è detto, che se l'angolo B A C è retto, i lati A B, A C superano il lato C B per quanto è il diametro del circolo; stante che essendo gli angoli in D, ed A retti, i lati DG, AE saranno [e] paralleli: parimente essendo gli angoli in A, & E retti, i lati EG, AD saranno paralleli; e perciò il quadrilatero EG DA [f] sarà parallelogrammo, ed i lati opposti AD, EG, ouero AE, DG, [g] sono frà di loro vguali; si che i due lati E G, G D sono vguali à i due AD, A E; mà i due D G, G E sono vguali al diametro del circolo E D F; però i due A D, A E sono vguali al diametro del detto circolo.

e 28. del 1.
f 35. del 1.
g 34. del 1.

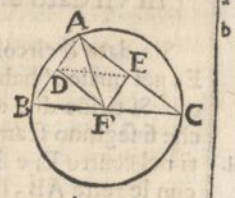
PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Intorno ad vn dato triangolo circoscriuere vn circolo.

Sia dato il triangolo ABC, intorno al quale s' habbia da circoscriuere vn circolo.

Si diuidano due qualunque lati AB, A C [a] *in due parti vguali in D, ed E; ne i punti D, ed E* [b] *si pongano le rette EF, DF ad angoli retti con i lati A C, A B; si tiri la retta DE. Perche gli angoli AEF, A D F sono retti, detrattone gli angoli AED, ADE; restano gli angoli F E D, F D E minori di due angoli retti; e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, le rette EF, D F continuate concorrono in qualche punto F; si tirino le rette FA, FC, FB; e fatto centro in F, e coll'interuallo FA, ouero FB, ouero FC, si descriua il circolo CAB. Dico ch'il circolo CAB è circoscritto al dato triangolo ABC.*

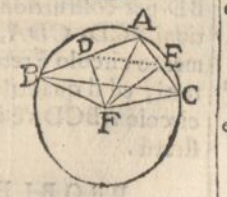
a 10. del 1.
b 11. del 1.



c 3. postul.



d 4. del 1.



e 1. assiom.

Ne i triangoli FDA, FDB, i due lati AD, DF sono vguali à i due BD, DF; gli angoli in D sono retti, sarà la base FA [d] *vguale alla base BF. Similmente ne i triangoli FEA, FEC, i due lati AE, EF sono vguali à i due lati CE, EF; gli angoli in E sono retti, sarà la base F C vguale alla base A F: mà AF fù dimostrata vguale ad FB, le tre rette FB, FA, FC* [e] *sono frà di loro vguali, ed il circolo descritto intorno al centro F passa per li punti B, A, C; dalche è circoscritto il circolo BAC intorno al dato triangolo, ch'era da farsi; e dimostrarsi.*

SCOLIO.



Dall'antecedente propositione si caua il modo, come si possa far passare vna circonferenza di circolo per tre punti dati, che non siano in vna medesima retta linea. Per essempio: siano i dati punti A, B, C, che non siano in vna medesima retta linea, per i quali si voglia far passare vna circonferenza di circolo. Si prendano i tre punti A, B, C come anguli del triangolo BAC, e per l'antecedente propositione, intorno al triangolo ABC si circoscriua il circolo C B A: e per operare con breuità, si faccia centro in C, & B, e con qualunque interuallo si descriuano gli archi F G, i quali s'interſegaranno in F, & G. Di nuouo fatto centro in B, & A, e con qualunque interuallo, si descriuano gli archi D E, i quali si ſegaranno in D, ed E; per l'interſegationi D, E, si faccia passare la retta DE, come anco per le interſegationi F, & G, si faccia passare la retta FGH; quelle concorreranno in qualche punto H. Si faccia centro in H, coll'interuallo HB, ouero HA, ouero HC, si descriua vn circolo, il quale, per la dimostratione antecedente, passarà per li tre punti A, B, C, come s'è detto.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE VI.

In vn dato circolo iscriuere vn quadrato.



Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, nel quale s' habbia da iscriuere vn quadrato. Si tirino due diametri, come A C, B D, che si seghino scambieuolmente ad angoli retti nel centro E; e si congiunghino gli estremi [a] con le rette AB, BC, C D, D A. Dico ch'il quadrilatero ABCD è il quadrato iscritto nel circolo ABCD. Perche gli angoli nel centro E sono retti, perciò sono frà di loro vguali, e gli archi oppositi AB, B C, C D, D A [b] sono frà di loro vguali: mà gli vguali archi sono [c] sotteſi da rette linee vguali; le rette linee dunque AB, BC, CD, DA sono frà di loro vguali. Finalmente perche le rette AC, BD per costruttione sono diametri del circolo, perciò ogn'vna delle portioni BCD, CDA, DAB, ABC, sarà mezzo circolo; mà l'angolo [d] nel mezzo circolo è retto, saranno gli angoli ABC, BCD, CDA, D A B retti; ed il quadrilatero A B C D sarà [e] quadrato. Per la qual cosa nel circolo ABCD s'è iscritto il quadrato A B C D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 1. postul.

b 2. del 1.

c 29. del 3.

d 31. del 3.

e 29. defin. del primo.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE VII.

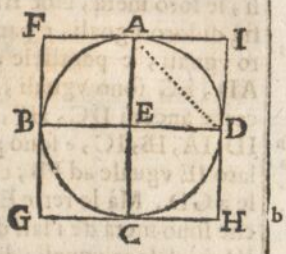
Intorno ad vn dato circolo circoscriuere vn quadrato.

Sia

Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, intorno al quale s'habbia da circoscriuere vn quadrato.

Nel dato circolo si tirino due diametri, come AC, BD, i quali si seghino ad angoli retti nel centro E; per li punti A, B, C, D, si facciano passare le rette FG, GH, HI, IF, [a] che facciano angoli retti con i diametri AC, BD, si tiri la retta AD. Perche gli angoli EDI, IAE sono retti, detrattone i due angoli EDA, EAD, restano i due angoli IDA, IAD, minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, le rette HI, FI, continuate concorrono in qualche punto I. Nell'istesso modo si proverà, che continuate l'altre rette, IH, GH, GF, concorreranno come in H, G, ed F. Dico ch'il quadrilatero FG HI è il quadrato circoscritto al circolo ABCD.

[a] 11. del 1.



Perche gli angoli in B, & E, per costruttione sono retti, saranno le rette FG, AC, [b] frà di loro parallele. Similmente essendo gli angoli in E, & D retti, la retta IH sarà parallela ad AC, dal che le rette FG, IH sono frà di loro parallele. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette FI, BD, GH sono frà di loro parallele; e perciò il quadrilatero FGHI, [c] sarà parallelogrammo, e sarà FG [d] vguale ad HI, ed il lato FI vguale al lato GH. Inoltre perche FG è parallela ad AC, e la retta FA è parallela à GC, sarà il quadrilatero FGCA [e] parallelogrammo, ed il lato FG [f] sarà vguale ad AC. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il quadrilatero BGHD è parallelogrammo, ed il lato GH è vguale à BD. Mà i diametri AC, BD sono frà di loro vguali, i lati dunque FG, GH sono frà di loro vguali: fù dimostrato il lato GH vguale ad FI; ed il lato FG vguale ad IH, i quattro lati FG, GH, HI, IF [g] saranno frà di loro vguali. Finalmente perche le rette FG, AC sono frà di loro parallele, gli angoli CAF, GFA [h] sono vguali à due angoli retti, e gli angoli FGC, ACG sono vguali à due angoli retti: mà gli angoli FAC, GCA sono retti; gli angoli dunque [K] in F, & G sono ancora retti. Nel parallelogrammo FGHI l'angolo F è vguale all'angolo opposto H, e l'angolo G vguale all'opposto I; mà gli angoli in F, & G sono retti, in conseguenza gli angoli in H, & I saranno retti; e perciò il quadrilatero FGHI [l] sarà quadrato. E perche i lati FG, GH, HI, IF fanno angoli retti con i diametri AC, BD, per il Corollario alla 16. propositione di questo, tutti toccano il circolo, ed il quadrato FGHI è circoscritto al circolo ABCD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

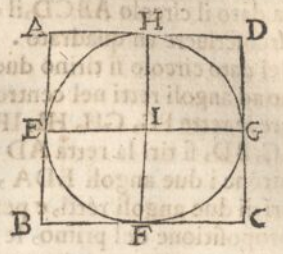
[b] 28. del 1.
[c] 35. defin. del primo.
[d] 34. del 1.
[e] 35. defin. del primo.
[f] 34. del 1.
[g] 1. assiom.
[h] 29. del 1.
[K] 34. del 1.
[l] 29. defin. del primo.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Dentro d'vn dato quadrato iscriuere vn circolo.

Sia il dato quadrato ABCD, nel quale si voglia iscriuere il circolo.

Si diuidano tutti quattro i lati del quadrato [a] in due parti vguali in H, E, F, G; si congiungano i punti opposti [b] con le rette EG, HF, le quali si segaranno in qualche punto I; fatto centro nell'punto I, coll'interuallo d'vna delle rette IE, IF, IG, IH, [c] si descriua il circolo HEFG. Perche i lati AB, DC sono vguali, e paralleli, le loro metà, cioè EB, GC, sono frà di loro vguali, e parallele; dal che le rette EG, BC [d] sono frà di loro vguali, e parallele. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette AD, EG sono vguali, e parallele: e similmente che le rette AB, HF, come ancora DC, HF, sono vguali, e parallele; e perciò i quadrilateri ID, IA, IB, IC, [e] sono parallelogrammi, e sarà IF [f] vguale ad EB, ed il lato IE vguale ad FB; come anco IG vguale ad HD, ed il lato HI vguale à GD. Mà le rette EB, BF, HD, DG sono frà di loro vguali, stante che sono metà de i lati del quadrato ABCD; saranno le rette IE, IF, IG, IH frà di loro vguali: dal che il circolo EFGH descritto intorno al centro I, passa per li punti F, G, H, I. Finalmente perche le rette AB, HF, sono parallele, gli angoli HFB, ABF [g] sono vguali à dué angoli retti; mà l'angolo in B è retto, sarà l'angolo in F retto. *Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli angoli in G, H, E sono retti; e perciò i lati AB, BC, CD, DA,* [h] toccano il circolo *ne i punti E, F, G, H. Per la qual cosa il circolo HEFG è iscritto nel quadrato ABCD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.*



a 10. del 1.
b 1. postul.
c 3. post.
d 33. del 1.
e 35. defin. del primo.
f 34. del 1.
g 29. del 1.
h Corollario alla 16. propositione del 3.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE IX.

Intorno ad vn dato quadrato circoscriuere vn circolo.

Sia dato il quadrato ABCD, intorno al quale si vuole circoscriuere vn circolo.

Si tirino i diametri AC, BD, i quali si segaranno in qualche punto E. Perche il quadrilatero ABCD è quadrato, perciò il lato AB [a] è vguale al lato AD, il triangolo ABD è isoscele; e gli angoli ABD, ADB [b] sono frà di loro vguali; mà l'angolo BAD è retto, ogn'vno de'i due angoli dunque ABD, ADB è la metà d'vn'angolo retto, & ogn'vno de i rimanenti angoli CBD, CDB sarà la metà d'vn' angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'vno de gli angoli BCA, BAC, ouero DCA, DAC, è la metà d'vn angolo retto; e perciò tutti sono frà di loro vguali. Hor essendo gli angoli EDA, EAD frà di loro vguali, sarà il lato EA [c] vguale al lato ED. Similmente perche gli angoli EDC, ECD sono frà di



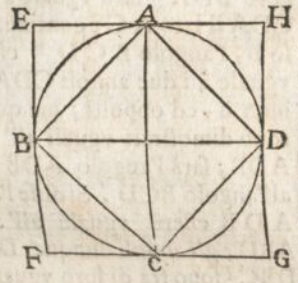
a 29. defin. del primo.
b 5. del 1.
c 6. del 1.

loro

di loro vguali, sarà il lato E D vguale al lato E C. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il lato EB è vguale al lato EC, e perciò le quattro rette EB, EC, ED, EA sono frà di loro vguali; Si che fatto centro nel punto E, e coll'interuallo EB si descriua il circolo A B C D; quello passarà per li punti A, B, C, D; e così sarà circoscritto il circolo ABCD intorno al dato quadrato, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se nel circolo è iscritto, e circoscritto il quadrato; quello, ch'è circoscritto, è il doppio dell'iscritto.

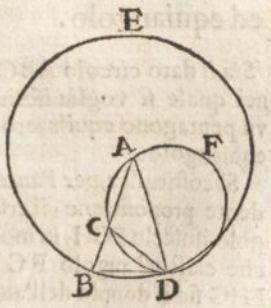


Sia il quadrato iscritto nel circolo, il notato ABCD, si tirino i diametri [a] *AC, BD, ed intorno al circolo ABCD sia circoscritto* [b] *il quadrato EFGH in modo, che tocchi il circolo ne i punti A, B, C, D, farà con i diametri AC, BD, angoli retti, e perciò AC* [c] *sarà parallela ad EF, dal che il quadrilatero AEFC sarà parallellogrammo, ed il lato AC* [d] *sarà vguale ad EF. Nel triangolo CDA, angolo retto in D, il quadrato del lato AC* [e] *è vguale à i quadrati de i due lati CD, DA; ma CD, come lato del quadrato iscritto, è vguale ad AD; sarà il quadrato di AC il doppio del quadrato di CD, cioè del quadrato iscritto A B C D. Fù dimostrato il lato AC vguale ad EF, sarà il quadrato di EF, cioè il quadrato circoscritto EFGH, il doppio del quadrato iscritto ABCD, ch'era da dimostrarsi.*

a 1. del. 3.
b 7. del 3.
c 28. del 1.
d 34. del 1.
e 47. del 1.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE X.

Costruire vn triangolo isoscele, del quale ciascun angolo sopra la base sia il doppio dell'angolo verticale.

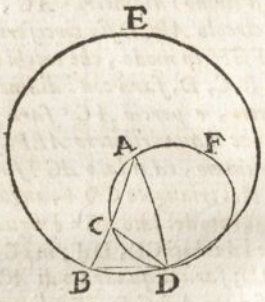


S'esponga qualunque retta linea AB, la quale si diuida talmente in C, [a] che il rettangolo contenuto da tutta, e dalla parte BC, sia vguale al quadrato del rimanente AC; poi fatto centro in A, [b] coll'interuallo AB, si descriua il circolo BDE, nel quale dal punto B s'addatti la retta BD [c] vguale alla retta AC, e si tiri la retta AD. Perche le rette AB, AD, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali, il triangolo A B D sarà isoscele, e gli angoli A B D, ADB [d] sono frà di loro vguali. Dico, che ciascun'angolo A D B, ABD è il doppio dell'angolo BAD. Si tiri la retta CD, ed intorno al triangolo ACD [e] si cir-

a 11. del 2.
b 3. postul.
c 1. del 4.
d 5. del 1.
e 5. del 4.

circoſcriua il circolo ACDF. Perche il rettangolo contenuto dalle rette AB, BC, per coſtruttione, è vguale al quadrato di AC, e la retta BD è poſta vguale ad AC; ſarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al quadrato della retta BD. Dal punto B, ch'è fuori del circolo CDF, ſono tirate le due rette BA, BD, delle quali la retta BD concorre col circolo CDF, la retta BA lo ſega, ed il rettangolo contenuto dalla ſegante AB, e dalla parte eſterna BC, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale al quadrato della concorrente BD; la retta BD [f] tocca il circolo CDF nel punto D, la retta DC lo ſega, l'angolo dunque CDB, [g] contenuto dalla ſegante, e tangente, è vguale all'angolo BAD, nell'alterna portione: s'aggiunga all'vno, ed all'altro l'angolo CDA, tutto l'angolo BDA [h] ſarà vguale à i due angoli CDA, CAD. Nel triangolo CDA il lato AC è continuato verſo B, l'angolo BCD [K] eſterno è vguale à i due angoli CDA, CAD interni, ed oppoſti; ma queſti furono dimoſtrati vguali all'angolo ADB; ſarà l'angolo ADB vguale all'angolo BCD. Si diſſe l'angolo ADB eſſere vguale all'angolo ABD; gli angoli dunque DCB, DBC [l] ſono frà di loro vguali, ed il lato DC [m] ſarà vguale al lato DB: ma il lato AC, per coſtruttione, è vguale al medeſimo lato DB; perciò il lato AC [n] ſarà vguale al lato CD, e gli angoli CDA, CAD [o] ſaranno frà di loro vguali. E perche l'angolo BDC fù dimoſtrato vguale all'angolo BAD; ſarà tutto l'angolo ADB il doppio dell'angolo BAD; ma l'angolo ADB è vguale all'angolo ABD; ſarà l'angolo ABD il doppio dell'angolo A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

f 37. del 3.
g 32. del 3.
h 2. aſſiom.
K 32. del 1.
l 1. aſſiom.
m 6. del 1.
n 1. aſſiom.
o 5. del 1.



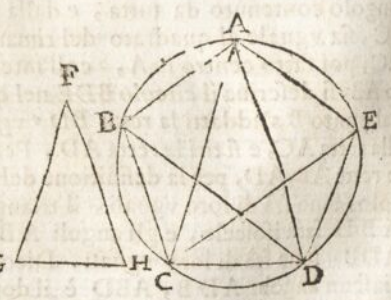
PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XI.

In vn dato circolo iſcriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCDE, nel quale ſi voglia iſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

Si coſtituiſca, per l'antecedente propoſitione, il triangolo iſoſcele FGH, in modo, che ciaſcun'angolo FGH, FHG ſia il doppio dell'angolo F. Poi s'iſcriua nel dato circolo il triangolo ACD [a] equiangolo al triangolo FGH; ſarà ciaſcun'

a 2. del 4.



ango-

angolo ACD, ADC, il doppio dell'angolo CAD. Si diuidano gli angoli ACD, ADC [b] in due parti vguali con le rette DB, CE; i cinque angoli ACE, ECD, ADB, BDC, DAC saranno frà di loro vguali; dal che gli archi oppoſti DE, EA, AB, BC, CD [c] ſono fra di loro vguali; ma gli archi vguali [d] ſono ſotteſi da rette linee vguali, ſaranno le rette DE, EA, AB, BC, CD frà di loro vguali, ed il pentagono A B C D E ſarà equilatero. In oltre, perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente s'aggiunga l'arco AED, ne viene l'arco BAED vguale all'arco CDEA; ma gli archi vguali ſono [e] oppoſti ad angoli vguali, quando ſono angoli alla circonferenza del medeſimo circolo, ſarà l'angolo ABC vguale all'angolo BCD. Similmente perche l'arco BC è vguale all'arco ED, vgualmente s'aggiunga l'arco B A E, ne viene l'arco B A E D vguale all'arco CBAE; e perciò gli angoli BCD, CDE, che ſono oppoſti à quegli archi vguali, [f] ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che l'angolo EAB è vguale all'angolo ABC. Per la qual coſa nel circolo dato è iſcritto il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

b 9. del 1.

c 26. del 3.

d 29. del 3.

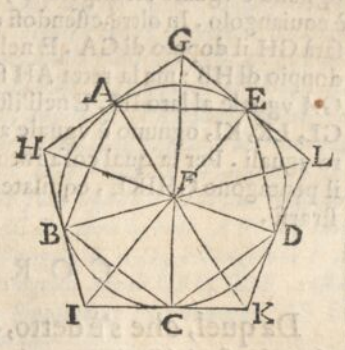
e 27. del 3.

f 27. del 3.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XII.

Intorno ad vn dato circolo circoſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

Sia il dato circolo ABCDE, il di cui centro F, intorno al quale ſi voglia circoſcriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.



S'iſcriua nel circolo A B C D E [a] *il* pentagono A B C D E equilatero, & equiangolo, e dal centro F à i punti A, B, C, D, E, [b] ſi tirino le rette FA, FB, FC, FD, FE; per li punti A, B, C, D, E, ſi facciano paſſare le rette G H, HI, IK, KL, LG, [c] che facciano angoli retti con le rette tirate dal centro. Perche gli angoli FEG, FAG ſono retti, detrattone i due angoli FEA, FAE, reſtano i due angoli G E A, GAE minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propoſitione, continuate le rette HG, LG concorreranno in qualche punto G. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le altre concorrono ne i punti H, I, K, L; ſi tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL. Perche gli angoli in A, B, C, D, E, ſono retti, perciò i lati GH, HI, IK, KL, LE [d] toccano il circolo ne i punti A, B, C, D, E; e per il ſecondo Corollario alla 36. propoſitione del terzo, le tangenti HB, HA ſono frà di loro vguali. E per l'iſteſſa ragione la retta GA, è vguale ad EG; la retta LE è vguale ad LD; come ancora KD vguale alla retta KC, & IC, ad IB. Si conſiderino i triangoli HFA, HFB, de' quali il lato FA è vguale al lato F B, il lato F H è comune;

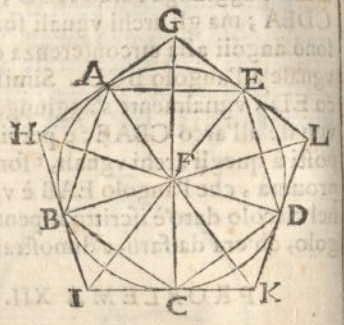
a 11. del 4.

b 1. poſtul.

c 11. del 1.

d Corollario alla 16. del 3.

mune ; saranno i due lati FH, FA vguali à i due FH, FB ; la base HA è
c 8. del 1. vguale alla base HB, sarà l'angolo AFH c vguale all'angolo BFH; e l'angolo AHF vguale all'angolo BHF; dalche l'angolo BFA sarà il doppio dell'angolo HFA, e l'angolo BHA il doppio dell'angolo AHF. Nell'istesso modo si dimostrarà, che l'angolo AFE è il doppio dell'angolo AFG, e l'angolo AGE è il doppio dell'angolo AGF. In oltre perche i lati AE, AB sono fra di loro vguali, come lati del pentagono interno;
f 28. del 3. sarà l'arco AE f vguale all'arco AB, e
g 27. del 3. gli angoli EFA, AFB al centro g sono frà di loro vguali; dalche le loro metà, cioè gli angoli GFA, HFA sono fra di loro vguali. Ne i triangoli FAG, FAH, i due angoli GFA, GAF sono vguali à i due angoli HFA, HAF, il lato AF è commune;
h 26. del 1. sarà il lato FG h vguale allato FH; il lato GA vguale al lato AH; e l'angolo FGA vguale all'angolo FHA. Ma gli angoli BHA, EGA, per quel che s'è dimostrato, sono il doppio degli



K 6. assioma. angoli vguali FGH, FHG; gli angoli dunque BHA, EGA K sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli L, K, I, ognuno è vguale all'angolo G, ouero H; e perciò il pentagono GHIKL è equiangolo. In oltre, essendosi dimostrata la retta GA vguale ad AH, sarà GH il doppio di GA. E nell'istesso modo si dimostrerà IH essere il doppio di HB: ma la retta AH fù dimostrata vguale ad HB, sarà il lato GH vguale al lato IH. E nell'istesso modo si dimostrarà, che gli altri lati GL, LK, KI, ognuno è vguale ad HG, ouero HI: e perciò sono frà di loro vguali. Per la qual cosa intorno al circolo ABCDE, s'è circoscritto il pentagono GHIKL, equilatero, & equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

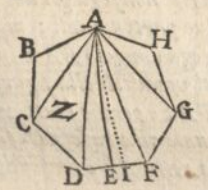
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se dentro d'vn circolo sarà iscritta qualunque figura equilatera, & equiangola, e dal centro del circolo à gli angoli di questa saranno tirate rette linee, per gli estremi delle quali si facciano passare rette linee, che facciano angoli retti con le medesime tirate dal centro; quelle continuate concorreranno insieme; e sarà circoscritta intorno al circolo vna figura di tanti lati vguali, ed angoli vguali, per quanti nè hà la figura iscritta.

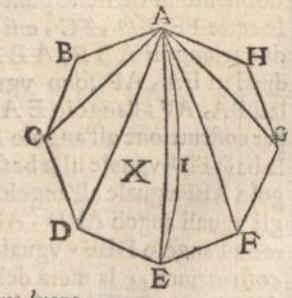
SCO-

SCOLIO DEL CLAVIO.

In ogni figura equilatera, & equiangola, se sarà di lati di numero imparo, la retta linea tirata da vno de gli angoli, diuidendo il lato opposto in due parti vguali, diuiderà l'angolo in due parti vguali, e sarà perpendicolare al lato opposto; e se diuide l'angolo in due parti vguali, diuiderà il lato opposto in due parti vguali, & ad angoli retti; e nella figura di lati di numero paro, la retta tirata da vn angolo all'angolo opposto, diuide quegli angoli in due parti vguali: e se la retta diuide vn angolo in due parti vguali, continuata segarà l'altr'angolo in due parti vguali.



Sia la figura di lati di numero imparo Z, e dall'angolo A sia tirata la retta A E, che diuida il lato opposto DF in due parti vguali; e la figura di lati di numero paro sia X, nella quale dall'angolo A all'angolo opposto E [a] sia tirata la retta AE, ed ambedue le figure siano equilatere, ed equiangole. Dico prima, che l'angolo A è diuiso dalla retta AE in due parti vguali, e che gli angoli AEF, AED sono fra di loro vguali. Dall'angolo A à gli altri angoli si tirino le rette A G, A F, AD, AC. Perche i due lati AH, HG sono vguali à i due lati AB, BC, e l'angolo AHG è vguale all'angolo ABC; sarà la base AG [b] vguale alla base AC, l'angolo H A G vguale all'angolo B A C, e l'angolo H G A vguale all'angolo BCA. E perche gli angoli HGF, BCD, per ipotesi sono vguali, detrattone gli vguali angoli HGA, BCA, resta l'angolo AGF [c] vguale all'angolo ACD. Ne i triangoli AFG, ADC, i due lati AG, GF sono vguali a i due lati AC, CD, l'angolo AGF è mostrato vguale all'angolo AC D; sarà la base A F [d] vguale alla base AD; l'angolo G A F vguale all'angolo C A D; e l'angolo G F A vguale all'angolo CDA; che detratti da gli vguali angoli GFD, CDF, resta l'angolo A F E [e] vguale all'angolo A D E. Similmente ne i triangoli A F E, A D E, i due lati AF, FE sono vguali à i due lati AD, DE, l'angolo A F E è vguale all'angolo ADE, la base AE è commune, sarà [f] l'angolo F A E vguale all'angolo D A E; e l'angolo FEA vguale all'angolo D E A, e tutto l'angolo E A H, [g] vguale à tutto l'angolo EAB. Per la qual cosa la retta EA, nella figura Z, diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ed è perpendicolare [h] al lato D F, stante che gli angoli FEA, DEA sono vguali, cioè retti; e nella figura X la retta AE diuide gli angoli BAH, DEF in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 11. post.

b 4. del 1.

c 3. assiom.

d 4. del 1.

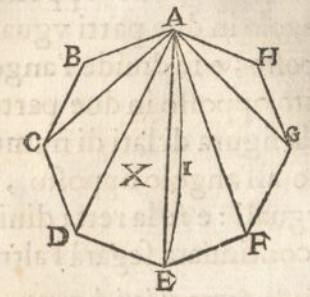
e 3. assioma.

f 4. del 1.

g 2. assiom.

h 10. defin. del 1.

Di nuouo, ſuppoſto che la retta AE ſeghi l'angolo BAH in due parti vguali. Dico che nella figura Z diuide il lato oppoſto DF in due parti vguali, & ad angoli retti; e nella figura X diuide l'angolo DEF in due parti vguali. Se la retta AE non diuide il lato DF, ò l'angolo DEF in due parti vguali, ſi diuida il lato DF in due parti vguali, come in I, e ſi tiri la retta IA, e nella figura X ſi tiri la retta EIA. Per quel che s'è dimoſtrato, la retta IA diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che la retta EA diuida l'angolo BAH in due parti vguali: non dunque nella figura Z la retta IA diuide il lato DF in due parti vguali in I, mà la retta AE lo diuide in due parti vguali in E. E nella figura X, la retta AEI non ſega gli angoli DEF, BAH in due parti vguali; mà la retta AE, che ſega l'angolo BAH in due parti vguali, ſegarà ancora l'angolo DEF in due parti vguali. Nella figura Z ſi dimoſtri, come prima ſi fece, che AD è vguale ad FA; è perche i lati AE, EF ſono vguali à i due AE, ED, e la baſe AF è vguale alla baſe AD, ſarà l'angolo AEF K *vguale all'angolo AED; e perciò la retta AE è perpendicolare al lato DF, ch'era da dimoſtrarſi.*



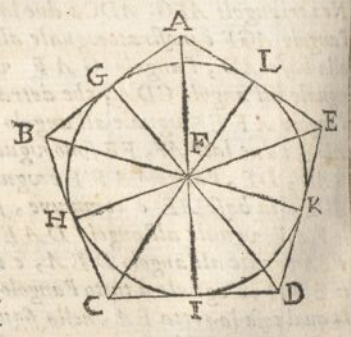
K 8. del 1.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

In vn dato pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcriuere vn circolo.

Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, nel quale s'habbia ad iſcriuere vn circolo.

Si diuidano due angoli proſſimi, come i due CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF; per l'antecedente Scolio, le rette AF, BF continuate ſegano i lati oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegaranno ſcambieuolmente in qualche punto F; ſi tirino le rette FE, FD, FC, e ſi conſiderino i due triangoli ABF, AEF, de' quali i due lati EA, AF ſono vguali alli due lati BA, AF; l'angolo EAF è vguale, per coſtruttione all'angolo BAF; ſarà la baſe FB [b] vguale alla baſe FE, e l'angolo AEF vguale all'angolo ABF. Dagli vguali angoli AED, ABC ſe ne leuino gli vguali angoli AEF, ABF, reſta l'angolo DEF [c] vguale all'angolo CBF; mà l'angolo CBF, per coſtruttione, è la metà dell'angolo ABC; ſarà l'angolo DEF la metà dell'angolo DEA; dal che la retta FE diuide l'angolo DEA in due



a 9. del 1.

b 4. del 1.

c 3. aſſi. oma

par-

parti vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli D, & C, in due parti vguali. Dal punto F à i lati del pentagono [d] si facciano cadere le perpendicolari FL, FG, FH, FI, FK. Ne i triangoli FLA, FGA, i due angoli FLA, FAL sono vguali à i due angoli FGA, FAG, il lato AF è commune, sarà AL [e] vguale ad AG, ed il lato FL vguale ad FG. Similmente ne i triangoli FGB, FHB, i due angoli FGB, FBG sono vguali à i due FHB, FBH, il lato FB è commune, sarà il lato FG vguale ad FH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'vna delle rette FI, FK è vguale ad FL, e perciò tutte le rette FL, FG, FH, FI, FK [f] sono frà di loro vguali, ed il circolo descritto intorno al centro F passarà per li punti G, H, I, K, L. Finalmente perche i lati del pentagono fanno angoli retti con li semidiametri FL, FG, FH, FI, FK, per il Corollario alla 16. propos. del 3. toccano il circolo ne i punti G, H, I, K, L. Per la qual cosa il circolo GHIKL è iscritto nel dato pentagono, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

d 12. del 1.

e 26. del 1.

f 1. assiom.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Nell'istesso modo si può iscriuere vn circolo in qualunque data figura equilatera, & equiangola; cioè sempre si diuidono due angoli più prossimi in due parti vguali, ed il concorso delle rette, che diuidono i due angoli si fà dentro della figura; stante che, in quelle di lati di numero imparo, le rette, che diuidono gli angoli in due parti vguali, per lo Scolio alla 12. propositione, segano i lati opposti in due parti vguali, e perciò si segano scambieuolmente dentro della figura; ed in quelli di lati di numero paro, le rette, che diuidono i due angoli in due parti vguali, diuidono ancora gli angoli opposti in due parti vguali, e perciò si segano scambieuolmente dentro della figura. Poi dal punto del concorso si facciano cadere [a] rette linee perpendicolari à i lati della figura, e fatto centro nel detto concorso, coll'interuallo d'vna delle dette perpendicolari, si descriua il circolo, che sarà quello iscritto dentro della proposta figura.

a 12. del 1.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Intorno ad vn dato pentagono equilatero, & equiangolo, circoscriuere vn circolo.

Sia il dato pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, intorno al quale s'habbia da circoscriuere vn circolo. Si diuidano due angoli più prossimi, come CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF, le quali continuate concorreranno dentro del pentagono ABCDE, stante che ogn'vna, se si continua, sega il lato opposto in due patti vguali, come fù dimostrato nello Scolio alla 12. propos.; dal punto F si tirino le rette FE, FD, FC; e si considerino i due triangoli FAE, FAB, de'quali i due lati FA, AE sono vguali à i due lati FA, AB; l'an-



a 9. del 1.

golo FAE, per costruttione, è vguale all'angolo FAB, sarà la base F E [b] vguale alla base FB, e l'angolo FEA vguale all'angolo FBA. E perche gli angoli CBA, DEA sono frà di loro vguali, e l'angolo FBA è la metà dell'angolo CBA; sarà l'angolo FEA la metà dell'angolo DEA, e perciò la retta F E diuide l'angolo DEA in due parti vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli BCD, CDE in due parti vguali. Si considerino i triangoli ABF, FBC, de'quali i due lati AB, BF sono vguali à i due lati CB, BF, l'angolo CBF è vguale all'angolo ABF, sarà la base CF [c] vguale alla base FA. Finalmente, perche gli angoli del pentagono ABCDE sono frà di loro vguali, le loro metà [d] saranno frà di loro vguali; e perciò l'angolo FAB è vguale all'angolo FBA, ed il lato FA [e] è vguale al lato FB: mà il lato FB è dimostrato vguale ad FE, e la retta FA vguale ad FC; le rette FE, FA, FB, FC [f] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà che la retta FD è vguale ad FE; si che fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, [g] si descriua il circolo, quello passarà per li punti B, C, D, E, A, e sarà circoscritto il circolo ABCDE, intorno al dato pentagono equilatero, & equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



b 4. del 1.
c 4. del 1.
d 7. assiom.
e 6. del 1.
f 1. assioma.
g 3. postul.

SCOLIO DEL CLAVIO.

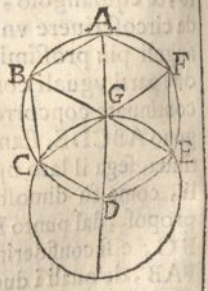
Nell'istesso modo si può circoscriuere il circolo intorno à qualunque figura equilatera, ed equiangola, cioè col diuidere due angoli più prossimi in due parti vguali, e facendo centro nel concorso di quelle rette, che diuidono gli angoli, coll'interuallo d'vna di esse, si descriua il circolo, che sarà circoscritto intorno alla data figura equilatera, ed equiangola.

PROBLEMA XV. PROPOSITIONE XV.

Dentro d'vn dato circolo iscriuere vn esagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCD, il di cui centro G, dentro al quale s' habbia ad iscriuere vn esagono equilatero, ed equiangolo.

Si tiri [a] il diametro A D, e fatto centro in D, coll' interuallo DG, [b] si descriua il circolo CGE; segarà il dato circolo come in C, & E; si tirino le rette EG, C G, [c] e si prolunghino [d] fino alla circonferenza in B, ed F; si tirino le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA, e sarà iscritto nel dato circolo l'esagono ABCDEF. Dico, che questo è equilatero, ed equiangolo.



a 1. del 3.
b 3. postul.
c 1. post.
d 2. post.

Per

Per la definitione del circolo le rette CG, GD, GE sono frà di loro vguali; e per l'istessa ragione le tre rette DC, DG, DE sono frà di loro vguali, per la qual cosa i due triangoli GCD, GDE [e] sono equilateri, e perciò [f] equiangoli; e perche tre angoli di qualsiuoglia triangolo sono vguali [g] à due angoli retti, sarà tanto l'angolo DGC, quanto l'angolo DGE, la terza parte di due angoli retti, e tutti due insieme, cioè l'angolo CGE, sarà le due terze parti di due angoli retti; mà i due angoli EGC, EGF [h] sono vguali à due angoli retti, sarà l'angolo EGF la terza parte di due angoli retti; dal che i trè angoli FGE, EGD, DGC sono frà di loro vguali; mà gli angoli al vertice [K] sono frà di loro vguali; li sei angoli dunque nel centro dell'esagono sono frà di loro vguali, e gli archi opposti [l] sono frà di loro vguali; mà gli archi vguali [m] sono sotteſi da rette linee vguali; saranno i lati AB, BC, CD, DE, EF, FA, frà di loro vguali, e l'esagono iscritto sarà equilatero. Finalmente perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente se gli aggiunga l'arco DEFA; tutto l'arco CDEFA [n] sarà vguale all'arco DEFAB; e gli angoli opposti nella circonferenza, cioè gli angoli DCB, CBA, [o] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli angoli dell'esagono ABCDEF, sono frà di loro vguali. Per la qual cosa l'esagono iscritto sarà equilatero, ed equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 23. defin. del 1.
f 5. del 1.
g 32. del 1.
h 13. del 1.
K 15. del 1.
l 26. del 3.
m 29. del 3.
n 2. assioma.
o 27. del 3.

COROLLARIO.

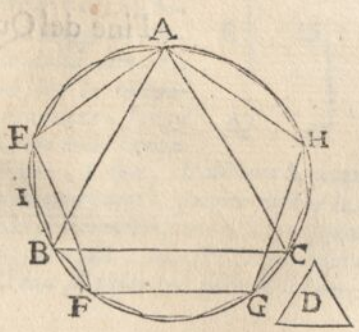
Perche DE, lato dell'esagono, è vguale alla retta DG semidiametro del circolo; sarà manifesto, ch'il lato dell'esagono è vguale al semidiametro del circolo, nel quale è iscritto.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Nel dato circolo iscriuere vn quindecagono equilatero ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABC, nel quale s' habbia ad iscriuere vn quindecagono equilatero, ed equiangolo.

Si descriua [a] qualunque triangolo equilatero D, il quale per la quinta propositione del primo libro sarà equiangolo; s'iscriua nel circolo ABC [b] il triangolo ABC equiangolo al triangolo D, quello sarà [c] equilatero; e perche rette linee vguali [d] detraggono archi vguali, sarà l'arco sotteso dal lato AB, la terza parte di tutta la circonferenza del circolo, e perciò di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue essere quindici, la retta AB ne sottenderà



a 1. del 1.
b 2. del 3.
c 6. del 1.
d 28. del 3.

cinque.

e 11. del 4. cinque. Di nuouo s'iſcriua nel circolo ABC e il pentagono equilatero, & equiangolo AEFGH in modo, che l'angolo A del pentagono termini nell'angolo A del triangolo A B C; eſſendo i cinque lati del pentagono frà di loro vguali, ſottenderanno f archi vguali, e perciò l'arco ſotteſo dal lato AE ſarà la quinta parte di tutta la circonferenza del circolo. Si che di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue eſſere quindici, l'arco AE ne conterrà tre; mà ſi diſſe che l'arco AB, ne conteneua cinque, ſe dall'arco AB ſe ne detrae l'arco AE, reſta l'arco EB, il quale conterrà due di quelle parti: diuiſo l'arco EB g in due parti vguali in I, l'arco IB ſarà la decimaquinta parte di tutta la circonferenza del circolo; ſi tiri la retta IB, ſarà IB, il lato del quinto decagono; s'addattino h nel dato circolo altre quattordici rette linee vguali ad IB, che ſottenderanno K gli altri quattordici archi vguali all'arco IB; e ſarà iſcritto il quinto decagono che ſi cerca. Finalmente perche l'arco EB contiene due di quelle quindici parti, nelle quali è diuiſa tutta la circonferenza del circolo, il rimanente EACB ſarà tredici delle medeſime parti. Similmente perche IF contiene due di quelle quindici parti, il reſtante I A C F, ne conterrà tredici; e perciò l'arco EACB ſarà vguale all'arco I A C F; dalche gli angoli oppoſti FBI, BIE l ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli altri angoli ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa nel dato circolo s'è iſcritto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtraſi.

g 30. del 3.

h 1. del 4.

K 28. del 3

l 27. del 3.



Fine del Quarto Elemento.

EVCLI-

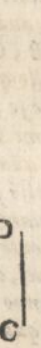
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVINTO.

DEFINITIONI.

I.

La quantità minore si dice esser parte della maggiore, quando la minore misura giustamente la maggiore.

DELLE quantità ineguali, la minore si dice misurare giustamente la maggiore all'hora quando, diuisa la maggiore nelle parti vguali, alla minore non soprauanza cos'alcuna. Come se siano espoſte le quantità ineguali AB, CD, del medesimo genere, e sia AB maggiore di CD; se concepiremo diuisa la quantità AB nelle parti vguali alla quantità CD, che siano AE, EF, FB, e che non soprauanzi cos' alcuna; la quantità CD si dirà misurare giustamente la quantità AB; ed all'incontro la quantità AB si dirà essere giustamente misurata dalla minore CD. Ma se, oltre le parti AE, EF, FB, soprauanzasse qualche quantità minore di CD; all'hora la minore CD, non misura giustamente la maggiore AB, ne la maggiore AB è misurata giustamente dalla minore CD. Hor douendosi in questo quinto Libro fare la comparatione delle quantità rispetto alle loro grandezze, spiega Euclide che cosa douremo intendere, quando nelle comparationi da farsi lui esprime questa voce, Parte, e dice, ch'all'hora la quantità minore comparata alla maggiore, la chiama parte, quando misura la maggiore giustamente; e così la minore CD si chiamerà parte della maggiore AB, quando misurerà giustamente la maggiore AB. Ma se CD non misura giustamente la maggiore AB, all'hora CD non si chiamerà parte della maggiore AB.



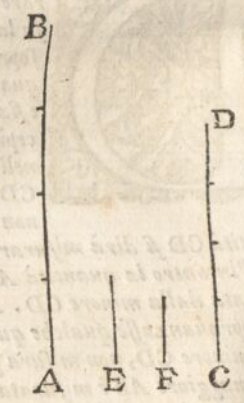
II.

La quantità maggiore si dice essere multiplice della quantità minore, quando la maggiore è misurata giustamente dalla minore.

Quando si fà la comparatione frà due quantità ineguali, ò si fà la comparatione dalla minore alla maggiore, ouero dalla maggiore alla minore: facendosi la comparatione dalla minore alla maggiore, se la minore misura giustamente la maggiore, la minore, per la definitione antecedente, si dice esser parte della maggiore. Ma facendosi la comparatione dalla maggiore alla minore, se la maggiore sarà misurata giustamente dalla minore, la maggiore si dirà esser multiplice della minore.

SCOLIO.

Le quantità, che sono misurate vgualmente da altretante quantità, si dicono essere vguali multiplici di quelle quantità, dalle quali sono vgualmente misurate.



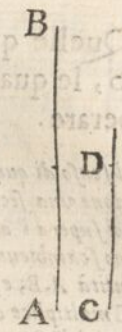
Come se le quantità AB, CD fossero misurate vgualmente dalle quantità E, ed F, cioè che la quantità E misuri tante volte AB, senza che soprauanzi cos'alcuna, per quante volte la quantità F misura CD, senza auanzo alcuno; in tal caso le quantità AB, CD, si dicono essere vguali multiplici delle quantità E, ed F. Dond'è manifesto, che se saranno proposte due, ò più quantità, come E, F, e si vogliano ritrouare altretante quantità, che siano vgualmente multiplici delle proposte, basta à trouare altretante quantità, come AB, CD, che siano vgualmente misurate dalle proposte E, F; e per quel, che s'è detto, le quantità AB, CD, saranno vgualmente multiplici delle quantità E, F; ed il medesimo si farà, se le quantità proposte saranno più di due.

III.

Proportione è la scambieuole relatione frà due quantità del medesimo genere, rispetto alle loro grandezze.

Quan-

Quando si fà la comparatione fra due terminate quantità del medesimo genere, come linea à linea, superficie à superficie, corpo à corpo, moto à moto, tempo à tempo, tono à tono &c. in riguardo à quello, che appartiene alle loro grandezze, cioè secondo quello, che vna quantità è maggiore, è vguale, ò minore dell'altra, tal relatione si chiama proportione. Come facendosi la comparatione fra la quantità terminata AB, e la quantità terminata CD, del medesimo genere, e trouandosi, che AB sia misurata dalla quantità CD, verbi gratia, due volte, si dice ordinariamente la quantità AB essere il doppio della quantità CD; cioè AB rispetto alla quantità C D è il doppio. Hor in vece di dire la relatione, che hà la quantità AB rispetto alla quantità CD, diremo la proportione, che hà la quantità AB alla quantità CD, essere il doppio; di modo che quella voce proportione non esprime altro, se non che quella relatione, ò respettiuità, ch'è fra l'vna, e l'altra quantità, esprimendo come l'vna è maggiore, ò minore, ouero vguale all'altra.

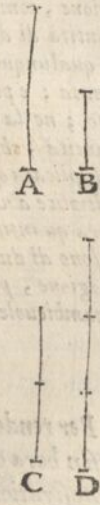


Nota che le quantità, frà le quali si fa la comparatione, si chiamano termini della proportione; come se si farà la comparatione frà le quantità AB, CD, le medesime AB, CD si chiamano termini della proportione, e la quantità AB nominata nel primo luogo, si chiama primo termine, ouero antecedente; e la quantità CD, nominata nel secondo luogo, si chiama secondo termine, ouero conseguente. E così facendosi la comparatione della quantità CD alla quantità AB, sarà CD il primo termine, ò antecedente, & AB sarà il secondo termine, ò conseguente.

I V.

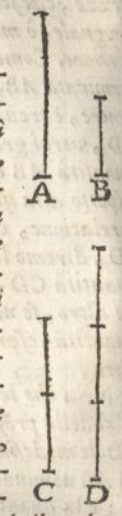
Analogia, ò proportionalità, è la similitudine delle proportioni.

Le proportioni si dicono essere simili fra di loro, quando sono fra di loro vguali, e si dicono ancora essere le medesime; cioè l'istesso è dire, la proportione, ch'è fra la quantità A, e la quantità B, è simile alla proportione, ch'è fra la quantità C alla quantità D; quanto è dire, la proportione della quantità A alla quantità B, è vguale alla proportione della quantità C alla quantità D; e l'istesso è dire, la proportione di A à B, è la medesima, che la proportione di C à D, ouero che A à B è come C à D. Supposto questo, chiaramente si vede, ch'Euclide in questa difinitione, non hà voluto intender altro, se non che dare il nome alle simili, ò vogliamo dire, vguali proportioni, comparate fra di loro; come se la proportione della quantità A alla quantità B fosse vguale alla proportione, ch'è fra la quantità C, e la quantità D. Questa vgualità, ò similitudine, che sarebbe fra la proportione di A à B, e la proportione di C à D, si chiama Analogia, ouero Proportionalità.



V.

Quelle quantità si dicono hauere proportione frà di loro, le quali multiplicate si possono scambieuolmente superare.



Il senso di questa definitione è, che di due quantità, multiplicandone vna secondo tutte le multiplicationi, se vno di quei multiplici supera l'altra quantità, diremo che quelle due quantità hanno scambieuolmente proportione, come se fossero proposte le quantità A, B, e si voglia vedere se hanno proportione; si prenda C multiplice di B, secondo qualunque multiplicatione; se la quantità C supera A, diremo che A, & B hanno scambieuolmente proportione. Se poi C non è maggiore di A; si prenda altro multiplice maggiore di C, come D, e se questo non fosse maggiore di A, bisogna concepirne vn altro maggiore di D, e con quest'ordine per tutte le multiplicationi. Se in tutte le multiplicationi si peruerrà à qualche multiplice, che sia maggiore di A, concluderemo, che le quantità A, B, hanno scambieuole proportione; ma se niuno degl'infiniti multiplici è maggiore di A, le quantità A, B, non hauranno scambieuole proportione: e questo sia detto per modo d'esempio; poiche questa definitione non è fatta per trouare, se fra due quantità proposte sia, ò non sia proportione, secondo il modo tenuto antecedentemente; perche essendo infiniti i multiplici, se fra due quantità non cadesse proportione alcuna mai si peruerrebbe alla notitia che fra quelle quantità non cade proportione alcuna; ma è fatta accioche si concepisca di qual natura siano le quantità, che hanno proportione, come sono le quantità terminate del medesimo genere; e di qual natura siano quelle, che non hanno proportione, come sono le quantità indeterminate comparate alle terminate, e le quantità di diuerso genere; poiche multiplicandosi vna quantità terminata per qualunque gran multiplice, mai produrrà quantità maggiore all'indeterminata; e perciò le quantità terminate non hanno proportione all' indeterminate; ne la linea multiplicata secondo qualunque gran multiplice, produrrà quantità, che si possa dire maggiore di qualunque picciola superficie, e così multiplicata ogni gran superficie per qualunque gran multiplice, cioè preso il multiplice d'vna superficie, secondo qualunque gran multiplicatione, mai produrrà quantità maggiore di qualunque piccioliſſimo corpo; e così fra le cose, che sono di diuerso genere non cade proportione alcuna. E di qui è manifesta la ragione, perche Euclide nella terza definitione dice, che la proportione è la scambieuole relatione fra due quantità del medesimo genere.

ANNOTATIONE.

Per render chiara, ed intelligibile la seguente definitione, stimata sin hora oscura, e cauata da principio remoto, premetto le seguenti dimostrationi.

PRI-

PRIMA.

Se due quantità ſono miſurate giuſtamente da vn altra quantità ; ſe ſono miſurate vgualmente , ſono frà di loro vguali ; e ſe non ſono miſurate vgualmente , quella , ch'è miſurata più volte , ſarà maggiore .

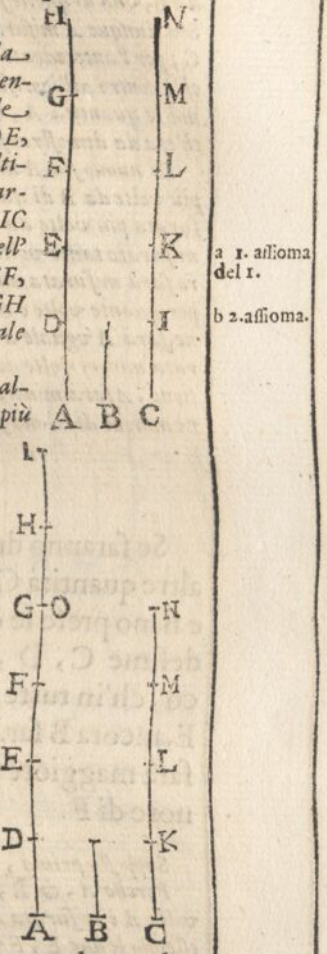
Siano le quantità A , & C miſurate giuſtamente dalla quantità B , e ſuppoſto prima , che ſiano miſurate vgualmente . Dico che A è vguale alla quantità C . Si diuidano le quantità A, & C nelle parti vguali à B, che ſiano AD, DE, EF, FG, GH , & CI, IK, KL , LM, MN ; ſarà la moltitudine delle parti in AH vguale alla moltitudine delle parti in CN . Hor eſſendo AD vguale alla quantità B , & IC vguale alla medeſima B , ſarà AD [a] *vguale ad IC . Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà , che DE è vguale ad IK, che EF, è vguale à KL , che FG è vguale ad LM , e ſimilmente GH vguale ad MN . Per la qual coſa tutta AH* [b] *ſarà vguale à CN , ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo .*

a 1. aſſioma del 1.

b 2. aſſioma.

Di nuouo nella figura ſeguente non ſiano A , & C vgualmente miſurate dalla quantità B , mà A I ſia miſurata più volte da B di quello ch'è miſurata CN . Dico che A I è maggiore di CN .

Si diuida A nelle parti vguali à B , e ſiano quelle AD , DE, EF , FG , GH, HI ; e ſi diuida C nelle parti vguali à B , che ſiano CK, K L, L M, M N . Si prendano in AI tante parti quante ne ſono in CN , che ſiano quelle notate in AO . Perche tante parti ſono in A O per quante ne ſono in C N , le due AO , C N ſaranno miſurate vgualmente da B ; e , per quel che s'è dimoſtrato , le quantità A O , C N , ſono frà di loro vguali . E perche A I , per ipoteſi , contiene maggior numero di parti di quelle che ſono in C N , conterrà ancora maggior numero di parti di quelle , che ſono in C O . Per la qual coſa A I ſarà maggiore di A O ; mà A O è vguale à CN, ſarà AI maggiore di CN, come fù propoſto dimoſtrare .



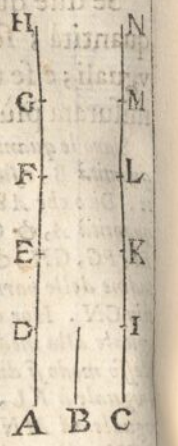
SECONDA.

Se due quantità ſono miſurate giuſtamente da vn altra quantità ; ſe quelle due ſono vguali , ſaranno miſurate vgualmente ; e ſe ſono ineguali , la maggiore ſarà miſurata più volte , che la minore .

Siano le due quantità A, & C, le quali ſiano miſurate giuſtamente dalla quantità B . Dico, che ſe ſono frà di loro vguali, ſaranno miſurate vgualmen-

te da B; e se sono ineguali, la maggiore sarà misurata più volte da A, che la minore.

Supposto prima, che A sia vguale à C. Dico che tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata dalla medesima B. Se A, & C non sono misurate vgualmente da B, vna di quelle sarà misurata più volte, che l'altra. Sia dunque A misurata più volte di quello, ch'è misurata C; per l'antecedente dimostratione A sarà maggiore di C, ch'è contro all'ipotesi; non dunque A è misurata più volte, mà le quantità A, & C, sono vgualmente misurate da B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo sia A maggiore di C. Dico che A è misurata più volte da B di quello, ch'è misurata C. Se A non è misurata più volte da B di quello, ch'è misurata C, ò sarà misurata tante volte, per quante volte è misurata C; ouero sarà misurata minori volte. Se A è misurata tante volte, per quante volte è misurata C, per l'antecedente dimostratione, sarà A vguale à C, ch'è contro all'ipotesi; se poi A è misurata minori volte da B di quello, ch'è misurata C, per l'antecedente dimostratione, A sarà minore di C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A è vguale, ne minore di C, mà sarà maggiore, ch'era da dimostrarsi.

TERZA.

Se saranno due quantità A, B, vguali multiplici di due altre quantità C, D, secondo qualunque multiplicatione; e siano prese le quantità E, F, vguali multiplici delle medesime C, D, secondo qualunque multiplicatione. Dico, ch'in tutte l'infinite multiplicationi, se A è vguale ad E, ancora B sarà vguale ad F; se A è maggiore di E, ancora B sarà maggiore di F: e se A è minore di E, ancora B sarà minore di F.

Supposto prima, che A sia vguale ad E. Dico che B sarà vguale ad F.

Perche A, & B, per ipotesi, sono vguali multiplici delle due C, D, tante volte A è misurata da C, per quante volte B è misurata da D. Similmente essendo le due E, F vguali multiplici delle due C, D, tante volte E sarà misurata da C, per quante volte F è misurata da D. In oltre perche A si suppone vguale ad E, per l'antecedente dimostratione, tante volte A sarà misurata da C, per quante volte E è misurata dalla medesima C; ma la quantità A è misurata da C tante volte, per quante volte B è misurata da D, sarà B misurata da D tante volte, per quante volte E è misurata da C; per ipotesi E è misurata da C tante volte, per quante volte F è misurata da D, sarà B misurata tante volte da D, per quante volte F è misurata da D; e per la

pri-

prima dimostratione di questo libro, sarà B vguale ad F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che A sia maggiore di E. Dico che B sarà maggiore di F.

Perche A, ed E, per ipotesi, sono misurate giustamente da C: e si suppone A maggiore di E, per l'antecedente dimostratione sarà A misurata più volte da C di quello, ch'è misurata E dalla medesima C. Ma A, per ipotesi, è misurata tante volte da C, per quante volte B è misurata da D; sarà B misurata più volte da D di quello, che E è misurata da C. S'è mostrato E essere misurata tante volte da C, per quante volte F è misurata da D; perciò B sarà misurata più volte da D di quello, ch'è misurata F dalla medesima D; e per la prima dimostratione, B sarà maggiore di F.

Finalmente, supposto che A sia minore di E. Dico che B sarà minore di F.

Perche A è minore di E, per l'antecedente dimostratione, sarà A minori volte misurata da C di quello, che E è misurata da C; ma s'è dimostrato che A è misurata da C tante volte, per quante volte B è misurata da D; sarà B minori volte misurata da D, di quello che E è misurata da C. Fù similmẽte dimostrato essere tante volte E misurata da C, per quante volte F è misurata da D, sarà B misurata minori volte da D di quello, che F è misurata dalla medesima D; e per la prima dimostratione, B sarà minore di F, ch'era da dimostrarsi.

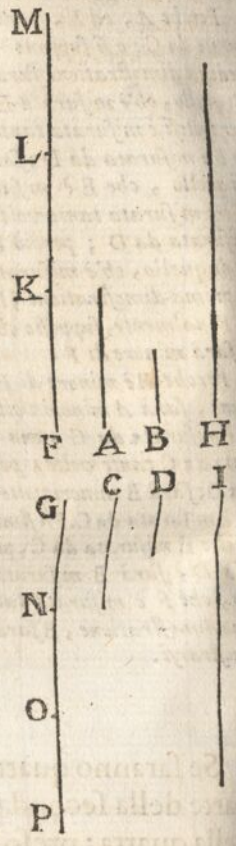


QVARTA.

Se saranno quattro quantità, e la prima è multiplice, ò parte della seconda, come la terza è multiplice, ò parte della quarta; preso gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; come ancora preso gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione. Dico che sempre se il multiplice della prima è vguale al multiplice della seconda, ancora il multiplice della terza sarà vguale al multiplice della quarta: se il multiplice della prima è maggiore del multiplice della seconda, ancora il multiplice della terza sarà maggiore del multiplice della quarta; e se il multiplice della prima è minore del multiplice della seconda, ancora il

multiplice della terza sarà minore del multiplice della quarta.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, delle quali la prima A, e la terza C, siano vgualmente multiplici, ò parti della seconda B, e quarta D, cioè che A sia multiplice, ò parte di B, come C è multiplice, ò parte di D; e preso gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano F, & G: similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D, secondo qualunque multiplicatione, che siano H, ed I. Dico che se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I: se F è maggiore di H, ancora G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I. Supposto prima che A, & C, siano vguali multiplici di B, & D.



Perche F, & G sono vguali multiplici di A, & C, tante volte F sarà misurata da A, per quante volte G è misurata da C. Si diuida la quantità F nelle parti vguali ad A, e siano FK, KL, LM; e si diuida la quantità G nelle parti vguali à C, che siano GN, NO, OP. Perche FK e vguale ad A, per la seconda dimostratione, tante volte FK sarà misurata da B, per quante volte A è misurata dalla medesima B. Nell'istesso modo si prouerà, che tante volte GN è misurata da D, per quante volte C è misurata dalla medesima D. Mà la quantità A, per ipotesi, è misurata da B tante volte, per quante volte C e misurata da D; sarà F K misurata tante volte da B, per quante volte GN è misurata da D. In oltre perche KL, LM, ogn'vna è vguale ad FK; e le parti N O, O P ogn'vna è vguale à G N; tante volte KL sarà misurata da B per quante volte N O è misurata da D; e tante volte LM sarà misurata da B, per quante volte OP è misurata da D. Per la qual cosa tutta FM sarà tante volte misurata da B, per quante volte GP è misurata da D; e perciò FM, GP sono vguali multiplici delle due B, D. Mà, per ipotesi, le due H, I, sono vguali multiplici delle medesime B, D; per l'antecedente dimostratione, se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I; se F è maggiore di H, anco G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I, come fù proposto dimostrare.

Sia di nuouo A tal parte di B, quale C è parte di D; saranno le due B, & D vgualmente multiplici di A, & C; ed operandosi come sopra s'e fatto, si dimostrerà, che H, ed I, sono vguali multiplici di A, & C: mà, per ipotesi, F & G, sono vguali multiplici delle medesime A, & C: per l'antecedente dimo-

stratio-

ſtratione ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I: ſe F è maggiore di H ancora G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I. E perche F, & G ſono vguali multiplici di A, & C, ſecondo qualunque multiplicatione, ed anco H, ed I ſono vguali multiplici di B, & D, ſecondo qualunque multiplicatione; in conſeguenza in ogni multiplicatione ſempre ſuccederà, che ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I: ſe F è maggiore di H, ancora G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I, ch'era da dimoſtrarſi.

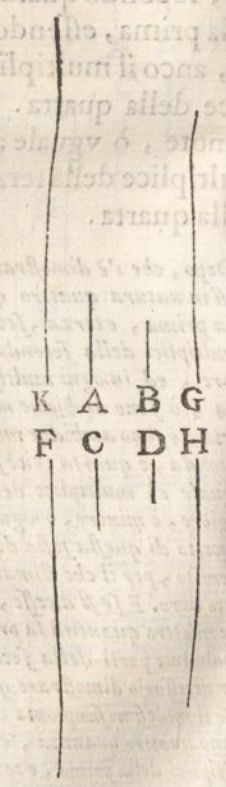
V I.

All' hora di quattro quantità la prima alla ſeconda ſi dirà hauere l'iſteſſa proportione, quale hà la terza alla quarta, quando preſi gli vguali multiplici della prima, e terza quantità, ſecondo qualunque multiplicatione; ed anco preſi gli vguali multiplici, della ſeconda, e quarta quantità, ſecondo qualunque multiplicatione; il multiplice della prima, eſſendo maggiore del multiplice della ſeconda, anco il multiplice della terza ſia maggiore del multiplice della quarta. Ouero ſe il multiplice della prima è minore, ò vguale al multiplice della ſeconda, anco il multiplice della terza ſia minore, ò vguale al multiplice della quarta.

Dopo, che s'è dimoſtrato nell'annotatione, all'antecedente numero quarto, darſi in natura quattro quantità, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; e preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione; ſempre, ed in ogni multiplicatione, gli vguali multiplici della prima, e terza, ò ſono ambidue maggiori de gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta: ò ſono ambidue minori; ò ambidue vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; cioè ſe il multiplice della prima è maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della ſeconda; anco il multiplice della terza ſarà ò maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della quarta; non ſarà più oſcuro il concetto di queſta ſeſta definitione, ne potrà dirſi, che ſia cauata da principio remoto, per il che ſtimauano non dimoſtrate tutte le propoſitioni di queſto quinto libro. E ſe ſi diceſſe, che la dimoſtratione da me fatta milita, quando delle quattro quantità la prima, e terza ſono vgualmente multiplici, ouero vgualmente parti della ſeconda, e quarta: gli riſpondo hora per ſempre, non eſſer neceſſario dimoſtrare quali ſiano tutte le quantità, che poſſono cadere ſotto il medeſimo ſimptoma, baſtando à me hauer dimoſtrato, ch'in natura ſi danno quattro quantità, che cadono ſotto tal ſimptoma; cioè che gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, ò ſono vguali, ò ſono minori, ò maggiori, come ſopra s'è detto, de gli vguali mul-

ti-

tiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione; per poter poi definire, come fà Euclide, che quando nelle cose seguenti hauremo quattro quantità, ed in qualche modo si proverà, che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, sono ambidue maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: la proportione della prima alla seconda la chiameremo essere l'istessa, ò vguale, alla proportione, ch'è dalla terza alla quarta. Ed all'incontro, quando si dirà la prima alla seconda hauere l'istessa proportione, che la terza alla quarta, non si debba intendere altro, se non, che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, cioè secondo tutte le multiplicationi, siano sempre ambidue ò maggiori, ò minori, ouero vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo tutte le multiplicationi. Come per essempio, siano esposte le quattro quantità A, B, C, D, e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, F. Similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D secondo qualunque multiplicatione che siano le due G, & H: e proueremo in qualche modo, che se K è vguale à G, ancora F è vguale ad H; e se K è maggiore, ò minore di G, ancora F è maggiore, ò minore di H; all'hora la proportione di A à B, la chiameremo essere la medesima qual'è la proportione di C à D. Ed all'incontro, se supporremo, che la prima A alla seconda B habbia l'istessa proportione, quale hà C à D, concepiremo questa proportionalità, ò Analogia essere di quella natura di proportione, che gli vguali multiplici K, F, presi secondo qualunque multiplicatione, ambidue sono vguali, ò minori, ò maggiori, de gli vguali multiplici G, H, presi parimente secondo qualunque multiplicatione; cioè che, se K è maggiore di G, ancora F è maggiore di H; e se K è vguale, ò minore di G, ancora F è vguale, ò minore di H.



Qui è d'auertirsi, che haurei potuto prouare l'antecedente quarta dimostratione, seruendomi della terza propositione di questo quinto libro, mà per non turbare in cos'alcuna l'ordine tenuto da Euclide col porre le definitioni frà le propositioni, mi sono contentato dimostrarlo con modo poco differente à quello, che tiene Euclide in essa terza propositione. E quì mi si porge occasione accennare l'artificio d'Euclide in questa gran composititione, il quale in tutti questi Elementi non s'è seruito d'alcun principio, che non fosse totalmente noto, ò pure fosse facile à dimostrarsi con altre propositioni dimostrate, mediante le propositioni poste prima di seruirsi di quel princi-

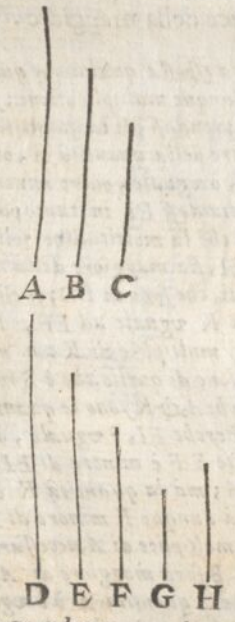
pio. E perche simili propositioni, che poteuano dimostrare tal principio, non sono state da lui stimate propriamente Elementi, non s'è curato connumerarle frà le propositioni di questi elementi, e sarebbe improprio fare giuditio diuerso d'vn tale Autore.

Deuesi notare, che l'antecedente sesta definitione non serue per conoscere quando sono date quattro quantità; se quelle siano nella medesima proportione; perche il modo di conoscere, se quattro date quantità habbiano l'istessa proportione, si haurà nella 16. propos. del sesto libro, come à suo luogo si farà noto; e questa sesta definit. serue solo per spiegatione di quello, ch'intende Euclide, e che noi douemo intendere, quando nelle cose seguenti si dirà, la proportione della prima alla seconda quantità è l'istessa, che la proportione della terza alla quarta quantità; e quando dalle cose seguenti haueremo cauato il modo da conoscere, se di quattro quantità la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta, douremo concepire, essere di quella natura di medesima proportione, che cade sotto le conditioni poste da Euclide nella sesta definitione.

VII.

Quelle quantità, che hanno la medesima proportione, si chiamano quantità proportionali.

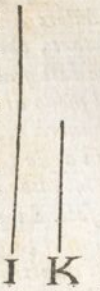
Dopo, ch'Euclide hà definita l'vgualità delle proportioni, cioè hà spiegato quello, che douemo intendere, quando si dirà due proportioni essere le medesime, ò vguali, ouero simili; hà voluto anco dare il nome à quelle grandezze, frà le quali cadono queste vguali proportioni. Per essempio se saranno tre quantità come A, B, C, e la prima A alla seconda B haurà l'istessa proportione, quale hà la quantità B alla quantità C; le tre grandezze A, B, C si chiameranno quantità proportionali. Similmente se le quantità saranno più di tre, come D, E, F, G, H, e la prima D alla seconda E hà l'istessa proportione, quale hà la quantità E ad F; e la proportione di E ad F è l'istessa, che la proportione di F à G; & F à G hà l'istessa proportione, quale hà G ad H; le quantità D, E, F, G, H, si chiamano quantità proportionali. E perche le proportioni antedette continuamente sono le medesime, cioè sono vguali, tale analogia si chiama continua; e per l'auuenire le grandezze D, E, F, G, H si chiameranno quantità continue proportionali.



Nota, che se le proportioni, che cadono frà quattro grandezze, non sono continuamente vguali, purche la proportione, che cade frà due di quelle, sia vguale alla proportione, ch'è frà l'altre due, quelle quattro quantità si dicono ancora quantità proportionali.

Co-

Come per essempio nelle quattro quantità I, K, L M, se la proportione, che hà la grandezza I alla grandezza K sia la medesima, cioè vguale alla proportione, che hà L ad M; benche la proportione di K ad L, non sia vguale alla proportione di I à K, ouero di L ad M: con tutto ciò le quattro grandezze I, K, L, M si chiamano quantità proportionali; e tale analogia si dice discontinua, stante che non è da per tutto la medesima. Nelle cose seguenti dunque quando diremo, che quattro quantità sono proportionali, concepiremo, che la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e quando diremo, che le quantità sono continue proportionali, concepiremo la prima alla seconda essere, come la seconda alla terza; e la seconda alla terza, come la terza alla quarta; e così la quarta alla quinta, e con quest'ordine in infinito.



QVINTA

PROBLEMA

Ritrouare due quantità ineguali, del medesimo genere, delle quali preso il multiplice della maggiore, secondo qualunque multiplicatione maggiore; il multiplice della minore sia minore del multiplice della maggiore.

Sia esposta qualunque quantità, A, e sia presa B multiplice di A secondo qualunque multiplicatione; si diuida B nelle parti vguali ad A, che siano BC, CD; prendasi poi la quantità E del medesimo genere della quantità A, ouero B, e facciasi EI, ò vguale, ouero minore della quantità A; diuidasi EI in tante parti vguali in modo, che la moltitudine delle parti, che sono in EI, sia maggiore della moltitudine delle parti, che sono in BD; si esponga poi la quantità K vguale ad EF, sarà la quantità EI multiplice di K con maggiore multiplicatione di quello, che è B multiplice di A. Dico, che A, & K sono le quantità, che si cercano.



Perche EI, è vguale, ò minore di A, e la parte EF è minore di EI, sarà EF minore di A; mà la quantità K è vguale ad EF, sarà dunque K minore di A. Inoltre Perche B è multiplice di A, necessariamente la quantità B sarà maggiore di A; mà per costruttione la quantità A ò è vguale, ò maggiore di EI, inconseguenza la quantità B sarà maggiore di EI, e perciò la quantità EI è multiplice della minore K con maggior multiplicatione di quello, che B è multiplice della maggiore A, & è minore del multiplice B; donde le quantità, che si cercano, sono le notate A, & K, ch' era da farsi, e dimostrarsi.

SESTA

SESTA PROBLEMA

Ritrouare quattro quantità, ò del medesimo genere, ò pure la prima sia del medesimo genere della seconda, e la terza del medesimo genere della quarta in modo, che presi gli vguali multiplici della prima, e terza secondo qualunque multiplicatione, e presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta con maggior multiplicatione di prima. Se il multiplice della prima supera il multiplice della seconda, il multiplice della terza non superi il multiplice della quarta.

Per l'antecedente problema si trouino due quantità ineguali del medesimo genere, come A, & B, in modo che preso F multiplice della maggiore A, secondo qualunque multiplicatione, e preso H, multiplice della minore B, con maggior multiplicatione, la quantità H sia minore di F; si esponghino poi due altre quantità, ò del medesimo genere con le quantità A, & B, ouero siano del medesimo genere frà loro, e quelle siano C, & D, in modo che C, ò sia vguale, ò minore di D. Dico, che le quantità A, B, C, D, sono quelle, che si cercano.

Si prenda GO multiplice di C, come F è multiplice di A, e si prenda K multiplice di D, come H è multiplice di B, le due GO, & F saranno vguali multiplici delle due A, & C, e le due K, & H saranno vguali multiplici delle due B, & D.

Supposto prima, che CL sia vguale à D. Perche le quantità F, GO sono vguali multiplici delle quantità A & CL; tante volte F sarà misurata da A, per quante volte GO è misurata da CL. Similmente essendo H multiplice di B, come K è multiplice di D; tante volte H sarà misurata da B, per quante volte K è misurata da D. In oltre perche H è multiplice di B, con maggior multiplicatione di quella, con la quale F è multiplice di A; sarà H misurata più volte da B di quello, che F è misurata da A. Mà si disse, che H è misurata da B tante volte, per quante volte K è misurata da D; sarà K misurata più volte da D, di quello, che F è misurata da A; Fù mostrato, che F è misurata da A tante volte, per quante volte GO è misurata da CL; sarà K misurata più volte da D di quello, che GO è misurata da CL. Mà la quantità CL fù supposta vguale à D, sarà K misurata più volte da D, di quello, che GO è misurata dalla medesima D; e per la 1. dimostratione di questo libro, la quantità GO sarà minore di K.

Di nuouo, supposto, che la terza quantità CM sia minore di D, e sia presa GN multiplice di CM, come F è multiplice di A. Si concepisca ingrandita la quantità CM fino ad L in modo, che sia vguale à D. E sia di nuouo GO multiplice di CL, come F è multiplice di A. Poi operandosi, come prima s'è fatto, si dimostrerà GO essere

F A B H
G C D K
M
L
N
O

re minore di K. Finalmente essendo F multiplice di A, come GO è multiplice di CL, e come GN è multiplice di CM: sarà GO multiplice di CL, come GN è multiplice di CM: dal che GO sarà misurata tante volte da CL, per quante volte GN è misurata da CM. Mà CL è maggiore di CM; sara GO maggiore di GN; si è mostrato GO minore di K, in conseguenza GN sarà molto minore della quantità K. Per la qualcosa le quantità A, B, CL, & D sono quelle, che si cercano.

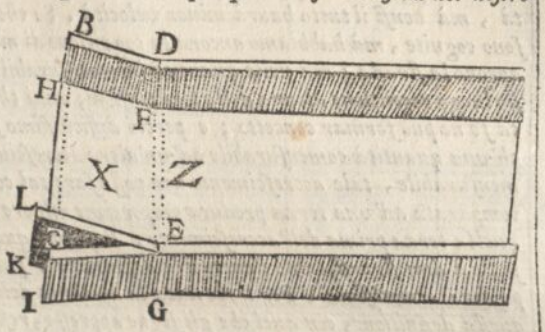
VIII.

Se saranno quattro quantità, delle quali siano presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: se in tutte le multiplicationi non sempre gli vguali multiplici della prima, e terza sono tutti due (presi separatamente) maggiori degli vguali multiplici della seconda, e quarta, ò tutti due minori, ò tutti due vguali àgli vguali multiplici della seconda, e quarta; mà che in qualche multiplicatione, essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza nõ sia maggiore del multiplice della quarta: in tal caso la prima alla seconda si dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta.

Dalla quarta, e sesta dimostratione si caua, che quando di quattro quantità sono presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e sono presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, con qualunque multiplicatione: due casi si possono dare, ò che in tutte le multiplicationi, sempre gli vguali multiplici della prima, e terza sono ambidue maggiori, ò ambidue minori, ò vero vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta: ò questo non succede sempre in tutte le multiplicationi, mà che alcune volte, essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sia maggiore del multiplice della quarta: quanto al primo caso, la prima si dirà hauere l'istessa proportione alla seconda, quale hà la terza alla quarta, come si disse nella 6. definit. e nel secondo caso la prima alla seconda si dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta quantità.

Da quel, che s'è detto, facilmente se ne caua la conuersa, cioè, che se saranno quattro quantità, e si supporrà la prima alla seconda hauere maggior proportoine, che la terza alla quarta, secondo la natura della maggior proportione poco auanti definita; presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, e presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: in queste infinite multiplicationi qualcheduna necessariamente ve ne sarà, la quale sarà, ch'essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sara maggiore del multiplice della quarta: perche se tal multi-

Elemento. Ma la difficoltà stà, quando, aggiunta la particola AG ad AB, e ne risulti GB incommensurabile alla quantità C, nel qual caso non è AG parte, ò parti, ò moltiplice di C; e perciò non sappiamo se la proportione di GB, à C sia cresciuta, ò diminuita. E per spiegare con qualche similitudine il dubbio, si consideri l'alueo di qualche fiume, come il notato ZX, che da per tutto ritenga vguale decliuio, mà ineguale larghezza; cioè che la larghezza, nello spatio BXC sia maggiore della larghezza nello spatio DEZ; e corra l'acqua da Z verso X in modo, che nel sito DE faccia la settione DFGE, e nel sito BC faccia la settione BHIC. S'intenda in BC ristretto l'alueo in modo, che la larghezza BL sia vguale alla larghezza DE, per quel che si dimostra nel nostro Trattato delle Acque Correnti, la settione BHKL, che fà l'acqua nel sito BL, sarà vguale alla settione DFGE che fà nel sito DE; e la velocità dell'acqua nella settione BHKL è vguale alla velocità dell'acqua nella settione DFGE. Se si concepisce rimosso l'argine E



LK, la settione dell'acqua sarà BHIC maggiore della settione BHKL, l'acqua nello spatio BIGED crescerà di mole à causa, che la velocità dell'acqua nella settione BHIC è fatta minore: se poi all'acqua in ZX soprauiene vn altra piena, la settione BHIL cresce d'altezza, e si fà più veloce, come il tutto si dimostra nel luogo citato, e la sensata esperienza lo fà manifesto, di modo, che la crescẽza della settione BHIC in vn modo cresce di velocità, ed in vn altro, come in latitudine diminuisce di velocità. Hor se la velocità è vna cosa diuersa dall'estensione superficiale, ò corporea, e si dà in natura, che accrescendosi l'estensione in vn modo, cresce la velocità, ed in vn altro modo si diminuisce; essendo la proportione vna cosa diuersa dall'estensione, cade in dubbio se accrescendo l'estensione al termine antecedente, possa in tutti gli accrescimenti produrre proportione maggiore di quella, che haueua al conseguente, prima dell'accrescimento. E benche le settioni più veloci in tempi vguali possano scaricare maggiori quantità d'acque di quelle, che scaricano le meno veloci, questa, ed altre passioni nell'acque correnti sono cognite à noi mediante le dimostrationi Geometriche; mà non trouo sino à questo luogo con quali dimostrationi Geometriche si possa spiegare alcuna passione delle proportioni, dalla quale se ne possa cauare la causa, perche accresciuta vna estensione in modo, che ne venga quantità incommensurabile ad vn altra, non possa hauer poi minor proportione à quell'altra, di quella, che haueua prima dell'accrescimento. E s'è passione ignota, che due quantità vguali habbiano vguali proportioni ad vna terza; e che le proportioni, le quali sono le medesime ad vna terza sono le medesime frà di loro; come poi non è passione ignota, che accresciuta vna quantità in modo, che ne risulti quantità incomensurabile, habbia maggior proportione ad vna terza di quella commensurabile proportione, che haueua

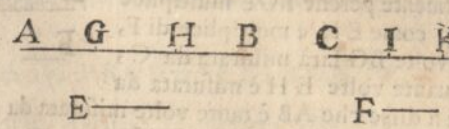
pro-

alla medesima, prima dell'accrescimento. Vn'altro esempio si può aggiungere, riflettendo alle cose, che discendono, ed à quelle, che galleggiano nell'acqua; cioè. Vna pallina di piombo discende nell'acqua con vna tale qualsi. sia velocità; se à questa s'accresce, come ogn'vno sà, vna massa di cera, la quale, benchè sia leggiera rispetto al piombo, con tutto ciò per se stessa pesa qualche cosa, e pure permista quella pallina di piombo con quella massa di cera, non solo quel piombo non discende con la velocità di prima, mà può essere tanta la cera accresciuta, che resti à galla. Donde se hauremo riguardo solamente à questi due graui aggiunti insieme, troueremo, ch'il peso della cera aggiunto al peso del piombo non hà prodotto accrescimento di velocità, mà bensì il tutto haurà minor velocità. Sò che le cause di quest'effetto sono cognite, mà habbiamo ancora la cognitione di molt'altre cose, che ce ne aprono la strada; mà nelle quantità incomensurabili non habbiamo sin'à questo luogo cognitione alcuna delle loro passioni; anzi che non senza gran difficoltà se ne può formar concetto; e perciò difficilissimo stimo à poter dimostrare, ch'vna quantità comensurabile ad'vn'altra accresciuta sin che diuenga incommensurabile, tale accrescimento non possa fare tal composto con la prima, che comparata ad'vna terza produca proportione minore di quella, che haueua à quella terza prima dell'accrescimento. E quanto questo Theorema è più difficile à dimostrarsi, tanto l'antedetta definitione è più oscura, è dipende da passione remotissima. Per il che tutta la machina delle passioni appoggiate à questa definitione, con quel che gli segue appresso, resta indimostrato. E benche si potrebbe dire, aderendo alla sentenza del P. Clauio, che le definitioni sono nomi posti ad arbitrio, e che basta à questi Autori hauer spiegato quello, che si deue concepire quando nel progresso delle sue dimostrationi dirà maggiore, ò minor proportione, cioè che quando dirà maggiore, ò minore proportione, si debba intendere di quella da loro definita, poco importando che sia più questa, che quella proportione: non intendo qui esaminare le ragioni del P. Clauio, mà dirò bene, che non altro intese Euclide nella sesta definitione di questo quinto Libro, quando disse; All'hora chiamaremo la prima alla seconda hauer l'istessa proportione, quale hà la terza alla quarta, quando gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, sono tutti due ò maggiori, ò minori, ouero vguali, à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, presi secondo qualunque multiplicatione; volendo inferire, che quando dirà la proportione della prima alla seconda essere la medesima, qual'è quella della terza alla quarta, si debba intendere, che questi quattro termini, frà quali si dice caderui proportionalità, ritenghino tal passione, che gli vguali multiplici del primo, e terzo termine, secondo qualunque multiplicatione, siano tutti due ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici del secondo, e quarto, secondo qualunque multiplicatione: pigliando le quantità in genere, senza fare alcuna distintione di commensurabile, ed incommensurabile, voci tutte introdotte da gl'interpreti, e che mai sono state ne meno sognate da Euclide, prima del suo decimo libro, doue ne dimostra le passioni; conoscendo bene, che douendosi trattare delle proportioni, nelle quantità in genere, altra definitione non gli poteua conuenire, che quella esplicata da lui co' gli vguali multiplici, atteso che gli vguali multiplici si possono prendere d'ogni quantità.

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se quante grandezze si vogliano siano vgualmente multiplici d'altrettante grandezze, si come vna è multiplice di vna, così tutte sono multiplici di tutte.



Siano quante grandezze si vogliano AB, CD, vgualmente multiplici di altrettante grandezze, come E, ed F. *Dico* che le grandezze AB, CD insieme, sono multiplici delle grandezze E, & F insieme, come AB è multiplice di E; ouero come CD è multiplice di F.

Perche AB è multiplice di E, come CD è multiplice di F, tante volte AB è misurata da E, [a] per quante volte CD è misurata da F. Si diuida AB nelle parti vguali ad E, che siano AG, GH, HB; e si diuida C D nelle parti vguali ad F, che siano CI, IK, KD; tante parti saranno in AB vguali ad E, per quante ne sono in C D vguali ad F. In oltre perche AG è vguale ad E, e la grandezza CI è vguale ad F, le due AG, CI insieme saranno vguali [b] alle due E, & F insieme. Similmente perche *GH è vguale ad E, ed IK è vguale ad F*, le due GH, & IK insieme saranno *vguali alle due E, ed F insieme. Nell'istesso* modo le due HB, KD *insieme, sono vguali alle due E, ed F insieme*; e perciò tante volte le due *AB, CD insieme*, sono misurate dalle due E, ed F insieme, per quante volte *AB è misurata da E*, ouero *CD*, è misurata da F. Per la qual cosa le due AB, CD insieme, [c] *sono multiplici delle due E*, ed F insieme, come AB è multiplice di E, ouero *CD è multiplice di F*, *ch'era* da dimostrarsi.

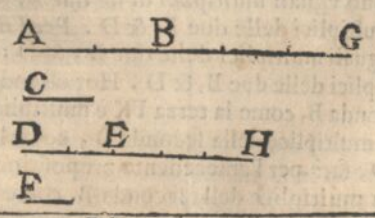
[a] Scol. alla 2. def. del 5.

[b] 2. assiom.

[c] Scol. alla 2. defin. di questo.

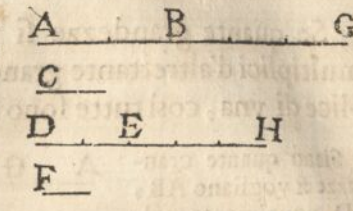
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se la prima è multiplice della seconda, come la terza è multiplice della quarta; e la quinta è multiplice della seconda, come la sesta è multiplice della quarta; la composta della prima, e quinta sarà multiplice della seconda, come la composta della terza, è sesta, è multiplice della quarta.



Sia la prima AB multiplice della seconda C, come la terza DE è multiplice della quarta F; e la quinta BG sia multiplice della seconda C, come la sesta EH è multiplice della quarta F. Dico, che AG, composta della prima, e quin-

ta, è multiplice della seconda C, come DH, composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta F.



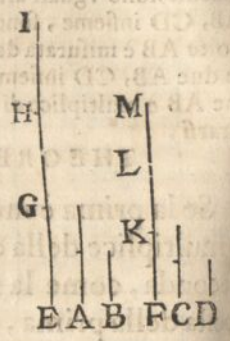
a Scol. alla 2. defin. di questo.

Perche A B è multiplice di C, come DE è multiplice di F, [a] tante volte A B sarà misurata da C, per quante volte D E è misurata da F. Similmente perche BG è multiplice di C, come E H è multiplice di F, tante volte BG sarà misurata da C, per quante volte E H è misurata da F: ma si disse che AB è tante volte misurata da C, per quante volte DE è misurata da F; sarà tutta AG misurata tante volte da C, per quante volte DH è misurata da F, e perciò AG è multiplice di C, [b] come DH è multiplice di F. Per la qual cosa AG composta della prima, e quinta, è multiplice della seconda C, come DH, composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta F, ch'era da dimostrarsi.

b Scol. alla 2. defin. di questo.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se la prima è multiplice della seconda, come la terza, è multiplice della quarta; gli vguali multiplici della prima, e terza, sono ancora vguali multiplici della seconda, e quarta.



Sia la prima A multiplice della seconda B, come la terza C è multiplice della quarta D; e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e della terza C, che siano E, ed F. Dico che E, ed F sono ancora vguali multiplici della seconda B, e della quarta D.

Perche le due E, ed F, per ipotesi, sono vguali multiplici delle due A, & C, tante volte la quantità E sarà misurata da A, [a] per quante volte la quantità F è misurata da C; si diuida la quantità E nelle parti vguali ad A, che siano EG, GH, HI, e si diuida la quantità F nelle parti vguali à C, che siano FK, KL, LM.

a Scol. alla 2. defin. di questo.

Perche le due EG, FK sono vguali alle due A, & C, e le due A, & C sono vguali multiplici delle due B, & D, le due EG, FK saranno vguali multiplici delle due B, & D. Per l'istessa ragione le due GH, KL sono vguali multiplici delle due B, & D; e le due HI, LM sono vguali multiplici delle due B, & D. Hor essendo la prima E G multiplice della seconda B, come la terza FK è multiplice della quarta D; e la quinta GH è multiplice della seconda B, come la sesta KL è multiplice della quarta D; sarà, per l'antecedente propositione, EH composta della prima, e quinta multiplice della seconda B, come FL composta della terza, e sesta, è

mul-

multiplice della quarta B. Di nuouo perche la prima EH è multiplice della seconda D, come la terza FL è multiplice della quarta D; e la quinta HI è multiplice della seconda B, come la sesta L M è multiplice della quarta D; sarà per l'antecedente propositione, EI composta della prima, e quinta, multiplice della seconda B, come F M composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta D. Per la qual cosa le quantità E, ed F sono vguali multiplici delle due B, & D, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se di quattro quantità habbia la prima alla seconda la medesima proportione, quale hà la terza alla quarta; e sono presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e similmente sono presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: il multiplice della prima haverà la medesima proportione al multiplice della seconda, quale hà il multiplice della terza al multiplice della quarta.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, ed habbia la prima A alla seconda B, l'istessa proportione, che hà la terza C, alla quarta D; e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, ed F; similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, ed H. Dico che la proportione di E à G è l'istessa, che la proportione di F, ad H.



Si prendano gli vguali multiplici delle due E, ed F, secondo qualunque multiplicatione, che siano I, & K; e si prendano gli vguali multiplici delle due G, ed H, secondo qualunque multiplicatione, che siano L, ed M, e si considerino quattro quantità, la prima E, la seconda A, la terza F, e la quarta C. Perche la prima E è multiplice della seconda A, come la terza F è multiplice della quarta C, e per costruttione I, & K sono vguali multiplici della prima E, e terza F, per l'antecedente propositione, le due I, & K sono ancora vguali multiplici di A, & C. Di nuouo, perche G, & H sono vguali multiplici di B, & D, e le due L, ed M sono per costruttione,

vguali multiplici di G, ed H; per l'antecedente propoſitione, le due L, ed M ſono vguali multiplici delle due B, & D. In oltre, perche la prima A alla ſeconda B, per ipoteſi è come la terza C alla quarta D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della prima A, e terza C; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D; per la conuerſa alla ſeſta definitione, ſe I è maggiore di L, ancora K ſarà maggiore di M, e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K ſarà minore, ò vguale ad M, perche ſe queſto nõ fuſſe, non ſarebbe la proportione di A à B, come quella di C à D, ch'è contro all' ipoteſi.



Si conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima E, la ſeconda G, la terza F, e la quarta H. Gli vguali multiplici della prima E, e terza F, per coſtruttione, ſono I, & K, e gli vguali multiplici della ſeconda G, e quarta H, ſono le due L, ed M. E perche I, ch'è multiplice della prima, eſſendo maggiore di L, multiplice della ſeconda, ancora K, ch'è multiplice della terza, per quel che s'è dimoſtrato, è maggiore di M, multiplice della quarta; e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K è minore, ò vguale ad M; per la 6. definitione di queſto, la prima E alla ſeconda G, hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza F alla quarta H. Per la qual coſa il multiplice della prima al multiplice della ſeconda, è come il multiplice della terza al multiplice della quarta, come fù propoſto dimoſtrare.

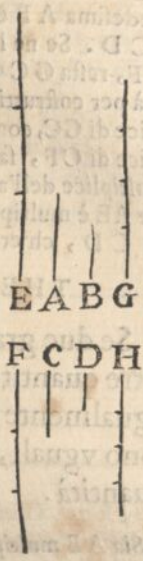
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto nell'antecedente dimoſtratione, facilmente ſi caua la dimoſtratione della proportione inuerſa, ſpiegata da Euclide nella 14. definitione; cioè ſe quattro quantità ſono proportionali, inuertendo *ſono* ancora proportionali.

Habbia l'antecedente A al conſeguente B l'iſteſſa proportione, quale hà l'antecedente C al conſeguente D. Dico che inuertendo, il conſeguente B all'antecedente A è come il conſeguente D all'antecedente C.

Si

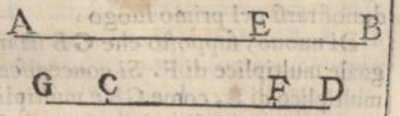
Si prendano gli vguali multiplici della prima A, & terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, ed F; e si prendano gli vguali multiplici della seconda B & quarta D, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, ed H. Perche la proportione di A à B, per ipotesi è come quella di C à D, per la cõuersa della sesta definitione, se E è maggiore di G, ancora F sarà maggiore di H; se E è minore, ò vguale à G, ancora F sarà minore, ò vguale ad H; perche se altrimente fosse, nõ sarebbe la proportione di A à B come quella di C à D. Hor se E è maggiore di G, ed ancora F è maggiore di H, sarà all'incontro G minore di E, ed ancora H minore di F; similmente se E è minore di G, ed ancora F è minore di H, all'incõtro G sarà maggiore di E, ed ancora H sarà maggiore di F; e se E, & F sono vguali alle due G, ed H, all'incontro G, & H saranno vguali ad E, & F. D'onde è manifesto, che se G è maggiore di E, ancora H è maggiore di F; e se G è minore, ò vguale ad E ancora H sarà minore, o vguale ad F. Si prenda B come prima quantità, la seconda sia A, la terza D, & la quarta C; delle quali G, ed H, per costruttione, sono vguali multiplici di B, & D, ch'è la prima, e terza; & E, ed F sono vguali multiplici di A, & C, che sono la seconda, e quarta. E perche G multiplice della prima B s'è maggiore di E multiplice della seconda A, ancora H, ch'è multiplice della terza D, è maggiore di F, ch'è multiplice della quarta C; e se G è minore, ò vguale ad E, ancora H è minore, ò vguale ad F; e per la sesta definitione di questo, la prima B alla seconda A hauerà l'istessa proportione, quale hà la terza D alla quarta C. Per la qual cosa se A à B è come C à D, inuertendo, B ad A sarà come D à C, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA V. PROPOSITONE V.

Se il tutto è multiplice del tutto, come la parte detratta è multiplice della parte detratta; il rimanente sarà multiplice del rimanente, come il tutto è multiplice del tutto.

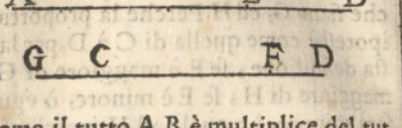
Sia il tutto AB multiplice del tutto CD, come la parte AE è multiplice della parte CF. Dico che l'auanzo EB è multiplice dell'auanzo FD, come il tutto AB è multiplice del tutto CD.



Si concepisca la quantità GC talmente, che EB sia multiplice di GC, come AE è multiplice di CF; sarà tutta AB [a] multiplice di tutta GF, come AE è multiplice di CF. Mà per ipotesi AE è multiplice di CF, come [a] 1. def. 5.

tutta

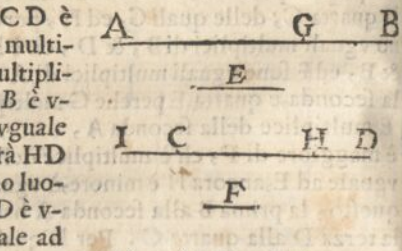
tutta AB è multiplice di tutta CD, sarà AB multiplice di GF, come la
b 6. assiom. medesima A B è multiplice di C D. Per la qual cosa G F [b] sarà vguale
à C D. Se ne leui la commune
c 3. assiom. C F, resta G C [c] vguale ad F D.
Mà per costruttione EB è multi-
plice di GC, come A E è multi-
plice di C F, sarà l'auanzo E B
multiplice dell'auanzo F D, co-
me AE è multiplice di C F; cioè come il tutto A B è multiplice del tut-
to C D, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due grandezze sono vgualmente multiplici di due altre quantità, e le parti detratte dalle due grandezze sono vgualmente multiplici di quelle quantità; i rimanenti ò sono vguali, ouero vgualmente multiplici di quelle due quantità.

Sia A B multiplice di E, come C D è multiplice di F; e la parte AG sia multiplice di E, come la parte CH è multiplice di F. Dico che se il restante G B è vguale ad E, ancora il restãte HD è vguale ad F; e se GB è multiplice di E, sarà HD vguale multiplice di F. Sia nel primo luogo G B vguale ad E. Dico che H D è vguale ad F. Si concepisca I C vguale ad F. Perche A G è multiplice di E, come C H è multiplice di F, tante volte A G è misurata da E, quante volte C H è misurata da F: Mà per ipotesi GB è vguale ad E, e per costruttione IC è vguale ad F; tante volte AB sarà misurata da E, per quante volte IH è misurata da F; e perciò
a Scol. alla 2. defin. di questo. AB [a] è multiplice di E, come IH è multiplice di F. Mà per ipotesi AB è
b 6. assiom. multiplice di E, come C D è multiplice di F; sarà I H multiplice di F,
c 3. assiom. come CD multiplice della medesima F; e perciò IH [b] sarà vguale à CD:
d 1. assiom. se ne leui la commune C H, resta I C [c] vguale ad H D; ma I C è posta vguale ad F, sarà HD [d] vguale ad F, come GB è vguale ad E, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



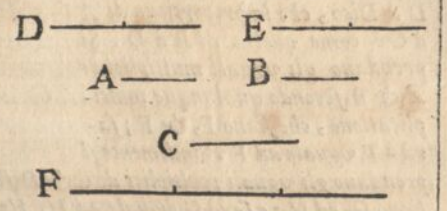
Di nuouo, supposto che G B sia multiplice di E. Dico che H D è vguale multiplice di F. Si concepisca la quantità CI in modo, che IC sia multiplice di F, come GB è multiplice di E. Perche la prima A G, per ipotesi, è multiplice della seconda E, come la terza C H è multiplice della quarta F; e la quinta GB, per costruttione, è multiplice della seconda E, come la sesta IC è multiplice della quarta F; sarà AB, compo-
e 2. del 5. sta della prima, e quinta, multiplice della seconda E, e come I H, composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta F: Mà A B è multi-

plice

plice di E, come CD è multiplice di F; sarà IH multiplice di F, come CD è multiplice della medesima F; e perciò IH, & CD [f] sono frà di loro vguali; detratta la commune CH, resta IC [g] vguale ad HD; ma IC è multiplice di F, come GB è multiplice di E; sarà HD multiplice di F, come GB è multiplice di E, ch'era da dimostrarsi. f 6. assiom. g 3. assiom.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad vna medesima grandezza; e quella grandezza hà l'istessa proportione alle quantità vguali.



Siano le grandezze A, & B vguali frà di loro, e sia C qualunque terza quantità. Dico prima. che la proportione della grandezza A alla grandezza C, è l'istessa che la proportione di B alla medesima C. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano D, ed E; e si prenda F multiplice di C, secondo qualunque multiplicatione. Perche le due A, & B, per ipotesi, sono frà di loro vguali, i loro vguali multiplici D, ed E, saranno [a] frà di loro vguali; dal che se D è vguale ad F, ancora E sarà vguale alla medesima F; se D è maggiore di F, ancora E sarà maggiore di F; e se D è minore di F, ancora E sarà minore di F. Si considerino quattro quantità, cioè A prima, C seconda, B terza, e la quarta sia C; di modo che C rappresenta la seconda, e la quarta. Le due D, & E sono gli vguali multiplici della prima A, e della terza B; e la quantità F, sarà l'vguale multiplice della seconda, e quarta C. E perche D, multiplice della prima, s'è maggiore di F, multiplice della seconda, ancora E multiplice della terza, è maggiore di F, multiplice della quarta; e se D è minore, ò vguale ad F; ancora E è minore, ò vguale ad F, per la sesta definitione di questo, la proportione della prima A alla seconda C è come quella della terza B alla quarta C. Per la qual cosa le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad vna terza quantità, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. a b assiom.

Di nuouo dico che C hà l'istessa proportione ad A, quale hà à B.

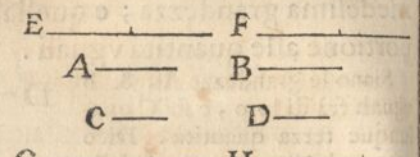
Essendosi dimostrato D vguale ad E, se F è maggiore di D, sarà ancora maggiore di E; e se F è minore, ò vguale à D, sarà ancora minore, ò vguale ad E. Si considerino quattro quantità, la prima C, la seconda A, la terza C, e la quarta B. Gli vguali multiplici della prima, e terza C, vengono ambidue rappresentati dalla medesima quantità F; e gli vguali multiplici della seconda A, e terza B, sono D, ed E; e perche F multiplice della prima C, s'è maggiore di D, multiplice della seconda A, ancora F, multiplice della terza C, è maggiore di E, multiplice della quarta E; e se F è minore, ò vguale à D, la medesima F è ancora minore, ò vguale ad E; sarà, per la citata 6. definitione, la proportione della prima C alla se-

conda

conda A, come quella della terza C alla quarta B. Per la qual cosa vna terza quantità hà l'istessa proportione alle quantità vguali, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Dall'antecedente propositione si caua, che l'vguali quantità hanno la medesima proportione ad altre quantità vguali.

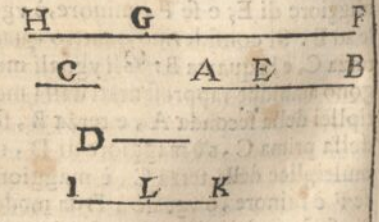


Come per esempio sia A vguale à B, e la quantità C vguale à D. Dico, che la proportione di A à C è come quella di B à D. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, & F; sarà a *E vguale ad F. Similmente si prendano gli vguali multiplici di C, & D, secondo qualũque multiplicatione, che siano G, ed H; e sarà G vguale ad H. Hor perche le due E, F sono fra di loro vguali, e le due G, H sono frà di loro vguali; se E sarà vguale à G, ancora F sarà vguale ad H; se E è maggiore, ò minore di G, ancora F sarà maggiore, ò minore di H. Si considerino le quattro quantità, cioè A prima, C seconda, B terza, & D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza B, sono E, ed F, e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta D, sono G, ed H; E perche E, multiplice della prima, s'è maggiore di G, multiplice della seconda, ancora F, multiplice della terza, è maggiore di H, multiplice della quarta; e se la quantità E è minore, ò vguale à G, ancora F è minore, ò vguale ad H; per la sesta definitione di questo, la prima A alla seconda C, hà l'istessa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual cosa le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad altre quantità vguali, come fù proposto.*

a 6. assiom.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Delle quantità ineguali, la maggiore hà maggior proportione ad vna terza, che la minore alla medesima terza; e la terza hà maggior proportione alla minore, che alla maggiore.



Siano le quantità ineguali, cioè AB maggiore, & C minore; e la terza sia qualunque quantità D, del medesimo genere. Dico prima che la proportione della maggiore A B alla terza D, è maggiore che la proportione della minore C alla medesima quantità D.

S'intenda detratta da A B la parte

AE

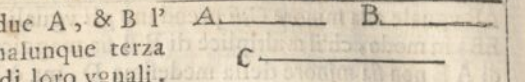
AE vguale alla minore C; ſi prendano gli vguali multiplici delle due AE, EB, in modo, ch'il multiplice di E B ſia maggiore di D, ed il multiplice di A E non ſia minore della medeſima D, ma ò ſia vguale, ouero maggiore; e ſiano FG, GH, cioè che FG ſia multiplice di BE, come H G è multiplice di AE; ed il multiplice ſia preſo di tanta grandezza, che FG ſia maggiore di D, & H G, ò ſia vguale, ò maggiore di D. Si prenda poi IK multiplice di D, che ſia proſſimo maggiore ad HG; ſi tagli da IK la parte KL vguale alla quantità D. Perche IK è multiplice di D, ed è proſſimo maggiore di HG, detrattane la parte KL: ch'è vguale à D, reſta IL non maggiore di H G, cioè HG non è minore di I L. In oltre perche FG, per coſtruttione, è maggiore di D, e la quantità D è vguale ad LK, ſarà GF maggiore di L K. Ma HG non è minore di I L, ſarà tutta HF maggiore di IK. Di più, perche FG è multiplice di EB, come HG è multiplice di A E, tutta H F [a] ſarà multiplice di tutta A B, come H G è multiplice di AE; mà AE fù fatta vguale à C; ſarà HF multiplice di AB, come H G è multiplice di C. Per la qual coſa le due H F, H G ſono vguali multiplici delle due A B, & C. Si conſiderino quattro quantità AB prima, D ſeconda, C terza, e D quarta, di modo, che la quantità D ſerua per ſeconda, e per quarta quantità. Gli vguali multiplici della prima A B, e terza C ſono H F, & H G; e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta D, vengono rappreſentati dalla ſola quantità I K. Hor perche HF, ch'è multiplice della prima AB, è maggiore di IK, ch'è multiplice della ſeconda D; ed HG, multiplice della terza C, per coſtruttione non è maggiore di IK multiplice della quarta D, per l'ottaua definitione di queſto, la prima AB hauerà maggior proportione alla ſeconda D, che la terza C alla quarta D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. [a] 1. del 5.

Di nuouo dico, che la terza quantità D hà maggior proportione alla minore C, che alla maggiore AB. Si conſiderino quattro quantità, cioè D prima, C ſeconda, D terza, & AB quarta. Gli vguali multiplici della prima, e terza D, è la quantità KI; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta AB, ſono HG, & HF. E perche IK, multiplice della prima D, per coſtruttione, è maggiore di H G multiplice della ſeconda C; & IK, multiplice della terza D, non è maggiore di HF, multiplice della quarta AB; per l'ottaua definitione di queſto, la prima D alla ſeconda C, hà maggior proportione, che la terza D alla quarta AB. Per la qual coſa vna terza quantità hà maggior proportione alla minore, che alla maggior quantità, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le grandezze, che hanno la medeſima proportione ad vna terza quantità, ſono frà di loro vguali; e quelle grandezze, alle quali vna terza quantità hà l'iſteſſa proportione, ſono frà di loro vguali.

Habbiano prima le due A, & B l' istessa proportione à qualunque terza C. Dico che sono frà di loro vguali.



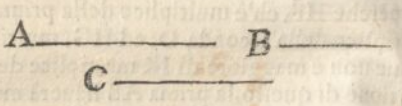
Se non sono vguali vna delle due sarà maggiore; e supposto che A sia
a 8.del 5. maggiore di B, haverà maggior proportione A alla terza C, [a] che B alla medesima C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le quantità A, & B sono ineguali, ma sono frà di loro vguali.

Di nuouo se la grandezza C hà l'istessa proportione alle due A, & B. Dico che A è vguale à B. Se A, & B, non sono frà di loro vguali, vna
b 8. del 5. delle due sarà maggiore. Supposto che A sia minore di B, haverà C ad A [b] maggior proportione, che la medesima C à B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A, & B sono ineguali, ma sono frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Delle quantità, che hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; e quando la terza hà proportione ad altre quantità, quella, alla quale hà maggior proportione, è minore.

Habbia prima la grandezza A maggior proportione alla terza C di quella, che hà B alla medesima C. Dico che A è mag-



a 7. del 5. giore di B. Non sono A, & B frà di loro vguali, perche [a] haverebbero la medesima proportione à C, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque A mi-
b 8. del 5. nore di B, in tal caso A à C haverà [b] minor proportione, che B alla medesima C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A è minore, ne vguale, ma è maggiore di B.

Di nuouo habbia C maggior proportione à B, che la medesima C ad A. Dico che B è minore di A. Non può essere B vguale ad A, stante che
c 7.del 5. C [c] haverebbe l'istessa proportione alle due B, & A, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque B maggiore di A, haverà maggior proportione C ad
d 8. del 5. A, [d] che la medesima C à B; fù supposto C havere maggior proportione à B, haverebbe maggiore, e minor proportione à B, ch'è impossibile. Non dunque B è maggiore, ne vguale, ma è minore di A, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Le proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime frà di loro.

Siano le proportioni di A à B, e di C à D, le medesime, che la proportione di E ad F. Dico che la proportione di A à B è l'istessa, che la proportione di C à D.

Si

Si prendano gli vguali multiplici di tutti gl'antecedenti A, E, C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano G, I, H; e ſi prendano gli vguali multiplici di tutti i conſeguenti B, F, D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano K, M, L.

Si conſiderino quattro quantità, cioè A prima, B ſeconda, E terza, ed F quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza E, ſono per coſtruttione G, ed I; e gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta F, ſono K, ed M. E perche, per ipoteſi, la proportione di A à B, è come quella di E ad F, per la natura della medeſima proportione ſpiegata nella ſeſta definitione, ſe G è maggiore di K, ancora I ſarà maggiore di M; ſe G è minore, ò vguale à K, ancora I ſarà minore, ò vguale ad M; perche ſe foſſe altrimẽte, non ſarebbe la proportione di A à B come quella di E ad F, ch'è contro all'ipoteſi. Di nuouo ſi conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima E, la ſeconda F, la terza C, e la quarta D. Gli vguali multiplici della prima E, e terza C ſono I, ed H; e gli vguali multiplici della ſeconda F, e quarta D ſono M, ed L. E perche la prima E alla ſeconda F, per ipoteſi, è come la terza C, alla quarta D; per le ragioni antedette, ſe I è maggiore di M, ancora H ſarà maggiore di L; ſe I è minore, ò vguale ad M, ancora H ſarà minore, ò vguale ad L. Mà fù dimoſtrato, ch'eſsẽdo I maggiore di M, ancora G, è maggiore di K; e ſe I è minore, ò vguale ad M, ancora G è minore, ò vguale à K; perciò ſe G è maggiore di K, ancora H ſarà maggiore di L; e ſe G è minore, ò vguale à K, ancora H ſarà minore, ò vguale ad L. Si conſiderino finalmente quattro altre quantità, cioè A prima, B ſeconda, C terza, e D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſono per coſtruttione, le due G, ed H. Similmente gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D, ſono K, ed L. E perche s'è dimoſtrato, che ſe G, multiplice della prima A, è maggiore di K, multiplice della ſeconda B, ancora H, multiplice della terza C, è maggiore di L, multiplice della quarta D; e ſe G è minore, ò vguale à K, ancora H è minore, ò vguale ad L; per la ſeſta definitione di queſto, la proportione della prima A alla ſeconda B è l'iſteſſa, che la proportione della terza C alla quarta D. Per la qual coſa quelle proportioni, che ſono le medeſime ad vna terza, ſono frà di loro le medeſime, ch'era dimoſtrarſi.



THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se ſaranno quante grandezze ſi vogliano proportionali, la proportione che hà vn'antecedente ad vn conſeguente,

haueranno tutti gli antecedenti insieme à tutti i conseguenti insieme.

Siano quante grandezze si vogliano proportionali come A, B, C, D, E, F; cioè la proportione di A à B sia l'istessa, che quella di C à D; e la proportione di C à D sia come quella di E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A, C, E insieme, à tutti i conseguenti B, D, F insieme, sono come vn antecedente ad vn conseguente, cioè come A à B.



Si prendano gli vguali multiplici di tutti gli antecedenti A, C, E, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, H, I; saranno le quantità C, H, I, insieme, multiplici delle tre A, C, E insieme, [a] come G è multiplice di A. Similmente si prendano gli vguali multiplici di tutti i conseguenti B, D, F, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, L, M; saranno le quantità K, L, M insieme, multiplici de'i conseguenti B, D, F, insieme, [b] come K è multiplice di B.

[a] 1. del 5.

[b] 1. del 5.



In oltre perche la prima A alla seconda B, per ipotesi, è come la terza C alla quarta D; sono, per costruttione le due G, H vguali multiplici della prima A, e terza C; e le due K, L, sono vguali multiplici della seconda B, e quarta D, per la natura della medesima proportione spiegata nella sesta definitione, se G è maggiore di K, ancora H sarà maggiore di L; se G è minore, ò vguale à K, ancora H sarà minore, ò vguale ad L. E perche C à D, per ipotesi, è come E ad F, si proverà nell'istesso modo, che se H è maggiore di L, ancora I è maggiore di M; e se H è minore, ò vguale ad L, ancora I sarà minore, ò vguale ad M. Per la qual cosa se G, H, I, insieme, sono maggiori di K, L, M, insieme, ancora G sarà maggiore di K; e se G, H, I, insieme, sono minori, ò vguali à K, L, M insieme, ancora G sarà minore, ò vguale à K.



Si considerino quattro quantità, la prima delle quali siano tutti gli antecedenti A, C, E insieme; la seconda siano i conseguenti B, D, F insieme; la terza sia l'antecedente A; e la quarta il conseguente B. Gli vguali multiplici della prima A, C, E, e della terza A, per quel che si disse, sono G, H, I, & G; gli vguali multiplici della seconda B, D, F, è della quarta B sono K, L, M, & K. E perche se G, H, I, multiplice della prima A, C, E è maggiore di K, L, M, multiplice della seconda B, D, F; ancora G, multiplice della terza A, sarà maggiore di K, multiplice della quarta B; e se G, H, I è minore, ò vguale à K, L, M, ancora G sarà minore, ò vguale à K, per la 6. defin. di questo, la prima A, C, E, alla seconda B, D, F, sarà come la terza A alla quarta B. Per la qual cosa tutti gli antecedenti A, C, E, à tutti li conseguenti B, D, F, sono come vn antecedente, cioè A, ad vn

conse-

conſeguente, cioè B, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

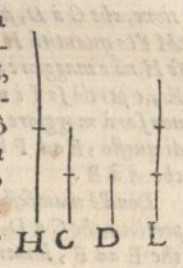
Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; e la terza alla quarta hà maggior proportione, che la quinta alla ſeſta; hauerà la prima alla ſeconda maggior proportione, che la quinta alla ſeſta.

Habbia la prima A alla ſeconda B, l'iſteſſa proportione, che la terza C alla quarta D; ed habbia la terza C alla quarta D, maggior proportione, che la quinta E alla ſeſta F. Dico, che la proportione della prima A alla ſeconda B è maggiore, che la proportione della quinta E alla ſeſta F.

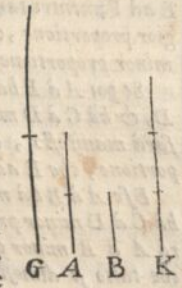


Si prendano gli vguali multiplici de i conſeguenti B, D, F, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano K, L, M.

Perche, per ipoteſi, la proportione di C à D, è maggiore della proportione di E, ad F, ſecondo la natura della maggior proportione, ſpiegata nell'ottaua definitione di queſto, gli vguali multiplici della prima C, e terza E, ſecondo tutte le multiplicationi, non ſaranno ſempre, ò tutti due maggiori, ò tutti due minori, ò tutti due vguali, à gli vguali multiplici della ſeconda D, e quarta F; perche ſe foſſero ſempre maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici di D, ed F, la proportione di C à D, per la ſeſta definitione di queſto, ſarebbe l'iſteſſa, che la proportione di E ad F, ch'è contro all'ipoteſi; e perciò nella moltitudine delle multiplicationi qualcheduna ve ne ſarà, ſecondo la quale, pigliando gli vguali multiplici della prima C, e terza E, come H, ed I, ſe H è maggiore di L, la quantità I non ſarà maggiore di M. Si prenda poi G multiplice di A, come H è multiplice di C, in modo, che le trè G, H, I ſiano vguali multiplici de i trè antecedenti A, C, E.



In oltre ſi conſiderino quattro quantità, delle quali C ſia la prima, la ſeconda D, la terza A, e la quarta B. Perche, per ipoteſi, la prima C alla ſeconda D è come la terza A alla quarta B; eſſendo H, & G vguali multiplici della prima C, e terza A, e le due, L, & K ſono vguali multiplici della ſeconda D, e quarta B; per la natura della medeſima proportione ſpiegata nella ſeſta definitione di queſto, ſe H è maggiore di L, ancora G ſarà maggiore di K; ma, per quelche s'è detto, la quãtità H è per coſtruttione maggiore di L, in cõſeguenza G ſarà ancora maggiore di K; ma ſi diſſe, ch'eſ-



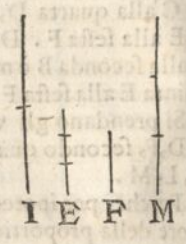
ſen-

ſendo H maggiore di L, la quantità I non ſarà maggiore di M ; eſſendo dunque G maggiore di K, la quantità I non ſarà maggiore di M. Si conſiderino quattro altre quantità, cioè A prima, B ſeconda, E terza, ed F quarta. Per coſtruttione gli vguali multiplici della prima A, e terza E, ſono le due G, ed I ; e gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta F, ſono K, ed M ; e perche G, ch'è multiplice della prima, è maggiore di K, multiplice della ſeconda ; ed I multiplice della terza non è maggiore di M multiplice della quarta; per l'ottaua definitione di queſto, la prima A alla ſeconda B, hà maggior proportione, che la terza E alla quarta F, come fù propoſto dimoſtrare.

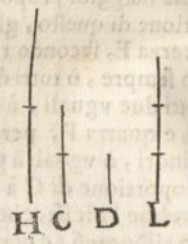
SCOLIO.

Se la prima E alla ſeconda F haueſſe maggior proportione, che la terza C alla quarta D ; e la proportione di C à D foſſe l'iſteſſa, che la proportione della quinta A alla ſeſta B ; tenendo il medeſimo ordine di prima, ſi dimoſtrerà, che la proportione di E ad F è maggiore della proportione di A à B. Perche hauendo E ad F maggior proportione, che C à D, ſi prouerà, che ſe I è maggiore di M [a] la quantità H non ſarà maggiore di L ; mà ſe H nõ è maggiore di L, ne meno G [b] è maggiore di K ; e perciò ſe I è maggiore di M, la quantità G non ſarà maggiore di K ; e per l'ottaua definitione di queſto, E ad F haurà maggior proportione, che A à B.

a 8. defin. del 5.
b 6. defin. del 5.

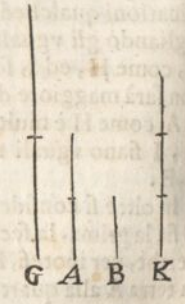


Dond'è manifeſto, che ſe A à B hà l'iſteſſa proportione, che C à D, & hà C à D minor proportione, che E ad F, hauerà A à B minor proportione, che E ad F ; mentre tanto è dire, che E ad F hà maggior proportione, che A à B, quanto che A à B hà minor proportione, che E ad F.



Se poi A à B hà maggior proportione, che C à D, & hà C à D maggior proportione, che E ad F ; ſarà manifeſto, che A à B hà molto maggior proportione, che E ad F.

Eſe A à B hà minor proportione, che C à D ; & hà C à D minor proportione, che E ad F ; hauerà A à B minor proportione, che E ad F. Il che tutto ſi dimoſtra ſecondo il modo tenuto prima.



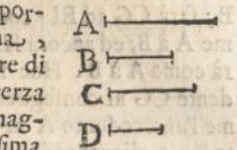
THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta, e la prima è maggiore della terza, la ſe-

conda

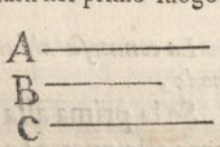
conda sarà maggiore della quarta; se la prima è vguale alla terza, la seconda sarà vguale alla quarta; e se la prima è minore della terza, la seconda sarà minore della quarta.

Habbia la prima A alla seconda B l'istessa proportione, che la terza C alla quarta D. Dico prima, che se A è maggiore di C, ancora B sarà maggiore di D. Perche A è maggiore di C, presa B come terza quantità, haverà la maggiore A alla terza B [a] maggior proportione, che la minore C alla medesima B. Ma la proportione di C à D è l'istessa, che quella di A à B; haverà C à D [b] maggior proportione di quella, che hà la medesima C à B. Quãdo vna terza quantità hà proportione à due, [c] quella, alla quale hà maggior proportione, è minore; hauendo C maggior proportione à D di quella, che hà à B, sarà D minore di B; cioè B maggiore di D, come A è maggiore di C, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



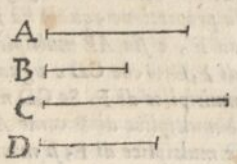
a 8. del 5.
b 13. del 7.
c 10. del 5.

Di nuouo, supposto che A sia vguale à C. Dico che B è vguale à D. Perche A è vguale à C, presa B come terza quantità, haverà A à B [d] l'istessa proportione, che hà C alla medesima B. Ma la proportione di C à D è l'istessa, che quella di A à B; haverà C à D [e] l'istessa proportione, che la medesima C à B. Per la qual cosa B [f] è vguale à D, come A è vguale à C, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.



d 7. del 5.
e 11. del 5.
f 9. del 5.

Finalmente, supposto che A sia minore di C. Dico che B è minore di D. Perche A è minore di C, presa B, come terza quantità, la proportione di A à B [g] sarà minore della proportione di C à B. Ma la proportione di C à D è l'istessa, che quella di A à B, haverà C à D [h] minor proportione di quella, che hà la medesima C à B. Quando vna terza quantità hà minor proportione ad vna, che ad vn'altra quantità, [K] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore; ma s'è detto, che C hà minor proportione à D, che à B; sarà D maggiore di B, cioè B minore di D, come A è minore di C, ch'era da dimostrarsi.

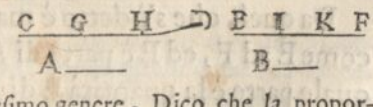


g 8. del 5.
h 13. del 5.
K 10. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

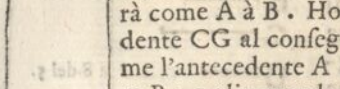
Le parti hanno la medesima proportione, quale hanno i loro corrispondenti vguali multiplici, quando sono del medesimo genere.

Sia A parte di CD, come B è parte di EF, cioè sia CD multiplice di A, come EF è multiplice di B, e le due A, & B, siano del medesimo genere. Dico che la proportione di CD, ad EF, è come quella di A à B. Perche CD è multiplice



di A,

di A, come EF è multiplice di B; sarà CD tante volte misurata da A, per quante volte EF è misurata da B. Si diuida CD nelle parti vguali ad A, che siano CG, GH, HD; e si diuida EF nelle parti vguali à B, che siano EI, IK, KF. Perche CG è vguale ad A, e la quantità EI è vguale à B; sarà CG ad EI [a] come A à B. Per l'istessa ragione GH ad IK sarà come A à B; ed ancora HD à KF, sarà come A à B. Hor se l'antecedente CG al conseguente EI, è come l'antecedente A al conseguente B; e gliantecedenti GH, HD, à i conseguenti IK, KF, presi separatamente, sono come l'antecedente A al conseguente B; saranno tutti gli antecedenti CG, GH, HD, insieme, à tutti i conseguenti EI, IK, KF [b] insieme, come l'antecedente A al conseguente B. Per la qual cosa CD, ad EF, è come A à B, ch'era da dimostrarsi.



a Corol.alla 7.del 5.

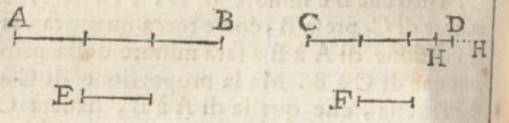
b 12.del 5.

SCOLIO.

La conuersa all'antecedente propositione la faremo nel seguente modo.

Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e la prima è multiplice della terza, sarà la seconda vguale multiplice della quarta.

Habbia AB à CD l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB multiplice di E; Dico che CD è vguale multiplice di F. Se CD non è multiplice di F come AB è multiplice di E, si minuisca, ò s'accresca CD in H in modo, che CH sia multiplice di F, come AB è multiplice di E; e per l'antecedente propositione. AB à CH sarà come E ad F; mà per ipotesi AB à CD, è come E ad F; sarà AB à CH come la medesima AB à CD. Dalche le quantità CH, CD sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque CH è multiplice di F, come AB è multiplice di E: mà sarà CD multiplice di F, come AB è multiplice di E, ch'era da dimostrarsi.

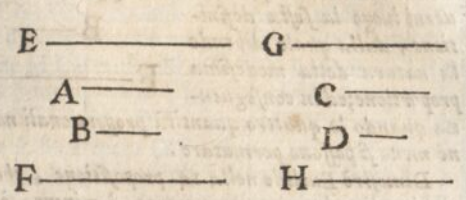


COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto è manifesto, che se AB à CD, è come E ad F, ed E è parte di AB, sarà tale parte F di CD, quale parte è la quantità E di AB; stante che CD è multiplice di F, come AB è multiplice di E.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro grandezze del medesimo genere sono proportionali, permutando saranno ancora proportionali.



Siano le quattro quantità A,B,C,D, del medesimo genere, & habbia l'antecedente A al conseguente B, l'istessa proportione, che hà l'antecedente C al conseguente D. Dico che, permutando, l'antecedente A all'antecedente C, hauerà l'istessa proportione, quale hà il conseguente B al conseguente D.

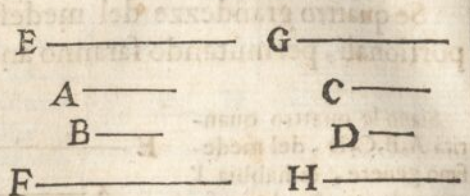
Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, ed F: e similmente si prendano gli vguali multiplici di C, & D, secondo qualunque multiplicatione, e siano G, ed H. Perche E, ed F sono vguali multiplici delle loro parti A, & B, per l'antecedente propos. hauerà E ad F l'istessa proportione di A à B. Per l'*istessa ragione, essendo* G, ed H vguali multiplici delle due C, & D, la *proportione di G ad H sarà come quella di* C à D. Ma si disse, che A à B *hà l'istessa proportione, che hà* C *à* D, *hauerà* A *à* B [a] *l'istessa proportione, che hà* G *ad* H; *fù dimostrata la proportione di* E, F *come quella di* A *à* B, *hauerà* E *ad* F [b] *la medesima proportione, che hà* G *ad* H. Dalche se la prima E è maggiore della terza G, [c] ancora la seconda F sarà maggiore della quarta H. E se la prima E sarà minore, ò vguale à G, ancora F sarà minore, ò vguale ad H. *Si considerino quattro quantità, delle quali* A *sia la prima,* C *la seconda,* B *la terza, e* D *la quarta. Gli vguali multiplici della prima* A, e terza B, per costruttione, sono le due E, & F; e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta D, sono G, ed H. E perche E s'è maggiore di G, per quel che s'è dimostrato, ancora F è maggiore di H; e se E fosse minore, ò vguale à G, ancora F sarebbe minore, ò vguale ad H; per la 6. defin. di questo, la prima A alla seconda C, hà l'istessa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual cosa quando A à B hà l'istessa proportione, che C à D, permutando, hauerà A à C l'istessa proportione, che hà B à D, come fù proposto dimostrare.

[a] 11. del 5.
[b] 11. del 5.
[c] 14. del 5.

SCOLIO.

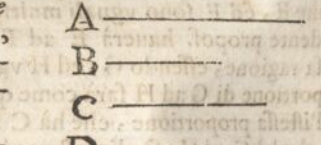
L'antecedente dimostratione hà solamente luogo quando le quattro quantità proportionali sono del medesimo genere. Perche essendo le due E, F, *vguali multiplici delle due* A, B; *saranno le quattro* E, F, A, B *del medesimo genere; e per l'istessa ragione le quattro* G, H, C, D, *saranno del medesimo genere: siche se le due* A, B, *sono d'altro genere, che le due* C, D; *le due* E, F,

non saranno del medesimo genere con le due G, H: e perciò sarebbe errore il dire, che la quantità E sia maggiore, ò minore, ò vguale alla quantità G; come ne meno si deue dire, che F sia maggiore, ò vguale, ò minore di H; e perciò in modo alcuno può hauerui luogo la sesta definitione, dalla quale dipende la natura della medesima proportione; ed in conseguenza quando le quattro quantità proportionali non sono del medesimo genere, ne meno si possono permutare.



Dimostrò Euclide nella 14. propositione, che se quattro quantità sono proportionali, e la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla terza, che ancora la seconda è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta; mà perche i Geometri costumano spesso, quando la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla seconda, conchiudere, che anco la terza è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta, per non lasciare cos'alcuna mancante, la proueremo come fà il Commandino, ed il Clauio nel seguente modo.

Habbia A à B l'istessa proportione che hà C à D. Dico che se A è maggiore di B, ancora C è maggiore di D; e se A è vguale, ò minore di B, sarà C vguale, ò minore di D.



Perche A à B è come C à D, permutando [a] *A à C sarà come B à D; si che presa A come prima quantità, C seconda, B terza, e D quarta; essendo la prima A alla seconda C, come la terza B alla quarta D, per la 14. propositione di questo, se la prima A è maggiore della terza B, anco la seconda C sarà maggiore della quarta D; e se A è minore, ò vguale à B, ancora C sarà minore, ò vguale à D, ch'era da dimostrarsi.*

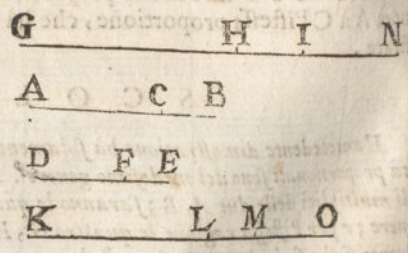
a 16. del 5.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se le quantità composte sono proportionali, le medesime diuise saranno proportionali.

Habbia AB à BC l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, diuidendo, AC à CB hauerà l'istessa proportione, quale hà DF ad FE.

Si prendano gli vguali multiplici delle quattro quantità AC, CB, DF, FE, che siano GH, HI, KL, LM; cioè GH sia multiplice di AC; la quantità HI multiplice di CB; la quantità KL, di DF; e la quantità LM multiplice di FE. Perche GH è multiplice di AC, come HI è multiplice di CB; sarà



GI [a] multiplice di AB, come GH è multiplice di AC; e per l'istessa ragione KM sarà multiplice di ED, come KL è multiplice di DF. Ma per costruttione KL è multiplice di DF, come GH è multiplice di AC; sarà MK multiplice di ED, come GH è multiplice di AC. Fù dimostrato GH multiplice di AC, come IG è multiplice di AB; sarà MK multiplice di ED, come IG è multiplice di AB. Di nuouo si prendano due altri vguali multiplici delle due CB, FE, secondo qualunque multiplicatione; e sia IN multiplice di CB, come MO è multiplice di FE. E perche IH è multiplice di CB, come ML è multiplice di FE; sarà tutta NH [b] multiplice di CB, come LO è multiplice di FE. Si considerino quattro quantità, cioè AB prima, BC seconda, DE terza, ed EF quarta. Gli vguali multiplici della prima AB, e terza DE, sono, per quel che s'è dimostrato, GI, & KM; e gli vguali multiplici della seconda CB, e quarta FE, sono HN, ed LO. E perche la proportione della prima AB alla seconda BC, per ipotesi, è come la terza DE alla quarta EF; per la natura della medesima proportione spiegata nella 6. definitione, se GI, ch'è multiplice della prima, supera HN, ch'è multiplice della seconda, ancora KM, ch'è multiplice della terza, supera LO, ch'è multiplice della quarta; e se GI è minore, ò vguale ad HN, sarà ancora KM minore, ò vguale ad LO. Suppostо prima, che GI sia maggiore di HN; leuatane la commune IH, [c] resta GH maggiore di IN; e per l'istessa ragione essendo KM maggiore di LO, leuatane la commune LM, [d] resta KL maggiore di MO. Similmente se GI è vguale ad HN, ed anco KM è vguale ad LO, leuatone le communi HI, LM, [e] resta GH vguale ad IN, e KL vguale ad MO; e parimente essendo GI minore di HN, ed anco KM minore di LO, leuatane le communi HI, LM, resta GH [f] minore di IN, e KL minore di MO. Si considerino quattro altre quantità, cioè la prima AC, la seconda CB, la terza DF, e la quarta FE. Gli vguali multiplici della prima AC, e terza DF, sono, per costruttione, GH, & KL; e gli vguali multiplici della seconda CB, e quarta FE, sono IN, ed MO. E perche s'è dimostrato, che se GH è maggiore di IN, ancora KL è maggiore di MO; e se GH è minore, ò vguale ad IN, ancora KL è minore, ò vguale ad MO; per la 6. definitione di questo, la prima AC alla seconda CB hauerà l'istessa proportione, quale hà la terza DF alla quarta FE. Per la qual cosa se AB à BC è come DE ad EF, sarà, diuidendo, AC à CB, come DF ad FE, ch'era da dimostrarsi.

[a] 1. del 5.

[b] 2. del 5.

[c] 5. assiom.

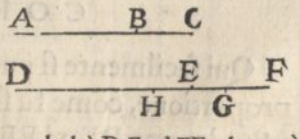
[d] 5. assioma.

[e] 3. assiom.

[f] 5. assiom.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XVIII.

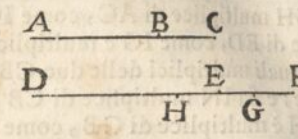
Se le quantità diuise sono proportionali, composte ancora saranno proportionali.



Habbia AB, à BC, l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, componendo, hauerà AC à CB, l'istessa proportione quale hà DF, ad FE.

Se AC non hà l'istessa proportione à CB, quale hà DF ad FE, hauerà

DF ad vn altra quantità maggiore, ò minore di FE, l'istessa proportione, che hà AC à CB. Sia prima quella quantità la notata FG minore di EF; sarà DE minore di DG. Perche AC à CB è come DF ad FG, diuidendo, AB à BC [a] hauerà l'istessa proportione, quale hà D G à G F: ma la proportione di A B à B C, per ipotesi, è come quella di D E ad E F; hauerà D G à G F [b] l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Hor perche la prima D G alla seconda G F è come la terza DE alla quarta EF; e la prima DG è maggiore della terza DE; la seconda FG [c] sarà maggiore della quarta EF; la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque DF hà l'istessa proportione ad vna quantità minore di FE, quale hà AC à CB.



a 17. del 5.
b 11. del 5.
c 14. del 5.
d 9. assiom.

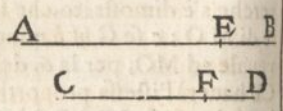
Di nuouo habbia DF ad vna quantità, come FH, maggiore di EF, l'istessa proportione, quale hà AC à CB; sarà DE maggiore di DH; e diuidendo DH ad HF [e] sarà come AB à BC; mà per ipotesi AB à BC è come DE ad EF; sarà DH ad HF [f] come DE ad EF; & essendo la prima DH alla seconda HF, come la terza DE alla quarta E F; e la prima DH è minore della terza D E; sarà la seconda H F [g] minore della quarta EF; il tutto minore della parte, [h] ch'è impossibile: non dunque D F ad vna maggiore di FE hà l'istessa proportione, quale hà *A C à C B*; ne meno, per quel che s'è dimostrato, ad vna minore, ma la proportione di DF ad FE è come quella di AC à CB, ch'era da dimostrarsi.

e 17. del 5.
f 11. del 5.
g 14. del 5.
h 9. assioma.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XIX.

Se il tutto hà l'istessa proportione al tutto, quale hà la parte detratta alla parte detratta; hauerà il rimanente al rimanente l'istessa proportione, quale hà il tutto al tutto.

Habbia il tutto A B al tutto C D l'istessa proportione, quale hà la parte AE alla parte CF. Dico che il rimanente E B al rimanente F D, sarà come il tutto A B al tutto CD.



Perche AB à CD è come AE à C F, permutando, sarà A B ad AE [a] come CD à CF; e diuidendo, BE ad EA [b] sarà come DF ad FC; e permutando di nuouo, BE ad FD [c] sarà come AE à CF; ma AE à CF, per ipotesi, è come AB à CD; sarà EB ad FD, [d] come tutta AB à tutta CD, ch'era da dimostrarsi.

a 16. del 5.
b 17. del 5.
c 16. del 5.
d 11. del 5.

COROLLARIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersione della proportione, come fù spiegato nella defin. 16.; cioè se AB à BC è come DE ad EF; sarà, per la conuersione della pro-

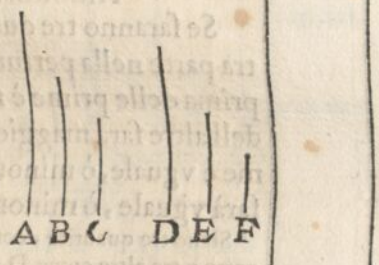
portio-

portione, B A ad A C come E D, A C B
à D F. Perche A B à B C è come D F E
D E ad E F; diuidendo, A C à C B [a] sarà come D F ad F E; ed
inuertendo, sarà B C à C A [b] come E F ad F D; si che, com-
ponendo, sarà B A ad A C [c] come E D à D F, ch'è il nostro
proposto.

a 17. del 5.
b Corollario alla 4. del 5.
c 18. del 5.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XX.

Se siano tre grandezze da vna parte, e tre altre da vn altra parte nella proportione ordinata, se la prima delle prime è maggiore della terza, per l'egualità, ancora la prima dell'altre sarà maggiore della terza; e se la prima delle prime è vguale, o minore della terza, ancora la prima dell'altre sarà vguale, ò minore della terza.



Siano tre grandezze, come A, B, C, da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn altra parte, le quali siano nell'ordinata proportione; cioè, che la proportione di A à B sia come *quella di D ad E*, e la proportione di B à C *sia come quella di E ad F*. *Dico* che, per *l'egualità, se A è maggiore di C, ancora D sarà maggiore di F*; e se A è vguale, ò minore di C, *ancora D sarà vguale*, ò minore di F. Perche B à C, per *ipotesi*, è come E à F, sarà, inuertendo, C à B [a] come F *ad E*. *Supposto prima che A sia maggiore di C*. Dico, che D è maggiore di F. *Perche A è maggiore di C*, presa B come terza quantità, la maggiore A [b] *hauerà maggior proportione alla terza B*, di quella, che hà la minore C *alla medesima B*. Ma la proportione di D ad E, per ipotesi, è l'istessa che la proportione di A à B, hauerà D ad E [c] maggior proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, quale hà F ad E, hauerà D ad E [d] maggior proportione di quella, che hà F alla medesima E. Ma, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; [e] hauendo D maggior proportione ad E di quella, che hà F ad E, sarà D maggiore di F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a Corollario alla 4. del 5.
b 8. del 5.
c 13. del 5.
d 13. del 5.
e 10. del 5.

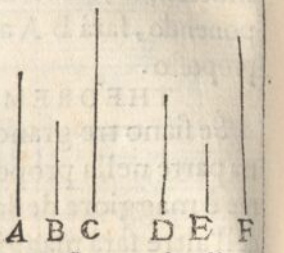


Di nuouo sia A vguale à C. Dico, che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, presa B come terza quantità, hauerà A à B [f] l'istessa proportione, che hà C à B. Ma D ad E hà l'istessa proportione, che A à B, hauerà D ad E [g] l'istessa proportione, quale hà C à B; fù mostrata la proportione di F ad E essere come quella di C à B; hauerà D ad E [h] l'istessa proportione, quale

f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.

K 9.del 5. hà F alla medesima E. Per la qual cosa D K è vguale ad F, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

Finalmente, supposto che A sia minore di C. Dico, che D è minore di F. Perche A è minore di C, presa B come terza quantità, la proportione di A à B l 18.del 5. sarà minore di quella, che hà C alla medesima B; ma D ad E è come A à B, hauerà D ad E m 13. del 5. minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrata la proportione di F ad E essere come quella di C à B; hauerà D ad E n 13. del 5. minor proportione di quella, che hà F alla medesima E. E perche, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà minor proportione, o 10. del 5. è minore; hauendo D minor proportione ad E, che F ad E, sarà D minore di F, come fù proposto dimostrare.



THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXI.

Se saranno tre quantità da vna parte, e tre altre da vn'altra parte nella perturbata proportione, per l'egualità, se la prima delle prime è maggiore della terza, ancora la prima dell'altre sarà maggiore della terza; e se la prima delle prime è vguale, ò minore della terza, ancora la prima dell'altre sarà vguale, ò minore della terza.

Siano tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte, nella perturbata proportione; cioè, che la proportione di A à B sia come quella di E ad F; e la proportione di B à C sia come quella di D ad E. Dico che, per l'egualità, se A è maggiore di C, ancora D sarà maggiore di F; e se A è vguale, ò minore di C, ancora D sarà vguale, ò minore di F. Perche B à C, per ipotesi, è come D ad E, inuertendo, a Corol.alla 4.del 5. sarà C à B, come E à D.



Supposto prima che A sia maggiore di C. Dico che D è maggiore di F. Perche A è maggiore di C, presa B come terza quantità, hauerà A à B b 8.del 5. maggior proportione di quella, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; hauerà E ad F c 13.del 5. maggior proportione di quella, che hà C à B. Fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, che hà E à D; hauerà E ad F d 13.del 5. maggior proportione di quella, che hà la medesima E à D. Quando vna quantità ha proportione à due, e 10.del 5. quella, alla quale hà maggior proportione, è minore; hauendo E maggior proportione ad F di quella, che hà à D, sarà F minore di D, cioè, sarà D maggiore di F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

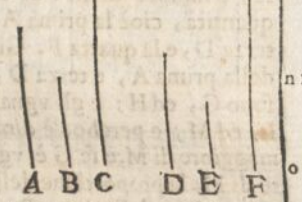
Di

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia vguale à C. Dico che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, preſa B come terza quantità, hauerà A à B [f] l'iſteſſa proportione, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B, hauerà E ad F [g] l'iſteſſa proportione, che hà C à B; fù dimoſtrata C à B hauere l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; hauerà E ad F [h] l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; per il che D K è vguale ad F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.



f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

Finalmente ſuppoſto che A ſia minore di C. Dico che D ſarà minore di F. Perche A è minore di C, preſa B come terza quantità, hauerà A [l] minor proportione à B di quella, che hà C alla medeſima B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; hauerà E ad F [m] minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimoſtrato hauere C à B l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; hauerà E ad F [n] minor proportione di quella, che hà la medeſima E à D. Quando vna terza quantità hà proportione à due, [o] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore; eſſendoſi dimoſtrato hauere E ad F minor proportione di quella, che hà E à D, in conſeguenza ſarà F maggiore di D, cioè D minore di F, ch'era da dimoſtrarſi.



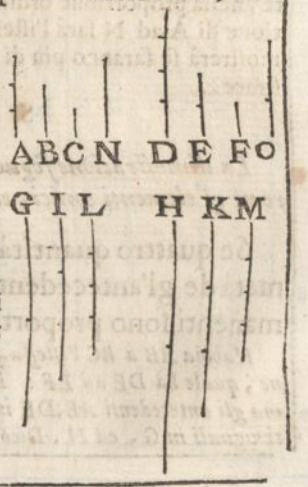
l 8. del 1.
m 13. del 5.
n 13. del 5.
o 10. del 5.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXII.

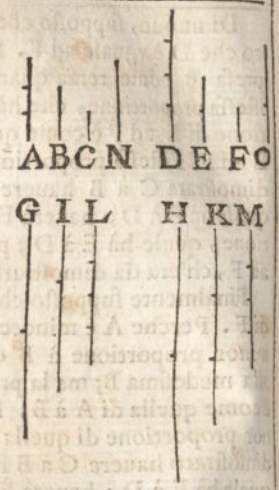
Se ſaranno quante grandezze ſi vogliano da vna parte, ed altretante da vn altra, nella proportione ordinata; per l'egualità, la proportione della prima delle prime all'vltima, ſarà l'iſteſſa, che la proportione della prima delle altre, all'vltima.

Siano prima tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella proportione ordinata; cioè che la proportione di A à B ſia come quella di D ad E, e la proportione di B à C ſia come quella di E ad F. Dico che, per l'egualità, la proportione di A à C è come quella di D ad F. Si prendano gli vguali multiplici delle due prime A, & D, che ſiano G, ed H. Similmente ſi prendano gli vguali multiplici delle due ſeconde B, ed E, che ſiano I, & K; e ſi prendano gli vguali multiplici delle due terze C, ed F, che ſiano L, ed M.

Perche la prima A, alla ſeconda B, per ipoteſi, è come la terza D, alla quarta E; ſono G, ed H gli vguali multiplici della prima



A, e terza D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta E; ſarà la proportione di G ad I [a] come quella di H à K. Similmente, perche la prima B alla ſeconda C è come la terza E alla quarta F, e per coſtruttione le due I, & K ſono vguali multiplici della prima B, e terza E; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F; ſarà la proportione di I ad L, [b] come quella di K ad M: dal che le quantità G, I, L, & H, K, M [c] ſono nella proportione ordinata; e perciò ſe G è maggiore di L, anco H [d] ſarà maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H ſarà vguale, ò minore di M. Si conſiderino quattro quantità, cioè la prima A, la ſeconda C, la terza D, e la quarta F. Gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per coſtruttione, ſono G, ed H; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F, ſono L, ed M; e perche s'è dimoſtrato che ſe G è maggiore di L, anco H è maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H è vguale, ò minore di M; la proportione della prima A alla ſeconda C [e] ſarà l'iſteſſa, che la proportione della terza D alla quarta F.



a 4. del 5.
b 4. del 5.
c 19. defin. del 5.
d 20. del 5.
e 6. defin. del 5.

Di nuouo ſiano più di tre quantità, come A, B, C, N, da vna parte, ed altrettante, come D, E, F, O, da vn altra, nella proportione ordinata. Dico che A ad N ſarà come D ad O.

Si conſiderino tre quantità da vna parte, come A, C, N, e tre altre da vn altra parte, come D, F, O: eſſendoſi dimoſtrata la proportione di A à C eſſere come quella di D ad F; e per ipoteſi, C ad N è come F ad O; ſaranno le tre A, C, N, [f] da vna parte, e l'altre tre D, F, O, da vn altra parte, nella proportione ordinata; e per quel, che s'è dimoſtrato, la proportione di A ad N ſarà l'iſteſſa, che quella di D ad O. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſaranno più di quattro per parte, come fù propoſto dimoſtrare.

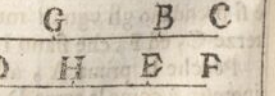
f 19. defin. del 5.

SCOLIO.

La dimoſtratione ſeguente la pongo in queſto luogo, douendo ſeruire ne gl' elementi conici, ed in altri luoghi.

Se quattro quantità ſono proportionali, detrattone le metà de gl'antecedenti, ò le metà de i conſeguenti; i rimanenti ſono proportionali.

Habbia AB à BC l'iſteſſa proportione, quale hà DE ad EF: Diuiſi prima gli antecedenti AB, DE in due parti vguali in G, ed H. Dico che GB à

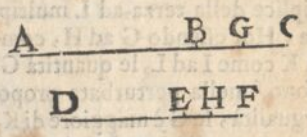


BC è

BC è come HE ad EF. Perche AG è vguale à GB, & DH è vguale ad HE; sarà AG à GB [a] *come DH ad HE, e componendo, AB à BG* [b] *sarà come DE ad EH; ed inuertendo, BG à BA* [c] *sarà come EH ad ED. Si considerino trè quantità BG prima, BA seconda, & BC terza da vna parte; e trè altre EH prima, ED seconda, & EF terza, da vn altra parte. Perche la prima BG alla seconda BA è dimostrata essere come la prima EH alla seconda ED; e la seconda AB alla terza BC, per ipotesi, è come la seconda DE alla terza EF; per l'vgualità, la prima BG alla terza BC,* [d] *sarà come la prima EH alla terza EF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

a Corol. alla 7. del 5.
b 18. del 5.
c Corol. alla 4. del 5.
d 22. del 5.

Di nouo siano diuisi i conseguenti BC, EF in due parti vguali in G, ed H. Dico che se AB à BC è come DE ad EF, sarà ancora AB à BG, come DE ad EH. Perche BG è vguale à GC, & EH è vguale ad HF; sarà CG à GB, [e] *come FH, ad HE; e componendo, CB à BG* [f] *sarà come FE ad EH. Perche AB à BC per ipotesi, e come DE ad EF, componendo, sarà AC à GB* [g] *come DF ad FE; mà CB à BG è come FE ad EH, sarà per l'vgualità AB à BG* [h] *come DE ad EH, il che era da dimostrarsi.*

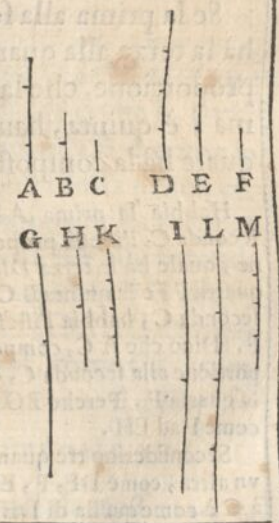


e Corol. alla 7. del 5.
f 18. del 5.
g 18. del 5.
h 22. del 5.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXIII.

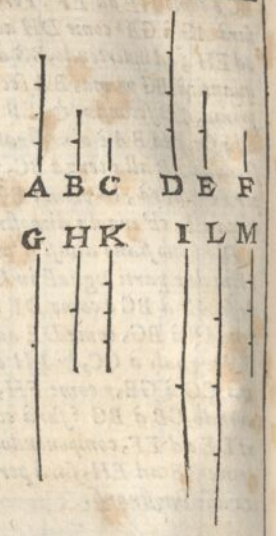
Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra, nella perturbata proportione; per l'egualità, la prima delle prime alla terza haverà l'istessa proportione, quale hà la prima dell'altre alla terza.

Siano le tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè che la proportione di A à B sia come quella di E ad F; ed habbia B à C l'istessa proportione, che hà D ad E. Dico che per l'egualità, haverà A à C l'istessa proportione, che hà D ad F. Si prendano gli vguali multiplici di A, B, D, che siano G, H, I; e si prendano gli vguali multiplici di C, E, F, che siano K, L, M. Perche G, ed H sono vguali multiplici di A, & B, haverà G ad H l'istessa proportione, che hà la quantità A alla quantità B. Similmente essendo L, ed M vguali multiplici di E, ed F; la proportione di L ad M [b] sarà come quella di E ad F. Hor hauendo G ad H l'istessa proportione di A à B; ed E ad F, per ipotesi, è come A à B; haverà G ad H [c] l'istessa proportione, che hà E ad F; fù dimostrata L ad M



a 15. del 5.
b 15. del 5.
c 11. del 5.

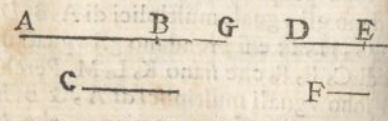
come E ad F; sarà G ad H [d] come L ad M. In oltre perche la prima B alla seconda C, per ipotesi, è come la terza D alla quarta E, sono per costruttione H, ed I, vguali multiplici della prima B, e terza D, e le due K, ed L sono vguali multiplici della seconda C, e quarta E; la proportione di H, ch'è multiplice della prima, à K, [e] multiplice della seconda, sarà l'istessa, che la proportione, che hà I, ch'è multiplice della terza, ad L multiplice della quarta. Hor essendo G ad H, come L ad M, & H à K come I ad L, le quantità G, H, K, & I, L, M, sono [f] nella perturbata proportione; e per l'vgualità, se G è maggiore di K, [g] ancora I sarà maggiore di M; e se G è vguale, ò minore di K, ancora I sarà vguale, ò minore di M. Si considerino quattro quantità, cioè A prima, C seconda, D terza, ed F quarta: gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per costruttione, sono G, ed I; e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta F, sono K, ed M; e perche G, multiplice della prima, s'è maggiore di K, multiplice della seconda, ancora I, multiplice della terza, è maggiore di M, multiplice della quarta; sarà la proportione della prima A alla seconda C, [h] come quella della terza D alla quarta F, ch'era da dimostrarsi.



d 11. del 5.
e 4. del 5.
f 20. defin. del 5.
g 21. del 5.
* e se G è minore è vguale à K ancora I è minore è vguale ad M.
h 6. defin. del 5.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIV.

Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, quale hà la terza alla quarta; e la quinta alla seconda hà l'istessa proportione, che la sesta alla quarta; la composta della prima, è quinta, hauerà l'istessa proportione alla seconda, quale hà la composta della terza, e sesta, alla quarta.



Habbia la prima A B alla seconda C, l'istessa proportione, quale hà la terza DE alla quarta F; e la quinta B G alla seconda C, habbia l'istessa proportione, che hà la sesta EH, alla quarta F. Dico che A G, composta della prima, e quinta, hauera l'istessa proportione alla seconda C, quale hà DH composta della terza, e sesta, alla quarta F. Perche BG à C è come EH ad F, inuertendo, C à BG [a] sarà come F ad EH.

Si considerino tre quantità da vna parte, come AB, C, BG; è tre da vn altra, come DE, F, EH. Perche, per ipotesi, la proportione di AB à C è come quella di DE ad F, e la proportione di C à BG s'è dimostra-

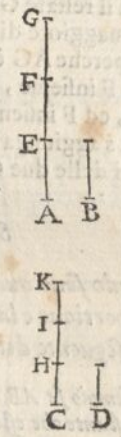
a Corol. all. 4. del 5.

ta

ta essere come quella di F ad EH; sarà, per l'vgualità, AB à BG, come DE ad EH; e componendo, AG à GB [c] sarà come DH ad HE. Si considerino tre altre quantità come AG, GB, C da vna parte; e tre altre, come DH, HE, F, da vn altra parte. Essendosi dimostrato, che A G à G B è come D H ad HE, e per ipotesi, B G à C è come EH ad F; sarà per l'egualità [d] AG à C come DH ad F; per la qual cosa AG composta della prima, e quinta, hà l'istessa proportione à C seconda, quale hà DH composta della terza, e sesta alla quarta F, ch'era da dimostrarsi.

[b] 22.del 5.
[c] 18.del 5.
[d] 22. del 5.

COROLLARIO.



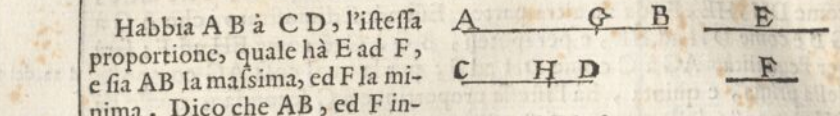
Dall'antecedente propositione si caua, che se A è multiplice di B, come C è multiplice di D, hauerà A à B l'istessa proportione, quale hà C à D. Perche essendo A multiplice di B, come C è multiplice di D, tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata da D. Si *diuida A nelle parti vguali à B, che siano AE, EF, FG; e si diuida C K nelle parti vguali à D, che siano C H, H I, I K. Essendo A E vguale à B, & C H vguale à D; sarà AE à B,* come C H à D; e per l'istessa ragione, EF à B sarà come HI à D; ed ancora FG à B sarà come IK à D. Hor se la prima AE alla seconda B è come la terza CH alla quarta D; e la quinta EF alla seconda B è come la sesta H I alla quarta D; sarà A F, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come C I, composta della terza, e sesta, alla quarta D. Similmente la prima AF alla seconda B è come la terza C I alla quarta D; e la quinta F G alla seconda B è come la sesta IK alla quarta D; sarà AG, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come CK, composta della terza, e sesta, alla quarta D, come si disse.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXV.

Se quattro quantità sono proportionali; la massima, e

la minima, giunte insieme, sono maggiori delle altre due.

Habbia A B à C D, l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB la massima, ed F la minima. Dico che AB, ed F insieme, sono maggiori dell'altre due CD ed E insieme.



Si concepisca da AB detratta AG vguale ad E, e da CD, s'intenda detratta CH vguale ad F; sarà AG à CH [a] come E ad F, cioè [b] come AB à C D. Se dunque il tutto A B al tutto C D è come la parte A G alla parte CH; sarà il restãte GB [c] al restãte HD come tutta AB à tutta CD; ma tutta AB è maggiore di CD, stãte ch'è massima, sarà GB [d] maggiore di HD. In oltre perche AG è vguale ad E, e la quantità CH è vguale ad F, le due AG, ed F insieme, [e] sono vguali alle due CH, ed E, insieme. Hor alle due AG, ed F insieme, s'aggiunga la maggiore GB; ed alle due CH, ed E insieme, s'aggiunga la minore H D; le due A B, ed F insieme, [f] saranno maggiori delle due CD, ed E insieme, ch'era da dimostrarsi.

a Corol. alla 7. de 15.
b 11. del 5.
c 19. del 5.
d Scolio alla 16. del 5.
e 2. assioma.
f 4. a ssioma.

SCOLIO I.

Quando sono quattro quantità proportionali, e l'antecedente di vna proportione è la massima di tutte quelle quantità, necessariamente il conseguente dell'altra proportione è la minima.

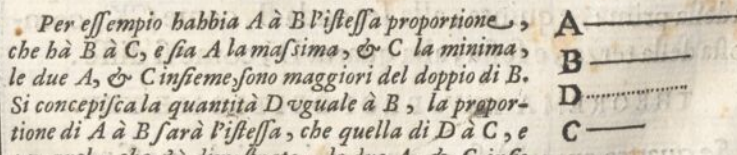
Per essempio se AB à CD è come E ad F, & AB è la massima; sarà F la minima; stante che essendo AB à CD come E ad F, & AB è maggiore di CD, per essere la massima, sarà E [a] maggiore di F. E similmente essendo AB, à CD come E ad F, e la prima AB è maggiore della terza E; sarà la seconda CD [b] maggiore della quarta F: dal che tanto C D, quanto E è maggiore di F, e perciò F sarà la minima. Il che Euclide hà preso come cosa nota, per esser cosa di poco momento à dimostrarsi.

a Scol. alla 16. del 5.
b 14. del 5.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che quando tre quantità sono proportionali, la massima, e la minima, giunte insieme, sono maggiori del doppio della rimanente.

Per essempio habbia A à B l'istessa proportione, che hà B à C, e sia A la massima, & C la minima, le due A, & C insieme, sono maggiori del doppio di B. Si concepisca la quantità D vguale à B, la proportione di A à B sarà l'istessa, che quella di D à C, e per quel, che s'è dimostrato, le due A, & C insie-



me,

me, ſono maggiori delle due B, & D inſieme, cioè ſono maggiori del doppio di B, come ſi diſſe.

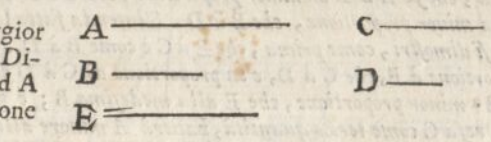
SCOLIO II.

Quì Euclide dà fine al quinto Libro; mà perche molte altre propoſitioni, delle quali ſi ſeruono Autori grauiſſimi, come Archimede, Apollonio Pergeo, ed altri, che ne i loro ſcritti le citano, quaſi come coſe d'Euclide, ſeguendo ancora io il metodo tenuto da varij Commentatori d'Euclide, e confrontando il tutto in Pappo Aleſsandrino, doue queſte ſi trouano, le pongo ſucceſſiuamente con quella maggior facilità, che mi ſia poſſibile.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVI.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; inuertendo, la ſeconda alla prima hauerà minor proportione, che la quarta alla terza.

Habbia A à B maggior proportione, che C à D. Dico che, inuertendo, B ad A hauerà minor proportione di quella, che hà D à C.



Si concepiſca la quantità E in modo, che habbia tal proportione à B, quale hà C à D, ed inuertendo B ad E, [a] ſarà come D à C.

Perche A à B hà maggior proportione di quella, che hà C à D, e C à D, per coſtruttione, è come E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medeſima B. Quando due quantità hanno proportione ad vna terza, [c] quella, che hà maggior proportione, è maggiore; hauendo A maggior proportione à B di quella, che hà E à B, ſarà A maggiore di E. Inoltre perche A è maggiore di E, preſa B, come terza quantità, hauerà B alla maggiore A [d] minor proportione di quella, che hà alla minore E; ma B ad E, per quel che s'è dimoſtrato, è come D à C, hauerà B ad A [e] minor proportione di quella, che hà D à C, ch'era da dimoſtrarſi.

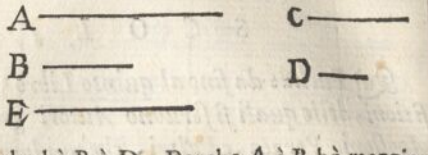
a Corol. alla 4. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e 13. del 5.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXVII.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; permutando, la prima alla terza hauerà maggior proportione, che la ſeconda alla quarta.

Habbia

Habbia la prima A alla ſeconda B maggior proportione, che la terza C alla quarta D. Dico che permutando, la prima A alla terza C hauerà maggior proportione, che la ſeconda B alla quarta D. Si concepiſca la quantità E, che habbia l'iſteſſa proportione à B, quale hà C à D; e permutando, hauerà



a 16.del 5. E à C [a] l'iſteſſa proportione, che hà B à D. Perche A à B hà maggior proportione, che C à D, e la proportione di C à D è come quella di E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medeſima B: per la qual coſa A [c] ſarà maggiore di E. In oltre eſſendo A maggiore di E, preſa C come terza quantità, la maggiore A [d] hauerà maggior proportione alla terza C, che la minore E alla medeſima C: mà la proportione di A à C, per quel che s'è dimoſtrato, è come B à D, hauerà A à C [e] maggior proportione di quella, che hà B à D, come fù propoſto dimoſtrare.

b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 8.del 5.
e 13.del 5.

SCOLIO.

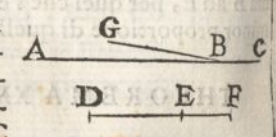
Nell'iſteſſo modo, col ſolo mutare la voce di maggiore in minore, ſi prouerà, che ſe A à B hà minor proportione, che C à D, permutando A à C hauerà minor proportione, che B à D. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione, e ſi dimoſtri, come prima, che E à C è come B à D. Perche A hà minor proportione à B, che C à D, e la proportione di C à D è come E à B, hauerà A à B [a] minor proportione, che E alla medeſima B; e perciò A [b] è minore di E. Preſa C come terza quantità, hauerà A minore alla terza C, [c] minor proportione, che E maggiore à C; mà E à C è come B à D, hauerà A à C [d] minor proportione, che B à D, ch'è il noſtro propoſto.

a 13.del 5.
b 10.del 5.
c 8.del 5.
d 13.del 5.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; componendo, la prima con la ſeconda hauerà maggior proportione alla ſeconda, che la terza con la quarta alla quarta.

Habbia A B à B C maggior proportione di quella, che hà D E ad E F. Dico che, componendo, AC à C B hauerà maggior proportione di quella, che hà DF ad FE. Si concepiſca la quantità GB in modo, che G B à B C



ſia come DE ad EF, è componendo, ſarà GC à CB [a] come DF ad FE. Perche AB à BC hà maggior proportione, che DE ad EF, e la proportione di DE ad EF è come GB à B C, hauerà A B à B C [b] maggior proportione di quella, che hà G B alla medeſima B C; e perciò A B [c] ſarà maggiore di GB; vgualmente s'aggiunga la parte B C, ſarà A C [d] maggiore

a 18.del 5.
b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 4.aſſioma.

giore di tutta G C. Si prenda B C come terza quantità, hauerà la maggiore A C [e] maggior proportione à B C di quella, che hà G C alla medesima C B; mà G C à C B, per quel che s'è dimostrato, è come D F ad F E; hauerà A C à C B [f] maggior proportione di quella, che hà D F ad F E, ch' era da dimostrarsi. e 8.del 5. f 13.del 5.

COROLLARIO.

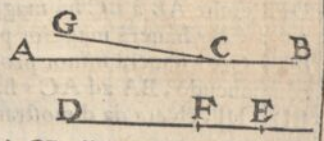
Da quel che s'è detto è manifesto, che se A B à B C hà minor proportione, che D E ad E F; componendo, A C à C B hauerà minor proportione, che D F ad F E. Perche se A B à B C hà minor proportione, che D E ad E F, all'incontro D E ad E F hauerà maggior proportione, che A B à B C; e componendo, D F ad F E [g] hauerà maggior proportione di quella, che hà A C à C B. Hor se la proportione di D F ad F E è maggiore della proportione, che hà A C à C B; sarà la proportione di A C à C B minore della proportione, che hà D F ad F E, come si disse. g 28.del 5.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXIX.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; diuidendo, la differenza frà la prima, e seconda, hà maggior proportione alla seconda, che la differenza frà la terza, e quarta alla quarta.

Siano le quattro quantità A B prima, B C seconda, e la differenza sia A C; sia la terza D E, la quarta E F, e la differenza D F. Hor habbia la prima A B alla seconda B C maggior proportione, che la terza D E alla quarta E F. Dico che diuidendo, la differenza A C alla seconda C B, hauerà maggior proportione, che la differenza D F alla quarta F E.

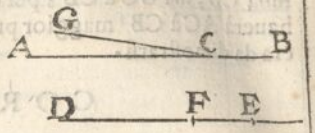
Si concepisca G C in modo, che G B à B C sia come D E ad E F; e diuidendo, sarà G C [a] à C B come D F ad F E. Perche A B à B C hà maggior proportione, che D E ad E F, e la proportione di D E ad E F è come quella di G B à B C, hauerà A B à B C [b] maggior proportione di quella che hà G B alla medesima B C; dal che A B [c] sarà maggiore di G B; e detrattane la commune B C, resta A C [d] maggiore di G C; e presa C B come terza quantità, A C magggiore hauerà maggior proportione alla terza B C [e] di quella, che hà G C minore alla medesima C B; ma G C à C B è come D F ad F E; hauerà A C à C B [f] maggior proportione, che D F ad F E, come fù proposto dimostrare.



a 17.del 5. b 13.del 5. c 10.del 5. d 5.assioma. e 8.del 5. f 13.del 5.

CO-

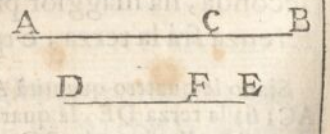
COROLLARIO.



Da quel che s'è detto è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione di quella, che hà DE ad EF, diuidendo, hauerà AC à CB, minor proportione di quella, che hà DF ad FE. Perche hauendo AB à BC minor proportione, che DE ad EF, hauerà DE ad EF maggior proportione, che AB à BG; e
a 29. del 5. diuidendo DF ad FE [a] hauerà maggior proportione, che AC à CB. Hor se la proportione di DF ad F E è maggiore di quella, che hà AC à CB, sarà la proportione di AC à CB minore della proportione di DF ad FE, come si disse.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXX.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; per la conuersione della proportione, la prima alla differenza frà la prima, è seconda, hauerà minor proportione di quella, che hà la terza alla differenza frà la terza, e quarta.



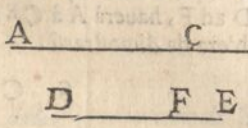
Siano le quattro quantità A B prima, BC seconda, DE terza, & F E quarta; e la differenza frà la prima AB, e la seconda B C sia A C; come anco la differenza frà la terza DE, e quarta FE, sia DF. Hor habbia AB prima à B C seconda maggior proportione, che la terza D E alla quarta FE. Dico che, per la cõuersione della proportione, la prima AB alla differenza AC, hà minor proportione, che la terza DE alla differenza DF. Perche AB à BC hà maggior proportione, che DE ad EF, diuidendo,
a 29. del 5. AC à CB [a] hauerà maggior proportione, che DF ad FE; ed inuertendo,
b 26. del 5. BC à CA [b] hauerà minor proportione di quella, che hà E F ad FD; e
c 28. del 5 componendo, BA ad AC [c] hauerà minor proportione di quella, che hà ED à DF, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione, che DE ad EF, per la conuersione

della

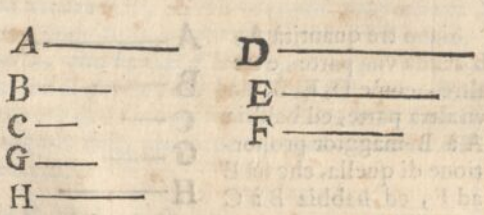
della proportione, hauerà BA ad AC maggior proportione di quella, che ha ED à DF; il che si dimostra come prima s'è fatto; cioè, hauendo A B à BC minor proportione, che DE ad EF; diuidendo, AC à CB [a] hauerà minor proportione, che DF ad FE; ed inuertendo, BC à CA [b] hauerà maggior proportione, che EF ad FD; e componendo, B A ad AC [c] hauerà maggior proportione di quella, che hà ED à DF, come si disse.



a 29. del 5.
b 26. del 5.
c 28. del 5.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXI.

Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla seconda, che la prima dell'altre alla seconda; e la seconda delle prime habbia maggior proportione alla terza, che la seconda dell'altre alla terza; per l'egualità, la prima delle prime alla terza hauerà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte; e la proportione di A à B sia maggiore della proportione di D ad E; ed habbia B à C maggior proportione che E ad F. Dico che per l'egualità, A à C hauerà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiscano le due quantità G, & H in modo, che G à C habbia l'istessa proportione, quale hà E ad F; ed H à G habbia l'istessa proportione, quale hà D ad E: per l'egualità hauerà H à C [a] l'istessa proportione, quale hà D ad F. Perche B hà maggior proportione à C di quella, che hà E ad F; e la proportione di E ad F è l'istessa di quella, che hà G à C; hauerà B à C [b] maggior proportione di quella, che hà G alla medesima C; e perciò B [c] è maggiore di G. In oltre essendo B maggiore di G, presa A come terza quantità, la terza A hauerà maggior proportione alla minore G, [d] che alla maggiore B; ma la proportione di A à B, per ipotesi, è maggiore della proportione, che hà D ad E, la proportione dunque di A à G [e] sarà molto maggiore di quella, che hà D ad E, e perche D ad E è come H à G, hauerà A à G [f] maggior

a 22. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e 8 col. alla 13. del 5.
f 13. del 5.

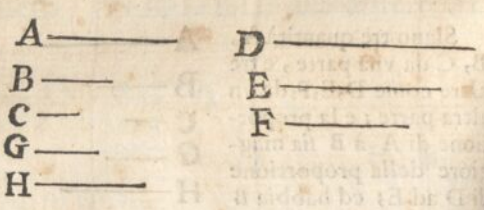
g 10.del 5. proportione di quella, che hà H alla medesima G; per la qual cosa A g
h 8.del 5. sarà maggiore di H. Presa C come terza quantità, haverà A à C h maggior proportione di quella, che hà H alla medesima C; ma H à C è come
K 13.del 5. D ad F, haverà A à C K maggior proportione di quella, che hà D ad F, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Seguendo il medesimo ordine, e mutando solamente le voci di maggiore in minore; si dimostrerà, che se A à B hà minor proportione, che D ad E; e B à C habbia minor proportione, che E ad F; per l'vgualità, A à C haverà minor proportione, che D ad F.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vna altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla seconda, che la seconda dell'altre alla terza; e la seconda delle prime alla terza habbia maggior proportione, che la prima dell'altre alla seconda; per l'egualità, la prima delle prime alla terza haverà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn altra parte, ed habbia A à B maggior proportione di quella, che hà E ad F, ed habbia B à C maggior proportione, che D ad E. Dico che A à C haverà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiscano due quantità come H, & G in modo, che G à C sia come D ad E, ed H à G sia come E ad F; sarà, per l'egualità, H à
a 23 del 5. C a come D ad F. Perche B à C hà maggior proportione, che D ad E,
b 13.del 5. e la proportione di D ad E è come G à C; haverà B à C b maggior pro-
c 10.del 5. portione di quella, che hà G alla medesima C; e perciò B c è maggiore di G. In oltre, essendo B maggiore di G, presa A come terza quantità, haverà A alla minore G d maggior proportione di quella, che hà alla
d 8.del 5. maggiore B: ma la proportione di A à B, per ipotesi, è maggiore della
e Scol. alla 13.del 5. proportione di E ad F; haverà A à G e molto maggior proportione di
f 13.del 5. quella, che hà E ad F: ma E ad F è come H à G, haverà A à G f maggior
g 10.del 5. proportione, che H alla medesima G, per la qual cosa A g sarà maggiore di
h 8.del 5. H; presa C come terza quantità, haverà A à C h maggior proportione di

quella,

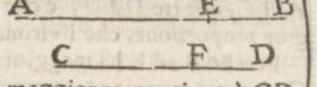
quella, che hà H à C; mà H à C è come D ad F, hauerà A à C K maggior proportione di quella, che hà D ad F, ch'era da dimostrarsi. K 13. del 5.

SCOLIO.

Se la proportione di A à B sarà minore della proportione di E ad F; e la proportione di B à C è minore della proportione di D ad E, ripetendo le medesime cose dette, col solo mutare le voci di maggiore, in minore, si dimostrerà, che per l'vgualità la proportione di A à C è minore della proportione di D ad F.

PROBLEMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se il tutto hà maggior proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta, il rimanente hauerà maggior proportione al rimanente, che il tutto al tutto.



Se il tutto AB hà maggior proportione al tutto CD, che la parte AE alla parte CF. *Dico*, che il rimanente E B hauerà maggior proportione al rimanente F D, ch'il tutto AB al tutto CD. Perche AB hà maggior proportione à CD, che AE à CF, permutando hauerà AB, ad AE maggior proportione, che DC à CF; e per la conuersione della proportione, AB à BE b hauerà minor proportione di quella, che hà CD à DF; e permutando, A B à CD c hauerà minor proportione di quella, che hà EB ad FD. Hor se la proportione di AB à CD è minore della proportione di EB ad FD; sarà la proportione di EB ad FD maggiore della proportione, che hà il tutto AB al tutto CD, ch'era da dimostrarsi.

a 27. del 5.
b 30. del 5.
c 27. del 5.

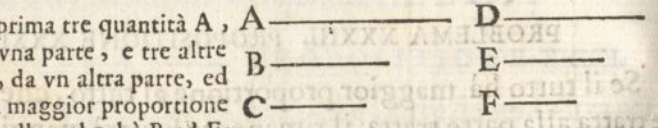
SCOLIO.

Similmente se il tutto hà minor proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta, ritenendo l'ordine antecedente, col solo mutare le voci di maggiore in minore, si dimostrerà, che l'auanzo all'auanzo hà minor proportione, che il tutto al tutto.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

Se saranno quante grandezze si vogliano da vna parte, ed altretante da vn altra parte; e la prima delle prime habbia maggior proportione alla prima delle altre, che la seconda

delle prime alla ſeconda delle altre, e la ſeconda alla ſeconda habbia maggior proportione, che la terza alla terza, e con queſt'ordine per le altre; tutte le prime inſieme, à tutte le altre inſieme, haueranno maggior proportione, che tutte le prime, leuatane la prima, à tutte le altre, leuatane la prima. Di più la prima delle prime haverà maggior proportione alla prima delle altre, che tutte le prime à tutte le altre: e che tutte le prime à tutte le altre haueranno maggior proportione, che l'vltima all'vltima.



Siano prima tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre D, E, F, da vn altra parte, ed habbia A maggior proportione à D di quella, che hà B ad E, ed habbia B ad E maggior proportione, che C ad F. Dico, che le tre A, B, C, inſieme, alle tre D, E, F, inſieme, hanno maggior proportione, che le due B, C, alle due E, F; che A à D hà maggior proportione, che le tre A, B, C, alle tre D, E, F; e che le tre A, B, C, alle tre D, E, F, hanno maggior proportione, che l'vltima C all'vltima F.

Perche B ad E hà maggior proportione, che C ad F, permutando, B à C [a] haverà maggior proportione, che E ad F, e componendo B, C, à C [b] haverà maggior proportione, che E, F, ad F; e permutando di nuouo, B, C, ad E, F, [c] haverà maggior proportione, che C ad F.

a 27. del 5.
b 28. del 5.
c 27. del 5.

Perche il tutto B, C al tutto E, F hà maggior proportione, che la parte C alla parte F, il rimanente B al rimanente E [d] haverà maggior proportione, che il tutto B, C, al tutto E, F. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E, e ſi è dimoſtrato che B ad E hà maggior proportione, che B, C ad E, F, haverà A à D [e] maggior proportione, che le due B, C, alle due E, F: e permutando, A alle due B, C, [f] haverà maggior proportione, che D alle due E, F; e componendo le tre A, B, C, alle due BC, [g] haueranno maggior proportione, che le tre D, E, F, alle due E, F; e permutando di nuouo, le tre A, B, C, alle tre D, E, F, [h] haueranno maggior proportione, che le due B, C, alle due E, F, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo;

d 33. del 5.
e ſcol. alla 13. del 5. in fine
f 27. del 5.
g 28. del 5.
h 27. del 5.

Perche il tutto A, B, C, al tutto D, E, F, hà maggior proportione, che la parte B, C, alla parte E, F, il rimanente A [K] al rimanente D haverà maggior proportione, che il tutto A, B, C, al tutto D, E, F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

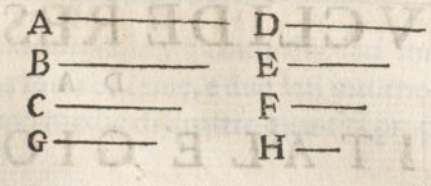
K 33. del 5.

Finalmente perche le tre A, B, C, alle tre D, E, F, hanno maggior proportione, che le due B, C, alle due E, F, e nel principio fù dimoſtrato, che le due B, C, alle due E, F, hanno maggior proportione, che C ad F, le tre A, B, C alle tre D, E, F, [l] haueranno maggior proportione, che l'vltima C all vltima F, ch'era da dimoſtrarſi.

l ſcol. alla 13. del 5. in fine

Se

Se saranno quattro quantità per parte, ritenendo la prima ipotesi, habbia C ad F maggior proportione di quella, che hà G ad H. Dico, che le quattro A,B, C,G,alle quattro D,E,F,H



hanno maggior proportione, che le trè B,C,G alle trè E, F,H; che A à D hà maggior proportione, che le quattro A,B,G,G alle quattro D,E,F,H; e che le quattro A,B,C,G, alle quattro D, E, F,H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H.

Si considerino le trè B,C,G, da vna parte, e le altre trè E, F, H, da vn altra parte, e si dimostri come prima, che le trè B, C, G, alle tre E, F, H hanno maggior proportione, che le due C, G, alle due F, H, similmente che B ad E hà maggior proportione, che le tre B,C,G alle tre E,F, H; e che le tre B,C,G alle tre E,F,H hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E; e per quel che s'è dimostrato B ad E hà maggior proportione, che le tre BCG, alle tre E, F, H, haverà A àD [m] maggior proportione, che le tre B,C,G alle tre E,F,H; e permutando, A alle tre B,C,G, [n] haverà maggior proportione, che D alle trèE,F, H; e componendo, le quattro A,B,C,G alle tre B,C,G [o] haveranno maggior proportione, che le quattro D,E,F,H,alle tre E,F,H. e permutando di nuouo,le quattro A,B,C,G alle quattro D, E, F, H, [p] haveranno maggior proportione, che le tre B,C,G, alle tre E,F,H, ch'era prima da dimostrarsi.

Di più perche il tutto A,B,C,G, al tutto D, E, F, H, hà maggior proportione, che la parte B,C,G, alla parte E,F,H; haverà l'auanzo A all'auanzo D [q] maggior proportione, ch'il tutto A,B,C,G al tutto D, E, F, H, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

Finalmente perche tutte A,B,C,G, à tutte D,E,F, H, hanno maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E,F,H; e le tre B,C, G, alle tre E,F,H, hanno maggior proportione, che l'vltima G, all'vltima H; tutte A,B,C,G, [r] à tutte D,E,F,H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H; Il medesimo si dimostrerà, se saranno più di quattro per parte, ch'è quanto fù proposto dimostrare.

m scol. alla 13. del 5. in fine
n 27. del 5.
o 28. del 5.
p 27. del 5.
q 33. del 5.
r scol. alla 13 del 5. in fine

Fine del Quinto Elemento,

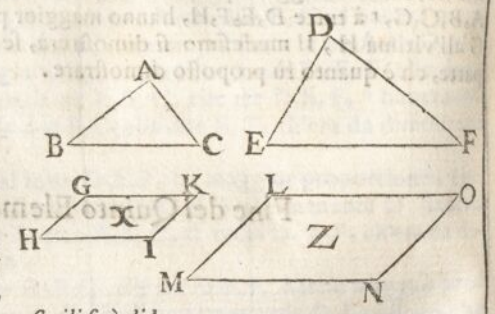
EVCLI

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SESTO

DEFINITIONE
I.

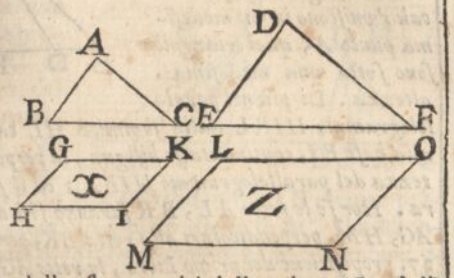
Le figure rettilinee sono simili, quando gli angoli dell' vna sono vguali à i corrispondenti angoli dell'altra, e i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali.

NE i triangoli ABC, DEF, se l'angolo A sarà vguale all'angolo D, l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F; e la proportione del lato AB al lato BC sia, come quella del lato DE al lato EF, (che sono intorno à gli angoli vguali B & E) e la proportione di B C à C A sia come quella di EF ad FD; come ancora la proportione di B A ad A C sia, come quella di ED à DF; i triangoli ABC, DEF, si diranno essere simili frà di loro. Il medesimo s'intende d'ogn'altra figura piana rettilinea, come le notate X, & Z; cioè, se l'angolo G sarà vguale all'angolo L, l'angolo H vguale all'angolo M, l'angolo I vguale all'angolo N, l'angolo K vguale all'angolo O; e la proportione di G H ad H I sia l'istessa, che la proportione di LM ad MN; e sia HI ad I K, come M N ad NO, &c. Le figure rettilinee X, & Z si diranno simili frà di loro.



I I.

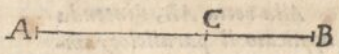
Figure reciproche ſono quelle, quando due lati intorno ad vn angolo di vna ſono eſtreme, e due lati intorno ad vn angolo dell'altra ſono medie di quattro quantità proportionali.



Per eſſempio ſiano prima i triangoli ABC, DEF; ſe la proportione del lato AC al lato EF è l'iſteſſa che la proportione del lato FD al lato BC, gli angoli C, & F ſaranno contenuti da quattro quantità proportionali, delle quali ſarà la prima AC, la ſeconda EF, la terza FD, e la quarta BC; di modo che l'angolo C ſarà contenuto dalle eſtreme, cioè dalla prima AC, e dall'vltima BC, e l'angolo F ſarà contenuto dalle due medie, cioè dalla ſeconda EF, e dalla terza FD; e ſecondo queſte conditioni i triangoli ABC, DEF ſono reciprochi. Similmente ne i parallelogrammi X, & Z, ſe NM ad IH ſarà come IK ad ML, i parallelogrammi X, & Z ſi diranno eſſere reciprochi.

I I I.

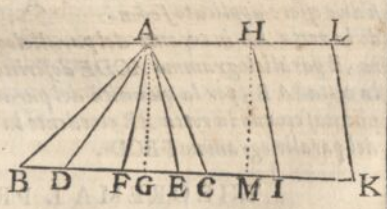
La retta linea ſi dice eſſer ſegata ſecondo l'eſtrema, e media proportione, quando tutta la linea alla maggior parte ſia, come la medeſima parte maggiore alla minor parte.



Si concepiſca qualunque retta linea AB, la quale ſe ſarà diuiſa nel punto C in modo, che la proportione di tutta AB alla maggior parte AC, ſia come la medeſima AC alla parte minore CB; la retta AB ſi dirà eſſer diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

I V.

L'altezza di qualunque figura è la retta linea, che dalla ſommità cade perpendicolare alla baſe.



Nel triangolo ABC, dall'angolo verticale A cada la retta AG perpendicolare alla baſe BC, la retta AG, ſi chiamerà altezza del triangolo ABC. Similmente nel triangolo ABD, dall'angolo verticale A cada la retta AG perpendicolare alla baſe BD, continuata verſo C, la perpendicolare AG ſi chiamerà altezza del triangolo ABD. E nell'iſteſſo modo la

retta

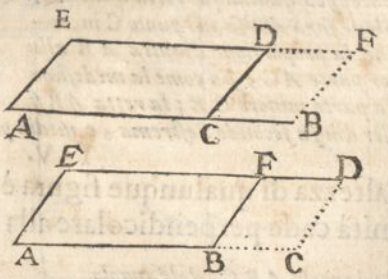
retta AG sarà l'altezza del triangolo ADF; e la medesima sarà l'altezza del triangolo ABF; come anco del triangolo AEC; e de i triãgoli AGE, AGC, AGF, AGB, AFE, ADC, &c. E da qui si raccoglie, che quando più triangoli hanno le basi in vna medesima retta linea come BC, e gli angoli verticali s'vniscono in vn medesimo punto A, quei triangoli sono sotto vna medesima altezza. Di più nel parallelogrammo HIKL dalla sommità HL cada la retta HM perpendicolare alla base KI, continuata se bisogna, la perpendicolare HM si dirà essere l'altezza del parallelogrammo HIKL; ed il simile s'intende d'ogn'altra figura. Hor se le rette AL, BK saranno frà di loro parallele, essendo le rette AG, HM, perpendicolari alla retta BK, per le cose dimostrate auanti della 27. propositione del primo Libro, le rette AG, HM sono frà di loro vguali; e così tutte le figure, che sono poste frà le medesime parallele, haueranno la medesima, ò vguali altezze.



V.

Il parallelogrammo applicato ad vna retta linea, si dice mancare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando non occupa tutta la retta linea, alla quale è applicato; e si dice superare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando occupa maggior lunghezza della linea, alla quale è fatta l'applicatione.

Alla retta AB, s'intenda applicato il parallelogrammo ACDE in modo, che nella prima figura non occupi tutta la retta AB, mà che per compire la retta AB gli manchi il parallelogrãmo DCBF; in questo caso il parallelogrammo ACDE si dice essere applicato secondo la retta AB mancante del parallelogrammo DCBF. E nella seconda figura, il parallelogrammo ACDE descritto sopra la retta AC in modo che superi la retta AB, per la quantità del parallelogrammo FBCD; si dice essere applicato secondo la retta AB eccedente la medesima retta AB, per la quantità del parallelogrammo FBCD.



THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno vna

mede-

medesima, ò vguali altezze, sono frà di loro come le basi.

Siano i due triangoli ABC, D E F, ed i parallelogrammi G B C A, DEFH, le di cui basi siano B C, E F; e s'intendano collocati fra le medesime parallele GH, LN; e per quel, che fù spiegato nella quarta definitione di questo, haueranno vna medesima altezza. Dico che la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F, come ancora del parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, è l'istessa, che la proportione della base BC alla base EF. Si continui BF verso L, ed N, e si prendano in LB quante parti si vogliano come BI, IK, KL, ogn'vna vguale alla base BC. Similmente si prendano in FN quante parti si vogliano come F M, MN, ogn'vna vguale ad EF; si tirino le rette AI, AK, AL, DM, DN; i triangoli ABC, ABI AIK, AKL hanno le basi BC, BI, IK, KL, vguali, e sono frà le medesime parallele, e perciò [a] sono frà di loro vguali. E per l'istessa ragione i triangoli DEF, DFM, DMN sono frà di loro vguali. Tante volte la base CL sarà misurata dalla base BC, per quante volte il triangolo A L C è misurato *dal triangolo ABC; dal che il triangolo* ALC sarà multiplice del triangolo *ABC, come la base LC è multiplice della base* BC. Nell'istesso modo *si dimostrerà, che il triangolo DEN è multiplice del triangolo* DEF, *come la base EN è multiplice della base* EF; se la base *LC* è vguale alla base EN, *i triangoli ALC*, DEN, che hanno le basi vguali LC, EN, e sono frà *le medesime parallele, sono* [b] *frà di loro vguali*: se la base LC è maggiore della base EN, *il triangolo ALC* [c] *sarà maggiore del triangolo* DEN; e se la base LC è minore della base EN, *il triangolo ALC sarà minore del triangolo* DEN. Si considerino quattro quantità; *la prima sia* il triangolo ABC, la seconda il triangolo DEF, la terza sia la base BC, e la quarta la base EF; gli vguali multiplici della prima ABC, e della terza BC, sono per quel, che s'è dimostrato, il triangolo ALC, e la base LC; e gli vguali multiplici della seconda DEF, e della quarta EF, sono il triangolo DEN, e la base EN. E perche se il triangolo ALC (ch'è multiplice della prima) supera il triangolo D E N (ch'è multiplice della seconda) ancora la base LC, ch'è multiplice della terza, supera la base EN, ch'è multiplice della quarta; e se il triangolo ALC è minore, ò vguale al triangolo DEN, ancora la base LC sarà minore, ò vguale alla base EN; per la sesta definitione del 5. libro, la proportione della prima ABC alla seconda DEF, è l'istessa, che la proportione della terza BC alla quarta EF: per la qual cosa il triangolo ABC al triangolo DEF è come la base BC alla base EF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo perche il parallelogrammo GC [f] è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo EH è il doppio del triangolo DEF, sarà il parallelogrammo GC multiplice del triangolo *ABC*, come il parallelo-

a 38. del 1.
b 38. del 1.
c Corol. alla 38. del 1.
f 34. del 1.

grammo EH è multiplice del triangolo DEF; e perciò il parallelogrammo GC al parallelogrammo EH, d sarà come il triangolo ABC al triangolo DEF; ma il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che s'è dimostrato, è come la base BC alla base EF, sarà il parallelogrammo GC, al parallelogrammo EH e come la base BC alla base EF, ch'era da dimostrarsi.



d 15. del 5.

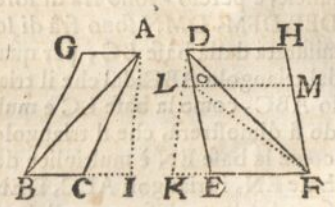
e 11. del 5.

SCOLIO.

Il P. Clauio fà la conuersa dell'antecedente propositione nel seguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che sono frà di loro come le basi, hanno la medesima, ò vguali altezze.

Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui basi BC, EF, e le altezze siano le due AI, DK; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, vuero il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'istessa proportione, quale hà la base BC alla base EF. Dico che le altezze AI, DK sono frà di loro vguali. Se l'altezza DK non è vguale all'altezza AI, vna delle due sarà maggiore. Supposto che DK sia maggiore di AI, si faccia KL a vguale ad AI, e dal punto L si tiri la retta LM b parallela ad FK; segarà il lato DE in qualche punto O, si tiri la retta OF. Perche i triangoli ABC, OEF, hanno vguali altezze, perciò il triangolo ABC d al triangolo OEF è come la base BC alla base EF; mà per ipotesi, il triangolo ABC al triangolo DEF, è come la base BC alla base EF; sarà il triangolo ABC e al triangolo DEF, come il medesimo triangolo ABC al triangolo OEF; per la qual cosa il triangolo OEF f sarà vguale al triangolo DEF; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque DK è maggiore di AI, mà sono frà di loro vguali.



a 3. del 1.

b 31. del 1.

d 1. del 6.

e 11. del 5.

f 9. del 5.

Supposta la medesima costruttione, si considerino i parallelogrammi GBCA OEFM, i quali hanno vna medesima altezza, e perciò sono g come le basi BC, EF: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipotesi, sono come le basi BC, EF; sarà il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, h come il medesimo parallelogrammo GBCA al parallelogrammo OEFM; dal che i parallelogrammi OEFM, DEFH sono K frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile: non dunque l'altezza DK è maggiore dell'altezza AI, mà sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

g 1. del 6.

h 11. del 5.

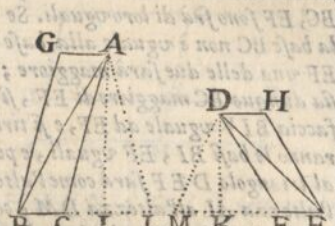
K 9. del 5.

Aggiun-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [249] - 234

Aggiunge in questo luogo il Commandino il seguente Theorema, che noi dimostriamo poco differente à quello, che fà il P. Clauio.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno le basi vguali, sono frà di loro come le altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, che habbiano le basi BC, EF frà di loro vguali, e le loro altezze siano le perpendicolari AI, DK. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF, ed il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, è come l'altezza AI all'altezza DK. Si prolunghino le rette BI verso L, & FK verso M; si faccia IL [a] *vguale à BC, e si faccia MK vguale ad EF. Essendo, per ipotesi, BC vguale ad EF, sarà IL vguale ad MK. Perche i triangoli ABC, AIL hanno la medesima altezza AI, perciò sono* [b] *come le basi; mà la base BC è vguale ad IL, sarà il triangolo ABC* [c] *vguale al triangolo AIL. Nell'istesso modo si dimostrerà che il triangolo DEF è vguale al triangolo DMK; e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF* [d] *è come il triangolo AIL al triangolo DMK. In oltre perche LI è perpendicolare ad AI, & MK è perpendicolare à DK, prese AI, & DK come basi de i triangoli AIL, DKM, sarà LI l'altezza del triangolo AIL, ed MK sarà l'altezza del triangolo DKM; mà LI è mostrata vguale ad MK, i triangoli AIL, DKM haueranno le altezze IL, MK vguali; dalche il triangolo AIL al triangolo DKM* [e] *è come la base AI alla base DK; mà il triangolo AIL al triangolo DKM è dimostrato come il triangolo ABC al triangolo DEF, sarà il triangolo ABC al triangolo DEF* [f] *come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

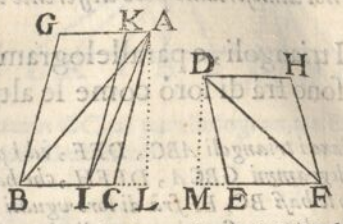
Di nuouo perche il parallelogrammo GBCA è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo DEFH è il doppio del triangolo DEF; sarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, [g] *come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che si è dimostrato, è come l'altezza AI all'altezza DK; sarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH,* [h] *come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimostrarsi.*

a 3. del 1.
b 1. del 6.
c Scol. alla 16. del 5.
d Corol. alla 7. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 15. del 5.
h 11. del 5.

Il P. Clauio fà la conuersa dell'antecedente Theorema nel seguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che sono come le loro altezze, haueranno vguali basi; ò la medesima.

Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui baſi BC, EF, e le altezze ſiano AL, D M; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, come ancora il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'iſteſſa proportione, quale hà l'altezza A L all'altezza DM. Dico che le baſi BC, EF ſono frà di loro vguali. Se la baſe BC non è vguale alla baſe EF vna delle due ſarà maggiore; ſia dunque BC maggiore di EF, ſi



k 3. del 1. *faccia BI k vguale ad EF, e ſi tiri la retta IA; i triangoli ABI, DEF haueranno le baſi BI, EF vguali, e per l'antecedente Theorema il triangolo ABI al triangolo D E F ſarà come l'altezza A L all'altezza D M; mà per ipoteſi l'altezza AL all'altezza DM è come il triangolo ABC al triangolo DEF, ſarà il triangolo ABC al triangolo D E F* l 11. del 5. *come il triangolo A B I al medeſimo triangolo DEF, e perciò il triangolo ABI* m 9. del 5. *è vguale al triangolo A B C: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali.*

n 31. del 1. *Suppoſta la medeſima coſtruttione; dal punto I ſi tiri la retta I K* n *parallela à GB; i parallelogrammi GBIK, DEFH haueranno le baſi BI, E F frà di loro vguali, e per l'antecedente Theorema ſaranno frà di loro come le altezze AL, DM: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipoteſi, ſono come le altezze AL, DM; ſarà il parallelogrammo GBIK al parallelogrammo DEFH, come il parallelogrammo GBCA* o 11. del 5. *al medeſimo parallelogrammo DEFH; e perciò i parallelogrammi GBIK, GBCA* p 9. del 5. *ſono frà di loro vguali: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.*

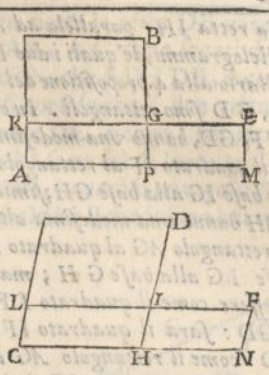
Aggiungo qui il Theorema ſeguente di Claudio Midorgi, per laſciare liberi gli elementi Conici da particolari Lemma.

Se vn quadrato ſia equilatero ad vn Rombo, e qualche rettangolo equilatero ad vn parallelogrammo, equiangolo al Rombo: il quadrato al rettangolo ſarà, come il Rombo al parallelogrammo, che gli è equiangolo.

Sia il quadrato A B equilatero al Rombo CD, ed il rettangolo AE equilatero al parallelogrammo CF; e ſia il parallelogrammo C F equiangolo al Rombo CD. Dico che il quadrato AE al rettangolo AE, ſarà come il Rombo C D al parallelogrammo C F. Si accomodi il quadrato A B, ed il rettangolo AE in modo, che l'angolo A ſia commumune ad ambidue; e ſimilmente s'adatti il Rombo C D, ed il parallelogrammo CF in modo, che habbiano l'angolo C commune; ſarà AK a 34. del 1. *a vguale à PG, ed LC vguale ad I H: ed eſſendo C L, per ipoteſi, vguale ad AK, ſarà HI vguale à PG; dal che BP ad HD* b Corollario alla 7. del 5. *ſarà come P G ad H I. Di più, eſſendo A P vguale à C H, & A M vguale à*

CN,

CN, sarà AP ad AM come CH à CN. In oltre perche i rettangoli AB, AG hanno vna medesima altezza, sarà il quadrato AB al rettangolo AG, [c] *come la base BP alla base PG, cioè* [d] *come DH ad HI: mà DH ad HI, è come il Rombo CD al parallelogrammo CI* [e] *(stante che hanno vna medesima altezza); perciò il quadrato AB al rettangolo AG* [f] *sarà come il Rombo CD al parallelogrămo CI. Di nuouo essendo i rettangoli AG, AE, sotto vna medesima altezza, sarà il rettangolo AG al rettangolo AE,* [g] *come la base AP alla base AM: fù dimostrata AP ad AM, essere come CH à CN; sarà il rettangolo AG al rettangolo AE,* [h] *come CH à CN: mà CH à CN* [K] *è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF (stante che i parallelogrammi CI, CF hanno vna medesima altezza) sarà il rettangolo AG al rettangolo AE* [l] *come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF. Finalmente perche il quadrato AB al rettangolo AG, per quel che s'è dimostrato, e come il Rombo CD al parallelogrammo CI; ed il rettangolo AG al rettangolo AE è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF; per l'egualità, sarà il quadrato AB al rettangolo AE,* [m] *come il Rombo CD al parallelogrammo CF, ch'era da dimostrarsi.*



c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 1. del 6.
l 11. del 5.
m 22. del 5.

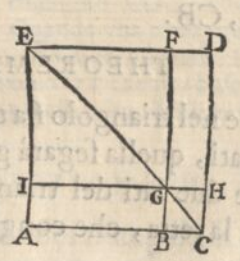
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che se saranno due qualunque rettangoli, e due parallelogrammi equilateri à i rettangoli, & equiangoli frà di loro; i rettangoli saranno frà di loro, come i parallelogrammi.

Per il medesimo fine aggiungiamo il seguente Theorema.

Se saranno due qualunque rette linee, il quadrato di vna al rettangolo contenuto dalle medesime, e come l'istesso rettangolo al quadrato dell'altra.

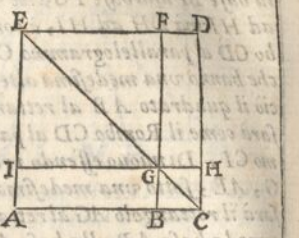
Siano qualunque due rette linee AB, BC. Dico che il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, è come il medesimo rettangolo al quadrato di BC. Si pongano le rette AB, BC, in modo che facciano la sola retta ABC, e sopra la retta AC [a] *si descriua il quadrato AD; si tiri il diametro EC; dal punto B si tiri la retta BF* [b] *parallela ad AE, la quale segarà il diametro EC in qualche punto G, per il quale si faccia pas-*



a 46. del 1.
b 31. del 1.

sare

c 31. del 1. *sare la retta IH c parallela ad AC; sarà diuiso il quadrato AD in quattro parallelogrammi, de' quali i due IF, BH, che sono intorno al diametro, per il Corollario alla 4. propositione del 2. Libro, sono quadrati, ed i complementi AG, GD sono rettangoli. In oltre perche i due IF, GD, hanno vna medesima altezza,*



d 1. del 6. *sarà il quadrato IF al rettangolo GD d come la base IG alla base GH; similmente i due AG, BH hanno vna medesima altezza, e perciò il rettangolo AG al quadrato BH*

e 1. del 6. *e è come la base IG alla base GH; ma IG à GH si disse essere come il quadrato IF al rettangolo GD: sarà il quadrato IF al rettangolo GD*

f 11. del 5. *f come il rettangolo AG al quadrato BH; ma il rettangolo GD è vguale al rettangolo AG, sarà il quadrato IF al rettangolo AG, come il medesimo rettangolo AG al quadrato BH: e perche il rettangolo AG*

g 1. defin. del 2. *g è contenuto dalle due AB, BC (stante che BC è vguale à BG) sarà il quadrato IF, cioè il quadrato di AB, al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, come il medesimo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato BH, cioè al quadrato di BC, ch'era da dimostrarsi.*

COROLLARIO I.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, che se le rette saranno AC, CB, il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB sarà come il medesimo rettangolo contenuto dalle due AC, CB al quadrato di CB.

COROLLARIO II.

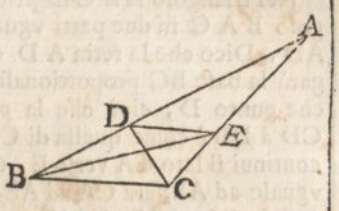
Sarà dunque manifesto, che il rettangolo contenuto dalle due AB, BC è medio proportionale frà i quadrati delle due AB, BC; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nel triangolo sia tirata vna linea retta parallela ad vno de' lati, quella segarà gli altri due lati proportionalmente; e se due lati del triangolo sono segati proportionalmente, la retta, che congiunge le diuisioni, è parallela al terzo lato.

Sia

Sia il triangolo ABC, nel quale sia prima tirata la retta DE parallela ad vno de'lati, come BC. Dico che i lati AB, AC sono segati dalla retta DE proportionalmente in D, ed E; cioè, che AD à DB, è come AE ad EC. Si tirino le rette BE, DC; e si considerino i due triangoli CED, BDE, i quali hanno la medesima base DE, e sono, per ipotesi, frà le medesime parallele DE, BC, e perciò [a] sono frà di loro vguali. Si prenda il triangolo ADE come terza quantità, haverà il triangolo ADE al triangolo CED [b] l'istessa proportione, quale hà il medesimo triangolo ADE al triangolo BDE. a 37. del 1. b 7. del 5.



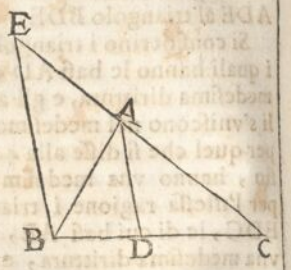
Si considerino i triangoli AED, DEB, i quali hanno le basi AD, DB, in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto E, e per quel che si disse alla 4. defin. di questo, hanno vna medesima altezza. E per l'istessa ragione i triangoli ADE, EDC, le di cui basi AE, EC sono in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto D, sono sotto d'vna medesima altezza. Perche dunque i triangoli AED, EDB hanno vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [c] come la base AD alla base DB; ma il triangolo AED al triangolo EDB, per quel che s'è dimostrato, è come il medesimo triangolo AED al triangolo EDC; sarà AD à DB [d] come il triangolo ADE al triangolo EDC. E perche il triangolo ADE al triangolo EDC è come la base AE alla base EC [e] (stante che sono sotto d'vna medesima altezza) sarà AD à DB, [f] come AE ad EC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. c 1. del 6. d 11. del 5. e 1. del 6. f 11. del 5.

Di nuouo supposto, che la proportione di AE ad EC sia come quella di AD à DB, tirata la retta DE. Dico ch'è parallela al lato BC. Sia fatta la medesima costruttione di prima. Essendo i triangoli AED, EDB, sotto d'vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [g] come la base AD alla base DB: ma per ipotesi AD à DB è come AE ad EC; sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [h] come AE ad EC. Inoltre, essendo i triangoli ADE, DCE sotto d'vna medesima altezza, il triangolo AED al triangolo DEC [K] sarà come la base AE alla base EC: ma AE ad EC, per quel che s'è dimostrato, è come il triangolo AED al triangolo EDB; sarà il triangolo ADE al triangolo EDC [l] come il medesimo triangolo ADE al triangolo EDB. Quando vna terza quantità hà l'istessa proportione à due, quelle [m] sono frà di loro vguali; saranno i triangoli DEB, EDC frà di loro vguali; hanno la medesima base DE, e sono collocati dalla medesima parte BC, e perciò [n] sono frà le medesime parallele BC, DE, ch'era da dimostrarsi. g 1. del 6. h 11. del 5. K 1. del 6. l 11. del 5. m 9. del 5. n 39. del 1.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea diuide vn angolo del triangolo in due parti vguali, quella segarà il lato opposto proportional-

mente à gli altri lati del triangolo; e se le parti della base sono proportionali à gli altri due lati del triangolo, la retta tirata dall'angolo verticale al punto, che separa le parti della base, diuiderà l'angolo verticale in due parti vguali.



Nel triangolo A B C sia prima diuiso l'angolo B A C in due parti vguali dalla retta AD. Dico che la retta A D continuata segarà la base BC proportionalmente in qualche punto D; cioè che la proportione di CD à DB è come quella di CA ad AB. Si continui il lato CA verso E, e si faccia AE [a] vguale ad AB; sarà CA ad AE, [b] come la medesima CA ad AB; si tiri la retta EB, il triangolo AEB sarà isoscele, e gli angoli AEB, ABE sopra la base sono [c] frà di loro vguali. Nel triangolo EAB, continuato il lato EA verso C, l'angolo esterno BAC [d] è vguale alli due angoli ABE, AEB, interni, ed opposti; ma i due angoli ABE, AEB sono frà di loro vguali, sarà l'angolo BAC il doppio dell'angolo ABE, e la metà dell'angolo BAC, cioè l'angolo BAD, sarà vguale all'angolo ABE. Hor essendo le rette AD, EB segate dalla retta AB; e gli angoli alterni DAB, ABE sono frà di loro vguali, sarà la retta AD [e] parallela alla retta EB. Nel triangolo CEB è tirata la retta AD parallela al lato EB, [f] sarà la proportione di CD à DB, come quella di CA ad AE; ma CA ad AE è come la medesima CA ad AB; sarà CD à DB [g] come CA ad AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 3. del 1.
b 7. del 5.
c 5. del 1.
d 32. del 1.
e 27. del 1.
f 2. del 6.
g 11. del 5.

Di nuouo sia diuisa la base BC talmente in D, che CD à DB sia come CA ad AB; tirata la retta DA. Dico che la retta D A diuide l'angolo BAC in due parti vguali. Si concepisca fatta la medesima costruttione di prima. Perche AB è vguale ad AE, gli angoli AEB, ABE [h] sono frà di loro vguali; ed oltre à ciò la proportione di CA ad AE [K] sarà come quella della medesima CA ad AB; ma per ipotesi, CA ad AB è come CD à DB, sarà CD à DB [l] come CA ad AE; dal che AD [m] sarà parallela ad EB. Hor essendo AD, EB frà di loro parallele, segate dalla retta AB, gli angoli alterni DAB, EBA [n] sono frà di loro vguali. E similmente le rette parallele AD, EB, essendo segate dalla retta EC, l'angolo CAD esterno è vguale [o] all'angolo E interno, ed opposto; ma gli angoli AEB, ABE, sono frà di loro vguali; saranno gli angoli DAB, DAC frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

h 5. del 1.
K 7. del 5.
l 11. del 5.
m 2. del 6.
n 29. del 1.
o 29. del 1.

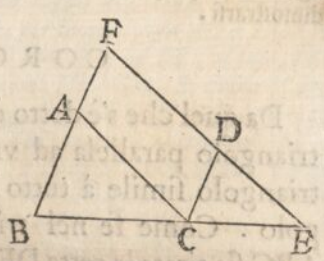
THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

I triangoli equiangoli hanno i lati intorno à gli angoli

vguali

vguali proportionali; e quei lati sono homologhi, che sono opposti à gli angoli vguali.

Siano i triangoli equiangoli ABC, DCE, cioè che l'angolo ABC sia vguale all'angolo DCE; l'angolo BAC vguale all'angolo CDE; e l'angolo ACB sia vguale all'angolo DEC. Dico che la proportione di AB à BC è come quella di DC à CE; che BC à CA è come CE ad ED; e che BA ad AC è come CD à DE. Si concepiscano collocati i triangoli ABC, DCE in modo, che si componghino secondo l'angolo ACD, e che i lati BC, CE costituischino vna sola retta linea. Perche l'angolo ABC è supposto vguale all'angolo DCE, all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo DEC; i due angoli ABC, DEC sono vguali à i due angoli DCE, DEC; ma i due angoli DCE, DEC [a] sono minori di due angoli retti; li due angoli dunque ABC, DEC sono minori di due angoli retti. Hor essendo le rette AB, DE segate dalla retta BE, e gli angoli interni ABC, DEC sono minori di due angoli retti, per lo Scolio alla 31. propos. le rette BA, ED continuate concorreranno in qualche punto F. In oltre perche le rette DC, FB sono segate dalla retta BE, e l'angolo esterno DCE, per ipotesi, è vguale all'angolo ABC interno, ed opposto; sarà la retta DC [b] parallela alla retta FB. Similmente le rette AC, FE sono segate dalla retta BE, e l'angolo esterno ACB è supposto vguale all'angolo E interno, ed opposto; sarà la retta AC [c] parallela ad FE, e perciò il quadrilatero FACD è parallelogrammo, dal che il lato FA [d] sarà vguale al lato DC, ed il lato FD vguale al lato AC.



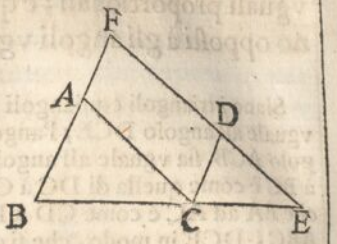
a 17. del 1.
b 28. del 1.
c 28. del 1.
d 34. del 1.

Si consideri il triangolo FBE, segato dalla retta AC, parallela al lato FE; sarà la proportione di BA ad AF, [e] come quella di BC à CE; ma FA è vguale alla retta CD; sarà BA à CD [f] come BC à CE; e permutando, AB à BC [g] sarà come DC à CE; dal che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DCE sono proportionali; e gli antecedenti AB, DC, che si dicono [h] homologhi, sono opposti à gli angoli vguali ACB, DEC; come ancora i conseguēti BC, CE, che gli chiamiamo homologhi, sono opposti à gli angoli vguali BAC, CDE. Di nuouo si consideri il triangolo FBE, segato dalla retta DC, parallela al lato FB; sarà EC à CB [K] come ED à DF; ma DF è vguale ad AC; sarà EC à CB [l] come ED ad AC; e permutando, CE ad ED [m] sarà come BC à CA; e così i lati intorno à gli angoli vguali BCA, CED, sono proportionali; e gli homologhi, cioè gli antecedenti BC, CE, sono opposti à gli angoli vguali BAC, CDE; come ancora gli homologhi, cioè i conseguenti ED, CA, sono opposti à gli angoli ABC, DCE vguali. Finalmente si considerino tre quantità da vna parte, come AB prima, BC seconda, & AC terza; e tre altre da vn altra parte, cioè la prima DC, la seconda CE, e la terza ED. Perche

e 2. del 6.
f 11. del 5.
g 16. del 5.
h 12. defin. del 5.
K 2. del 6.
l 11. del 5.
m 16. del 5.
n 22. del 5.

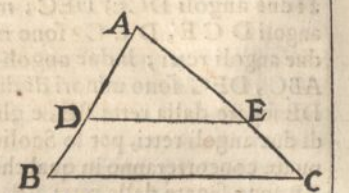
la prima AB alla seconda BC, per quel che s'è dimostrato, è come la prima DC alla seconda CE; e la seconda BC alla terza AC è come la seconda CE alla terza DE; per l'egualità, la prima AB alla terza AC, n sarà come la prima DC alla terza DE; per la qual cosa i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.

n 22. del 5.



COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che la retta linea nel triangolo parallela ad vn lato, detrae dal triangolo vn triangolo simile à tutto il triangolo. Come se nel triangolo ABC sia tirata la retta DE parallela al lato BC, il triangolo detratto ADE sarà simile à tutto il triangolo ABC. Perche, essendo DE parallela al lato BC, l'angolo AED o sarà vguale all'angolo C interno, ed opposto; e per l'istessa ragione l'angolo esterno ADE è vguale all'angolo B interno, ed opposto; ma l'angolo A è commune, i triangoli dunque ADE, ABC sono equiangoli; e per l'antecedente propositione, hanno i lati, intorno à gli angoli vguali, proportionali; e per la definitione prima di questo, i triangoli ADE, ABC sono frà di loro simili.



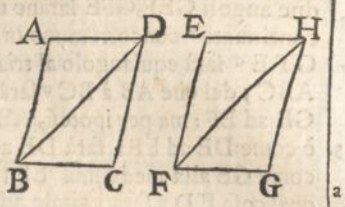
o 29. del 1.

SCOLIO.

Per breuità delle cose à venire aggiungo il seguente Theorema.

Se di due parallelogrammi vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro; e due lati intorno à qualunque angolo dell'vno siano vguali à due lati intorno à qualunque angolo dell'altro; quei parallelogrammi sono frà di loro simili, ed vguali.

Siano



Siano i parallelogrammi BD, FH, de' quali l'angolo C sia eguale all'angolo G; il lato AD vguale al lato EH; ed il lato DC vguale al lato HG. Dico che i parallelogrammi BD, FH sono frà di loro simili, ed vguali. Perche i lati AD, DC, si suppongono vguali à i lati EH, HG; ed in ogni parallelogrammo i lati opposti sono a *frà di loro vguali; e gli angoli opposti sono frà di loro vguali; sarà l'angolo E vguale all'angolo A; il lato AB vguale al lato EF; ed il lato BC vguale al lato FG; per la qual cosa AD à DC* b *sarà come EH ad HG; il lato DA ad AB sarà come EH ad EF; il lato AB à BC sarà come EF ad FG; e sarà BC à CD come FG à GH. Si tirino le diagonali DB, HF. Essendo i lati DA, AB, vguali à i lati EH, EF, e l'angolo A vguale all'angolo E; sarà il triangolo ABD* c *vguale al triangolo EFH; l'angolo ABD sarà vguale all'angolo EFH, e l'angolo ADB vguale all'angolo EHF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo FGH è vguale al triangolo DBC; che l'angolo GFH è vguale all'angolo CBD; e che l'angolo GHF è vguale all'angolo CDB: dal che tutto l'angolo ABC sarà vguale à tutto l'angolo EFG; e l'angolo ADC vguale all'angolo EHG; e tutto il parallelogrammo AC vguale à tutto il parallelogrammo EG; e perciò i parallelogrammi AC, EG sono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione, sono simili; per la qual cosa i parallelogrammi AC, EG sono frà di loro simili, ed vguali, ch' era da dimostrarsi.*

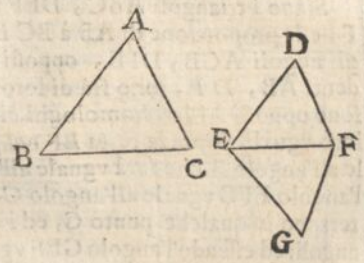
a 34. del 1.

b Corol. alla 4. del 5.

c 4. del 1.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

I triangoli, che hanno i lati proportionali, sono equiangoli; e quelli angoli sono eguali, che sono opposti à i lati homologhi.

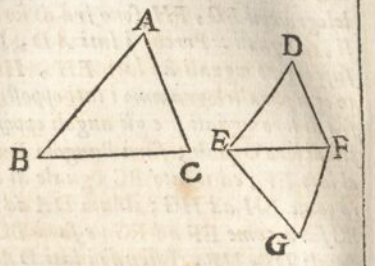


Siano i triangoli ABC, DEF, che habbiano i lati proportionali, cioè che AB à BC sia come DE ad EF; che BC à CA sia come EF ad FD; e che AB ad AC sia come ED à DF. Dico che gli angoli A, & D, che sono opposti à i lati homologhi BC, EF, sono frà di loro vguali. E similmente gli angoli ABC, DEF, che sono opposti à i lati homologhi AC, DF, sono fra di loro vguali; come ancora gli angoli ACB, DFE, opposti à i lati homologhi AB, DE, sono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E si costituisca l'angolo FEG a vguale all'angolo B; e nel punto F, si faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C. Perche gli angoli B, & C b sono minori di due angoli retti, i

a 23. del 1.

b 17. del 1.

due angoli GEF,GFE sarãno minori di due angoli retti;e le rette EG,FG continuate [c] concorreranno in qualche punto G;ed oltre à ciò il triangolo G F E [d] sarà equiangolo al triangolo ABC; dal che AB à BC [e] sarà come GE ad EF: ma per ipotesi, AB à BC è come DE ad EF; sarà DE ad EF [f] come GE alla medesima EF; per la qual cosa E D [g] sarà vguale ad E G. In oltre perche i triangoli GEF,ABC sono equiangoli, e l'angolo C è vguale all'angolo G F E; sarà B C à C A [h] come E F ad F G. Ma, per ipotesi, B C à C A è come E F ad FD; sarà E F ad F G [K] come la medesima EF ad FD, e perciò le due DF, FG [l] sono frà di loro eguali. Ne i triangoli DEF, EGF, i due lati DE, DF, sono eguali alli due lati EG, GF, la base EF è commune; sarà l'angolo G [m] vguale all'angolo D, ed i rimanenti due angoli GFE, GEF [n] vguali alli rimanenti due angoli DFE, DEF; cioè l'angolo DFE sarà vguale all'angolo GFE, e l'angolo DEF vguale all'angolo GEF; ma l'angolo GEF è fatto vguale all'angolo B, sarà l'angolo DEF vguale all'angolo B. Similmente l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C; sarà l'angolo DFE *vguale all'angolo C; e perche i due angoli DEF, DFE sono vguali à i due angoli ABC, ACB, il* rimanente angolo D [o] *sara vguale al rimanente angolo A*, ch'era da dimostrarsi.



c Scol. alla 31. del 1.
d 32. del 1.
e 4. del 6.
f 11. del 5.
g 9. del 5.
h 4. del 6.
K 11. del 5.
l 9. del 5.
m 8. del 1.
n 4. del 1.
o 32. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vn angolo di vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo, ed i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali; i triangoli sono equiangoli; e quegli angoli sono eguali, che sono opposti à i lati homologhi.

Siano i triangoli ABC, DEF; e sia l'angolo B eguale all'angolo DE F; e la proportione di AB à BC sia come quella di DE ad E F. Dico che gli angoli ACB, DFE, opposti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti AB, D E, sono frà di loro vguali; e che gli angoli A, & D, che sono opposti à i lati homologhi, cioè à i conseguenti BC, EF, sono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E [a] si faccia l'angolo FEG vguale all'angolo B, che sarà vguale all'angolo D E F; e nel punto F si faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C, le rette EG,FG, continuate [b] concorreranno in qualche punto G, ed i triangoli GFE, ABC saranno [c] equiangoli; ed essendo l'angolo GEF vguale all'angolo B; sarà GE ad EF [d] come AB à BC: mà per ipotesi AB à BC è come D E ad E F, sarà D E ad EF [e] come G E alla medesima EF; per la qual cosa i lati ED, E G [f] sono frà di loro vguali. *Si considerino i due triangoli DEF, GEF, de' quali il lato EG è vguale al lato E D, il lato EF è commune, e l'angolo GEF è vguale all'angolo DEF; sarà la base GF* [g] *vguale alla base FD; e l'angolo*

a 23. del 1.
b Scol. alla 31. del 1.
c 32. del 1.
d 4. del 6.
e 11. del 5.
f 9. del 5.
g 4. del 1.

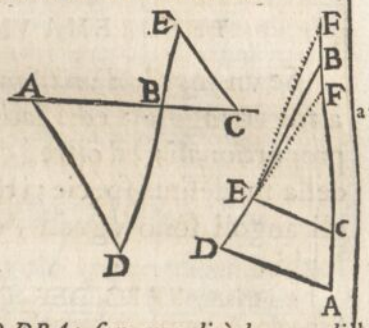
lo

lo GFE vguale all'angolo DFE: mà l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C, sarà l'angolo D F E vguale all'angolo C: per ipotesi l'angolo DEF è vguale all'angolo B; il rimanente angolo D [h] sarà vguale al rimanente angolo A, ch'era da dimostrarsi. h 32. del 1.

SCOLIO.

Per le cose, che bisogneranno stimo bene porre in questo luogo il seguente Theorema.

Se da due qualunque punti A, C, presi nella retta A B, continuata se bisogna, sono tirate due rette parallele, come AD, CE; e sia D A ad A B, come E C à C B; tirate le rette (nella prima figura) DB, BE; e nella seconda figura DE, EB. Dico che queste fanno vna sola retta linea.



Nella prima figura. Perche le rette AD, EC sono parallele, segate dalla retta AC, gli angoli alterni DAB, ECB [a] sono fra di loro vguali: mà per ipotesi, DA ad AB è come EC à CB, i triangolo DAB, ECB, per l'antecedente propositione, sono equiangoli; sarà l'angolo CEB vguale all'angolo ADB; e l'angolo EBC vguale all'angolo ABD: vgualmente s'aggiunga l'angolo DBC, i due angoli EBC, CBD saranno vguali à i due angoli CBD, DBA: mà i dueangoli CBD, DBA [b] sono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBC, CBD saranno vguali à due angoli retti; e le rette EB, BD [c] costituiranno vna sola retta linea. Nella seconda figura, se le rette DE, EB non costituiscono vna sola retta linea, continuata la retta DE, quella ò passarà sopra, ouero sotto la retta EB, come fà la retta DEF. Hor perche la retta EC è parallela ad AD, l'angolo FEC [d] esterno sarà vguale all'angolo FDA interno, ed opposto; e similmente l'angolo FCE sarà eguale all'angolo FAD; ma l'angolo DFA è commune; saranno i triangoli DFA, EFC equiangoli; e la proportione di DA ad AF [e] sarà come quella di EC à C F; e permutando, DA ad EC [f] sarà come AF ad F C. In oltre, per ipotesi, D A ad AB è come EC à CB; permutando, [g] DA ad EC sarà come A B à B C; mà D A ad E C, per quel che s'è dimostrato, è come A F ad FC; sarà A B à BC [h] come AF ad FC; e diuidendo, AC à CB [K] sarà come la medesima AC à CF; dal che CF [l] sarà vguale ad CB; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile: non dunque continuata DE passa sopra, ne sotto la retta EB; mà le due DE, EB costituiscono vna sola retta linea, ch'era da dimostrarsi.

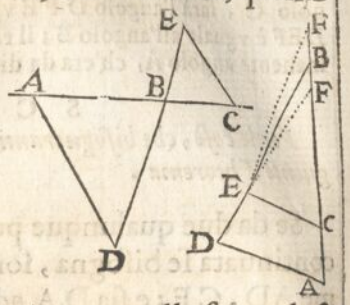
a 29. del 1.
b 13. del 1.
c 14. del 1.
d 29. del 1.
e 4. del 6.
f 16. del 5.
g 16. del 5.
h 11. del 5.
K 17. del 5.
l 9. del 5.

COROLLARIO

Da quel che s'è detto è manifesto, che se D A ad A B è

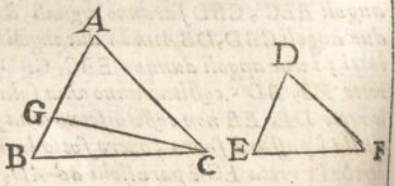
come

come E C à C B; tirata la retta B E, e continuata, quella concorre con A D nel punto D; ouero tirata la retta E D, quella continuata paſſa per il punto B; ouero tirata la retta D B, e continuata, ſe biſogna, quella paſſa per il punto E; ſtante che s'è dimoſtrato, che tirate le rette E B, B D come nella prima figura, ouero E D, E B, come nella ſeconda figura, quelle coſtituiſcono vna ſola retta linea.



THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vn angolo d'vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo; ed i lati intorno ad vn altr'angolo ſono proportionali; ed oltre à ciò i rimanenti due angoli ſono della medeſima ſpecie; i triangoli ſono equiangoli; e quegli angoli ſono vguali, che ſono oppoſti à i lati homologhi.



Ne i triangoli ABC, DEF, ſia l'angolo A vguale all'angolo D; ed i lati intorno à due altri angoli, come C, ed F ſiano proportionali; cioè che AC à CB ſia come DF ad FE; ed i rimanenti angoli E, & B ſiano della medeſima ſpecie; cioè che ognuno ſia minore del retto, ouero non minore del retto. Dico che gli angoli ABC, DEF, oppoſti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti DF, AC, ſono frà di loro vguali; e che gli angoli C, ed F ſono frà di loro vguali. Suppoſto prima, che gli angoli E, ed F ſiano acuti, cioè che ognuno ſia minore del retto; ſe l'angolo DFE non è vguale all'angolo ACB, vno de i due ſarà maggiore: e ſuppoſto che l'angolo ACB ſia maggiore dell'angolo DFE, ſi faccia
a 23. del 1. l'angolo ACG [a] vguale all'angolo DFE, ſarà l'angolo A C G minore dell'angolo ACB; e perciò la retta CG ſega l'angolo ACB, e continuata concorre col lato AB in qualche punto G. Ne i triangoli AGC, DEF eſſendo l'angolo A, per ipoteſi, vguale all'angolo D; e l'angolo ACG, per
b 32. del 1. coſtruttione, vguale all'angolo F; il rimanente angolo AGC [b] ſarà vguale al rimanente angolo E; ed i triangoli AGC, DEF ſono equiangoli, e
c 4. de 16. la proportione di AC à CG [c] ſarà come quella di DF ad FE: ma DF

ad

ad FE, per ipotesi, è come AC à CB; sarà AC à CG [d] come la medesima AC à CB; dalche le rette CG, CB [e] sono frà di loro vguali, il triangolo CGB è isoscele, e gli angoli CBG, e CGB [f] sono fra di loro vguali: ma l'angolo CBG, per ipotesi, è minore d'vn angolo retto, sarà l'angolo CGB minore d'vn angolo retto; e perche gli angoli CGB, CGA [g] sono vguali à due retti, detrattone l'angolo CGB minore del retto, resta l'angolo CGA maggiore del retto; fù dimostrato l'angolo CGA vguale all'angolo E, sarà l'angolo E maggiore del retto, ch'è contro all'ipotesi, mentre l'angolo E fù supposto minore del retto: quando dunque ognuno degli angoli E, & B è minore del retto, non sono gli angoli ACB, DFE frà di loro ineguali.

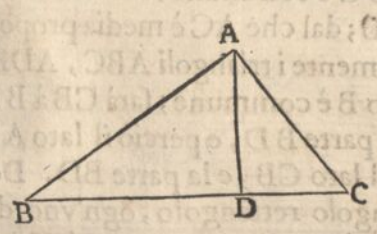
d 11. del 5.
e 9. del 5.
f 5. del 1.
g 13. del 1.

Di nuouo supposto, che ognuno degli angoli E, & B, non sia minore d'vn angolo retto; si faccia la medesima costruttione, e dimostratione di prima, e si dimostri, che le rette CG, CB sono frà di loro vguali; sarà il triangolo CGB isoscele, e gli angoli CBG, CGB [h] sono frà di loro vguali: ma l'angolo B è supposto non minore d'vn angolo retto, ne meno l'angolo CGB sarà minore d'vn angolo retto; e perciò i due angoli CBG, CGB, del triangolo CBG, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo Libro; non dunque l'angolo ACB è maggiore dell'angolo DFE, ma sono fra di loro vguali; e perche l'angolo A è supposto vguale all'angolo D, sarà il rimanente angolo B [K] vguale all'angolo E, ch'era da dimostrarsi.

h 5. del 1.
K 32. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se dall'angolo retto d'vn triangolo rettangolo cade vna retta perpendicolare al lato opposto; quella diuide il triangolo in due triangoli simili fra di loro; ed ognuno simile à tutto il triangolo.

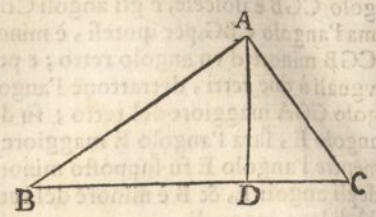


Nel triangolo ABC, angolo retto in A, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato opposto BC. Dico che i triangoli ADB, ADC sono frà di loro simili; ed ogn'vno è simile à tutto il triangolo ABC. Si considerino i triangoli ADC, BAC, de' quali gli angoli BAC. ADC sono retti; l'angolo C è commune ad ambidue i triangoli; e perciò il rimanente angolo DAC [a] sarà vguale al rimanente angolo B, ed i triangoli ABC, ADC sono equiangoli; dal che haueranno i lati intorno à gli angoli vguali [b] proportionali, e perciò [c] sono simili frà di loro; [ↄ] sarà BA ad AC [d] come AD à DC. Di nuouo si considerino i due triangoli ADB, ABC, de quali gli angoli BAC, ADB sono retti; l'angolo B è commune ad ambidue i detti triangoli; sarà il rimanẽte angolo DAC, e

a 32. del 1.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 4. del 6.
e 32. del 1.

vgua-

vguale al rimanente angolo C, ed i triangoli ABC, A D B ſono equianli; e però i lati intorno à gli angoli vguali [f] ſono proportionali; ed in conſeguenza [g] ſono frà di loro ſimili; e ſarà BA ad A C [h] come B D à D A: mà, per quel che s'è dimoſtrato, BA ad AC è come A D à DC; ſarà BD à DA [K] come AD à DC. Ne i triangoli ADB, ADC, angoli retti in D, eſſendo i lati intorno à gli angoli vguali A D B, A D C proportionali, cioè B D à D A, come AD à DC; i triangoli A D B, A D C [l] ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [m] proportionali, e perciò [n] ſono frà di loro ſimili. S'è dimoſtrato, che ogn'vno è ſimile à tutto il triangolo A B C; la retta dunque A D diuide il triangolo ABC in due triangoli ſimili frà di loro, ed'ognuno ſimile à tutto il triangolo ABC, ch'era da dimoſtrarſi.



f 1. defin. del 6.
g 1. defin. del 6.
h 4. del 6.
K 11. del 5.
l 6. del 6.
m 4. del 6.
n 1. defin. del 6.

COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrata BD à DA eſſere come la medeſima DA à DC, ſarà manifeſto, che la retta AD, la quale cade dall'angolo retto A *perpendicolare alla baſe* BC, è media proportionale frà le parti BD, DC della baſe BC.

COROLLARIO II.

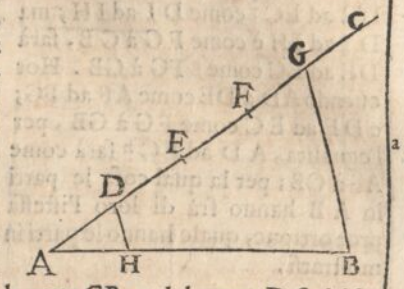
Perche i triangoli ABC, ADC ſono equiangoli, e l'angolo C è commune, ſarà BC à CA, come la medeſima AC à CD; dal che AC è media proportionale frà BC, CD. Similmente i triangoli ABC, ADB ſono equiangoli, e l'angolo B è commune; ſarà CB à B A come la medeſima A B alla parte B D, e perciò il lato A B è media proportionale frà il lato CB, e la parte BD. Donde è manifeſto, che nel triangolo rettangolo, ogn'vno de' lati intorno all'angolo retto è media proportionale frà le baſe, e la parte interpoſta frà la perpendicolare, che cade dall'angolo retto, e quel lato.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE IX.

Da vna data retta linea tagliarne vna parte propoſta.

Sia

Sia data la retta AB, dalla quale se ne voglia tagliare vna parte proposta; e supposto che se ne voglia tagliare la quarta parte. Da vno degli estremi della retta AB, come dall'estremo A, si tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta AB; si prenda in AC qualunque punto D, e si taglino le parti DE, EF, FG, [a] ogn'vna vguale ad AD; e le parti vguali in AG deuono essere tante, per quanto bisogna, acciòche AD sia parte di AG, secondo la proposta parte; e perche s'è proposta la quarta parte, perciò le parti in AG saranno quattro. Si tiri la retta GB, e dal punto D si tiri la retta DH, [b] parallela alla retta GB, la quale segarà AB in qualche punto H. Dico che AH sarà la quarta parte di AB. Nel triangolo AGB la retta DH è parallela al lato GB, e perciò GD à DA [c] sarà come BH ad HA; e componendo, GA ad AD [d] sarà come BA ad AH; ed inuertendo, AD ad AG [e] sarà come AH ad AB: ma AD è la quarta parte di AG, sarà dunque AH [f] la quarta parte di AB. L'istesso si farà se sarà proposta altra parte, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

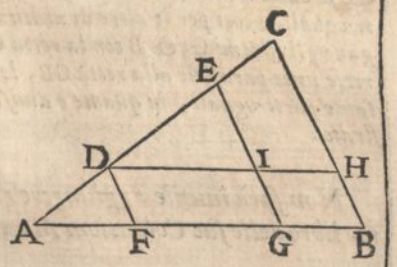


a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 6.
d 18. del 5.
e Corol. alla 4. del 5.
f Coroll. alla 15. del 5.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE X.

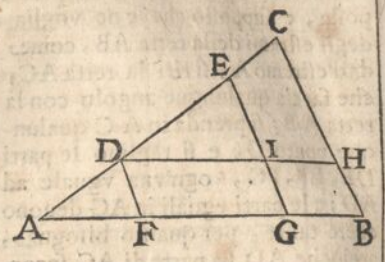
Date due rette linee, delle quali vna sia diuisa in quante parti si vuole, e l'altra non diuisa; segare la non diuisa nelle parti della diuisa.

Sia la retta non diuisa AB, da segarsi nelle parti della diuisa AC; cioè che le parti di AB habbiano l'istessa proportione, quale hanno le parti, che sono in AC, la quale supponiamo diuisa come in D, ed E. S'inclinino le rette AB, AC, che s'vniscano nell'estremo A, secõdo qualũque angolo CAB; si tiri la retta CB; e da i punti D, ed E, si tirino le rette DF, EG [a] parallele alla retta CB, le quali segaranno la retta AB come in F, & G. Dico che AB sarà diuisa nelle parti di AC. Dal punto D si tiri la retta DH [b] parallela ad AB, la quale segarà le rette EG, CB, come in I, ed H. E perche le rette DF, IG, HB sono parallele, i quadrilateri DFGI, IGBH sono parallelogrammi; e sarà DI [c] vguale ad FG, & IH vguale à GB; per la qual cosa DI ad IH [d] sarà come FG à GB. Nel triangolo AGE la retta DF è parallela ad EG,



a 31. del 1.
b 31. del 1.
c 34. del 1.
d Corol. alla 7. del 5.

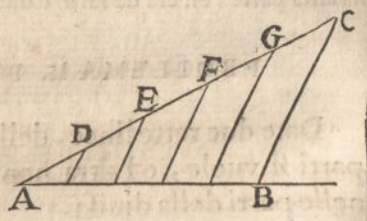
e 2. del 6. sarà AD à DE [e] come AF ad FG. Similmente nel triangolo DHC la retta E I è parallela ad H C, sarà
f 2. del 6. DE ad EC [f] come D I ad I H; ma D I ad I H è come F G à G B, sarà
g 11. del 5. DE ad EC come [g] FG à GB. Hor essendo AD à DE come AF ad FG; e D E ad E C come F G à GB, per
h 22. del 5. l'egualità, A D ad EC [h] sarà come AF à GB; per la qual cosa le parti in A B hanno frà di loro l'istessa proportione, quale hanno le parti in AC frà di loro, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



SCOLIO.

Da quel che s'è detto, sarà facile trouare il modo da diuidere vna retta in quante parti vguali si vuole.

Per essempio, habbiasi da diuidere la retta A B in quante parti vguali si vuole: dall'estremo A si tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta AB; si prendano in AC tante parti vguali, per quante parti si vogliono in AB; cioè se si vuole diuidere AB in tredici parti vguali, si prenderanno in AC, tredici parti vguali: se AB si vuole diuidere in cinque parti vguali, si prenderanno in AC cinque parti vguali, e così per le altre di moltitudine maggiore, ò minore; poi si congiungano gli estremi C, & B con la retta CB, e da i punti D, E, F, G, &c. si tirino rette linee parallele alla retta CB, le quali continuate diuideranno AB in tante parti vguali, in quante è diuisa la retta AC, come sopra fù dimostrato.



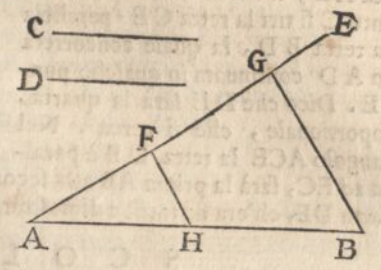
Non sarà inutile aggiungere quì vn Problema di Pappo nel settimo libro delle sue Collettioni Matematiche.

Diuidere vna data retta linea secondo vna data proportione.

Habbiasi da diuidere qualunque data retta AB, secondo la data proportione di C à D. Dall'estremo A si tiri la retta AE, che faccia qualunque

angolo

angolo con AB; poi si faccia AF a *vguale à C, e si tagli FG vguale à D; sarà AF ad FG* b *come C à D. Si tiri la retta GB, e dal punto F si tiri la retta FH* c *parallela alla retta GB, la quale segarà la retta AB in qualche punto H. Dico che AH ad HB è come C à D. Nel triangolo ABG, la retta FH è parallela al lato GB, sarà* d *AH ad HB come AF ad FG; ma AF ad FG è come C à D, sarà AH ad HB* e *come C à D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.*



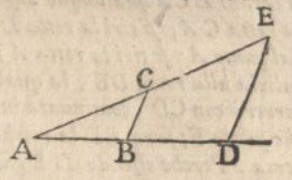
a 3.del 1.
b Corol.alla 7.del 5.
c 3. del 1.
d 2.del 6.
e 11.del 5.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Date due rette linee, ritrouarle vna terza proportionale.

Siano date le due rette AB, AC, alle quali si vuole ritrouare vna terza proportionale; cioè che la prima AB alla seconda AC sia come la seconda AC ad vn altra terza quantità.

S'inclinino le due AB, AC, che concorrano insieme nell'estremo A, e facciano qualunque angolo CAB; si tiri la retta CB, poi si continui AB verso D, e si faccia BD a *vguale ad AC; dal punto D si tiri la retta DE* b *parallela alla retta BC,* la quale concorrerà con *AC continuata in qualche punto E. Dico che* la retta CE sarà la terza proportionale. *Nel triangolo ADE la retta CB* è parallela ad ED, sarà AB à BD c come AC à CE; ma *BD* è vguale ad AC, sarà AB ad AC come la medesima AC à CE; cioè la prima AB alla seconda AC come la seconda AC alla terza CE, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



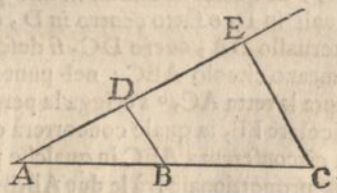
a 3.del 1.
b 31.del 1.
c 2.del 2.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XII.

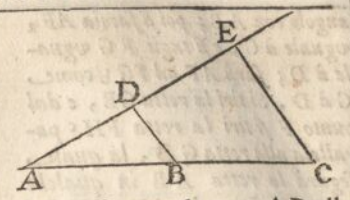
Date tre rette linee, ritrouarle la quarta proportionale.

Siano date le tre rette linee AB, BC, AD, alle quali si voglia ritrouare la quarta proportionale.

Si ponghino le prime due AB, BC in modo, che facciano la sola retta AC; e nell'estremo A s'inclini la terza AD à qualunque angolo con la



retta AB; si tiri la retta DB; e dal
a 31. del 1. punto C si tiri la retta CE [a] parallela alla retta BD, la quale concorrerà con AD continuata in qualche punto E. Dico che DE sarà la quarta proportionale, che si cerca. Nel triangolo ACE la retta DB è parallela ad EC, sarà la prima AB alla seconda BC [b] come la terza AD alla
b 2. del 6. quarta DE, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

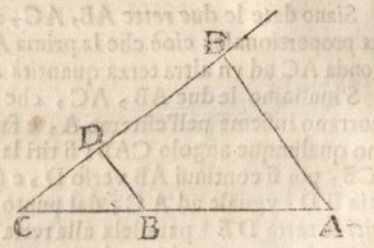


SCOLIO.

Il seguente problema di Pappo Alessandrino è simile all'antecedente.

Date le tre rette AB, BC, CD ritrouare vna retta, che habbia l'istessa proportione à DC, quale hà AB à BC.

Si pongano le due AB, BC in vna medesima dirittura; e nell'estremo C s'inclini DC à qualunque angolo con la retta CA; si tiri la retta DB; e
c 31. del 1 *dal punto A [c] si tiri la retta AE parallela alla retta DB, la quale concorrerà con CD, continuata in qualche punto E; sarà ED la retta, che si cerca. Perche essendo DB parallela ad AE, sarà AB à BC [d] come ED*
d 2. del 6. *à DC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.*

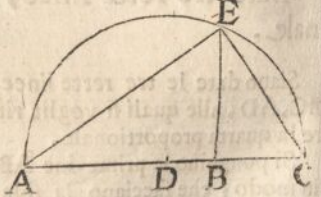


PROBLEMA V. PROPOSITIONE XIII.

A due date rette linee ritrouare vna media proportionale.

Siano date le rette AB, BC, alle quali si voglia ritrouare vna media proportionale.

Si pongano le rette date AB, BC in modo, che costituiscano la sola retta
a 10. del 1. AC, la quale [a] si diuida in due parti vguali in D, e fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DC, si descriua il mezzo circolo AEC: nel punto B,
b 11. del 1. sopra la retta AC, [b] s'erigga la perpendicolare BE, la quale concorrerà con la circonferenza AEC in qualche punto E. Dico che la retta EB è media proportionale frà le due AB, BC. Si tirino le rette EA, EC; sarà l'an-



golo

golo A E C [c] nel mezzo circolo retto. Nel triangolo rettangolo A E C dall'angolo retto E cade la retta EB perpendicolare alla baſe AC, la retta EB [d] diuide il triangolo EAC ne i due triangoli EBC, EBA frà di loro ſimili, e la proportione di AB à BE [e] ſarà come quella di BE à BC; dal che di tre rette proportionali AB, BE, BC, quella di mezzo è la retta EB, che diciamo media, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. c 1. de fin. del 6. d 8. del 6. e 1. de fin. del 6:

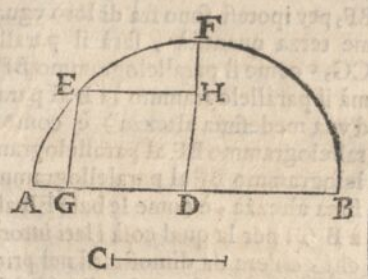
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che ſe da qualunque punto preſo nella circonferenza d'vn mezzo circolo, cade vna retta perpendicolare al diametro, quella ſarà media proportionale frà le parti del diametro, e la dimoſtratione è la medeſima fatta antecedentemente.

SCOLIO.

Gioua per le coſe auuenire il ſeguente Problema.

Sia data la retta C non maggiore della metà di A B; diuidere la retta A B in modo, che la retta C ſia media proportionale frà le parti di AB.



Si diuida A B [a] in due parti vguali in D; fatto centro in D, coll'interuallo D A, ouero D B, ſi deſcriua il mezzo circolo A F B; nel centro D ſi ponga D F [b] perpendicolare ad A B, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto F. Se la retta C è vguale ad F D, eſſendo F D media proportionale frà le due A D, D B ſarà la retta C media proportionale frà le medeſime parti AD, DB; ma ſe la retta C è minore di F D, ſi faccia DH [c] vguale alla retta C, dal punto H ſi tiri la retta HE [d] parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto E, dal punto E ſi faccia cadere la retta E G [e] perpendicolare ad A B: per l'antecedente Corollario la retta E G ſarà media proportionale frà le parti AG, GB; ma la retta EG [f] è vguale ad HD cioè vguale alla retta C (per eſſere HDGE parallelogrammo) ſarà la retta C media proportionale frà le parti AG, GB; per la qual coſa la retta AB è diuiſa in G in modo che la data C è media proportionale frà le parti A G, G B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. a 10. del 1. b 11. del 1. c 3. del 1. d 31. del 1. e 12. del 1. f 34. del 1.

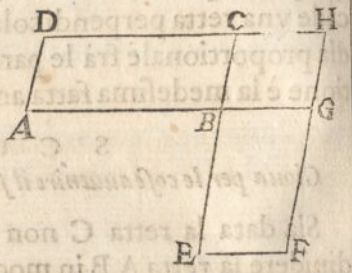
THEOREMA IX. PROPOSITIONE XIV.

Se i parallelogrammi, de'quali vn angolo dell'vno ſia vguale ad vn angolo dell'altro, ſono frà di loro vguali, i

lati

lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i parallelogrammi ſono frà di loro vguali.

Siano i due parallelogrammi ABCD, BEFG, de' quali l'angolo ABC dell'vno ſia vguale all'angolo EBG dell'altro; e ſuppoſto prima che il parallelogrammo ABCD ſia vguale al parallelogrammo B E F G. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali, ABC, EBG ſono reciprochi; cioè che AB à BG è come EB à BC.



Si accommodino i propoſti parallelogrammi in modo, che i lati AB, BG facciano la ſola retta linea AG. Perche gli angoli ABC, EBG ſono vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro, il commune angolo C B G; i due angoli ABC, CBG ſaranno vguali à i due angoli EBG, GBC: mà i due angoli ABC, CBG ſono [a] vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBG, GBC ſono vguali à due angoli retti; dal che le rette EB, BC [b] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Si prolunghino i lati DC, FG. fin'che concorrono in qualche punto H. Perche i parallelogrammi DB, BF, per ipoteſi ſono frà di loro vguali, preſo il parallelogrammo CG come terza quantità, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG, [c] come il parallelogrammo BF al medeſimo parallelogrammo CG: mà il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G [d] (per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza) è come la baſe A B alla baſe B G; ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG, [e] come AB à BG. Il parallelogrammo BF al paralellogrammo C G, [f] per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza, è come le baſe EB alla baſe BC; ſarà AB à BG [g] come EB à B C; per la qual coſa i lati intorno à gli angoli vguali [h] ſono reciprochi, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 13. del 1.
b 14. del 1.
c 7. del 5.
d 1. del 6.
e 11. del 5.
f 1. del 6.
g 11. del 5.
h 2. defin. del 6.

Di nuouo, ſuppoſto che AB à BG ſia come EB à BC. Dico che i parallelogrammi D B, B F ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima; perche i parallelogrammi DB, C G hanno vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [K] come la baſe AB alla baſe BG; mà AB à BG, per ipoteſi, è come EB à BC; ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [l] come EB à BC. Similmente, eſſendo i parallelogrammi BF, CG ſotto d'vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG [m] come le baſe EB alla baſe BC: mà la baſe EB alla baſe BC è come il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G; il parallelogrammo dunque DB al parallelogrammo C G [n] ſarà come il parallelogrammo B F al medeſimo parallelogrammo C G; per la qual coſa i parallelogrammi DB, BF [o] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

K 1. del 6.
l 11. del 5.
m 1. del 6.
n 11. del 5.
o 9. del 5.

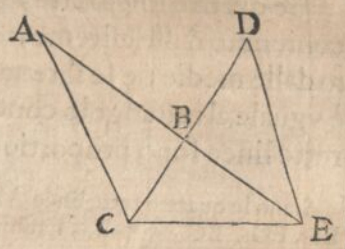
CO-

COROLLARIO.

Da quel,che s'è dimoſtrato nell'antecedente propoſitione,è manifeſto, che quando due angoli vguali,come EBG, ABC, ſono in modo collocati, che due delle rette,che gli contengono, come A B, B G, fanno vna ſola retta linea, le altre due rette EB,B C fanno ancora vna ſola retta linea.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XV.

Se due triangoli, de' quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro, ſono frà di loro vguali, i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i triangoli ſono frà di loro vguali.



Siano i triangoli ABC, DBE, de' quali l'angolo ABC ſia vguale all'angolo D B E; e ſuppoſto prima che i triangoli ABC, DBE ſiano frà di loro vguali. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DBE ſono reciprochi; cioè, che la proportione di AB à BE è come quella di DB à BC. Si addattino i propoſti triangoli in modo, che ſi tocchino ſecondo l'angolo B, e che i lati AB, BE facciano vna ſola retta linea: eſſendo gli angoli ABC, D B E frà di loro vguali, per l'antecedente Corollario, le rette DB, BC coſtituiranno vna ſola retta linea; ſi tiri la retta C E. I triangoli DBE, EBC hanno le baſi DB, BC in vna medeſima retta linea, e gli angoli oppoſti s'vniſcono nel ſolo punto E, e per quel che ſi diſſe nella quarta definitione di queſto, hanno vna medeſima altezza; e la proportione del triangolo DEB al triangolo E B C [a] è come la baſe D B alla baſe BC. Per l'iſteſſa ragione i triangoli ACB, B C E hanno vna medeſima altezza, e ſarà il triangolo ABC al triangolo CBE come la baſe AB alla baſe BE. In oltre perche i triangoli ABC, DBE, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, preſo il triangolo CBE come terza quantità, ſarà il triangolo ABC al triangolo BCE, [b] come il triangolo D B E al medeſimo triangolo C B E; ſi è dimoſtrato il triangolo A B C al triangolo CBE eſſere come AB à BE; ſarà il triangolo D B E al triangolo C B E [c] come AB à BE: mà il triangolo DBE al triangolo CBE è come DB à BC; ſarà dunque AB à BE [d] come DB à BC, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1. del 6.

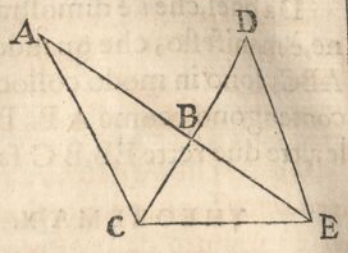
b 7. del 5.

c 11. del 5.

d 11. del 5.

Di

Di nuouo, ſuppoſto che A B à B E ſia come D B à B C. Dico che i triangoli ABC, DBE ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima. Perche i triangoli DEB, EBC hanno vna medeſima altezza, il triangolo DBE al triangolo EBC [e] ſarà come le baſe D B alla baſe B C; mà per ipoteſi D B à B C è come AB à BE; ſarà il triangolo DBE al triangolo CBE [f] come AB à BE. Similmente eſſendo i triangoli ABC, CBE ſotto vna medeſima altezza, ſarà il triangolo A B C al triangolo C B E [g] come la baſe A B alla baſe BE; mà fù dimoſtrato il triangolo DBE al triangolo CBE eſſere come AB, à B E; ſarà il triangolo ABC al triangolo, CBE [h] come il triangolo DBE al medeſimo triangolo CBE: per la qual coſa i triangoli ABC, D B E [K] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

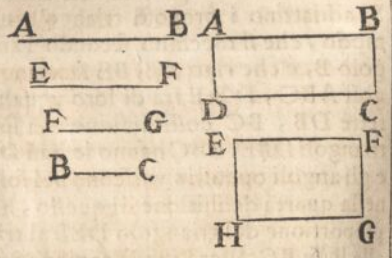


e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro linee rette ſono proportionali, il rettangolo contenuto dalle eſtreme, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie; e ſe il rettangolo contenuto dalle eſtreme è vguale al rettangolo contenuto dalle medie, le quattro rette linee ſono proportionali.

Siano le quattro rette linee AB, EF, FG, BC; e prima habbia AB ad EF l'iſteſſa proportione, quale hà F G à B C. Dico che il rettangolo contenuto dalle eſtreme AB, BC, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Con le due eſtreme AB, BC ſi faccia il parallelogrammo rettangolo ABCD; e con le due medie EF, FG ſi faccia il rettangolo EFGH.



Perche gli angoli in B, ed F ſono vguali, ſtante che ſono retti, ed il lato AB al lato EF, è come FG à BC: cioè i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; ſarà il rettangolo AC [a] vguale al rettangolo EG: ma il rettangolo AC, per coſtruttione, è contenuto dalle eſtreme AB, BC; ed il rettangolo EG è contenuto dalle medie EF, FG; il rettangolo dunque contenuto dalle eſtreme AB, BC è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo ſuppoſto, che il rettangolo contenuto dalle eſtreme A B, BC, ſia vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Dico che

a 14. del 6.

AB

AB ad EF sarà come FG à BC; s'intenda fatta l'istessa costruttione di prima. Perche i rettangoli AC, EG si suppongono vguali, e gli angoli in B, ed F sono vguali, i lati intorno à gli angoli vguali B ed F, b sono reciprochi; e perciò il lato AB al lato EF sarà come FG à BC; cioè le quattro rette AB, EF, FG, BC sono proportionali, ch'era da dimostrarsi. b 14. del 6.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto, è manifesto, che quando quattro linee rette sono proportionali, ancora il parallelogrammo contenuto dalle estreme è vguale al parallelogrammo equiangolo contenuto dalle medie.

Poiche se i parallelogrammi AC, EG non sono rettangoli, basta che gli angoli in B, ed F siano vguali, ed i lati intorno à questi angoli vguali siano reciprochi, acciochè i parallelogrammi AC, EG siano frà di loro vguali. E parimente basta, che i parallelogrammi AC, EG siano vguali, e gli angoli in B, ed F siano vguali, acciochè i lati intorno à questi angoli vguali siano reciprochi.

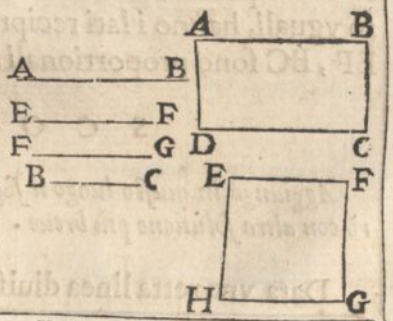
COROLLARIO II.

Dall'antecedente propositione si caua il modo da conoscere se quattro date rette linee sono proportionali.

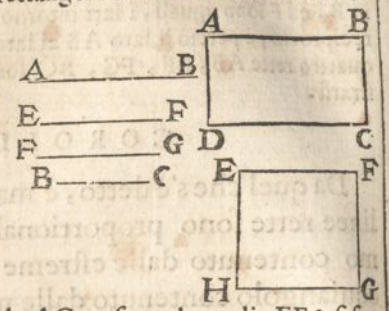
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XVII.

Se tre linee rette sono proportionali, il rettangolo contenuto dalle estreme, è vguale al quadrato della media; e se il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al quadrato della media, quelle tre rette linee sono proportionali.

Siano le tre rette linee AB, EF, BC; e prima habbia AB ad EF l'istessa proportione, quale hà la medesima EF à BC. Dico che il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, è vguale al quadrato della media EF; si faccia la retta FG vguale alla retta EF; sarà il quadrato di EF vguale al rettangolo contenuto dalle due vguali EF, FG. In oltre perche AB ad EF, per ipotesi, è come EF à



BC, e la retta FG è vguale ad EF; sarà AB ad EF, come FG à BC; e per l'antecedente propositione, il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, sarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG; cioè vguale al quadrato della media EF, che era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo, supposto che il rettangolo contenuto dalle estreme AB, B C, sia vguale al quadrato della media EF. Dico, che la proportione di AB ad EF, sarà come quella di EF à BC. Con le estreme AB, BC si costituisca il rettangolo AC; e sopra la media EF [a] si faccia il quadrato EG, sarà EF vguale ad F G. Perche il parallelogrammo AC è posto vguale al parallelogrammo EG, e gli angoli in B, ed F sono vguali, stanteche sono retti; i parallelogrammi A C, E G [b] haueranno i lati intorno à gli angoli vguali reciprochi; e perciò AB ad E F sarà come FG à BC: ma FG è vguale ad E F; sarà AB ad EF, come la medesima EF à BC. Per la qual cosa le tre rette linee AB, EF, BC sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.

a 46. del 1.

b 14. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se tre rette linee sono proportionali, il parallelogrammo contenuto dalle estreme, è vguale al rombo equiangolo descritto sopra la media; e se il parallelogrammo contenuto dall'estreme è vguale al rombo descritto sopra la media, le tre rette linee sono proportionali; stante che se E G sarà Rombo, & AC parallelogrammo, equiangolo al rombo, se hanno i lati reciprochi, sono frà di loro vguali; e se sono frà di loro vguali, hanno i lati reciprochi: e perciò le tre rette AB, EF, BC sono proportionali.

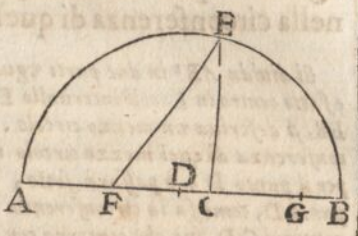
SCOLIO.

Aggiungo in questo luogo il seguente Problema del Peletario, però con altra solutione più breue.

Data vna retta linea diuisa in due parti come si vuole,

diui-

diuidere vna di quelle parti in modo, che le tre siano continue proportionali.



Sia la retta A B diuisa come si vuole in C, e si voglia diuidere la parte C B in modo, che le tre parti in A B siano continue proportionali. Si diuida AB [a] *in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo AD, ouero DB, si descriua il mezzo circolo A E B; nel punto C si erigga C E* [b] *perpendicolare ad AB; sarà CE* [c] *media proportionale frà le due AC, CB; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB* [d] *sarà vguale al quadrato di CE. Si diuida AC* [e] *in due parti vguali in F, si tiri la retta FE; poi si faccia FG* [f] *vguale ad FE. Dico che le tre AC, CG, GB sono continue proportionali.*

a 10. del 1.
b 11. del 1.
c 13. del 6.
d 17. del 6.
e 10. del 1.
f 3. del 1.

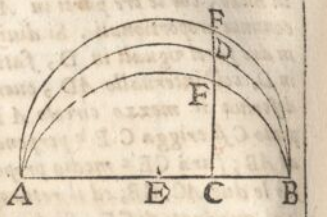
Nel triangolo E C F, angolo retto in C, il quadrato di EF [g] *è vguale à i quadrati de i due lati EC, CF; fù fatta la retta FG vguale ad EF; sarà il quadrato di FG vguale à i quadrati delle due EC, CF: ma il quadrato di FG* [h] *è vguale à i quadrati delle parti FC, CG col doppio rettangolo contenuto dalle medesime FC, CG; i quadrati dunque delle parti FC, CG, col doppio rettangolo contenuto dalle rette FC, CG, sarà vguale à i quadrati de' lati EC, CF: se ne leui il commune quadrato di CF, resta il quadrato di EC vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due FC, CG, col quadrato di CG; ma il doppio rettangolo contenuto dalle due GC, CF* [K] *è vguale al rettangolo contenuto da GC, & CA (stante che CF, FA sono vguali) sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG, vguale al quadrato di CE. Fù dimostrato il quadrato di C E vguale al rettangolo contenuto dalle due A C, CB; sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CB vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Si consideri AC come non diuisa, e la retta C B diuisa in G; sarà il rettangolo contenuto dalle due A C, CB,* [l] *vguale à i due rettangoli contenuti da AC, & CG, e da AC, & G B: ma si dimostrò, che il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG; i due rettangoli dunque contenuti da AC, & CG, e da AC, & GB insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Se ne leui il commune rettangolo contenuto dalle due AC, CG; resta il quadrato di CG vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, GB; e per l'antecedente propos. AC à CG sarà come CG à GB; cioè le tre rette AC, CG, GB sono continue proportionali, che era da farsi, e dimostrarsi.*

g 47. del 1.
h 4. del 2.
K 1. del 2.
l 1. del 2.

Per le cose, che possono bisognare, non sarà inutile aggiungere il seguente Theorema.

Se qualche retta AB sia diuisa in qualunque modo in C;

e nel punto C si erigga la retta CD perpendicolare ad AB; in modo che il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB sia vguale al quadrato della perpẽdicolare CD; il punto D sarà nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è AB.

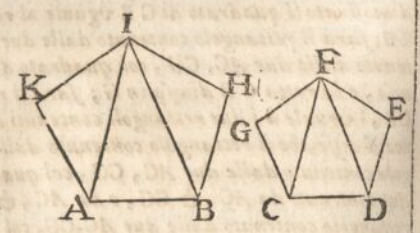


a 10. del 1. *Si diuida AB* [a] *in due parti vguali in E, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, ouero EB, si descriua vn mezzo circolo. Se la circonferenza di quel mezzo circolo non passa per il punto D, ò passarà sotto, ò sopra al punto D, come fà la circonferenza AFB. Si continui C D fino che concorra con la circonferenza AFB in qualche punto F; sarà FC* [b] *media proportionale frà le due AC, CB; e per l'antecedente propositione, il rettangolo contenuto dalle estreme AC, CB, è vguale al quadrato della media F C: ma per ipotesi il medesimo rettangolo contenuto dalle parti AC, CB è vguale al quadrato di CD; sarà il quadrato di CD vguale al quadrato di CF; e la retta CD sarà vguale alla retta CF: la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque la circonferenza passa sopra, ne sotto al punto D. Per la qual cosa il punto D è nella circonferenza di quel circolo, del quale AB è diametro, ch'era da dimostrarsi.*

b 13. del 6.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Descriuere sopra vna data retta linea vn rettilineo simile, e similmente posto ad vn'altro rettilineo dato.



Sia data la retta AB, ed il rettilineo CDEFG, e si voglia sopra la retta AB descriuere vn rettilineo simile, e similmente posto al dato rettilineo CDEFG. Da vno degli angoli del dato rettilineo, come dall'angolo F, si tirino rette linee à gli angoli oppositi, che siano le rette FC, FD in modo, che il dato rettilineo resti diuiso in tanti triãgoli, come FGC, FCD, FDE; poi sopra la retta AB, nel punto A, si faccia l'angolo BAI [a] vguale all'angolo DCF; e nel pũto B si põga l'ãgolo ABI vguale all'ãgolo CDF; perche gli angoli FCD, FDC [b] sono minori di due angoli retti; perciò i due angoli IAB, IBA sono minori di due angoli retti; si che continuate le rette AI, BI [c] concorreranno in qualche punto I; ed il rimanente angolo AIB [d] sarà vguale al rimanente angolo CFD; dal che il triangolo ABI sarà equiangolo al triangolo FCD. Di nuouo sopra la retta AI, nel punto A, si costituisca l'angolo I A K, [e] vguale all'angolo FCG; e nel punto I si ponga l'angolo AIK vguale all'angolo CFG: si di-

a 23. del 1.

b 17. del 1.

c Scol. alla 31. del 1.

d 32. del 1.

e 23. del 1.

mostra-

moſtrerà come prima, che le rette AK, IK concorrono in qualche punto K, e che l'angolo AKI è vguale all'angolo C G F. Similmente ſopra la retta IB, nel punto B, ſi faccia l'angolo IBH [f] vguale all'angolo FDE, e nel punto I ſi coſtituiſca l'angolo BIH vguale all'angolo DFE; e ſi dimoſtri come prima, che le rette B H, I H concorrono in qualche punto H, e che l'angolo IHB è vguale all'angolo FED. Col medeſimo ordine ſi procederà ſe nel rettilineo CDEFG vi foſſero più triangoli. Dico che il rettilineo ABHIK è ſimile, e ſimilmente poſto al rettilineo CDEFG. Perche gli angoli IAB, IAK ſono fatti vguali à gli angoli FCD, FCG, tutto l'angolo KAB ſarà vguale à tutto l'angolo GCD. Similmente gli angoli IBA, IBH, per coſtruttione, ſono vguali à gli angoli FDC, FDE; dal che tutto l'angolo ABH vguale à tutto l'angolo CDE; di più, perche i tre angoli KIA, AIB, BIH ſono fatti vguali alli trè angoli GFC, CFD, D F E; ſarà tutto l'angolo K I H è vguale à tutto l'angolo G F E: gli angoli K, ed H ſono moſtrati vguali à gli angoli G, ed E; ſarà il rettilineo ABHIK equiangolo al rettilineo CDEFG. Si conſiderino i triangoli equiangoli KAI, GCF, de'quali l'angolo KAI è vguale all'angolo GCF; ſarà KA ad AI [g] come GC à CF. Similmente eſſendo i triangoli IAB, FCD equiangoli, ſarà IA ad AB [h] come FC à CD; e per l'vgualità KA ad AB [K] ſarà come GC à CD; dalche i lati intorno à gli angoli vguali KAB, GCD ſono proportionali. In oltre eſſendo il triangolo IAB equiangolo al triangolo FCD, ed il triangolo IBH equiangolo al triangolo FDE; ſarà AB à BI [l] come CD à DF; ed IB à BH, come FD à DE; e per l'vgualità AB à BH [m] ſarà come CD à DE: ed eſſendo il triangolo DEF equiangolo al triangolo BHI, ed il triangolo CGF equiangolo al triangolo AKI, ſarà DE ad EF [n] come BH ad HI; e ſarà CG à GF, come AK à KI. Finalmente eſſendo i tre triangoli HIB, BIA, AIK equiangoli à i corriſpondenti tre triangoli D E F, DFC, CFG; ſarà HI ad IB, [o] come EF ad FD; e BI ad IA ſarà come DF, ad FC; e ſarà AI ad IK come CF ad FG; e per l'vgualità, HI ad IK [p] ſarà come EF ad FG. Per la qual coſa i rettilinei ABHIK, CDEFG ſono equiangoli, ed hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò ſono [q] frà di loro ſimili, e ſono ancora ſimilmente poſti, ſtante che l'angoli vguali ſono ſopra i lati homologhi ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

f 23. del 1.

g 4. del 6.
h 4. del 6.
K 22. del 5.
l 4. del 6.
m 22. del 5.
n 4. del 6.
o 4. del 6.
p 22. del 5.
q 1. defin. del 6.

ANNOTATIONE.

Prima d'inoltrarmi nella compoſitione delle proportioni, dottrina tanto più difficile ad eſſere inteſa, quanto che naſce da principio non dimoſtrato ſin' ad hora, ne da Euclide, ne, che io ſappia, da alcun'altra perſona; parmi neceſſario ſpiegare alcune coſe, che poſſono facilitarci la ſtrada all'intiera cognitione di tal principio, e perciò fare premetto le ſeguenti notitie.

DEFINITIONE I.

Qualunque coſa, che ſi dice vna, ouero vno, generalmente ſi chia-

ma

ma vnità; donde ne segue, che ogni linea retta può prendersi come vnità.

DEFINITIONE II.

Multiplicare due quantità frà di loro è il trouare vna terza quantità, la quale habbia tal proportione ad vna delle quantità da multiplicarsi, quale hà l'altra all'vnità; e la quantità trouata si chiama Prodotto.

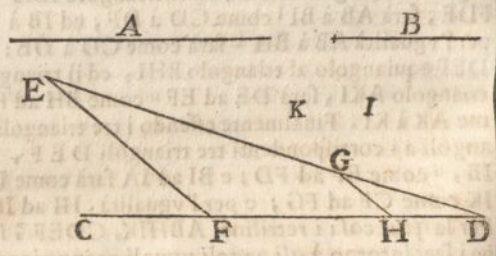
DEFINITIONE III.

Diuidere vna quantità per vn altra è il trouare vna terza quantità, che habbia tal proportione all'vnità, quale hà la quantità diuisa al diuisore, e la quantità trouata si chiama Quotiente.

LEMMA I.

Date due qualunque quantità è possibile multiplicare l'vna per l'altra.

Siano le quantità date A, & B, e si voglia multiplicare l'vna per l'altra.



S'intenda tirata la retta CD, alla quale sia inclinata la retta ED à qualunque angolo EDC. Se le quantità date sono linee rette, Si faccia DF [a] *vguale ad A; e si tagli DG vguale à B: si prenda in DF qualunque punto H, e presa DH come vnità, si tiri la retta HG; dal punto F* [b] *si tiri la retta FE parallela ad HG. Dico che ED sarà il prodotto di tal multiplicatione secondo l'vnità DH*

a 3. del 1.

b 31. del 1.

Nel triangolo EDF la retta GH, per costruttione, è parallela ad EF, dal che EG à GD [c] *sarà come FH ad HD; e componendo, ED à DG* [d] *sarà come FD à DH; e permutando, ED à DF* [e] *sarà come DG all'vnità DH: Per costruttione DF, DG sono vguali alle rette A, & B da multiplicarsi, e perciò la retta ED alla retta da multiplicarsi FD, ouero A, sarà come GD, cioè B (ch'è l'altra quantità da multiplicarsi) all'vnità HD; e per la seconda delle antecedenti definitioni, ED sarà il prodotto della multiplicatione di A nella quantità B, secondo l'vnità HD, ch'era da farsi nel primo luogo.*

c 1. del 6.
d 18. del 5.
e 16. del 5.

Se le quantità AB non sono linee rette, si prenda in CD qualunque parte FD, e si concepisca nella proportione di A à B essere FD ad vn'altra, che sia DG; inuertendo B ad A sarà [f] *come GD à DF. Nella retta FD si prenda qualunque altra parte DH; si tiri la retta HG; dal punto F sia tirata la retta FE* [g] *parallela ad HG, che continuata concorrerà con DE in qualche punto*

f Corollario alla 4. del 5.

g 31. del 1.

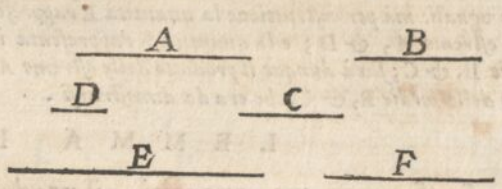
to E: ſe concepiremo HD come vnità, ſarà, per quel che s'è dimoſtrato, ED il prodotto della multiplicatione di FD in DG; ſi concepiſca ſicome FD à DE, coſi A ad vn'altra quantità del medeſimo genere, che ſia K; e ſicome G D à DH ſi concepiſca B ad'vn'altra quantità del medeſimo genere, che ſia I.

Perche FD à DG, per coſtruttione, è come A à B; e la proportione di G D à D H è come B ad I; per l'vgualità, [h] *ſarà F D à DH come A ad I. Di nuouo, perche GD à D F è come B ad A; ed F D à DE è come A à K; per l'vgualità, GD à DE,* [K] *ſarà come B à K; ed inuertendo, ED à DG* [l] *ſarà come K à B: mà ED à D G è come F D à D H; ſarà K à B* [m] *come F D à DH. Fù dimoſtrata FD à DH come A ad I, ſarà K à B,* [n] *come A ad I; e permutando, K ad A* [o] *ſarà come B ad I; cioè la quantità K alla quantità A, da multiplicarſi, come l'altra quantità B, da multiplicarſi, all'vnità I; e per la ſeconda definitione, la quantità K ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità A nella quantità B, ſecondo l'vnità I, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*

h 22. del 5.
K 22. del 5. l Corol. alla 4. del 6.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.

LEMMA II.

Se due quantità ſono multiplicate per vna medeſima quantità, ſecondo vn'iſteſſa vnità, i prodotti ſono frà di loro come le quantità multiplicate; e quei prodotti li chiameremo vguali multiplici delle quantità multiplicate.



Siano due qualunque quantità A, B, e ſecondo qualſiuoglia vnità D, ſia multiplicata A da qualche quantità C, ed il prodotto ſia E: e colla medeſima vnità D ſia multiplicata B, per l'iſteſſa quantità C, ed il prodotto ſia F. Dico che E ad F è come A à B. Perche la quantità E rappreſenta il prodotto fatto dalla multiplicatione di A per C, ſecondo l'vnità D, per la ſeconda delle antecedenti diſſinitioni, ſarà il prodotto E alla quantità A, come C all'vnità D. E per l'iſteſſa ragione ſarà il prodotto F alla quantità B come C à D: per la qual coſa E ad A [a] *ſarà come F à B; e permutando il prodotto E al prodotto F* [b] *ſarà come A à B, ch'era da dimoſtrarſi. I prodotti E, F li chiamaremo vguali multiplici delle quantità A, & B.*

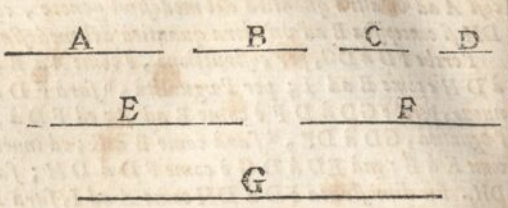
a 11. del 5.
b 16. del 5.

LEMMA III.

Se quattro quantità ſono proportionali, il prodotto fatto dalla prima, e quarta, è vguale al prodotto fatto dalla ſeconda, e terza.

Sia-

Siano le quattro quantità A, B, C, D, proportionali; cioè che A à B sia come C à D. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione delle estreme A, & D, è vguale al prodotto fatto dalle medie B & C. Per il primo Lemma si multiplichino le estreme A, & D, ed il prodotto sia F; similmente si multiplichino le medie B, & C, ed il prodotto sia E; e nell' istesso modo si multiplichino le due A, & C, ed il prodotto sia G; il tutto si faccia con vna medesima vnità.



Perche D, multiplicata per A, produce F; e la quantità C, multiplicata per la medesima A, produce G; le due G, ed F, per l'antecedente Lemma, saranno vguali multiplici delle due C, & D; dal che la proportione di G ad F [a] *sarà come quella di C à D; mà C à D, per ipotesi, è come A à B, sarà G ad F* [b] *come A à B.*

a Lem. antec.
b 11. del 5.

In oltre perche B multiplicata per C, per costruttione, produce E; e la quantità A multiplicata per la medesima C, produce G; le due G, E [c] *saranno vguali multiplici delle due A, & B; e perciò la proportione di G ad E* [d] *sarà come quella di A à B; mà fù dimostrata A à B esser come G ad F; sarà G ad E,* [e] *come la medesima G ad F: per la qual cosa E, ed F* [f] *sono frà di loro vguali: mà per costruttione la quantità E rappresenta il prodotto fatto dalle estreme A, & D; e la quantità F rappresenta il prodotto fatto dalle medie B, & C; sarà dunque il prodotto delle estreme A, & D, vguale al prodotto delle medie B, & C, che era da dimostrarsi.*

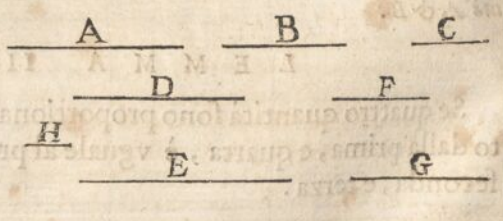
c Lem. 2.
d Lem. 2.
e 11. del 5.
f 9. del 5.

LEMMA IV.

Se saranno tre quantità, il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima nel prodotto della seconda, e terza, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza, nel prodotto della prima, e seconda.

Siano esposte le tre quantità A, B, C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima A nel prodotto delle due B, C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle due A, B.

Si prenda qualunque quantità H del medesimo genere alle quantità A, B, C, e si intenda H come vnità, con la quale, per il primo Lemma, si multiplichino le due A, B, ed il prodotto sia D.



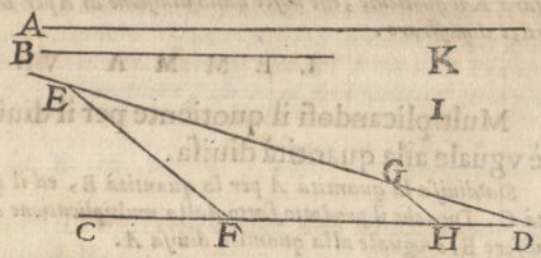
Di nuouo con la medesima vnità si multiplichino le due C, D, ed il prodotto sia E; e similmente con l'vnità H si multiplichino le due B, C, ed il prodotto sia F; e si multiplichino le due A, F, ed il prodotto sia G.

Perche dalla multiplicatione delle due A, & B, se ne produce D, sarà per la seconda delle antecedenti definitioni, il prodotto D alla quantità A, come B all'vnità H. Similmente perche dalla multiplicatione delle due B, C ne viene il prodotto F, sarà il prodotto F alla quantità C, come B all'vnità H; mà si disse B ad H essere come D ad A; sarà D ad A [a] *come F à C; e per l'antecedente Lemma, il prodotto delle estreme D, & C sarà vguale al prodotto delle medie A, & F. E perche il prodotto delle medie A, ed F, per costruttione, è la quantità G; ed il prodotto delle estreme D, & C è la quantità E; in conseguenza i prodotti E, & G sono frà di loro vguali. Per la qual cosa il prodotto fatto dalla prima A nel prodotto della seconda B, e terza C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle altre due A, & B, che era da dimostrarsi.*

a 11. del 5.

LEMMA V.

Date due qualunque quantità è possibile diuidere l'vna per l'altra.



Habbiasi da diuidere la quantità A per la quãtità B. S'inclinino le rette ED, CD à qualunque angolo E D C; se le quantità date sono linee rette, si faccia D E [a] *vguale alla retta A, da diuidersi; e si faccia DF vguale al diuisore B; si tiri la retta F E: poi si prenda nella retta FD qualunque punto H, dal quale sia tirata la retta HG* [b] *parallela ad EF. Dico che, presa DH come vnità, sarà DG il quotiente di tal diuisione.*

a 3. del 1.

b 31. del 1.

Essendo GH parallela ad EF, sarà EG à GD [c] *come FH ad HD; e componendo, ED à DG,* [d] *sarà come FD à DH; ed inuertendo, DG à DE* [e] *sarà come DH à DF; e permutando, GD à D H* [f] *sarà come E D à D F, cioè come A à B: per la qual cosa la quantità A da diuidersi al diuisore B, è come il quotiente GD all'vnità H D; e per la terza delle antecedenti definitioni, GD sarà il quotiente di tal diuisione, secondo l'vnità HD.*

c 2. del 6.

d 18. del 5.

e Coroll. alla 4. del 5.

f 16. del 5.

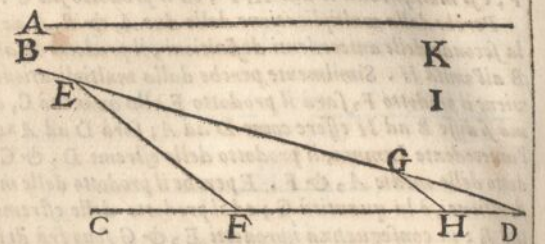
Se le proposte quantità A, B non sono linee rette; si prenda in CD qualunque parte DF, e si concepisca sicome la proportione di B ad A, così FD ad vn'altra, che sia ED: sarà, inuertendo, A à B [g] *come E D à D F. Si tiri la retta EF. Preso poi in FD qualunque punto H, dal quale sia tirata la retta H G* [h] *parallela ad E F, segarà E D in qualche punto G: se concepiremo H D come vnità, per quel che s'è dimostrato antecedentemente, G D sarà il quotiente della diuisione fatta di D E per F D. In oltre si concepisca sicome*

g Coroll. alla 4. del 5.

h 31. del 1.

ED à DG, così A ad vn'altra quantità del medesimo genere K, e sicome F D à DH, così B ad vn altra quantità del medesimo genere I.

Perche G H è parallela ad EF, sarà EG à G D [k] *come F H ad HD; e componẽdo ED à DG* [l] *sarà come FD à DH; mà ED à DG è come A à K, hauerà A à K* [m] *l'istessa proportione, che hà FD à D H: si disse F D à D H essere come B ad I, sarà A à K* [n] *come B ad I;* [o] *permutando, A à B sarà come K ad I. In oltre essendo A à B, per costruttione, come ED à DF, & A à B è come K ad I; sarà K ad I* [p] *come E D à DF; e la proportione di ED à DF e come GD à DH, sarà GD, à D H* [q] *come K ad I: ed inuertendo, HD à DG* [r] *sarà come I à K: mà HD è supposta vnità rispetto à GD, sarà la quantità I vnità rispetto alla quantità K; per quel, che s'è dimostrato, la quantità A, da diuidersi, alla quantità B, diuisore, sarà come K all'vnità I; e per la terza delle antecedenti definitioni, sarà K il quotiente, che nasce dalla diuisione di A per B, come fù proposto fare, e dimostrare.*



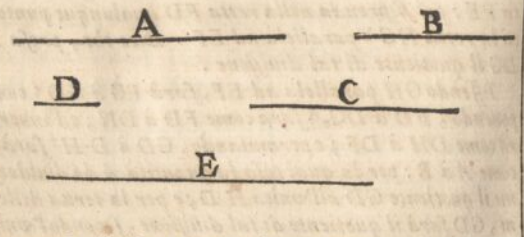
k 2. del 6.
l 18. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.
p 11. del 5.
q 11. del 5.
r Corol. alla 4. del 5.

LEMMA VI.

Multiplicandosi il quotiente per il diuisore, il prodotto è vguale alla quantità diuisa.

Sia diuisa la quantità A per la quantità B, ed il quotiente sia la quantità C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B, è vguale alla quantità diuisa A.

Sia D l'vnità, rispetto alla quale è fatta la diuisione di A per B; si faccia la multiplicatione di C per B, rispetto all'vnità D, ed il prodotto sia E; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà E à B come C all'vnità D. In oltre perche diuisa A per B, il quotiente, per ipotesi, è C; per la terza delle antecedenti definitioni, la quantità diuisa A al diuisore B è come il quotiente C all'vnità D: ma C à D, per quel che s'è dimostrato, è come E à B; sarà E à B [a] *come A alla medesima B; per la qual cosa A* [b] *è vguale ad E; ma E, per costruttione è il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B; sarà il prodotto fatto dal quotiente C nel diuisore B, vguale alla quantità diuisa A, che era da dimostrarsi.*

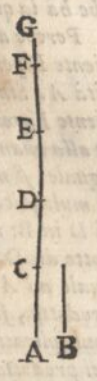


a 18. del 5.
b 9. del 5.

SCOLIO

SCOLIO.

Quando si vuol vedere che proportione sia frà due quantità del medesimo genere, non s'intende far'altro, se non che conoscere di quanto l'antecedente è maggiore, ò minore del conseguente; ò pure conoscere se l'antecedente è vguale al conseguente; il che si fà col detrarre il conseguente dall'antecedente tante volte, che si può, e se vi resta auanzo, vedere che rispetto hà al conseguente. Come per essempio, habbiasi da trouare che proportione sia frà l'antecedente A, ed il conseguente B; se A è maggiore di B, dalla quantità A se ne detraggano le parti AC, CD, DE, EF, e quante altre se ne può, vguali al conseguente B; se non resta cosa alcuna, diremo, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante sono le parti in AF; e se soprauanza qualche cosa minore di B, come FG, all'hora si dirà, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante parti sono in AF, e che soprauanza la quantità FG, ch'è tante parti esprimibili, ò non esprimibili di B. E perche questa continua detrattione è l'istessa cosa, che diuidere la quantità A per la quantità B, stante che la diuisione è vna abbreuiatura di questa continua detrattione, perciò diuidendo l'antecedente A per il conseguente B, il quotiente indicarà il valore della proportione, che hà l'antecedente A al conseguente B. E per l'auuenire, quando si vorrà trouare il valore della proportione, che hà vn antecedente ad vn conseguente, si diuiderà l'antecedente per il conseguente, ed il quotiente si chiamerà denominatore della proportione.

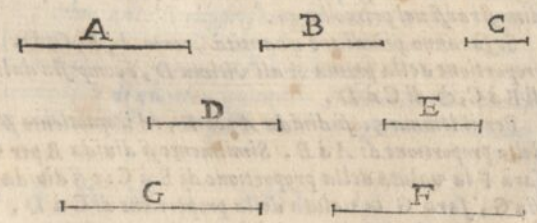


LEMMA VII.

Se saranno quante si voglia quantità del medesimo genere, la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

Siano esposte le quantità A, B, C. Dico che la proportione della prima A alla terza C è composta dalle proportioni di A à B, e di B à C. Per il quarto lemma si diuida la quantità A per la quantità B, [a] *ed il quotiente sia D; sarà D, per l'antecedente Scolio, la valuta della proportione, che hà la quantità A à B. Similmente si diuida B* [b] *per la quantità C, ed il quotiente sia E; sarà E la valuta della proportione, che hà B à C. Poi, per il primo lemma, si multiplichi D per la quantità E, ed il prodotto sia F; sarà F, per la decima definitione del 5. libro, la*

a Lemm. 5.

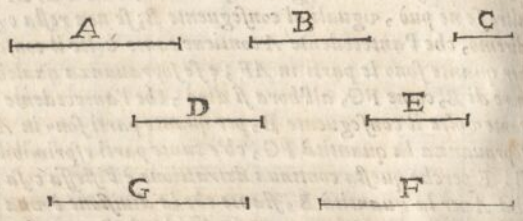


b Lemm. 5.

proportione composta dalle due proportioni di A à B, e di B à C. Oltre à ciò si diuida A [c] per C, ed il quotiente sia G; sarà G [d] il valore della proportione, che hà la quantità A alla quantità C.

c Lem. 5.
d Scol. antec.

Perche diuisa la quantità A per B il quotiente è D, multiplicando il quotiente D per il diuisore B, il prodotto, per il lemma 6. sarà vguale alla quantità A. Similmente essendosi diuisa la quantità B per C, n'è venuto il quotiente E; multiplicando il quotiente E per il diuisore C, il prodotto sarà vguale alla quantità B: tanto il prodotto di E in C, quanto la quantità B, che gli è vguale, si multiplichi per la medesima quantità D; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto di D in B: ma il prodotto di D in B è vguale ad A, sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di D nel prodotto di E in C, vguale ad A. Fù dimostrato nel quarto lemma, che il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D; sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D, vguale ad A; ma il prodotto di E in D, per costruttione, è la quantità F; sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di F in C, vguale ad A. Finalmente perche, diuisa la quantità A per C, il quotiente per costruttione è G, sarà per il Lem. 6. il prodotto, fatto dal quotiente G nel diuisore C, vguale ad A: si disse che il prodotto, fatto da F in C, è vguale alla medesima quantità A; sarà il prodotto fatto da F in C vguale al prodotto fatto da G in C; dal che G è vguale ad F: Ma G, per quel che s'è detto, è il valore della proportione di A à C, sarà F il valore della proportione di A à C: ma F è la proportione composta dalle proportioni D, ed E, sarà la proportione di A à C composta delle proportioni D, ed E. E perche la quantità D rappresenta la proportione di A à B; e la quantità E rappresenta la proportione di B à C, sarà dunque la proportione della prima A alla terza C, composta dalle proportioni intermedie, cioè della proportione di A à B, e dalla proportione di B à C, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



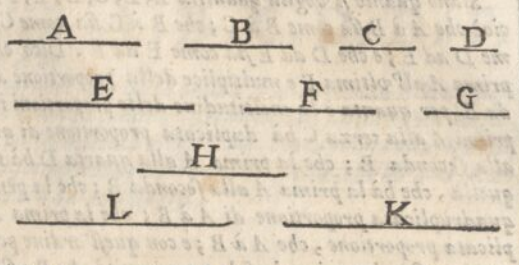
Se saranno più di trè quantità, come A, B, C, D. Dico similmente che la proportione della prima A all'vltima D, è composta dalle proportioni di A à B, di B à C, & di C à D.

Per il lemma 5. si diuida A per B, ed il quotiente sia E, sarà E il valore della proportione di A à B. Similmente si diuida B per C, ed il quotiente sia F; sarà F la valuta della proportione di B à C: e si diuida C per D, il quotiente sia G, sarà G la valuta della proportione di C à D. In oltre si multiplichi, per il primo lemma, la quantità E nella quantità F, ed il prodotto sia H; poi si multiplichi H per G, ed il prodotto sia K, per la 10. defin. del 5. libro, la quantità K rappresentarà la proportione composta dalle tre proportioni E, F, G.

Si

Si diuida finalmente A per D, ed il quotiente sia L, sarà L il valore della proportione di A à D, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione di L in D, per il lemm. 6, sarà vguale ad A.

Perche E rappresenta la proportione di A à B, ed F rappresenta la proportione di B à C; essendo H il prodotto fatto dalla multiplicatione di E in F, sarà H, per la decima definitione del 5. la proportione composta dalle due E, ed F; cioè H rappresentarà la proportione composta dalle proportioni di A à B, e di B à C: ma, per quel che s'è dimostrato nella prima parte, la proportione di A à C è composta delle medesime due proportioni di A à B, e di B à C; in conseguenza la quantità H sarà vguale alla proportione di A à C. Per la qual cosa, diuisa A per C, il quotiente sarà H, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente H nel diuisore C, per il lemma 6. sarà vguale alla quantità A. In oltre perche diuisa la quantità C per la quantità D, il quotiente è G; il prodotto fatto dalla multiplicatione di G in D [a] è vguale alla quantità C; tanto il prodotto di G in D, quanto la quantità C, si multiplichi per H, il prodotto fatto da H, nel prodotto di G in D, sarà vguale al prodotto di H in C: Mà il prodotto di H in C è vguale ad A; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, vguale ad A. E perche il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, per in Lemma 4, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione di D, nel prodotto di G in H, vguale ad A: mà il prodotto di G in H, per costruttione è vguale à K, sarà il prodotto di D in K vguale ad A. Si disse che il prodotto di L in D è vguale ad A; sarà il prodotto di K in D vguale al prodotto di L nella medesima D; e perciò le quantità L, & K sono frà di loro vguali. E perche la quantità L si disse essere il valore della proportione di A à D, sarà K il valore della proportione di A à D: mà K è la proportione composta delle tre proportioni E, F, G; sarà la proportione di A à D composta delle tre proportioni E, F, G; si disse nel principio, che la notata E rappresenta il valore della proportione di A à B; e la notata F rappresenta il valore della proportione di B à C; come anco G rappresenta il valore della proportione di C à D; sarà la proportione di A à D composta dalle proportioni intermedie di A à B, di B à C, e di C à D, che era da dimostrarsi.



[a] Lem. 6.

Nell'istesso modo se saranno più di quattro quantità si dimostrerà, che la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

LEMMA VIII.

Se saranno quante si voglia quantità continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice

del-

della proportione della prima alla seconda, per quanto è la moltitudine delle proportioni intermedie.

Vltimo esempio.

Siano quante si voglia quantità A, B, C, D, E, F, continue proportionali; cioè che A à B sia come B à C; che B à C sia come C à D; che C à D sia come D ad E; e che D ad E sia come E ad F. Dico che la proportione della prima A all'vltima F è multiplice della proportione della prima A alla seconda B, per quanta è la moltitudine delle proportioni intermedie; cioè che la prima A alla terza C hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B; che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B; che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di A à B; che la prima A alla sesta F hà quintuplicata proportione, che A à B; e con quest'ordine per tutte le altre.

Si considerino prima le sole tre quantità A, B, C continue proportionali. Essendo la proportione di A à B come quella di B à C, sarà la proportione di A à B vguale alla proportione di B à C; dal che le due proportioni di A à B, e di B à C, composte insieme, producono il duplicato della proportione di A à B; mà la proportione di A à C, per l'antecedente Lemma, è composta delle medesime due proportioni di A à B, & di B à C; sarà la proportione di A à C duplicata della proportione di A à B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A, B, C,

Di nuouo si considerino la quattro quantità A, B, C, D continue proportionali. Dico che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà A à B. Perche le quantità A, B, C, D si suppongono continue proportionali, sarà A à B come B à C, e sarà B à C come C à D; e perciò le tre proportioni di A à B di B à C, e di C à D, sono frà di loro vguali; le quali, composte insieme, producono il triplicato di vna; cioè il triplicato della proportione di A à B: ma la proportione di A à D, per l'antecedente lemma, è composta delle medesime tre proportioni di A à B, di B à C, e di C à D; sarà la proportione di A à D triplicata di quella, che hà la prima A alla seconda B, che era da dimostrarsi nel secondo luogo.

A, B, C, D

Similmente si considerino le cinque quantità A, B, C, D, E continue proportionali. Dico che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B.

Perche le proposte quantità sono continue proportionali, le quattro proportioni, cioè di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E, sono frà di loro vguali; le quali, composte insieme, sono il quadruplicato d'vna, cioè il quadruplicato della proportione di A à B: ma, per l'antecedente lemma, la proportione di A ad E è composta delle medesime quattro proportioni di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E; sarà la proportione di A ad E quadruplicata di quella, che hà la prima A alla seconda B.

Finalmente si considerino le sei quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali. Dico che la prima A alla sesta F hà quintuplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B. Essendo, per ipotesi, le quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali, le cinque proportioni intermedie, cioè di A à B, di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F, sono frà di loro vguali;

A, B, C, D, E,

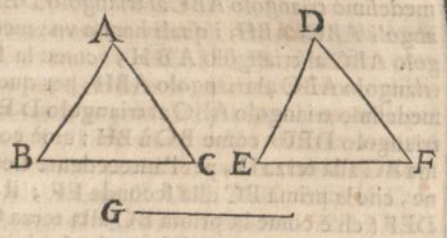
le

le quali, compoſte inſieme, producono il quintuplicato d'vna; cioè il quintuplicato di A à B; ma la proportione di A ad F, per il lemma antecedente, è compoſta dalle medeſime cinque proportioni; cioè di A à B di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F; ſarà la proportione di A ad F quintuplicata della proportione, che hà la prima A alla ſeconda B. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà ſe le quantità continue proportionali ſaranno più di ſei, che la prima alla ſettima hà ſeſtuplicata proportione, che la prima alla ſeconda; che la prima all'ottaua hà ſettuplicata proportione di quella, che hà alla ſeconda, e così per le altre, il che era da dimoſtrarſi.

A, B, C, D, E, F,

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE IX.

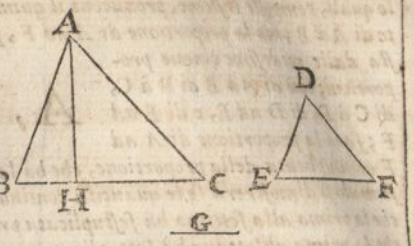
I ſimili triangoli hanno ſcambieuolmente duplicata proportione, che i loro lati homologhi.



Siano i triangoli ſimili ABC, DEF, de'quali l'angolo B ſia vguale all'angolo E; l'angolo C all'angolo F; e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF; ouero che il lato AB all'homologo DE, ouero AC à DF. Suppoſto prima, che i lati BC, EF ſiano frà di loro vguali. Perche i triangoli ſono ſimili, e gli angoli B, ed E ſono ſuppoſti vguali; ſarà CB à BA [a] come FE ad ED: ma la prima BC è poſta vguale alla terza EF; ſarà la ſeconda BA [b] vguale alla quarta DE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che A C è vguale ad FD; dalche i triangoli ABC, DEF [c] ſono frà di loro vguali; fù ſuppoſto il lato BC vguale al lato EF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF, [d] come il lato BC al lato EF. Si faccia come BC ad EF, così EF [e] ad vn'altra, che ſia G; ſarà G terza proportionale; e perche BC ad EF è come EF à G; eſſendo B C vguale ad E F, [f] ſarà E F vguale à G; e preſa B C come terza quantità, hauerà BC ad EF [g] l'iſteſſa proportione, che hà la medeſima BC à G: mà BC ad EF, per quel che s'è dimoſtrato, e come il triangolo ABC al triangolo DEF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF [h] come BC à G: e perche la prima BC alla terza proportionale G, per il Lemma antecedente, hà duplicata proportione, che la prima BC alla ſeconda EF; hauerà il triangolo ABC al triangolo DEF duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 4. del 6.
b 14. del 5.
c 4. del 1.
d Corollar. alla 7. del 5
e 11. del 6.
f 14. del 5.
g 7. del 5.
h 11. del 5.

Di nuouo non ſia il lato BC vguale al lato E F, ma ſia B C maggiore; preſa B C come prima, & EF come ſeconda, [K] e ſi troui la terza proportionale G; ſarà B C ad E F come E F à G: ma B C è maggiore di E F ſarà EF [l] maggiore di G, ed il lato BC ſarà molto maggiore di G. Si tagli BH [m] vguale à G; ſarà BC ad EF, come EF à BH: ſi tiri la retta AH. Perche i triangoli ABC, DEF ſono frà di loro ſimili, ſarà AB à BC [n] come DE ad EF; e permutando, AB à DE [o] ſarà come BC ad EF; ma BC ad EF è come la medeſima EF à BH; ſarà AB à DE [p] come EF à BH. Si conſiderino i due triangoli ABH, DEF, de'quali l'angolo ABH, per ipoteſi, è vguale all'angolo DEF; ed i lati intorno à queſti angoli vguali ſono reciprochi; ſtante che s'è dimoſtrato, che AB a DE è come EF à BH; perciò i triangoli ABH, DEF [q] ſono frà di loro vguali; preſo il triangolo ABC, come terza quantità, ſarà il triangolo ABC al triangolo ABH, [r] come il medeſimo triangolo ABC al triangolo DEF. In oltre ſi conſiderino i triangoli ABC, ABH, i quali hanno vna medeſima altezza, e ſarà il triangolo ABC al triangolo A B H, [t] come la baſe B C alla baſe BH; ma il triangolo ABC al triangolo ABH, per quel che s'è dimoſtrato, e come il medeſimo triangolo ABC al triangolo D E F; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF [u] come BC à BH; cioè come BC alla retta G: ma la prima BC alla terza G, per l'antecedente Lemma, hà duplicata proportione, che la prima BC alla ſeconda EF; il triangolo ABC al triangolo DEF (ch'è come la prima BC alla terza G) hauerà duplicata proportione, che il lato BC all'homologho lato EF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato AB al homologo lato DE; e che hà duplicata proportione, che il lato AC all'homologo lato DF, ch'era da dimoſtrarſi.



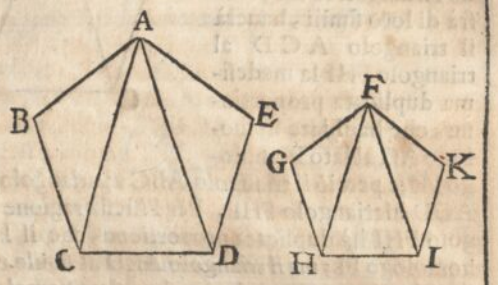
K 11. del 6.
l 14. del 6.
m 3. del 1.
n 1. defin. del 6.
o 16. del 5.
p 11. del 5.
q 15. del 6.
r 7. del 5.
t 1. del 6.
u 11. del 5.

SCOLIO.

Da quel che s'è detto nell'antecedente Lemma, e dalla decima Definitione del quinto Libro, è manifeſto, che quando ſi dice il triangolo ABC al triangolo DEF, hauere duplicata proportione di quella, che hà il lato BC al lato EF, vuol dire, che la proportione del triangolo ABC al triangolo DEF è compoſta dal prodotto fatto dalla multiplicatione della proportione di BC ad EF nella medeſima proportione di BC ad EF; cioè multiplicandoſi la proportione di BC ad EF, per la medeſima proportione di BC ad EF, il prodotto ſarà il valore della proportione del triangolo ABC al triangolo DEF.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XX.

I ſimili poligoni ſi diuidono in triangoli ſimili, di moltitudine vguali, ed homologhi ad eſſi poligoni: ed il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo.

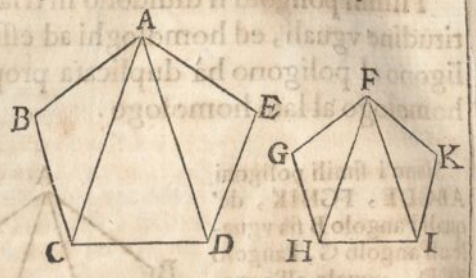


Siano i ſimili poligoni ABCDE, FGHIK, de' quali l'angolo B ſia vguale all'angolo G, l'angolo BCD, vguale all'angolo GHI, l'angolo CDE vguale all'angolo HIK, l'angolo E vguale all'angolo K, e l'angolo F all'angolo A. Dico prima, che queſti poligoni ſi diuidono in triangoli ſimili, e di moltitudine vguale. Da gli angoli A, & F à gli angoli oppoſti, ſi tirino le rette AC, AD, FH, FI. Perche i poſti poligoni ſono ſimili, tanti lati ſono in vno, quanti ne ſono nell'altro; e perciò tante rette ſi tirano dall'angolo A à gli angoli oppoſti, per quante ſe ne tirano dall'angolo F à gli angoli oppoſti; dalche in tanta moltitudine di triangoli ſi diuide l'vno, per quanta moltitudine di triangoli ſi diuide l'altro. Si conſiderino i triangoli ABC, FGH, de' quali l'angolo B è ſuppoſto vguale all'angolo G: La proportione di AB à BC, per la ſimilitudine de i poligoni, è come FG à GH; e perciò [a] i triangoli ſono equiangoli, e ſarà l'angolo BCA vguale all'angolo GHF, e l'angolo BAC vguale all'angolo GFH; i lati intorno à gli angoli vguali [b] ſono proportionali, e però il triangolo BCA ſarà ſimile [c] al triangolo FGH. Similmente perche l'angolo E è vguale all'angolo K, e la proportione di AE ad ED, per la ſimilitudine de' poligoni, è come quella di FK à KI; i triangoli AED, FKI [d] ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [e] proportionali, e perciò [f] ſono frà di loro ſimili; e ſarà l'angolo EDA vguale all'angolo KIF; ſe da gli vguali angoli EDC, KIH, ſe ne leuano gli vguali angoli EDA, KIF, reſta l'angolo ADC vguale all'angolo FIH. Similmente da gli vguali angoli BCD, GHI ſe ne leuino gli vguali angoli BCA, GHF, reſta l'angolo ACD vguale all'angolo FHI; ne i triangoli ACD, FHI, i due angoli ACD, ADC ſono vguali à i due angoli FHI, FIH; ſarà il rimanente angolo CAD [g] vguale al rimanente angolo HFI, i triangoli ACD, FHI ſono equiangoli, hanno [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò ſono [k] ſimili. Il medeſimo ſi prouarà ſe in eſſi poligoni vi foſſero più triangoli.

Oltre à ciò dico, che queſti triangoli ſono homologhi à i poligoni intieri; cioè che tal proportione hà ciaſcun triangolo in vno de' poligoni à

a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 6. del 6.
e 4. del 6.
f 1. defin. del 6.
g 32. del 1.
h 4 del 6.
k 1. defin. del 6.

ciaſcuno de i corriſpondenti triangoli nell'altro poligono, quale hà tutto vn poligono à tutto l'altro poligono. Perche i triangoli ABC, FGH ſono frà di loro ſimili, il triangolo ABC al triangolo FGH, per l'antecedente propoſitione, hà duplicata proportione, che il lato homologo AC al lato homologo FH. Similmenre eſſendo i triangoli ACD, FHI frà di loro ſimili, hauerà il triangolo ACD al triangolo FHI la medeſima duplicata proportione, che hà il lato homologo AC al lato homologo FH; e perciò il triangolo ABC al triangolo FGH [l] è come il triangolo ACD al triangolo FHI. Per l'iſteſſa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI hà duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; ma il triangolo AED al ſimile triangolo FKI hà la medeſima duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; ſarà il triangolo ACD al triangolo FHI, [m] come il triangolo ADE al triangolo FIK; dal che l'antecedente ABC al conſeguente FGH, è come l'antecedente ACD al conſeguente FHI; e l'antecedente ACD al conſeguente FHI è come l'antecedente ADE al conſeguente FIK; ſaranno tutti gli antecedenti, cioè il poligono ABCDE, [n] à tutti i conſeguenti, cioè al poligono FGHIK, come vno antecedente ad vn conſeguente; cioè come il triangolo ABC, al triangolo FGH; ouero come il triangolo ACD al triangolo FHI; ò pure come il triangolo ADE al triangolo FIK.



l 11. del 5.

m 12. del 5.

n 12. del 5.

Finalmente dico che il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo. Perche il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il triangolo ABC al triangolo FGH; ed il triangolo ABC al ſimile triangolo FGH hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG; per l'egualità hauerà il poligono ABCDE al poligono FGHIK [o] duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG, ch'era da dimoſtrarſi.

o 22. del 5.

COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione è manifeſto, che i poligoni ſimili ſono come i quadrati de i loro lati homologhi, ſtante che tutti i quadrati ſono ſimili frà di loro; e coſi i quadrati de' lati CD, HI hanno duplicata proportione, che i loro lati homologhi CD, HI: mà i poligoni ſimili ABCDE, FGHIK hanno la medeſima duplicata pro-

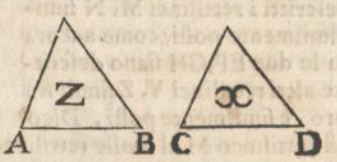
portio-

portione de i loro lati homologhi CD, HI, sarà il poligono ABCDE al poligono FGHIK, come il quadrato di CD al quadrato di HI.

SCOLIO.

Si può qui facilmente prouare, che gli vguali poligoni simili hanno i lati homologhi vguali; e de i poligoni simili ineguali, il lato homologo del maggiore è maggiore del lato homologo del minore.

Siano prima i poligoni simili Z ed X frà di loro vguali, e sia l'angolo A vguale all'angolo C, e l'angolo B vguale all'angolo D; saranno i poligoni Z, ed X similmente posti à i lati AB, CD; dal che AB, CD sono i lati homologhi; e sarà il poligono Z al simile poligono X, per l'antecedente Corollario, come il quadrato del lato homologo AB al quadrato del lato homologo X; mà i poligoni Z, ed X sono supposti frà di loro vguali; saranno [a] *i quadrati de' lati AB, CD frà di loro vguali, e perciò il lato AB* [b] *sarà vguale al lato CD.*



Di nuouo se il poligono Z sarà maggiore del poligono X, sarà il quadrato di AB [c] *maggiore del quadrato di CD, e perciò il lato AB* [d] *sarà maggiore del lato CD, ch'era da dimostrarsi.*

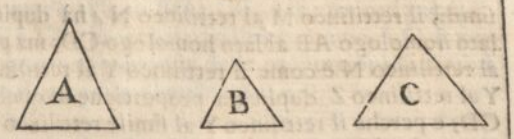
a 14. del 5.
b Scol. alla 46. del 2.
c 14. del 5.
d Scol. alla 46. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXI.

I retti linei che sono simili ad vn medesimo rettilineo, sono ancora simili frà di loro.

Sia il rettilineo A simile al rettilineo B, ed il rettilineo C simile al medesimo rettilineo B. Dico che i rettilinei A, & C sono frà di loro simili

Perche i rettilinei A, & B sono frà di loro simili, perciò sono equiangoli. Similmente essendo i rettilinei B, & C simili, saranno equiãgoli; ma il rettilineo A è equiangolo al rettilineo B; i rettilinei dunque A, & C sono equiangoli, per la qual cosa hanno [a] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione di questo, sono frà di loro simili, ch'era da dimostrarsi.

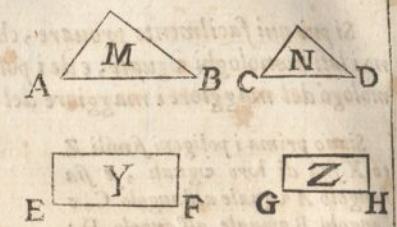


a 4. del 6.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXII.

Se quattro linee rette sono proportionali, i rettilinei simili,

e ſimilmente deſcritti ſopra di eſſe, ſono proportionali: e ſe quattro rettilinei ſimili ſono proportionali, le linee rette, ſopra le quali ſono ſimilmente deſcritti, ſaranno proportionali.



Siano prima le quattro rette linee AB, CD, EF, GH, proportioli; cioè che *AB à CD ſia come EF à GH; e ſopra le due AB, CD, ſiano deſcritti i rettilinei* M, N ſimili, e ſimilmente poſti; come ancora ſopra le due EF, GH ſiano deſcritti due altri rettilinei Y, Z ſimili frà di loro, e ſimilmente poſti. Dico che il rettilineo M al ſimile rettilineo N hà l'iſteſſa proportione, quale hà il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z.

Perche i rettilinei ſimili M, N ſono ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD; ſaranno le rette AB, CD lati homologhi di eſſi rettilinei: e per l'iſteſſa ragione le rette EF, GH ſono lati homologhi de'i ſimili rettilinei Y, Z. Hor eſſendo i rettilinei M, N frà di loro ſimili, il rettilineo
a 20. del 6. M al ſimile rettilineo N [a] hà dupplicata proportione, che *il lato homologo AB al lato homologo CD; ma, per ipoteſi, AB à CD è come EF à*
b 13. del 5. *GH; hauerà il rettilineo M al rettilineo N* [b] *duplicata proportione di* quella, che hà EF à GH; *ma il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z hà la* medeſima duplicata proportione, che hà EF à GH; *hauerà il rettilineo*
c 11. del 5. M al ſimile rettilineo N, [c] *l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al* rettilineo Z, *ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Di nuouo ſiano i rettilinei M, N frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD, ed i rettilinei Y, Z ſiano frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti alle rette EF, GH; ed habbia il rettilineo M al rettilineo N l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al rettilineo Z. Dico che AB à CD ſarà come EF à GH. Perche i rettilinei M, ed N ſono frà di loro
d 20. del 6. ſimili, il rettilineo M al rettilineo N [d] hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo CD; ma per ipoteſi, il rettilineo M al rettilineo N è come il rettilineo Y al rettilineo Z; hauerà il rettilineo Y al rettilineo Z duplicata proportione di quella, che hà AB alla retta CD; e perche il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z, hà duplicata proportione, che il lato homologo EF al lato homologo GH; ſarà AB à CD come EF à GH, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXIII.

Se due parallelogrammi ſono equiangoli, haueranno la proportione compoſta delle proportioni de i lati, che ſono intorno à gli angoli vguali.

Siano



Siano i parallelogrammi equiangoli ABCD, CEFG; e sia l'angolo B C D vguale all'angolo E C G. Dico che la proportione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF, è composta di due proportioni; cioè della proportione del lato B C al lato CG; e della proportione del lato D C al lato C E. Si adattino i proposti parallelogrammi AC, CF, in modo che si tocchino secondo gli angoli vguali C; e che i lati BC, CG costituiscano la sola retta linea BCG; e per il Corollario alla 14. propos. di questo, i lati EC, CD, costituiranno vna sola retta linea: si prolunghino i lati A D, F G fino che concorrono in qualche punto H. Poi si prenda qualunque retta linea I, e si faccia si come BC à CG, così I [a] ad vn altra, che sia K: e similmente si faccia si come D C à C E, così K [b] ad vn altra, che sia L. Perche i parallelogrammi A C, DG hanno vna medesima altezza, sarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG, [c] come la base BC alla base CG: ma per costruttione, BC à CG è come I à K; sarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG [d] come I à K. Similmente, essendo i parallelogrammi DG, CF sotto d'vna medesima altezza, il parallelogrammo D G al parallelogrammo CF [e] sarà come la base DC alla base CE; ma per costruttione, DC à CE è come K ad L; sarà il parallelogrammo DG al parallelogrammo CF, [f] come K ad L. Si considerino sei quantità, tre da vna parte, cioè i parallelogrammi AC, DG, CF; e tre da vna altra parte, cioè le rette I, K, L. Perche la prima AC alla seconda DG, è come la prima I alla seconda K; e la seconda DG alla terza CF è come la seconda K alla terza L; sarà, per l'egualità, la prima AC alla terza CF, [g] come la prima I alla terza L: ma la prima I alla terza L, per il lemma 7. doppo la 18. propos. di questo, hà la proportione composta delle proportioni di I à K, e di K ad L; haverà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione composta delle proportioni di I à K, e di K ad L: ma la proportione di I à K, è come quella di BC à CG; e la proportione di K ad L è come quella di DC à CE; haverà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione composta delle proportioni di B C à CG, e di DC à CE, come fù proposto dimostrare.

a 12. del 6.
b 12. del 6.
c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 22 del

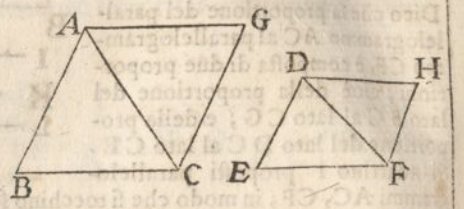
SCOLIO.

Il medesimo si verifica in due triangoli, de'quali vn angolo dell'vno sia vguale ad vn angolo dell'altro, come nel seguente Theorema.

I triangoli, de'quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn

angolo

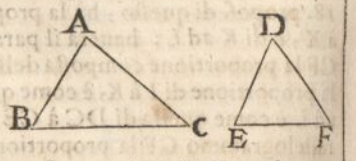
angolo dell'altro, hanno la proportione composta delle proportioni de'lati intorno à gli angoli vguali.



Siano i triangoli A B C, D E F, e sia l'angolo B vguale all'angolo E. Dico che la proportione del triangolo A B C, al triangolo D E F è cõposta delle proportioni, cioè di A B à D E, e di B C ad E F. Dal punto C si tiri la
a 31. del 1. *retta C G, a parallela ad A B; e dal punto A si tiri la retta A G parallela al lato B C, le quali concorreranno in qualche punto G: e sarà fatto il parallelo-*
b 34. del 1. *grammo B G, il quale b sarà il doppio del triangolo A B C; nell'istesso modo si compisca il parallelogrammo E H, che sarà il doppio del triangolo D E F; dal*
c 15. del 5. *che tutto il parallelogrammo B G à tutto il parallelogrammo E H, c sarà come la metà A B C alla metà D E F; mà per l'antecedente propositione la proportione del parallelogrammo B G al parallelogrammo equiangolo E H, è composta delle proportioni di A B à D E, e di B C ad E F; sarà la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F composta delle proportioni di A B ad E D, e di B C ad E F, ch'era da dimostrarsi.*

Qui aggiunge il Commandino il seguente Theorema, che noi più breuemente dimostraremo col P. Clauio.

I triangoli, che hanno vn angolo vguale ad vn angolo, sono come i rettangoli contenuti da i lati intorno à gli angoli vguali.



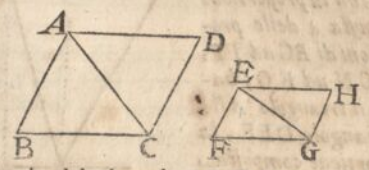
Siano i triangoli A B C, D E F, de' quali l'angolo B sia vguale all'angolo E. Dico che il triangolo A B C al triangolo D E F è come il rettangolo contenuto da i due lati A B, B C, al rettangolo contenuto da i lati D E, E F. Perche gli angoli in B, ed E sono frà di loro vguali, per l'antecedente Scolio, la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F, è composta delle proportioni di A B à D E, e di B C ad E F; mà il rettangolo, contenuto dalle rette A B, B C, al rettangolo contenuto dalle rette D E, E F, per l'antecedente propositione, hà la proportione composta dalle medesime due proportioni, cioè di A B à D E, e di B C ad E F; hauerà dunque il triangolo A B C al triangolo D E F l'istessa proportione, quale hà il rettangolo contenuto da i lati A B, B C, al rettangolo contenuto da i lati D E, E F, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che i parallogrammi

equian-

equiangoli hanno l'istessa proportione frà di loro, quale hanno i rettangoli contenuto da i lati intorno à gli angoli vguali.



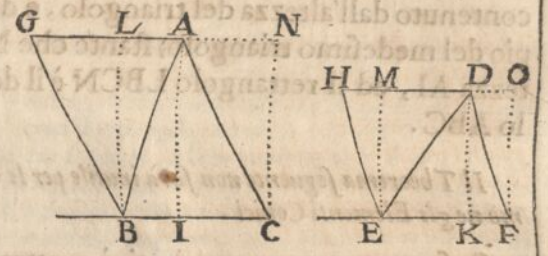
Come ne i parallelogrammi BD, FH equiangoli, sia l'angolo B vguale all'angolo F, tirate le diagonali AC, EG, sarà il parallelogrãmo BD [a] *il doppio del triangolo ABC; ed il parallelogrammo FH sarà il doppio del triangolo EFG; e perciò il parallelogrammo BD al parallelogrammo FH* [b] *sarà come il triangolo ABC al triangolo EFG: mà, per quel che s'è dimostrato antecedentemente, il triangolo ABC al triangolo EFG, è come il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati EF, FG; sarà il parallelogrammo BD al parallelogrammo FH, come il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati EF, FG, come si disse.*

a 41. del 1.

b 15. del 5.

Vn altro Teorema del Commandino, che quì dimostriamo con maggior breuità.

I triangoli, e parallelogrammi, hanno frà di loro la proportione composta delle proportioni delle loro basi, ed altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, HEFD; da gli angoli A, & D si facciano cadere le rette AI, DK, perpendicolari alle basi BC, EF. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF; ouero il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD, hà la proportione composta dalle proportioni della base BC alla base EF; e dell'altezza AI all'altezza DK. Da i punti B, C, E, F si facciano cadere le rette BL, CN, EM, FO, perpendicolari alle rette GA, HD, le quali sono parallele alle basi BC, EF; i quadrilateri LBCN, MEFO saranno parallelogrammi rettangoli; e perche gli angoli AIC, NCI sono retti, sarà AI parallela ad NC, & il quadrilatero AICN sarà parallelogrammo rettangolo, e perciò AI [a] *sarà vguale ad NC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DK è vguale ad OF. In oltre perche il rettangolo LBCN, ed il triangolo ABC, hanno vna medesima base, e sono frà le medesime parallele; sarà il rettangolo LBCN* [b] *il doppio del triangolo ABC. Nell'istesso modo si proue-*

a 34. del 1.

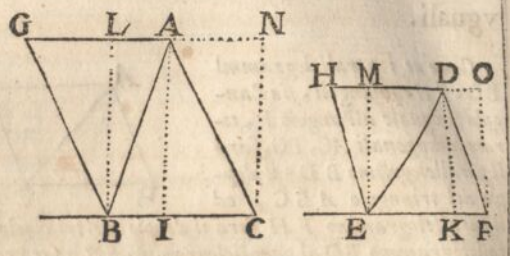
b 41. del 1.

rà

rà, che il rettangolo MEFO è il doppio del triangolo DEF, e ſarà il rettangolo LBCN al rettangolo MEFO, c come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il rettangolo LBCN al rettangolo MEFO, hà la proportione compoſta d delle proportioni di BC ad EF, e di CN ad FO; hauerà il triangolo ABC al triangolo DEF, la proportione compoſta delle proportioni di BC ad EF, e di CN ad FO; mà CN è vguale ad AI, ed OF è vguale à DK; la proportione dunque del triangolo ABC al triangolo DEF ſarà compoſta delle proportioni della baſe BC alla baſe EF, e dell'altezza AI all'altezza DK. E perche la proportione del triangolo ABC al triãgolo DEF è come quella del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD (ſtante che i parallelogrammi ſono il doppio de i detti triangoli); la proportione dunque del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD, ſarà compoſta delle proportioni della baſe BC alla baſe EF, e dell'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimoſtrarſi.

c 15. del 5.

d 23. del 6.



COROLLARIO

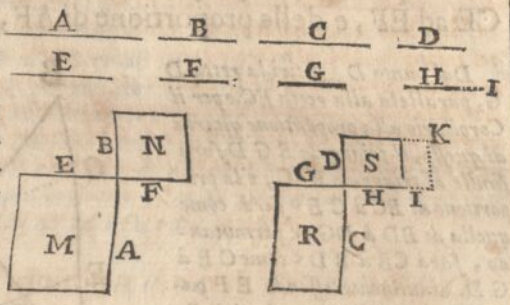
Da quel che s'è detto è manifeſto, che il rettangolo contenuto dall'altezza del triangolo, e dalla baſe è il doppio del medeſimo triangolo; ſtante che NC è vguale all'altezza AI, ed il rettangolo LBCN è il doppio del triangolo ABC.

Il Theorema ſeguente non ſarà inutile per le coſe, che dimoſtraremo ne gli Elementi Conici.

Se ſaranno otto quantità, cioè quattro da vna parte, e quattro da vn altra parte proportionali; il rettangolo contenuto dalle due prime al rettangolo contenuto dalle due ſeconde, ſarà come il rettangolo contenuto dalle due terze al rettangolo contenuto dalle due quarte: e ſe il rettangolo delle due prime al rettangolo delle due ſeconde è come il rettangolo delle due terze al rettangolo delle due quarte, e le prime quattro ſono proportionali; ancora le altre quattro ſaranno proportionali.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, da vna parte, e le altre quattro E, F, G, H, da vn altra parte; ed habbia prima A à B l'istessa proportione, quale hà C à D; e similmente E ad F sia come G ad H. Dico che il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due seconde B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due terze C, & G, al rettangolo contenuto dalle due quarte D, ed H.

Con le due A, ed E si faccia il rettangolo M; con le due B, ed F, si faccia il rettangolo N; con le due G, & C, si costruisca il rettangolo R; e con le due D, ed H si faccia il rettangolo S. Perche la proportione del rettangolo M al rettangolo N, [a] *è composta delle due proportioni, cioè di A à B, e di E ad F;* a 23. del 6. *e per ipotesi, la proportione di A à B, è come quella di C à D; e la proportione di E ad F è come quella di G ad H; la proportione dell' rettangolo M al rettangolo N sarà composta delle proportioni di C à D, & di G ad H: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo S* [b] *è cõposta delle medesime due proportioni di C à D, e di G ad H; la proportione dunque del rettangolo M al rettangolo N sarà l'istessa, che quella del rettangolo R al rettangolo S; cioè il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due seconde B, ed F, sarà come il rettangolo delle due terze C, & G, al rettangolo delle due quarte D, ed H, che era da dimostrarsi nel primo luogo.* b 23. del 6.



Di nuouo dico che, se il rettangolo contenuto dalle due A, ed E, al rettangolo delle due B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due C, & G, al rettangolo contenuto dalle due D, ed H; e la proportione di A à B è come quella di C à D, sarà ancora E ad F come G ad H; s'intenda fatta la medesima costruttione di prima. Se la proportione di E ad F nõ è come quella di G ad H, sarà E ad F come G ad vn altra, ò maggiore, ouero minore di H; sia prima maggiore come la notata HI; si compisca il rettangolo SKI. Perche il rettangolo M al rettangolo N [c] *hà la proportione composta di A à B, e di E ad F, e la proportione di A à B, per ipotesi, è come quella di C à D: ed ancora E ad F, per costruttione, è come G ad HI; la proportione del rettangolo M al rettangolo N sarà composta delle proportioni di C à D, e di G ad HI: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo SKI è composta delle medesime proportioni di C à D, e di G ad HI; hauerà il rettãgolo M al rettangolo N l'istessa proportione, che il rettangolo R al rettangolo SKI; mà, per ipotesi, il rettangolo M al rettangolo N è come il rettangolo R al rettangolo S; sarà il rettangolo R* [d] *al rettangolo S, come il medesimo rettangolo R al rettangolo SKI; dal che i rettangoli S, & SKI* [e] *sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque E ad F è come G ad vna maggiore di H. Nell' istesso modo si proverà, che E*

c 23. del 6.

d 11. del 5.

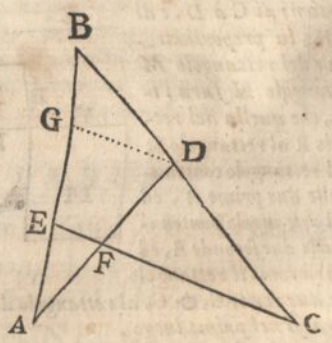
e 9. del 5.

ad F non è come G ad vna minore di H. Per la qual cosa E ad F sarà come G ad H, ch'era da dimostrarsi.

Sarà giouevole porre in questo luogo i due seguenti Theoremi dimostrati da Tolomeo nel primo Libro del suo Almagesto.

I.

Se due rette linee, come A B, C B, contengono qualche angolo A B C, e da gl'estremi A, & C sono inclinate due rette linee come A D, C E, le quali segandosi scambievolmente in qualche punto F, concorrino con le rette AB, CB, come in E, & D; la proportione di CB à BD sarà composta di due proportioni, cioè della proportione di CE ad EF, e della proportione di AF, ad AD.



a 31. del 1. *Dal punto D [a] si tiri la retta D G, parallela alla retta EC, e per il Corollario alla propositione quarta di questo, il triangolo B G D sarà simile al triangolo BEC; e la proportione di BC à C E [b] sarà come quella di BD à DG; e permutando,* b 4. del 6. c 16. del 5. *sarà CB à B D [c] come C E à G D. Similmente essendo E F parallela à G D il triangolo A E F, per il citato Corollario, sarà simile al triangolo A D G; e sarà AF ad FE [d] come A D à D G; e permutando, AF ad A D [e] sarà come* d 4. del 6. e 16. del 5. *EF à GD. Si considerino tre quantità, cioè la prima CE, la seconda EF, e la terza G D; e per il settimo Lemma dopo la 18. propositione di questo, la proportione della prima CE alla terza GD è composta delle proportioni di C E ad EF, e di EF à GD; mà EF à G D, per quel che s'è dimostrato, è come AF ad AD; perciò la proportione di CB à BD sarà composta delle due proportioni cioè di CE ad EF, e di AF ad AD, che era da dimostrarsi. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di AB à BE è composta delle proportioni di AD à DF, e di CF à CE.*

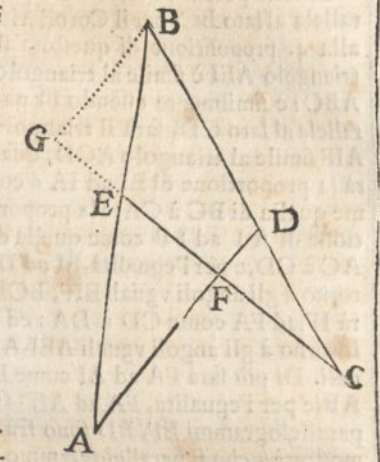
I I.

Supposto le medesime cose. Dico che la proportione di C D à D B è composta delle due proportioni cioè di C F ad FE, e di AE ad AB.

a 31. del 1. *Dal punto B [a] si tiri la retta BG parallela alla retta AD, la quale concorrerà con la retta CE continuata in qualche punto G. Perche le rette AD, BG* b 29. del 1. *sono frà di loro parallele, segate dalla retta GF, [b] gli angoli alterni A F E,*

BGE,

BGE, sono frà di loro vguali. Similmente, essendo le parallele BG, AD segate dalla retta AB, gli angoli alterni GBE, FAE sono frà di loro vguali: mà gli angoli al vertice A E F, GEB [c] *sono frà di loro vguali; saranno i triangoli GEB, AEF frà di loro equiangoli; e la proportione di G E ad E B* [d] *sarà come quella di FE ad EA; e permutando GE ad EF* [e] *sarà come BE ad EA; e componendo GF ad F E* [f] *sarà come B A ad A E; ed inuertendo, FE ad FG* [g] *sarà come AE ad AB. In oltre essendo FD parallela à GB, sarà CD à DB* [h] *come CF ad FG: frà le due CF, FG si ponga per intermedia F E, per il Lemma settimo dopo la 18. di questo, la proportione della prima CF alla terza FG, sarà composta delle proportioni di C F ad FE, & di FE ad FG: mà FE ad FG, per quel che si è dimostrato, è come AE ad AB; la proportione dunque di CD à DB sarà composta delle proportioni di CF ad FE; e di AE ad AB, come fu proposto dimostrare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di A E ad EB è composta delle proportioni di AF ad FD, e di CD à C B.*

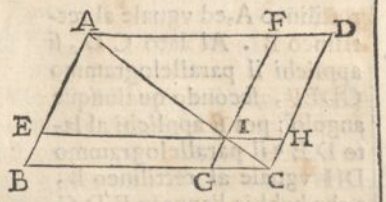


c 15. del 1.
d 4. del 6.
e 16. del 5.
f 18. del 5.
g Coroll. alla 4. del 5
h 2. del 6.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXIV.

In ogni parallelogrammo quei parallelogrammi, che sono intorno al diametro, sono simili frà di loro; ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo.

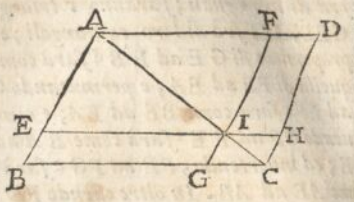
Sia il parallelogrammo ABCD, diuiso ne i parallelogrammi EF, BI, GH, ID, de'quali siano i due EF, GH intorno al diametro AC. Dico che i parallelogrammi EF, GH sono simili frà di loro, ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo ABCD. Perche la retta EH è parallela al lato BC, sarà l'angolo esterno AEI [a] vguale all'angolo B interno, ed opposto; e sarà l'angolo esterno AIE vguale all'angolo ACB interno, ed opposto. Similmente perche la retta F G è parallela al lato DC, sarà l'angolo esterno AFI [b] vguale all'angolo D interno, ed opposto; e l'angolo AIF esterno, vguale all'angolo ACD interno, ed opposto; e perciò tutto l'angolo EIF sarà vguale à tutto l'angolo BCD; l'angolo A è commune ad ambidue i parallelogrammi EF, BD; saranno i parallelogrammi EF, BD frà di loro equiangoli. Nell'istesso modo si pro-



a 29. del 1.
b 29. del 1.

uerà che il parallelogrammo GH è equiangolo à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò sarà ancora equiangolo al parallelogrammo EF .

In oltre perche la retta E I è parallela al lato BC, per il Corollario alla 4. propositione di questo , il triangolo AEI è simile al triangolo ABC : e similmente essendo FI parallela al lato CD, sarà il triangolo AIF simile al triangolo ACD; è sarà la proportione di EI ad IA [d] come quella di BC à CA;e la proportione di A I ad I F come quella di AC à CD;e per l'egualità,EI ad IF [e] sarà come BC à CD;e così i lati intorno à gli angoli vguali EIF, BCD sono proportionali. Come ancora sarà IF,ad FA come CD à DA ; ed IE ad EA come CB à BA; e così i lati intorno à gli angoli vguali AEI,ABC, ouero AFI,ADC,sono proportionali. Di più sarà FA ad AI come DA, ad AC, & AI ad AE come CA ad AB,e per l'egualità, FA ad AE [f] sarà come DA ad AB;per la qual cosa i parallelogrammi EF, BD sono frà di loro simili . Nell'istesso modo si dimostrerà , che il parallelogrammo G H è simile à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò i parallelogrammi EF, GH sono frà di loro simili , ed ognuno è simile à tutto il parallelogrammo B D , *ch'era da dimostrarsi* .



d 1. defin. del 6.

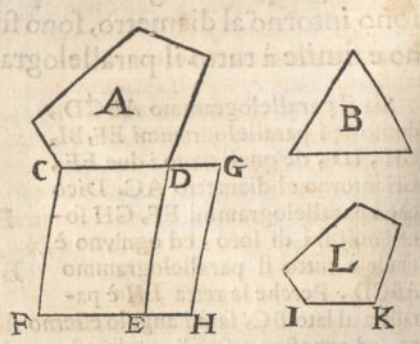
e 22. del 5.

f 22. del 5.

PLOBLEMA VII. PROPOSITIONE XXV.

Dati due rettilinei, costruirne vn terzo simile ad vno de i dati , ed vguale all'altro.

Siano dati i due rettilinei A, & B , e si voglia costruire vn altro rettilineo simile al rettilineo A,ed vguale al rettilineo B . Al lato C D [a] si applichi il parallelogrammo CDEF , secondo qualunque angolo*; poi si applichi al lato D E [b] il parallelogrammo DH vguale al rettilineo B , e che habbia l'angolo E D G vguale all'angolo FCD ; frà le due rette CD,DG [c] si troui vna media proportionale , che sia IK ; sopra la retta IK [d] si descriua il rettilineo L simile , e similmente posto al rettilineo A . *Dico che il rettilineo L è vguale al rettilineo B .*



* vguale al rettilineo A

a 45. del 1.

b 45. del 1.

c 13. del 6.

d 18. del 6.

Perche l'angolo EDG , per costruttione è vguale all'angolo F C D ; vgualmente s'aggiunga l'angolo EDC ; i due angoli EDG, EDC saranno vguali à i due angoli EDC, FCD; ma i due angoli EDC,FCD [e] sono

e 29. del 1.

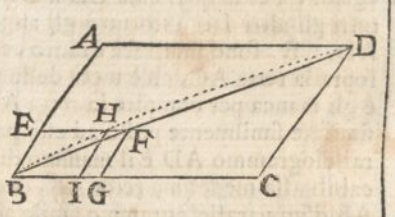
vguali

vguali à due angoli retti ; perciò i due angoli EDG, EDC sono vguali à due angoli retti ; e le rette CD, DG [f] costituiscono vna sola retta linea ; per la qual cosa i parallelogrammi CE, DH sono sotto vna medesima altezza ; ed il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH [g] sarà come la base CD alla base DG. In oltre perche IK, per costruttione, è media proportionale frà le due CD, DG, per il Lemma 8. dopo la 18. propositione di questo, la prima CD alla terza DG hà duplicata proportione di quella, che hà la prima CD alla seconda I K : ma il rettilineo A al simile rettilineo L hà la medesima duplicata proportione, che hà CD ad I K ; haverà il rettilineo A al rettilineo L [h] l'istessa proportione, che hà C D à DG ; fù dimostrata la proportione di C D à D G essere come il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH ; sarà il rettilineo A al rettilineo L, [K] come il parallelogrammo CE al parallelogrammo D H ; ma il rettilineo A, per costruttione, è vguale al parallelogrammo CE ; sarà il rettilineo L [l] vguale al parallelogrammo DH : e perche il parallelogrammo DH è fatto vguale al rettilineo B ; sarà il rettilineo L vguale al rettilineo B, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

f 14. del 1.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 11. del 5.
l 14. del 5.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn parallelogrammo sia detratto vn parallelogrammo simile, e similmente posto, che habbia vn angolo commune con tutto il parallelogrammo ; l'vno, e l'altro parallelogrammo sarà intorno al medesimo diametro.



Dal parallelogrammo ABCD, ne sia detratto vn parallelogrammo simile, e similmente posto, com'è il parallelogrammo EBGF, che habbiano l'angolo EBG commune. Dico che tirato il diametro BD quello passa per il punto F. Se il diametro BD non passa per l'angolo F, ò segarà il lato EF, ouero il lato FG ; seghi, s'è posibile, il lato EF in qualche punto H, e sia il diametro la linea DHB ; dal punto H si tiri la retta HI, [a] parallela al lato AB, sarà il quadrilatero EBIH parallelogrammo, il quale, per quel che s'è detto, e intorno al diametro D HB ; e perciò il parallelogrammo EBIH [b] sarà simile à tutto il parallelogrammo AC ; ma il parallelogrammo EBGF è supposto simile al medesimo parallelogrammo AC, i parallelogrammi dunque EBGF, EBIH [c] sono simili frà di loro, e la proportione di EB à BG, [d] sarà come quella della medesima E B à B I : per la qual cosa le rette BI, BG [e] sono frà di loro vguali, la parte è vguale al tutto, ch'è impossibile : non dunque il diametro DB sega il lato EF. Nell'istesso modo si dimostrarà, che non sega il lato F G ; e perciò passa per il punto F, ed i parallelogrammi EBGF, ABCD sono intorno al medesimo diametro DB, ch'era da dimostrarsi.

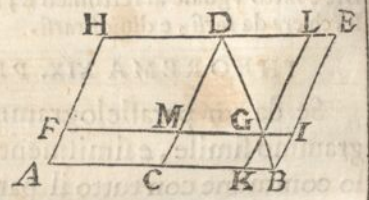
a 31. del 1.
b 24. del 6.
c 21. del 6.
d 1. defin. d el 6.
e 9. del 5.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXVII.

Di tutti i parallelogrammi applicati alla medesima retta linea, che mancano à compire quella retta linea d'vn parallelogrammo simile, e similmente posto à quello, ch'è descritto sopra la metà; il massimo è il parallelogrammo descritto sopra la metà.

Sia la retta linea A B, diuisa in due parti vguali in C, e sopra la retta AC *sia* descritto qualunque parallelogrammo AD; dal punto B si tiri la
a 31. del 1. retta B E [a] parallela ad A H, ouero C D, la quale concorrerà con H D continuata in qualche punto E. Perche la retta D C è parallela ad AH,
b 29. del 1. l'angolo EDC esterno [b] è vguale all'angolo DHA interno, ed opposto; e per l'istessa ragione l'angolo BCD sarà vguale all'angolo A. Simil-
c 29. del 1. mente essendo DC parallela ad EB, l'angolo HDC esterno [c] sarà vguale all'angolo E interno, ed opposto; e l'angolo ACD sarà vguale all'angolo CBE; dal che i parallelogrammi AD, CE sono equiangoli. E perche CB è vguale ad AC,



però DE sarà vguale ad *HD; come ancora EB, DC, HA sono frà di loro*
d Corol. alla 7. del 5. vguali. Per la qual cosa CD à DE [d] sarà *come A H ad H D*, e così per
e 1. defin. del 6. tutti gli altri lati intorno à *gli angoli vguali. Si che i parallelogrammi* AD, CE [e] *sono simili frà di loro*, ed *il parallelogrammo* AD, descritto *sopra la retta AC, ch'è metà della retta AB*, sarà applicato alla retta AB, e *gli manca per compire la retta* AB, tutto il parallelogrammo DCBE *simile*, e similmente posto ad esso parallelogrammo AD. Dico che il parallelogrammo AD è il massimo di tutti gli altri parallelogrammi applicabili alla medesima retta AB, che ogn'vno manchi per compire la retta AB d'vn parallelogrammo simile ad AD.

Si tiri il diametro DB, nel quale sia preso qualunque punto G; e per il
f 31. del 1. punto G [f] si faccia passare la retta IF parallela ad AB, e per il medesimo punto G si faccia passare la retta LK parallela ad EB; e sarà diuiso il parallelogrammo CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due KI, ML sono intorno al diametro DB; e perciò
g 24. del 6. [g] sono simili frà di loro, ed ogn'vno è simile al parallelogrammo CE; cioè simile al parallelogrammo A D, descritto sopra la retta AC, ch'è metà della retta AB: sarà dūque applicato alla retta AB il parallelogrammo AG, il quale manca, per compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo K I simile al *parallelogrammo* AD, descritto sopra di AC, metà di AB. Dico che *il parallelogrammo* AG è minore del parallelogrammo AD. Perche i complementi CG,
h 43. del 1. GE, [h] sono frà di loro vguali, se gli aggiunga il commune KI, ne viene il parallelogrammo C I vguale al parallelogrammo K E: ma il parallelo-

grammo

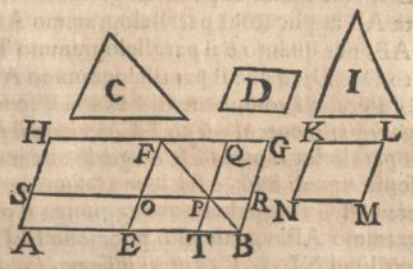
grammo CI K è vguale al parallelogrammo CF (ſtante che hanno vguali baſi, e ſono frà le medeſime parallele) ſarà il parallelogrammo CF vguale al parallelogrammo KE; vgualmente ſe gli aggiunga il parallelogrammo CG, ne viene tutto il parallelogrammo AG vguale allo gnomone CBELGM; ma queſto gnomone è minore del parallelogrammo CE, cioè minore del parallelogrammo AD; ſarà il parallelogrammo AG minore del parallelogrammo AD. E perche il punto G è preſo ad arbitrio, ouunque il punto G ſarà preſo in DB, ſempre ſi dimoſtrerà il medeſimo. Per la qual coſa di tutti i parallelogrammi applicabili ad AB, che ogn'vno manchi à compire la linea AB per vn parallelogrammo ſimile ad AD, il parallelogrammo AD ſarà il maſſimo, ch'era da dimoſtrarſi. K 31. del 6.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che manchi à compire la linea d'vn parallelogrammo ſimile ad vn dato parallelogrammo; è neceſſario però, che il dato rettilineo non ſia maggiore del parallelogrammo deſcritto ſopra la metà, ſimile al dato parallelogrammo.

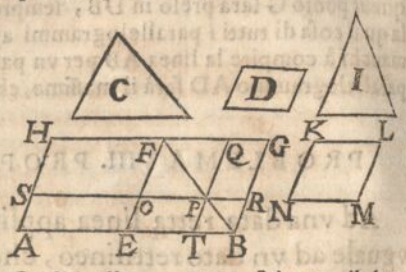
Sia data la retta linea AB, il rettilineo C, ed il parallelogrammo D; e ſ'habbia d'applicare alla data retta AB vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che manchi à compire la retta AB per vn parallelogrammo ſimile al dato parallelogrammo D. Diuiſa AB [a] *in due parti vguali in E, ſopra la metà AE* [b] *ſi deſcriua il parallelogrammo AF, ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D; e ſi compiſca tutto il parallelogrammo AG. Si dimoſtri, come ſi fece nel principio dell'antecedente propoſitione, che il parallelogrammo EG è ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo AF, ouero D. Se il parallelogrammo AF ſarà vguale al rettilineo C, haueremo applicato alla retta AB il parallelogrammo AF, che manca per compire la retta AB quanto è il parallelogrammo EG, ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D, ch'era da farſi. Ma ſe il parallelogrammo AF non è vguale al rettilineo C, perche nell'antecedente propoſ. s'è dimoſtrato, che il parallelogrammo AF è il maſſimo di tutti gli applicabili ad AB, che habbiano la mancanza ſimile ad AF; perciò qualunque parallelologrammo applicato ad AB, ſecondo le dette conditioni, ſarà minore di*

a 10. del 1.
b 18. del 6.



AF, do-

AF; douendosi dunque applicare ad A B vn parallelogrammo vguale al rettilineo C, con le dette conditioni, non essendo C vguale ad AF è necessario, che sia minore, altrimente l'applicatione da farsi è impossibile. Supposto dunque, che il rettilineo C sia minore di AF per la quantità del rettilineo I; si deseriua il parallelogrammo NL simile, e similmente posto al parallelogrammo D [c] ed vguale al rettilineo I; sarà il parallelogrammo NL [d] simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; dal che l'angolo EFG sarà vguale all'angolo NKL. In oltre perche sottraendo dal parallelogrammo AF il rettilineo C, auanza il rettilineo I, cioè NL, perciò i due C, & NL, insieme giunti, sono vguali al parallelogrammo AF, ouero EG; per la qual cosa il parallelogrammo EG sarà maggiore del parallelogrammo NL; e per lo Scolio alla 20. propositione, il lato FG è maggiore di KL, ed il lato FE sarà maggiore di KN. Si tagli da FG [e] la parte FQ vguale ad LK; e da FE si tagli la parte F O vguale ad NK; dal punto Q si tiri la retta QT [f] parallela alla retta GB, e per il punto O si faccia passare la retta SR parallela ad AB. *Perche i lati OF, FQ sono vguali à i lati NK, KL, e l'angolo OFQ è vguale all'angolo K; sarà* il parallelogrammo OQ [g] vguale, *simile, e similmente posto al parallelogrammo NL; ma il parallelogrammo NL è simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; saranno i parallelogrammi EG, OQ frà di loro simili,* [h] *e similmente posti; hanno l'angolo EFG commune; perciò tirato il diametro FB,* [K] *quello passa per il punto P; ed il parallelogrammo TR sarà intorno al diametro F B; dal che* [l] *sarà simile al parallelogrammo EG; cioè simile al parallelogrammo AF, ouero D.* Si è dunque alla retta AB applicato il parallelogrammo AP, che manca à compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo T R simile al parallelogrammo dato D. Dico che il parallelogrammo AP è vguale al rettilineo C.



Perche i complementi EP, PG [m] sono frà di loro vguali, se gli aggiunga vgualmente il piano TR, ne viene il piano ER vguale al piano TG; ma il parallelogrammo ER è vguale al parallelogrāmo E S [n] (stante che sono sopra vguali basi, e frà le medesime parallele) sarà il piano ES vguale al piano TG; vgualmente s'aggiunga il piano E P, ne viene il parallelogrammo AP vguale allo gnomone EBGQPO. Finalmente perche i due rettilinei NL, & C, giunti insieme, sono vguali al parallelogrammo AF, cioè vguali al parallelogrammo EG; ed il parallelogrammo NL è dimostrato vguale al parallelogrammo OFQP; sarà il rettilineo C vguale allo gnomone EBGQPO: ma lo gnomone è dimostrato vguale al parallelogrammo AP; sarà il paralellogrammo AP vguale al dato rettilineo C, ch' era da farsi, e dimostrarsi.

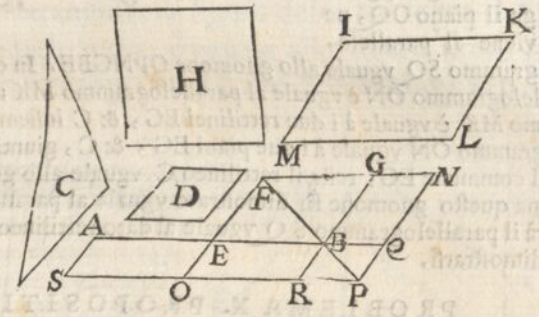
c 25. del 6.
d 21. del 6.
e 3. del 1.
f 31. del 1.
g Scol. alla 4. del 6.
h 21. del 6.
K 26. del 6.
l 24. del 6.
m 43. del 1.
n 36. del 1.

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIX.

Applicare ad vna data retta linea vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che ſuperi la retta data d'vn parallelogrammo ſimile ad vn altro dato parallelogrammo.

Sia data la retta linea AB, alla quale ſi voglia applicare vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che ſuperi la retta AB, per quanto è vn parallelogrammo ſimile al parallelogrammo dato D. Si diuida AB [a] in due parti vguali, e ſopra la metà E B [b] ſi deſcriua il parallelogrammo GE ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D. S'aggiunga il parallelogrammo EG, col rettilineo C [c] in modo, che coſtituiſcano vn ſolo rettilineo, come il notato H; poi ſi coſtruiſca il parallelogrammo MK vguale al rettilineo H; [d] e che ſia ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D; ſarà il parallelogrammo MK [e] ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrãmo EG; e perciò l'angolo E F G ſarà vguale all'angolo I. Hor perche il parallelogrammo MK è vguale al rettilineo H, ed il rettilineo H è vguale à i due rettilinei EG, & C giunti inſieme; ſarà il parallelogrammo MK maggiore del ſimile parallelogrammo EG: per la qual coſa il lato IK [f] ſarà maggiore di FG, ed il lato IM ſarà maggiore di FE. Si continui FG verſo N, e ſi faccia FN [g] vguale ad IK; e ſi continui il lato FE verſo O, e ſi faccia FO vguale ad IM; dal punto N ſi tiri la retta NP [h] parallela ad FO; e per il punto O ſi faccia paſſare la retta SP parallela ad AB, la quale concorrerà con NP in qualche punto P; dal punto A ſi tiri la retta AS [k] parallela ad FO, la quale concorrerà con PS in qualche punto S; ſi prolunghi AB ſino che concorra con NP in qualche punto Q, e ſi prolunghi GB ſino ad R. Perche l'angolo OFN è vguale all'angolo MIK, ed i lati OF, FN ſono vguali à i due MI, IK; ſarà il parallelogrammo ON [l] ſimile, e ſimilmente poſto, ed vguale al parallelogrammo MK; dal che i due parallelogrammi O N, EG [m] ſono frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti; hanno l'angolo F commune, e perciò tirato il diametro FP, [n] quello paſſa per il punto B; dal che il parallelogrammo RQ ſarà intorno al diametro FP: per la qual coſa ſarà [o] ſimile à tutto il parallelogrammo FOPN, cioè ſarà [p] ſimile al parallelogrammo



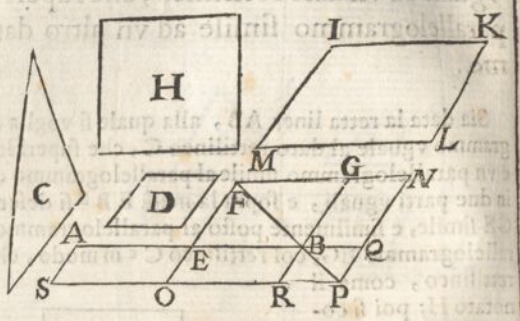
a 10. del 1.
b 18. del 6.
c 45. del 1.
d 25. del 6.
e 21. del 6.
f Scol. alla 20. del 6.
g 3. del 1.
h 31. del 1.
k 31. del 1.
l 4. del 6.
m 21. del 6.
n 26. del 6.
o 24. del 6.
p 21. del 6.

rallelogrammo dato D, sarà dunque applicato alla retta AB il parallelogrammo SQ, il quale supera la retta AB, per quanto è il parallelogrammo R Q, simile al parallelogrammo D. Dico che il parallelogrammo SQ è vguale al dato rettilineo C.

I parallelogrammi AO, OB hanno vguali basi, e sono frà le medesime parallele, e perciò q sono frà di loro vguali; ma O B r è vguale al complemento BN, sarà il piano AO vguale al piano B N; vgualmente se gli aggiunga il piano OQ, ne viene il parallelogrammo SQ vguale allo gnomone OPNGBE. In oltre perche il parallelogrammo ON è vguale al parallelogrammo MK; ed il parallelogrammo MK è vguale à i due rettilinei EG, & C insieme; sarà il parallelogrammo ON vguale à i due piani EG, & C, giunti insieme; se ne leui il commune EG, resta il rettilineo C vguale allo gnomone OPNGBE: ma questo gnomone fù dimostrato vguale al parallelogrammo S Q; sarà il parallelogrammo S Q vguale al dato rettilineo C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

q 36. del r.

r 43. del 1.

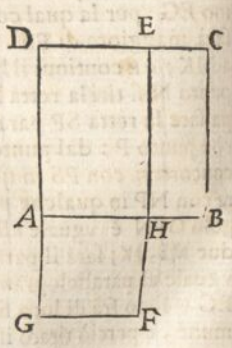


PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXX.

Diuidere vna data retta linea terminata secondo l'estrema, e media proportione.

Sia data la retta terminata AB, la quale si voglia diuidere secondo l'estrema,e media proportione; cioè che tutta alla maggior parte, habbia l'istessa proportione, quale hà la maggior parte al rimanente. Sopra la retta A B si descriua il quadrato AC, e si applichi al lato A D il parallelogrammo EG, a vguale al quadrato AC, e che superi la retta AD per vn parallelogrammo simile al medesimo quadrato AC; cioè che superi la retta AD per vna figura quadrata, il lato EF segarà la retta AB in qualche punto H. Dico che AB ad AH è come AH ad HB.

a 29. del 6.



Perche il parallelogrammo DF, per costruttione, è vguale al quadrato AC; leuatone il commune rettangolo AE, resta il quadrato AF vguale al rettangolo EB. In

oltre,

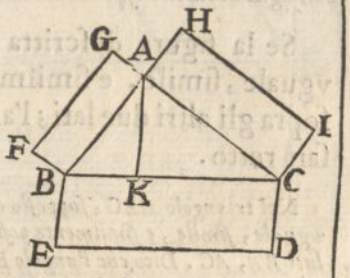
oltre, essendo i rettangoli AF, EB frà di loro vguali, e gli angoli ad H retti; i lati intorno à gli angoli vguali [b] sono reciprochi; e perciò EH ad HF sarà come AH ad HB: ma EH è vguale à CB, cioè vguale ad AB; sarà AB ad FH come AH ad HB; E perche il lato FH è vguale al lato AH (stante che AF è quadrato) sarà AB ad AH, come AH ad HB. Per la qual cosa la retta AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da farsi, e dimostrarsi. b 14. del 6.

SCOLIO.

Volendo diuidere qualunque retta AB secondo l'estrema, e media proportione con modo facile, si operi come si disse nell' 11. *proposizione del secondo Libro.*

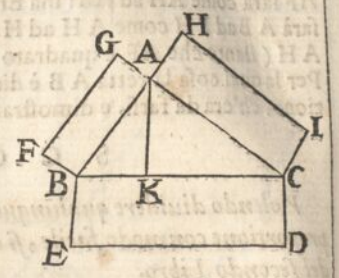
THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXXI.

Ne i triangoli rettangoli, la figura descritta sopra del lato opposto all'angolo retto, è vguale alle figure simili, e similmente descritte sopra i lati, che contengono l'angolo retto.



Sia il triangolo ABC, angolo retto in A, e sopra i lati BC, CA, AB siano descritte figure rettilinee simili, e similmente poste, che siano le notate BD, CH, BG. Dico che la figura BD descritta sopra del lato BC, opposto all'angolo retto, è vguale alle figure CH, BG, descritte sopra i lati AB, AC, che contengono l'angolo retto A. Dall'angolo retto A si faccia cadere la retta AK [a] *perpendicolare al lato BC, e* a 12. del 1. per il Corollario 2. all'8. proposizione di questo, la retta AC è media proportionale frà le due BC, CK; e la retta AB è media proportionale frà le due CB, BK; dalche BC ad AC sarà come AC à CK; e per il Lemma 8. dopo la 18. proposizione di questo, la prima BC alla terza CK, hà duplicata proportione di quella, che hà BC à CA: Ma il rettilineo EC al simile rettilineo CH [c] hà la medesima duplicata proportione, che hà BC ad AC; hauerà BC à CK l'istessa proportione, quale hà il rettilineo EC al rettilineo CH; ed inuertendo CK à CB [b] sarà come il rettilineo CH, al rettilineo CE. Similmente essendo AB media proportionale frà le due CB, BK, hauerà CB à BK duplicata proportione di quella, che hà CB ad AB: ma il rettilineo EC al simile rettilineo BG [f] hà la medesima duplicata proportione di quella, che hà CB à BA, hauerà CB à BK l'istessa proportione, che hà il rettilineo DB al rettilineo BG; ed inuertendo; BK à BC, sarà come il rettilineo BG al rettilineo BD. Si considerino sei c 20. del 6. b Corol. alla 4. del 5. f 20. del 6.

quantità, la prima CK, la seconda CB, la terza CH, la quarta CE, la quinta BK, e la sesta BG. Perche si è dimostrato, che la prima CK alla seconda CB hà l'istessa proportione, quale hà la terza CH alla quarta CE; e s'è dimostrato ancora, che la quinta BK alla seconda CB, hà l'istessa proportione, quale hà la sesta BG alla quarta CE; la prima CK con la quinta BK alla seconda BC [c] hauerà l'istessa proportione, quale hà la terza CH con la sesta BG alla quarta CE; ma la prima CK con la quinta BK è vguale alla seconda BC, la terza dunque CH con la sesta BG [d] sarà vguale alla quarta CE. Per la qual cosa il rettilineo EC è vguale à i due rettilinei simili CH, BG, giunti insieme, ch'era da dimostrarsi.



c 24. del 5.

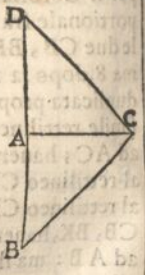
d 14. del 5.

SCOLIO.

Il Campano fà la conuersa à questa propositione, la quale non è diuersa dalla 48. propositione del primo Libro in cosa alcuna, e perciò con ogni breuità l'esponiamo in questo luogo.

Se la figura descritta sopra del lato d'vn triangolo è vguale, simile, e similmente posta alle figure descritte sopra gli altri due lati; l'angolo contenuto da quei due lati sarà retto.

Nel triangolo ABC, supposto che la figura descritta sopra del lato BC sia vguale, simile, e similmente posta alle figure descritte sopra degli altri due lati BA, AC. Dico che l'angolo BAC è retto. Nel punto A sopra la retta AC, [a] si erigga la perpendicolare AD; si faccia AD [b] vguale ad AB, e si tiri la retta DC. Le figure simili, e similmente descritte sopra i lati DA, AC; [c] sono vguali alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato CD. In oltre perche DA è vguale ad AB, la figura descritta sopra DA [d] sarà vguale alla figura simile, e similmente descritta sopra AB; e perciò le due simili figure descritte sopra i lati CA, AD sono vguali alle due simili figure descritte sopra i lati CA, AB; cioè la figura descritta sopra del lato CD è vguale alle due figure simili, e similmente descritte sopra i lati CA, AB: ma queste, per ipotesi, sono vguali alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato BC; sarà la figura descritta sopra del lato DC vguale alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato BC; e per lo Scolio alla propos. 2. di questo, sarà DC vguale al lato BC. Finalmente perche i lati DA, AC sono vguali à i due lati BA, AC, e la base DC è



a 11. del 1.

b 3. del 1.

c 31. del 6.

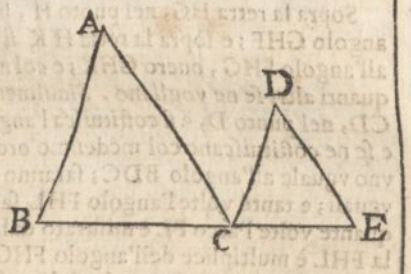
d Scol. alla 20. del 6.

vgua-

vguale alla baſe BC; ſarà l'angolo DAC [c] *vguale all'angolo BAC: ma l'angolo DAC, per coſtruttione è retto; l'angolo dunque BAC ſarà retto, ch'era da dimoſtrarſi.* c 8. del 1.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se due triangoli, che hanno due lati proportionali à due lati, ſiano compoſti ſecondo vn angolo talmente, che i lati homologhi ſiano frà di loro paralleli, e l'angolo, ſecondo il quale ſono compoſti, ſia alterno à gli angoli contenuti da i lati proportionali; i reſtanti due lati ſaranno in vna medeſima dirittura, e coſtituiranno vna ſola retta linea.



Siano i due triangoli A B C, D C E, compoſti ſecondo l'angolo ACD, il quale ſia alterno à gli angoli A, & D; e la proportione di BA ad AC ſia come quella *di C D à D E; e ſiano i lati homologhi AB, DC frà di loro paralleli; come ancora i lati homologhi AC, DE ſiano frà di loro paralleli. Dico che i* lati BC, CE coſtituiſcono vna ſola retta linea BE. Perche i lati AB, DC ſono paralleli, e ſono ſegati dalla retta AC, l'angolo BAC [a] ſarà vguale all'angolo alterno ACD; ſimilmente eſſendo i lati AC, DE frà di loro paralleli, ſarà l'angolo EDC vguale all'angolo alterno ACD; per la qual coſa l'angolo A ſarà vguale all'angolo D. In oltre perche gli angoli A, & D ſono vguali, e la proportione di BA ad AC, per ipoteſi, è come quella di CD à DE; i triangoli ABC, DCE [b] ſono equiangoli; e ſarà l'angolo ACB vguale all'angolo E, e l'angolo DCE vguale all'angolo B. Hor all'angolo DCE s'aggiunga l'angolo DCA; ed all'angolo B s'aggiunga l'angolo A; ſarà tutto l'angolo E C A vguale à i due angoli A, & B, giunti inſieme. Se tanto all'angolo ECA, quanto alla ſomma de i due angoli A, & B, s'aggiunga l'angolo ACB, i due angoli ECA, ACB, ſaranno vguali alli trè angoli del triangolo A B C: ma i tre angoli del triangolo ABC [c] ſono vguali à due angoli retti, i due angoli dunque ECA, ACB ſono vguali à due angoli retti, e le rette BC, CE [d] coſtituiſcono la ſola retta linea BE, ch'era da dimoſtrarſi.

a 29. del 1.

b 6. del 6.

c 32. del 1.

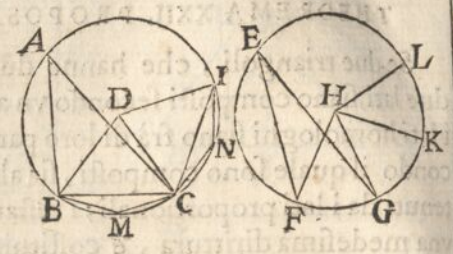
d 14. del 1.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle cir-

confe-

conferenze, come ancora i ſettori, hanno la medeſima proportione, che gli archi, à i quali inſiſtono.



Siano i due circoli vguali ABC, EFC, i di cui centri D, ed H; e ſiano due qualunque angoli a i centri, come BDC, FHG, e due altri alla circonferenza, come BAC, FEG, i quali ſiano oppoſti à gli archi BMC, FG. Dico, che l'angolo B D C all'angolo FHG; ouero l'angolo BAC all'angolo FEG; come ancora il ſettore DBMC al ſettore FHG, è come l'arco BMC all'arco FG.

a 23. del 1. Sopra la retta HG, nel punto H, ſi faccia l'angolo G H K [a] vguale all'angolo GHF; e ſopra la retta H K ſi coſtituiſca l'angolo KHL, vguale all'angolo FHG, ouero GHK; e col medeſimo ordine ſe ne coſtituiſcano quanti altri ſe ne vogliano. Similmente nel circolo ABC, ſopra la retta

b 23. del 1. CD, nel punto D, [b] ſi coſtituiſca l'angolo CDI, vguale all'angolo BDC; e ſe ne coſtituiſcano col medeſimo ordine, quanti altri ſi vogliano, ogn'vno vguale all'angolo BDC; ſaranno gli archi FG, GK, KL, frà di loro vguali; e tante volte l'angolo FHL ſarà miſurato dall'angolo FHG, per quante volte l'arco FL è miſurato dall'arco FG: per la qual coſa l'angolo FHL è multiplice dell'angolo FHG, come l'arco FL è multiplice dell'arco FG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo BDI è multiplice dell'angolo BDC, come l'arco BI è multiplice dell'arco BC. Se dunque l'angolo BDI è vguale all'angolo F H L, ſarà l'arco B I

c 26. del 3. [c] vguale all'arco FL; ſe l'angolo BDI è maggiore dell'angolo FHL, per il Corollario alla 26. propoſitione del terzo Libro, l'arco B I ſarà maggiore dell'arco FL; e ſe l'angolo BDI è minore dell'angolo F H L, l'arco B I ſarà minore dell'arco FL. Si conſiderino quattro quantità; cioè l'angolo BDC prima, l'angolo FHG ſeconda, la terza ſia l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono l'angolo BDI, e l'arco BI; e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta ſono l'angolo FHL, e l'arco FL: perche l'angolo BDI, ch'è multiplice della prima, ſe è maggiore dell'angolo FHL, ch'è multiplice della ſeconda, ancora l'arco BI, ch'è multiplice della terza, è maggiore dell'arco FL, ch'è multiplice della quarta; e ſe l'angolo BDI è minore, ò vguale all'angolo FHL, ancora l'arco BI è minore, ò vguale all'arco FL; e per la ſeſta definitione del quinto Libro, la prima alla ſeconda hauerà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; cioè l'angolo BDC all'angolo FHG ſarà, come l'arco BC all'arco FG. In oltre perche l'angolo B D C al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza; e l'angolo FHG al centro è il doppio dell'angolo FEG alla circonferenza; ſaranno gli angoli BDC, FHG, vguali multiplici degli angoli BAC, FEG; e perciò l'angolo B D C all'

ango-

angolo FHG [d] è come l'angolo BAC all'angolo FEG: ma si è dimostrato, che l'angolo BDC all'angolo FHG è come l'arco BC all'arco FG; sarà l'angolo BAC all'angolo FEG [e] come l'arco BC all'arco F G. Per la qual cosa ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle circonferenze sono come gli archi, à i quali insistono.

Finalmente dico, che il settore B D C al settore F H G, è come l'arco BC all'arco FG. Si tirino le rette BC, CI. Perche gli archi BC, CI sono frà di loro vguali, le rette ancora BC, CI [f] sono frà di loro vguali. Proueremo prima, che essendo gli archi B C, C I frà di loro vguali, che i settori ancora DBC, CDI sono frà di loro vguali. Ne gli archi BC, CI si prendano due qualunque punti M, & N, e si tirino le rette BM, MC, CN, NI. Perche gli archi BMC, CNI sono frà di loro vguali, i rimanenti di tutta la circonferenza, cioè gli archi BAIC, CBAI sono frà di loro vguali: ma gli archi vguali [g] si oppongono ad angoli vguali; gli angoli dunque BMC, CNI sono frà di loro vguali; dalche le portioni BMC CNE [h] sono frà di loro simili: ma sono poste sopra le rette vguali B C, CI; perciò [K] sono frà di loro vguali. In oltre si considerino i triangoli DBC, DCI. Perche i due lati BD, DC sono vguali à i due lati C D, DI, e l'angolo BDC è vguale all'angolo CDI; sarà il triangolo D B C [l] vguale al triangolo DCI; à i quali s'aggiungano le vguali portioni BMC, CNI, ne viene il settore DBMC vguale al settore DCNI. Nell'istesso modo si proverà che i settori HFG, HGK, HKL sono frà di loro vguali: e se l'arco BCI è vguale all'arco FKL, nell'istesso modo si dimostrerà, che il settore BDIC è vguale al settore FHLG. D'onde facilmente si può dimostrare, che se l'arco B C I è maggiore, ò minore dell'arco FGL; ancora il settore BDIC sarà maggiore, ò minore del settore FHLG. Hor perche tanti sono gli archi vguali FG, GK, KL, per quanti sono gli vguali settori HFG, HGK, HKL; sarà il settore F H L G multiplice del settore HFG, come l'arco F L è multiplice dell'arco F G. E per l'istessa ragione sarà il settore BD I C multiplice del settore B D C, come l'arco BCI è multiplice dell'arco BC. Si considerino quattro quantità, la prima sia il settore DBC, la seconda il settore HFG, la terza l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, sono il settore BDIC, e l'arco BI; gli vguali multiplici della seconda, e quarta sono il settore FHL, e l'arco FL; e perche se il settore BDI è vguale al settore FHL ancora l'arco BI è vguale all'arco FL; e se il settore BDI è maggiore, ò minore del settore FHL, ancora l'arco BI è maggiore, ò minore dell'arco F L, per la festa definitione del quinto Libro, sarà la prima, cioè il settore DBC alla seconda, ch'è il settore HFG, come la terza, cioè l'arco BC, alla quarta, ch'è l'arco FG, come fù proposto dimostrare.

d 15. del 5.
e 11. del 5.
f 29. del 3.
g 27. del 3.
h 10. defin. del 3.
K 24. del 3.
l 4. del 1.

COROLLARIO I.

Essendo l'arco BC all'arco FG, come l'angolo BDC all'angolo FHG; cioè come l'angolo BAC all'angolo FEG; sarà manifesto, che il settore DBC al settore HFG è come

l'ango-

l'angolo BDC all'angolo FHG; ed è ancora come l'angolo BAC all'angolo FEG.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propos. è parimente manifesto, che l'angolo al centro à quattro angoli retti è come l'arco opposto all'angolo nel centro à tutta la circonferenza del circolo; ed al contrario, i quattro angoli retti hanno l'istessa proportione all'angolo nel centro, quale hà tutta la circonferenza all'arco, al quale insiste l'angolo nel centro.



Nel circolo ABCD, il di cui centro E, & i diametri AC, BD si seghino ad angoli retti in E; saranno gli archi AB, BC, CD, DA, [a] *frà di loro vguali. Si prenda nell'arco CD qualunque punto F, e si tiri la retta FE. Per l'antecedente propositione l'angolo CED all'angolo FED sarà come l'arco CD all'arco FD; e perche i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED sono multiplici dell'angolo retto CED; come i quattro archi DA, AB, BC, CD sono multiplici dell'arco CD; per il Corollario alla 24. propositione del 5. libro, li quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, all'angolo retto CED, hanno l'istessa proportione, che i quattro archi DA, AB, BC, CD, cioè che tutta la circonferenza ABCD all'arco CD: ma l'angolo CED all'angolo FED è come l'arco CD all'arco FD, per l'egualità, i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED all'angolo FED,* [b] *sono come tutta la circonferenza ABCD all'arco FD; ed inuertendo, l'angolo al centro FED* [c] *à i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, sono come l'arco FD à tutta la circonferenza, come si disse.*

a 23. del 3.

b 22. del 5.

c Corol. alla 4. del 5.

SCOLIO.

Non sarà inutile spiegare qui col Clauio il seguente Theorema.

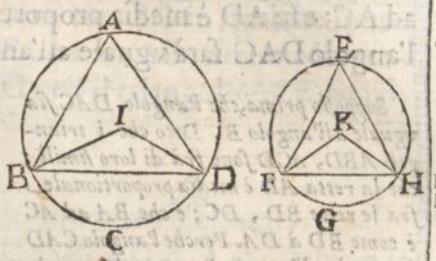
I.

Se da due qualunque circoli si taglino portioni simili; la proportione dell'arco à tutta la circonferenza del suo circolo, è come quella dell'altro arco à tutta la circonferenza del suo circolo.

Ne i circoli ABCD, EFGH, i di cui centri I, & K, siano tagliate le portioni simili BAD, FEH. Dico che l'arco BAD à tutta la circonferen-

za

za ABCD, è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH. Da i centri I, & K si tirino le rette IB, ID, KF, KH. Perche le portioni BAD, FEH sono simili, perciò gli angoli BAD, FEH, [a] *alle circonferenze sono frà di loro vguali; & i loro dupli, cioè gli angoli BID, FKH, à i centri, sono frà di loro vguali; e tal proportione hauerà l'angolo I à quattro angoli retti,* [b] *quale hà l'angolo K à quattro angoli retti: ma, per l'antecedente Corollario, l'angolo I à quattro angoli retti è come l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD; e l'angolo K à quattro retti è come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; sarà l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD,* [c] *come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; ed inuertendo, tutta la circonferenza ABCD all'arco BCD, sarà come tutta la circonferenza EFGH* [d] *all'arco FGH; e per la conuersione della proportione, tutta la circonferenza ABCD all'arco BAD* [e] *è come tutta la circonferenza EFGH all'arco FEH; ed inuertendo, l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD* [f] *è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH, ch'era da dimostrarsi.*



a 10. defin. del 3.

b Coroll. alla 7. del 5.

c 11. del 5.

d Coroll. alla 4. del 5.

e Coroll. alla 19. del 5.

f Coroll. alla 4. del 5.

COROLLARIO.

Sarà manifesto dal quel, che s'è detto, che gli archi delle simili portioni sono come le circonferenze de'loro circoli, e sono ancora come i restanti archi.

Perche essendosi dimostrato, che l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH; sarà, permutando, l'arco BAD all'arco FEH [g] *come la circonferenza ABCD alla circonferenza EFGH: ma tutta la circonferenza ABCD à tutta la circonferenza EFGH, per quel che s'è dimostrato, è come l'arco BCD all'arco FGH; sarà l'arco BAD all'arco FEH* [h] *come l'arco BCD all'arco FGH, come si disse.*

g 16. del 5.

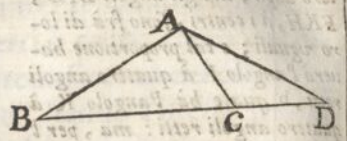
h 11. del 5.

Per facilitare le cose che seguono pongo quì li seguenti due Theorini.

II.

Se sarà qualunque triangolo ABC, e sarà fatto l'angolo DAC vguale all'angolo B; sarà il triangolo ABD simile al triangolo ACD, oltre à ciò la retta AD sarà media proportionale

tionale frà le rette BD, DC, e la proportione di BA ad AC sarà come quella di BD à DA, ouero come quella di AD ad AC; e se AD è media proportionale frà le rette BD, DC, l'angolo DAC sarà vguale all'angolo B.



Supposto prima, che l'angolo DAC sia vguale all'angolo B. Dico che i triangoli ABD, ACD sono frà di loro simili; che la retta AD è media proportionale frà le rette BD, DC; e che BA ad AC è come BD à DA. Perche l'angolo CAD è vguale all'angolo B, vgualmente s'aggiunga l'angolo BAC, i due angoli CAB, CBA [a] *saranno vguali à tutto l'angolo BAD. Nel triangolo ABC, il lato BC è continuato in D, dal che l'angolo esterno DCA* [b] *è vguale à i due angoli CBA, CAB interni, ed opposti: ma i due angoli CBA, CAB, insieme giunti, per quel che s'è dimostrato, sono vguali all'angolo BAD; sarà l'angolo DCA* [c] *vguale all'angolo BAD; l'angolo D è commune ad ambidue i triangoli ABD, ACD; saranno i due triangoli ABD, ACD equiangoli; per la qual cosa* [d] *haueranno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e perciò sono frà di loro simili, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Perche dunque i triangoli ABD, ACD sono simili, ed hanno l'angolo D commune, sarà BD à DA [e] *come AD à DC, e la retta AD sarà media proportionale frà le due BD, DC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.*

In oltre, essendo i triangoli ABD, ACD frà di loro simili, e l'angolo CAD è vguale all'angolo B; sarà AB à BD [f] *come AC ad AD; e permutando, AB ad AC* [g] *sarà come BD à DA, ouero come AD à DC, ch'era da dimostrarsi.*

Di nuouo, supposto che AD sia media proportionale frà le due BD, DC. Dico che l'angolo CAD è vguale all'angolo B. Perche AD è media proportionale frà le due BD, DC, sarà BD à DA come AD à DC; si che i triangoli ABD, ACD hanno i lati proportionali intorno all'angolo commune D, e perciò [h] *sono equiangoli, e gli angoli vguali saranno DCA, BAD, che sono opposti à i lati homologhi AD, DB; e similmente gli angoli CAD, DBA, che sono opposti à i lati homologhi CD, DA sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.*

a 2.assioma.
b 32.del 1.
c 1.assioma.
d 4.del 6.
e 4.del 6.
f 4. del 6.
g 16.del 5.
h 6.del 6.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che douendosi inclinare vna retta, come AD, che sottenda l'angolo esterno ACD, e che AD sia media proportionale frà le rette BD, DC, basta à fare l'angolo CAD vguale all'angolo B.

III.

In qualunque triangolo ABC, del quale l'angolo BAC

sia

sia diuiso in due parti vguali con la retta AD, ed in punto A sia fatto l'angolo DAE vguale all'angolo ADE; e prolongata la retta AE concorra con BC in qualche punto E. Dico che la retta DE, ouero AE, sarà media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE sarà simile al triangolo BAE.



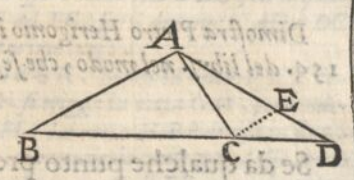
Nel triangolo ABD il lato BD è continuato verso E; sarà l'angolo ADE [a] *esterno vguale à i due angoli DAB, DBA interni, ed opposti: ma l'angolo ADE* [b] *è vguale all'angolo DAE; sarà l'angolo DAE vguale à i due angoli DAB, DBA; ma per ipotesi, l'angolo DAC è vguale all'angolo DAB; sarà il rimanente angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente Theorema, sarà AE media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE sarà simile al triangolo BAE, ch'era da dimostrarsi.*

a 32. del 1.
b 5. del 1.

Di Pappo propos. 119. lib. 7.

I. V.

Se sarà qualche triangolo ABC, del quale continuato il lato BC verso D in modo, che BD à DC sia come il quadrato di BA al quadrato di AC, tirata la retta AD. Dico che il rettangolo BDC è vguale al quadrato di AD.



Dal punto C si tiri la retta CE [a] *parallela ad AB; sarà il triangolo DEC* [b] *equiangolo al triangolo ABD; e sarà BD ad AB* [c] *come DC, à CE; e permutando, BD à DC* [d] *sarà come BA à CE; e prese le rette AB, EC come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia AB; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE* [e] *come la base AB alla base CE; cioè* [f] *come BD à DC: ma BD à DC, per ipotesi, è come il quadrato di AB al quadrato di AC; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE, come il medesimo quadrato di AB* [g] *al quadrato di AC; e perciò il quadrato di AC* [h] *sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, CE; donde le tre rette BA, AC, CE* [K] *sono proportionali; e sarà AB ad AC come AC à CE. Si considerino i triangoli ABC, ACE; essendo i lati AB, CE, per costruttione, frà di loro paralleli, gli angoli alterni BAC, ECA* [l] *sono frà di loro vguali. Si disse che BA ad AC è come AC à CE; i lati dunque intorno à gli angoli vguali sono proportionali; e perciò i triangoli ABC, EAC* [m]

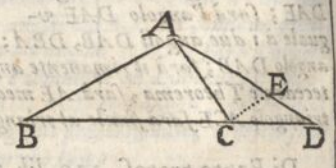
a 31. del 1.
b Corol. alla 4. del 6.
c 4. del 6.
d 16. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 11. del 5.
h 9. del 5.
K 17. del 6.
l 29. del 1.
m 6. del 6.

ſono equiangoli; e ſarà l'angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente theorema, la retta AD ſarà media proportionale frà le due BD, DC; ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DC ſarà vguale al quadrato di AD, che era da dimoſtrarſi.

Il ſeguente theorema è la conuerſa all'antecedente, la quale dimoſtreremo con Pietro Herigonio nel ſeguente modo.

V.

Se il rettangolo contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; ſarà BD à DC, come il quadrato di AB al quadrato di AC.



Perche il rettangolo cõtenuto dalle due BD, DC è vguale al quadrato di AD; a 17. del 6. *ſarà AD media proportionale frà le due BD, DC; e per il ſecondo degli antecedenti theoremi, l'angolo DAC ſarà vguale all'angolo B; il triangolo ACD ſarà ſimile à tutto il triangolo ABD; e la proportione di BA ad AC* b *ſarà come quella di* c *BD à DA; ouero di AD à DC. Hor eſſendo AD media proportionale frà le due BD, DC, hauerà BD à DC* e *duplicata proportione di quella, che hà BD à DA: ma BD à DA è come BA ad AC, hauerà BD à DC* f *duplicata proportione, che BA ad AC. E perche il quadrato di BA al quadrato di AC* g *hà la medeſima duplicata proportione, che BA ad AC; ſarà dunque BD à DC come il quadrato di BA al quadrato di AC, come fù propoſto dimoſtrare.*

b 4. del 6. c 11. del 5. e 8. Lemma dopo la 18. prop. del 6. f 13. del 5. g 20. del 6.

Dimoſtra Pietro Herigonio il ſeguente Theorema di Pappo propoſ. 154. del lib. 7. nel modo, che ſegue.

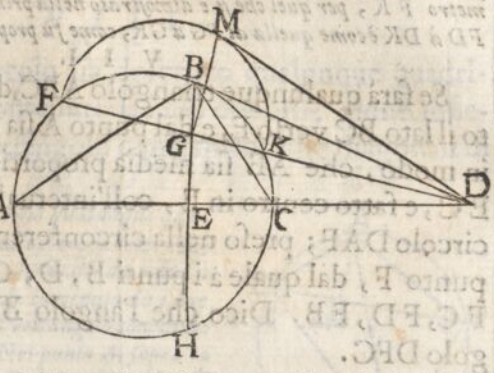
V I.

Se da qualche punto preſo fuori del circolo ſono tirate più rette linee, delle quali vna tocchi il circolo, e le altre lo ſeghino; e dal contatto cada vna retta perpendicolare à quel diametro, che continuato paſſi per il punto preſo; la proportione di tutta la ſegante alla parte eſterna, ſarà come le parti interpoſte frà la perpendicolare, e la circonferenza di eſſo circolo.

Sia il circolo ABC, e da qualche punto D, fuori del circolo, ſiano tirate le rette DB, DF, DA; cioè che DB tocchi il circolo in qualche punto B, e le rette

DF,

DF, DA lo seghino; e passi la retta DA per il centro del circolo; dal contatto B cada la retta BE, perpendicolare al diametro AC, la quale seghi la retta DF in qualche punto G. Dico che AD à DC è come AE ad EC; e che FD à DK è come FG à GK. Si prolunghi BE fino ad H; sarà [a] *BE vguale ad EH, ed il rettangolo cõtenuto dalle due BE, EH sarà vguale al quadrato di BE. Si tirino le rette BA, BC. Perche la retta DB tocca il circolo ABC,*



a 3.del 3.

sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC [b] *vguale al quadrato di DB; e per l'antecedente Theorema, AD à DC è come il quadrato di AB al quadrato di BC. In oltre essendo l'angolo ABC* [c] *nel mezzo circolo retto, e dall'angolo retto B cade la retta BE perpendicolare ad AC, la retta BE diuide il triangolo ABC* [d] *ne i due triangoli ABE, BEC simili frà di loro, e simili à tutto il triangolo ABC; e per il primo Corollario all'ottaua propositione di questo, sarà BE media proportionale frà le due AE, EC; e perciò la proportione della prima AE alla terza EC* [e] *è duplicata di quella, che hà la prima AE alla secõda EB: mà il quadrato di AE al quadrato di EB* [f] *hà la medesima duplicata proportione, che hà AE ad ER; hauerà il quadrato di AE al quadrato di EB l'istessa proportione, che hà AE ad EC. Di più, essendo i triangoli ABC, AEB frà di loro simili, sarà AB à BC,* [g] *come AE ad EB; ed il quadrato di AB al quadrato di BC* [h] *sarà come il quadrato di AE al quadrato di EB; fù dimostrato il quadrato di AB al quadrato di BC essere come AD à DC; ed il quadrato di AE al quadrato di EB, come AE ad EC; sarà dunque* [K] *AD à DC come AE ad EC; ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

b 36.del 3.
c 31.del 3.
d 8.del 6.
e Lemma 8. dopo la 18. prop.del 6.
f 20. del 6.
g 4.del 6.
h 22. del 6.
K 11.del 5.

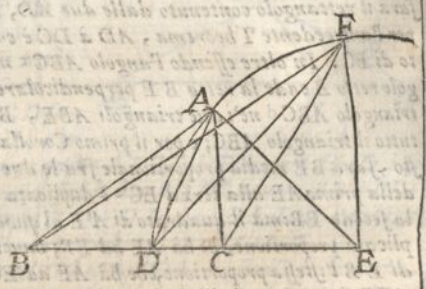
Di nuouo dico che FD à DK è come FG à GK. Sopra la retta FK si descriua il mezzo circolo FMK; nel punto G [l] *si erigga la retta GM, perpendicolare alla retta FK; e si tiri la retta DM. La retta HB è diuisa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in G, il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di EG,* [m] *è vguale al quadrato di EB; vgualmente si aggiunga il quadrato di ED; sarà il rettangolo delle due HG, GB, con li due quadrati GE, ED, cioè* [n] *col quadrato di GD, vguali à i quadrati de i due lati BE, ED, cioè* [o] *vguali al quadrato di BD: mà il quadrato di BD* [p] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, cioè al rettangolo* [q] *delle due FD, DK; sarà il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di GD, vguale al rettangolo contenuto dalle due FD, DK; e perche il rettangolo delle due HG, GB* [r] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FG, GK; ed il rettangolo delle due FG, GK* [t] *è vguale al quadrato di GM (stante che GM è media proportionale frà le due FG, GK) saranno i quadrati de i due lati MG, GD, cioè* [u] *il quadrato di MD, vguale al rettangolo contenuto dal-*

l 11.del 1.
m 5.del 2.
n 47.del 1.
o 47.del 1.
p 36.del 3.
q Corol.alla 36.del 3.
r 35. del 3.
t 17. del 6.
u 47. del 1.

x 37. del 3. *le due FD, DK: per la qual cosa la retta DM x tocca il circolo nel punto M: mà per costruttione, dal contatto M cade la retta MG perpendicolare al diametro FK, per quel che si è dimostrato nella prima parte, la proportione di FD à DK è come quella di FG à GK, come fù proposto dimostrare.*

VIII.

Se sarà qualunque triangolo ABC, del quale sia cõtinuato il lato BC verso E, e dal punto A sia inclinata la retta AE in modo, che AE sia media proportionale frà le due BE, EC, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, si descriua il circolo DAF; preso nella circonferenza DAF qualunque punto F, dal quale à i punti B, D, C, si tirino le rette FC, FD, FB. Dico che l'angolo BFD è vguale all'angolo DFC.



Si tiri la retta EF; perche le rette EA, EF sono frà di loro vguali, e la retta EA, per ipotesi, è media proportionale frà le due BE, EC; sarà la retta EF media proportionale frà le due BE, EC, e per il secondo de gli antecedenti Theoremi, l'angolo EFC sarà vguale all'angolo FBC. Nel triangolo FBD, il lato BD è continuato verso E, e perciò

a 32. del 1. b 5. del 1. *l'angolo EDF a esterno è vguale à i due angoli DFB, DBF interni, ed opposti: mà l'angolo EDF è vguale all'angolo EFD (stante che le rette EF, ED b sono frà di loro vguali) sarà l'angolo EFD vguale à i due angoli DBF, DFB. Fù dimostrato l'angolo EFC vguale all'angolo DBF; sarà il rimanente angolo CFD vguale al rimanente angolo DFB. E perche il punto F è preso ad arbitrio, perciò da qualunque altro punto preso nella circonferenza DAF, tirate rette linee à i punti B, D, C sempre faranno angoli vguali nel punto F; ch'era da dimostrarsi.*

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se nella circonferenza DAF sia preso qualunque punto F, dal quale siano tirate à i punti B, D, C, le rette FB, FD, FC, sempre la proportione di BF ad FC sarà come quella di BD à DC; e questo perche l'angolo BFC sarà sempre diuiso dalla retta FD in due parti vguali.

Di

Di Tolomeo nel libro 1. del suo Almagesto.

VIII.

Se dentro d'vn circolo sia descritto qualunque quadrilatero, i rettangoli contenuti da i lati opposti, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali di esso quadrilatero.



Nel circolo ABCD sia iscritto qualunque quadrilatero ABCD, e le diagonali siano le rette AC, BD. Dico che il rettangolo contenuto da i due lati BC, AD, col rettangolo contenuto da i due lati AB, DC, è vguale al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD. Nel punto A, sopra la retta AB, si faccia l'angolo BAE, [a] vguale all'angolo CAD; e si continui AE fino che seghi il lato BD in qualche punto E. Si considerino i triangoli AEB, ACD, de' quali l'angolo BAE, per costruttione, è vguale all'angolo CAD; gli angoli ABE, ACD [b] nella medesima portione, sono frà di loro vguali; e perciò il rimanente angolo ADC [c] è vguale al rimanente angolo AEB, ed i triangoli AEB, ADC sono equiangoli. Di nuouo, essendo l'angolo EAB vguale all'angolo CAD, s'aggiunga all'vno, ed all'altro il commune angolo EAC, ne viene tutto l'angolo BAC vguale all'angolo EAD: mà gli angoli ADE, ACB, [d] nella medesima portione, sono frà di loro vguali; sarà il terzo angolo AED [e] vguale al rimanente angolo ABC; ed il triangolo AED sarà equiangolo al triangolo ABC; e la proportione di AD, à DE [f] sarà come quella di AC à CB; dalche il rettangolo delle estreme AD, BC, [g] è vguale al rettangolo contenuto dalle medie AC, ED. Similmente, essendosi dimostrato il triangolo AEB equiangolo al triangolo ACD, la proportione di AB à BE [h] sarà come quella di AC à CD; ed il rettangolo contenuto dalle estreme AB, DC, [K] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BE, AC: mà si è dimostrato, che il rettangolo contenuto dalle due ED, AC, è vguale al rettangolo delle due AD, BC; saranno i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due AD, BC, e l'altro contenuto dalle due AB, DC, insieme giunti, vguali à i due rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BE, AC, e l'altro contenuto dalle due ED, AC; mà i rettangoli contenuti da AC, ED, e dalle due AC, EB, [l] sono vguali à tutto il rettangolo contenuto dalle due AC, BD; i rettangoli dunque contenuti da i lati opposti, cioè il rettangolo contenuto da i due lati AD, BC, ed il rettangolo contenuto da i lati AB, DC, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD, come fù proposto dimostrare.

a 23. del 1.
b 21. del 3.
c 32. del 1.
d 21. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 6.
h 4. del 6.
K 16. del 6.
l 1. del 2.

Fine del Sesto Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SETTIMO.

DEFINITIONI.

I.

L'vnità è quella, secondo la quale ciascheduna delle cose, che sono, si dice vna, ouero vno.

II.

Il numero è moltitudine composta di vnità.

ACCIOCHE *si faccia distintione dal proferire qualche cosa, ch'è considerata sola, e separata dall'altre, al proferirne più insieme; è vso commune, quella, la quale è considerata sola, esprimere con questa voce, Vna, ouero Vno; come quando si proferisce vn huomo, vna naue, vna linea &c. Hor questa particola Vna, ouero Vno (con che s'esprime la cosa nominata esser sola) è quella, ch'Euclide chiama, vnità, la quale si segna con questa nota* 1. *si che in luogo di notare vn huomo, vna pietra, vna superficie &c. si esporrà* 1. *huomo,* 1. *pietra,* 1. *superficie &c. E notisi che l'vnità, nella quantità discreta, è indiuisibile, come è indiuisibile il punto nella quantità continua; con questa differenza, che l'vnità è principio della quantità discreta, ed il punto non è principio della quantità continua, ma termine della quantità continua: cioè la quantità discreta comincia con l'vnità, e la quantità continua comincia dal punto.*

Le cose poi, che sono più d'vna, per proferirle con voci distinte da quelle, che sono considerate sole, volgarmente si dicono essere molte; e questa pluralità, ò composto di più vnità, si chiama Numero. Notisi però, che questa voce Numero è nome generico à tutte le moltitudini di qual si sia grandezza; si che tanto se la moltitudine sarà composta di due vnità, quanto s'è composta di tre vnità, quanto s'è composta di quattro, ò più vnità, sempre quella moltitu-

dine

dine si chiama numero : è ben vero che , se quella moltitudine è composta di due sole vnità , s'esprime con questa voce numero due, e si segna con la seguente nota 2. se sarà composta di tre vnità , si dice numero tre , e si nota col seguente carattere 3. s'è composta di quattro vnità si dice numero quattro , e si nota 4. s'è di cinque vnità , si dice numero cinque, e si nota 5 ; e con quest'ordine il numero sei si nota 6; il numero sette si nota 7; il numero otto si nota 8; e s'è composta di noue vnità si dice numero noue , e si nota 9. Questi esposti numeri , come anco l'vnità , e la nota o (che si chiama zero , la qual voce significa nulla) cioè 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. si chiamano Digiti , co'i quali si compongono gli altri numeri , come i notati 10. 11. 12. &c. 20. 21. 22. 23. &c. 30. 31. 32. &c.

Perche dunque s'è detto che il numero è vna moltitudine composta di vnità, e l'vnità è indiuisibile , perciò la minima parte di qualunque numero sarà l'vnità : per la qual cosa il numero haverà tante minime parti , per quante sono le vnità , che lo compongono . Per esempio il numero 7 , il quale è composto di sette vnità , si diuide in sette minime parti, e ciascheduna si dice essere la settima parte di esso numero; similmente il numero 60, ch'è composto di sessanta vnità, si diuide in sessãta parti minime, e ciascheduna di quelle si dice essere la sessantesima parte di esso numero: ed il simile s'intẽde di tutti gli altri numeri.

Ogni numero dunque si risolue nelle sue vnità , e l'vnità misura tante volte quel numero , per quante sono l'vnità , che lo compongono : dal che l'vnità è misura commune di tutti i numeri , e per conseguenza tutti i numeri sono frà di loro commensurabili ; stante che le quantità si dicono commensurabili, quando hanno vna commune misura , cioè quando l'vna è l'altra è misurata giustamente da vna terza quantità , che si chiama commune misura , come a suo luogo più chiaramente si spiegherà .

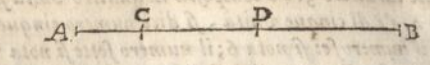
Ogni quantità , sì continua , come discreta , può essere considerata come vnità , la quale è sempre indiuisibile . Per esempio , la linea B considerata come vna sola , per quel che s'è detto , sarà denominata dall'vnità : e benche l'vnità sia indiuisibile , non è per questo , che la linea B, per essere denominata dall'vnità , cioè considerata come vna , debba essere indiuisibile , stante che non la linea B è vnità , mà ben si la linea B è quella cosa , che chiamiamo vna; e perciò la linea B come quantità continua è diuisibile , e l'vnità è sempre indiuisibile . Si che diuidendosi la linea B , non per questo si diuide l'vnità ; mà si diuide quella cosa , che chiamiamo vna . E per maggior chiarezza , siano esposte le linee A , B , frà di loro ineguali ; perche la linea A è vna sola , perciò sarà denominata dall'vnità .

B

A B

E similmente essendo la linea B vna sola, sarà anco denominata dall'vnità ; si pongano insieme queste due vnità , ne viene il numero 2. che denota le linee A, & B in moltitudine essere due . Donde è manifesto , che nella quantità discreta non s'attende all'vgualità , ò inegualità delle cose , che si numerano , mà alla moltitudine di esse ; e perciò non si deue dire , che vna vnità è maggiore , ò minore dell'altra ; mà ben si le cose che si dicono vna , ouero vno , possono essere vguali , e possono ancora essere ineguali . Dal che la cosa la quale è chiamata vna , non è vnità , mà è denomi-

nata dall'vnità ; cioè è considerata come vna sola, e separata dall'altre. Similmente s'intenda diuisa la linea AB in quante si voglia parti AC, CD, DB. Perche AC è vna sola parte, perciò sarà denominata dall'vnità; e per l'istessa ragione CD sarà denominata dall'vnità, come



ancora DB. E considerando AD come vna sola linea, sarà AD considerata come vnità. Parimente la linea CB, considerata come vna, sarà denominata dall'vnità, e l'istesso s'intende di tutta la linea AB. Hor sè ciascuna delle linee AC, CD, DB, AD, CB, AB, è considerata come vna, cioè come vnità; poste insieme queste vnità compongono il numero 6, che denota il numero delle linee, che si contano in AB, essere composto di sei vnità, senza che s' habbia riguardo all'inegualità delle dette linee; mà si hà solo considerationе alla di loro moltitudine. Quindi è (come sopra si disse) che la cosa, considerata come vnità, s'è diuisibile per sua natura, si diuide in tutte le sue parti, e l'vnità resta sempre intatta, e libera da qualunque diuisione.

In oltre se le parti AC, CD, DB sono frà di loro vguali, sarà AC vna terza parte di tutta la linea AB, che si nota $\frac{1}{3}$: mà la parte AC fù considerata come vnità, ne segue $\frac{1}{3}$ ancora potersi considerare come vnità; il medesimo s'intende se AC fosse la quarta, ò quinta, ò altra parte di AB. Di più perche AC è la terza parte di AB, e CD è ancora la terza parte di AB; sarà AD i due terzi di AB, che si notano $\frac{2}{3}$: mà AD fù considerata come vnità, li $\frac{2}{3}$ dunque si possono considerare come vnità; ed il medesimo s'intende di tutti gli altri rotti, auuertendo sempre, che quando si dice $\frac{1}{3}$, ò $\frac{1}{4}$, ouero $\frac{1}{5}$ &c. non s'intende essere la terza, ò quarta, ò quinta parte dell'vnità, mà ben si è la terza, ò quarta, ò quinta parte di quella cosa, che consideriamo essere vna sola.

Finalmente sia esposto qualunque numero, come per essempio 10, il quale è composto di diece vnità. Perche esso numero 10 ci rappresenta essere vna decina, per questa voce Vna lo possiamo considerare come vnità. Hor essendo il numero 10 composto di diece vnità, non sarà esso numero 10 l'vnità; mà ben si esso numero 10 sarà quella cosa, che chiamiamo vna. Si che diuiso il numero 10 nelle sue vnità, ò in altre parti possibili, non sarà diuisa l'vnità, mà sarà diuisa quella cosa, che chiamiamo vna. Ed il medesimo si deue intendere di tutti gli altri numeri considerati come vnità.

Si conchiude dunque, che l'vnità non è numero, mà principio, e fondamento del numero; stante che, essendosi definito il numero essere vna moltitudine composta di vnità, è necessario che siano più vnità insieme acciòche formino il numero. Di più, che la cosa la quale chiamiamo vna, ouero vno, non è vnità; mà l'vnità è quella singolarità, secondo la quale nominiamo quella cosa da per sè essere vna sola; e perciò quella cosa, che si dice vna, ouero vno, può essere diuisibile nelle sue parti; e l'vnità, secondo la quale ciascheduna delle cose, che si dicono vno, ò vna, è sempre indiuisibile: oltre à ciò ogni quantità, si continua, come discreta, può essere considerata come vnità; e questo non solo accade negl'intieri, mà ancora ne' rotti; e finalmente tutti i numeri sono commensurabili, stante che tutti sono misurati dall'vnità.

III.

Il numero minore è parte del maggiore, quando misura il maggiore giustamente.

Il numero minore si dice misurare il numero maggiore giustamente, quando detratto il minore dal maggiore, e da quel che resta, se ne detrae il medesimo numero minore, e dall'auanzo se ne leua di nuouo il minore, e con quest'ordine sempre da ogn'auanzo se ne detrae il minore, finalmente nell'vltima detrattione non resta cos'alcuna; come per essempio. Sia il numero minore 3, ed il maggiore sia 12, sottraendo dal maggiore 12 il minore 3, resta il numero 9; da questo se ne detragga il minore 3, resta 6; e da questo se ne leui il minore 3, resta 3; e finalmente leuato da questo auanzo il minore 3, non resta cos'alcuna; in tal caso il numero minore 3 si dice misurare giustamente il numero maggiore 12: ed il simile s'intende di tutti gli altri numeri. Quando poi dalla continua sottrattione nel modo, che antecedentemente s'è fatto, resta qualche numero composto di minor moltitudine d'vnità di quelle, che sono nel numero minore, all'hora il numero minore non si può sottrarre da quell'auanzo; ed in tal caso il numero minore non si dice misurare giustamente il maggiore; come se il numero minore fosse 5, ed il maggiore 13, detratto dal numero maggiore 13 il minore 5, resta 8; e detratto da questo auanzo il minore 5, resta 3: e perche da questo auanzo non se ne può sottrarre il minore 5, perciò il numero 5 non misura giustamente il maggiore 13: e l'istesso s'intende de gli altri numeri. Hor Euclide in questa definitione spiega, che all'hora il numero minore si dice esser parte del numero maggiore, quando il minore misura giustamente il maggiore; come per essempio, il numero minore 4, il quale misura giustamente il maggiore 28 sette volte, e non auanza cos'alcuna, si dice esser parte del numero 28. E nell'istesso modo ciascuno de'i numeri 2. 3. 4. 6. 12 sarà parte del numero 24, stante che il 2 misura il 24 dodici volte; il 3 misura il medesimo 24 giustamente otto volte; il 4 lo misura sei volte; ed il numero 6 lo misura quattro volte; ed il numero 12 lo misura giustamente due volte. Il medesimo s'intende di tutti gli altri numeri.

Notisi che la parte prende il nome dal numero, secondo il quale il minore misura il maggiore, cioè se il minore misura il maggiore due volte, si dice il minore essere la metà del maggiore; se il minore misura il maggiore tre volte, si dice essere la terza parte del maggiore; se lo misura quattro volte, si dirà essere la quarta parte del maggiore, e con questo ordine in infinito.

IV.

Il numero minore si dice esser parti del maggiore, quando il minore non misura giustamente il maggiore.

Due casi possono succedere in due dati numeri ineguali; cioè, ò che il minore misuri giustamente il maggiore, ouero che non lo misuri giustamente; ma che sopravanzi qualche cosa. Se il numero minore misura giustamente il maggiore, per quel che s'è detto nell'antecedente definitione, il minore si dice esser parte del maggiore; ma se non lo misura giustamente, vuole Euclide ch'il minore si dica esser parti del maggiore. Per essempio, siano esposti i numeri 3,

& 7; perche il numero minore 3 non misura giustamente il maggiore 7, si dirà il minore 3 essere parti del 7, cioè essere tre di quelle parti, delle quali nel maggiore ne sono sette. Similmente se il minore fosse 9, ed il maggiore 11, si direbbe il minore essere noue di quelle parti, che nel maggiore sono vndeci: ed il simile s'intenda negli altri.

V.

Il numero maggiore è multiplice del minore, quando è misurato dal minore giustamente.

Quando il numero minore misura giustamente il numero maggiore; se si fà la comparatione dal minore al maggiore, si dice il minore esser parte del maggiore, come fù spiegato nella definitione terza; e se si farà la comparatione dal maggiore al minore, si dirà il maggiore essere multiplice del minore.

V I.

Il numero paro è quello, che si diuide in due parti vguali.

Tutti i numeri, che si possono diuidere giustamente in due parti vguali, si dicono numeri pari; come i numeri 4, 8, 10, 20, 50, 100, 1000 &c. i quali si dicono numeri pari, stante che ogn'vno si diuide giustamente in due parti vguali, e le loro metà sono 2, 4, 5, 10, 25 50, 500.

V I I.

Numero disparo è quello, che non si diuide in due parti vguali; ouero, è quello ch'è differente dal numero paro per vna vnità.

A distintione del numero pari, chiama Euclide numero disparo quello, che non si diuide in due parti vguali, ouero ch'è differente dal numero paro per vna sola vnità; come sono i numeri 3, 5, 7, 9, 11, 15, 47, 101. 1001, i quali sono differenti da i seguenti numeri pari 2, 4, 6, 8, 10, 14, 46, 100, 1000, ouero 4, 6, 8, 10, 12, 16, 48, 102, 1002 per quanto è vna sola vnità.

V I I I.

Numero parimente paro è quel numero, ch'è misurato da vn numeto paro, per volte pari; cioè per vn numero paro.

Siano esposti i numeri 64, e 32, questi, secondo la definitione d'Euclide, sono ambidue numeri parimente pari, stante che il numero 64 è misurato dal 4, ch'è numero pari, sedici volte, cioè per il numero pari 16; e similmente il numero 32 è misurato dal numero paro 8 quattro volte, cioè per il numero paro 4.

IX.

Numero parimente disparo si chiama quello, ch'è misurato da vn numero paro per numero disparo.

Sia esposto il numero 30, il quale è misurato dal numero paro 6 per il numero disparo 5; e questo numero 30, secondo l'antecedente definitione, si chiama numero parimente disparo. Il medesimo si deue intendere d'ogn'altro numero, che haverà le medesime conditioni.

E d'auuertirsi che si trouano de i numeri come il 20, il 24, e simili, i quali hanno le medesime conditioni d'ambedue l'antedette definitioni, cioè sono numeri parimente pari, ed ancora parimente dispari: stante che il numero 20 è misurato dal numero paro 2, per il numero paro 10, e per l'ottaua definitione, il numero 20 è numero parimente paro; e perche il medesimo numero paro 20 è misurato dal numero paro 4 per il numero disparo 5, per quel che prima s'è detto, il numero 20 sarà numero parimente disparo. Il medesimo succede al numero 24, il quale è misurato dal numero paro 4 per il numero paro 6; ed ancora è misurato dal numero paro 8 per il numero disparo 3, e benche alcuni Commentatori hanno stimato, che simili numeri non siano parimente pari, ne meno parimente dispari, con tutto ciò vniformandomi con l'interpretatione del P. Clauio, dico che simili numeri sono parimente pari, ed ancora parimente dispari; stante che se Euclide haueße voluto escludere questi dal significato, e conditioni del numero parimente paro, non haurebbe definito il numero parimente paro esser quello, ch'è misurato da vn numero paro per numero paro, mà haurebbe detto numero parimente paro è quello, del quale tutti i numeri, che lo misurano, sono numeri pari; ed in tal caso haurebbe esclusi da questi i numeri 20, 24, e simili: mà hauendo fatta la definitione più generica, dobbiamo senza dubio stimare, ch'Euclide non habbia escluso da i numeri parimente pari i numeri 20, 24, e simili, e così diremo; che i numeri 20, 24, e simili, sono numeri parimente pari, e sono ancora numeri parimente dispari.

X.

Numero disparimente disparo è quel numero; ch'è misurato dal numero disparo per vn numero disparo; ouero è quel numero, del quale tutti i numeri, che lo misurano, sono numeri dispari.

Quando tutti i numeri, che misurano vn numero, sono numeri dispari, quello si dice numero disparimente disparo. Per essempio sia esposto il numero disparo 135. il quale è misurato da i seguenti numeri dispari 3, 5, 9, 15, 27, 45, cioè è misurato dal 3. per il numero 45, è misurato dal 5, per il numero 27, & è misurato dal 9, per il numero 15, i quali tutti sono numeri dispari; in tal caso il numero 135, ò altro, che habbia le medesime conditioni, si chiama numero disparimente disparo.

X I.

Primo numero è quello, ch'è misurato solamente dall' vnità.

Tutti i numeri, che non possono essere misurati giustamente da altri numeri, cioè che non sono numeri parimente pari, ne parimente dispari, ne meno disparimente dispari, mà che possono essere misurati solamente dall'vnità, si dicono numeri primi: come sono i seguenti 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 &c. Notisi però, che nissun numero misura il numero primo, eccettuatone, che si misuri da se medesimo; come il numero 2 è misurato dal medesimo 2; il 3 è misurato dal medesimo 3; mà nissun altro numero lo può misurare, e l'istesso si deue intendere di tutti gli altri numeri primi.

X I I.

Quei numeri si dicono essere frà di loro primi, de' quali la commune misura è solamente l'vnità.

Si come, quando vn numero è misurato dalla sola vnità, si dice numero primo; così quando due, ò più numeri, hanno per commune misura la sola vnità, si dicono essere frà di loro primi. Per essempio siano esposti i numeri 4, e 9; benche il numero 4 sia misurato dal 2, ed il numero 9 sia misurato dal 3 contutto ciò, non potendo il numero 3 misurare ambidue i numeri 4, e 9, e ne meno il 2 può misurare ambidue essi numeri 4 & 9; tanto il numero 3, come il numero 2, non sarà commune misura de i numeri 4, e 9; mà ben si la commune misura sarà solamente l'vnità: ed in tal caso i numeri 4, e 9 si chiamano numeri frà di loro primi. Similmente i numeri 5, 8, 21, sono frà di loro primi, stante che la di loro commune misura è solamente l'vnità; o l'istesso s'intende di tutti gli altri, che hanno per commune misura solamente l'vnità.

X I I I.

Numero composto è quello, ch'è misurato da qualche numero.

Perche ogni numero è misurato dall'vnità, e non tutti sono misurati da altri numeri, perciò Euclide, volendo fare distintione frà il numero, ch'è misurato dalla sola vnità, e quello, ch'oltre l'essere misurato dall'vnità, è ancora misurato da qualche numero; chiama numero primo quello, ch'è misurato dalla sola vnità; e numero composto chiama quello, il quale non solo è misurato dal vnità, mà ancora da qualche numero: come il numero 24, il quale, oltre che è misurato dall'vnità, è ancora misurato da tutti i numeri seguenti 2. 3. 4. 6. 8. 12. Parimente il numero 15 è misurato dall'vnità, ed ancora da i seguenti numeri 3. & 5; e questi numeri 24 & 15, come ancora altri, che sono misurati da qualche numero, si dicono numeri composti. E notisi, che tutti i numeri parimente pari, parimente dispari, e disparimente dispari, sono numeri composti.

Quei

X I V.

Quei numeri si dicono frà di loro composti, i quali hanno per commune misura qualche numero.

Il numero, che misura giustamente due, ò più numeri, si chiama commune misura de i numeri misurati, come altroue si disse. Per essempio, i numeri 9, & 12, sono ambidue misurati giustamente dal numero 3: poiche il 3 misura il 9 tre volte, e misura il 12 quattro volte; e secondo quel, che s'è detto, il numero 3 sarà commune misura de i due 9, & 12; e cosi per gli altri. Hor perche i numeri 9, & 12, hanno per commune misura il numero 3, essi numeri 9, & 12, si chiameranno numeri frà di loro composti. E similmente i numeri 25, & 40 sono frà di loro composti, stante che la loro commune misura è il numero 5; ed i numeri 7, 28, 35, si dicono ancora frà di loro composti à causa, che il numero 7 è loro commune misura.

X V.

Vn numero si dice multiplicare vn altro numero, quando si prende tante volte il numero multiplicato, per quante vnità sono nel multiplicante; e quel numero composto si chiama Prodotto.

Quando vn numero si multiplica per vn'altro numero, quello, che multiplica, si chiama multiplicante, e l'altro si dice numero multiplicato. Siano dunque esposti i numeri 5, & 9; sia 5 il multiplicante, ed il numero multiplicato sia 9: perche nel multiplicante sono cinque vnità, prendendo il numero 9 cinque volte, il composto di queste cinque volte il 9 sarà 45; e cosi diremo che il 9 si è multiplicato per il 5, ed il prodotto è 45. All'incontro se porremo il 9 come numero multiplicante, ed il 5 sarà il numero multiplicato; essendo nel multiplicante noue vnità, si prenderà noue volte il numero multiplicato 5, che similmente produrrà il numero 45; e diremo, ch'il numero 5 s'è multiplicato per il numero 9, ed il prodotto è 45. E questo intende Euclide per la voce Multiplicare, cioè trouare vn numero, che sia composto di tante volte il numero multiplicato, per quante vnità sono nel numero multiplicante.

All'antecedente definitione si può aggiungere la seguente.

Dicesi diuidere vn numero per vn altro numero, quando si troua vn numero composto di tante vnità, per quante volte il diuisore misura il numero diuiso; e quel numero trouato si chiama Quotiente.

Siano esposti due qualunque numeri, come 7, & 21; all'hora il numero 7 si dice diuidere il numero 21, quando si troua vna quantità, nella quale siano tante vnità, per quante volte il numero 7 misura il numero 21. E perche

il

il 7 misura il numero 21 tre volte, il numero 3, in questo essempio, sarà quello, nel quale sono tante vnità, per quante volte il 7 misura il 21; ed il numero 3 sarà quello, che si chiama Quotiente. Notisi che quel numero, che diuide, si chiama diuisore, e l'altro si chiama numero diuiso; come per essempio hauendosi à diuidere il numero 32 per 8, perche il numero 8 è quello, che diuide, perciò il numero 8 si chiamerà diuisore, ed il numero 32 sarà il numero diuiso. Si veda dunque quante volte il numero 8 misura il 32, e trouaremo quattro volte, e così il numero 4 sarà il quotiente; cioè sarà quello, che indica essere di tante vnità, per quante volte il diuisore misura il numero diuiso.

XVI.

Quando due numeri, multiplicandosi scambieuolmente frà di loro producono, altro numero, quel prodotto si dice numero piano, ed i numeri multiplicati si chiamano lati di quel piano.



Siano due qualunque numeri AB, BC, le vnità de' quali siano disposte in lunghezza, e larghezza con vguali distanze, rappresenteranno vn parallelogrammo rettangolo, come il notato ABCD, i di cui lati saranno i dati numeri AB, BC, ed il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, saranno l'vnità, che occupano il piano ABCD. Quindi è, ch' Euclide definisce il numero piano esser quello, ch'è prodotto dalla multiplicatione di due numeri, e quei due numeri, multiplicati scambieuolmente frà di loro, gli chiama lati di quel piano. Quando dunque nelle cose auuenire si dirà il prodotto contenuto da vn numero in vn altro numero, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, formato dalla dispositione delle vnità, che sono nel prodotto con vguali distanze, tanto in lunghezza, come in larghezza, ed i numeri multiplicati saranno i lati di esso prodotto.

Benche i numeri piani possano essere infiniti, cioè possano formare innumerabili figure piane, come triangolari, pentagonali, &c. con tutto ciò Euclide s'è contentato di parlare solamente di quei numeri piani, che formano le figure parallelogramme rettangole, tralasciando l'altre come non necessarie al suo fine: di questi numeri però, come triangolari, pentagonali, esagonali, &c. ne parleremo nell'Aritmetica pratica, e qui proseguiremo la spiegatione delle sole cose poste da Euclide.

Perche il numero, che forma il piano rettangolo ABCD, cioè il prodotto fatto dalla multiplicatione di AB in BC, per la 15. definitione, è composto di tante volte il numero delle vnità, che sono in BC, per quante vnità sono in AB, perciò il numero BC misurà tante volte il numero piano ABCD, per quante vnità sono nel lato AB. Similmente, essendo il numero piano ABCD, per la 15. definitione di questo, composto di tante volte il numero AB, per

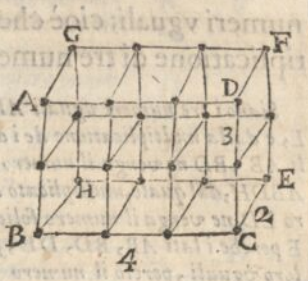
quante

quante vnità sono in BC, tante volte il numero AB misurerà il numero piano ABCD, per quante vnità sono nel lato BC; la onde per quel, che si disse nella 15. definitione, diuidendo il numero piano ABCD per le vnità, che sono in BC, cioè per il numero, che rappresenta il lato BC, il quotiente sarà il lato AB: ed all'incontro, diuiso il numero piano ABCD per il lato AB, il quotiente sarà il lato BC.

XVII.

Quando tre numeri, multiplicandosi scambieuolmente frà di loro, producono vn altro numero, quel numero prodotto si chiama numero solido, ed i numeri multiplicati si dicono esser lati di quel numero solido.

Siano i tre numeri BC, CE, CD, le di cui vnità siano disposte con vguali distanze in lunghezza, larghezza, ed altezza in modo, che il prodotto fatto da i due BC, CD, formi il piano rettangolo ABCD; ed il prodotto de i due DC, CE faccia il piano rettangolo DCEF; come anco il prodotto de i due BC, CE formi il piano rettangolo BCEH, sarà fatto tutto il solido GBCF contenuto da sei piani rettangoli; e perciò le vnità del prodotto fatto dalla multiplicatione de i tre numeri BC, CD, CE, disposte con vguali distanze il lunghezza, larghezza, e profondità, formeranno il solido GBCF. Quindi è, ch' Euclide definisce il numero solido esser quello, ch'è prodotto dalla scambieuole multiplicatione di tre numeri frà di loro; cioè dalla multiplicatione del primo nel secondo, ed il prodotto nel terzo; ed i numeri BC, CD, CE, multiplicati si chiamano lati del prodotto numero solido. Qui ancora Euclide, tralasciando ogn'altro numero solido, hà definito solamente quelli, che sono contenuti da piani rettangoli, le di cui faccie opposte sono parallele; e perciò nelle cose, che seguono, quando si dirà il numero solido contenuto dal prodotto fatto dalla multiplicatione di tre numeri frà di loro, doueremo concepire le vnità del prodotto talmente disposte in lunghezza, larghezza, e profondità, che formino vna figura come la notata GBCF, i dui cui lati vengano rappresentati dalle vnità de i numeri multiplicati.

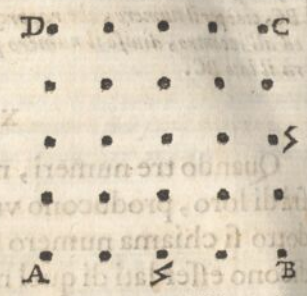


XVIII.

Numero quadrato è quello, ch'è vgualmente vguale, cioè ch'è contenuto da due numeri vguali.

Definisce Euclide il numero quadrato esser quello, ch'è vgualmente vguale; cioè che le sue vnità formano vn piano d'vguale lunghezza, e larghezza,

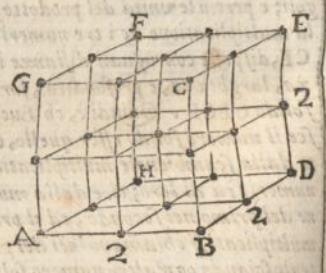
ed è l'istesso come se dicessimo, che le sue vnità occupano vn piano quadrato; come il notato ABCD, i di cui lati AB, BC sono frà di loro vguali; e perche dalla multiplicatione del numero AB nell' vguale numero BC, ne nasce il piano AB CD quadrato, dalla multiplicatione ancora del lato AB nel medesimo lato AB, si produrrà l'istesso numero quadrato ABCD Quindi è, che multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, il prodotto, che ne viene, è numero quadrato; ed il numero, che fù multiplicato in se medesimo è il lato di quel numero quadrato, che generalmente si chiama radice quadrata. Si che nelle figura ABCD, il numero quadrato è il composto delle vnità, che formano il quadrato ABCD, ed il lato, ò radice quadrata è il notato AB, ouero BC.



X I X.

Chiamasi numero Cubo quello, ch'è contenuto da tre numeri vguali; cioè che vien prodotto dalla continua multiplicatione di tre numeri vguali.

Siano i tre numeri vguali AB, BD, DE, e dalla multiplicatione de i due vguali AB, BD ne venga il numero quadrato ABDH, al quale, multiplicato dal numero ED, ne venga il numero solido FABE. E perche i lati AB, BD, DE, sono frà di loro vguali, perciò il numero solido FABE sarà vgualmente vguale in lunghezza, larghezza, e profondità; e questo Euclide lo chiama numero Cubo; ed ogn' vno de i numeri vguali AB, BD, DE, &c. si chiama lato del numero cubo FABE. E perche dalla continua multiplicatione de i tre lati vguali AB, BD, DE se ne produce il numero cubo FABE; dalla multiplicatione ancora d'vno di questi lati, come AB, in se medesimo, e dal prodotto, multiplicato per il medesimo lato AB, se ne produrrà l'istesso numero cubo FABE. e perciò multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, ed il prodotto multiplicandosi per l'istesso numero, quel, che ne viene, si chiamerà numero Cubo; e quel numero multiplicato in se medesimo, e di nuouo multiplicato per il prodotto, si chiamerà lato di quel numero Cubo, che volgarmente si chiama ancora Radice cuba. Si che, nella figura FABE, il composto delle vnità, che formano il solido FABE, si chiama numero Cubo, ed ogn'vno de i suoi lati AB, BD, DE, &c. si chiama Radice cuba, ouero lato del Cubo FABE.



Nume-

X X.

Numeri proportionali sono, quando il primo è multiplice, ò parte, ò parti del secondo, come il terzo è multiplice, ò parte, ò parti del quarto: o pure, quando il primo contiene vgualmente il secondo, come il terzo contiene il quarto, e di sopra più il primo, e terzo, contengono vguali parte, ò parti del secondo, e quarto.

Dopo ch' Euclide hà definito che cosa sia numero, e come s'intenda vn numero esser multiplice, ò parte, ò parti d'vn altro numero; ed oltre à ciò che cosa dobbiamo intendere per numero piano, e che cosa per numero solido; spiega in questa definitione quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche siano proportionali; cioè acciòche frà di loro cada proportionalità: ح, supponendo quel, che disse nella settima definitione del quinto Elemento, cioè Le quantità, che hanno la medesima proportione si dicono proportionali, *definisce quisolamente quali siano quei numeri, che douremo chiamare proportionali; cioè quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche la proportione del primo al secondo sia come quella del terzo al quarto numero. E dice che all' hora quattro numeri si diranno essere proportionali, quando il primo è vgualmente multiplice del secondo, come il terzo è multiplice del quarto; ouero, quando il primo è vgualmente parte, o parti del secondo, come il terzo è parte, ò parti del quarto: ò pure quando il primo, ح terzo contengono vgualmente il secondo, e quarto, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti del secondo, e quarto. Verbi gratia siano i quattro numeri A, B, C, D; se il primo A è multiplice del secondo B, come il terzo C è multiplice del quarto D, come nel primo essempio: ouero, se il primo numero A è parte del secondo B come il terzo C è parte del quarto D (come nel secondo esempio): ouero il primo A sia tante parti del secondo B per quante parti è il terzo C del quarto D, come nel terzo esempio; ò finalmente il primo A contenga il secondo B, come il terzo C contiene il quarto D; e li due A, & C contengano di sopra più vguali parte, ò parti di B, & D, come nel quarto, e quinto essempio. In tutt'i detti casi li quattro numeri A, B, C, D, si dicono numeri proportionali. E perche fù definito nel quinto Libro le quantità proportionali esser quelle, le quali hanno la medesima proportione, chiamando Euclide i notati A, B, C, D, numeri proportionali, sarà la proportione di A à B, come quella di C à D. Dond'è manifesto, che la proportione frà due numeri è la scambieuole relatione, secondo la quale l'vno è multiplice, ò parte, ò parti dell'altro; ò che l'vno contenga l'altro, e di sopra più contenga vguale parte, ò parti dell'altro.*

A	B
24	8
12	4
C	D

A	B
6	30
9	45
C	D

A	B
6	8
9	12
C	D

A	B
12	8
6	4
C	B

A	B
30	8
15	4
C	D

DIVISIONE DELLE PROPORTIONI.

I numeri, frà quali cade la proportione, si chiamano Termini della proportione, de' quali quello, che si nomina nel primo luogo, si chiama Antecedente, e l'altro, che si nomina nel secondo luogo, si chiama Conseguente: come, facendosi la comparatione da 9 à 7; i numeri 9, e 7 si chiamano termini della proportione, ed il numero 9, che habbiamo nominato nel primo luogo, si chiama Antecedente; l'altro, cioè il numero 7, posto nel secondo luogo, si chiama Conseguente.

Denominatore della proportione si chiama quel numero, che ci rappresenta che parte, ò parti, ouero multiplice, è l'antecedente del conseguente; ò pure come l'antecedente contiene il conseguente, e con che parte, ò parti di più lo contiene. E perche diuidendosi vn numero per vn altro numero, per la natura della diuisione, il quotiente ci mostra qual parte, ò parti, ò multiplice, è il numero diuiso del diuisore; perciò quando saranno proposti due numeri, e si voglia ritrouare qual proportione sia frà l'antecedente, e conseguente, cioè si voglia ritrouare quella quantità, che ci mostra qual parte, ò parti, ò multiplice, sia l'antecedente del conseguente, la quale habbiamo chiamato denominatore della proportione, sempre si diuiderà l'antecedente per il conseguente, ed il quotiente sarà il denominatore della proportione; cioè sarà quel numero, dal quale prenderà il nome quella proportione. Per essempio siano esposti i numeri 18, & 6, perche diuidendo l'antecedente 18 per il conseguente 6, il quotiente 3 ci mostra la grandezza dell'antecedente 18 esser tanta, per quanto è tre volte il conseguente 6, per ciò il quotiente 3 sarà il denominatore della proportione. Similmente habbiasi da ritrouare il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7, si diuida l'antecedente 25 per il conseguente 7, il quotiente sarà $3\frac{4}{7}$, il quale rappresenta la grandezza dell'antecedente 25 esser tanta, per quanto è tre volte il conseguente 7, e di più quattro settime parti del medesimo conseguente 7; e questo numero $3\frac{4}{7}$ sarà il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7. In oltre douendosi trouare il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; perche l'antecedente 5 non è misurato dal 9, sarà l'antecedente 5 noue parti del conseguente, che si nota $\frac{5}{9}$; e questo sarà il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; e l'istesso s'intende di tutti gli altri numeri.

La proportione si diuide nella proportione d'vgualità, e d'inegualità.

Dicesi proportione d'vgualità, quando l'antecedente è vguale al conseguente, come se si farà la comparatione da 7 à 7, ouero da 13 à 13 &c.

La proportione d'inegualità è quando l'antecedente è ineguale al conseguente, come se si farà la comparatione da 3 à 7; ouero da 7 à 3 &c.

La proportione d'inegualità si diuide nella proportione di maggiore inegualità, e nella proportione di minore inegualità.

Quando l'antecedente è maggiore del conseguente, la proportione, che cade frà quei due termini, si chiama proportione nella maggiore inegualità; e se l'antecedente sarà minore del conseguente, si dirà proportione nella minore inegualità.

La proportione nella maggiore inegualità si diuide in cinque generi di proportioni, de' quali tre sono semplici, e due composti. Il primo de semplici si chia-

ma

ma Multiplice; il secondo Superparticolare; ed il terzo Superpartiente. De i due composti il primo si dice Multiplice superparticolare (per esser composto del multiplice, e del superparticolare,) l'altro si chiama Multiplice superpartiente (stante che è composto del multiplice, e del superpartiente.)

La proportione multiplice si diuide in infinite proportioni multiplici; e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente più d'vna volta, e non auanza cosa alcuna. Come se si farà la comparatione da 6 à 3; perche l'antecedente 6 è misurato dal conseguente 3 due volte, e non auanza cosa alcuna, cioè diuiso l'antecedente 6 per il conseguente 3, il quotiente è 2; sarà il quotiente due il denominatore della proportione; cioè indicarà che l'antecedente contiene il conseguente due volte: e questa si chiamerà proportione dupla. Similmente habbiasi da fare la comparatione da 12 à 4, perche, diuiso l'antecedente 12 per il conseguente 4, il quotiente è tre; perciò la proportione di 12 à 4 si dirà esser Tripla. Se poi, diuidendosi l'antecedente per il conseguente, il quotiente sarà 4, tal proportione si chiamerà Quadrupla. E se il quotiente sarà 5, si dirà Quintupla, e con quest'ordine in infinito.

La proportione superparticolare si diuide in infinite proportioni superparticolari: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente vna volta, ed auanza vno, come se si farà la comparatione da 3 à 2, che, diuiso l'antecedente 3 per il conseguente 2, il quotiente sarà $1\frac{1}{2}$: e questa proportione si dice Sesquialtera. Di nuouo douendosi fare la comparatione da 4 à 3, si diuida l'antecedente 4 per il conseguente 3, il quotiente, ò denominatore della proportione sarà $1\frac{1}{3}$; e tal proportione si chiama sesquitertia. Se poi, diuiso l'antecedente per il conseguente, il quotiente sarà $1\frac{1}{4}$, si dirà proportione sesquiquarta. Se il quotiente sarà $1\frac{1}{5}$ si dirà sesquiquinta; e con quest'ordine per l'altre proportioni superparticolari.

La proportione superpartiente si diuide in infinite proportioni superpartienti: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente vna volta, ed auanza più di vno: come se si farà la comparatione di 5 à 3, che diuiso l'antecedente 5 per il conseguente 3 il quotiente sarà $1\frac{2}{3}$; e tal proportione si dice superbipartiente tertia. Se diuidendosi l'antecedente per il conseguente il quotiente sarà $1\frac{3}{4}$, si dirà proportione supertripartiente quarta. Se il quotiente sarà $1\frac{3}{5}$, si dirà supertripartiente quinta. Se sarà $1\frac{4}{5}$ si dirà superquadripartiente quinta; e con quest'ordine si procederà in tutte l'altre del medesimo genere.

La proportione multiplice superparticolare si diuide in infinite proportioni multiplici superparticolari: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente più d'vna volta, ed auanza vno; come se si farà la comparatione di 5 à 2, che diuidendo l'antecedente 5 per il conseguente 2, il quotiente sarà $2\frac{1}{2}$; e questa proportione si dice dupla sequialtera. Similmente facendosi la comparatione di 7 à 3, diuiso l'antecedente 7 per il conseguente 3, il quotiente sarà $2\frac{1}{3}$; e tal proportione si chiamerà dupla sesquitertia. Se poi diuidendosi l'antecedente per il conseguente il quotiente sarà $3\frac{1}{5}$, si dirà tripla sesquitertia. Se il quotiente sarà $4\frac{1}{7}$, si dirà quadrupla sesquisettima, e con quest'ordine si procederà per tutte l'altre del medesimo genere.

La proportione multiplice superpartiente si diuide in infinite proportioni multiplici superpartienti: e questo è quando l'antecedente è misurato dal con-

seguen-

seguente più d'vna volta, ed auanza più di vno: come se si farà la comparatione da 8 à 3, che diuiso l'antecedẽte 8 per il conseguente 3, il quotiente sarà $2\frac{2}{3}$; e tal proportione si dice dupla superbipartiente tertia, e diuidendosi l'antecedente per il conseguente, se il quotiente sarà $2\frac{3}{4}$, si dirà dupla supertripartiente quarta. Se il quotiente sarà $3\frac{3}{4}$, si dirà tripla supertripartiente quarta. Se sarà $4\frac{2}{3}$, si dirà quadrupla superbipartiente tertia, e se sarà $5\frac{7}{8}$ si dirà quintupla superseptipartiente ottaua; e con quest'ordine si procederà in infinito.

La proportione nella minore inegualità si diuide ne i medesimi cinque generi come s'è fatto nella maggiore inegualità, con la sola differenza, che in questa di minore inegualità vi s'aggiunge sempre la particola Sotto. E così diremo, sumultiplice, susuperparticolare, susuperpartiente, sumultiplice, susuperparticolare, sumultiplice superpartiente, sudupla, sutripla, suquadrupla &c. susesquialtera, susesquitertia, susesquiquarta &c. susuperbipartiente tertia, susupertripartiente quarta &c. sudupla sesquialtera, sudupla sesquitertia, sutripla sesqui settima &c. sudupla superbipartiente tertia, sudupla supertripartiente quarta, sutripla superbipartiente quinta, suquadrupla superquadripartiente nona &c.

Per essempio siasi proposta fare la comparatione di 1 à 2, si diuida l'antecedente 1 per il conseguente 2, il quotiente sarà $\frac{1}{2}$; e questa si dice proportione sudupla; se il quotiente sarà $\frac{1}{3}$ si dirà sutripla, se sarà $\frac{1}{4}$, si dirà suquadrupla, e con quest'ordine per le altre del medesimo genere. E per maggior facilità, quando sono proposti due numeri nella minore inegualità, cioè che l'antecedente sia minore del conseguente, e si voglia vedere qual specie di proportione sia, si permutino i termini, e si ponga il conseguente in luogo dell'antecedente, e l'antecedente in luogo del conseguente, e si veda qual specie di proportione è in questa dispositione della maggiore inegualità; se nella maggiore inegualità si trouasse essere in proportione tripla, vi s'aggiunga la particola Sotto, e si dirà, che i numeri dati sono nella proportione sutripla; se nella maggiore inegualità fosse nella proportione sesquialtera, ò sesquitertia &c. si dirà che nella minore inegualità sono nella proportione susesquialtera, ouero susesquitertia &c. Per essempio, habbiasi da fare la comparatione da 7 à 25; perche l'antecedente è minore del conseguente, i proposti numeri saranno esposti nella minore inegualità; si permutino questi termini, facendo dell'antecedente conseguente, e del conseguente antecedente, saranno esposti nel seguente modo 25 à 7: si diuida il 25 per il 7; il quotiente sarà $3\frac{4}{7}$, e perciò i numeri 25, & 7 esposti nella maggiore inegualità sono nella proportione, che si dice tripla superquadripartiente settima, vi s'aggiunga la particola Sotto, e così diremo, che la proportione di 7 à 25 è sutripla superquadripartiente settima; ed il denominatore di tal proportione sarà $\frac{7}{25}$, stante che sempre si diuide l'antecedente per il conseguente; tenendo per regola ferma, ch'il denominatore della proportione di due termini, che sono nella minore inegualità, in qualunque genere di proportione, sempre sarà vn rotto senza intiero alcuno; e nella maggiore inegualità sempre sarà, ò semplicemente intiero, ouero sarà intiero accompagnato da qualche rotto.

DELLE

DELLE PROPORTIONALITA'.

LA proportionalità ſpiegata da Euclide nella quarta definitine del quinto, ſi diuide in tre generi, e ſi dicono Medietà, che ſono Medietà, Aritmetica, Geometrica, ed Armonica.

La proportionalità, ò Medietà Aritmetica è quando tre, ò più numeri, ſi auanzano con vguali differenze, come ſono i ſeguenti 5. 8. 11. 14. 17. &c. ouero 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c. Donde ſi vede, che il ſecondo ſupera il primo, come il terzo ſupera il ſecondo, ed il quarto ſupera il terzo &c. Queſta medietà, ò è continua, ouero diſcontinua. Continua ſi dice, quando ſono più di tre termini nella Medietà Aritmetica, i quali continuatamente, e ſenza interrompimento alcuno, ognuno ſupera il ſuo proſſimo antecedente con vguale differenza, come appare negli eſſempij antecedenti. E ſi dice Diſcontinua, quando nella progreſſione de' numeri, ſi fà interrompimento in modo, che la differenza frà il primo, e ſecondo, è vguale alla differenza frà il terzo, e quarto, e frà il quinto, e ſeſto, e con queſt'ordine preſi à due à due: ma non è vguale alla differenza frà il ſecondo, e terzo, ne frà il quarto, e quinto &c. come appare ne i ſeguenti numeri 3. 7. 9. 13. 12. 16. doue la differenza frà i due 3. 7 è vguale alla differenza, ch'è frà i due 9. 13. ed ancora è vguale alla differenza, ch'è frà i due 12. 16. ma non è vguale alla differenza, ch'è frà i due 7. 9. ne à quella, ch'è frà i due 13. 12.

La proportionalità, ò Medietà Geometrica è quando ſono tre, ò più numeri, i quali ſucceſſiuamente ſono nella medeſima proportione; cioè, che la proportione del primo termine al ſecondo, ſia l'iſteſſa, che la proportione del ſecondo al terzo, e del terzo al quarto, e con queſt'ordine per tutti i termini, come ſono i ſeguenti 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. ouero 2. 6. 18. 54. 162. &c. che nel primo eſempio s'auanzano tutti ſucceſſiuamente nella proportione dupla; e nel ſedo eſempio s'auanzano nella proportione tripla. Queſta proportionalità ancora ò è continua, ouero diſcontinua. Proportionalità continua ſi dice quando il primo termine al ſecondo è come il ſecondo al terzo, ed il terzo al quarto, &c. come ne gli eſempij antecedenti: e ſi chiama diſcontinua quando ſi fà interrompimento in modo, che ſono proportionali à due à due; cioè il primo al ſecondo è come il terzo al quarto, ed ancora come il quinto al ſeſto, &c. come per eſempio 2. 4. 5. 10. 12. 24, doue appariſce, che la proportione de i due 2. 4 è l'iſteſſa, che la proportione de i due 5. 10, e de i due 12. 24; mà la proportione de i due 2. 4 non è l'iſteſſa, che la proportione de i due 4. 5, ne come quella de i due 10. 12, &c.

La proportionalità, ò Medietà Armonica, è quando tre numeri ſono talmente diſpoſti, che la proportione del maſſimo al minimo ſia l'iſteſſa, quale è quella frà la differenza del maſſimo, e medio, alla differenza frà il medio, e minimo in modo, che le differenze frà i proſsimi non ſiano vguali, come nella medietà Aritmetica, ne ſiano nella medeſima proportione, come ſi diſſe nella medietà Geometrica. Come per eſempio ſono i tre numeri 3. 4. 6, doue apparisce, che la proportione del numero 6 al numero tre è l'iſteſſa, che la proportione, che hà la differenza frà il 6, e 4 alla differenza frà il quattro, ed il 3; poiche la proportione del 6 al 3 è dupla, ed ancora la proportione della

dif-

differenza frà il 6, e 4, ch'è 2, alla differenza frà il 4 e 3, ch'è 1, è dupla. E questi non hanno successiuamente la medesima differenza, ne meno il primo al secondo hà l'istessa proportione, che il secondo al terzo, come richiede la medietà Geometrica; questa proportionalità si chiama Armonica, stante che i numeri espositi secondo tal dispositione, per lo più hanno quelle proportioni, che si richiedono alle consonanze della Musica; come nel soprapposto esempio, doue la proportione del 4 à 3 è sesquitertia, la quale costituisce la consonanza, che si dice Diatessaron, ouero quarta. In oltre la proportione del 6 al 4 è sesquialtera, e questa costituisce la consonanza, che si dice Diapente, ouero quinta: e la proportione del 6 al 3 è dupla, la quale costituisce la consonanza che si chiama Diapason, ouero ottaua. Circa poi al modo di ritrouare quanti si voglia numeri nella proportionalità Aritmetica, ò Geometrica, ò Armonica, si veda la mia Aritmetica Prattica, doue si troverà il tutto diffusamente spiegato.

X X I.

Quei numeri piani, ò solidi, si dicono essere frà di loro simili, i quali sono contenuti da lati proportionali.

Siano esposti i due numeri piani ABCD, EFGH, ed il numero piano ABCD, sia prodotto dalla multiplicatione de i numeri AB, BC; similmente il numero piano EFGH sia prodotto dalla multiplicatione de i due numeri EF, GF; definisce Euclide, che se i numeri, ò lati AB, BC, EF, FG sono proportionali, cioè se la proportione del numero AB al numero BC è come quella del numero EF al numero FG, i numeri piani ABCD, EFGH, contenuti da quelli, si dicono essere frà di loro simili. Il medesimo s'intende de' numeri solidi, cioè se i numeri, da' quali sono prodotti, sono proportionali, quei numeri solidi si dicono essere frà di loro simili. E però da notarsi, ch'Euclide nel definire i numeri piani simili, ed i numeri solidi simili, non assegna altre conditioni, se non che chiama simili quelli, che hanno i lati proportionali, stante che parla solo de' piani rettangoli, e de' solidi contenuti da piani rettangoli.



X X I I.

Numero perfetto è quello, ch'è vguale alle sue parti giunte insieme.

Quando vn numero è misurato da più numeri, quelli, che rappresentano le quantità delle volte, che lo misurano, si chiamano parti aliquote. Per esempio il numero 12 è misurato da tutti i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2. cioè

è mi-

è misurato dal 12 vna volta ; dal 6 due volte ; dal 4 tre volte; dal 3 quattro volte; e dal due sei volte . Hor quelli, che rappresentano le volte, che il numero 12 è misurato da i numeri 12. 6. 4. 3. 2. si chiamano parti aliquote, ch'in questo essempio sono 1. 2. 3. 4. 6. e secondo questa spiegatione si deuono intendere le parti, delle quali parla Euclide in questa definitione; e così diremo, che se le parti aliquote, secondo le quali vn numero è misurato da tutti i numeri, che lo possono misurare, giunte insieme, sono frà di loro vguali al medesimo numero misurato, tal numero si chiamerà numero perfetto, come è il numero 6, le di cui parti aliquote sono 1. 2. 3. le quali giunte insieme fanno giustamente 6. Similmente il numero 28 si dirà essere numero perfetto, stante che le sue parti aliquote 1. 2. 4. 7. 14, le quali, giunte insieme, fanno giustamente il medesimo numero 28.

Se tutte le parti aliquote d'vn numero, giunte insieme, sono minori del medesimo numero, all'hora quel numero si chiamerà numero diminuto; com'è il numero 8, il quale è misurato da i numeri 8. 4. 2; e le parti aliquote sono 1. 2. 4, che, giunte insieme, fanno il numero 7 minore del proposto numero 8.

Quando poi tutte le parti aliquote d'vn numero, giunte insieme, sono maggiori del medesimo numero; in tal caso quel numero si chiama numero abondante; come è il numero 12, il quale è misurato da i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2, e le parti aliquote sono 1. 2. 3. 4. 6, che, giunte insieme, fanno il numero 16 maggiore del proposto numero 12.

Dopo spiegate le definitioni d'Euclide stimo bene aggiungere quì i seguenti postulati, ed assiomi introdotti da altri Autori per maggior spiegatione di quel che segue.

POSTVLATI.

I.

Si prende per concesso potersi pigliare quanti si voglia numeri, ò vguali, ò multiplici à qualunque altro numero.

II.

Che si possa prendere vn numero maggiore di qualunque altro numero.

Benche il numero non si può diminuire in infinito, stante che l'vnità è la sua minima parte, con tutto ciò questo non impedisce, che non si possa accrescere quanto si vuole, coll'aggiungere sempre più, e più vnità: donde è manifesto, che à qualunque dato numero se gli può trouare altro numero maggiore, e più maggiore, quanto si vuole.

ASSIOMI.

I.

Tutti i numeri, che sono vguali multiplici d'vn medesimo, ò d'altri numeri vguali, sono frà di loro vguali.

I I.

Quei numeri, de' quali vn medesimo è vgualmente multiplice, ouero de' quali gli vgualmente multiplici sono vguali, ancor essi sono frà di loro vguali.

Se il numero A è vgualmente multiplice de i due B, & C, i due numeri B, & C sono frà di loro vguali; ouero se i numeri vguali D, E sono vguali multiplici de i due B, C, i numeri B, & C sono frà di loro vguali.

A 28

B 7 7 C

D 35 35 E

I I I.

Tutti i numeri, che sono la medesima parte, ò le medesime parti dell'istesso numero, ouero di numeri vguali, sono frà di loro vguali.

I V.

I numeri, de' quali il medesimo numero, ouero numeri vguali, sono la medesima parte, ò le medesime parti, sono frà di loro vguali.

V.

L'vnità misura ogni numero secondo le vnità, che lo compongono, *cioè lo misura tante volte*, per quante sono le vnità, *che lo compongono.*

V I.

Ogni numero misura se medesimo secondo vna sola vnità, cioè lo misura vna sol volta.

V I I.

Se vn numero, multiplicato per vn altro, produce qualche numero, il multiplicante misura il prodotto secondo le vnità, che sono nel multiplicato, ed il multiplicato misura il medesimo, secondo le vnità, che sono nel multiplicante.

V I I I.

Se vn numero misura vn altro numero, quello, secondo il quale lo misura, misurerà il medesimo secondo le vnità, che sono in quello, che misura.

Per essempio il numero 4 misura il numero 12 secondo le vnità del numero 3; ed il numero 3 misura il medesimo numero 12 secondo le vnità del numero 4; cioè il numero quattro entra tre volte nel numero 12, ed all'incontro il numero 3 entra quattro volte nell'istesso numero 12.

IX.

Ogni numero, che misura vn altro numero, se multiplica quello, secondo il quale egli lo misura, ò è multiplicato da quello, produce il medesimo numero misurato.

Per essempio il numero 7 misura il numero 28 per il numero 4; se il numero 7 multiplica il numero 4, ouero il numero 4 multiplica il numero 7, sempre il prodotto sarà vguale al numero 28.

X.

Se vn numero misura due, ò più numeri, misurerà ancora il composto da quelli.

XI.

Qualunque numero, che misura vn altro numero, misurerà ancora il misurato da quello.

Se il numero 4 misura il numero 12, ed il numero 12 misura il numero 24; il numero 4 misurerà ancora il numero 24.

XII.

Qualunque numero, che misura il tutto, e misura la parte detratta, misurerà ancora il rimanente.

Cioè se il numero AB misura tutto il numero CF, e misura la parte CD. Dico che misurerà ancora l'auanzo DF. Se il numero AB non misura l'auanzo DF, si detragga dal numero DF quanto si può il numero AB, e quel che resta sia EF; sarà EF minore di AB. Perche AB, per ipotesi, misura CD, e per costruttione misura DE, per il 10 assioma, misurerà ancora tutto il numero CE; s'aggiunga à CE la parte EF minore di AB; il numero AB non misurerà giustamente CF, ch'è contro all'ipotesi, essendosi supposto, ch'il numero AB misura tutto CF. Donde è manifesto, che se AB misura il tutto CF, e misura la parte CD, misurerà ancora il rimanente DF, ch'era da dimostrarsi:

C.....D....E..F
A....B

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due proposti numeri ineguali si detrae sempre quanto si può il minore dal maggiore reciprocamente, ed

il rimanente mai misuri quello, che l'antecede, fin tanto, che si peruenga all'vnità; i due numeri proposti saranno frà di loro primi.

Siano proposti i due numeri ineguali AB, CD, e dal maggiore AB, ne sia detratto quante volte si può il numero CD, e quel che resta, sia EB, sarà EB minore di CD; sia poi detratto da CD quanto si può il numero EB, e quel che resta sia FD; sarà FD minore di EB; similmente da EB ne sia detratto quanto si può il numero FD, e l'auanzo sia GB, e con questo ordine si proceda fin che si può; se in questa continua detrattione reciprocamente fatta, nissun auanzo misura il numero antecedente, ma che in questa continuata detrattione l'vltimo auanzo, come GB, sia l'vnità. Dico che i numeri AB, CD sono frà di loro primi; cioè che la loro commune misura è solamente l'vnità.

A.....E..G.B
C...F..D
H.....

Se i numeri AB, CD non sono primi frà loro, qualche numero sarà loro commune misura; cioè l'vno, e l'altro sarà misurato da qualche numero. Sia, s'è possibile, quel numero, che li misura, il notato H. Perche il numero H, per la suppositione fatta, misura il numero CD; ed il numero CD, per ipotesi, misura il numero AE, il numero H dunque [a] *misurerà il numero* AE: ma il numero H, *per ipotesi, misura il tutto AB, il numero H misurerà ancora* [b] *il rimanente EB. In oltre perche il numero EB, per ipotesi, misura CF; perciò il numero H* [c] *misurerà CF. Per suppositione il* numero H misura *il tutto CD; il numero H dunque misurerà ancora* [d] il rimanente FD, E *perche FD, per ipotesi, misura EG, in conseguenza il* numero H [e] *misurerà EG. Di più essendosi dimostrato, che il numero H misura il tutto EB; misurerà ancora* [f] *il rimanente GB*; ma per ipotesi, *GB rappresenta l'vnità, il numero H dunque misurerà l'vnità GB; il tutto misura la parte*, ch'è impossibile. Non dunque alcun numero, fuor che l'vnità, misura i due numeri AB, CD; e perciò i numeri AB, CD sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

a 11. assioma del 7.
b 12. assioma del 7.
c 11. assiom. del 7.
d 12. assiom. del 7.
e 11. assiom. del 7.
f 12. assiom. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione la fà il Campano nel seguente modo.

Se di due proposti numeri frà di loro primi si detrae sempre, quanto si può, il minore dal maggiore, con reciproca detrattione; nissuno degli auanzi, prima che si peruenga all'vnità, misurerà il numero antecedente.

Siano i due numeri AB, CD, frà di loro primi, e dal maggiore AB se ne detrag-

detragga quanto si può il minore CD, e l'auanzo sia EB; sarà EB minore di CD. Similmente dal numero CD se ne detragga quanto si può il numero EB, e l'auanzo sia FD, sarà FD minore di EB; poi dal numero EB se ne detragga quanto si può il numero FD; e quel che resta sia GB. Dico ch'in questa continua detrattione reciprocamente fatta, mai alcun'auanzo, prima di peruenire all'vnità, misurerà il numero antecedente. Misuri s'è possibile prima, che si peruenga all'vnità, l'auanzo GB il numero antecedente FD; perche FD, per ipotesi, misura EG, dunque l'auanzo GB [a] *misurerà ancora il numero EG; mà l'auanzo GB misura se medesimo; perciò* [b] *misurerà ancora tutto il numero EB. In oltre perche GB misura EB; ed il numero EB, per ipotesi, misura CF; in conseguenza GB* [c] *misura CF; mà, per il supposto fatto, GB misura FD, dunque GB* [d] *misurerà CD. Il numero CD, per ipotesi, misura AE, perciò l'auanzo GB* [e] *misurerà AE. Di più perche GB misura AE, e per quel che s'è dimostrato, misura ancora EB; dunque GB* [f] *misurerà il tutto AB. Mà, per quel, che s'è dimostrato, GB misura tutto il numero CD; perciò l'auanzo GB sarà commune misura de i due proposti numeri AB, CD; per la qual cosa i numeri AB, CD* [g] *sono frà di loro composti, ch'è contro all'ipotesi; mentre furono supposti frà di loro primi. Non dunque alcun' auanzo, prima, che si peruenga all'vnità, misura il numero antecedente, ch'era da dimostrarsi.*

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

[a] 11. assioma del 7.
[b] 10. assiom. del 7.
[c] 11. assioma del 7.
[d] 10. assiom. del 7.
[e] 11. assiom. del 7.
[f] 10. assiom.
[g] 14. defin. del 7.

Il P. Clauio aggiunge la seguente dimostratione.

Se di due proposti numeri frà di loro composti, si detrae sempre quanto si può il minore dal maggiore con reciproca detrattione; la detrattione non peruerrà sino all'vnità, ma peruerrà à tale auanzo, che misurerà il numero precedentemente detratto.

Perche se la detrattione peruiene sino all'vnità; cioè se l'vltimo auanzo sarà l'vnità, per la prima propositione di questo, i numeri proposti saranno frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi: non dunque la detrattione peruiene all'vnità, mà si peruiene à tale auanzo, che misura il numero precedentemente detratto, ch'era da dimostrarsi.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Dati due numeri non primi frà loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano i due dati numeri, non primi frà loro AB, CD, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Dal maggiore AB se ne detragga quanto si può il minore CD, e quelche resta sia EB; sarà EB minore

nore di CD. Similmente dal numero CD se ne detragga quanto si può il numero EB, e quel che resta sia FD: e continuandosi questa reciproca detrattione, col sottrarre sempre il minore dal maggiore fin à tanto, che si peruenga ad vn auanzo, che misuri il numero antecedente; non potendosi peruenire all'vnità, stante che se l'vltimo auanzo fosse l'vnità, i numeri AB, CD [m] sarebbero frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque F D quell'auanzo, che misura l'antecedente numero E B. Dico che FD sarà la massima commune misura d'ambidue i proposti numeri AB, CD. Perche FD misura il numero EB, e per costruttione il numero E B misura CF; il numero dunque FD [a] misurerà CF: ma FD misura se medesimo, perciò FD [b] misura il tutto C D. In oltre il numero FD, per quel che si è dimostrato, misura il numero C D; il numero C D per costruttione misura AE; il numero dunque FD [c] misura AE: ma per ipotesi FD misura EB; perciò il numero FD [d] misura il tutto AB. Fù dimostrato, ch'il medesimo numero FD misura il tutto CD, in conseguenza FD sarà commune misura d'ambidue i numeri AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G-----

Dico finalmente che FD è la massima commune misura de' medesimi numeri AB, CD. Perche se FD non è la massima commune misura, qualche altro numero sarà massima commune misura de i due AB, CD. Sia s'è possibile il numero G commune misura de i numeri A B, C D, e sia maggiore di FD. Perche G è commune misura de i due AB, CD, perciò G misurerà CD: ma CD per costruttione misura AE, il numero G [e] dunque misurerà AE; si disse che G misura il tutto AB, in conseguenza G [f] misurerà il rimanente EB. Di più, perche G misura E B, ed il numero EB misura CF, il numero G [g] misurerà ancora CF; ma G, per suppositione, misura tutta CD; misurerà [h] similmente l'auanzo FD. Fù supposto il numero G maggiore di FD, il maggiore dunque, cioè G, misura il minore FD, ch'è impossibile. Non dunque è maggiore di FD: per la qual cosa FD sarà la massima commune misura de i numeri A B, C D, ch'era da dimostrarsi.

Se poi detraendo quanto si può il minor numero CD dal maggiore AB, non auanzasse cos'alcuna, all'hora CD sarà la massima commune misura de i due AB, CD, stante che CD, misurando AB, misurarebbe ancora se medesimo, ch'è quanto si doueua dimostrare.

A.....B
C.....D

COROLLARIO

Da quel che s'è detto, è manifesto, che se vn numero misura due altri numeri, misurerà ancora la massima commune misura di quelli.

Nella dimostratione antecedente supponendo G commune misura de i due AB, CD, fù dimostrato, ch'il medesimo numero G misura la parte FD; se

dunque

m 1. del 7.
a 11. assiom. del 7.
b 10. assiom. del 7.
c 11. assiom. del 7.
d 10. assiom. del 7.
e 11. assiom. del 7.
f 12. assiom. del 7.
g 11. assiom. del 7.
h 12. assiom. del 7.

dunque FD sarà la massima commune misura de i due AB, CD; sarà manifesto, che G, essendo commune misura de i due AB, CD, misurerà ancora la loro massima commune misura FD, come si disse.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE III.

Dati tre numeri non primi frà di loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano dati i tre numeri A,B,C, non primi frà di loro, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Si troui prima [a] la massima commune misura de i due A, & B, che sia D. Se il numero D misura C, sarà D la massima commune misura de i tre dati numeri A, B, C: perche se non fosse D la massima, che misura i tre A, B, C, sarebbe qualche altro numero maggiore di D, che sia per essempio H. Perche D, per costruttione, è massima commune misura de i due A,& B, ed il numero H misura i due A, & B, per l'antecedente Corollario, il numero H misurerà ancora la massima commune misura D; dalche il numero maggiore misurarebbe il minore, ch'è impossibile; non dunque altro numero maggiore di D è massima commune misura de i tre A,B,C, ma la massima commune misura sarà il numero D, come si disse. Di nouo supposto ch'il numero D non misuri il numero C. Perche i tre A,B,C, per ipotesi, sono numeri compositi; per la 14. definitione di questo, haueranno vna commune misura, la quale, se è commune misura di tutti tre i numeri A, B, C, sarà ancora commune misura de i due A,B; e per il Corollario antecedente, quello, che misura i due A,B, misurerà ancora la loro massima misura commune D: dal che quello, che misura i tre A,B,C, misura ancora il numero D; e perciò i due C, & D, [b] sono numeri compositi; si troui dunque [c] la massima commune misura de i due C, & D, che sia E. Dico che il numero E è massima commune misura de i tre dati numeri A,B,C. Perche il numero E misura i due C, & D; ed il numero D misura i due A, & B; il numero E [d] misurerà i due A, & B: ma per costruttione misura ancora C; dunque sarà E commune misura de i tre A, B, C. Dico finalmente, che non solo il numero E è commune misura de i tre A,B,C; ma che è la massima commune misura de i tre A,B,C. Se il numero E non è la massima commune misura, qualche altro numero maggiore di E sarà massima commune misura de i tre A,B,C, sia quello s'è possibile il notato F. Perche F misura i due A, & B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora la loro massima commune misura D: ma il numero F, per la suppositione fatta, misura C, perciò F sarà misura commune de i due C,& D; e per il Corollario antecedente, F misurerà la loro massima commune misura E: per la qual cosa il numero maggiore F misura il numero minore E, ch'è impossibile. Non dunque altro numero maggiore di E è massima commune misura de i tre A,B,C; ma la loro massima commune misura sarà il numero E; ch'era da farsi, e dimostrarsi.

A . . . . . H . . . .
B . . . . . D . . .
C . . . . . E . . F ---

[a] 2. del 7.

[b] 14. defin. del 7.
[c] 2. del 7.

[d] 11. assiom. del 7.

CO-

COROLLARIO.

Quindi appare, che se vn numero misura tre numeri, misurerà ancora la massima commune misura di quei tre numeri.

Si è dimostrato nell'vltima parte dell'antecedente propositione, che se F misura i tre A, B, C, misurerà ancora il numero E: ma s'è dimostrato, che il numero E è la massima commune misura de i tre A, B, C; quel numero dunque, che misura i tre A, B, C, misurerà ancora la loro massima commune misura, come si disse.

Col medesimo ordine si può trouare la massima commune misura di più di tre numeri frà di loro non primi: cioè, se saranno quattro numeri, si troua prima la massima commune misura à tre di quelli, come antecedentemente si è fatto; e poi si troui la commune misura frà vno di quei tre, ed il quarto, quella sarà la massima commune misura di tutti quattro. Se i numeri saranno cinque, si troua prima la massima commune misura di quattro di quelli, e poi si troui la massima commune misura di vno di quei quattro, e del quinto; quella sarà la massima commune misura di tutti cinque. E con quest'ordine si procederà se saranno più di cinque; e sempre quel numero, che misura tutti i numeri, misurerà ancora la loro massima commune misura, come s'è detto nell'antecedente Corollario: poiche la medesima dimostratione fatta, quando sono tre soli numeri, si può fare quando sono più di tre.

THEOREMA II. PROPOSITIONE IV.

Ogni numero ò è parte, ò è parti d'ogn'altro numero maggiore.

Siano due numeri come A, & B; e sia il numero A minore del numero B. Dico che il numero A ò è parte del numero B, ouero è tante parti del numero B. Siano prima i numeri A, & B frà di loro primi. Perche qualunque vnità del numero A è parte del numero B, conterrà il numero A tante parti di B, per quante vnità sono nel medesimo numero A; per la qual cosa il numero A sarà parti di B, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A . . . . . .
B . . . . . .

In oltre non siano A, & B numeri primi; se il numero A misura il numero B, per la terza definitione di questo, sarà A parte di B. Finalmente non sia A parte di B: perche A, & B, per suppositione non sono numeri primi, si troui, per la prima propositione di questo, la loro commune misura, che sia C. Perche C misura A, perciò A si può diuidere nelle parti vguali à C; si diuida dunque il numero A nelle parti vguali à C, che siano AD, DE, EF. Perche C misura il numero B, ed AD è vguale al numero C; perciò AD

A . . D . . E . . F
B . . . . . .
C . .

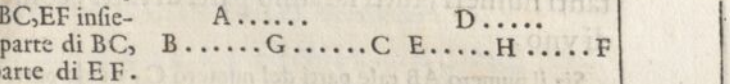
misu-

misurerà il numero B; e per la terza definitione, AD sarà parte di B. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DE è parte di B, e che EF è parte del medesimo numero B; e perciò i numeri AD, DE, EF saranno tante parti di B, per quante volte C misura AF. Per la qual cosa ogni numero ò è parte, ouero è parti d'ogn'altro numero maggiore, che era da dimostrarsi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

Se vn numero è parte d'vn numero, ed vn altro numero è la medesima parte d'vn altro; i due, che sono parte, giunti insieme, saranno parte degli altri due, come vno è parte di vno, ò l'altro è parte dell'altro.

Sia il numero A parte di BC, come D è parte di EF. Dico che i due numeri A, & D insieme, sono parte di BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come D è parte di EF.



Perche A è parte di BC, come D è parte di EF; tante volte A misurerà BC, per quante volte D misura EF. Si diuida il numero BC nelle parti vguali ad A, che siano BG, GC; e si diuida il numero EF nelle parti vguali al numero D, che siano EH, HF. Perche A è vguale à BG, ed il numero D è vguale ad EH; al numero A s'aggiunga D, ed al numero BG s'aggiunga EH: i due A, & D insieme giunti, saranno vguali à i due BG, & EH insieme. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i due A, & D insieme, sono vguali à i due GC, HF insieme: dal che tante volte A, & D insieme, misura le due BC, EF insieme, per quante volte A misura BC, ouero D misura EF. Per la qual cosa le due A, & D insieme, sono parte de i due BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come il numero D è parte di EF; che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Quel, che s'è detto nell'antecedente propos. di due soli numeri, si deue intendere ancora di più di due numeri: cioè, se quanti si voglia numeri, di quanti si voglia altri numeri, ciascuno da per sè, è la medesima parte del suo corrispondente, tutti insieme sono tal parte di tutti gli altri insieme, come vno è parte di vno. E la dimostratione è la medesima, che si è fatta antecedentemente.

Quì si può ancora dimostrare che se quanti numeri si vogliano sono vguali multiplici di altretanti numeri, tutti insieme saranno multiplici di tutti insieme, come vno è multiplice di vno.

Siano i numeri A, & C vguali multiplici de i numeri B, & D. Dico che A è multiplice di B, ouero C è multiplice di D, come i numeri A, & C, insieme, sono multiplici de' numeri B, & D insieme. Perche A è multiplice di B come C è multiplice di D; tante volte B misura il numero A, per quante volte D misura il numero C: dal che B è parte di A come D è parte di C; e per l'antecedente propositione B, & D insieme sono parti di A, & C insieme, come B è parte di A, e come D è parte di C: per la qual cosa B, & D insieme, misura A, & C insieme, tante volte, per quante volte B misura A; ouero D misura C: e perciò A, & C insieme, è multiplice di B, & D insieme, come A è multiplice di B, e come C è multiplice di D, che era da dimostrarsi.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . .

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Se due, ò più numeri, sono vgualmente parti di altretanti numeri; tutti saranno parti di tutti, come vno è parti di vno.

Sia il numero AB tale parti del numero C, quale parti è DE del numero F. Dico che AB, DE insieme, sono tali parti di C, ed F insieme, quali parti è AB di C; e quali parti è DE di F. Perche AB è tante parti di C, per quante parti è DE di F; saranno in A B tante parti di C, per quante in DE sono parti di F. *Si diuida* AB nelle parti di C, e siano AG, GB; cioè AG sia parte di C, ed anco GB sia parte di C. Similmente si diuida DE nelle parti di F, che siano DH, HE, cioè, che DH sia parte di F, ed anco HE sia parte di F; la moltitudine delle parti in A B sarà vguale alla moltitudine delle parti in DE. E perche AB è tale parti di C, quale parti è DE di F; ogn'vna delle parti in AB sarà parte di C, come ogn'vna delle parti in DE è parte di F: dal che AG è parte di C, come DH è parte di F: donde le due insieme AG, DH, [a] saranno parte delle due insieme C, ed F, come AG è parte di C, ouero DH è parte di F. Nell'istesso modo si proverà, che li due insieme GB, HE sono parte delli due insieme C, ed F, come GB è parte di C, ouero HE è parte di F; e perciò AB, DE insieme, sono parti di C, ed F insieme, come AB è parti di C, ouero DE è parti di F. L'istesso si dimostrerà se i numeri saranno più di due. Per la qual cosa se due, ò più numeri, sono vguali parti di altretanti numeri, tutti sono parti di tutti, come vno è parti di vno, che era da dimostrarsi.

A . . G . . B D . . . . H . . . . E
C . . . . . F . . . . . .

a 5. del 7.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Se vn numero è parte d'vn altro numero, come il numero detratto dall'vno è parte del numero detratto dall'altro;

tro; il rimanente sarà parte del rimanente, come tutto è parte di tutto.

Sia il numero AB parte di CD come AE è parte di CF. Dico che il rimanente numero EB è parte del rimanente FD, come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia parte di CG, come AE è parte di CF; cioè come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Perche EB è parte di CG, come AE è parte di CF; sarà tutto AB [a] parte di tutto GF, come AE è parte di CF; cioè come tutto AB è parte di CD: e perciò sarà il medesimo numero AB tale parte di GF, quale parte è di CD; per la qual cosa [b] i numeri GF, CD sono frà di loro vguali: se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; preso EB come terza quantità, sarà EB tale parte di FD, quale è di CG: ma EB, per costruttione, è parte di CG, come tutto AB è parte di tutto CD; sarà il rimanente numero EB, parte del rimanente numero FD, come tutto AB è parte di tutto CD, che era da dimostrarsi.

A . . . E . . B
G . . . . C . . . . . F . . . . D

[a] 5. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se vn numero è tante parti d'vn altro numero, per quante parti è il numero detratto dall'vno del numero detratto dall'altro; il rimanente sarà tante parti del rimanente, per quante parti è tutto di tutto.

Sia il numero AB tante parti di CD, per quante parti è il numero AE del numero CF. Dico che il rimanente EB sarà tante parti del rimanente FD, per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia tante parti di CG, per quante parti è il numero AE di CF; sarà tutto il numero AB tante parti di GF, [a] per quante parti è AE di CF: ma, per ipotesi, AE è tante parti di CF, per quante parti è AB di CD; sarà AB tante parti di GF, per quante parti è il medesimo numero AB di CD: per la qual cosa i numeri GF, CD [b] sono frà di loro vguali; se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; dal che tante parti è il numero EB di FD, per quante parti è il medesimo numero EB di GC: ma, per costruttione, EB è tante parti di CG, per quante parti è AE di CF; sarà EB tante parti di FD, per quante parti è AE di CF; cioè per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD, come fù proposto dimostrare.

A . . . . . E . . . . B
G . . . . . C . . . . . F . . . . . D

[a] 6. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Se vn numero è parte d'vn numero, come vn altro nu-

mero è parte d'vn altro numero; permutando, quale parte, ò parti è il primo del terzo, la medesima parte, ò le medesime parti, sarà il secondo del quarto.

Sia il numero A la medesima parte del numero BC, quale parte è il numero D del numero EF; e sia A minore di D, ed il numero BC minore di EF. Dico che, permutando, quale parte, ò parti è il primo A del terzo D; tale parte, ò parti sarà il numero BC del numero EF. Perche A è la medesima parte di BC, quale è il numero D di EF; tante volte A misurerà BC, per quante volte D misura il numero EF. Si diuida BC nelle parti vguali ad A, che siano BG, GC; e si diuida EF nelle parti vguali à D, che siano EH, HF; tante parti saranno in BC vguali ad A, per quante ne sono in EF vguali à D. In oltre perche A è vguale à BG, ed il numero D è vguale ad EH; tale parte, ò parti sarà A di D, quale parte, ò parti è BG di EH. Similmente, essendo A vguale à GC, ed il numero D vguale ad HF, tale parte ò parti sarà A di D, quale parte, ò parti è GC di HF; ma tale parte, ò parti è A di D, quale parte, ò parti è BG di EH; tale parte, ò parti dunque sarà BG di EH, quale parte, ò parti è GC di HF: dal che tutto il numero BC [a] sarà tale parte, ò parti, di tutto il numero EF, quale parte, ò parti è BG di EH; ma si disse che tale parte, ò parti è BG di EH, quale parte, ò parti, è A di D; tale parte, ò parti dunque è il numero A del numero D, quale parte, ò parti, è il numero BC del numero EF, che era da dimostrarsi.

a 5.c 6.del 7

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se di quattro numeri il primo è tante parti del secondo, per quante parti è il terzo del quarto; permutando, il primo sarà tante parti, ò tale parte del terzo, per quante parti, ò quale parte, è il secondo del quarto.

Sia il numero AB tante parti del numero C, per quante parti è il numero DE del numero F; e sia AB minore di DE, ed il numero C minore di F. Dico che il numero AB sarà tante parti, ò tale parte, del numero DE, per quante parti, ò quale parte, è il numero C del numero F. Si diuida AB nelle parti di C, che siano AG, GB; cioè AG è tale parte di C, quale parte è GB del medesimo numero C; donde AG, GB sono frà di loro vguali. Similmente si diuida DE nelle parti di F, che siano DH, HE; sarà DH tale parte di F, quale parte è HE del medesimo numero F; e così li due DH, HE sono frà di loro vguali. E perche AB è tante parti di C, per quante parti è DE di F; saranno in AB tante parti di C, per quante parti sono in DE di F; e perciò vna delle parti, che sono in AB, sarà tale parte di C, quale parte è vna di quelle, che sono in DE di F;

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

cioè

cioè sarà AG tale parte di C, quale parte è DH di F; e permutando, sarà AG [a] tale parte, ò parti, di DH, quale parte, ò parti è il numero C del numero F. Nell'istesso modo si proverà, che tale parte, ò parti è GB di HE, quale parte, ò parti, è C di F. Per la qual cosa tale parte, ò parti è AG di DH, quale parte, ò parti è GB di HE; e perciò tutto AB [b] sarà tale parte, ò parti di tutta DE, quale parte, ò parti è AG di DH. Ma quale parte, ò parti è AG di DH, per quel che si è dimostrato, tale parte, ò parti è C di F; quale parte, ò parti dunque è il numero AB del numero DE, tale parte, ò parti sarà C di F, che era da dimostrarsi.

a 9. del 7.

b 5. & 6. del 7.

SCOLIO.

Prima di passare in altro, stimo bene dimostrare ne i numeri quella medesima passione, che fù dimostrata nel Corollario alla quarta propositione del quinto Libro.

Se di quattro numeri la proportione del primo al secondo è come quella del terzo al quarto; inuertendo, il secondo al primo hauerà l'istessa proportione, che il quarto al terzo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D, ed habbia il primo A al secondo B l'istessa proportione, quale hà il terzo C al quarto D. Dico che, inuertendo, B ad A sarà come D à C. Supposto prima, che A, & C siano minori di B & D. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D; sarà A [a] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D: se A è parte di B, come C è parte di D; sarà B multiplice di A, come D, è multiplice di C; e perciò B ad A [b] sarà come D à C. Se A è parti di B, come C è parti di D; all'hora B, & D [c] conterranno vgualmente i numeri A, & C, e di più conterranno la medesima parte, ò le medesime parti di A, & C; e per la 20. definitione di questo B ad A sarà come D à C.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . .

a 20. defin. del 7.

b 20. defin. del 7.

c 20. defin. del 7.

Di nuouo siano li due A, & C maggiori de i due B, & D. Perche A à B, è come C à D, i due A, & C [d] saranno ò vguali multiplici de i due B, & D; ouero conterranno vgualmente i due B, & D, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti di B, & D. Se A, & C sono vguali multiplici di B, & D, sarà B parte di A, come D è parte di C: dalche B ad A [e] sarà come D à C. Se poi li due A, & C contengono vgualmente li due B, & D, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti di B, & D; sarà B parti di A, come D è parti di C. Per la qual cosa B ad A [f] sarà come D à C, come fù proposto dimostrare.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . D . . . . .

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . .

d 20. defin. del 7.

e 20. defin. del 7.

f 20. defin. del 7.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Se tutto vn numero à tutto vn altro numero è come la parte detratta dall'vno alla parte detratta dall'altro, il rimanente al rimanente sarà come il tutto al tutto.

Sia tutto il numero AB à tutto il numero CD, come la parte AE alla parte CF. Dico che l'auanzo EB all'auanzo FD, è come tutto il numero AB à tutto il numero CD. Sia prima AB minore di CD. Perche AB à CD è come AE à CF; sarà AB [a] parte, ò parti di CD, come AE è parte, ò parti di CF: dal che il rimanente EB, [b] sarà parte, ò parti, del rimanente FD, come tutto AB è parte, ò parti di tutto CD; e perciò EB ad FD [c] sarà come AB à CD.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . . . D

In oltre sia AB maggiore di CD: perche AB à CD, per ipotesi, è come AE à CF, inuertendo, CD ad AB [d] sarà come CF ad AE; e sarà CD parte, ò parti di AB, [e] come CF è parte, ò parti di AE; dalche il rimanente FD [f] sarà parte, ò parti di EB, come CD è parte, ò parti di AB; e perciò FD ad EB [g] sarà come *CD ad AB*; ed inuertendo, EB ad FD [h] sarà come AB à CD, *ch'era da dimostrarsi.*

A . . . . . E . . . . B
C . . . . . F . . . D

a 20. defin. del 7.
b 7. & 8. del 7.
c 20. defin. del 7.
d Scol. ant.
e 20. defin.
f 7. & 8. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. ant.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Se quanti si voglia numeri sono proportionali; sarà vno antecedente ad vn conseguente, come tutti gl'antecedenti insieme à tutti li conseguenti insieme.

Siano quanti si voglia numeri proportionali A, B, C, D, E, F; cioè sia A à B come C à D, e come E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A, C, E, insieme à tutti i conseguenti B, D, F, insieme, sono come l'antecedente A al conseguente B; ouero come C à D, ò pure come E ad F. Siano prima i numeri A, C, E minori de i numeri B, D, F. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D, sarà A [a] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; e perciò i due insieme A, & C [b] saranno parte, ò parti de i due B, D insieme, come A è parte, ò parti di B; similmente perche A à B è come E ad F, sarà A [c] parte, ò parti di B, come E è parte ò parti di F; ma per quel, che si è dimostrato A è parte, ò parti di B, come A, C, è parte, ò parti di B, D; sarà A, C parte, ò parti di B, D, come E è parte, ò parti di F; dalche A, C, E insieme, saranno parte, ò parti di B, D, F [d] insieme, come A, C, insieme, sono parte, ò parti di B, D, insieme; cioè, come A è

A . . . . . C . . E . . .
B . . . . . D . . . . F . . . . . .

a 20. defin. del 7.
b 5. e 6. del 7.
c 20. defin.
d 5. e 6. del 7.

parte,

parte, ò parti di B. Per la qual cosa la proportione di A,C,E,[e] insieme, à B,D,F insieme, sarà come A à B. e 20. defin. del 7.

Di nuouo siano i numeri A,C,E maggiori de i numeri B,D,F. Perche A à B è come C à D, sarà, inuertendo, B ad A, [f] come D à C; e sarà B [g] parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C. Similmente, perche A à B è come E ad F, inuertendo, B ad A [h] sarà come F ad E; e sarà B parte, ò parti di A, [K] come F è parte, ò parti di E: ma per quel che si è dimostrato, B è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C; sarà F parte, ò parti di E, come D è parte, ò parti di C. Per la qual cosa i numeri B,D,F sono vgualmente parte, ò parti de i numeri A,C,E; e per quel che si è dimostrato nel principio, i numeri B,D,F, [l] insieme, à i numeri A,C,E, insieme, sono come il numero B al numero A; ed inuertendo, i numeri A, C, E, [m] insieme, à i numeri B,D,F, insieme, sono come A à B, ch'era da dimostrarsi.

A ..... C .... E .....
B ..... D .. F ...

f Scol. alla prop. 10. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. alla prop. 10. del 7.
K 20. defin. del 7.
l 5. e 6. del 7.
m Scol. alla prop. 10. del 7.

SCOLIO.

Quì facilmente, con modo simile à quello tenuto nell'antecedente propositione, si può prouare quel, che dimostra Euclide nell'vndecima propositione del quinto Libro; cioè.

Ne i numeri le proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime frà di loro.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, che il numero C al numero D; e sia E ad F come C à D. Dico che la proportione di A à B è l'istessa, che quella di E ad F. Siano prima li tre A, C, E minori de i tre B, D, F. Perche C à D è come A à B; e similmente C à D è come E ad F; sarà C parte, ò parti di D, [a] come A è parte, ò parti di B; e come E è parte, ò parti di F; dalche A è parte, ò parti di B, come E è parte, ò parti di F; e perciò A à B [b] sarà come E ad F. Di nuouo siano le tre A,C,E, maggiori delle tre B, D, F. Perche C à D, è come A à B, sarà, inuertendo, D à C [c] come B ad A: e similmente D à C sarà come F ad E; e per quel, che si è dimostrato, B ad A sarà come F ad E; ed inuertendo, A à B [d] sarà come E ad F, ch'era da dimostrarsi.

A ..... C .... E .....
B ..... D .. F ...

a 20. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c Scol. alla 20. prop. del 7.
d Scol. alla 10. prop. del 7.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se quattro numeri sono proportionali, permutandosi saranno ancora proportionali.

Siano i quattro numeri A,B,C,D, proportionali; e sia il numero A al

nume-

numero B, come C à D. Dico che, permutandosi, A à C sarà come B à D. Siano prima A, & C minori de i due B,& D; e sia A minore di C, come nella prima figura. Perche A à B è come C à D, sarà A [a] parte, o parti di B, come C è parte, ò parti di D; e permutando, il numero A [b] sarà parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C sarà come B à D. Di nuouo siano A,& C minori de' numeri B, & D, e sia A maggiore di C, come nella seconda figura. Perche A à B è come C à D, sarà A [c] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; cioè C sarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di B: e permutando, C [d] sarà parte ò parti di A, come D è parte, ò parti di B: per la qual cosa C ad A [e] sarà come D à B; ed inuertendo, A à C [f] sarà come B à D. In oltre siano A, & C maggiori di B, & D, e sia A minore di C. Perche A à B è come C à D, inuertendo B ad A [g] sarà come D à C; donde B [h] sarà tale parte, ò parti di A, quale è D di C; e permutando, B [K] sarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di C; cioè A è parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D: e perciò la proportione di A à C [l] sarà come quella di B à D. Siano poi li due A, & C maggiori de i due B, & D; e sia A maggiore di C. Perche C à D, per ipotesi, è come A à B; inuertendo, D à C [m] sarà come B ad A; dalche D sarà parte, ò parti di C, [n] come B è parte, ò parti di A; e permutando, D [o] sarà parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di A: cioè C è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; e perciò C ad A [p] sarà come D à B; ed inuertendo, A à C [q] sarà come B à D.

Di più se A è vguale à B, ed il numero C vguale à D, ed A sia minore di C, sarà A parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C [r] sarà come B à D. Finalmente sia A vguale à B, ed il numero C vguale à D, e sia A maggiore di C; sarà C parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; dalche la proportione di C ad A, [f] sarà come quella di D à B; ed inuertendo, A à C [t] sarà come B à D, ch'era da dimostrarsi.

A . . ,	C	
B	D	
A	C . . .	
B	D	
A	C	
B . . .	D	
A	C	
B	D . . .	
A . . .	C	
B . . .	D	
A	C . . .	
B	D . . .	

a 20. defin. del 7.
b 9. e 10. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 9. e 10. del 7.
e 20. defin. del 7.
f Scol. alla 10. prop. del 7.
g Scol. alla 10. prop. del 7.
h 20. defin. del 7.
K 9. & 10. del 7.
l 20. defin. del 7.
m Scol. alla 10. prop. del 7.
n 20. defin. del 7.
o 9. e 10. del 7.
p 20. defin. del 7.
q Scol. alla 10. del 7.
r 20. defin. del 7.
f 20. defin. del 7.
t Scol. alla 10. del 7.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se siano quanti numeri si vogliano da vna parte, ed altrettanti d'vguale moltitudine da vn altra parte, e siano proportionali à due à due; per l'egualità, il primo all'vltimo è come il primo all'vltimo.

Siano quanti numeri si vogliano A, B, C, da vna parte, & altrettanti, co-

me

me D,E,F, da vn altra parte, e sia A à B, come D ad E, e B à C, come E ad F. Dico che per l'egualità, A à C sarà come D ad F. Perche A à B, per ipotesi, è come D ad E, permutando, A à D [a] sarà come B ad E. Similmente, essendo B à C come E ad F; sarà, permutando, B ad E [b] come C ad F: ma B ad E è come A à D, sarà A ad D [c] come C ad F, e permutando, A à C [d] sarà come D ad F. Se i numeri proposti saranno più di tre per parte, e sia C à G come F ad H: perche A à C è come D ad F, e C à G è come F ad H, per quel che si è dimostrato, A à G sarà come D ad H. Ed il medesimo si dimostrerà se i numeri proposti saranno più di quattro per parte, il che era da dimostrarsi.

A . . . . . D . . . . . a 13. del 7.
B . . . . . E . . . . .
C . . . . F . . .
G . . . . . H . . . . . b 13. del 7.
c Scol. alla 12. propos. del 7.
d 13. del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se l'vnità misura vn numero, ed vn terzo numero misura vgualmente vn altro numero; permutandosi, l'vnità misurerà il terzo numero, come il secondo misura il quarto.

Misuri l'vnità A il numero BC, come il numero D misura il numero EF. Dico che permutandosi, l'vnità A misurerà il numero D, come il numero B C misura il numero E F. Si diuida B C nelle vnità BG, GH, HC; e si diuida EF nelle parti vguali al numero D, che siano EI, IK, KF. Perche l'vnità A misura BC, come il numero D misura EF, la moltitudine delle vnità in BC sarà vguale alla moltitudine delle parti in EF: e perche il numero D è vguale ad EI, l'vnità A misurerà il numero D come l'vnità B G misura il numero E I. Nell'istesso modo l'vnità A misura il numero D, come l'vnità G H misura il numero IK; e come l'vnità HC misura il numero KF; e perciò il numero BC misura il numero EF, come l'vnità BG misura l'vnità EI, cioè come l'vnità A misura il numero D; il che era da dimostrarsi.

A . . D . .
B. G. H. C E. . I. . K. . F

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri si multiplicano scambieuolmente, i prodotti sono frà di loro vguali.

Siano due qualunque numeri A, & B, e, multiplicando il numero A per il numero B, il prodotto sia il numero D; similmente multiplicando il numero B per il numero A, il prodotto sia il numero C. Dico che i prodotti D,& C, sono frà di loro vguali. Si esponga l'vnità E. Perche multiplicando il numero A

E .
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

per il numero B il prodotto è il numero D, sarà D composto di tante vol-
a 15. defin. del 7. te A, [a] per quante vnità sono in B; e perciò
A misura il numero D, come l'vnità E misura
il numero B; cioè, l'vnità E misura il numero
B, come il numero A misura il numero D; e
b 15. del 7. permutandosi, l'vnità E misura il numero
A, [b] come il numero B misura il nume-
ro D. In oltre, perche, multiplicando il numero B per il numero A, si
c 15. defin. del 7. produce il numero C, il prodotto C [c] sarà composto di tante volte il nu-
mero B, per quante vnità sono nel numero A; e perciò l'vnità E misurerà
tante volte il numero A, come il numero B misura il numero C: ma si
disse, che l'vnità E misura il numero A, come il numero B misura il nu-
mero D; il numero dunque B misura vgualmente i numeri D, & C; e per-
d 4. assioma del 7. ciò i prodotti D, & C [d] sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

E.
A... B....
D..... C.....

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se vn numero, multiplicando due numeri, produce due altri numeri; i prodotti sono frà di loro come i numeri multiplicati.

Sia il numero A, il quale, multiplicando il numero B, produca il numero D; e multiplicando il numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E, è come il numero multiplicato B al numero multiplicato C. Si prenda l'vnità F, sarà il prodotto D composto di tante volte il nume-
a 15. defin. del 7. ro B, [a] per quante volte l'vnità F misura il numero A; ed il prodotto E sarà compo-
b 15. defin. del 7. sto di tante volte il numero C, [b] per quante volte l'vnità F misura il numero A: per la qual cosa il numero B misura il numero D, come l'vnità F misura il numero A; ed il numero C misura tante volte il numero E, per quante volte l'vnità F misura il numero A; e perciò il numero B misura il numero D, come il numero C misura il numero E: dal che la proportione di B à D
c 20. defin. del 7. d 13. del 7. [c] sarà come quella di C ad E; e permutando, il numero multiplicato B al numero multiplicato C, [d] sarà come il prodotto D al prodotto E, che era da dimostrarsi.

F.
A...
B.. C....
D.....E.....

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se due numeri, multiplicando vn medesimo numero, producono due altri numeri; i prodotti sono frà di loro come i multiplicanti.

Siano i numeri A, & B; ed il numero A, multiplicando il numero C, produca il numero D; come ancora il numero B, multiplicando il mede-

simo

simo numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E sarà come il multiplicante A al multiplicante B. Perche il prodotto del numero A nel numero C [a] è vguale al prodotto del numero C nel numero A; ed il prodotto del numero A nel numero C, per ipotesi, è il numero D; multiplicando dunque C il numero A, produrrà il numero D: e per l'istessa ragione C multiplicando il numero B, produrrà il numero E; dal che i numeri A, & B, che prima erano multiplicanti, à questa seconda esposizione, vengono ad essere numeri multiplicati; e per l'antecedente propositione, il prodotto D al prodotto E sarà come il numero A al numero B, ch'era da dimostrarsi.

A....
B.....
C...
D.....
E.....

a 16. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se quattro numeri sono proportionali, il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli estremi, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i medij: e se il prodotto fatto dalla multiplicatione degli estremi è vguale al prodotto de i medij; i quattro numeri sono proportionali.

Siano i quattro numeri proportionali A, B, C, D; e sia A à B come C à D. S'intenda multiplicato il primo A per il quarto D, ed il prodotto sia E. Similmente s'intenda multiplicato il secondo B per il terzo C, ed il prodotto sia F. Dico che i prodotti E, ed F, sono frà di loro vguali. E per dimostrarlo, si multiplichi il numero A per il numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D sono multiplicati dal numero A, ed i prodotti sono E, & G; sarà il prodotto E al prodotto G [a] come C à D: ma C à D, per ipotesi, è come A à B; sarà E à G [b] come A à B. In oltre perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà il prodotto F al prodotto G, [c] come A à B: ma fù dimostrato E à G essere come A à B; sarà E à G [d] come F al medesimo numero G: dal che E, ed F [e] ò sono vguali multiplici di G, ò vgualmente parte, ò le medesime parti &c. di G; e perciò sono frà di loro vguali, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

a 17. del 7.
b Scol. alla 12. del 7.
c 18. del 7.
d Scol. alla 12. del 7.
e 20. defin. del 7.

Di nuouo sia E il prodotto fatto dalla multiplicatione del primo A nel quarto D; ed F sia il prodotto del secondo B nel terzo C; e supposto il prodotto E vguale al prodotto F. Dico che A à B è come C à D. Si multiplichi di nuouo il numero A nel numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D, multiplicati per il numero A, producono i numeri E, & G; sarà C à D [f] come E à G. Similmente perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà A à B [g] come

f 17. del 7.
g 18. del 7.

F à G. In oltre perche i prodotti E, ed F, ſono frà di loro vguali, preſo G come terza quantità, gli vguali numeri E, ed F ſaranno, ò vgualmente multiplici del numero G, ò vgualmente parte, ò le medeſime parti, ouero conterranno vgualmente G in qualche parte, ò parti di G; e per la 20. definitione di queſto, ſarà E à G come F à G: ma F à G, per quel che ſi è dimoſtrato, è come A à B; e la proportione di E à G è come C à D; ſarà A à B [h] come C à D, il che era da dimoſtrarſi.

A . . .
B . .
C . . . : . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

h Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se tre numeri ſono proportionali, quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, multiplicato in ſe medeſimo; e ſe quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, i tre propoſti numeri ſono proportionali.

Siano i tre numeri proportionali A, B, C; e ſia A à B come B à C. Dico prima che il prodotto fatto da gli eſtremi A, & C, è vguale al prodotto di B in ſe medeſimo; *cioè vguale al quadrato di B. Sia eſpoſto il* numero D vguale al numero B, ſarà D à C, come B al medeſimo numero C: ma B à C, per *ipoteſi*, è come A à B; ſarà A à B [a] come D à C; e per l'antecedẽte propoſitione, il prodotto *fatto dalla multiplicatione* de gli eſtremi A, & C, *è vguale al prodotto de i medij* B, & D: *ma il prodotto di* B in D è vguale [b] *al prodotto di B in ſe medeſimo*; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto di B in ſe medeſimo, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

a Scol. alla 12. del 7.

b 18. defin. del 7.

Di nuouo ſia il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto del medio B in ſe medeſimo. Dico che A à B è come B à C. Si prenda di nuouo il numero D vguale al numero B; ſarà il prodotto di B in D [c] vguale al prodotto di B in ſe medeſimo: ma il prodotto di B in ſe medeſimo, per ipoteſi, è vguale al prodotto de gli eſtremi A, & C; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto de i medij B, & D: e per la ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, ſarà A à B come D à C: ma D à C è come B à C (ſtante che D è vguale à B) ſarà A à B [d] come B à C, ch'era da dimoſtrarſi.

c 18. defin. del 7.

d Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Di tutti i numeri, che hanno la medeſima proportione, i minimi miſurano vgualmente i maggiori; *cioè* il minore miſura il minore, ed il maggiore miſura il maggiore.

Siano

Siano i numeri AB, CD minimi nella proportione di due altri maggiori, come sono i due E, ed F; cioè che AB à CD sia come E ad F; e sia AB maggiore di CD; ed ancora E sia maggiore di F.

Dico che AB misura il maggiore E, come CD misura il minore F; cioè l'antecedente misura l'antecedente, ed il conseguente misura vgualmente il conseguente. Perche AB à CD, per ipotesi, è come E ad F; permutando, AB ad E [a] sarà come CD ad F: mà AB è minore di E, ed il numero CD è minore di F; sarà AB [b] parte di E, come CD è parte di F; stante che i due AB, CD non possono essere parti de i due E, ed F; perche, se possono esser parti de i due E, ed F, sia diuiso AB nelle parti di E, che siano AG, GB; e sia diuiso ancora CD nelle parti di F, che siano CH, HD: e perche AB ad E è come CD ad F; tale parti sarebbe AB di E, [c] quale parti è CD di F; e perciò la moltitudine delle parti in AB sarà vguale alla moltitudine delle parti in CD; e sarà AG tale parte di E, quale è CH di F; per la qual cosa AG ad E [d] sarà come CH ad F; e permutando, AG à CH [e] sarà come E ad F: mà, per ipotesi, AB à CD è come E ad F, sarà AG à CH [f] come AB, à CD: mà AB, & CD sono maggiori di AG, & CH, non saranno dunque i due AB, CD i minimi nella proportione di AB à CD; mentre nella medesima proportione sarebbero i minori AC, CH, ch'è contro all'ipotesi, essendosi supposto i due AB, CD minimi nella proportione di AB, à CD. Non dunque AB è parti di E, come CD è parti F; mà AB è parte di E, come CD è parte di F; è perciò AB misura il numero E, come CD misura F, il che era da dimostrarsi.

A... G.. B
C.. H. D
E.....
F.....

a 13. del 7.
b 26. defin. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 20. defin. del 7.
e 13. del 7.
f Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se saranno tre numeri da vna parte, e tre altri da vn altra parte, i quali, presi à due à due, siano nella proportione perturbata; per l'egualità, il primo all'vltimo sarà come il primo all'vltimo.

Siano i tre numeri A, B, C, da vna parte, e tre altri come D, E, F da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè A à B sia come E ad F; e sia B à C come D ad E. Dico che per l'egualità, A à C è come D ad F. Perche A à B è come E ad F, il prodotto de gli estremi A, & F, [a] è vguale al prodotto de i medij B, ed E. Similmente perche B à C è come D ad E, il prodotto fatto da gli estremi B, ed E, [b] è vguale al prodotto de i medij C, & D; mà il prodotto de i due B, ed E, fù dimostrato vguale al prodotto de i due A, ed F; sarà il prodotto de i due A, & F, vguale al prodotto de i due C, & D; cioè il prodotto de gli estremi A, ed F, vguale al prodotto de i medij C, & D; e perciò la proportione di A à C [c] sarà come quella di D ad F, come fù proposto dimostrare.

A.....
B... D....
C..... E.....
F..

a 19. del 7.
b 19. del 7.
c 19. del 7.

SCO-

SCOLIO.

Qui si possono aggiungere gli altri modi d'argumentare vsati da Euclide nel quinto Libro;

I.

Se quattro numeri sono proportionali, componendo, saranno ancora proportionali.

Sia il numero A al numero B, come il numero C al numero D. Dico che, componendo, A, B, insieme, al conseguente B, sarà come C, D, insieme, al conseguente D. Perche A à B è come C à D, permutando, A à C a *sarà come B à D, e perciò* b *A, B insieme, à C, D, insieme, sarà come B à D; e permutando, A, B, insieme, à B,* c *sarà come C, D, insieme, à D, ch'era da dimostrarsi.*

A . . . . . B . . .
C . . . . . D . . . .

a 13. del 7.
b 12. del 7.
c 13. del 7.

II.

Se quattro numeri sono proportionali, diuidendo, saranno proportionali.

Habbia A, e B insieme, à B, l'istessa proportione, quale hà C, e D insieme, à D: Dico che, diuidendo A à B, sarà come C à D. Perche il numero A, B, al numero B è come il numero C, D al numero D; a *permutando, A, B, insieme, à C, D, insieme, sarà come la parte B alla parte D; e perciò l'auanzo A* b *all'auanzo C sarà come A, B, à C, D; ma A, B, à CD, è come B à D; sarà A à C* c *come B à D; e permutando A à B* d *sarà come C à D, come fù proposto dimostrare.*

A . . . . . B . . .
C . . . . . D . . . .

a 13. del 7.
b 11. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 13. del 7.

III.

Se quattro numeri sono proportionali, per la conuersione della proportione, saranno proportionali.

Habbia il numero AB al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero CD al numero D. Dico che, per la conuersione della proportione, hauerà AB ad A l'istessa proportione, quale hà CD à C. Perche AB à B hà l'istessa proportione, quale ha CD à D, diuidendo, A à B, per l'antecedente dimostratione, sarà come C à D; ed inuertendo, B ad A e *sarà come D à C; e componendo, AB ad A, per la prima delle antecedenti dimostrationi, sarà come CD à C, ch'era da dimostrarsi.*

A . . . . . B . . . .
C . . . . . D . . . . .

e Scol. alla 10. del 7.

IV.

Se di sei numeri, il primo al secondo è come il terzo al quarto; ed il quinto al secondo è come il sesto al quarto;

il numero composto del primo è quinto al secondo, sarà come il numero composto del terzo, e sesto al quarto.

Sia il primo AB al secondo C, come il terzo DE al quarto F; ed il quinto BG al secondo C, sia come il sesto EH al quarto F. Dico che AG, composto del primo è quinto, al secondo C, sarà come DH, composto del terzo, e sesto, al quarto F.

A.....B.....G D....E...H
C.... F..

Perche BG à C è come EH ad F; inuertendo, C à BG [a] *sarà come F ad EH. In oltre, perche AB à C è come DE ad F; e si è dimostrato che C à BG è come F ad EH; per l'egualità, AB à BG* [b] *sarà come DE ad EH; e componendo, AG à GB, per la prima delle antecedenti dimostrationi, sarà come DH ad HE: ma per ipotesi BG à C è come EH ad F; sarà, per l'egualità, AG à C,* [c] *come DH ad F, ch'era da dimostrarsi.*

a Scol. alla 19. del 7.
b 14. del 7.
c 14. del 7.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Quei numeri, che sono primi frà di loro, sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi. Dico che questi sono i minimi di tutti gli altri, che sono nella proportione di A à B. Se i numeri primi A, & B non sono i minimi nella proportione di A à B, due altri minori di A, & B, haueranno la medesima proportione di A à B: siano quelli i notati C, & D. Perche C, & D sono minori di A, & B, e la proportione di C à D è come A à B, per la 21. propositione di questo, C misurerà A come D misura B; cioè tante volte C misura A, per quante volte D misura B. Sia E il numero delle volte, che C misura A, sarà E il numero delle volte, che D misura B; dal che tante volte C misura A, ed il numero D misura B, per quante vnità sono nel numero E; per la qual cosa l'vnità misura tante volte il numero E, per quante volte C misura A; e permutandosi, l'vnità misura il numero C, [a] come E misura A. Nell'istesso modo si proverà, che l'vnità misura D, come E misura B. Donde è manifesto, che il numero E misura il numero A, e misura ancora il numero B; si che il numero E sarà commune misura de i numeri A, & B; e perciò i numeri A, & B non sono numeri primi, [b] ma composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre i numeri A, & B gli habbiamo supposti frà di loro primi. Non dunque altri numeri minori di AB possono essere nella proportione di A à B, ed in conseguenza i numeri A, & B sono i minimi, come fù proposto dimostrare.

A
A B C D E

A.... B....
C----- D---
E----

a 15. del 7.
b 14. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Di tutti i numeri, che sono nella medesima proportione, i minimi sono frà di loro primi.

Siano

Siano i numeri A, & B, i minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proportione di A à B. Dico che sono frà di loro primi; cioè, che nissun'altro numero gli misura, fuor che l'vnità. Se non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello, se è possibile, il numero C, il quale misuri A tante volte, per quante vnità sono nel numero D; e misuri il numero B tante volte, per quante vnità sono nel numero E. Preso dunque il numero C tante volte, per quante vnità sono in D, a produrrà il numero A; e preso il medesimo numero C tante volte, per quante vnità sono in E, produrrà il numero B. Per la qual cosa, multiplicando il numero C per i numeri D, ed E, i prodotti saranno A, & B; e perciò il prodotto A al prodotto B b sarà come il multiplicante D al multiplicante E: ma i numeri D, ed E sono minori de i numeri A, & B, stante che sono parti di A, & B; i numeri dunque A, & B, che sono nella proportione di D ad E, non sono i minimi, ch'è contro all'ipotesi; mentre i numeri A, & B, gli habbiamo supposti minimi di tutti quelli, che sono nella medesima proportione. Non dunque il numero C è misura commune de i numeri A, & B. Per la qual cosa i numeri A, & B sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A ..... B .....
C -----
D ----- E ----

a 9. affioma

b 18. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri sono primi frà di loro, quel numero, che misura vno di essi, sarà numero primo rispetto all'altro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi; ed vn altro numero, come C, misuri il numero A. Dico che i numeri C, & B sono frà di loro primi. Se i numeri C, & B non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello, s'è possibile, il numero D. Perche il numero D misura C, ed il numero C, per ipotesi, misura A; il numero D a dunque misurerà il numero A; ma per la suppositione fatta, il numero D misura il numero B; sarà il numero D commune misura de i numeri A, & B: per la qual cosa i numeri A, & B, non sono frà di loro primi, b ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero D è commune misura de i due C, & B; ma i due C, & B sono frà di loro primi, il che era da dimostrarsi.

A ..... B .....
C ... D ----

a 12. affiom. del 7.

b 14. defin. del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se due numeri sono primi à qualche numero, il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, sarà ancora primo al medesimo numero.

Sia ciascuno de'numeri A, & B, primo al numero C; e multiplicando

A per

A per B, ouero B per A, il prodotto sia D. Dico che i numeri D, & C sono frà di loro primi. Se i numeri D, & C non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura: sia quello, se è possibile, il numero E, il quale misuri il numero D tante volte, per quante vnità sono nel numero F; composto dunque tante volte il numero E, per quante vnità sono nel numero F, tal composto sarà vguale al numero D; e perciò, multiplicando il numero E per il numero F, [a] il prodotto sarà il numero D. Ed all'incontro, multiplicando il numero F per il numero E, [b] il prodotto sarà similmente il numero D; ma il numero D è il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B; il prodotto dunque fatto dalla multiplicatione de i due E, & F, sarà vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B. Posto E come prima quantità, A seconda, B terza, ed F quarta. Essendo il prodotto della prima E, e quarta F, vguale al prodotto della seconda A, e terza B; sarà E ad A [c] come B ad F. In oltre, perche A, & C, per ipotesi, sono frà di loro primi; e per la fatta suppositione il numero E misura il numero C; i due numeri E, & A, [d] saranno frà di loro primi; e perciò i due E, & A [e] nella loro proportione sono i minimi: ma E ad A è come B ad F, in conseguenza E misurerà B [f] come A misura F. Hor perche E misura B, e per la fatta suppositione, misura ancora C; i due C, & B [g] non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi, mentre i due A, & B furono supposti primi al numero C. Non dunque il numero E è commune misura frà i due D, & C; ma i due D, & C sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

A ..... B ...
C .....
D .....
E ---- F ----

a 9. assioma del 7.
b 16. del 7.
c 19. del 7.
d 27. del 7.
e 23. del 7.
f 21. del 7.
g 14. defin. del 7.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se due numeri sono frà di loro primi, il prodotto fatto da vno in se medesimo, sarà primo all'altro.

Siano i due numeri A, & B frà di loro primi, e dalla multiplicatione di A in se medesimo se ne produca il numero C. Dico che i numeri C, & B sono frà di loro primi. Si esponga il numero D vguale al numero A; i numeri D, & B saranno frà di loro primi; e per l'antecedente propositione, il prodotto di D in A sarà primo al numero B: ma il prodotto di D, A, è vguale al prodotto di A in se medesimo, cioè vguale al prodotto C; sarà il prodotto C primo al numero B. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il prodotto fatto dalla multiplicatione di B in se medesimo è primo al numero A, come fù proposto dimostrare.

A .... B .....
C .....
D ....

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due numeri sono primi à due altri numeri, l'vno all'

altro ; ancora i prodotti fatti dalle loro multiplicationi ſono frà di loro primi.

Siano i due numeri A, & B, *i quali ſiano primi alli due* C, & D ; cioè *i due* A, & B, ogn'vno da per ſe, ſia primo al numero C ; ed *i* medeſimi A, & B, ſeparatamente ſiano primi al numero D ; e ſia E il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B ; come ancora il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due C, & D ſia F. Dico che i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi. Perche i due A, & B, per ipoteſi, ſono primi al numero C ; il prodotto de i due A, & B, cioè il numero E, [a] ſarà primo al numero C. Similmente eſſendo i due A, B, primi al numero D, il prodotto de i due B, A, cioè il numero E, [b] ſarà primo al numero D ; donde ciaſcuno de i due C, D, ſarà primo al numero E. Hor perche i due C, D, ogn'vno da per ſe, è primo al numero E, il prodotto de i due C, & D, cioè il numero F, [c] ſarà primo al numero E. Per la qual coſa i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

a 26. del 7.
b 26. del 7.
c 26. del 7.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se due numeri ſono primi frà di loro, e ciaſcuno di queſti ſi multiplichi in ſe medeſimo, ed ogn'vno multiplichi il ſuo prodotto; e di nuouo ogn'vno multiplichi il ſuo vltimo prodotto, e con queſt'ordine *in infinito*: i primi due prodotti ſono frà di loro primi; i ſecondi due prodotti ſono primi frà di loro; e con queſt'ordine i terzi ſono frà di loro primi; e ſempre gli eſtremi, cioè vltimi prodotti, ſono primi frà di loro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi ; e ſia multiplicato il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia C ; ſimilmente ſia multiplicato il numero B in sè medeſimo, ed il prodotto ſia D. Dico che i prodotti C, & D ſono frà di loro primi. Di più ſia multiplicato il prodotto C dal numero A, e ne venga il numero E ; e ſia multiplicato il prodotto D dal numero B, e ne venga il numero F. Dico parimente, che i prodotti E, ed F ſono frà di loro primi. E finalmente, multiplicandoſi i prodotti E, & F per li numeri A, & B ; cioè E ſi multiplichi per A, ed il numero F per B ; e gli auuenimenti ſiano G, ed H ; e queſti multiplicati per li medeſimi numeri A, & B, ne venghino i prodotti K, ed L. Dico che i prodotti G, ed H ſono frà di loro primi ; come ancora i prodotti K, ed L ſono primi frà di loro. Perche i due numeri A, B ſono frà di loro primi, il prodotto C, fatto dalla multiplicatione di A in ſe medeſimo [a] ſarà primo all'altro

A	3	2	B
C	9	4	D
E	27	8	F
G	81	16	H
K	243	32	L

a 27. del 7.

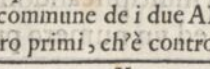
tro numero B. E considerando i due numeri C, & B frà di loro primi, il prodotto fatto del numero B, in se medesimo, cioè il numero D, [b] sarà primo al numero C; dal che i due prodotti C, & D sono frà di loro primi, ch'era prima da dimostrarsi. b 27. del 7.

Di nuouo, perche B, ed A sono frà di loro primi, il prodotto di B in se medesimo, cioè il numero D, [c] sarà primo al numero A: fù dimostrato il prodotto C essere primo al numero B; saranno i due A, & C, primi al numero B, ed ancora al numero D; e perciò i due A, & C, sono primi à i due B, & D. Per la qual cosa il prodotto de i due A, & C, [d] cioè il numero E, sarà primo al prodotto de i due B, & D, cioè al numero F, e così i due E, ed F sono frà di loro primi. In oltre perche A, & C sono primi al numero B, il prodotto de i due A, & C, cioè il numero E, [e] sarà primo al numero B; similmente perche i due B, & D sono primi al numero A; sarà il prodotto de i due B, & D, cioè il numero F, [f] primo al numero A: ma i due A, et B, per ipotesi, sono frà di loro primi, & i due E, ed F sono stati dimostrati primi frà di loro; in conseguenza i due A, ed E sono primi alli due B, ed F; ed il prodotto fatto da i due A, ed E, cioè il numero G, [g] sarà primo al prodotto fatto da i due B, ed F, cioè al numero H; donde i numeri G, ed H sono frà di loro primi. Finalmente, essendo i due A, ed E primi al numero B; il prodotto fatto da essi, cioè il numero G, [h] sarà primo al numero B. E similmente, perche i due F, & B sono primi al numero A; il prodotto de i medesimi F, & B, [K] cioè H, sarà primo al numero A: mà i numeri A, & B, per ipotesi, sono frà di loro primi; ed i numeri G, H, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro primi; i numeri dunque A, & G sono primi à i numeri B, ed H. dal che il prodotto de i due A, & G, cioè il numero K, [l] sarà primo al prodotto de i due B, ed H, cioè al numero L. Il medesimo si proverà, se le multiplicationi ascendessero à maggior moltitudine, il che era da dimostrarsi. c 27 del 7. d 28. del 7. e 26. del 7. f 26. del 7. g 28. del 7. h 26. del 7. K 26. del 7. l 28. del 7.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se due numeri sono frà di loro primi, giunti insieme, il loro aggregato sarà primo all'vno, ed all'altro; e se l'aggregato di due numeri, giunto insieme, sarà primo ad vno di essi, quei numeri sono frà di loro primi.

Siano prima i numeri AB, BC, frà di loro primi. Dico che, giunti insieme, il loro aggregato AC sarà primo al numero AB, ed ancora al numero BC. Se i numeri AC, AB non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello il numero D; il numero D dunque misura AC, e misura la parte AB; e perciò misurerà ancora [a] l'auanzo BC; si che il numero D sarà misura commune de i due AB, BC; dal che i numeri AB, BC non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Non dun-



a 12. assioma del 7.

que il numero D è commune misura de i due AC, AB; mà i due AC, AB sono frà di loro primi. Nell'istesso modo si proverà, che i due AC, BC sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo supposto che il numero AC sia primo al numero AB, ouero BC. Dico che i numeri AB, BC sono frà di loro primi. Se non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia dunque il numero D la loro commune misura. Perche il numero D misura ambidue i numeri AB, BC; misurerà ancora [b] il tutto AC; dal che il numero D sarà commune misura de i due AC, AB; e perciò i numeri AC, AB non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero D è commune misura de i due AB, BC; mà i numeri AB, BC sono frà di loro primi, il che era da dimostrarsi.

A . . . . . B C
D ---

b 20. assiom. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, ne segue, che se vn numero composto di due numeri è primo ad vno di quelli, sarà ancora primo all'altro; poiche se i due AC, AB, sono frà di loro primi, per quel che si è dimostrato nella seconda parte, saranno i due AB, BC frà di loro primi; e per quel che si è dimostrato nella prima parte, i due AC, CB sono frà di loro primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Ogni numero primo sarà primo ad ogni numero, che non misura.

Sia il numero primo A, il quale non misuri il numero B. Dico che i numeri A, & B sono frà di loro primi. Se i numeri A, & B non sono frà di loro primi, qualche numero, oltre l'vnità, sarà loro commune misura; sia quello il numero C; il numero C dunque misurerà il numero B, e misurerà ancora il numero A; dal che il numero A non sarà primo; ch'è contro all'ipotesi: non dunque il numero C è commune misura delli due A & B, mà i numeri A, & B sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A . . . . . B . . . . . .
C ---

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

Se due numeri, multiplicandosi frà di loro, producono vn altro numero; ed vn numero primo misuri il prodotto;

quel

quel numero primo misurerà ancora vno di quei numeri multiplicati.

Siano i due numeri A, & B, *i quali*, multiplicandosi frà di loro, produchino il numero C; e *supposto che il* numero primo D misuri il prodotto C. Dico che il numero primo D, se non misura ambidue i numeri A, & B, almeno ne misurerà vno solo. Supposto che D non misuri *il* numero A, i numeri A, & D, [a] saranno primi frà di loro. In oltre misurando D il numero C, lo misurerà secondo qualche moltitudine di vnità; lo misuri, per esempio, tante volte, per quante vnità sono nel numero E; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due numeri D, ed E, vguale al numero C: ma il prodotto fatto da i due A, & B, per ipotesi, è il numero C; sarà il prodotto fatto da i due D, ed E, vguale al prodotto fatto da i due A, & B; dal che il primo D al secondo A [b] sarà come il terzo B al quarto E: ma i due D, ed A, [c] per quel che si disse, sono primi frà di loro, in conseguenza [d] saranno i minimi nella loro proportione di D ad A; per la qual cosa misureranno vgualmente gli altri, che sono nella proportione di D ad A: [e] ma si è dimostrato, che D ad A è come B ad E, i minimi dunque D, ed A misureranno vgualmente i numeri B, ed E; cioè l'antecedente D misura l'antecedente B, ed *il conseguente A misura il conseguente* E. Per la qual cosa se D non misura A, almeno misurerà *il numero B, come fù* proposto dimostrare.

A . . . . B . . . . . C . . . . . D . . . E . . . . . .

a 31. del 7.

b 19. del 7.
c 31. del 7.
d 23. del 7.
e 21. del 7.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Ogni numero *composto* è misurato da qualche numero primo.

Sia qualunque numero composto A. *Dico che il numero A è misu*rato da qualche numero primo. Sia dunque misurato *il* numero A da qualche numero B; se B è numero primo, si sarà sodisfatto à quanto si è proposto. Se poi B è numero composto, questo sarà misurato da qualche altro numero C, il quale ò sarà numero primo, ouero numero composto. Se è numero primo, perche C misura B, ed il numero B misura A, il numero C [a] misurerà ancora il numero A; ed in tal caso il numero A sarà misurato dal numero primo C, ch'è il nostro proposto. Mà se C non è numero primo, necessariamente qualche altro numero lo misurerà; e perche *il numero* non si diminuisce in infinito, si peruerrà finalmente à qualche numero, che nissun altro numero lo misurerà; cioè che sarà misurato solamente dall'vnità; per la qual cosa quello sarà numero primo, *il quale*, perche misura [b] tutti gl'antecedenti, misurerà ancora il numero composto A, come fù proposto dimostrare.

A . . . . . B . . . . . C . . .

a 11. assioma del 7.

b 11. assiom. del 7.

In altro modo. Perche A, per ipotesi, è numero composto, perciò sarà misurato da *qualche numero*, ouero da più numeri. Sia il minimo

di

di quelli, che lo misurano, il numero B. Dico che il minimo B è numero primo. Se B non è numero primo, lo misuri, s'è possibile, qualche numero C. Perche C misura il numero B, ed il numero B misura il numero A; il numero C [c] misurerà ancora il numero A: mà il numero B è supposto il minimo di tutti quelli, che misurano il numero A, sarà dunque C maggiore di B, dal che il numero maggiore C misura il minore B, ch'è impossibile: non dunque il numero B è composto, mà è numero primo, come fù proposto dimostrare,

A . . . . . .
B . . . C ---

[c] 11. assioma del 7.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Ogni numero ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo.

Figura antecedente.

Sia proposto qualunque numero A. Dico che il numero A, ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo. Perche ogni numero ò è composto, ouero è numero primo; se il numero A è numero primo, il tutto sarà concluso; se poi è numero composto, per l'antecedente propositione, qualche numero primo lo misura; e perciò ogni numero ò è primo, ouero è misurato da qualche numero primo, come fù proposto.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXXV.

Dati quanti numeri si vogliano, ritrouare i minimi, che hanno la medesima proportione con i dati numeri.

Siano quanti numeri si vogliano A, B, C, i quali habbiano quali si siano proportioni; cioè, ò che la proportione di A à B sia come quella di B à C, ò le proportioni di A à B, e di B à C, non siano simili; e si vogliano ritrouare altretanti numeri, i quali siano i minimi nelle medesime proportioni di A à B, e di B à C. Perche i numeri A, B, C, ò sono frà di loro primi, ouero sono cõposti; se sono frà di loro primi, per la 24. propositione di questo, i medesimi A, B, C saranno i minimi nelle loro proportioni di A à B, e di B à C, ch'è il nostro proposto. Se poi non sono frà di loro primi, si troui [a] la loro massima commune misura, che sia il numero D, la quale misuri i numeri A, B, C secondo le vnità de i numeri E, F, G. Dico che i numeri E, F, G, sono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C. Perche il numero D misura i numeri A, B, C, per li numeri E, F, G, multiplicando D, ogn'vno de' numeri E, F, G, [b] produrrà i numeri A, B, C; e per la 18. propositione di questo, i numeri E, F, G haueranno le

A . . . . . B . . . . C . . . . . .
D . .
E . . . F . . G . . . .
H --- I --- K ---
L ----

[a] 3. del 7.

[b] 9. assioma del 7.

mede-

medesime proportioni, che hanno i numeri A, B, C. In oltre se i numeri E, F, G non sono i minimi, altri numeri, nelle medesime proportioni di E ad F, e di F à G, cioè di A à B, e di B à C, minori di E, F, G, saranno i minimi. Siano quelli, s'è possibile, i minimi H, I, K, i quali per la 21. propositione di questo, misureranno vgualmente i numeri A, B, C. Gli misurino, per essempio, secondo qualche numero L, si che multiplicando L per li numeri H, I, K, produrrà [c] i numeri A, B, C; ed all'incontro il numero L misurerà [d] i numeri A, B, C, per li numeri H, I, K. Si considerino quattro numeri, de quali il primo sia E, il secondo H, il terzo L, ed il quarto D. Perche il primo E, multiplicando il quarto D, produce A; ed il secondo H, multiplicando il terzo L, produce il medesimo numero A; sarà il prodotto del primo E nel quarto D, vguale al prodotto del secondo H nel terzo L: e perciò sarà il primo E al secondo H, [e] come il terzo L al quarto D. Mà il numero E, per la fatta suppositione, è maggiore di H; il numero dunque L sarà maggiore di D. Hor perche L misura i numeri A, B, C, essendo maggiore di D, non sarà D la massima commune misura de i numeri A, B, C, ch'è contro all'ipotesi: non dunque altri numeri minori de gli esposti E, F, G, sono minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C; mà i medesimi E, F, G sono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C, che era da farsi, e dimostrarsi.

c 9. assioma del 7.

d 8. assioma del 7.

e 19. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che quanti si voglia numeri sono misurati dalla loro massima commune misura per numeri, i quali sono i minimi nella proportione de i numeri misurati; stante che si è dimostrato, che la massima commune misura D misura i numeri A, B, C, per i numeri E, F, G, i quali sono minimi nella continuata proportione di A à B, e di B à C.

SCOLIO.

Perche spesse volte bisognerà trouare due numeri minimi in vna data proportione, perciò aggiungo quì il seguente problema, come fà il Commandino, ed il Clauio.

Dati quanti si voglia numeri continuamente proportionali, ritrouare due numeri minimi nella proportione de i dati numeri.

Siano i dati numeri A,B,C,D,E, in continua proportione; cioè che A à B sia come B à C; & B à C come C à D; e C à D come D ad E; e si vogliano ritrouare due numeri minimi nella proportione di A à B. Se i numeri A, & B sono numeri primi, quelli saranno i minimi nella proportione di A à B;

A	B	C	D	E
16	24	36	54	81
H 8				
		2	3	
		F	G	

a 2.del 7. *ma se non saranno numeri primi, si troui a la massima commune misura de i due A, & B, che sia il numero H; misuri poi H il numero A per il numero F; ed il medesimo numero H misuri B per il numero G; per il Corollario antecedente, i numeri F, & G saranno i minimi nella proportione di A à B, e di B à C &c.*

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXXVI.

Dati due numeri, ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da quelli.

Siano dati qualunque numeri A, & B, e s'habbia da ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da i proposti numeri A, & B. Supposto prima che i dati numeri A, & B siano frà di loro primi, ed il numero A multiplichi il numero B, ouero il numero B multiplichi il numero A, e produca il numero C. Dico che il numero C è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i numeri A, & B. Che i numeri A, & B misurino il numero C, è manifesto; poiche nascendo il numero C dalla multiplicatione di A in B, ò di B in A, sarà il numero C composto di tante volte A, per quante vnità sono nel numero B; e sarà ancora composto di tante volte B, per quante vnità sono nel numero A; e perciò il numero C a è misurato dal numero A, per il numero B, ed è misurato dal numero B per il numero A. Che poi C sia il minimo di tutti quelli, che sono misurati da A, & B, lo dimostraremo in questo modo. Se il numero C non è il minimo, qualche altro numero minore di C sarà misurato da i numeri A, & B; sia quello il numero D, il quale sia misurato dal numero A per il numero E, e sia misurato da B, per il numero F; si che A, multiplicando E, b produrrà il numero D; ed il numero B, multiplicando F, produrrà il medesimo numero D: per la qual cosa il prodotto di A in E sarà vguale al prodotto di B in F. Si considerino i quattro numeri, il primo de'quali sia A, il secondo B, il terzo F, ed il quarto E. Perche il prodotto del primo A nel quarto E è vguale al prodotto del secondo B nel terzo F, sarà il primo A al secondo B, come il terzo F al quarto E; e perche i due A, & B gli habbiamo supposti numeri primi, perciò d saranno i minimi nella loro proportione di A à B, ed in conseguenza i numeri A, & B e misureranno vgualmente tutti gli altri, che hanno la medesima proportione: ma A à B si disse essere come F ad E, i numeri dunque A, & B misurano vgualmente i numeri F, ed E; cioè

a 7.assiom. del 7.

b 9.assiom. del 7.

c 19. del 7.

d 23. del 7.

e 21. del 7.

l'ante-

l'antecedente A misura l'antecedente F, ed il conseguente B misura il conseguente E. In oltre perche A, multiplicando B, produce, per ipotesi, C, e multiplicando E produce, per costruttione, D, sarà la proportione di B [f] ad E come quella di C à D: ma B, per quel che si è dimostrato, misura E, dunque C misurerà il numero D; fù supposto D minore di C, il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri A, & B misurano altro numero minore di C; ma il minimo, che misurano, sarà C, che era da dimostrarsi nel primo luogo. f 17. del 7.

Di nuouo non siano i numeri A, & B frà di loro primi. Si trouino i due numeri C, & D [g] minimi nella proportione di A à B; i quattro numeri A,B,C,D sono proportionali, ed il prodotto de gli estremi A, & D, [h] sarà vguale al prodotto de i medij C, & B, sia quel prodotto il notato E. Dico che il numero E è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i due A,& B. Perche A, multiplicando D, produce il numero E; ed il numero B, multiplicando C, produce l'istesso numero E; perciò [k] i numeri A, & B misurano il numero E. Che finalmente il numero E sia il minimo di quelli, che sono misurati da A, & B, si proua in questo modo. Se il numero E non è il minimo, qualche altro numero minore di E sara misurato da A, & B; sia quello, se è possibile, il numero F, il quale sia misurato da A per il numero G, e sia misurato da B per il numero H: il prodotto di A in G [l] sarà vguale ad F; ed il prodotto di B in H sarà vguale all'istesso numero F; e perciò il prodotto di A in G sarà vguale al prodotto di B in H. Si considerino quattro numeri, cioè A primo, B secondo, H terzo, e G quarto. Perche il prodotto del primo A nel quarto G è vguale al prodotto del secondo B nel terzo H, sarà il primo A al secondo B, [m] come il terzo H al quarto G. E perche i numeri C, & D sono minimi nella proportione di A à B; ouero di H à G; perciò i numeri C, & D [n] misureranno vgualmente i numeri G, ed H; cioè l'antecedente C misurerà l'antecedente H, ed il conseguente D misurerà il conseguente G. Si considerino i due D, & G come numeri multiplicati, ed A multiplicante. Perche A multiplicando D, produce E, ed il medesimo numero A, multiplicando G, produce F; sarà D à G [o] come E ad F; ma D misura G, per quel che si è dimostrato, il numero E misura il numero F; fù supposto F minore di E; il numero maggiore dunque misura il minore, ch'è impossibile. Non dunque F è il minimo de i numeri misurati da A, & B; ma il minimo sarà il numero E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

A ..... B .....
C ..
D ...
E .....
F ----------
G ----- H ----

g 35. del 7.
h 19. del 7.
K 7. assioma del 7.
l 9. assioma del 7.
m 19. del 7.
n 21 del 7.
o 17. del 7.

COROLLARIO.

Quindi è, che se due numeri, come A, & B, multiplicano due numeri minimi, come C, & D, che sono nella medesima proportione; multiplicando il minore A per il

maggiore D, ed il maggiore B per il minore C, nell'vna, e nell'altra multiplicatione producono il numero E, ch'è il minimo misurato da i due A, & B.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se vn numero è misurato da due numeri, sarà ancora misurato dal numero minimo, ch'è misurato da quelli due.

Misurino i numeri A, & B qualunque numero CD, e di tutti i numeri, che possono essere misurati da i medesimi A, & B, il minimo sia il notato E. Dico che il numero E misura il numero CD. Se il numero E non misura il numero CD, detraendo dal numero CD tante volte il numero E, per quanto si può, quel, che resta, sarà minore del numero E; fatta dunque la detrattione del numero E quanto si può, e resti, s'è possibile il numero FD, minore del numero E, in modo che il numero E misuri il numero CF. Perche tanto il numero A, quanto il numero B, misura il numero E; ed il numero E misura il numero CF; ogn'vno dunque de i numeri A, & B, misurerà [a] il numero CF; ma ciascuno de' numeri A, & B, per ipotesi, misura tutto il numero CD; ogn'vno de i numeri A, & B, [b] misurerà ancora il rimanente FD; fù supposto il numero FD minore di E, dunque i numeri A, & B misurano vn numero minore di E; per la qual cosa il numero E non è il minimo di tutti quelli, che sono misurati da i numeri A, & B, il che è contro all'ipotesi, mentre il numero E fù supposto il minimo. Non dunque, detratto da CD quanto si può il numero E, resta quantità alcuna minore di E; per la qual cosa il numero minimo E misura il numero CD, come fù proposto dimostrare.

A .. B ...
C ..... F ..... D
E .....

a 11. affioma del 7.

b 12. affiom.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXVIII.

Dati tre numeri, ritrouare il minimo numero, che quelli misurano.

Siano dati tre numeri, come A, B, C, e si voglia ritrouare il minimo numero, che misurano i tre A, B, C. Si troui [a] il minimo numero misurato da due di quelli; e supposto che il numero D sia il minimo misurato da i due A, & B; se il numero D è misurato dal numero C, il numero D sarà il minimo misurato da i tre A, B, C; se il numero D non è

A ... B .... C .....
D .....
E ---------

a 36. del 7.

il

il minimo, misurino i numeri A, B, C, qualche altro numero E, minore del numero D. Perche i due A, & B, misurano il numero E minore di D, non sarà il numero D il minimo misurato da i due A, & B, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto il numero D essere il minimo di quelli misurati da i numeri A, & B: non dunque il numero E è il minimo de' numeri, che sono misurati da i numeri A, B, C, mà il minimo sarà il numero D.

Di nuouo, supposto che il numero C non misuri il numero D, in tal caso si troui il numero E, [b] che sia il minimo misurato da i numeri C, & D. Dico che il numero E sarà il minimo di quelli, che i numeri A, B, C misurano. Perche i numeri A, & B, per costruttione, misurano il numero D, ed il numero D misura il numero E; i numeri dunque A, & B [c] misurano il numero E; mà il numero C, per costruttione, misura il numero E, perciò tutti tre i numeri A, B, C misurano il numero E. Finalmente se il numero E non è il minimo di tutti gli altri misurati da i numeri A, B, C, misurino i numeri A, B, C, se è possibile, qualche altro numero F, minore del numero E. Perche il numero D è il minimo di quelli misurati da i due A, & B, ed i numeri A, & B misurano il numero F, ancora il numero D, [d] ch'è minimo, misurerà il numero F. In oltre perche il numero E, per costruttione, è il minimo, ch'è misurato da i due C, & D; ed i numeri C, & D misurano il numero F; il numero E dunque, ch'è minimo, misurerà [e] il numero F: mà il numero F è supposto minore del numero E; il maggiore misurarebbe il minore, il che è impossibile: non dunque il numero F è il minimo di quelli misurati da i tre A, B, C; mà il minimo sarà il numero E, che era da farsi, e dimostrarsi.

b 36. del 7.

c 11. assiom. del 7.

d 37. del 7.

e 37. del 7.

A.. B... C....
D.....
E.....
F---------

COROLLARIO.

Perche il numero E è il minimo di quelli misurati da i tre numeri A, B, C; e, supponendo, che il numero F sia misurato da i medesimi numeri A, B, C, fù prouato, che il minimo E misura il numero F; sarà manifesto, che se vn numero è misurato da tre numeri, il medesimo sarà ancora misurato dal minimo, ch'è misurato da quei tre numeri.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

Se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato hauerà la parte nominata da quello, che misura.

Sia il numero A misurato dal numero B. Dico che il numero A hà la

parte denominata dal numero B. Sia misurato il numero A dal numero B tante volte, per quãte vnità sono nel numero C; l'vnità misurerà tante volte il numero C, per quãte volte il numero B misura il numero A; e per-

A .....
B .... C ...

a 15 del 7. mutando, l'vnità misurerà il numero B, [a] come il numero C misura il numero A; e perciò tal parte sarà l'vnità del numero B, quale parte è il numero C del numero A: mà l'vnità è parte di B denominata dal numero B, come se l'vnità fosse terza, ò quarta, ò quinta parte, &c. di B; sarà ancora C parte denominata da A; cioè sarà C terza, ò quarta, ò quinta, ò altra parte di A, denominata dal numero B; cioè il numero C sarà tale parte di A, quale denomina B con le sue vnità. Si che se B conterrà quattro vnità, C si dirà essere la quarta parte di A; se B contiene cinque vnità, si dirà C essere la quinta parte di A; e con quest'ordine se B contenesse più, ò meno vnità. Per la qual cosa se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato hà la parte denominata dal numero, che misura.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XL.

Se vn numero hà qualunque parte, il numero denominato da quella parte, lo misura.

Sia B parte del numero A, *dalla quale sia denominato il numero C. Dico che il numero C misura il numero A. Perche B è parte di A, perciò B misura il numero A; e per l'antecedente propositione hauerà A la parte denominata da B: ma, per ipotesi, il numero C è la parte denominata da B, in conseguenza C sarà parte di A; per la qual cosa il numero C misura il numero A, che era da dimostrarsi.*

A .....
B ... C .....

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XLI.

Ritrouare vn minimo numero, che habbia le parti date.

Siano le parti proposte A,B,C, e si habbia à ritrouare il minimo numero, che habbia le parti A,B, & C.

Siano i numeri D,E,F quelli, che denominano le parti A, B, C; si

D .. A metà
E ... B terza parte
F .... C quarta parte

a 38. del 7. troui il numero G, [a] che sia il minimo di quelli misurati da i numeri D,E, F. Dico che il numero G è il minimo, che contiene

G .....
H ----------

le parti A,B,C. Perche i numeri D,E, F misurano il numero G, hauerà

b 39. del 7. G [b] le parti denominate da essi numeri D,E,F; ma le parti denominate da essi numeri D, E, F, sono le date A,B,C; il numero dunque G hauerà le

parti

parti date A,B,C. In oltre dico che il numero G è il minimo di quelli, che contengono le parti A, B, C : perche se non è il minimo, qualche altro numero minore di G sarà il minimo, che conterrà le parti A, B, C; sia quello il numero H. Perche il numero H hà le parti A,B,C, esso numero H c sarà misurato da i numeri D, E, F, che sono denominati dalle parti A,B,C; ma i numeri D,E,F misurano il numero G, essendo H minore di G, non sarà G il minimo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque alcun numero minore di G hà le parti date; ma il numero G sarà il minimo, che hà le parti A,B,C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 4. del 7.

Fine del Settimo Elemento.



EVCLI-

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO OTTAVO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, gli estremi de' quali siano primi frà loro; quelli saranno i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione.

SIANO *quanti numeri si vogliano A, B, C, D, continui proportionali, li di cui estremi A, & D siano primi frà loro. Dico che i numeri A,B,C, D sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione. Se i numeri A,B,C, D non sono i minimi, altri numeri nella medesima proportione saranno minimi; siano quelli, s'è possibile, i notati E,F,G,H. Perche i numeri E,F,G,H hanno la medesima proportione de' numeri A, B, C,D, sarà per l'egualità, la proportione di A à D* [a] *come quella di E ad H; ma i due A, & D* [b] *sono minimi nella proportione di A à D (stante che, per ipotesi sono numeri primi) i numeri dũque A, & D* [c] *misureranno vgualmente i numeri E, ed H; cioè l'antecedente A misura l'antecedente E, ed il conseguente D misura il conseguente H: ma i due E, ed H sono supposti minimi nella proportione di E ad H, ouero di A à D; i maggiori dunque A, & D misurano i minori E, ed H, ch'è impossibile. Non dunque i numeri E,F,G, H sono i minimi nella proportione de i numeri A, B, C, D; ma i minimi sono i proposti A,B,C,D, ch'era da dimostrarsi.*

a 14. del 7.
b 23. del 7.
c 23. del 7.

A ..... E ---
B ..... F ----
C ..... G -----
D ..... H --------

SCOLIO.

L'antecedente propositione si può fare più vniuersale nel seguente modo.

Se siano quanti numeri si vogliano ò continui, ò non continui proportionali, de'quali gli estremi siano numeri frà loro primi; quelli sono i minimi di tutti gli altri, che, esposti col medesimo ordine, hanno le medesime proportioni.

Siano quanti numeri si vogliano, A, B, C, D, i di cui estremi A, & D siano frà loro primi. Dico che i numeri A,B,C,D sono i minimi di tutti gli altri, che esposti col medesimo ordine, hanno le medesime proportioni de i numeri A,B,C,D. Se i numeri A,B,C,D non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati E,F,G,H. Perche A à B è come E ad F, e la proportione di B à C è come quella di F à G; ed ancora C à D è come G ad H; sarà per l'egualità A à D [a] come E ad H; ma i due A, & D sono nella loro proportione minimi, stante che sono primi; perciò misureranno [b] vgualmente i numeri E, ed H; ma i numeri E, ed H sono [c] supposti i minimi, i numeri dunque A, & D maggiori misureranno i minori E, ed H, ch'è impossibile. Non dunque i numeri E,F,G,H sono i minimi nelle proportioni di A,B,C,D; ma i minimi saranno essi numeri A,B,C,D, ch'era da dimostrarsi.

A ..... E ---
B ..... F -------
C .... G ----
D ..... H ------

[a] 14. del 7.
[b] 23. del 7.
[c] 21. del 7.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Data qualunque proportione, ritrouare quanti numeri si vogliano continui proportionali, che siano i minimi nella data proportione.

Sia data la proportione ne i minimi numeri, come A à B, e si habbiano à ritrouare quanti numeri si vogliano continui proportionali, che siano i minimi nella proportione di A à B. Si multiplichi il numero A in se medesimo, ed il prodotto sia C; similmente si multiplichi il numero B in se medesimo, ed il prodotto sia E;

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

poi si multiplichi il numero A per il numero B, ed il prodotto sia D. Dico prima che i tre C, D, E sono i minimi nella proportione di A à B. Si considerino i numeri A, & B come numeri multiplicati, ed A sia il multiplicante; perche il prodotto del multiplicante A nel numero

mul-

multiplicato A è il numero C; ed il prodotto del multiplicante A nel multiplicato B è il numero D; sarà il prodotto C [a] al prodotto D come il multiplicato A al multiplicato B. Similmente prosi i numeri B, ed A come numeri multiplicati, ed il multiplicante sia B. Perche i prodotti fatti dal multiplicante B ne i numeri multiplicati B, ed A, sono, per costruttione, E, & D, sarà il prodotto D al prodotto E [b] come il numero multiplicato A al numero multiplicato B: mà fù dimostrato A à B essere come C à D; sarà C à D [c] come D à E; e perciò i tre C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B. In oltre perche i numeri A, & B, per ipotesi, sono nella loro proportione minimi, perciò [d] sono frà di loro primi; e perche dalla multiplicatione de i numeri primi A, & B in se medesimi, ne vengono i prodotti C, ed E; saranno i prodotti C, ed E [e] frà loro primi; e per la prima propositione di questo, i tre numeri proportionali C, D, E sono i minimi nella loro proportione di A à B.

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 24. del 7.
e 29. del 7.

Di nuouo si multiplichi il numero A in ciascuno de i tre prodotti C, D, E, e ne risultino i prodotti F, G, H; e si multiplichi il numero B nell'vltimo E, ed il prodotto sia K. Dico che i quattro numeri F, G, H, K sono i minimi nella continua proportione di A à B. Perche il numero A, multiplicando i tre numeri C, D, E, produce i numeri F, G, H, per la 17. propositione del settimo, i prodotti F, G, H hanno l'istessa proportione, che i numeri multiplicati C, D, E: mà i numeri C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B; i numeri dunque F, G, H sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di nuouo, perche i i numeri A, & B, multiplicando il medesimo numero E, producono i due H, & K, per la 18. propositione del 7, il prodotto H al prodotto K sarà come il multiplicante A al multiplicante B, e perciò i numeri F, G, H, K, sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di più, essendo i numeri A, & B minimi nella loro proportione, per la 24. propos. del 7, saranno frà di loro primi. E perche dalle multiplicationi di A, & B in se medesimi, ne sono prodotti i numeri C, ed E; e dalle multiplicationi di A in C, e di B in E, ne sono risultati i numeri F, & K (che sono estremi delle continue proportionali F, G, H, K) per la 29. propos. del 7, gli estremi F, & K sono primi frà loro; e per la 1. propositione di questo i numeri F, G, H, K, sono i minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di A à B.

		A 2	B 3		
	C 4		D 6		E 9
F 8		G 12		H 18		K 27
L 16		M 24		N 36		P 54		Q 81

Nell'istesso modo, multiplicando i quattro numeri F, G, H, K per il numero A, e ne vengano i prodotti L, M, N, P, saranno i prodotti L, M, N, P [a] nella proportione de i numeri multiplicati F, G, H, K; cioè nella proportione di A à B. Poi si multiplichi il numero B nel numero K, ed il prodotto sia Q; perche i numeri A, & B, multiplicando il medesimo numero K, producono i numeri P, Q, sarà il prodotto P al prodotto Q [b] come il multiplicante A al multiplicante B; dal che i numeri L, M, N, P, Q

a 17. del 7.
b 18. del 7.

sono

sono continui proportionali nella proportione di A à B. Finalmente perche i minimi numeri A, & B [c] sono frà loro primi, e questi multiplicati in se medesimi producono i numeri C, ed E; e multiplicando i medesimi A, & B, cioè A in C, & B in E, producono i numeri F, & K; e similmente multiplicando A in F, & B in K, producono i numeri L, & Q (che sono estremi de i numeri continui proportionali L, M, N, P, Q) gli estremi L, & Q [d] saranno frà di loro primi, ed in conseguenza i numeri L, M, N, P, Q, [e] saranno i minimi nella proportione di A à B. Non altrimente si farà se si volessero trouare altri numeri continui proportionali, che siano minimi nella proportione di A à B: poiche multiplicando i cinque L, M, N, P, Q, per il numero A, e poi multiplicato l'vltimo Q per il numero B, i sei numeri, che ne verranno, haueranno le medesime conditioni sudette; il che si dimostrerà nel medesimo modo: e con quest'ordine procedendo si possono ritrouare quanti numeri si vogliono minimi nella continua proportione di A à B; ch'era da farsi e dimostrarsi.

c 24. del 7.
d 29. del 7.
e 1. del 8.

SCOLIO.

Tutto quello, che nell'antecedente propositione si è fatto con le multiplicationi del numero A, si può fare col numero B; e quello, che si è fatto col numero B, si farà col numero A; cioè multiplicando il numero B ne i tre E, D, C, se ne producono i numeri K, H, G; e multiplicando il numero A per l'vltimo C, se ne produce il numero F; similmente, multiplicando il numero B ne i numeri K, H, G, F, se ne producono i numeri Q, P, N, M, e multiplicando il numero A per l'vltimo numero F, se ne produce il numero L.

COROLLARIO I.

Perche dalla multiplicatione di A in se medesimo, e di B in se medesimo, se ne producono i numeri quadrati C, ed E; ed i numeri continui proportionali C, D, E, sono i minimi nella proportione di A à B, sarà manifesto, che quando tre numeri continui proportionali sono i minimi nella loro proportione, i loro estremi sono numeri quadrati; similmente, perche multiplicando il numero A per il suo quadrato C, ed il numero B per il suo quadrato E, se ne producono i numeri cubi F, & K, che sono estremi de i quattro numeri F, G, H, K, minimi nella continua proportione di A à B; chiaramente appariſce, che se quattro numeri continui proportionali sono minimi nella loro

proportione, i loro estremi sono numeri cubi. E con quest' ordine, se i minimi numeri continui proportionali sono cinque, i loro estremi sono quadrati; se saranno sei, i loro estremi saranno numeri solidi, che cadono sotto altre denominationi, come à pieno si parlerà nel nostro trattato dell'Algebra. *quadrati

COROLLARIO II.

Perche i numeri intermedij de gli antedetti numeri continui proportionali nascono dalle multiplicationi de' minimi numeri A, & B; cioè D nasce dalla multiplicatione di A in B, il numero G dalla multiplicatione di D in A; cioè dal prodotto di A in B, multiplicato per A; ed il numero H nasce dalla multiplicatione di E in A, *cioè dal quadrato di B, multiplicato per A; e nell'istesso modo gli altri medij nascono dalle multiplicationi di A ne i numeri F, G, H, K;* percio tutti i numeri *intermedij D, G, H, M, N, P* saranno misurati *da i minimi numeri A, & B.* Dond'è manifesto, che due *minimi numeri in* vna data proportione misureranno tutti i numeri medij di quanti si voglia numeri continui proportionali, che saranno minimi nella medesima data proportione.

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

Se quanti numeri si vogliano continui proportionali sono i minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proportione con essi, i loro estremi saranno frà *di loro* primi.

Siano i numeri A, B, C, D continui proportionali, *i quali* siano minimi nella loro proportione di A à B, onero B à C &c. Dico che gli estremi A,

mi A, & D, sono frà di loro primi.

Si trouino due numeri [a] come E, ed F, che siano i minimi nella proportione di A à B, ouero di B à C, ò pure di C à D; e secondo il metodo tenuto nell'antecedente propositione, si trouino i tre numeri G,H,K continui proportionali, che siano minimi nella proportione di E ad F; e di nuouo se ne trouino quattro altri, ò cinque altri, e quanti bisognano, fino à tanto, che si peruiene ad vna moltitudine di termini, vguale alla moltitudine de'termini dati A, B, C, D; e supposto che si sia peruenuto à quella moltitudine, che si cerca, e siano quelli i notati L,M,N,P, i quali siano continui proportionali, e siano minimi nella proportione di E ad F. Perche la moltitudine de' termini L,M,N,P è vguale alla moltitudine de'termini A, B, C,D; e gli vni, e gli altri sono minimi nella proportione di E ad F; non potendosi dare il minore del minimo, ciascuno de'termini L,M,N,P sarà vguale à quello, che gli corrisponde ne i dati A,B,C,D; cioè L sarà vguale ad A, il numero M vguale à B, il notato N vguale à C, ed il numero P vguale al numero D. E perche dalla multiplicatione de'numeri E, ed F in se medesimi, secondo quel che si disse nell'antecedente propositione, se ne producono i numeri G, & K; e dalla multiplicatione di E in G, e di F in K, se ne producono i numeri L, & P; per la 29. propos. del 7, i numeri L, & P sono frà di loro primi: ma i numeri L, & P sono vguali à i due A, & D; i due estremi dunque A, & D sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

A 8 B 12 C 18 D 27
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

[a] Scol. alla 35. del 7.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date quante proportioni si vogliano ne i minimi numeri; ritrouare i numeri minimi, che successiuamente siano nelle proportioni date.

Siano date prima due proportioni ne i minimi numeri, come A à B, e come C à D; e si vogliano ritrouare tre minimi numeri, che successiuamente siano nelle proportioni date; cioè che il primo al secondo sia come A à B; e che il secondo al terzo sia come C à D. Si troui il minimo numero E, [a] il quale sia misurato dal secondo B, e dal terzo C. Si espongano poi i numeri F, & G in modo, che F sia multiplice di A, come E è multiplice di B; e che G sia multiplice di D, come E è multiplice di C; cioè che il numero A misuri il numero F, come il numero B misura il numero E; e che il numero D misuri il numero G, come C misura il numero E. Dico che i tre numeri F,E,G sono i minimi nelle proportioni di F ad E, e di E à G, cioè nelle proportioni di A à B, e di C à D. Perche i numeri A, & B,

A 6 B 5 C 4 D 3
F 24 E 20 G 15
1 ----- K ----- L -----

[a] 36. del 7.

per costruttione, misurano vgualmente i numeri F, ed E, sarà A parte di F, come B è parte di E, e per la 20. definitione di questo, A ad F è come
b 13. del 7. B ad E; e permutando, A à B b è come F ad E. Similmente perche i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri E, & G, sarà C ad E c come D à G; e permutando, C à D d sarà come E à G; per la qual cosa i numeri F,E,G sono successiuamente nelle proportioni di A à B, e di C à D. In oltre se i numeri F, E, G non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati I, K, L, minori de i numeri F,E,G, in modo,che I à K sia come A à B, e K ad L sia come C à D. Perche A à B è come I à K, ed i numeri A, & B sono minimi; i numeri dunque A, & B e misurano vgualmente i numeri I,& K, cioè l'antecedente A misura l'antecedente I, ed il conseguente B misura il conseguente K. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri K, ed L; cioè C misura K, ed il numero D misura L; per la qual cosa tanto il numero B, quanto il numero C misura il numero K. Hor perche i minimi numeri B, & C misurano il numero K, ed i medesimi B, & C misurano il minimo numero E; perciò il numero E f misura il numero K: ma fù supposto K minore di E; il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri I, K, L sono minimi nella data proportione; ma i minimi sono i notati F, E, G, ch'era da farsi nel primo luogo.

c 20. defin. del 7.
d 13. del 7.
e 21. del 7.
f 37. del 7.

	A 6	B 5		C 4	D 3	
F 24		E 20		G 15		
I ------		K ------		L -----		

Di nuouo siano date tre proportioni ne i minimi numeri, e la prima, sia come A à B, la seconda come C à D, e la terza come E ad F; e si vogliano ritrouare quattro numeri minimi, che il primo al secondo sia come A à B; che il secondo al terzo sia come C à D; e che il terzo al quarto sia come E ad F. Si troui, come prima, g il minimo numero G, il quale sia misurato dal secondo B, e dal terzo C; si espongano poi i numeri H, & K in modo, che A misuri H, come B misura G; e che D misuri K, come C misura G. O il numero E misura K, ouero non lo misura; supposto prima che lo misuri; si esponga il numero L in modo, che F misuri L, come E misura K. Dico che i quattro numeri H, G, K, L sono quelli, che si cercano; cioè che H à G è come A à B; che G à K è come C à D; e che K ad L è come E ad F; e che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche i numeri A, & B misurano vgualmente i numeri H, & G, sarà A ad H h come B à G; e permutando, A à B K è come H à G. Similmente, perche i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri G, & K, ed i numeri E, ed F misurano vgualmente i numeri K, ed L, per l'istessa ragione C à D sarà come G à K; e sarà E ad F come K ad L: per la qual cosa i numeri H, G, K, L sono successiuamente nelle proportioni di A à B, di C à D, e di E ad F. Dico oltre à ciò, che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche, se

g 36. del 7.
h 20. defin. del 7.
K 13. del 7.

	A 6	B 5.	C 4	D 3.	E 5	F 7.
H 24		G 20		K 15		L 21
M ----		N ----		O ---		P -----

non

non sono i minimi, altri numeri nelle date proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati M, N, O, P, minori de i corrispondenti numeri H, G, K, L, in modo, che M ad N sia come A à B, N ad O come C à D, ed O à P come E ad F; e perche i due A, & B sono, per ipotesi, minimi, perciò [l] misureranno vgualmente i numeri M, ed N; cioè l'antecedente A misura M, ed il conseguente B misura N. Similmente essendo C, & D minimi nella loro proportione, perciò [m] misureranno vgualmente i numeri N, ed O; cioè l'antecedente C misura l'antecedente N, ed il conseguente D misura il conseguente O; dal che i due B, & C misurano il medesimo numero N; mà i due B, & C misurano il minimo G, in conseguenza il minimo G [n] misura il numero N; fù supposto N minore di G, il maggiore misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri M, N, O, P sono i minimi nella data proportione; mà i minimi saranno i quattro H, G, K, L, come fù proposto fare.

l 21. del 7.

m 21. del 7.

n 37. del 7.

Se poi il numero E non misura il numero K. Si troui [o] il minimo numero L, misurato da i due E, & K, e si espongano i numeri M, N, P in modo, che il numero G misuri il numero M, come K misura il numero L; che H misuri N, come G misura M; e che F misuri P, come E misura L. Perche i numeri H, G, K misurano vgualmente i numeri N, M, L, sarà H à G [p] come N ad M; e sarà G à K, come M ad L: mà H à G, & G à K sono come A à B, e come C à D; sarà N ad M [q] come A à B; ed M ad L come C à D. Similmente perche i due E, ed F misurano vgualmente i numeri L, & P, sarà E ad F come L à P. Per la qual cosa i quattro numeri N, M, L, P sono successiuamente nelle date proportioni. Dico che sono i minimi nelle medesime date proportioni. Perche se non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati Q, R, T, V, minori de i corrispondenti numeri N, M, L, P; e sarà A à B come Q ad R; ed ancora C à D come R à T; e sarà E ad F come T ad V. E perche C, & D sono minimi, perciò [r] misureranno vgualmente i due R, & T; cioè l'antecedente C misura l'antecedente R, ed il conseguente D misura il conseguente T. Similmente, essendo i numeri E, & F minimi, il numero E [t] misurerà T, ed il numero F misura V; dal che i due D, ed E misurano il medesimo numero T. In oltre perche i due D, ed E, per costruttione, misurano il minimo numero L, ed i medesimi D, ed E misurano il numero T; perciò [u] il numero L misura il numero T: fù supposto T minore di L, il maggiore misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri Q, R, T, V sono i minimi nelle date proportioni, mà i minimi sono i quattro N, M, L, P, ch'era da farsi.

A 6	B 5.	C 4	D 3.	E 2	F 7.	
H 24		G 20		K 15		
N 48		M 40		L 30		P 105
Q ----		R ----		T ----	V ------	

o 36. del 7.

p 20. defin. del 7.

q Scol. a'la 12. del 7.

r 21. del 7.

t 21. del 7.

u 37. del 7.

Se saranno date quattro proportioni, si trouino prima i minimi numeri proportionali nelle tre date proportioni, come sopra si è fatto, e con la quarta proportione si faccia l'istesso, che antecedentemente si fece con la terza proportione data, e ne verranno i cinque minimi numeri proportionali, che si cercano. Per esempio, oltre le date tre proportioni,

ni, sia data la quarta proportione come X ad Y. Si trouino prima i quattro minimi numeri N, M, L, P, che siano successiuamente nelle medesime prime tre por-

portioni di A à B, A 6 B 5. C 4 D 3. E 2 F 7. X 3 Y 2
di C à D, e di E N 48 M 40 L 30 P 105 Q 70

ad F: poi, se X misura P, si esponga il numero Q in modo, che Y misuri il numero Q, come X misura P; sarà X ad Y come P à Q; ed i cinque numeri N, M, L, P, Q saranno successiuamente i minimi proportionali, secondo le date proportioni. Se poi il numero X non misura il numero P, si troui il minimo numero Q, [x] che sia misurato da i due P, ed X, e si espongano i numeri R T, V, Z in modo;

x 36. del 7.

A 6 B 5 C 4 D 3 E 2 F 7 X 9 Y 2
N 48 M 40 L 30 P 105
R V 144 T 120 R 90 Q 305 Z 70

che il numero L misuri il numero R, come P misura Q; che M misuri T, come L misura R; che N misuri V; come M misura T; e che Y misuri Z, come X misura Q; ed i numeri V, T, R, Q, Z saranno i minimi nelle proportioni date: il che si dimostra col procedere, come sopra s'è fatto. Ed il medesimo ordine si terrà se le proportioni date saranno più di quattro, il che era da farsi, e dimostrarsi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

I numeri piani hanno la proportione composta da i loro lati.

Siano i due numeri piani A, B, e siano i lati del numero A i notati C, D, ed i lati del numero B siano E, F. Dico che la proportione del numero piano A al numero piano B è composta di due proportioni, cioè della proportione del lato C al lato E, e della proportione del lato D al lato F. Si multiplichino i numeri D, E, frà di loro, ed il prodotto sia il numero G. Perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i numeri A & G, sarà il prodotto A al prodotto G, [a] come il numero multiplicato C al numero multiplicato E. Similmente perche E, multiplicando i numeri D, & F, produce i due G, & B, sarà il prodotto G al prodotto B [b] come il numero multiplicato D al numero multiplicato F, per la qual cosa i tre A, G, B sono successiuamente proportionali nelle proportioni di C ad E, e di D ad F. In oltre, presi i numeri A, & B, come estremi, ed il numero G sia intermedio; la proportione di A à B [c] sarà composta delle proportioni di A à G, e di G à B: mà la proportione di A à G è come C ad E, e la proportione di G à B è come D ad F; la proportione dunque del numero piano A al numero piano B sarà composta delle proportioni di C ad E, e di D ad F. Per la qual cosa i numeri piani hanno la proportione composta da i loro lati, il che era da dimostrarsi.

a 17. del 7.

A 24 B 48
G 18
C 4. D 6. E 2. F 16.

b 17. del 7.

c Lem. 7. dopo la 18. propos. del 6.

Nell'

Nell'istesso modo si proverà, che il numero piano A al numero piano B hà la proportione composta delle proportioni di C ad F, e di D ad E: Poiche multiplicando il numero D per il numero F, ed il prodotto sia G; per le ragioni antedette, sarà A à G come C ad F, e sarà G à B come D ad E; ma la proportione di A à B è composta delle proportioni di A à G, è di G à B; sarà la proportione di A à B composta delle proportioni di C ad F, e di D ad E, ch'era da dimostrarsi.

A 24 B 48 G 96 C 4. D 6. F 16. E 3.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Di quanti si voglia numeri continui proportionali, se il primo non misura il secondo, niun'altro di quelli misurerà alcuno de gli altri.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A non misuri il secondo B. Dico che niun altro di loro misurerà alcuno de gli altri. Perche i proposti numeri sono continui proportionali, sarà A à B come B à C, ouero C à D, & D ad E; si che se A misurasse B, per la 20. definitione, B misurarebbe vgualmente C, ed il numero C misurarebbe vgualmente D; come ancora D misurarebbe vgualmente E: ma, per ipotesi, A non misura B, ne meno B misurerà il numero C, ne C misurerà D, &c. e perciò nissuno misura il suo prossimo seguente.

A 16 B 24 C 36 D 54 E 81 F 4 G 6 H 9

In oltre si prendano [a] *tre numeri continui proportionali, che siano i minimi nella proportione di A à B, come F, G, H in modo, che F à G sia come A à B, & G ad H sia come F à G, cioè come B à C, e per l'egualità, sarà* [b] F ad H, come A à C. *In oltre perche A à B è come F à G, se A misura B, il numero F* [c] *misurerà vgualmente G; ma A per ipotesi, non misura B, ne meno F misurerà G; per la qual cosa F non sarà l'vnità; perche se fosse l'vnità misurarebbe il numero G, stante che l'vnità misura tutti i numeri: ma si è dimostrato, che F non misura G, perciò F non è l'vnità. E perche i numeri F, G, H sono i minimi nella proportione di F à G, cioè di A à B, gli estremi F, ed H* [d] *sono numeri primi; dal che F non misura H; ma F ad H è come A à C, ed il numero F, non misura H, ne meno A misurerà C. Nell'istesso modo si dimostrerà, che B non misurerà il numero D, ne meno C misurerà il numero E. E se in luogo de i tre F, G, H, si prenderanno quattro numeri continui proportionali, che siano minimi nella proportione di A à B, proseguendo col medesimo metodo di prima, si proverà, che il primo A non misura il quarto D, ne B misura E, come anco C non misurerà quello, che segue dopo il numero E. E se i numeri F, G, H saranno cinque, si proverà, che A non misura il quinto termine E, ne meno nissun altro misurerà il suo quinto termine; e con quest'ordine procedendo, sarà prouato, che se A non misura B, niuno de'numeri A, B, C, D &c. misurerà gli altri, il che era da dimostrarsi.*

[a] 22. del 8.
[b] 22. del 7.
[c] 20. defin. del 7.
[d] 3. del 8.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Di quanti si voglia numeri continui proportionali, se il primo misura l'vltimo, misurerà ancora il secondo.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A misuri l'vltimo E. Dico che A misurerà il secondo B. Se il primo A non misura il secondo B, per l'antecedente propositione, ne meno misurerà alcun'altro de'numeri B,C,D,E, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto, che A misura l'estremo E. Per la qual cosa il primo A misurerà il secondo B, ch'era da dimostrarsi.

A 3 B 6 C 12 D 24 E 48

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Quanti numeri continui proportionali cadono frà due proposti numeri, altretanti ne caderanno frà gli altri numeri, che sono nella medesima proportione.

Frà due qualunque numeri A, & B cadano i medij continui proportionali C, & D; e siano altri numeri, cioè E, F, che habbiano la medesima proportione, quale hà il numero A al numero B. Dico che frà i numeri E, F cadono tanti medij proportionali, per quanti ne cadono frà i numeri A, & B. Si trouino

A 24 C 36 D 54 B 81
G 8 H 12 K 18 L 27
E 32 M 48 N 72 F 108

a 2.del 8. tanti minimi numeri continui proportionali [a] nella proportione di A à C, per quanti sono i termini A,C,D,B, che siano i notati G,H,K,L, e per l'e-
b 22.del 7. gualità, [b] sarà G ad L come A à B, e come E ad F: e perche i numeri G,H, K,L continui proportionali, sono per costruttione minimi, gli estremi G, ed
c 3. del 8. L sono [c] frà di loro primi; e per la 23.del settimo, i numeri G, ed L sono minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di G ad L: ma G ad
d 21.del 7. L è come E ad F, perciò i numeri G, ed L [d] misureranno vgualmente i numeri E, ed F; cioè l'antecedente G misura l'antecedente E, ed il conseguente L misura il conseguente F.

A 40 C 20 D 10 B 5
G 8 H 4 K 2 L 1
E 8 M 4 N 2 F 1

E perche G, H, K, L, sono continui proportionali, quante volte i due G, L misurano i due E, F, altretante volte i numeri H, K misureranno altri numeri, come per essempio M, N. Per la qual cosa i numeri G,H,K,L misureranno vgualmente i corrispondenti E, M, N, F; e per la 20. definit. del 7, sarà G ad E come H ad M, e come K ad N, ed L ad F; e permutandosi, i numeri G, H, K, L,
e 13. del 7. [e] hanno successiuamente le medesime proportioni de'numeri E, M, N, F; ma i numeri G, H, K, L, per costruttione, sono continui proportionali; perciò i numeri E, M, N, F saranno ancora

conti-

continui proportionali ; e tanti saranno i termini E, M, N, F, per quanti sono i termini G, H, K, L: cioè per quanti sono i termini A, C, D, B. E perciò quanti termini medij sono frà i due A,B, altrettanti ne saranno frà i due E, F, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Quanti medij continui proportionali cadono frà due numeri frà loro primi, altrettanti ne cadono frà vno di essi, e l'vnità.

Siano i due numeri frà loro primi A, B, frà quali cadano i medij continui proportionali C,D. Dico che altrettanti medij continui proportionali caderanno frà l'vnità, ed il numero A, e frà l'vnità, ed il numero B. Si trouino due numeri minimi [a] nella proportione di A à B, che siano E,ed F; e nella medesima proportione si trouino tre altri minimi numeri cõtinui proportionali come G,H,K; e similmente se ne trouino quattro altri, come L,M,N,P, e con quest'ordine fin che si peruenga *à tanta moltitudine di termini*, per quanta è la moltitudine de' termini A, C, D, B. Perche gli estremi A,B, per ipotesi, sono primi frà loro, i numeri A, C, D, B saranno i minimi nella proportione di E ad F: ma perche altrettanti termini L, M, N,P, per costruttione, sono ancora minimi nella proportione di E ad F, non potendosi dare il minore del minimo, i numeri L,M,N,P, saranno vguali à i corrispondenti numeri A,C, D,B; cioè L vguale ad A, il numero M vguale à C, il numero N vguale à D, ed il numero P vguale à B. In oltre perche nel trouare i numeri minimi G,H,K, ouero L, M, N, P, per la 20. propositione di questo, si è prodotto G dalla multiplicatione di E in se medesimo, e si è prodotto L dalla multiplicatione di E nel numero G; il numero G [b] sarà misurato da E per il medesimo numero E, ed il prodotto L sarà misurato da G per l'istesso numero E; ma il numero E è misurato dall'vnità [c] per il medesimo numero E, in conseguenza i numeri L, G, E, e l'vnità, si misureranno vgualmente; cioè l'vnità misura E, come E misura G, ed il numero G misura L; per la qual cosa la medesima parte sarà l'vnità di E, qualè il numero E di G, ed il numero G di L. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la medesima parte è l'vnità di F, quale è F di K, ed il numero K di P, e perciò l'vnità, ed i numeri E, G, L, come ancora l'vnità, ed i numeri F,K, P [d] sono continui proportionali. E perche, come apparisce nella 2. propos. di questo, i termini L, M, N, P sono sempre vno più de' termini L,G,E, ouero P, K, F, aggiunta à i termini L, G, E l'vnità per primo termine, saranno tanti i termini continui proportionali L,G,E, con l'vnità, per quanti sono i termini L,M,N,P; ma i termini L, M, N, P, sono tanti, per quanti sono i termini A,C,D,B, tanti dunque saranno i termini con-

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità 1 E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

[a] 2. del 8.

[b] 7. assioma del 7.

[c] 5. assioma del 7.

[d] 20. defin. del 7.

tinui proportionali L, G, E, coll'vnità, per quanti sono i termini A, C, D, B. Per la qual cosa tanti medij continui proportionali cadono frà i due A, & B, per quanti ne cadono frà l'vnità, ed il numero A, ch'è vguale ad L. Nell'istesso modo si proverà, che tanti sono i numeri medij, che cadono frà i due A, & B, per quanti sono quelli, che cadono frà l'vnità, ed il numero B, che fù dimostrato vguale à P, come fù proposto dimostrare.

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità 1
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Quanti medij continui proportionali cadono frà l'vnità, e ciascuno di due numeri, altrettanti ne caderanno frà i medesimi due numeri.

Frà i due numeri A, & B, e l'vnità Z cadano quanti numeri si vogliano continui proportionali, cioè frà l'vnità Z, ed il numero A cadano i medij C, D, E; e frà l'vnità Z, ed il numero B, ne cadano altrettanti, come F, G, H. Dico che quanti medij cadono frà l'vnità Z, ed il numero A; ouero frà l'vnità Z, ed il numero B, altrettanti *medij continui proportionali cadono frà i numeri A, & B. Si multiplichino i due C, F scambieuolmente, ed il prodotto sia K; poi si multiplichi C per li due K, & G, ed i prodotti siano L, ed M; ed il medesimo numero C multiplichi i tre L, M, H, ed i prodotti siano N, P, Q, i quali, essendo tanti, per quanti sono i medij, che cadono frà l'vnità, ed il numero A, ouero frà l'vnità, ed il numero B, si pongano frà i numeri A, & B.* Dico che i numeri A, N, P, Q, B sono continui proportionali. Perche, per ipotesi, l'vnità Z à C è come C à D, & D ad E, & E ad A; tante volte l'vnità misura C, [a] per quante volte C misura D, ed il numero D misura E, come ancora E misura A; ma l'vnità Z misura C per il numero C; perciò [b] C misura D, il numero D misura E, ed E misura A per il medesimo numero C. Per la qual cosa [c] C, multiplicando se medesimo, produce D; ed il medesimo C, multiplicando D, produce E; e multiplicando E, produce A. Nel medesimo modo si dimostrerà, che F, multiplicando se medesimo, produce G, e multiplicando G, produce H, ed ancora, multiplicando H, produce B. In oltre perche C, multiplicando C, & F, produsse D, e K; sarà D à K [d] come C ad F. Similmente, perche F, multiplicando C, ed F, produsse K, & G; la proportione di K à G [e] sarà come quella di C ad F, cioè come quella di D à K; e perciò i tre D, K, G sono

A 81 N 162 P 324 Q 648 B 1296
E 27 L 54 M 108 H 216
D 9 K 18 G 36
C 3 F 6
1
Z

a 20. defin. del 7.
b 5. assiom. del 7.
c 9. assioma del 7.
d 17. del 7.
e 17. del 7.

con-

continui proportionali nella proportione di C ad F. Di nuouo perche C multiplicando i tre D,K,G, produsse i numeri E,L,M; i numeri E,L,M f saranno nella medesima continua proportione de i numeri multiplicati D,K,G; cioè la medesima proportione di C ad F. E perche i due C,ed F, multiplicando il medesimo numero F, produssero i numeri M, ed H; sarà la proportione di M ad H g come quella de i multiplicanti, cioè come quella di C ad F; dalche i numeri E, L, M, H sono continui proportionali nella proportione di C ad F. Finalmente perche C, multiplicando i quattro E, L, M, H, produsse i numeri A, N, P, Q; saranno i numeri A, N, P, Q h nella continua proportione de i numeri E,L,M,H; cioè nella proportione di C ad E. E similmente i numeri C,F, multiplicando il medesimo numero H, hanno prodotti i numeri Q, & B; la proportione di Q à B K sarà come quella di C ad F; cioè come quella, che successiuamente hanno i numeri A,N,P,Q. Per la qual cosa i numeri A,N,P,Q,B sono continui proportionali; e perciò frà i due numeri A, & B, cadono tanti medij continui proportionali, per quanti ne cadono frà l'vnità Z, ed i numeri A,& B, ch'era da dimostrarsi.

f 17. del 7.

g 18. del 7.

h 17. del 7.

K 18 del 7.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Frà due numeri quadrati cade vn numero medio proportionale: ed il numero quadrato al numero quadrato, hà *duplicata proportione, che il lato al lato.*

Siano i due numeri quadrati A, & B, i di cui lati, ò radici, siano i numeri C,& D. Dico che frà i numeri quadrati A, & B, cade vn numero medio proportionale; e che il numero quadrato A al numero quadrato B, hà duplicata proportione, che il lato C al lato D. S'intendano multiplicati i numeri C,D, scambieuolmente, ed il prodotto sia E. Perche C è lato di A, multiplicato C in se medesimo produce A; e per simile ragione, multiplicato D in sè medesimo, il prodotto sarà B. In oltre perche i numeri C, & D, multiplicati per il medesimo numero C, producono i numeri A, & E; sarà la proportione di A ad E a come quella di C à D. Similmente perche i numeri C, & D, multiplicati per il medesimo numero D, producono i numeri E, & B; sarà E à B b come C à D; cioè c come A ad E: per la qual cosa i tre A,E,B sono continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò frà i due numeri quadrati A, & B, cade vn solo numero E medio proportionale. Finalmente perche i tre numeri A,E,B sono continui proportionali; la proportione del primo A al terzo B d è duplicata di quella, che hà il primo A al secondo E; ma per quel, che si è dimostrato, la proportione di A ad E è come quella di C à D, hauerà il numero quadrato A al numero quadrato B, duplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù proposto dimostrare.

A 9 E 21 B 49
C 3 D 7

a 17. del 7.

b 17. del 7. c Scol. alla 12. del 7.

d lemma 7. dopo la 18. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che se due numeri si multiplicano in se medesimi, e si multiplicano frà di loro, i prodotti sono in continua proportione de i numeri multiplicati.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Frà due numeri cubi cadono due medij continui proportionali; ed il cubo al cubo hà triplicata proportione, che il lato al lato.

Siano i due numeri cubi A, & B, i di cui lati, ò radici, siano i numeri C, & D. Dico che frà i numeri cubi A, & B, cadono due medij continui proportionali; e che il numero cubo A al numero cubo B hà triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D. Si multiplichi C in se medesimo, ed il prodotto sia E; e multiplicando D in se medesimo, si produca F; poi si multiplichino i due C, & D scambieuolmente, ed il prodotto sia G; e finalmente i due numeri C, & D multiplichino il medesimo numero G, ed i prodotti siano H, & K. Perche il numero C, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri E, & G; sarà E à G [a] come C à D. Similmente perche il numero D, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri G, ed F; sarà G ad F [b] come C à D, cioè [c] come E à G; dal che i tre E, G, F sono continui proportionali nella proportione di C à D. In oltre, per la definitione del cubo, C multiplicando E, produce A; mà il numero C, multiplicando G, produsse H; sarà A ad H [d] come E à G; cioè [e] come C à D. Similmente, per la definitione del cubo, D, multiplicando F, produce B: mà, per costruttione, D, multiplicando G, produsse K; sarà K à B [f] come G ad F, cioè come C à D, ouero come A ad H. Di più, perche i due C, & D multiplicando il medesimo numero G, produssero i numeri H, & K; sarà H à K [g] come C à D: per la qual cosa i numeri A, H, K, B sono continui proportionali, de' quali i medij sono H, & K, che, per la costruttione fatta, sono due solamente, e perciò frà i due numeri cubi A, & B, cadono due soli medij continui proportionali. Finalmente perche i quattro numeri A, H, K, B sono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà al secondo H: mà la proportione di A ad H è come quella di C à D, hauerà il numero cubo A al numero cubo B, triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù proposto dimostrare.

A 27 H 36 K 48 B 64
E 9 G 12 F 16
C 3 D 4

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 17. del 7.
e Scol. alla 12. del 7.
f 17. del 7.
g 18. del 7.
h Lemma 7 dopo la 18. del 6.

CO-

COROLLARIO.

Nell'antecedente propoſitione appare, che multiplicati i lati di due numeri cubi, come C, D in ſe medeſimi, e multiplicati frà di loro in modo, che produchino le continue proportionali E, G, F; poi li due C, D, multiplicandoli nel medeſimo numero G, i prodotti H, K, con i cubi A, & B, cioè A, H, K, B, ſono continui proportionali nella proportione di C à D.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se, di quanti ſi voglia numeri continui proportionali, ogn'vno è multiplicato in ſe medeſimo, i prodotti ſaranno ſimilmente continui proportionali; e ſe i numeri poſti nel principio ſi multiplicaranno ne i loro prodotti, i numeri, che ne riſultano, ſaranno continui proportionali; e ſempre, multiplicando i numeri, poſti nel principio, per gli vltimi prodotti, quelli, che ne riſultano, ſono continui proportionali.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, ciaſcuno de' quali ſi multiplichi in ſe medeſimo, ed i prodotti ſiano i numeri D, E, F.

A 2 B 4 C 8
D 4 N 8 E 16 O 32 F 64
G 8 P 16 Q 32 H 64 R 128 S 256 I 512
K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo ſi multiplichino queſti per li primi A, B, C, cioè A multiplichi D, il numero B multiplichi E, ed il numero C multiplichi F; ed i prodotti ſiano G, H, I. Similmente ſi multiplichino queſti vltimi prodotti, col medeſimo ordine, per li numeri A, B, C, e ne vengano i numeri K, L, M, e con queſt'ordine ſi proceda quanto ſi vuole. Dico che i numeri D, E, F ſono continui proportionali: e ſimilmente i numeri G, H, I, come ancora i numeri K, L, M, ſono continui proportionali. Si multiplichino i due A, & B ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia N; e multiplicando i due B, C ſcambieuolmente, ſe ne produca il numero O. Di nuouo multiplichi A i due N, E, ed i prodotti ſiano P, Q. Di più, multiplichi B i numeri O, F, e ſi produchino i numeri R, S. Similmente A multiplichi i tre P, Q, H, e faccia i prodotti T, V, X; ed il numero B multiplichi i tre R, S, I, e faccia i prodotti Y, Z, &. Perche A, multiplicando ſe me-

desimo, è multiplicando ancora B, produsse i numeri D, ed N; sarà D ad
a 17.del 7. N, [a] come A à B. Similmente B, multiplicando A, e multiplicando se
b 17. del 7. medesimo, produsse i due N, ed E; sara N ad E, [b] come A à B, cioè [c]
c Scol. alla 12. del 7. come D ad N; e perciò i tre D, N, E sono continui proportionali, nel-
la proportione di A à B. Di nuouo, perche B, multiplicando se mede-
d 17.del 7. simo, e multiplicando C, produsse E, ed O; sarà B à C, [d] come E ad O.
Similmente C, multiplicando B, e multiplicando se medesimo, produsse
e 17.del 7. O, ed F; sarà O ad F [e] come B à C; si che i tre, E, O, F sono
continui proportionali nella proportione di B à C; cioè di A à B: mà li tre
D, N, E sono continui proportionali nella medesima proportione di A
à B; sara D ad N, come E ad O; & N ad E, come O ad F; e per l'egua-
f 14. del 7. lità, D ad E [f] sarà come E ad F: per la qual cosa i tre primi prodotti D,
E, F sono continui proportionali.

A 2 B 4 C 8
D 4 N 8 E 16 O 32 F 64
G 8 P 16 Q 32 H 64 R 128 S 256 I 512
K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo, perche A, multiplicando i tre D, N, E, produsse i tre G,
g 17. del 7. P, Q, saranno i prodotti G, P, Q, [g] nella medesima proportione de i tre
D, N, E; cioè nella proportione di A à B. Parimente, perche A, & B,
multiplicando il medesimo numero E, produssero i due Q, ed H; sarà Q
h 18. del 7. ad H [h] come A à B; dal che i quattro G, P, Q, H sono continui propor-
tionali nella proportione di A à B. Oltre à ciò, perche B, multiplicando
K 17.del 7. i tre E, O, F, produsse i tre H, R, S; saranno i tre H, R, S, [K] proportio-
nali, nella proportione de i tre E, O, F; cioè nella proportione di B à C
ouero di A à B. E similmente, perche, multiplicando i due B, C, per
l 18. del 7. il medesimo numero F, produsse i due S, ed I; sarà S ad I [l] come B à C,
cioè come A à B; per la qual cosa i quattro numeri H, R, S, I sono con-
tinui proportionali nella proportione di A à B; mà i quattro G, P, Q, H
sono similmente continui proportionali nella medesima proportione di
A à B; saranno i quattro G, P, Q, H nella medesima continua propor-
m 14.del 7. tione de i quattro H, R, S, I; e per l'egualità, sarà G ad H [m] come H ad
I, e perciò i secondi prodotti G, H, I sono continui proportionali. Nell'
istesso modo si dimostrerà che i tre vltimi prodotti K, L, M sono conti-
nui proportionali, che era da dimostrarsi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vn numero quadrato misura vn altro numero quadrato, il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; e se il lato d'vn numero quadrato misura il lato d'vn altro numero quadrato, il quadrato dell'vno, misurerà il quadrato dell'altro.

Siano

Siano i numeri quadrati A, & B, i di cui lati siano C, & D; e prima il numero quadrato A misuri il numero quadrato B. Dico che il lato C misurerà il lato D. Si multiplichino i numeri C & D scambieuolmente, ed il prodotto sia E, per il Corollario all'vndecima propositione di questo, i tre numeri A, E, B sono continui proportionali, nella proportione di C à D; mà il primo A, per ipotesi, misura il terzo B; per la settima di questo, il primo A misurerà ancora il secondo numero E: e perche A ad E è come C à D, ed il numero A misura E, il numero C [a] misurerà ancora il numero D, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 4 E 16 B 64
C 2 D 8

a 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico, che il quadrato A misurerà il quadrato B. S'intenda fatta l'istessa costruttione, saranno i tre numeri A, E, B continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò A ad E è come C à D; ma il numero C misura, per ipotesi, il numero D; il numero A ancora [b] misurerà il numero E. Finalmente perche A ad E è come E à B, ed il numero A misura E, ancora il numero E [c] misurerà B; per la qual cosa il numero quadrato A [d] misurerà il numero quadrato B, come fu proposto dimostrare.

b 20. defin. del 7.

c 20. de fin. del 7.
d 11. assioma del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se vn numero cubo misura vn altro numero cubo, il lato di vno misura il lato dell'altro; e se il lato misura il lato, ancora il cubo misurerà il cubo.

Siano i numeri cubi A, & B, i di cui lati siano C, & D. Dico che, se il cubo A misura il cubo B, ancora il lato C misurerà il lato D; e se il lato C misura il lato D, ancora il cubo A misurerà il cubo B. Si multiplichino in se medesimi i numeri C, & D, ed i prodotti siano E, ed F; poi si multiplichino i numeri C, D scambieuolmente, ed il prodotto sia G, per il Corollario all'11. propositione, i tre numeri E, G, F saranno continui proportionali, nella proportione di C à D. Di nuouo, i numeri C, & D multiplichino il numero G, ed i prodotti siano H, & K; sarà H à K [a] come C à D; ed i quattro numeri A, H, K, B, per il Corollario alla 12. propositione di questo, sono continui proportionali, nella proportione di C à D. E perche il primo termine A misura l'vltimo B, perciò il medesimo numero A [b] misurerà il secondo H; ma la proportione di A ad H è come C à D, misurando A il numero H, [c] ancora C misurerà il numero D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 8 H 24 K 72 B 216
E 4 G 12 F 36
C 2 D 6

a 18 del 7.

b 7. del 8.

c 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico che il cubo A misurerà il cubo B. *Si concepisca fatta la medesima costruttione, e per il Corollario alla 12. propositione di questo, i numeri A, H, K, B sono*

con-

continui proportionali nella proportione di C à D; dal che A ad H sarà come C à D: mà C misura D, per ipotesi, perciò A misurerà [d] H. In oltre perche i numeri A, H, K, B, sono continui proportionali, ed A misura H, ancora H [e] misurerà vgualmente K, ed il numero K misurerà B. Hor perche A misura H, ed H misura K, il numero A [f] misurerà K; mà K misura B, dunque A misurerà B, ch'era da dimostrarsi.

A 8 H 24 K 72 B 216
E 4 G 12 F 36
C 2 D 6

d 20. defin. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 11. assioma del 7.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se il numero quadrato non misura il numero quadrato, ne meno il lato misura il lato; e se il lato d'vn quadrato non misura il lato d'vn altro quadrato, ne meno quel quadrato misura l'altro quadrato.

Siano i numeri quadrati A, B, i di cui lati siano C, D. Dico prima, che se il quadrato A non misura il quadrato B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Misuri C, s'è possibile, il lato D, per l'antecedente propositione, il quadrato A misurerà il quadrato B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 16 B 81
C 4 D 9

Di nuouo Dico che, se il lato C non misura il lato D, ne meno il quadrato A misurerà il quadrato B. Perche, se il quadrato A misurasse il quadrato B, per l'antecedente propositione, il lato C misurarebbe il lato D, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il quadrato A misura il quadrato B, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se il numero cubo non misura vn altro numero cubo, ne meno il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; se il lato d'vn numero cubo non misura il lato d'vn altro numero cubo, ne meno il cubo dell'vno, misurerà il cubo dell'altro.

Siano i numeri cubi A, B, i di cui lati siano i numeri C, D. Dico prima, che se il cubo A non misura il cubo B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Perche se il lato C misurasse il lato D, il cubo A [g] misurarebbe il cubo B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura il lato D.

A 8 B 27
C 2 D 3

g 15. del 8.

Supposto che il lato C non misuri il lato D. Dico che il cubo A non misura il cubo B. Misuri il cubo A, s'è possibile, il cubo B, per la 15.

propositione di questo, il lato C misurerà il lato D, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il cubo A misura il cubo B, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Frà due numeri piani simili cade vn medio proportionale; ed il numero piano al simile numero piano, hà duplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri piani simili A,B,ed i lati del piano A siano C,& D; come ancora i lati del piano B siano E,F,in modo,che multiplicandosi i due C,D scambieuolmente, produchino il piano A; e multiplicandosi i due E,F, produchino il piano B. Perche i piani A, & B sono simili, perciò i loro lati [a] saranno proportionali, e sarà C à D come E ad F. Dico prima, che frà i due A,& B cade vn medio proportionale. Si multiplichino i due D,E scambieuolmente, ed il prodotto sia G. Perche C à D è come E ad F, permutando, [b] C ad E sarà come D ad F. Hor perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i due A, & G; sarà A à G, [c] come C ad E, cioè [d] come D ad F: e perche E, multiplicando i due D, ed F, produce i due G,& B; sarà G à B e come D ad F; cioè come A à G: dal che i tre A,G,B sono continui proportionali, e perciò frà i numeri piani A,& B cade vn solo medio proportionale, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 12 G 18 B 27
C 6 D 2 E 9 F 3

[a] 21. defin. del 7.
[b] 13. del 7.
[c] 17. del 7.
[d] Scol. alla 18. del 7.
[e] 17. del 7.

Di nuouo Dico, che il numero piano A al simile numero piano B, hà duplicata proportione, di quella che hà il lato homologo C al lato homologo E; ouero di quella, che hà il lato homologo D al lato homologo F; cioè che hà l'antecedente all'antecedente, ò il conseguente al conseguente. Perche i tre numeri A,G,B sono continui proportionali, il primo A al terzo B [f] hà duplicata proportione di quella, che hà il primo A al secondo G: ma A à G, per quel che si è dimostrato, è come C ad E, ouero come D ad F; hauerà il numero piano A al numero piano B duplicata proportione, di quella che hà C ad E, ouero D ad F, come fù proposto dimostrare.

[f] Lemma 7. dopo la 18. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Frà due numeri solidi simili cadono due medij continui proportionali; ed il numero solido al numero solido simile hà triplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri ſolidi ſimili A, & B; i lati del ſolido A ſiano i notati C, D, E, ed i lati del ſolido B ſiano i notati F, G, H; e perche i ſolidi A, & B ſono ſimili, perciò haueranno i lati proportionali; cioè C à D, come F à G, & D ad E come G ad H. Dico prima, che frà i due A, & B cadono due medij proportionali. Si multiplichino i due C, D ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia K. Parimente ſi multiplichino i due F, G ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia L; e multiplicandoſi i due D, F ſcambieuolmente producano il numero P. In oltre multiplicando i due E, H, per il medeſimo numero P, produchino i numeri M, N. Perche i tre C, D, E

a 13. del 7. ſono proportionali à i tre F, G, H, permutandoſi, [a] ſaranno ancora proportionali; cioè C ad F ſarà come D à G, e come E ad H. Di più, perche D, multiplicando i due C, ed F, produſſe i due K, & P, [b] ſarà K à P come C ad F.

b 17. del 7.

Similmente perche F, multiplicando i due D, & G, produſſe i due P, ed L; ſarà P ad L [c] come D à G; per la qual coſa i tre K, P, L ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H. E perche il ſolido A è prodotto dalla multiplicatione de i tre lati C, D, E, ed il numero K naſce dalla multiplicatione de i due C, D, multiplicando il numero K per l'altro lato E, produrrà il numero A. Oltre à ciò perche il ſolido B vien fatto [d] dalla multiplicatione de i tre lati F, G, H, ed il numero L è fatto dalla multiplicatione de i due F, G multiplicando H il numero L, produrrà il numero B. E perche E, multiplicando i due K, P, produſſe i due A, M; ſarà il numero A al numero M, [e] come K à P; cioè come C ad F, ouero come D à G, ò pure come E ad H. Similmente H, multiplicando P, ed L, produſſe i due N, B; ſarà N à B [f] come P ad L, cioè come C ad F, ouero D à G, ò pure E ad H. Finalmente perche i due E, H, multiplicando P, produſſero M, ed N, la proportione di M ad N [g] ſarà come quella di P ad L; cioè come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H: per la qual coſa i quattro A, M, N, B, ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H; e perciò frà i numeri ſolidi ſimili A, & B, cadono due numeri medij proportionali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

c 17. del 7.

d 17. defin. del 7.

e 17. del 7.

f 17. del 7.

g 18. del 7.

Di nouo. Dico che il ſolido A al ſolido ſimile B, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo C al lato homologo F, ouero D à G, ouero E ad H. Perche i quattro numeri A, M, N, B ſono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà il primo A al ſecondo M: ma il primo A al ſecondo M è come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H; il ſolido dunque A al ſimile ſolido B, haverà triplicata proportione di quella, che hà C ad F, ouero D à G, ouero E ad H, ch'era da dimoſtrarſi.

h Lemma 7. dopo la 18. del 7.

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se frà due numeri piani cade vn medio proportionale, quei numeri sono piani simili.

Frà i due numeri A, & B, cada il numero C, medio proportionale. Dico che i numeri A, & B sono piani simili. Si prendano i due numeri D, ed E in modo, che siano [a] i minimi nella proportione di A à C, ouero C à B, perche i due D, E sono minimi nella proportione di A à C, perciò i numeri D, ed E [b] misurano vgualmente i due A, & C, per qualche numero F. Similmente perche A à C, per ipotesi, è come C à B, sarà D ad E [c] come C à B: mà i numeri D, E, per costruttione, sono i minimi nella proportione di C à B, perciò misurano i numeri C, & B [d] vgualmente per qualche numero G. Hor perche D misura il numero A per il numero F, multiplicando F nel numero D, [e] il prodotto sarà A, ed il medesimo numero F, multiplicando il numero E, produrrà C. Di più, perche i numeri D, E misurano vgualmente i numeri C, B, per il numero G, multiplicando G per D, [f] produrrà il numero C; e multiplicando G per E, produrrà il numero B. Oltre à ciò, perche i due F, & G, multiplicando il medesimo numero E, produssero i numeri C, & B, sarà C à B, [g] come F à G; mà C à B è come D ad E, sarà D ad E [h] come F à G; e permutando, D ad F [k] sarà come E à G. In oltre, perche F, multiplicando D, produsse il numero A, sarà A [l] numero piano, i di cui lati sono D, ed F. Similmente, multiplicando G per E, si produsse il numero B, e perciò B [m] sarà numero piano, i di cui lati sono E, & G: mà questi quattro lati furono dimostrati proportionali, cioè D ad F come E à G; i numeri dunque A, & B [n] sono piani simili, come fù proposto dimostrare.

A 18 C 24 B 32
D 3 E 4 F 6 G 8

a Scol. alla 35. del 7.
b 21. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 21. del 7.
e 9. assioma del 7.
f 9. assioma del 7.
g 18. del 7.
h Scol. alla 19. del 7.
k 13. del 7.
l 16. defin. del 7.
m 16. defin. del 7.
n 21. defin. del 7.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se frà due numeri cadono due medij continui proportionali, quei numeri saranno solidi simili.

Frà i due numeri A, & B cadano i due medij continui proportionali C, & D. Dico che i numeri A & B sono solidi simili. Si prendano i tre E, F, G [a] minimi nella proportione de' i numeri A, C, D, B saranno i tre E, F, G continui proportionali; e perche frà i due E, & G cade vn medio proportionale F, saranno i due E, & G [b] piani simili. Hor siano li due H & K i lati del piano E, ed i due P, ed L i lati del piano G; sarà H à K [c] come P ad L, e permutandosi, H à P [d] sarà come K ad L: e perche i tre E, F, G sono i minimi nella proportione de i

A 24 C 72 D 216 B 648
E 1 F 3 G 9
H 1 K 1 M 24 P 3 L 3 N 72
A 8 C 12 D 18 B 27
E 4. F 6 G 9
H 2 K 2 M 2 P 3 L 3 N 3

a 35. del 7.
b 20. del 8.
c 21. defin. del 7.
d 13. del 7.

e 21. del 7. numeri A, C, D, perciò i numeri E, F, G e misureranno vgualmente i numeri A, C, D, per qualche numero M. Similmente perche i numeri E,

f 21. del 7. F, G sono i minimi nella proportione de i tre C, D, B, perciò f misurano vgualmente i numeri C, D, B, per qualche numero N in modo, che M, multiplicando i numeri E, F, G produrrà i numeri A, C, D; ed il numero N, multiplicando i medesimi E, F, G produca i numeri C, D, B. E perche dalla multiplicatione de i due lati H, K è fatto il numero E; e dalla multiplicatione de i due P, L, è fatto il numero G; ed il numero A è fatto dalla multiplicatione di M in E, in conseguenza il numero A sarà fatto dalla multiplicatione de i tre H, K, M.

A 24	C 72	D 216	B 648	
E 1	F 3	G 9		
H 1	K 1	M 24	P 3	L 3 N 72

Nell'istesso modo si proverà, che il numero B è fatto dalla multiplicatione de i tre numeri P, L, N; per la qual cosa i numeri A, & B sono g numeri solidi, i di cui lati sono H, K, M, & P, L, N.

g 17. defin. del 7.

A 8	C 12	D 18	B 27
E 4	F 6	G 9	
H 2	K 2	M 2	P 3 L 3 N 3

In oltre perche M, N multiplicando il medesimo numero F, per quel che si è dimostrato producono i numeri C, D sarà h C à D, come M ad N. Similmente perche N, multiplicando i due E, F produsse i due C, & D; sarà E ad F, K come C à D; mà C à D è come M ad N; sarà E ad F, l come M ad N. Di più essendo i numeri E, & G piani simili, haueranno m duplicata proportione de' loro lati homologhi, cioè haverà E à G duplicata proportione di quella, che hà il lato homologo H al lato homologo P; ouero di quella, che hà K ad L; mà E à G n hà duplicata proportione che il medesimo numero E ad F (stante che E, F, G sono continui proportionali) perciò E ad F sarà come H à P, ouero come K ad L: mà E ad F, per quel che si è dimostrato, è come M ad N; sarà H à P, o come K ad L; e K ad L come M ad N: dal che i tre lati H, K, M sono proportionali à i tre lati P, L, N, per la qual cosa il solido A, prodotto da i tre lati H, K, M p sarà simile al solido B, prodotto da i tre lati P, L, N, come fù proposto dimostrare.

h 18. del 7.
K 17. del 7. l Scol. alla 12. del 7.
m 18. del 8.
n Lemma 7. dopo la 18. del 6.
o Scol. alla 12. del 7.
p 21. defin. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se tre numeri sono continui proportionali, ed il primo sia numero quadrato, ancora il terzo sarà numero quadrato.

Siano i tre numeri A, B, C continui proportionali, ed il primo A sia numero quadrato. Dico che il terzo C sarà ancora numero quadrato. Perche frà gli estremi A, & C cade il numero medio proportionale B, i due A, & C, a saranno piani simili; ma il piano A è suppo-

A 9	B 54	C 324

a 20. del 8.

sto

sto quadrato, in conseguenza il simile piano C sarà quadrato, che era da dimostrarsi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se quattro numeri sono continui proportionali, ed il primo sia numero cubo, ancora il quarto sarà numero cubo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D continui proportionali, ed il primo A sia numero cubo. Dico che il quarto D sarà ancora numero cubo. Perche frà gli estremi A, & D cadono due medij continui proportionali; perciò i due A, & D [a] sono solidi simili: ma il numero A è supposto numero cubo: sarà il numero D, che gli è simile, ancora numero cubo, ch'era da dimostrarsi.

A 27. B 45 C 75. D 125

[a] 21. del 8.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se due numeri hanno frà di loro l'istessa proportione, che hà vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato, se il primo è numero quadrato, ancora il secondo sarà numero quadrato.

Siano i due numeri A, & B da vna parte, e due numeri quadrati C, & D da vn altra parte; ed habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D; e sia A numero quadrato. Dico che B sarà ancora numero quadrato. Cada frà i due numeri quadrati C, & D [a] vn medio proportionale, che sia E. Similmente cada frà i due numeri A, & B [b] vn medio proportionale, che sia F. Perche i tre A, F, B sono continui proportionali, ed il primo A è numero quadrato, sarà ancora il terzo B [c] numero quadrato, il che era da dimostrarsi.

A 36 F 48 B 64
C 9 E 12 D 16

[a] 11. del 8.
[b] 8. del 8.
[c] 22. del 8.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri hanno frà di loro l'istessa proportione, che hà vn numero cubo ad vn altro numero cubo, ed il primo di quelli è numero cubo, ancora il secondo sarà numero cubo.

Hab-

Habbia il numero A al numero B, quella proportione, che hà il numero cubo C al numero cubo D, ed il numero A sia cubo. Dico che il numero B sarà ancora lui cubo. Frà i due numeri cubi C, & D [a] cadano due medij continui proportionali, come E, ed F, e frà i due numeri A, & B [b] cadano due medij continui proportionali, come G, ed H. Perche i quattro A, G, H, B sono continui proportionali, de' quali il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto B [c] numero cubo, come fù proposto dimostrare.

A 8 G 12 H 18 B 27
C 64 E 96 F 144 D 216

a 12. del 8.
b 8. del 8.
c 3. del 8.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

I simili numeri piani sono frà di loro, come i numeri quadrati.

Siano i simili numeri piani A, & B. Dico che il numero piano A al simile numero piano B, è come qualche numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche i numeri A, & B sono piani simili, [a] caderà frà di loro vn medio proportionale; sia quello il numero C. Si prendano tre numeri, come D, E, F, [b] che siano minimi nella continua proportione di A, C, B, per il primo Corollario alla 2. propositione di questo, gli estremi D, ed F sono numeri quadrati. Hor perche A à C è come D ad E, e C à B è come E ad F, per l'egualità, il numero piano A [c] al simile numero piano B è come il numero quadrato D al numero quadrato F, ch'era da dimostrarsi.

A 20 C 30 B 45
D 4 E 6 F 9

a 18. del 7.
b 35. del 7.
c 14. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione facilmente la dimostraremo col P. Clauio nel seguente modo.

I numeri, che hanno la medesima proportione, quale hanno i numeri quadrati, sono piani simili.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D. Dico che i numeri A, & B sono piani simili. Perche frà i numeri quadrati C, & D [a] cade vn medio proportionale, e la proportione di C à D è come A à B, caderà frà i due A, & B [b] vn medio proportionale, e perciò i numeri A, & B [c] sono piani simili, ch'era da dimostrarsi.

A 8 B 18
C 16 D 36

a 11. del 8.
b 8. del 8.
c 20. del 8.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

I numeri solidi simili sono frà loro, come i numeri cubi.

Siano

Siano i numeri ſolidi ſimili A, & B. Dico che il numero A al numero B è come qualche numero cubo ad vn altro numero cubo. Perche i numeri A, & B ſono ſolidi ſimili, frà eſſi caderanno [a] due medij cõtinui proportionali, che ſiano C, & D: ſi prendano poi quattro numeri minimi [b] nella continua proportione de' numeri A, C, D, B; ſaranno gli eſtremi E, ed H, per il primo Corollario alla ſeconda propoſitione di queſto, numeri cubi. E perche i numeri E, F, G, H ſono nella continua proportione de i numeri A, C, D, B, per l'egualità, ſarà E ad H [c] come A à B; cioè il numero ſolido A al ſimile ſolido B, come il numero cubo E al numero cubo H, che era da dimoſtrarſi.

A 240 C 360 D 540 B 810
E 8 F 12 G 18 H 27

a 19. del 8.
b 35. del 7.
c 14. del 7.

SCOLIO.

La conuerſa di queſta propoſitione è facilisſima nel ſeguente modo.

I numeri, che hanno l'iſteſſa proportione de' numeri cubi, ſono ſoli di ſimili.

Habbia il numero A al numero B l'iſteſſa proportione, quale hà il numero cubo C al numero cubo D. Dico che i numeri A, & B ſono ſolidi ſimili. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D, ed i numeri C, & D ſono cubi, caderanno frà i due C, & D, [a] due medij continui proportionali: mà il cubo C al cubo D è come A à B, caderanno ancora frà i due A, & B [b] due medij continui proportionali, e per la 21. propoſitione di queſto, gli eſtremi A, & B ſono ſolidi ſimili, come fù propoſto dimoſtrare.

A 16 B 54
C 64 D 216

a 12. del 8.
b 8. del 8.

SCOLIO.

Per le coſe da dimoſtrarſi non ſarà inutile il ſeguente problema.

Ritrouare due numeri piani, i quali non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato.

Si prendano due numeri primi, ouero due numeri frà di loro primi, che niſſuno ſia numero quadrato, e ſiano per eſſempio li notati A & B. Dico che il numero A al numero B non è come il numero quadrato al numero quadrato; ſe il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, li numeri A & B, per la 26. di queſto, ſaranno piani ſimili, e per la 18. di queſto, frà li due A & B cade vn medio proportionale; e perche li due eſtremi A & B, per ipoteſi, ſono numeri primi, non hanno alcuna commune miſura fuor che l'vnità; per la qual coſa li due eſtremi A & B, ed il medio, non hanno commune miſura, e perciò ſono frà di loro primi, e per la prima propoſitione di queſto ſono i minimi nella

A 7 B 13

lo-

loro proportione, e per il Corollario primo alla propositione seconda di questo, li due estremi A, & B sono numeri quadrati, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto, che nissuno delli due sia quadrato; non dunque il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Da quel che si è detto è manifesto, che li numeri primi non sono come i numeri quadrati.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propositione si caua il modo da ritrouare due numeri, che non siano piani simili l'aggregato de quali non sia numero quadrato, ne habbia proportione à ciascuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato; poiche, se si diuiderà vn numero non quadrato in due numeri primi, ouero frà di loro primi, il loro aggregato non sarà numero quadrato, ed il medesimo aggregato, per la 30. propositione del settimo, sarà primo à ciascuno di quelli, e per l'antecedente *Scolio*, l'aggregato à ciascuno di quelli non sarà come numero quadrato à numero quadrato.

Fine del Ottauo Elemento.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [399] - 384
PUBLIC DOMAIN

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO NONO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se dalla ſcambieuole multiplicatione di due numeri piani ſimili, ſe ne produce qualche numero, il prodotto ſarà numero quadrato.

SIANO i due numeri piani ſimili A, & B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmente, produchino il numero C. A 6 B 54 D 36 E 108 C 324

Dico che il prodotto C è numero quadrato. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia il numero quadrato D. Perche A, multiplicando i due A, & B, produce i numeri D, & C, ſarà il numero A al numero B, [a] come D à C: ma frà i piani ſimili A, & B [b] cade vn medio proportionale, caderà ancora frà i due D, & C vn medio proportionale, ſia dunque quello il numero E; ſaranno i tre D, E, C continui proportionali. Hor eſſendo i tre numeri D, E, C continui proportionali, ed il primo D, per coſtruttione, è quadrato, ſarà ancora [d] il terzo C numero quadrato, come fù propoſto dimoſtrare.

a 17. del 7.
b 18. del 8.
c 8. del 8.
d 22. del 8.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due numeri, multiplicandoſi ſcambieuolmente, producono vn numero quadrato; quelli ſono piani ſimili.

Siano i due numeri A, & B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmente, produchino il numero quadrato C. Dico che i numeri A, & B ſono

piani ſimili. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia D. Perche A, multiplicando B, e multiplicando ſe medeſimo, produce i due D, & C; ſarà A à B [a] come D à C; ma frà i due quadrati D, & C, [b] cade vn medio proportionale; caderà ancora frà i due A, & B [c] vn medio proportionale; per la qual coſa i numeri A, & B [d] ſono piani ſimili, che era da dimoſtrarſi.

a 17 del 7. b 11. del 8. c 8. del 8. d 20. del 8.

A 6 B 54 D 36 C 324

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vn numero cubo, multiplicando ſe medeſimo, produce qualche numero, quel prodotto ſarà numero cubo.

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicato in ſe medeſimo, produca il numero B. Dico che il numero B è cubo. Sia C il lato del cubo A, e multiplicando C in ſe medeſimo, ſi produca il numero D; ſi che C, multiplicando D, [a] produrrà il numero cubo A. Perche C, multiplicando ſe medeſimo, produſſe D; perciò il numero C miſurerà il numero D [b] per il numero C; ma l'vnità Z miſura C [c] per il medeſimo numero C, perciò tale parte è l'vnità Z di C, quale parte è C di D; e la proportione dell'vnità Z à C [d] ſarà come quella del numero C al numero D; per la qual coſa l'vnità Z, ed i numeri C, D ſono continui proportionali. Similmente perche C, multiplicando D, produce A; perciò D [e] miſurerà A per il numero C: ma C miſura D per il medeſimo numero C; il numero C dunque miſura D, come D miſura A; dalche C à D ſarà [f] come D ad A; ma C à D è come l'vnità Z à C; l'vnità Z dunque, ed i numeri C, D, A ſono continui proportionali; per la qual coſa frà l'vnità Z, ed il numero A, cadono due medij proportionali, che ſono C, & D. In oltre perche A, multiplicando ſe medeſimo produce B, perciò A [g] miſura B per il numero A: ma l'vnità Z miſura A [h] per il medeſimo numero A; l'vnità dunque miſura A, come A miſura B; dal che tale parte è l'vnità di A, quale parte è A di B; donde la proportione, che hà l'vnità Z ad A, haverà il numero A à B; ma frà l'vnità Z, ed il numero A, per quel che ſi è dimoſtrato, cadono i due medij C, & D proportionali; frà i due dunque A, & B, [K] caderanno ancora due medij continui proportionali, come F, ed E. Hor perche i quattro A, E, F, B ſono continui proportionali, ed il primo A, per ipoteſi, è numero cubo, ſarà ancora il quarto B [l] numero cubo, ch'era da dimoſtrarſi.

a 19. defin. del 7. b 7. aſſiom. del 7. c 5 aſſioma del 7. d 20. defin. del 7. e 7. aſſioma del 7. f 20. defin. del 7. g 7. aſſioma del 7. h 5. aſſioma del 7. K 8. del 8. l 23. del 8.

A 8 E 16 D 4 F 32 C 2 B 64 Z 1

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vn numero cubo multiplica vn altro numero cubo, il prodotto ſarà ancora numero cubo.

Siano

Siano espoſti i numeri cubi A, & B, e dalla loro ſcambieuole multiplicatione ſe ne produca il numero C. Dico che C è numero cubo. S'intenda multiplicato il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia D, ſarà D [a] numero cubo. Perche A, multiplicando ſe medeſimo, & multiplicando B, produce i numeri D, & C, hauerà A à B [b] l'iſteſſa proportione, quale hà D à C; ma frà i due numeri cubi A, & B [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri dunque D, & C [d] caderanno ancora due medij proportionali: e perche il numero D fù dimoſtrato numero cubo, in conſeguenza il numero C [e] ſarà ancora numero cubo, ch' era da dimoſtrarſi.

A 8 B 27
D 64 C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7. c 12. del 8.
d 8. del 8.
e 23. del 8.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vn numero cubo, multiplicando qualche altro numero, produce numero cubo; il numero multiplicato ſarà cubo.

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicando qualche numero B, produca il numero cubo C. Dico che il numero multiplicato B è numero cubo. Multiplichi il numero A ſe medeſimo, e produca il numero D. Perche A è numero cubo, ſarà ancora D [a] numero cubo. In oltre, perche A, multiplicando ſe medeſimo, e multiplicando B, produce i due D, & C, ſarà A à B [b] come D à C: ma frà i due numeri cubi D, & C, [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri ancora A, & B [d] caderanno due medij proportionali; fù ſuppoſto A numero cubo, in conſeguenza B [e] ſarà ancora numero cubo, il che era da dimoſtrarſi.

A 8 B 27
D 64 C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7. c 12. del 8. d 8. del 8. e 23. del 8.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se dalla multiplicatione d'vn numero in ſe medeſimo ſe ne produce vn numero cubo, il numero multiplicato ſarà cubo.

Sia il numero A, il quale multiplicando ſe medeſimo, produca il numero cubo B. Dico che A è numero cubo. Dalla multiplicatione di A in B ſe ne produca il numero C. Perche A, multiplicando ſe medeſimo, produce B, e di nuouo A multiplicando B produce C, per la 19. definitione del 7. il numero C ſarà cubo. Hor perche B, per ipoteſi, è numero cubo, e dalla multiplicatione del numero cubo B, nel numero A, ſe ne produce il numero cubo C, il numero A, per l'antecedente propoſitione, ſarà cubo, il che era da dimoſtrarſi.

A 8 B 64 C 512

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vn numero composto, multiplicando vn altro numero, produce qualche numero; il prodotto sarà numero solido.

Sia qualũque numero composto, il quale multiplicando qualche numero B, produca il numero C. Dico che il numero C sarà numero solido. Perche A, per ipotesi, è numero composto, qualche altro numero, oltre l'vnità, [a] misurerà esso numero A: sia dunque il numero D quello, che misura il numero A, il quale misuri A per il numero E; si che D, multiplicando E, [b] produca il medesimo numero A. In oltre perche D, multiplicando E, produce A, perciò multiplicando il prodotto di D in E, per B, produrrà vn numero vguale al prodotto di B in A; ma B, multiplicando A, produce C, in conseguenza il prodotto di D in E, multiplicato per il numero B, produrrà il numero C, e per la 17. definitione del 7. il prodotto C sarà numero solido, i di cui lati sono D, E, B, il che era da dimostrarsi.

A 6 B 11 C 66
D 2 E 3

a 13. defin. del 7.

b 9. assiom. del 7.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se il primo termine di quanti si voglia numeri continui proportionali, è l'vnità, il terzo, contando dall'vnità, è numero quadrato; ed interponendone sempre vno, tutti gli altri sono quadrati: il quarto è numero cubo; ed interponendone sempre due, gli altri sono numeri cubi: il settimo è quadrato, è cubo insieme; ed interponendone sempre cinque, tutti gli altri sono quadrati, e cubi insieme.

Siano esposti dall'vnità Z, quanti numeri si vogliano continui proportionali A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, P, e contando dall'vnità: Dico che il terzo B è numero quadrato; ed interponendone sempre vno, gli altri, come D, F, H, L, N &c. sono numeri quadrati; che il quarto C è numero cubo; ed interponendone sempre due, gli altri cioè F, K, N &c. sono numeri cubi; e che il settimo F è numero quadrato, e cubo insieme; ed interponendone sempre cinque, tutti gli altri, come N &c. sono numeri quadrati, e cubi insieme. Perche l'vnità Z al numero A è come A à B, tante volte l'vnità Z [a] misura il numero A, per quante volte il numero A misura B: ma l'vnità Z [b] misura A per il numero A, perciò il numero A misura B per il medesimo numero A; dal che multiplicando il numero A per il medesimo numero A [c] il prodotto sarà B; e per la 18. definitione

a 20. defin. del 7.
b 5. assiom. del 7.
c 9. assiom. del 7.

ne

ne del 7. il numero B sarà quadrato. Di più, perche i tre numeri B,C,D sono continui proportionali, ed il primo B, per quel che si è dimostrato è quadrato, il terzo ancora D [d] sarà quadrato. Nell'istesso modo, considerando i tre D,E,F continui proportionali, ed il primo D, per quel che si è dimostrato, è numero quadrato; sarà ancora il terzo F [e] numero quadrato: per la qual cosa, interponendone sempre vno, gli altri sono quadrati.

d 22. del 8.

e 22. del 8.

Di nuouo, perche l'vnità Z ad A è come B à C, tante volte l'vnità Z misurerà A, [f] per quante volte B misura C: ma l'vnità Z misura A [g] per il

f 20. defin. del 7.

g 5. assiom. del 7.

Z 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729. G 2187. H 6561. K 18683. L 56049. M 168147. N 504441. P 1513323.

medesimo numero A; perciò il numero B misura C per l'istesso numero A; per la qual cosa, multiplicando A per B, il prodotto sarà C; e perche A, multiplicando se medesimo, produce B, e multiplicando B, produce C, per la definitione 19. del 7. il numero C sarà cubo. In oltre perche i quattro numeri C, D, E, F sono continui proportionali, ed il primo C è numero cubo; sarà il quarto F [h] ancora numero cubo. Similmente perche i quattro numeri F,G,H,K sono continui proportionali, ed il primo F è numero cubo, sarà il quarto K [K] ancora numero cubo. Ed il medesimo si proverà de gli altri, e perciò, interponendone sempre due, tutti *gli altri sono numeri cubi.*

h 23. del 8.

K 23. del 8.

Finalmente, perche il numero F, ch'è il settimo, contando dall'vnità, fù prima dimostrato essere numero quadrato, e poi numero cubo, sarà inconseguenza numero quadrato, e cubo insieme. E nell'istesso modo il numero N, ch'è il settimo, contando da F, essendone interposti cinque, cioè G,H,K,L,M, sarà quadrato, e cubo insieme. Ed il medesimo si dimostrerà per tutti gli altri, se i numeri continui proportionali saranno di maggior moltitudine, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se il primo termine, di quanti numeri si vogliano continui proportionali, è l'vnità, ed il primo, dopo l'vnità, è numero quadrato; tutti gli altri saranno numeri quadrati; e se il primo, dopo l'vnità, è numero cubo, tutti gli altri saranno ancora numeri cubi.

Siano esposti dall'vnità Z quanti si voglia numeri continui proportionali A,B,C,D,E,F, ed il primo A, dopo l'vnità, sia numero quadrato. Dico che tutti gli altri B,C,D, E,F &c. saranno numeri quadrati. Perche i numeri A,B,C,D,E,F sono dall'vnità continui proportionali, per l'antecedente propositione, il terzo B è numero

Z 1. A 4. B 16. C 64. D 256. E 1024. F 4096.

qua-

quadrato, ed interponendone sempre vno, gli altri, come D,F &c. sono numeri quadrati.

In oltre, per- Z 1 A 4 B 16 C 64 D 256 E 1024 F 4096
che i tre numeri

a 22. del 8. A,B,C sono continui proportionali, ed il primo A, per ipotesi, è quadrato, il terzo C [a] ancora sarà quadrato; similmente, perche i tre C,D,E sono continui proportionali, ed il primo C è dimostrato essere numero

b 22. del 8. quadrato, sarà ancora il terzo E [b] numero quadrato. Per la qual cosa tutti i numeri B,C,D,E,F sono numeri quadrati. Ed il medesimo si dimostrerà, se saranno più numeri continui proportionali.

Di nuouo, supposto che A sia numero cubo. Dico, che tutti gli altri, come B,C,D,E,F sono numeri cubi.

Perche i numeri A,B,C,D,E,F, seguendo l'vnità Z, sono continui proportionali, per l'antecedente propositione, il quarto dall'vnità, cioè il numero C, sarà cubo; ed interponendone sempre due, gli altri come F &c. sono ancora numeri cubi.

Z 1 A 8 B 64 C 512 D 4096 E 32768 F 262144.

c 20. defin. del 7. d 5. assioma del 7. In oltre perche l'vnità Z al numero A è come A à B; tante volte l'vnità misurerà il numero A, [c] per quante volte A misura B; ma l'vnità Z [d] misura A, per l'istesso numero A; il numero A dunque misurerà il B per il medesimo numero A; e perciò A, multiplicando se medesimo, produce il numero B; ma il numero A, per ipotesi, è numero cubo, multiplicandosi il numero cubo A in se medesimo [e] produce il numero B, e per la

e 9. assioma del 7. terza propositione di questo, il numero B sarà cubo. Di più, perche i quattro A,B,C,D sono continui proportionali, ed il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto D [f] numero cubo. Nell'istesso

f 23. del 8. modo, essendo i quattro B, C, D, E continui proportionali, ed il primo B è dimostrato cubo, sarà il quarto E [g] ancora cubo: per la qual cosa tutti i numeri B,C,D,E,F sono cubi, il che era da dimostrarsi.

g 23. del 8.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se il primo termine, di quanti numeri si vogliano continui proportionali, è l'vnità; ed il primo, dopo l'vnità, non è quadrato, ne meno alcun altro sarà quadrato, eccettuatone il terzo, e tutti gli altri, interponendone sempre vno: e se il primo, dopo l'vnità, non è cubo, ne meno alcun altro sarà cubo, eccettuatone il quarto, e tutti gli altri, interponendone due.

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, P, Q continui proportionali, ed il primo A, prossimo all'vnità, non sia quadrato; ne meno alcun altro sarà quadrato, eccettuatone il terzo dall'vnità, e tutti gli altri, interponendone vno; cioè

eccet-

eccettuatone B, D, F, H, L, N, Q, &c. Se è possibile, oltre i notati B, D, F, H, L, N, Q, qualcun altro sia numero quadrato, come il numero E. Perche D

Z 1. A 2 B 4 C 8 D 16 E 32 F 64 G 128 H 256
K 512 L 1024 M 2048 N 4096 P 8192 Q 16384

ad E, ouero E ad F, è come A à B, inuertendo, [a] sarà E à D, ouero F ad E, come B ad A; dal che B ad A hauerà la proportione del numero quadrato E al numero quadrato D (stante che D, per l'ottaua propositione di questo, è numero quadrato) ouero quella del quadrato F al quadrato E: mà B, essendo il terzo dall'vnità, [b] è numero quadrato, in conseguenza il numero A, [c] ch'è il primo, dopo l'vnità, sarà quadrato, il che è contro all'ipotesi. Non dunque il numero E è quadrato. Nell'istesso modo si prouerà, che nissun altro, fuorche gli eccettuati, è numero quadrato.

a Scol. alla 10. del 7.
b 8. del 9.
c 24. del 8.

Di nuouo, supposto che il numero A, contiguo all'vnità, non sia cubo. Dico che niun altro sarà cubo, eccettuatone il quarto dall'vnità, e quelli che restano, interponendone sempre due; cioè eccettuatone i seguenti C, F, K, N, &c. Perche, se oltre questi, qualcun altro fusse cubo, che sia per esempio D, essendo i tre A, B, C, continui proportionali nella continua proportione de i tre D, E, F; per l'egualità [a] sarà A à C come D ad F; ed inuertendo, C ad A [b] sarà come F à D: mà il numero F, [c] per quel che si è detto, è cubo, ed il numero D, per suppositione è cubo, essendo C ad A come F à D, i numeri C, A saranno nella proportione del numero cubo F al numero cubo D: e perche il numero C, [d] quarto dall'vnità, è numero cubo, sarà ancora il numero A, [e] ch'è il primo dopo l'vnità, numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dunque D è numero cubo. Di nuouo, supposto, s'è possibile, che il numero E sia numero cubo. Perche i tre A, B, C sono continui proportionali, nella continua proportione de i tre C, D, E; sarà, per l'egualità, A à C [f] come C ad E, ed inuertendo, C ad A [g] sarà come E à C: E perche C, per l'eccettuatione, è numero cubo, ed E, per suppositione è numero cubo, sarà il numero cubo C ad A, come il numero cubo E al numero cubo C: per la qual cosa il numero A, [h] ch'è il primo dopo l'vnità, sarà numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dunque E è numero cubo. Si è dunque dimostrato, che i due D, E interposti frà i cubi C, F non sono numeri cubi: e nell'istesso modo si dimostrerà, che i due G, H, interposti frà i cubi F, K, non sono numeri cubi: e che i due L, ed M, interposti frà i cubi K, N, non sono numeri cubi, come fù proposto dimostrare.

a 14. del 7.
b Scol. alla 10. del 7.
c 8. del 9.
d 8. del 9.
e 25. del 8.
f 14. del 7.
g Scol. alla 10. del 7.
h 25. del 8.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano, continui proportionali; sempre il minore misura il maggiore per vno de' medesimi numeri proportionali.

Sia-

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A, B, C, D, E, F, G, H continui proportionali. Dico che il minore, come C, misura ogn'altro de' maggiori di lui, come per esempio H, per vno de' numeri A, B, C, D, E, F, G, H, cioè per quel termine, tanto lontano dall'vnità, per quanto è lontano il numero misurato da quello, che misura. Hor douendosi prouare, che il numero C misura H, per vno de i medesimi termini proportionali. Dico che C misura H per il numero E, ch'è tanto lontano dall'vnità Z, per quanto H è lontano da C. Perche i termini C, D, E, F, G, H sono continui proportionali, nella continua proportione de i termini Z, A, B, C, D, E, per l'egualità, sarà Z ad E [a] come C ad H; e perciò l'vnità Z misura E [b] come C misura H: mà l'vnità Z misura E [c] per l'istesso numero E, in conseguenza il numero C misura H per il medesimo numero E. Similmente dico, che C misura G per il numero D, il quale è distante dall'vnità Z, per quanto G è lontano da C. Essendo i cinque termini C, D, E, F, G continui proportionali nella proportione de i cinque termini Z, A, B, C, D, per l'egualità, sarà Z à D [d] come C à G; dal che l'vnità Z misurerà D, come C misura G: mà l'vnità Z misura D [e] per il medesimo numero D, perciò il numero C misura G per l'istesso numero D. Nell'istesso modo si proverà, che ogn'altro numero minore misura ogn'vno de' maggiori, per vno de' medesimi numeri proportionali, ch'era da dimostrarsi.

Z 1. A 3 B 9 C 27 D 81 E 243 F 729 G 2187 H 6561

a 14. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 5. assioma del 7.
d 14. del 7.
e 5. assioma del 7.

COROLLARIO.

Nell'antecedente propositione appare, che, se saranno dall'vnità quanti numeri si vogliano continui proportionali, sempre ciascuno de' minori misura ciascuno de' maggiori, per vno de' medesimi numeri proportionali, cioè per quel numero, che è tanto distante dall'vnità, per quanto è distante il numero misurato da quello, che misura.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, quei numeri primi, che misurano l'vltimo, misureranno ancora il prossimo all'vnità.

Siano esposti dall'vnità Z quanti si voglia numeri continui proportionali A, B, C, D. Dico che quei numeri primi, che misurano l'vltimo termine D, misureranno ancora il numero A, ch'è prossimo all'vnità. Sia qualunque numero primo E, il quale misuri il numero D. Dico che

il

il numero primo E misura ancora il numero A. Se il numero E non misura il numero A, il numero primo E [a] sarà primo al numero A, cioè i due A, & E saranno frà di loro primi; e perche E misura il numero D,

a 31. del 7.

Z 1	A 10	B 100	C 1000	D 10000
E 5	H 20	G 200	F 2000	

lo misurerà per qualche numero; lo misuri dunque per il numero F; multiplicando E il numero F [b] produrrà il numero D. Perche D è distante da A come C da Z, per il Corollario antecedente, A misurerà D per il numero C; e perciò A, multiplicando C, [c] produce D: mà E, multiplicando F, produce il medesimo D, perciò il prodotto della multiplicatione di A in C è vguale al prodotto della multiplicatione di E in F. Si considerino quattro numeri, de' quali il primo sia A, il secondo E, il terzo F, ed il quarto C. Perche il prodotto del primo A, e quarto C, è vguale al prodotto del secondo E, e terzo F; sarà il primo A al secondo E, [d] come il terzo F al quarto C; mà i due A, E sono frà di loro primi, e perciò [e] minimi nella loro proportione, in conseguenza i numeri A, ed E, [f] misureranno vgualmente i due F, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente F, come il conseguente E misura il conseguente C; e supposto, che il numero E misuri C per G, multiplicando E nel numero G, [g] produrrà il numero C. In oltre, perche A, per l'antecedente Corollario, misura C per il numero B, multiplicando A in B [h] il prodotto sarà C: mà si disse, che G era prodotto dalla multiplicatione di E in G, sarà il prodotto di E in G vguale al prodotto di A in B; e sarà A primo ad E secondo, [K] come G terzo à B quarto: mà i numeri A, ed E, sono primi frà loro, in conseguenza [l] sono i minimi nella loro proportione di G à B; per la qual cosa i numeri A, E [m] misurano vgualmente i numeri G, & B, cioè l'antecedente A misura l'antecedente G, ed il conseguente E misura il conseguente B. E supposto, che E misuri B per il numero H, multiplicando E in H [n] il prodotto sarà B. Perche, per il Corollario antecedente, A misura B, per il medesimo numero A (stante che A è distante dall'vnità, come B è distante da A) perciò A, multiplicando se medesimo, [n] produce B; mà E, multiplicando H, produce il medesimo B, perciò il prodotto di A in se medesimo è vguale al prodotto di E in H. Si considerino tre numeri, cioè il primo E, il secondo A, ed il terzo H. Perche il prodotto del primo E nel terzo H è vguale al prodotto del secondo A in se medesimo; sarà E ad A, [o] come A ad H: mà i due E, ed A sono frà di loro primi, ed in conseguenza [p] minimi nella proportione di E ad A, ouero di A ad H; perciò i numeri E, A [q] misureranno vgualmente i numeri A, H, cioè l'antecedente E misura l'antecedente A, ed il conseguente A misura il conseguente H. Mà, per ipotesi, E non misura A, il numero dunque E misurarebbe, e non misurarebbe il numero A, ch'è impossibile. Per la qual cosa, se il numero primo E misura il numero D, misurerà ancora il numero A prossimo all'vnità, che era da dimostrarsi.

b 9. assioma del 7.
c. 9 assioma del 7.
d 19. del 7.
e 23. del 7.
f 21. del 7.
g 9. assioma del 7.
h 9. assioma del 7.
K 19. del 7.
l 23. del 7.
m 21. del 7.
n 9. assioma del 7.
o 20. del 7.
p 23. del 7.
q 21. del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, e quello, ch'è dopo l'vnità, sia primo; niun' altro misurerà il massimo, fuor che quelli, che sono nei proposti numeri proportionali.

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A,B,C,D continui proportionali, de'quali il numero A, ch'è prossimo all'vnità Z, sia numero primo. Dico che niun'altro numero, fuor che i tre A, B, C, misureranno il massimo D. Misuri, s'è possibile, qualche altro numero E il massimo D, il numero E non sarà numero primo; perche se fosse numero primo, misurando il numero D, per l'antecedente propositione, misurarebbe il numero A, ch'è prossimo all'vnità, il che è impossibile, stante che il numero A è supposto numero primo. Non dunque il numero E

a 33. del 7. è primo, ma è composto, dal che [a] qualche numero primo lo misura. Dico che altro numero primo non lo misura, fuor che il primo A. Perche, se qualche altro nu-

Z 1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E ----	H ----	G ----	F ----

b 11. assiom. del 7. c 12. del 9. mero primo, fuor che A, misurasse il numero E, *quello* [b] *misurarebbe* il numero D (ch'è misurato da E) dal che il medesimo [c] misurarebbe il numero A prossimo all'vnità, ch'è impossibile per essere A numero primo, e perciò non altro numero primo misura E, fuor che il numero A. Inoltre, perche E misura D, lo misuri per qualche numero F. Dico che F è diuerso da i numeri A,B,C. Se F sarà il medesimo, che vno de i numeri A, B, C; perche E misura D per il numero F, lo misurerà ancora per

d 8. assiom. del 7. e 11. del 9. vno de'numeri A,B,C; ed all'incontro, [d] quel numero in A, B, C, che sarà vguale ad F, misurerà il numero D per il numero E; ma il numero D [e] è misurato da vno de i numeri A,B,C, per vno de i medesimi A,B,C; sarà E vno de i numeri A,B,C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero F è il medesimo, che vno de i tre A, B, C, ma è diuerso. Hor perche E misura D per F, all'incontro F [f] misura D per E. Dico che F non

f 8. assiom. del 7. è numero primo. Perche, se fosse numero primo, misurando l'vltimo D, misurarebbe ancora [g] il numero A, ch'è prossimo all'vnità, ch'è impossibile (stante che A è numero primo); e perciò F sarà numero composto; per la qual cosa [h] qualche numero primo lo misura. Dico di nuouo non

g 12. del 9. h 33. del 7. essere altro numero, fuor che il numero A. Se altro numero primo misura il numero F, perche F misura D, quel numero primo [K] misurerà ancora il numero D, e misurerà [l] parimente il numero A, prossimo all'vnità, ch'è impossibile; stante che A è numero primo. Non dunque altro nu-

K 11. assiom. del 7. l 12. del 9. ro primo misura F, che il numero primo A. Perche dunque E misura D per F, multiplicando E per F, [m] il prodotto sarà D. In oltre, perche C è distante dall'vnità, come D è distante da A, per il Corollario all'11. propositione di questo, A misura D per il numero C; e perciò A, [n]

m 9. assiom. del 7. n 9. assiom. del 7.

multi-

multiplicando C, produce D: ma il numero D è prodotto dalla multiplicatione di E in F, sarà il prodotto di A in C vguale al prodotto di E in F; per la qual cosa A primo ad E [o] secondo, sarà come F terzo à C quarto: ma per quel che si è dimostrato, A misura E, il numero F dunque [p] misurerà il numero C; e supposto che lo misuri per il numero G, si tralasci l'vltimo D, e si consideri C come vltimo.

o 19. del 7.

p 20.defin. del 7.

Se G fosse il medesimo, che vno de i numeri A, & B, vno de i numeri A, & B sarebbe quello, per il quale F misura C; ed all'incontro [q] vno de i numeri A, & B, misurerà C per il numero F: ma ciascuno de i numeri A,B, misura C [r] per vno de i medesimi numeri A, B; sarà F il medesimo, che vno de i numeri A,B; il che è falso, essendosi dimostrato, che F nõ è vno de i numeri A, B. Non dunque G è il medesimo di vno de i numeri A,B. E perche F misura C per G, all'incontro G [t] misurerà C per F. Dico che G non è numero primo. Perche se fosse primo, misurando l'vltimo C, misurerà ancora il numero primo A, [u] ch'è prossimo all'vnità, il che è impossibile; non dunque G è numero primo, ma è composto, e perciò [x] qualche numero primo lo misura. Dico che questo non può essere altro numero, che A. Imperciochè se altro numero primo, che A, misura G, perche G misura l'vltimo C, quello, che misura G, [y] misurerà ancora l'vltimo C, ed inconseguenza misurerà [z] parimente il numero primo A, ch'è più prossimo all'vnità, il che è impossibile. Non dunque altro numero primo misura G, fuorche A: Inoltre perche F misura C per il numero G, multiplicando G per F, [a] il prodotto sarà C. Similmente essendo C distante da A, come B è distante dall'vnità, il numero A misurerà C [b] per il numero B; e perciò A, multiplicando B, [c] produce C; si disse, che G, multiplicando F, produce il medesimo C; sarà il prodotto di A in B vguale al prodotto di G in F. Si considerino quattro numeri, il primo sia A, il secondo F, il terzo G, ed il quarto B. Perche il prodotto del primo A, & quarto B, è vguale al prodotto del secondo F, & terzo G, sarà il primo A al secondo F, [d] come il terzo G al quarto B: ma, per quel che si è dimostrato, A misura F, perciò G [e] misurerà il numero B; lo misuri per il numero H, si tralasci l'vltimo C, e si consideri B come vltimo. E tenendo il modo antecedente proueremo, che H è diuerso da A, come si è fatto di F, & G,

Z 1 A 5 B 25 C 125 D 625
E---- H---- G---- F----

r 11. del 9.

t 8. assioma del 7.

u 12. del 9.

x 33. del 7.

y 11. assiom. del 7.

z 11. del 9.

a 9. assioma.

b Corol. alla 11. del 9.

c 9. assioma del 7.

d 19. del 7.

e 20. defin. del 7.

Se H è l'istesso, che A, ed il numero G misura B per il numero H, il medesimo numero G misurerà B per il numero A; ed all'incontro A [f] misurerà B per G. In oltre, perche A è distante dall'vnità, come B è distante da A, per il Corollario all'11. di questo, A misurerà B per il medesimo numero A: ma si disse che A misura B per il numero G, in conseguenza G sarà il medesimo, che A; il che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque H è l'istesso, che A, mà è diuerso. Di più, perche G misura B per H, perciò G, multiplicando H, [g] produrrà il numero B. Similmente perche A misura B per il medesimo numero A, multiplicandosi A in se medesimo, produrrà il numero B: per la qual cosa il

f 8. assioma del 7.

g 9. assioma del 7.

prodotto di H in G sarà vguale al prodotto di A in se medesimo; e perciò la proportione del primo H h al secondo A sarà come il secondo A al terzo G; ed inuertendo, A ad H sarà come G ad A: ma, per quel, che si è dimostrato, A misura H, in conseguenza G misurerà A; il che è impossibile, mentre, per ipotesi, A è numero primo. Per la qual cosa se A è numero primo, nissun'altro numero misurerà il massimo D, che i numeri A, B, C, come fù proposto dimostrare.

h 20. del 7.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Se i numeri primi misurano il minimo di quelli, ch'è misurato da loro; nissun altro numero primo misurerà quel minimo, fuor che i medesimi, che lo misurano da principio.

Sia A il minimo numero, misurato da i numeri primi, B, C, D. Dico, che nissun altro numero primo misurerà il minimo A, fuor che i tre B, C, D. Misuri il minimo A qualcun'altro numero primo, diuerso da i tre B, C, D, che sia E; il quale misuri il numero A per il numero F; il numero E, multiplicando F, produrrà il numero A. E perche ciascun'numero B, C, D misura il numero A, per la 32. propos. del 7. ciascuno de i numeri B, C, D misurerà vno de i due E, F; e perche non misurano il numero E, per essere E numero primo, in conseguenza misureranno il numero F, il quale è minore di A, che è contro all'ipotesi, mentre il numero A è suppposto il minimo di quelli, misurati da i numeri B, C, D. Non dunque altro numero primo E, diuerso da B, C, D misurerà il numero A; ma i numeri primi B, C, D solamente, misureranno il minimo A, come fù proposto dimostrare.

A .....
B .. C ... D .....
E ---- F ------

SCOLIO.

I seguenti dieci Theoremi di Barlaam Monaco, dimostrano ne i numeri quelle medesime passioni, che nelle rette linee dimostra Euclide ne'i primi dieci Theoremi del secondo Elemento.

I.

Se saranno due numeri, vno de'quali sia diuiso in quante parti si voglia, il numero piano, fatto dalla multiplicatione de i due proposti numeri, è vguale à i numeri piani, fatti dalle multiplicationi di ciascuna parte del numero diuiso, nel numero non diuiso.

Siano i due numeri AB, & C; e sia AB diuiso nelle parti AD, DE, EB, ed il numero C non diuiso; e sia fatto il numero piano F dalla multiplicatione del numero C nel numero AB; di più, dalla multiplicatione del numero C nella

par-

parte AD sia fatto il numero piano GH; dalla multiplicatione del numero C nella parte DE, sia fatto il piano HK; e dalla multiplicatione del numero C nella parte EB sia fatto il numero piano KL. Dico che il numero piano F è vguale à i numeri piani GH, HK, KL, giunti insieme.

A . . . . D . . . E . . B C . .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . . . K L

Perche C, multiplicando AB, produce F, perciò AB misura F [a] per il numero C; ma il numero C [b] è misurato dall'vnità per l'istesso numero C, sarà dunque F misurato da AB, come C è misurato dall'vnità; e perciò AB ad F [c] è come l'vnità à C. Similmente perche C, multiplicando AD, produce GH, perciò AD misura GH [d] per il numero C; ma il numero C [e] è misurato dall'vnità per il medesimo numero C; il numero dunque AD misura GH, come l'vnità misura C; e perciò la proportione di AD à GH [f] è come quella dell'vnità al numero C. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DE ad HK è come l'vnità al numero C; e che EB ad LK è come l'vnità à C. Per la qual cosa tutto AB à tutto GL [g] sarà come l'vnità al numero C; ma l'vnità al numero C, per quel, che si è dimostrato, è come AB ad F, sarà AB ad F [h] come il medesimo numero AB à GL; e perciò i numeri F, & GL. sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

a 7. assioma del 7.
b 5. assioma del 7.
c 20. defin. del 7.
d 7. assioma del 7.
e 5. assioma del 7.
f 20. defin. del 7.
g 12. del 7.
h Scol. alla 12. del 7.

I I.

Se vn numero è diuiso in due parti, i due numeri piani, che si fanno dalla multiplicatione di tutto il numero in ciascuna parte, giunti insieme, sono vguali al numero quadrato, che si fà dalla multiplicatione di tutto il numero in se medesimo.

Sia il numero AB, diuiso nelle due parti AC, CB. Dico che i due numeri piani, cioè vno fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, e l'altro dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, giunti insieme, sono vguali al quadrato di tutto il numero AB. Si esponga il numero D vguale ad AB, sarà il quadrato del numero AB vguale al piano fatto dalla multiplicatione del numero D nel numero AB. In oltre perche il numero AB è diuiso ne i due numeri AC, CB, ed il numero D non diuiso è vguale al numero AB; il piano fatto dalla multiplicatione del numero D, e dalla parte AC, col piano fatto dal medesimo numero D, e dalla parte CB, sarà vguale al piano fatto da tutto il numero AB nella parte AC, col piano fatto dal medesimo numero AB nella parte BC: ma i piani fatti dal numero D, multiplicato in ciascuna delle parti AC, CB, insieme giunti, per l'antecedente dimostratione, sono vguali al piano fatto dalla multiplicatione del numero D, nel numero AB; saranno i piani fatti dalle multiplicationi del numero AB in ciascuna delle parti AC, CB, vguali al piano fatto dal numero D nel numero AB. E perche il piano fatto dal numero D nel numero AB è vguale al quadrato del numero AB; sarà il quadrato di tutto il numero AB vguale à i due piani fatti dalla multiplicatione del numero AB in ciascuna delle parti AC, CB, come fù proposto dimostrare.

D . . . . .
A . . . . C . . B

I I I.

Se vn numero sarà diuiso in due parti, il numero piano fatto dalla multiplicatione delle parti, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, doue fù fatto il quadrato.

Sia il numero AB, diuiso in due parti, come AC, CB. Dico che il numero piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, è vguale al piano fatto dalle parti BC, CA, col quadrato della parte CA. Si esponga il numero D, vguale al numero AC, sarà il piano fatto dal numero D nella parte AC, vguale al quadrato del numero AC. Similmente, essendo D vguale ad AC, il piano, fatto da BC in CA, è vguale al piano fatto da BC in D; ed il piano fatto da BA in D è vguale al piano fatto da BA in AC. In oltre perche la retta BA è diuisa in C, il piano fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero D, per il primo Theorema, è vguale à i due piani, fatti dalle multiplicationi di AC nel numero D, e di CB nel numero D: mà il piano fatto da AB in D è vguale al piano fatto da BA nella parte AC; sarà il piano fatto da BA in AC, vguale à i due piani fatti dà BC in D, e da AC in D: e perche i due piani fatti da BC in D, e da AC in D, sono vguali al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC; sarà il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte AC, vguale al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.

A....C.....B
D....

I V.

Se vn numero è diuiso in due parti, i quadrati delle parti, col doppio piano fatto dalla scambieuole multiplicatione delle parti, è vguale al quadrato di tutto il numero.

Sia il numero AB diuiso nelle due parti AC, CB, dico che i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto dalla scambieuole multiplicatione delle parti AC, CB, è vguale al quadrato di tutto il numero AB.

A.....C....B

Perche il numero AB è diuiso nelle due parti AC, CB, i piani fatti dalla multiplicatione di tutto il numero AB, in ciascuna delle parti AC, CB, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di tutto il numero AB; mà il piano, fatto dal numero AB nella parte AC, per l'antecedente dimostratione, è vguale al piano fatto da BC in CA, col quadrato di AC; ed il piano, fatto da tutto il numero AB nella parte BC, è vguale al piano, fatto da AC in CB, col quadrato di AC; saranno i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto da AC in CB, vguali al quadrato di tutto il numero AB, ch'era da dimostrarsi.

V.

Se vn numero paro è diuiso in due parti vguali, ed il

mede-

medesimo è diuiso in due parti ineguali ; il piano , fatto dalle parti ineguali , col quadrato della parte intermedia , è vguale al quadrato della metà del numero .

Sia il numero paro AB, diuiso nelle due parti vguali AC, CB , ed il medesimo numero AB sia diuiso nelle due parti ineguali AD, DB . Dico che il piano fatto dalla multiplicatione delle parti ineguali AD, DB , col quadrato della parte intermedia CD , è vguale al quadrato di CB, ch'è la metà del numero . Perche AC è vguale à CB, sarà il piano, fatto da CB in BD, vguale al piano fatto da AC in DB , ouero da BD in AC . In oltre , perche il numero AD è diuiso nelle due parti AC , CD, per il primo Theorema, il piano, fatto da BD in DC , col piano contenuto da BD in AC , è vguale al piano contenuto da BD in D A ; mà il piano contenuto da B D in AC, per quel , che s'è detto , è vguale al piano contenuto da CB, in BD ; sarà il piano contenuto da CB in BD, col piano di BD in DC , vguale al piano contenuto da BD in DA, ouero da AD in DB ; vgualmente s'aggiũga il quadrato del numero C D, ne viene il piano fatto da AD in DB , col quadrato di CD, vguale al piano fatto da CB in BD , col piano fatto da BD in DC , assieme col quadrato di DC: mà il piano contenuto da BD in DC, col quadrato di DC, per il 3. Theorema, è vguale al piano contenuto da BC in CD; sarà il piano contenuto da AD in DB , col quadrato di C D , vguale al piano contenuto da CB in BD , col piano fatto da BC in CD : mà il piano contenuto da C B in B D , col piano di BC in CD, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di CB; sarà il piano fatto da AD, in DB, col quadrato di CD , vguale al quadrato di CB, come fù proposto dimostrare .

A ..... C ... D .. B

V I.

Se vn numero paro sarà diuiso in due parti vguali , ed à quello se gli aggiunga vn numero ad arbitrio ; il piano, che si fà dalla multiplicatione di tutto l'aggregato , nel numero aggiunto , col quadrato della metà del primo numero , è vguale al quadrato del numero composto della metà , e dell'aggiunto.

Sia il numero paro AB, diuiso nelle due parti vguali AC, CB, al quale sia aggiunto il numero BD ad arbitrio . Dico che il piano , fatto dalla multiplicatione di tutto l'aggregato AD nel numero aggiunto DB , col quadrato della metà CB, è vguale al quadrato del numero CD, composto della metà CB, e del numero aggiunto BD . Perche AC , per ipotesi , è vguale à CB , il piano , fatto dalla multiplicatione di DB in BC, è vguale al piano contenuto da DB in CA , ouero da AC in BD . Si consideri il numero AD, diuiso nelle parti AC, CD, per il primo Theorema, il piano , fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB , è vguale à i due piani contenuti da AC in DB , e da CD in DB : mà il piano

A ..... C ..... B ... D

contenuto da AC in BD è vguale al piano de'i due DB, BC; ſarà il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB, vguale à i due piani, cioè vno contenuto da CD in DB, e l'altro contenuto da DB in BC; vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il piano fatto dal numero AD nel numero BD, col quadrato di CB vguale à i piani contenuti da CD in DB, e da DB in BC, col quadrato di CB; mà il piano contenuto da DB in BC, col quadrato di CB, per il 3. Theorema, è vguale al piano fatto DC in CB; ſarà il piano contenuto da AD in DB, col quadrato di CB, vguale al piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB. E perche il piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB, per il ſecondo Theorema, è vguale al quadrato di CD; ſarà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AD nel numero DB, col quadrato del numero CB, vguale al quadrato del numero CD, come fù propoſto dimoſtrare.

A.....C.....B...D

V I I I.

Se vn numero è diuiſo in due parti, il quadrato di tutto il numero, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, col quadrato del rimanente.

Sia il numero AB diuiſo nelle due parti AC, CB. Dico che il quadrato di tutto il numero AB, col quadrato della parte BC, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC.

A.....C...B

Perche il numero AB è diuiſo nelle due parti AC, CB, il piano contenuto da tutto il numero AB, nel numero BC, col piano contenuto da tutto AB nella parte AC, per il ſecondo Theorema, è vguale al quadrato di AB: mà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AB in AC, per il terzo Theorema, è vguale al piano contenuto da i numeri BC, CA, col quadrato di AC; ſarà il piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i due numeri AC, CB, più il quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il quadrato di AB, più il quadrato di CB, vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i numeri AC, CB, più i quadrati delle parti AC, CB: mà il piano contenuto da i due AC, CB, col quadrato di CB, per il terzo Theorema, è vguale al piano, contenuto da i due AB, BC, il doppio piano dunque, contenuto da i due AB, BC col quadrato di AC, ſarà vguale al quadrato di AB, col quadrato di CB, ch'era da dimoſtrarſi.

V I I I I.

Se vn numero è diuiſo in due parti, il quadruplo piano, contenuto da tutto, e da vna delle parti, col quadrato del rimanente, è vguale al quadrato del numero, compoſto di tutto, e di quella medeſima parte,

Sia

Sia il numero AB, diuiſo nelle due parti AC, CB, al quale s'aggiunga il numero BD; vguale al numero BC. Dico che il quadruplo piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC, è vguale al quadrato di AD. Perche B D è vguale, per coſtruttione, à BC, il piano, con- A.....C...B...D tenuto da AB in BD, ſarà vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC; ed il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, ſarà vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC. Si conſideri il numero AD diuiſo ne i due numeri AB, BD; per il quarto Theorema, il quadrato di tutto il numero AD è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BD, con i quadrati de i due AB, BD; mà il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, per quel che ſi è detto, è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC; ſarà il quadrato di AD vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, co'i quadrati de i due AB, BD, cioè con i quadrati de i due AB, BC; mà i quadrati de i due AB, BC, per il ſettimo Theorema, ſono vguali al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC; ſarà il quadrato di AD vguale al quadruplo piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC, ch'era da dimoſtrarſi.

I X.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed il medeſimo è diuiſo in due parti ineguali; i quadrati delle parti ineguali ſono il doppio del quadrato della metà, col quadrato del numero intermedio.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle due parti vguali AC, CB, ed il medeſimo numero AB ſia diuiſo nelle due parti ineguali AD, DB. Dico, che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, ſono il doppio del quadrato della metà AC, col qua A.....C....D..B drato del numero intermedio CD. Perche A C è vguale à CB, ſarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB; ed il piano contenuto da i due AC, CD, ſarà vguale al piano contenuto da i due BC, CD. In oltre perche il numero AD è diuiſo nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, il quadrato di AD ſarà vguale à i quadrati delle parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medeſime AC, CD; mà il doppio piano, contenuto dalle due AC, CD, è vguale al doppio piano, contenuto dalle due BC, CD; ſarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD, ne vengono i quadrati de i due AD, DB, vguali à i quadrati delle tre parti AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD: mà il doppio piano contenuto dalle due BC, CD, col quadrato di BD, per il ſettimo Theorema, è vguale à i quadrati de i due BC, CD; ſaranno i quadrati delle due AD, DB vguali à i quadrati delle due AC, CB, col doppio quadrato di CD; e perche il quadrato di CB è vguale al quadrato di CA; i quadrati dunque delle due AD, DB, ſono vguali al doppio quadrato di AC, col doppio quadrato di CD; ed in conſeguenza i quadrati delli due AD, DB, ſo- il doppio de i ſemplici quadrati delli due AC, CD, come fù propoſto dimoſtrare.

X.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed à quello s'aggiunga vna parte ad arbitrio; il quadrato di tutto l'aggregato, col quadrato della parte aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato del rimanente dell'aggregato.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle duè parti vguali AC, CB, al quale ſia aggiunta qualunque parte BD. Dico che il quadrato dell'aggregato AD, col quadrato della parte aggiunta BD,
è il doppio del quadrato della metà A A.....C.....B....D
C, col quadrato del rimanente CD.
Perche AC è vguale à CB, ſarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB, ed il piano contenuto dalle due parti AC, CD, ſarà vguale al piano contenuto dalle due DC, CB; dal che il doppio piano contenuto dalle due AC, CD, ſarà vguale al doppio piano, contenuto dalle due DC, CB. In oltre s'intenda il numero AD diuiſo nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, i quadrati delle due parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medeſime parti AC, CD, ſaranno vguali al quadrato di AD: mà il doppio piano contenuto dalle due AC, CD è vguale al doppio piano contenuto dalle due DC, CB; ſarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD; i quadrati de i due AD, DB, ſaranno vguali à i quadrati delle tre AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; mà, per il ſettimo Theorema, il doppio piano contenuto dalle due DC, CB, col quadrato di BD, è vguale à i quadrati delle due DC, CB, ſarà il doppio quadrato di CD, co'i quadrati delle due AC, CB, cioè col doppio quadrato di AC, vguale à i quadrati delle due AD, DB; ed i ſemplici quadrati AC, CD ſaranno la metà de i quadrati de i due AD, DB. Per la qual coſa i quadrati de' i due AD, DB, ſono il doppio de i quadrati delle due AC, CD, il che era da dimoſtrarſi.

LEMMA.

Se due numeri ſono primi frà loro, il piano contenuto da eſſi, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i loro quadrati; ed è ancora primo al ſolo aggregato de'loro quadrati.

Siano i numeri DE, EF frà di loro primi. Dico che il piano contenuto da i due DE, EF, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i quadrati de i due DE, EF. Perche ſe non ſono primi, qualche numero ſarà loro commune miſura; ſia quello il numero G. Perche G miſura il piano contenuto da i due DE, EF, e miſura l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col piano contenuto

da

da i medesimi DE, EF, misurerà ancora il loro composto, [a] *cioè misurerà l'aggregato de i quadrati di DE,* D..E...F
EF, col doppio piano contenuto da i due DE EF; ma i G---
quadrati de i due DE, EF, col doppio piano contenuto da i medesimi DE, EF, per il 4. de gli antecedenti Theoremi, è vguale al quadrato di DF; il numero dunque G misurerà ancora il quadrato di DF: ma per suppositione, misura il piano contenuto da i due DE, EF, in conseguenza il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, sono numeri frà di loro composti. In oltre, perche i numeri DE, EF, [b] *per ipotesi, sono primi frà loro; l'aggregato DF* [c] *sarà primo tanto à DE, quanto à DF; ed inuertendo ciascuno de i due DE, EF sarà primo ad FD; donde il piano contenuto da i due DE, EF,* [d] *sarà primo ad FD: per la qual cosa il medesimo piano contenuto da i due DE, EF,* [e] *sarà primo al quadrato di DF: ma il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, furono dimostrati essere frà di loro composti, saranno dunque primi frà loro, e saranno frà di loro composti, ch'è impossibile. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col medesimo piano di DE in EF, hanno commune misura, ma sono frà di loro primi.*

Dico di nuouo, che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF sono primi frà loro: perche se non sono frà di loro primi qualche numero sarà loro commune misura sia quello il numero G. Perche il numero G misura l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, e misura, per ipotesi, il piano contenuto da i due DE, EF, misurerà ancora [f] *il loro composto, cioè misurerà l'aggregato del piano contenuto da i due DE, EF, con i quadrati de i medesimi; dal che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, col piano contenuto da i medemi DE, EF, haueranno vna commune misura, ch'è contro à quello, che prima si è dimostrato. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de' quadrati de i medemi DE, EF, hanno commune misura, ma sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.*

a 10. assiom. del 7.
b 14. defin. del 7.
c 30. del 7.
d 26. del 7.
e 26. del 7.
f 10. assiom. del 7.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Se tre numeri, continui proportionali, sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione con essi, due, presi come si voglia, giunti insieme, sono primi al terzo.

Siano i tre numeri continui proportionali A, B, C, cioè, che il primo A al secondo B sia come il secondo B al terzo C, i quali siano i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione con essi. Dico che due, presi in qualunque modo, sono primi all'altro; cioè, che giunti insieme i due A, C, l'aggregato è primo al numero B; e giunti insieme i due B, C, l'aggregato è primo al numero A; e giunti insieme i due A, & B, l'

a 35. del 7. aggregato è primo al numero C. Si prendano [a] i due numeri DE,EF, che siano minimi nella proportione A à B, ò di B à C. Essendo i due DE,EF minimi nella medesima proportione de i tre continui proportionali A,B,C, per la 2. propositione dell'8, DE, multiplicando se medesimo, produce il primo termine A; e similmente EF, multiplicando se medesimo, produce il terzo C; e dalla scambieuole multiplicatione de i due DE, EF, se ne produce il medio B.

A.... B.....
C.....
D..E...F

Perche i numeri DE, EF sono i minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proportione con essi, per la 24. propos. del 7, sono frà di loro primi; e perciò, giunti insieme, sarà tutto il numero DF [a] primo à ciascuno di essi, cioè sarà primo al numero DE, e sarà ancora primo al numero FE: per la qual cosa [b] il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, sarà primo al numero EF; ma il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, per il 3. degli antecedenti theoremi, è vguale al prodotto, ò piano, contenuto da i due FE, ED, col quadrato di DE; sarà il prodotto, fatto da FE in ED, col quadrato di DE, primo al numero EF: ma il prodotto de i due FE, ED, è vguale al numero B; ed il quadrato di DE è vguale al numero A; sarà l'aggregato de i numeri A,& B, primo al numero EF. E perche C è il quadrato del numero EF, perciò i due A,B, [c] insieme giunti, sono primi al numero C, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 30. del 7.
b 26. del 7.
c 26. del 7.

Di nuouo, perche i due DE, EF [d] sono frà di loro primi, *il loro aggregato* FD [e] sarà primo al numero DE; *ed il prodotto, ò piano, contenuto* da i due DF, FE, [f] sarà primo *al medesimo numero DE: ma il prodotto, fatto da i due DF, FE, per il 3. de gli antecedenti Theoremi, è vguale al prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF; il prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF, sarà primo al numero DE: ma il prodotto de i due DE, EF è vguale al numero B; ed il* quadrato di EF è v*guale al numero C; l'aggregato dunque de i due numeri B,& C, sarà primo al numero DE; ed essendo A il quadrato di DE, sarà l'aggregato de* i due B, & C [g] primo al numero A, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

d 24. del 7.
e 30. del 7.
f 26. del 7.
g 26. del 7.

Finalmente perche i due DE, EF, per quel, che s'è detto, sono primi frà loro, l'aggregato de i loro quadrati, cioè l'aggregato de i quadrati di DE, EF, per l'antecedente lemma, sarà primo al piano contenuto da i due DE, EF; ma i quadrati de i due DE, EF sono i notati A, & C; ed il piano, contenuto da i due DE, EF, è vguale al numero B, in conseguenza i due A,& C, giunti insieme, sono primi al numero B, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri sono frà di loro primi, non è possibile, che il primo al secondo sia, come il secondo ad vn altro numero.

Siano i numeri A, & B, frà di loro primi. *Dico* che A, à B non può

essere

essere come B ad vn altro numero. Sia, se è possibile, A à B, come B ad vn altro numero, per essempio C. Perche i numeri A, & B sono frà di loro primi, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione di A à B; ma la proportione di B à C è come quella di A à B; i due minimi numeri dunque A, & B, [b] misurano vgualmente i due B, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente B, ed il conseguente B misura il conseguente D. E perche A [c] misura se medesimo, dunque il numero A è commune misura de i due A, & B; per la qual cosa i due A, & B [d] sono numeri frà loro compositi, ch'è contro all'ipotesi, mentre i numeri A, & B, furono supposti primi frà loro. Non dunque A à B è come B ad vn altro numero, ch'era da dimostrarsi.

A.....
B.....
C---------

a 23. del 7.
b 21. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, ed i loro estremi siano numeri frà di loro primi, non è possibile, che il primo al secondo sia come l'vltimo ad vn altro numero.

Siano quanti numeri si vogliano A,B,C,D, continui proportionali, i di cui estremi A, & D siano frà di loro primi. Dico che il primo A al secondo B non è come l'vltimo D ad vn altro numero. Sia, s'è possibile, A à B, come D ad vn altro numero, per essempio E. Perche i due A, & B sono primi frà loro, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione. E perche D ad E è come A à B, i minimi dunque A, & B [b] misureranno vgualmente i due D, ed E; cioè l'antecedente A misurerà l'antecedente D, ed il conseguente B misurerà vgualmente il conseguente E; ma il numero A [c] misura se medesimo, in conseguenza il numero A è commune misura de i due estremi A, & D; e perciò i due A, & D [d] sono frà loro compositi, ch'è contro all'ipotesi, mentre furono supposti frà loro primi. Non dunque A à B è come D ad vn altro numero, il che era da dimostrarsi.

A 8 B 12 C 18 D 27 E----

a 23. del 7.
b 21. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVIII.

Dati due numeri, considerare se à quelli si può trouare il terzo proportionale.

Siano dati i due numeri A, & B, e si voglia sapere, se à i dati numeri A, & B, si possa ritrouare il terzo proportionale, cioè si voglia conoscere se A à B possa essere, come B ad vn altro numero. O i numeri A, & B sono, ò non sono, frà di loro primi; se sono frà di loro primi, sarà manifesto, per la 16. propositione di questo, non potersi trouare il terzo proportionale.

A 4 B 6 D 9 C 36

Se i numeri A, & B non sono frà loro primi, multiplicando B se medesimo, produca il numero C. O il numero A misura, ò non misura il numero C; supposto prima, che A misuri il numero C, per il numero D. Dico che si può alli due A, & B, ritrouare il terzo proportionale; e che quello sarà l'istesso numero D. Perche A misura il numero C per il numero D; perciò A, multiplicando D, [a] produrrà C; ma il numero C è prodotto dalla multiplicatione di B in se medesimo; sarà il prodotto di A in D vguale al quadrato del numero B: per la qual cosa A à B [b] sarà come B à D; e perciò il numero D è il terzo proportionale à i due A, & B.

A 4 B 6 D 9 C 36

a 9. assioma del 7.

b 20. del 7.

Di nuouo, supposto, che A non misuri il numero C. Dico che à i due A, & B non è possibile ritrouare il terzo proportionale. Sia se è possibile, il terzo proportionale D, in modo, che A à B sia come B à D. Perche A à B è come B à D, i tre numeri A, B, D saranno continui proportionali; e perciò il prodotto fatto dalla multiplicatione degli estremi A, & D, sarà vguale [c] al prodotto del medio B in se medesimo; ma il prodotto di B in se medesimo, per costruttione, è il numero C; sarà il prodotto di A in D vguale à C; per la qual cosa il numero A misurerà C [d] per il numero D, ch'è contro all'ipotesi, mentre fù supposto, che A non misura il numero C. Non dunque D è il terzo proportionale, ed in conseguenza à i due A, & B non si può trouare il terzo continuo proportionale. Nell'istesso modo si può inuestigare, se à i numeri B, ed A si possa ritrouare il terzo proportionale, in modo che B ad A sia come A ad vn altro; il che era da farsi, e dimostrarsi.

A 6 B 4 D — C 16

c 20. del 7.

d 7. assioma del 7.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIX.

Dati tre numeri, considerare se à quelli si possa ritrouare il quarto numero proportionale.

Siano i dati tre numeri A, B, C, ò continui, ò non continui proportionali, e si voglia considerare se sia possibile ritrouargli vn quarto numero proportionale; cioè se A à B può essere come C ad vn altro numero. Multiplichi B il numero C, e produca D, ò il numero A misura, ò non misura il numero D; supposto prima, che A misuri il numero D per il numero E. Dico che à i tre A, B, C si può ritrouare il quarto proportionale; e che il medesimo numero E sara il quarto proportionale. Perche A misura D per il numero E, multiplicando A il numero E, [a] produrrà il numero D: ma B, multiplicando C, produce il medesimo numero D, il prodotto dunque fatto da gli estremi, A, ed E, sarà vguale al prodotto de i medij B, & C; per la qual cosa il primo A al secondo B [b] sarà come il terzo C al quarto E; sarà dunque il numero E il quarto proportionale.

A 4 B 8 C 9 E 18 D 72

a 9. assioma del 7.

b 19. del 7.

Di

Di nuouo, ſuppoſto che A non miſuri il numero D. Dico che non ſi può trouare il quarto proportionale alli tre A, B, C. Perche, ſe è poſſibile, ſia quello qualche numero E, in modo, che A à B ſia come C ad E; ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli estremi A, ed E, [c] vguale al prodotto de i medij B, & C; ma il prodotto de i medij B, & C, per coſtruttione, è il numero D; il prodotto dunque de i due A, ed E, ſarà vguale al numero D; per la qual coſa A miſura D [d] per il numero E, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che A non miſura D. Non dunque il numero E è il quarto proportionale, e perciò à i tre numeri A, B, C, non ſi può trouare il quarto proportionale. Nell'iſteſſo modo ſi conſidererà, ſe à i tre numeri C, B, A, ſi può trouare il quarto proportionale, in modo, che C à B, ſia come A ad vn altro, ed in tal modo s'è conſiderato ſe à tre dati numeri ſi può trouare il quarto proportionale, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

A 3 B 4 C 10 E ---- D 40

c 19. del 7.

d 7. aſſiom. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

La moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi.

Sia qualunque terminata moltitudine di numeri primi A, B, C. Dico che i numeri primi ſuperano la moltitudine A, B, C. Si prenda il numero DE [a] in modo, che DE ſia il minimo di tutti quelli miſurati da i propoſti A, B, C, al quale s'aggiunga l'vnità EF. O il compoſto D F è numero primo, ouero è numero compoſto. Sia nel primo luogo numero primo, in tal caſo i numeri A, B, C, DF ſono numeri primi, e perciò la moltitudine de i numeri primi A, B, C, DF ſupera la moltitudine data, A, B, C.

A 2 B 3 C 5
D --------- E - F
G --------

a 38. del 7.

Di nuouo, ſuppoſto che il numero DF non ſia numero primo, e perciò qualche numero primo lo miſurerà; ſia quello il numero G. Dico che il numero primo G non è alcuno de' propoſti A, B, C. Se G foſſe vno de i propoſti A, B, C, perche ciaſcuno de i tre A, B, C miſura il numero DE, ancora il numero G, che rappreſenta vno di quei tre, miſurerà il medeſimo numero DE. Hor ſe il numero G miſura tutto il numero DF, e miſura la parte DE, miſurerà ancora [b] il rimanente EF; cioè il numero G miſurerà l'vnità EF; il tutto miſura la parte, ch'è impoſſibile. Non dunque il numero primo G è vno de i propoſti A, B, C, ed in conſeguenza la moltitudine de i numeri primi A, B, C, G ſarà maggiore della moltitudine de' propoſti A, B, C. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſarà data qualunque altra moltitudine di numeri primi; per la qual coſa la moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi, ch'era da dimoſtrarſi.

b 12. aſſiom. del 7.

CO-

COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo di troua-re quanti numeri primi ſi vogliano d'aggiungere ad vna moltitudine terminata di numeri primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se quanti numeri pari ſi vogliano ſiano compoſti inſie-me, l'aggregato ſarà numero paro.

Siano quanti numeri pari ſi vogliano AB, BC, CD, i quali, compoſti inſieme, facciano tutto il numero AD. Dico che AD è numero paro. Perche i propoſti AB, BC, CD ſono numeri pari, ogn'vno di loro [a] ſi può diuidere in due parti vguali; ſia E la metà di AB, il numero F ſia la metà di BC, ed il numero G ſia la metà di CD; ſarà AB ad E, [b] come BC ad F, [c] come CD à G: per la qual coſa AD, ch'è il compoſto di tutti gl'antecedenti, ad E, F, G inſieme, ch'è il compoſto de i conſeguenti, ſarà [c] come vn antecedente ad vn conſeguente, cioè ſarà come *AB, ad E;* mà AB è il doppio di E, in conſeguenza AD ſarà *il doppio di E, F, G inſieme.* Hor eſſendo E, F, G *inſieme, la metà di AD*, ſi può dunque da AD prenderne la metà E, F, G, e per la ſeſta definitione *del ſettimo*, il numero AD, compoſto de *i numeri pari AB, BC, CD, è numero paro*, che era da dimoſtrarſi.

A ... B ..... C ..... D ..... E

a 6. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine pari, il loro compoſto ſarà numero paro.

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, DE, di moltitudine pari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AE. Dico che AE è numero paro.

Perche i numeri AB, BC, CD, DE ſono numeri diſpari, ogn'vno [a] è differente dal numero paro per l'vnità; e perciò, detratta da ciaſcuno l'vnità, i rimanenti ſono numeri pari, i quali, giunti inſieme, compongono [b] vn numero paro. E perche la moltitudine delle vnità detratte è numero paro, ſtante che la moltitudine de' termini è ſuppoſta paro, ſe l'aggregato di queſte vnità, ch'è numero paro, s'aggiunge all'antecedente compoſto, che ſi diſſe eſſere numero paro, l'aggregato, cioè il numero AE, [c] ſarà numero paro, come fù propoſto dimoſtrare.

a 7. defin. del 7.
b 21. del 9.
c 21. del 9.

THEORE-

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine diſpari, il loro compoſto ſarà numero diſparo.

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, di moltitudine diſpari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AD. Dico che AD è numero diſparo. Perche il numero diſparo è differente dal numero paro [a] per vna ſola vnità, detratta l'vnità ED dal numero diſparo CD, il rimanente CE ſarà numero paro. Perche li numeri diſpari AB, BC ſono di moltitudine pari, il loro aggregato AC [b] ſarà numero paro; al quale aggiungaſi il numero paro CE, ne verrà il compoſto AE [c] numero paro; ſe à queſto s'aggiunge l'vnità ED, il numero AD ſarà differente dal numero paro AE, per quanto è l'vnità ED; per la qual coſa il compoſto AD [d] ſarà numero diſparo, il che era da dimoſtrarſi.

A . . . B . . . . . C . . . . . E . D

a 7. defin. del 7.
b 22. del 9.
c 22. del 9.
d 7. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero paro.

Sia il numero paro AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che l'auanzo AC ſarà numero paro. O il numero BC, detratto, è la metà del numero AB, ò è maggiore, ouero minore della metà di AB. Sia nel primo luogo CB la metà di AB; perche il numero paro CB è la metà di AB, il rimanente AC ſarà vguale à CB: mà CB è ſuppoſto numero paro, ſarà ancora AC numero paro, come fù propoſto prouare.

A . . . . . C . . . . . B

Di nuouo, non ſia CB la metà di AB, mà ſia ò maggiore, ouero minore della metà. Perche i numeri AB, CB, per ipoteſi, ſono numeri pari, d'ogn'vno di eſſi [a] poſſiamo prenderne la metà: ſia dunque DB la metà di AB, ed il numero EB ſia la metà del numero CB; ſarà AB alla ſua metà BD, [b] come CB alla ſua metà BE; e permutando, ſarà AB à BC, [c] come DB à BE; e diuidendo, AC à CB [d] ſarà come DE ad EB; permutandoſi di nuouo, AC à DE [e] ſarà come CB à BE; mà CB è, per coſtruttione, il doppio di BE, ſarà AC il doppio di DE. Hor eſſendo DE la metà di AC, ſarà dunque AC [f] numero paro; per la qual coſa, detratto dal numero paro AB il numero paro CB, reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.

A . . . . . D . . . C . . E . . B

a 6. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 13. del 7.
d Scol. alla 22. del 7.
e 13. del 7.
f 6. defin. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero diſparo, quel, che reſta, ſarà numero diſparo.

Sia il numero paro AB, dal quale ne ſia detratto il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Da CB ſe ne detragga l'vnità CD, reſterà [a] il numero paro DB. Perche dunque tutto AB, per ipoteſi, è numero paro, detrattone il numero paro DB, reſta AD [b] numero paro; dal quale, detrattane l'vnità CD, reſta AC [c] numero diſparo, che era da dimoſtrarſi.

A.....C.D....B

a 7. defin. del 7.
b 24. del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn numero diſparo ſe ne detrae vn numero diſparo, il rimanente ſarà numero paro.

Sia AB numero diſparo, dal quale ſe ne detragga il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC è numero paro. Da i numeri diſpari AB, CB, ſe ne detragga l'vnità, reſtano i due AD, CD [a] *numeri pari; ſi che dal numero paro AD, detratto il numero paro CD,* [b] *reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.*

A.....C....D.B

a 7. defin. del 7.
b 28. del 9.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se dal numero diſparo ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero diſparo.

Sia il numero diſparo AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Dal numero diſparo AB ſe ne detragga l'vnità AD, reſta DB [a] numero paro, dal quale detrattone il numero paro CB, [b] *reſta il numero paro DC; al quale s'aggiunga l'vnità AD, ſarà AC* [c] *numero diſparo, come fù propoſto dimoſtrare.*

A.D.....C.....B

a 7. defin. del 7.
b 24. del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVIII.

Se vn numero diſparo multiplica vn numero paro, quel che produce ſarà numero paro.

Sia A numero diſparo, e B numero paro, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che il prodotto C è numero paro. Perche A, multiplicando B produce il numero C, ſarà C [a] compoſto di tante volte B, per quante vnità ſono nel numero A; e perche B è nume-

A... B....
C.....

a 15. defin. del 7.

ro paro, sara C composto di tante volte il numero paro B, per quante vnità sono nel numero A; mà il numero, composto di più numeri pari, b è numero paro; il numero C dunque, ch'è composto di più volte il numero paro B, sara numero paro, che era da dimostrarsi. b 21. del 9.

COROLLARIO I.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che se vn numero paro multiplica vn altro numero paro, il prodotto sarà numero paro,

COROLLARIO II.

D'onde ne segue, che vn numero paro, multiplicando se medesimo, produce numero paro.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se vn numero disparo multiplica vn numero disparo, quel, che produce, sarà numero disparo.

Siano i numeri dispari A, & B, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che C è numero disparo. Perche A, multiplicando B, produce C; il numero C sarà composto di tante volte il numero disparo B, a per quante vnità sono nel numero A; e perche tanto il numero A, quanto B, è numero disparo, sarà C composto dal numero disparo B, per moltitudini dispari; mà il numero, ch'è composto da numeri dispari, per moltitudini dispari, b è numero disparo; il numero dunque C, ch'è composto dal disparo B, per moltitudini dispari, sarà numero disparo, ch'era da dimostrarsi.

A.....
B...
C.....

a 15. defin. del 7.

b 29. del 9.

COROLLARIO.

Appare nell'antecedente propositione, che se vn numero disparo multiplica se medesimo, quel, che produce, sarà numero disparo.

SCOLIO.

Aggiungo i due seguenti Theoremi del Campano, che seruiranno come Lemmi alle dimostrationi succedenti.

Se il numero disparo misura il numero paro, lo misura per numero paro.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero paro B per il numero C. Dico che C è numero paro. Perche, se il numero C sarà numero disparo, il prodotto B, fatto dalla multiplicatione de i numeri dispari A, & C, [a] *sarà numero disparo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C è numero disparo, mà sarà numero paro.*

A... C....
B.....

a 29. del 9.

Se il numero disparo misura vn numero disparo, lo misura per numero disparo.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero disparo B per il numero C. Dico che C sarà numero disparo. Perche, se C fosse numero paro, il numero B, ch'è prodotto dalla multiplicatione del numero disparo A nel numero paro C, [a] *sarebbe numero paro, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero C è numero paro, ma sarà numero disparo, ch'era da dimostrarsi.*

A... C.....
B.....

a 28. del 9.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se il numero disparo misura vn numero paro, misurerà ancora la metà di quello.

Sia il numero paro A, misurato dal numero disparo B. Dico che il numero disparo B misurerà ancora la metà del numero paro A. Sia misurato il numero A dal numero B per il numero C, per lo Scolio antecedente, C sarà numero paro; e perciò il numero C [a] si può diuidere in due parti vguali. Hor perche B misura A per il numero C, all'incontro C misurerà A [b] per il numero B, per la qual cosa C sarà la parte di A denominata da B, come appariſce nella 3. definitione del 7. In oltre, perche C alla sua metà è come A [c] alla sua metà, permutando, sarà C ad A [d] come la metà di C alla metà del numero A; e perciò tante volte C misura A, [e] per quante volte la metà di C misura la metà di A: ma C misura tante volte A, [f] per quante vnità sono in B; perciò la metà di C misurerà tante volte la metà di A, per quante vnità sono in B; dal che B multiplicando la metà di C, [g] produce la metà di A. Per la qual cosa B misura la metà di A, come fù proposto dimostrare.

A... C....
B.....

a 6. defin. del 7.
b 8. assioma
c 20. defin. del 7.
d 23. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 8. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Se il numero disparo è primo à qualche numero, sarà ancora primo al doppio di quello.

Sia il numero disparo A, il quale sia primo al numero B, il di cui doppio sia il numero C. Dico che il numero A è primo al numero C. Se il numero A non è primo al numero C, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello il numero D. Dico

A.....
B.....
C.....D

prima

prima che D è numero disparo. Se D non è numero disparo, necessariamente sarà numero paro, il quale misurando il numero disparo A, lo misurerà per qualche numero E; e multiplicando il numero paro D per il numero E,[a] produrrà il numero paro A, ch'è contro all'

A ..... B .....
C ..... D ——
E ——

[a] 28. del 9.

ipotesi, mentre si è supposto il numero A disparo. Non dunque D è numero paro, ma è numero disparo. Hor essendo C il doppio di B, in conseguenza si può diuidere in due parti vguali, e perciò C[b] è numero paro; si è supposto C essere misurato da D, dunque il numero disparo D misura il numero C, e per l'antecedente propositione, D misurerà la metà di C, cioè misura il numero B: ma per la suppositione fatta, misura ancora il numero A; sarà dunque D commune misura de i due A, & B: per la qual cosa i due A, & B[c] sono numeri frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A, & C hanno commune misura, ma sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

[b] 6. defin. del 7.

[c] 14. defin. del 7.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

I numeri, che dal due procedono per il doppio, sono solamente parimente pari.

Dal numero due, notato A, Z 1 A 2 B 4 C 8 D 16 E 32

crescano per il doppio i numeri B,C,D,E. *Dico che questi sono solamente numeri parimente pari. Si esponga l'vnità* Z; *perche i numeri* A,B,C,D,E, *cominciando dall'vnità* Z, *successiuamente ogn'vno è doppio dell'antecedente, saranno i seguenti* Z 1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. *nella medesima proportione, cioè nella proportione doppia; in conseguenza il numero* A[a] *misurerà tutti gli altri* B, C, D, E, *e ciascuno de i numeri* B,C,D,E,[b] *misurerà il maggiore di lui per qualcheduno de'medesimi* A,B,C,D,E. E perche tutti sono numeri pari; perciò i numeri pari A,B,C,D,E sono misurati da i numeri pari A,B,C,D,E per li medesimi numeri pari, ed in conseguenza i numeri B,C,D,E[c] sono numeri pari.

[a] 11. assioma del 7.

[b] 11. del 9.

[c] 8. defin. del 7.

Che poi siano solamente numeri parimente pari, è manifesto, poiche essendo i numeri A,B,C,D,E, dall'vnità continui proportionali, ed il numero A, ch'è prossimo all'vnità, è numero primo, nissun' altro numero misurerà i proposti,[d] fuor che i medesimi A,B,C,D,E, i quali, perche sono tutti numeri pari, si misureranno l'vn l'altro; cioè i minori misurano i maggiori per i medesimi numeri pari; e perciò sono solamente numeri parimente pari.

[d] 13. del 9.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Se la metà d'vn numero è disparo, quello sarà solamente numero parimente disparo.

Sia

Sia la metà del numero A disparo. Dico che il numero A è solamente parimente disparo. Che sia parimente disparo si dimostra. Perche la metà di A è numero disparo, sarà il numero A.....
A misurato dal numero due, ch'è paro, per vn numero disparo, cioè per la sua metà; e perciò A [a] è numero parimente disparo. Che sia poi solamente numero parimente disparo, lo dimostraremo in questo modo.

a 9. defin. del 7.

Sia B la metà del numero A, e sia C il numero due; se A non è parimente disparo solamente, sarà ancora parimente paro; e perciò sarà misurato da qualche numero paro per numero paro. Intendasi il numero paro D, che misuri il numero A per il numero paro E; si che D, multiplicando E, [b] produrrà il numero A: ma il medesimo numero A è prodotto dalla multiplicatione del binario C nel B, il prodotto, fatto dal primo C nel quarto B, sarà vguale al prodotto fatto dal secondo D nel terzo E: per la qual cosa il primo C al secondo D [c] sarà come il terzo E al quarto B: ma il binario C misura il numero paro D; il numero dunque E misurerà il numero B; cioè il numero paro E misura il numero disparo B; ch'è impossibile. Non dunque A è numero parimente paro, ma è solamente numero parimente disparo, ch'era da dimostrarsi.

A.....
B..... C..
D----- E---

b 9. assioma del 7.

c 19. del 7.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Se il numero paro non nasce dalla continua duplatione del numero due, ne la sua metà è numero disparo; quello è numero parimente paro, e parimente disparo.

Sia il numero paro A, il quale non sia prodotto dalla continua duplatione del numero due, ne la sua metà sia numero disparo. Dico che il numero A è parimente paro, ed è ancora parimente disparo. Perche la metà del numero paro A è numero paro, perciò il numero due, ch'è numero paro, misura il numero paro A per la sua metà, ch'è numero paro, e per la definitione 8. del 7, il numero A è parimente paro.

A.....

Di nuouo s'intenda diuiso il numero A in due parti vguali, e similmente la metà sia diuisa in due parti vguali, e la metà di questa in due vguali, e con quest'ordine, fino à tanto, che si peruiene à qualche numero disparo, non potendosi peruenire al numero due, poiche in quel caso il numero A sarebbe prodotto dalla continua duplatione del numero due; ch'è contro all'ipotesi; se si peruiene al numero disparo, sarà il numero A misurato da quel numero disparo [a] per numero paro, non potendo essere misurato per numero disparo à causa, che i numeri dispari, multiplicati frà loro, [b] producono numero disparo, e dourebbero produrre il numero paro A. Hor perche il numero paro A è misurato dal numero di-

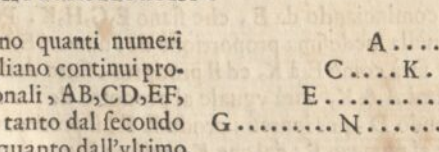
a Scol. alla prop. 29. del 9.

b 29. del 9.

ſparo per numero paro, ſarà, per la definitione 9. del 7. numero parimente diſparo: fù dimoſtrato eſſere ancora numero parimente paro, in conſeguenza il numero A ſarà parimente paro, e parimente diſparo, ch' era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXV.

Se ſiano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, e dal ſecondo, & vltimo, ſe ne detragga il primo numero; quello, che reſta dal ſecondo, al primo, ſarà come il rimanente dell'vltimo all'aggregato di tutti i termini, che l'antecedono.



Siano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, AB, CD, EF, GH, e tanto dal ſecondo CD, quanto dall'vltimo GH, ſe ne detragga il primo AB; cioè dal ſecondo CD ſe ne leui DK, vguale al primo AB; e dall'vltimo GH ſe ne leui LH vguale al primo AB. Dico che il reſtante CK al primo A è come il rimanente GL all'aggregato de gli antecedenti EF, CD, AB. Dal numero GH ſe ne detragga HM vguale al numero CD, e ſe ne ſepari HN vguale al numero EF. Perche MH è vguale al numero CD, ed HL è vguale, per ipoteſi, à DK, il rimanente LM ſarà vguale al rimanente KC. In oltre perche AB à CD è come CD ad EF, ed ancora come EF à GH; inuertendo, ſarà GH ad EF, [a] come EF à CD, e come CD ad AB; ma NH, per coſtruttione, è vguale ad EF, ed il numero MH è vguale à CD, e ſimilmente il numero LH è vguale ad AB; ſarà GH ad HN come HN ad HM, e come HM ad HL; e, diuidendo, GN ad NH, [b] come NM ad MH, e come ML ad LH; per la qual coſa tutti gli antecedenti inſieme GN, NM, ML, cioè tutto GL à tutti i conſeguenti inſieme, NH, MH, LH, [c] ſaranno come vno antecedente ad vn conſeguente, cioè come ML ad LH: ma i notati NH, MH, LH ſono vguali à i numeri EF, CD, AB, in conſeguenza GL à i numeri EF, CD, AB, inſieme giunti, ſarà come ML ad LH. E perche ML fù dimoſtrato vguale à CK, ed il numero LH fù fatto vguale ad AB, ſarà GL all'aggregato de i numeri EF, CD, AB, come CK al primo numero AB, il che era da dimoſtrarſi.

a Scol. alla 10. del 7.

b Scol. alla 22. del 7.

c 12. del 7.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXVI.

Se ſiano dall'vnità quanti numeri ſi vogliano continui proportionali nella proportione dupla, in modo, che l'aggregato di tutti ſia numero primo; e queſto, multipli-

cato

cato nell'vltimo, produca qualche numero, il prodotto sarà numero perfetto.

Siano dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A,B,C,D, nella proportione dupla, ed il loro aggregato, assieme con l'vnità, sia il numero E, il quale, multiplicando D, produca il numero F. Dico che F è numero perfetto. Per quanti sono i numeri A, B, C, D, altretanti se ne prendano nella proportione dupla, cominciando da E, che siano E,G,H,K. Perche i numeri A,B,C,D sono nella medesima proportione de i numeri E,G,H,K, per l'egualità, A à D [a] sarà come E à K, ed il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli estremi A,& K,[b] sarà vguale al prodotto de i medij D, ed E; ma E, multiplicando D, per ipotesi, produsse F, il prodotto dunque di A in K è vguale al numero F; dal che K [c] misura F per il numero A, cioè per il numero 2; e perciò F sarà il doppio del numero K, ed i numeri E,G,H,K,F sono continui proportionali. Dal secondo termine G, e dall'vltimo F, se ne leuino i numeri K, ed L, *ogn'vno vguale al numero E, ch'è il primo termine, ed i restanti siano i notati M, ed H; donde i due L, ed H, insieme, saranno vguali al numero F. E perche il numero G è il doppio di E, e dal numero G si è detratto il numero K, vguale ad E; sarà il restante M vguale ad E. In oltre, perche dal secondo termine G, e dall'vltimo F, se n'è detratto vn numero vguale al primo termine E; sarà il restante M al primo termine E, [d] come il rimanente H all'aggregato de'termini E,G,H,K; ma il numero M, per quel, che si è detto, è vguale ad E; sarà il numero H vguale all'aggregato de i termini E, G, H,K; si aggiunga ad H il numero L, ed all'aggregato de i numeri E, G, H, K, s'aggiunga l'aggregato de i termini Z,A,B,C,D,ch'è vguale ad E, ouero ad L; ne vengano tutti i termini Z, A,B,C,D,E,G,H,K, giunti insieme, vguali à i due L, ed H insieme, cioè vguali al numero F.* Di più, perche E, multiplicando D, produce F, perciò D misura F [e] per il numero E: ma ciascuno de i termini Z, A, B, C, [f] che sono nella proportione dupla, misura il massimo D, in conseguenza tutti i termini Z, A,B,C,D, misurano il numero F: e perche ciascun termine E,G,H,K, misura il medesimo numero F (stante che sono continuati nella proportione dupla) in conseguenza tutti i termini Z, A,B, C, D, E, G, H, K, cioè ogn'vno da per se, misura il numero F. Dico finalmente, che nissun' altro numero, fuor che gli antedetti, misura il numero F.

Lo misuri, s'è possibile, qualche altro numero P per il numero Q, multiplicando P nel numero Q, il prodotto [g] sarà il numero F: ma E, multiplicando D, produce il medesimo numero F; sarà il prodotto di E in D vguale al prodotto di P in Q. *Si considerino quattro numeri, cioè il pri-*

	Z 1	A 2	B 4	C 8	D 16
	E 31	G 62	H 124	K 248	F 496
		K 31			L 31
		M 31			H 465
			P ------	Q -----	

a 14. del 7.
b 19. del 7.
c 7. assioma del 7.
d 35. del 9.
e 9. assiom. del 7.
f 11. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

mo E, il ſecondo Q, il terzo P, ed il quarto D. Perche il prodotto del primo E nel quarto D è vguale al prodotto del ſecondo Q nel terzo P, ſarà il primo E al ſecondo Q, [h] come il terzo P al quarto D. E perche i numeri A, B, C, D ſono proportionali dall'vnità Z, ed il termine A, più proſſimo all'vnità, è numero primo, niſſun'altro numero miſurerà il maſſimo D, [K] fuor che gli antecedenti A, B, C; fù ſuppoſto il numero P non eſſere alcuno de i numeri A, B, C; in conſeguenza il numero P non miſurerà il numero D: ſi diſſe, che la proportione di E à Q è come quella di P à D, non miſurando P il numero D, ne meno E miſurerà il numero Q: per ipoteſi, E è numero primo, i due numeri dunque E, & Q [l] ſono frà di loro primi, e perciò [m] ſono minimi nella proportione di E à Q: mà E à Q è come P à D, i due minimi dunque E, & Q [n] miſureranno vgualmente i due P, & D, cioè l'antecedente E miſura l'antecedente P, ed il conſeguente Q miſura il conſeguente D. E perche niſſun'altro numero miſura D, [o] fuor che i notati A, B, C; ſarà il numero Q vno de i numeri A, B, C; e ſuppoſto, che ſia il medeſimo che B, perche i tre E, G, H ſono continui proportionali nella continuata proportione di B, C, D, per l'egualità, ſarà B à D [p] come E ad H; ed il prodotto de gli eſtremi B, & H, [q] ſarà vguale al prodotto de i medij D, ed E: mà il prodotto di D in E, per ipoteſi, è vguale al prodotto di P in Q; ſarà il prodotto di P in Q vguale al prodotto di B in H; e la proportione di Q à B [r] ſarà come quella di H à P; fù ſuppoſto Q il medeſimo, che B, ſarà dunque H il medeſimo che P; *il che è contro alla ſuppoſitione fatta*, mentre fù ſuppoſto P diuerſo da tutti i numeri A, B, C, D, E, G, H, K. Non dunque altro numero miſura il numero F, fuor che l'vnità, ed i numeri A, B, C, D, E, G, H, K, e perche queſti, per quel, che ſi è dimoſtrato, tutti miſurano *il numero F, e, giunti inſieme*, ſono vguali al medeſimo numero F, per la definitione 22. *del ſettimo, il numero F* ſarà numero perfetto, ch'era da dimoſtrarſi.

h 19. del 7.
K 13. del 9.
l 31. del 7.
m 23. del 7.
n 21. del 7.
o 13. del 9.
p 14. del 7.
q 19. del 7.
r 19. del 7.

SCOLIO.

Per facilitare le coſe à venire aggiungo qui li ſeguenti due Theoremi.

Frà l'vnità, ed il numero 2, e frà l'vnità, ed il numero 3; come ancora frà l'vnità, ed il numero 5, e frà i numeri, che differiſcono d'vna ſola vnità, non cade medio proportionale.

Cada prima, ſe è poſſibile, frà l'vnità A, ed il numero 2, notato B, il medio proportionale C; perche C è medio proportionale frà li due A, & B, ſarà C maggiore di A, e minore di B; perche ſe C foſſe vguale ad A, eſſendo A à C come C à B, e l'vnità A è poſta vguale à C, ſarebbe C vguale à B, per la qual coſa A ſarebbe vguale à B, ch'è contro all'ipoteſi: nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrarà che C non è vguale à B in conſeguenza C

A. C— B..

sarà minore di B, e maggiore di A: e perche la minima parte del numero è l'vnità, essendo C minore di B, ed il numero B costa di due sole vnità, il medio C non sarà maggiore dell'vnità, e perciò C sarà vguale ad A, ch'è contro à quello, che si è dimostrato. In oltre essendo C maggiore di A, al minimo sarà C due vnità, nel qual caso sarà vguale à B, ch'è contro à quello, che si è dimostrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A, ne vguale AB, ed in conseguenza non è medio frà li due A & B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A. C— B..

Di nuouo sia esposta l'vnità A, ed il numero 3 notato B, e cada frà essi, s'è possibile, il medio C: si dimostri, come prima si fece, che il medio C non è vguale ad A, ne meno è vguale al numero B, e perciò sarà maggiore di A, e minore di B; hor essendo C minore di B, al più costarà di due vnità, e similmente essendo maggiore di A, al minimo C costarà di due vnità, e perche il numero 2 è numero paro, perciò il medio C sarà numero paro; hor essendo C medio proportionale frà li due A & B, sarà A à C come C à B; mà l'vnità A misura il numero C [a] per l'istesso numero C, in conseguenza il numero C [b] misura il numero B per l'istesso numero C, dal che il numero paro misura il numero dispari, ch'è impossibile, non dunque C è maggiore di A, ne minore di B, ne meno è vguale ad A, ouero à B, e perciò non è medio frà li due A & B.

A. C— B...

a 5. assioma del 7.

b 20. defin. del 7.

In oltre sia esposta l'vnità A, ed il numero 5 notato B, e sia C, s'è possibile, medio frà li due A & B, si dimostri come prima si fece, che C non è vguale ad A, ne meno è vguale à B, mà C è maggiore di A, e minore di B; sia prima C minore di B per vna sola vnità; perche B è numero dispari sarà C numero paro, e perche A à C è come C à B, e l'vnità A [c] misura C, perciò il numero paro C misurerà il numero dispari B, ch'è impossibile; non dunque C è minore di B d'vna sola vnità. Sia di nuouo C minore di B di 2 vnità, cioè C sia numero ternario, se da B, ch'è 5 vnità, se ne detrae il ternario C, e le due vnità che restano si detraggono dal ternario C, resta vna sola vnità, e perciò li due C & B [d] sono numeri primi: e perche A à C è come C à B, e l'vnità A misura il numero C, in conseguenza il numero primo C misurerà il numero primo B, ch'è impossibile, non dunque C è minore di B di due vnità. Sia dunque C minore di B di tre vnità, cioè sia 2, ch'è numero paro; perche A à C è come C à B, e l'vnità A misura il numero C, in conseguenza il numero paro C misurerà il numero dispari B, ch'è impossibile, non dunque C è minore di B di tre vnità, ne meno è minore di B di quattro vnità, perche sarebbe vguale ad A; per la qual cosa C non è medio proportionale frà li due A & B ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

c 5. assioma del 7.

d 1. del 7.

A. C— B....

Finalmente siano li numeri A & B differenti per vna sola vnità in modo, che A sia minore di B. Dico che frà essi non cade medio proportionale. Sia s'è possibile, C medio proportionale, frà li due A & B. Dico prima che C non è vguale ad A ne meno è vguale al numero B, perche se fosse vguale ad A, essendo A à C come C à B, sarebbe C vguale à B, mà è ancora vguale ad A, in conseguenza A sarà vguale à B, ch'è contro all'ipotesi.

A... C— B....

Nell'

Nell'istesso modo si dimostrerà, che C non è vguale à B; per la qual cosa C è maggiore di A è minore di B, e perche B supera A per vna sola vnità, essendo C maggiore di A, al minimo sarà vguale à B, ch'è contro à quel che si è dimostrato; similmente essendo C minore di B al minimo sarà vguale ad A, ch'è contro à quel che si è dimostrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A; ne vguale à B, per la qual cosa non è medio frà li due A & B, ch'era da dimostrarsi.

I numeri, che sono nella dupla, ò tripla, ò quintupla proportione, ouero differiscono per vna sola vnità, non sono come numero quadrato à numero quadrato.

Siano prima i numeri A & B nella proportione dupla, si trouino [a] *i minimi nella proportione di A à B, che siano C & D. Perche A & B sono nella proportione dupla, i minimi saranno l'vnità, ed il numero 2, frà quali per l'antecedente dimostratione, non cade medio proportionale, e perciò* [b] *non sono piani simili, per la qual cosa C à D* [c] *non è come numero quadrato à numero quadrato, mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato.*

A.... B.....
C. D..

a 2. del 8.
b 18. del 8.
c 26. del 8.

Di nuouo siano i numeri A, & B nella proportione tripla. Dico che A à B non è come numero quadrato à numero quadrato. Si trouino i minimi numeri [d] *nella proportione di A à B, che siano C, & D, perche A, & B, sono nella proportione tripla, i minimi, cioè C, & D saranno l'vnità, ed il numero ternario, frà quali per l'antecedente dimostratione non cade medio proportionale, perciò* [e] *non sono piani simili, e la proportione di C à D* [f] *non sarà come numero quadrato à numero quadrato; mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato; ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri nella quintupla proportione non sono come numero quadrato à numero quadrato.*

A.. B.....
C. D...

d 2. del 8.
e 18. del 8.
f 26. del 8.

Finalmente siano i numeri A, & B, differenti solamente per vna sola vnità. Dico che non sono come numero quadrato à numero quadrato. Perche i numeri A, & B, differiscono per vna sola vnità, per l'antecedente dimostratione non cade frà loro alcun medio proportionale, e perciò [g] *non sono piani simili, ne meno sono* [h] *come numero quadrato à numero quadrato, ch'era da dimostrarsi.*

A... B....

g 18. del 8.
h 26. del 8.

Fine del Nono Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO DECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Commensurabili si chiamano le grandezze, quando sono misurate da vna medesima misura.

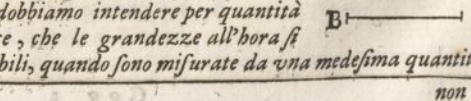
II.

Incommensurabili si dicono quelle grandezze, delle quali non si troua alcuna misura commune.

III.

Le linee rette sono commensurabili in potenza, quando il medesimo spatio misura i loro quadrati,

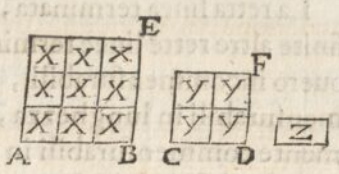
OGNI quadrato si chiama potenza del suo lato, e perciò, nelle cose à venire, quando si dirà la potenza d'vna retta linea, intenderemo l'istesso, come se dicessimo il quadrato di quella retta linea; e se per essempio, si dirà, che delle rette linee A, & B, in potenza l'vna è dupla all'altra, non si deue intendere la retta linea A esser dupla alla retta linea B, ma che la potenza della retta linea A è dupla alla potenza della retta linea B, cioè, che il quadrato della retta linea A, e duplo al quadrato della retta linea B. Ed il simile s'intenderà se si dirà tripla, quadrupla &c. supposto questo. Spiega Euclide nella prima definitione, che cosa dobbiamo intendere per quantità commensurabili, e dice, che le grandezze all'hora si chiamano commensurabili, quando sono misurate da vna medesima quantità, e



non

non importa, che non siano misurate vgualmente, ma basta, che ciascuna sia misurata dalla medesima quantità in modo, che non soprauanzi cosa alcuna; e quella quantità, che misura le grandezze commensurabili, si chiama commune misura. E nota, che in questa prima definitione Euclide parla delle quantità in genere, senza restringersi à particolare alcuno; si che volendola applicare à qualche particolare, come per essempio alle rette linee, si può dire, che le rette linee sono commensurabili in lunghezza, quando sono misurate da vna medesima retta linea; ed i piani sono ancora commensurabili, quando vn medesimo spatio gli misura: e con modo simile, questa prima definitione si può applicare à tutti i particolari. Spiega poi nella seconda definitione, quali sono le quantità incommensurabili, e, tenendo la medesima generalità in questa, che nella prima, chiama grandezze incommensurabili quelle, delle quali non si troua niuna misura commune; e questa ancora, come si è detto della prima definitione, si può applicare à tutti i particolari, chiamando le rette linee incommensurabili in lunghezza, quando nissuna retta linea le misura; ed i piani ancora si dicono incommensurabili, quando non si troua spatio alcuno, che gli misura: e con modo simile si può fare l'applicatione à tutti gli altri generi di quantità.

Premessa la cognitione delle quantità commensurabili, ed incommensurabili, così in genere, passa Euclide al particolare, e con la terza definitione ci spiega, che cosa doueremo intendere, quando si dirà, rette linee commensurabili in potenza; e dice, che all'hora le rette linee si diranno commensurabili in potenza, quando i loro quadrati saranno misurati da vn medesimo spatio; come per essempio. Siano esposte le rette linee AB, CD, i di cui quadrati, ò vogliamo dire potenze, siano AE, CF, le quali si concepiscano di tali grandezze, che diuisa AE ne gli spatij vguali, notati X, e diuisa CF ne gli spatij vguali, notati Y, ciascuno de gli spatij Y sia vguale à ciascuno de gli spatij X; s'intenda poi vn altro piano come Z, vguale ad vno de gli spatij X, ouero Y; in tal caso lo spatio Z misurerà giustamente il quadrato AE, senza che resti cosa alcuna; ed il medesimo piano Z misurerà giustamente il quadrato CF, senza che resti cosa alcuna: dal che il piano Z sarà commune misura delle due potenze AE, CF, e per la prima definitione, le due potenze AE, CF, saranno commensurabili; e secondo tal ipotesi le rette linee AB, CD, che sono lati di quelle potenze commensurabili, si dicono rette linee commensurabili in potenza, di modo che, ò che le rette linee siano, ò che non siano commensurabili in lunghezza, quando i loro quadrati hanno vna commune misura, quelle rette linee si dicono commensurabili in potenza. E notisi, che se i quadrati, ò potenze AE, CF sono commensurabili, ed i loro lati AB, CD sono ancora commensurabili in lunghezza, le medesime rette AB, CD, si chiameranno commensurabili in lunghezza, e si chiameranno ancora commensurabili in potenza; ma se i quadrati AE, CF sono commensurabili, ed i loro lati AB, CD non sono commensurabili in lunghezza; all'hora le rette AB, CD si dicono solamente commensurabili in potenza.



I V.

Le rette linee ſi dicono incommenſurabili in potenza, quando non ſi troua ſpatio alcuno, che miſura i loro quadrati.

Quando le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, come ſi dimoſtrerà à ſuo luogo; e quando le rette linee non ſono commenſurabili in lunghezza, può eſſere, che ſiano commenſurabili in potenza; e può eſſere, che non ſiano; cioè può eſſere, che qualche ſpatio miſuri i loro quadrati, e può eſſere, che mai ſi troui ſpatio alcuno, che li miſuri: ſe qualche ſpatio miſura i loro quadrati, quelle rette linee ſi dicono commenſurabili in potenza, come ſi diſſe nell'antecedente definitione; ma ſe in niſſun modo ſi troua ſpatio, che miſuri i detti quadrati, quelle rette linee ſi dicono eſſere incommenſurabili in potenza: ed in queſto caſo ſaranno incommenſurabili in potenza, e ſaranno ancora incommenſurabili in lunghezza, di modo, che, ſi come, quando due rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, così, quando ſono incommenſurabili in potenza, ſono ancora incommenſurabili in lunghezza; il che tutto ſi dimoſtrerà à ſuo luogo.

V.

La retta linea terminata, riſpetto alla quale tutte le infinite altre rette linee terminate ſono ò commenſurabili, ouero incommenſurabili, delle quali alcune ſono commenſurabili in lunghezza, ed in potenza, altre ſono ſolamente commenſurabili in potenza, ed altre ſono incommenſurabili in lunghezza, ed in potenza, ſi chiama Rationale.

Acciochè la ſpiegatione di queſta definitione rieſca più chiara, la poniamo dopo le ſeguenti due definitioni.

V I.

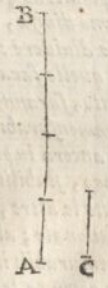
Tutte le altre rette linee, che ſono à queſta commenſurabili in lunghezza, e potenza, ouero commenſurabili ſolamente in potenza, ſi dicono Rationali.

Tutte

VII.

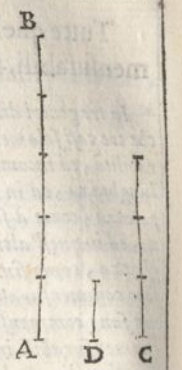
Tutte quelle rette linee poi, che à questa sono incommensurabili, si chiamano Irrationali.

In tre generi diuide Euclide l'infinita moltitudine delle rette linee, à causa che tre casi solamente si danno in Natura, che riguardano la loro commensurabilità, ed incommensurabilità; cioè, ò le rette linee sono commensurabili in lunghezza, ed in questo caso sono necessariamente commensurabili ancora in potenza, come à suo luogo si dimostrerà; ò non sono commensurabili in potenza, ed in quest'altro caso necessariamente ne meno sono commensurabili in lunghezza, come similmente si dimostrerà in questo decimo Elemento; ouero non sono commensurabili in lunghezza, ma sono commensurabili in potenza. Se non sono commensurabili in potenza (per il che, come si è detto, ne meno sono commensurabili in lunghezza) chiama le rette linee, secondo questo genere, Irrationali. Se le rette linee sono commensurabili in lunghezza (perilche sono ancora commensurabili in potenza) secondo quest'altro genere, le chiama Rationali. E finalmente, quando le rette linee non sono commensurabili in lunghezza, ma sono commensurabili in potenza, le chiama similmente Rationali. Due generi dunque di rette linee rationali si considerano in Natura, ed vn solo d'Irrationali, cioè. Quelle rette linee, delle quali in riguardo à qualche commune misura, se ne possono esprimere le parti, ch'Euclide chiama commensurabili in lunghezza, costituiscono il primo genere delle rette linee Rationali. Quelle rette linee poi, delle quali in riguardo à qualche commune misura, non se ne possono esprimere le parti, per il che si dicono incommensurabili, ò sono, ò non sono commensurabili in potenza; se sono commensurabili in potenza, cioè che delle loro potenze se ne possano in riguardo à qualche commune misura esprimere le parti, queste costituiscono l'altro genere di rette linee, che similmente si dicono Rationali. E se ne meno sono commensurabili in potenza, cioè, che ne in lunghezza, ne in potenza se ne possano esprimere le parti, in riguardo à qualche commune misura, quelle costituiscono il terzo genere, e si dicono Irrationali. E da quì si caua, che qualunque retta linea, considerata sola, senza comparatione ad altra retta linea, quella non è ne rationale, ne meno irrationale: ma se sarà comparata à qualche altra retta linea, all'hora, secondo le conditioni spiegate di sopra, ò sarà rationale, ouero irrationale. Per essempio, la retta AB, considerata sola, senz'altra comparatione, non è rationale, ne irrationale; ma comparata à qualche altra retta C, se la retta C misura giustamente la retta AB, diuisa AB nelle parti vguali alla retta C, verremo in cognitione di quante parti sono in AB vguali à C; e così potremo esprimere la moltitudine delle parti, che sono in AB, vguali alla retta C; ed in tal caso la retta AB è commensurabile in lunghezza, rispetto alla misura C, cioè la retta linea AB è quella, della quale se ne possono esprimere le parti, rispetto alla misura C; ed in questo caso la retta linea AB si chiama rationale. Se poi la retta linea C non misura giustamente la retta AB, ma si troua qualche retta D, la

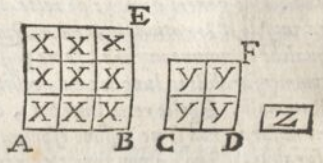


quale

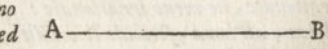
quale è commune misura delle due AB, & C, quelle, per la prima definitione, sono commensurabili in lunghezza, e però si diuidano le rette AB, & C, nelle parti vguali alla retta D, ed haueremo cognite le parti della retta AB, rispetto alla misura D; e si sapranno ancora le parti della retta C, rispetto alla medesima retta D; e, per quel, che si è detto, le rette AB, & C, delle quali sono cognite le parti, rispetto alla commune misura D, si dicono similmente Rationali; e queste sono quelle, che costituiscono il primo genere delle rette Rationali.



Di nuouo, siano le rette AB, CD, frà le quali non cada alcuna misura commune, quelle saranno incommensurabili in lunghezza, ed i loro quadrati siano AE, CF; e supposto, che lo spatio Z sia commune misura de i quadrati AE, CF, saranno le rette AB, CD, per la terza definitione, commensurabili in potenza. S'intendano diuisi i quadrati AE, CF, negli spatij X, ed Y, ogn'vno vguale allo spatio Z, ed haueremo cognite le parti delle potenze AE, CF, rispetto alla misura Z; e per quel, che si è detto, le rette AB, CD sono ancora rationali; e queste costituiscono il secondo genere delle rette Rationali. Quelle rette poi, che non hanno commune misura, ne in lunghezza, ne in potenza, costituiscono l'altro genere, e si dicono Irrationali.

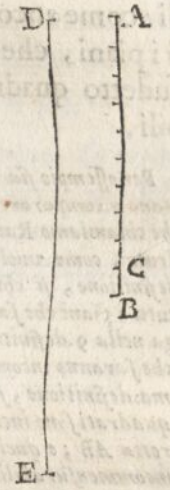


Finalmente, perche qualunque retta linea si può diuidere in quante parti vguali si vuole, perciò ogni retta linea si può stabilire come grandezza cognita, cioè come misura, ò norma, alla quale si possono comparare tutte le infinite altre rette linee. Per essempio, sia esposta qualunque retta linea AB, la quale potendosi à nostro arbitrio diuidere in quante parti ci vogliamo, la possiamo ancora stabilire come grandezza cognita, ed esprimerne quelle parti, nelle quali l'haueremo diuisa, ò altre, nelle quali si può sempre diuidere: e, comparando à questa tutte le infinite altre rette linee, molte di quelle saranno à questa commensurabili in lunghezza, e per quel, che si è detto, saranno ancora commensurabili in potenza: altre saranno solamente commensurabili in potenza; ed altre saranno incommensurabili in lunghezza, ed ancora in potenza; e questa retta linea AB, ò altra, che si può porre in suo luogo, stabilita come quantità à noi cognita, alla quale saranno comparate tutte le altre, è quella, che Euclide nella definitione quinta di questo, chiama Rationale; alla quale comparate le altre, quelle, che à questa saranno commensurabili in lunghezza, e potenza; ouero saranno solamente commensurabili in potenza, le chiama nella 6. defin. Rationali. Le altre, che à questa saranno incommensurabili in lunghezza, e potenza, nella 7. defin. le chiama Irrationali.



Per

Per più chiara spiegatione deuesi riflettere, che, douendosi misurare qualche spatio proposto, questo, come è vso commune, non si fà altrimente, che con l'aiuto di qualche cognita misura, diuisa in palmi, piedi, e simili: e perche questi palmi, ò piedi, non in tutti i paesi sono vguali, ma sono di differenti lunghezze, è manifesto, che le diuisioni di tali misure sono arbitrarie; e non solo le diuisioni sono arbitrarie, ma sono ancora arbitrarij i nomi delle medesime misure: poiche in alcuni luoghi le loro misure le chiamano Braccia, Cubiti &c. ed in altri le chiamano Canne, Catene, Pertiche, Passi, e simili. Hor, non douendo Euclide restringersi in vna delle antedette, ò altre misure particolari, per parlare in genere d'ogni misura, ò che si vsi, ò che possa vsarsi, intende diuisa qualunque retta in quante parti vguali si voglia, in modo, che questa retta possa rappresentare tutte le misure, che si vsano, e quante altre ad arbitrio dell'huomo se ne possono vsare; e questa è quella retta, che chiama Rationale, di modo, che sotto questa voce di Rationale dobbiamo intendere, non solo tutte le misure, che attualmente si vsano in ogni paese, ma quelle ancora, che à nostro arbitrio si possono vsare. E perche, quando con qualche misura vsata si misura qualche spatio, non si fà altro, se non che la comparatione frà la cosa misurata, e quella, con la quale si misura; come per essempio se fosse proposta qualunque misura AB, ò che sia pertica, ò canna, ò catena, ò braccio, ò passo &c. che sempre la chiameremo Rationale, e con questa si hauesse à misurare la lunghezza DE; questa operatione non è altro, se non che vedere quante volte DE contiene la misura AB; ouero quante parti è DE di quelle, che sono in AB; il che è vna semplice comparatione, che si fà trà la lunghezza DE, e la proposta misura AB. Quindi è, ch'Euclide chiama Rationale quella linea, alla quale sono comparate tutte le altre, ed è l'istesso che dire, con la quale si misurano tutte le altre.



Notisi, che quando si è stabilita la linea, che chiamiamo Rationale, come AB, ò altra, la quale arbitrariamente è diuisa in parti vguali, ogn'vna di quelle vguali parti, come BC, per essere singolare, si chiama Vnità. E perche, come s'è detto, la Rationale AB è vna certa misura determinata, alla quale si comparano tutte le altre rette; perciò ogn'una delle parti vguali, che sono in AB, si considera come vnità determinata; anzi che nelle comparationi da farsi frà la Rationale, e le altre grandezze, basta la cognitione della sola vnità CB; poco importando, che la Rationale consti di vna sola vnità, ò di più vnità, vguali à DB; atteso che la Rationale si può fare lunga, ò breue, quanto si vuole, ed è la medesima cosa dire, che DE consti per essempio, di mille di quelle parti, che in AB sono dieci; quanto è dire, che la retta DE consti di mille vnità, ò parti vguali à CB.

V I I I.

Il quadrato della ſudetta Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, ſi chiama ancora Rationale.

I X.

Tutti i piani, che ſono commenſurabili all'antedetto quadrato, ſi dicono ſimilmente Rationali.

X.

E quei piani, che al medeſimo ſudetto quadrato ſono incommenſurabili, ſi dicono Irrationali.

X I.

Le rette linee poi, i di cui quadrati ſono incommenſurabili all'iſteſſo ſudetto quadrato, ſi chiamano Irrationali: come ancora quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à i piani, che ſono incommenſurabili à quel medeſimo ſudetto quadrato, ſi dicono parimente incommenſurabili.

Per eſſempio ſia AB quella retta, ſtabilita come cognita, alla quale ſi habbiano à comparare tutte le altre; ſarà AB, come ſi è detto, quella retta, che chiamiamo Rationale, il di cui quadrato, come vuole Euclide nell' ottaua definitione, ſi chiamerà Rationale: e tutti i piani che ſaranno commenſurabili al quadrato di AB, per quelche ſpiega nella 9. definitione, ſi chiameranno ſimilmente Rationali. Quei piani poi che ſaranno incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il ſenſo della decima definitione, ſi chiameranno Irrationali. Finalmente le rette, i di cui quadrati ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſi dicono irrationali alla retta AB; e quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à quei piani, che ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il tenore dell' 11. definitione, ſi dicono Irrationali alla retta AB.

A ——————— B

Aggiungo, come fà il P. Clauio, vn ſolo poſtulato con alcuni Aſſiomi, de' quali ſi ſerue Euclide in queſto Elemento.

POSTVLATO.

Si prende per conceſſo, che di due ineguali grandezze del medeſimo genere, la minore ſi poſſa tante volte multiplicare, finche ne riſulti vna grandezza, che ſuperi la maggiore.

Per-

Perche ogni grandezza terminata si può accrescere in infinito, percio, multiplicandosi vna proposta grandezza più, e più volte, finalmente si peruerrà ad vna grandezza, maggiore di qualunque altra terminata grandezza del medesimo genere.

ASSIOMI.

I.

Quella grandezza, che misura molte altre grandezze, misurerà ancora il composto di quelle.

II.

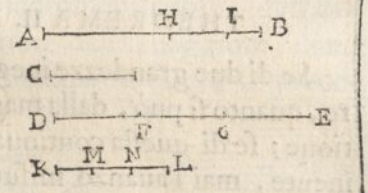
Se vna grandezza misura vn altra grandezza, misurerà ancora la misurata da quella.

III.

Se vna grandezza misura tutta vn'altra grandezza, e misura vna parte di quella, misurerà ancora il rimanente.

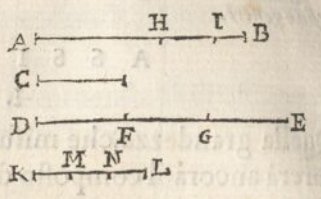
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due grandezze ineguali dalla maggiore se ne detrae più della metà, e dal rimanente se ne detrae più della metà, e di nuouo da quel, che resta, se ne detrae più della metà, e questo si faccia sempre, finalmente restarà vna grandezza minore dell'altra.



Siano proposte due grandezze ineguali, come AB maggiore, & C minore. Dico che, se dalla maggiore AB se ne detrae più della metà, e dal rimanente se ne detrae ancora più della metà, e di nuouo da quel, che resta, se ne detrae più della metà, e questo si faccia sempre, finalmente resterà vna grandezza minore della data C. Si prenda DE multiplice di C in modo, che la grandezza DE sia prossima maggiore a di AB, e si diuida nelle parti vguali à C, che siano DF, FG, GE; si detragga dalla grandezza AB più della metà, che sia A H; e dal rimanente HB se ne detragga similmente più della metà, che sia HI: e questa detrattione si faccia tante volte, in modo, che le parti AH, HI, IB siano tante, per quante sono le parti in DE. Dico che l'vltimo auanzo IB è minore di C.

Si prenda KL multiplice di IB, come DE è multiplice di C, e si diuida KL nelle parti vguali ad IB, che siano KM,MN,NL. Perche AH, per costruttione, supera la metà di AB, sarà AH maggiore di HB; e molto più della parte IB: ma IB è vguale à KM, sarà AH maggiore di KM. Similmẽte perche HI supera la metà di HB, sarà HI maggiore di IB; ma IB è vguale ad MN, sarà HI maggiore di MN; e tutta AI sarà maggiore di tutta la grandezza KN: e perche IB è vguale ad NL, sarà tutta AB maggiore di KL: per costruttione DE è maggiore di AB, sarà DE maggiore di KL.



Finalmente perche DE, per costruttione, è multiplice di C, come LK è multiplice di IB, essendo C vguale ad EG, e la grandezza IB vguale ad LN, sarà DE multiplice di EG, come KL è multiplice di LN: dal che sarà ED ad LK, [a] come GE ad LN: ma DE è dimostrata maggiore di LK, sarà GE maggiore di LN, cioè LN minore di GE; e perche LN è vguale ad IB, e la grandezza EG è vguale à C, sarà IB minore di C, come fù proposto dimostrare.

[a] 25. del 5. e 20. defin. del 7.

SCOLIO.

Nell'istesso modo si proverà, che se da AB se ne detrae la metà, e da quel che resta se ne detrae la metà, e questo si farà sempre, finalmente l'vltimo auanzo, come IB, sarà minore di C. Poiche, supposta la medesima costruttione, essendo AH la metà di AB, sarà AH maggiore di IB, cioè maggiore di KM; & essendo HI la metà di HB, sarà HI vguale ad IB, dal che HB sarà vguale ad ML, e tutta AB maggiore di KL: ed, argumentandosi come prima si fece, si dimostrerà che IB è minore di C.

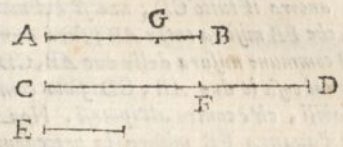
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se di due grandezze ineguali si detrae sempre la minore, quanto si può, dalla maggiore, con recìproca detrattione; se di questa continua detrattione, fatta reciprocamente, mai l'auanzo misuri l'antecedente; quelle grandezze saranno incommensurabili.

Siano le grandezze ineguali AB, CD, e dalla maggiore CD se ne detragga quanto si può la minore AB; ed il rimanente si detragga quanto si può da AB, e quel che resta si detragga, quanto si può, da FD, e con quest'ordine si proceda sempre; se in questa continua detrattione fatta reciprocamente, mai l'auanzo misura la precedente. Dico che le grandezze AB, CD sono incommensurabili. Se non sono incommensurabili, quelle saranno misurate da qualche misura commune,

che

che sia E, la quale ò sarà vguale, ò minore di AB. Sia dunque detratta da CD, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia FD; sarà FD minore di AB: e perche AB misura CF, sarà CF ò vguale, ouero maggiore di AB; per la qual cosa CF sarà maggiore di FD; e perciò CF sarà maggiore della metà di CD. Similmente da AB se ne detragga, quãto si può, l'auanzo FD, e quel, che resta, sia GB; sarà GB minore di FD. E perche FD misura AG, sarà AG maggiore di FD; e sarà molto maggiore di GB; per la qual cosa AG sarà maggiore della metà di AB. Di nuouo da FD se ne detragga, quanto si può, GB, e con quest'ordine si proceda, fin à tanto, che resti da AB, [a] ouero CD, vna grandezza minore di E. Supposto, che sia fatta questa continua detrattione, e sia il rimanente GB, minore della grandezza E. Perche E misura, per suppositione, la quantità AB, e la medesima AB, per costruttione misura CF, in conseguenza la quantità E misurerà [b] CF: ma, per la suppositione fatta, misura tutta CD; la quantità dunque E misurerà ancora [c] il rimanente FD; ma l'auanzo FD, per costruttione, misura AG, perciò la quantità E [d] misurerà AG. E perche la medesima E misura tutta AB; la quantità E dunque [e] misurerà il rimanente GB; fù supposta GB minore di E, la maggiore misurerà la minore, ch'è impossibile. Non dunque la grandezza E è commune misura delle due AB, CD, ma le due AB, CD sono incommensurabili, che era da dimostrarsi.



a 1. del 10.

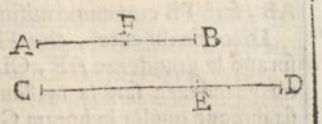
b 2. assioma del 10.
c 3. assioma del 10.
d 2. assioma del 10.
e 3. assioma del 10.

SCOLIO.

Faremo la conuersa all'antecedente propositione col P. Clauio, nel seguente modo.

Se due grandezze saranno incommensurabili, detratta sempre, quanto si può, la minore dalla maggiore, con reciproca detrattione, mai l'auanzo misurerà la precedente.

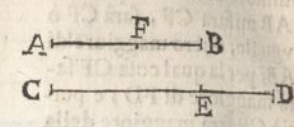
Siano le grandezze incommensurabili AB, CD, e dalla maggiore CD se ne detragga, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia ED, sarà ED minore di AB. Similmente da AB se ne detragga, quanto si può, l'auanzo ED, e quel, che resta, sia FB; sarà FB minore di ED. E con quest'ordine si proceda, sottraendo sempre, quanto si può, la minore dalla maggiore alternatiuamente. Dico che mai restarà auanzo, che misuri l'antecedente.



Dall'auanzo FB sia misurato, se è possibile, l'antecedente ED. Perche FB misura ED, e, per ipotesi, ED misura AF, in conseguenza FB [a] misurerà AF;

a 2. assioma del 10.

AF; ma FB misura se medesima, misurerà ancora [b] *il tutto AB. E perche AB misura CE, perciò FB* [c] *misurerà CE; ma per la fatta suppositione, FB misura ED, misurando le due CE, ED,* [d] *misurerà ancora il tutto CD; ma si è dimostrato, che FB misura tutta AB; sarà dunque FB commune misura delle due AB, CD: per la qual cosa le due AB, CD sono commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque l'auanzo FB misura la precedente ED, come fù proposto dimostrare.*

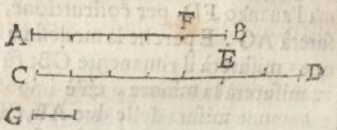


b 1. assiom. del 10.
c 2. assioma del 10.
d 1. assioma del 10.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE III.

Date due grandezze commensurabili, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano le due date grandezze commensurabili AB, CD, e si habbia à ritrouare la loro massima commune misura. Dalla maggiore CD se ne detragga, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia ED; sarà ED minore di AB. Poi da AB se ne detragga, quanto si può, l'auanzo ED, e quel, che resta, sia FB; sarà FB minore di ED. E similmente da ED se ne detragga FB, e con quest'ordine si proceda fino à tanto, che qualche auanzo misuri l'auanzo precedente, *il che non può mancare; perche, se mai si trouerà* auanzo, che misuri la precedente, *per la seconda propos. di questo,* le grandezze AB, CD *saranno incommensurabili, ch'è contro all'ipotesi.* Sia dunque FB *quell'auanzo, che misuri l'auanzo precedente* ED. Dico che FB *è la massima commune misura delle proposte grandezze* AB, CD. Perche FB misura ED, e per costruttione ED misura AF; l'auanzo dunque FB [a] misurerà AF; ma FB misura se medesimo, in conseguenza FB [b] misurerà tutta AB; per costruttione AB misura CE, dunque FB [c] misurerà CE; ma FB misura ancora ED, misurando le due CE, ED, [d] misurerà parimente tutta CD: ma, per quel, che si è dimostrato, FB misura AB, sarà FB commune misura delle due AB, CD.

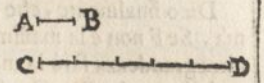


a 2. assioma del 10.
b 1. assiom. del 10.
c 2. assioma del 10.
d. 1. assioma del 10.

Dico finalmente, che FB è la massima di tutte le altre, che misurano le grandezze AB, CD. Se FB non è la massima, qualche altra grandezza sarà la massima commune misura delle due AB, CD; sia dunque quella la notata G, la quale, per esser massima sarà maggiore di FB. Perche G misura AB, e per costruttione, AB misura CE, perciò G [a] misurerà CE; mà per suppositione G misura tutta CD, *in conseguenza* [b] misurerà ancora il rimanente ED; e perche ED misura AF, dunque G [c] misurerà AF; mà G, per suppositione, misura tutta AB, misurando il tutto AB, e la parte AF, [d] misurerà ancora l'auanzo FB: mà G è suppostà maggiore di FB, la maggiore misurerà la minore, ch'è impossibile.

a 2. assioma del 10.
b 3. assiom. del 10.
c 2. assiom. del 10.
d 3. assioma del 10.

sibile. Non dunque G è la massima commune misura, mà sarà FB. Se poi la minore AB misurasse giustamente la maggiore CD, in modo, che, detratta AB, quanto si può, da CD, non suprauanzi cosa alcuna, all' hora AB sarà la massima commune misura, stante che AB misurarebbe CD, e misurarebbe ancora se medesima, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



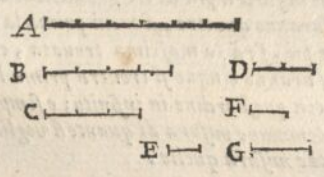
COROLLARIO.

Nella seconda parte dell'antecedente propositione, supponendoG la massima commune misura delle due AB, CD, si è dimostrato, che G misura FB. Hor se supporremo, che G non sia la massima, mà sia vna di quelle, che misura le due AB, CD, procedendosi nell'istesso modo, si proverà, che G misura la massima FB. D'onde è manifesto, che quella grandezza, che misura le due AB, CD, misurerà ancora la loro massima commune misura.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date tre grandezze commensurabili, ritrouare la loro massima commune misura,

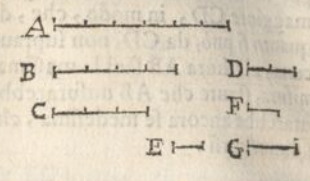
Siano proposte le tre grandezze commensurabili A, B, C, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Per l'antecedente propositione si troui la massima commune misura di due sole, come, per esempio, delle due A, & B, che sia D; se D misura C, sarà D la massima commune misura delle tre A, B, C; mà se D non misura C, perche le tre A, B, C si suppongono commensurabili, qualche grandezza le misurerà tutte tre; sia E la loro commune misura. Perche E misura le tre A, B, C sarà dunque commune misura delle due A, & B, e, per l'antecedente Corollario, E misurerà ancora D, ch'è massima commune misura delle due A, & B: mà E misura C, perciò E sarà commune misura delle due C, & D; per la qual cosa le due C, & D sono commensurabili. Si troui dunque, per l'antecedente propositione, la massima commune misura delle due C, & D, che sia F. Dico che F è la massima commune misura delle tre A, B, C. Perche F misura D, e per costruttione, D misura le due A, B; perciò F a misurerà le due A, & B:



a 2 assioma del 10.

ma

mà per costruttione, F misura ancora C, in conseguenza F è commune misura delle tre A, B, C.



Dico finalmente, che F è la massima. Se F non è la massima, qualche altra grandezza sarà la massima misura delle tre A, B, C; sia quella la notata G, sarà G maggiore di F. Perche G misura le due A, B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora D, ch'è loro massima commune misura, mà G, per suppositione, misura C, in conseguenza G sarà commune misura delle due C, & D; e per il Corollario antecedente, G, misurerà ancora F, ch'è massima commune misura delle due C, & D: mà G è suppostà maggiore di F, la maggiore misurarebbe la minore, ch'è impossibile. Non dunque G è la massima; mà la massima sarà F, ch'era da farsi è dimostrarsi.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che posta G commune misura delle tre A, B, C misura ancora F, sarà manifesto, che quella grandezza, la quale sarà commune misura di tre altre grandezze, la medesima misurerà la massima commune misura di quelle tre grandezze.

Il medesimo modo tenuto à trouare la massima commune misura à tre grãdezze commensurabili, si può ancora tenere, per trouare la massima commune misura à più di tre grandezze commensurabili; cioè, se le date grandezze saranno quattro, si troui prima la massima commune misura à tre di quelle, e poi, frà la massima trouata, e la quarta, si troui vn altra massima; e se saranno cinque si trouerà prima la massima commune misura à quattro, e con quest'ordine in infinito; e sempre si prouerà, che quella grandezza, che è commune misura di quante si voglia grandezze, misurerà ancora la massima, che misura quelle.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

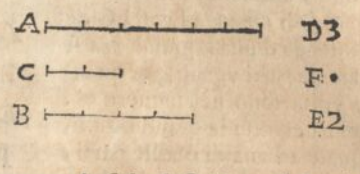
Le grandezze commensurabili hanno frà di loro quella proportione, che hà il numero al numero.

Siano le grandezze commensurabili A, & B. Dico che la proportione di A à B è come quella, che hà vn numero ad vn altro numero. Si troui [a] la massima commune misura delle due A, & B, che sia C; e quante volte C misura la grandezza A, tante volte l'vnità F misuri il numero D; come ancora, per quante volte C misura la grandezza B, tante volte l'vnità F misuri il numero E. Perche C misura A, come l'vnità F misu-

a 3. del 10.

ra

ra il numero D, sarà A multiplice di C, come D è multiplice dell'vnità F; e per quel, che si è dimostrato auanti alla sesta definitione del quinto Libro, gli vguali multiplici della prima A, e terza D, secondo qualunque multiplicatione, sono ambidue, presi separatamente, ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda C, e quarta F, presi secondo qualunque multiplicatione; e per la sesta definitione del quinto Libro, la prima A alla seconda C è come la terza D alla quarta F; cioè la grandezza A alla grandezza C hauerà la medesima proportione, quale hà il numero D all'vnità F. Similmente, perche C misura B, come l'vnità F misura il numero E, sarà C à B, come F ad E. In oltre si considerino le tre grandezze A, C, B, delle quali C sia intermedia; e si considerino i numeri D, E, e l'vnità F sia intermedio; la proportione di A, à B, per il Lemma settimo dopo la 18. del sesto, è composta delle proportioni di A à C, e di C à B: mà A à C è come D ad F, e la proportione di C à B è come quella di F ad E, la proportione di A à B sarà cõposta delle due proportioni, cioè di D ad F, e di F ad E: mà la proportione del numero D al numero E, per il citato Lemma, è composta delle medesime due proportioni di D ad F, e di F ad E: in conseguenza la proportione di A à B sarà come quella del numero D al numero E, ch'era da dimostrarsi.



COROLLARIO I.

Da quel, che si è detto è manifesto, che se saranno tre grandezze da vna parte, come A, C, B, e tre numeri da vn altra, come D, F, E, e che sia A à C come D ad F, e sia C à B come F ad E, per l'egualità, sarà A à B come il numero D al numero E.

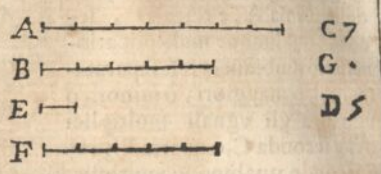
COROLLARIO II.

Da quel, che si è detto nell'antecedente dimostratione, appare, che, se vna grandezza è misurata da vn'altra grandezza, come vn numero è misurato dall'vnità, sarà la grandezza alla grandezza, come il numero all'vnità.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

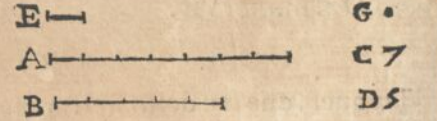
Se due grandezze hanno la proportione frà di loro, quale hà il numero al numero, quelle grandezze saranno cõmensurabili.

Habbia la grandezza A alla grandezza B quella proportione, che hà il numero C al numero D. Dico che le grandezze A, & B sono frà loro commensurabili. Frà i numeri C,& D si esponga l'vnità G; e s'intenda diuisa la grandezza A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C. Poi sia esposta la grandezza E, vguale ad vna di quelle parti, che sono in A, e si multiplichi la grandezza E, in modo, che ne venga F, la quale contenga tante volte E, per quante vnità sono nel numero D. Perche A contiene tante volte E, per quante vnità sono nel numero C, conterrà A tante volte E, per quante volte il numero C contiene l'vnità G; e, per il secondo Corollario all'antecedente propositione, la proportione di A ad E sarà come quella del numero C all'vnità G. Similmente perche F contiene E tante volte, per quante vnità sono nel numero D, sarà E parte di F, come l'vnità G è parte del numero D, per la qual cosa E ad F, per il citato Corollario, sarà come G à D. Hor, essendo A ad E come C à G; e si è dimostrata E ad F essere come G à D, per l'egualità, come si disse nel primo de gli antecedenti Corollarij, sarà A ad F come il numero C al numero D: ma il numero C al numero D, per ipotesi, è come A à B, sarà A ad F [a] come la medesima grandezza A alla grandezza B; e perciò le grandezze B, ed F [b] sono frà di loro vguali; per costruttione E misura F, in consequenza E misurerà la grandezza B; ma, per costruttione, misura ancora A, la quantità dunque E sarà commune misura delle due A,& B: per la qual cosa le grandezze A, & B [c] sono cõmensurabili, che era da dimostrarsi.



a 11. del 5.
b 9. del 5.
c 1. defin. del 10.

In altro modo più breue. Si diuida A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C, e si esponga E vguale ad vna delle parti, che sono in A. Perche E misura A, come l'vnità G misura il numero C, sarà E ad A, come l'vnità G al numero C: ma, per ipotesi, A à B è come C à D, sarà, per l'egualità, come si disse nel Corollario primo all'antecedente propositione E à B come G à D; e perche l'vnità G misura il numero D, perciò E misurerà B; mà E, per costruttione, misura ancora A, sarà E commune misura delle due A, & D: per la qual cosa le due A, & B [d] sono commensurabili, come fù proposto dimostrare.



d 1. defin. del 10.

COROLLARIO I.

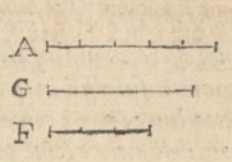
Dalla prima dimostratione dell'antecedente propositio-

ne

ne si caua il modo di trouare vna retta linea, alla quale vn' altra retta linea sia come vn numero ad vn altro numero. Si replichi la figura della prima dimostratione, douendosi trouare vna retta linea, alla quale sia A (che quì la supponiamo retta linea) come il numero C al numero D; si diuida la retta A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C, e si prenda la retta F, la quale consti di tante parti vguali alle parti di A, per quante vnità sono nel numero D, e per quel, che si è dimostrato, la retta A alla retta F sarà come il numero C al numero D.

COROLLARIO II.

Da quel, che si è detto, è manifesto ancora il modo da ritrouare vna retta linea, al di cui quadrato, sia il quadrato d'vna retta data, come vn numero ad vn altro numero.



Per essempio sia la retta data A, e si habbia da ritrouare vn altra retta, in modo, che il numero C al numero D sia come il quadrato della retta A al quadrato della retta da trouarsi. Si troui, come nell'antecedente Corollario, la retta F, in modo, che la retta A alla retta F sia come il numero C al numero D; poi frà le rette A, ed F, a si troui vna media proportionale, come G. Dico che G è la retta, che si cerca. Perche G è media proportionale frà le due A, ed F, hauerà A ad F, per il Lemma 7. dopo la 18. del 6. duplicata proportione, che A à G: ma il quadrato di A al quadrato di G b hà la medesima duplicata proportione, che hà la retta A alla retta G; sarà il quadrato di A al quadrato di G, come A ad F: ma, per costruttione, A ad F è come C à D, sarà il quadrato di A al quadrato di G, c come il numero C al numero D, ch'era da farsi.

a 13. del 6.

b 20. del 6.

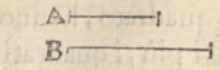
c 11. del

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Le grandezze incommensurabili non hanno la proportione frà loro, come hà il numero al numero.

Siano le grandezze A, & B incommensurabili. Dico che non sono frà di loro come numero à numero.

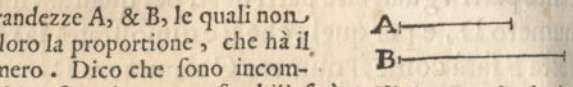
Se A à B sarà come numero à numero, per l'antecedente propositione, le grandezze A, & B saranno commensura-



bili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A à B è come vn numero a numero; e perciò le grandezze incommensurabili, non sono come numero à numero, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se due grandezze frà loro non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelle sono incommensurabili.



Siano le grandezze A, & B, le quali non habbiano frà loro la proportione, che hà il numero al numero. Dico che sono incommensurabili. Non siano incommensurabili, se è possibile. Perche le due A & B sono commensurabili, per la 5. propositione di questo, haueranno quella proportione, che hà il numero al numero, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque sono commensurabili, ma saranno incommensurabili, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

L'antecedente propositione, ch'Euclide dimostra in genere, douendosi applicare alle rette linee, è necessario auuertire, che, potendo le rette linee essere commensurabili in lunghezza, e potenza; e, potendo essere commensurabili in potenza solamente, quando la retta linea alla retta linea, non è come il numero al numero, per quel, che si è dimostrato nell'antecedente propositione, quelle rette linee saranno incommensurabili in lunghezza; ma non ne segue, che non possano essere commensurabili in potenza, mentre quelle, che sono commensurabili in potenza solamente, sono ancora incommensurabili in lunghezza. Si conclude dunque, che quando due rette linee non sono frà loro come numero à numero, quelle sono incommensurabili in lunghezza; e può essere, che siano incommensurabili in potenza, e può essere ancora, che siano commensurabili in potenza.

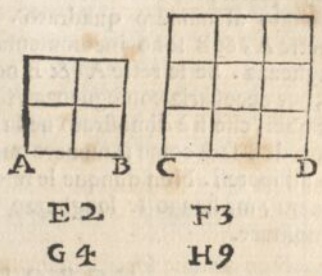
THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

I quadrati delle rette linee commensurabili in lunghezza, hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: ed i quadrati, che frà loro hanno la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, hanno i lati commensurabili in lunghezza. Di più, i quadrati delle rette linee incommensurabili

in

in lunghezza, non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; e de i quadrati, che non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, ne meno i lati haueranno le lunghezze commensurabili.

Siano prima le rette linee AB, CD, commensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD è come vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza, la retta AB, alla retta CD, [a] haverà quella proportione, che hà il numero al numero; habbia dunque la retta AB alla retta CD quella proportione, che hà il numero E al numero F; ed i quadrati de i numeri E, F siano i notati G, ed H. Perche il quadrato di AB al quadrato di CD [b] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, e la proportione di AB à CD è come E ad F; haverà il quadrato di AB al quadrato di CD duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [c] hà la medesima duplicata proportione del numero E al numero F; sarà il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 5. del 10.

b 20. del 6.

c 11. del 8.

Di nuouo, sia il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H. Dico che le rette AB, CD sono commensurabili in lunghezza. Siano i numeri E, ed F i lati de i numeri quadrati G, ed H. Perche il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD [d] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, ed il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD, per ipotesi, è come il numero quadrato G al numero quadrato H; haverà il numero quadrato G al numero quadrato H duplicata proportione, che la retta AB alla retta CD: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [e] hà duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F; sarà il lato AB al lato CD, come il numero E al numero F; per la qual cosa le rette linee AB, CD sono commensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

d 20. del 6.

e 11. del 8.

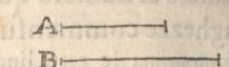
In oltre, siano le rette A, & B, incommensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato di A al quadrato di B non è come il numero quadrato al numero quadrato.

Habbia, s'è possibile, il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; per quel, che si è dimostrato nella seconda parte, le

rette

rette A, & B saranno commensurabili in lunghezza; il che è contro all'ipotesi. Non dunque il quadrato di A al quadrato di B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimostrarsi nel terzo luogo.

Finalmente, non habbia il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Dico che le rette A, & B sono incommensurabili in lunghezza. Se le rette A, & B non sono incommensurabili in lunghezza, per necessaria conseguenza, sono commensurabili in lunghezza; e, per quel, che si è dimostrato nella prima parte, il quadrato di A al quadrato di B sarà come il numero quadrato al numero quadrato, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le rette A, & B sono commensurabili in lunghezza; ma hanno le lunghezze incommensurabili, come fù proposto dimostrare.



COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che le rette linee, le quali sono commensurabili in lunghezza, sono ancora commensurabili in potenza, e quelle, che sono commensurabili in potenza, non sempre sono commensurabili in lunghezza. Di più, quelle rette, che sono incommensurabili in lunghezza, non sempre sono incommensurabili in potenza. Quelle rette linee poi, che hanno le potenze incommensurabili, sempre sono incommensurabili in lunghezza.

Cioè, essendosi dimostrato nella prima parte, che i quadrati delle rette linee, che sono commensurabili in lungezza, sono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, ed i numeri quadrati, come gli altri numeri, sono tutti commensurabili; ancora i quadrati di quelle rette linee sono commensurabili; e perciò, quando le rette linee sono commensurabili in lunghezza, sono ancora commensurabili in potenza.

Similmente, perche nella sesta propositione di questo, si è dimostrato in genere, che le grandezze, le quali sono frà loro come numero à numero, sono commensurabili; se i quadrati di due rette non saranno come numero quadrato à numero quadrato, mà saranno come numero non quadrato, à numero non quadrato, quei due quadrati saranno commensurabili: mà perche non sono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, per l'ultima parte dell'antecedente propositione, i lati di quei quadrati saranno incommensurabili in lunghezza. E queste sono quelle rette linee, che sono incommensurabili in lunghezza, e sono commensurabili in potenza; cioè sono quelle, che si dicono commensurabili solamente in potenza. E da qui ne se-

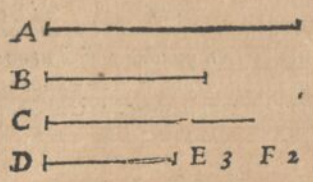
gue,

gue, che le rette, le quali ſono incommenſurabili in lunghezza, non ſempre ſono incommenſurabili in potenza.

Finalmente, nella ſettima propoſitione di queſto ſi è dimoſtrato in genere, che quando le grandezze non ſono frà di loro come numero à numero, quelle ſono incommenſurabili. Hor quando i quadrati di due rette linee non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelli ſono incommenſurabili: mà ſi è dimoſtrato nella prima parte, che quando i quadrati delle rette non ſono frà loro, come numero quadrato à numero quadrato, quelle rette linee ſono incommenſurabili in lunghezza; quando dunque i quadrati delle rette linee non ſono come numero à numero, ne meno ſaranno come numero quadrato à numero quadrato; e perciò ſaranno incommenſurabili in potenza, ed in lunghezza. Donde è manifeſto, che quando i quadrati di due rette linee ſono incommenſurabili, neceſſariamente ancora quelle rette linee ſaranno incommenſurabili in lunghezza.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se quattro grandezze ſono proportionali, e la prima è commenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà commenſurabile alla quarta; e ſe la prima è incommenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà incommenſurabile alla quarta.



Siano le quattro grandezze proportionali A, B, C, D, ò che tutte quattro ſiano del medeſimo genere, ò che le due A, & B ſiano d'vn genere, e le altre due d'vn altro genere, e la prima A ſia commenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà ancora commenſurabile alla quarta D. Perche A, & B ſi ſuppongono commenſurabili, la proportione di A à B [a] ſarà come quella d'vn numero ad vn altro numero. Sia dunque come il numero E al numero F. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D, hauerà C à D l'iſteſſa proportione, quale hà il numero E al numero F; per la qual coſa le due C, & D [b] ſono commenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 5. del 10.

b 6. del 10.

Di nuouo, ſuppoſto che la prima A ſia incommenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà incommenſurabile alla quarta D. Perche le due A, & B ſi ſuppongono incommenſurabili, la proportione di A à B [c] non ſarà come quella del numero al numero: ma la proportione di A à B, per ipoteſi, è come quella di C à D; la proportione dunque di C à D non è come quella del numero al numero. Per la qual coſa C, & D [d] ſono incommenſurabili, che era da dimoſtrarſi.

c 7. del 10.

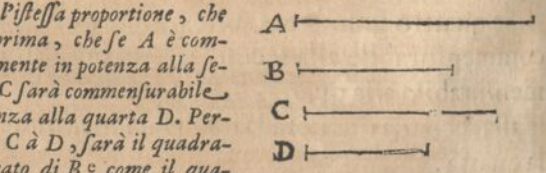
d 8. del 10.

SCO-

SCOLIO I.

L'antecedente propoſitione, ch'Euclide pone in genere, non ſolo ſi applica alle rette linee, che ſono commenſurabili, ò incommenſurabili in lunghezza, ma ſi applica ancora à quelle, che ſono commenſurabili, o incommenſurabili in potenza, nel ſeguente modo.

Se quattro linee rette ſono proportionali, e la prima è commenſurabile ſolamente in potenza alla ſeconda, ancora la terza ſarà commenſurabile ſolamente in potenza alla quarta; e ſe la prima è incommenſurabile in potenza alla ſeconda, ancora la terza ſarà incommenſurabile alla quarta.



Habbia A à B l'iſteſſa proportione, che hà C à D. Dico prima, che ſe A è commenſurabile ſolamente in potenza alla ſeconda B, ancora C ſarà commenſurabile ſolamente in potenza alla quarta D. Perche A à B è come C à D, ſarà il quadrato di A al quadrato di B [e] *come il quadrato di C al quadrato di D: e perche le due A, & B ſi ſuppongono commenſurabili in potenza, i loro quadrati* [f] *ſaranno ancora commenſurabili; per la qual coſa il quadrato di A al quadrato di B* [g] *ſarà come numero à numero: mà il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato di D; ſarà il quadrato di C al quadrato di D come è il numero al numero; perciò i quadrati delle due C, & D,* [h] *ſono commenſurabili: dal che le due C, & D* [K] *ſono commenſurabili in potenza, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

e 22. del 6.
f 3. defin. del 10.
g 5. del 10.
h 6. del 10.
K 3. defin. del 10.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia incommenſurabile in potenza alla retta B. Dico che C ſarà incommenſurabile in potenza alla retta D. Perche le due A, & B ſono incommenſurabili in potenza, i loro quadrati ſaranno incommenſurabili, e perciò [l] *non ſono frà loro come numero à numero: mà la proportione del quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato D; non ſarà il quadrato di C al quadrato di D come numero à numero; per la qual coſa* [m] *non ſaranno commenſurabili, e le due C, & D non ſono commenſurabili in potenza, che era da dimoſtrarſi.*

l 7. del 10.
m 8. del 10.

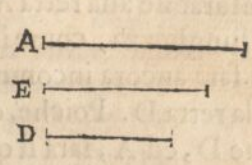
PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Ad vna propoſta retta linea ritrouare due rette linee incommenſurabili, cioè vna incommenſurabile ſolamente in lunghezza, e l'altra incommenſurabile in lunghezza, ed in potenza.

Sia

Sia proposta la retta linea A, alla quale si voglia prima trouare vna retta linea incommensurabile solamente in lunghezza.

Per il Lemma antecedente* si trouino due numeri, come B, & C, i quali non habbiano la proportione, come numero quadrato à numero quadrato; poi, per il Corollario 2.° alla propositione sesta di questo, si troui la retta D, in modo, che il quadrato della retta A al quadrato della retta D, sia come il numero B al numero C. Dico che la retta D è incõmensurabile solamente in lunghezza alla retta A. Perche il quadrato di A al quadrato della retta D, per costruttione, è come il numero B al numero C; e similmẽte per costruttione, il numero B al numero C non è come numero quadrato à numero quadrato; perciò il quadrato di A al quadrato di D non sarà come numero quadrato à numero quadrato; ed inconseguenza le rette A, & D [a] sono incommensurabili in lunghezza. Che poi le rette A, & D siano incommensurabili solamente in lunghezza, è chiaro; poiche, essendo il quadrato di A al quadrato di D, come il numero B al numero C, i quadrati delle due A, & D [b] saranno commensurabili; e le rette A, & D, saranno commensurabili in potenza, per la qual cosa le rette A & D sono solamente incommensurabili in lunghezza.



Di nuouo, alla proposta retta linea A s' habbia à ritrouare vna retta incommensurabile in lunghezza, e potenza. Si troui, come prima, la retta D, che sia incommensurabile solamente in lunghezza alla retta A; poi [c] si troui vna media proportionale frà le rette A, & D, che sia la notata E. Dico che la retta E è incommensurabile alla retta A, in lunghezza, e potenza. Perche E, per costruttione, è media proportionale frà le due A, & D, la prima A alla terza D, per il Lemma settimo dopo la 18. del sesto, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda E: mà il quadrato di A al quadrato di E hà la medesima duplicata proportione di A ad E; sarà il quadrato di A al quadrato di E, come A à D: ma le due A, & D, per quel che si è dimostrato, sono frà loro incommensurabili in lunghezza, sarà il quadrato di A incõmensurabile al quadrato di E; e perciò i quadrati di A, ed E [d] sono incommensurabili, ed i lati A, & E saranno incommensurabili in lunghezza. Per la qual cosa le rette A, ed E, sono incommensurabili in lunghezza, ed in potenza, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

* questo Lẽma manca per errore, però si cana dallo Scolio posto nel fine del 9. lib.

a 9. del 10.

b 6. del 10.

c 13. del 6.

d 10. del 10.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che, se la proposta retta A sarà quella retta linea, che, nella quinta definitione, fù chiamata Rationale, essendo D, per quel, che si è dimostrato, solamente commensurabile in potenza alla Rationale A, ouero solamente incommensurabile in lunghezza, ch'è l'istessa cosa, sarà, per la 6. defin. di questo,

la retta D Rationale. Ed all'incontro, ſe ſtabiliremo la retta D come Rationale, eſſendo A commenſurabile ſolamente in potenza à D, ſarà ancora A Rationale. In oltre perche E, ch'è media proportionale frà le due A, & D, è incommenſurabile alla retta A, tanto in lunghezza, come in potenza, ſarà ancora incommenſurabile in lunghezza, e potenza alla retta D. Poiche, eſſendo E media proportionale frà le due D, ed A, ſarà il quadrato di D al quadrato di E, come D ad A: mà D è incommenſurabile in lunghezza ad A, ſarà il quadrato di D [e] incommenſurabile al quadrato di E; per la qual coſa D, ed E ſaranno ancora incommenſurabili in lunghezza, come ſi diſſe. Donde appare, che, ſe frà due rette linee, come A, & D, incommenſurabili ſolamente in lunghezza, cioè commenſurabili ſolamente in potenza, ſi troua vna media proportionale, come E, ſarà E incommenſurabile in lunghezza, e potenza, tanto alla retta A, quanto alla retta D: ſi che, determinata A, ouero D, come Rationale, ſempre la media E ſarà irrationale.

A — B7
E
D — C3

e 10. del 10.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XII.

Quelle grandezze, che ſono commenſurabili ad vna terza, ſaranno commenſurabili frà di loro.

Sia la grandezza A, commenſurabile alla grandezza C, e la grandezza B ſia commenſurabile alla medeſima grandezza C. Dico che le grandezze A, & B, ſono frà loro commenſurabili. Perche A, & C ſi ſuppongono commenſurabili, la proportione di A à C [a] ſarà come quella, che hà il numero al numero; habbia dunque A à C la proportione, che hà il numero D al numero E. Similmente, perche le due C, & B ſono commenſurabili, hauerà C à B [b] la proportione, che hà il numero al numero: ſia, per eſempio, come il numero F al numero G. Si prendano [c] tre numeri, come H, K, L, che ſiano i minimi nelle proportioni di D ad E, e di F à G; cioè che H à K ſia come D ad E, ouero A à C; e la proportione di K ad L

A — D10, E8
C — F2, G3
B — H5, K4, L6

a 5. del 10.
b 5. del 10.
c 4. del 8.

ſia

sia come quella di F à G, cioè, come quella di C à B. Perche H à K è come A à C, e la proportione di K ad L è come quella di C à B, per il primo Corollario alla quinta propositione di questo, sarà per l'egualità, A à B come il numero H al numero L. Per la qual cosa le grandezze A, & B [f] sono commensurabili, ch'era da dimostrarsi. f6.del 19.

SCOLIO.

Se le grandezze A, & B sono rette linee, e le due A, & B sono commensurabili solamente in potenza alla retta C. Dico che le due A, & B sono commensurabili in potenza frà loro. Perche, l'antecedente propositione si è dimostrata in genere, se in luogo delle rette A, C, B si pongono i loro quadrati, sarà manifesto, da quel, che si è dimostrato, che i quadrati di A, & B, sono commensurabili; e perciò le rette A, & B sono commensurabili in potenza.

Se due grandezze sono commensurabili frà loro, ed vna di quelle sia commensurabile ad vna terza, l'altra sarà ancora commensurabile alla medesima terza.

Siano le due A, & B, commensurabili frà loro, ed A sia commensurabile à C. Dico che B sarà commensurabile alla medesima C. Perche tanto B, quanto C, è commensurabile ad A, per l'antecedente propositione, le due B, & C sono frà loro commensurabili.

A
C
B

THEOREMA X. PROPOSITIONE XIII.

Se vna di due grandezze è commensurabile ad vna terza, e l'altra è incommensurabile alla medesima terza, quelle due sono incommensurabili.

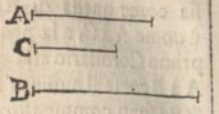
Sia la grandezza A commensurabile à C, e la grandezza B incommensurabile alla medesima C. Dico che le due A, & B sono incommensurabili. Se B, ed A non sono incommensurabili, sarà B commensurabile ad A; mà C è supposta commensurabile alla medesima A, le due B, & C [a] saranno commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le due A, & B sono commensurabili; per la qual cosa B sarà incommensurabile ad A, ch'era da dimostrarsi. a 12.del 20.

A
C
B

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIV.

Se due grandezze sono commensurabili, ed vna di quelle sia incommensurabile ad vna terza, ancora l'altra sarà incommensurabile alla medesima terza.

Siano le grandezze A, & B cõmensurabili frà loro, e sia A incommensurabile à C. Dico che B sarà incommensurabile alla medesima C. Se B non è incommensurabile à C, sarà C commensurabile à B; ma, per ipotesi, A è commensurabile a B, le due A, C a saranno commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque B è commensurabile à C, ma le due C, & B sono incommensurabili, come fù proposto dimostrare.



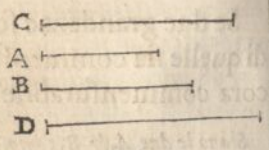
a 12. del 10.

SCOLIO.

Da quel, che si è detto, facilmente si dimostra il seguente Theorema.

Quelle grandezze, che sono commensurabili alle incommensurabili, sono frà di loro incommensurabili.

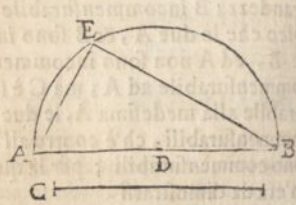
Siano le due grandezze A, & B incommensurabili; e sia C commensurabile ad A, e la grandezza D sia commensurabile à B. Dico che le due C, & D sono incommensurabili. Perche le due C, ed A, per ipotesi, sono commensurabili, ed A è incommensurabile à B, per l'antecedente propositione, sarà C incommensurabile à B. Similmente perche D, & B, per ipotesi, sono frà loro commensurabili, e si è dimostrata B incommensurabile à C, per l'antecedente propositione, sarà D incommensurabile à C, ch'era da dimostrarsi.



LEMMA.

Date due rette linee ineguali, ritrouare di quanto la potenza della maggiore supera la potenza della minore.

Delle rette date sia la maggiore AB, e la minore C, e si voglia ritrouare quanto la potenza, ò quadrato, di AB è maggiore della potenza, ò quadrato di C. Si diuida AB a in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, si descriua il mezzo circolo AEB, nel quale si addatti b la retta BE vguale alla retta C. Si tiri la retta AE. Dico che la potenza di AB supera la potenza di C per quanto è la potenza, ò quadrato di AE. Perche l'angolo AEB



a 10. del 1.

b 1. del 4.

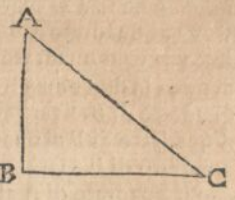
nel

nel mezzo circolo [c] *è retto, sarà il quadrato di AB* [d] *vguale à i quadrati de i lati BE, EA, e perciò il quadrato di AB supera il quadrato di BE, cioè di C, per il quadrato di AE, ch'era da dimostrarsi.*

c 3. del 3.
d 47. del 1.

Date due rette linee, ritrouare la retta, la di cui potenza sia vguale alle potenze delle date.

Siano le rette date AB, BC, e si voglia ritrouare la retta, il di cui quadrato, ò potenza, sia vguale à i quadrati, ò potenze, delle due AB, BC. Si addattino le rette AB, BC, [e] *che facciano angolo retto ne gli estremi B; si tiri la retta AC. Essendo l'angolo B retto, il quadrato di AC* [f] *è vguale à i quadrati delle due AB, BC; cioè la potenza di AC è vguale alle potenze delle due AB, BC, ch'era da dimostrarsi.*



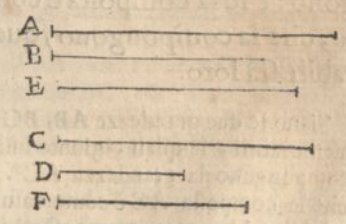
e 11. del 1.

f 47. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XV.

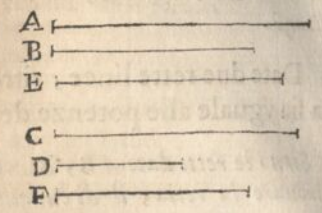
Se quattro linee rette sono proportionali, e la potenza della prima supera la potenza della seconda, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, commensurabile in lunghezza alla prima; la potenza della terza superarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, commensurabile in lunghezza alla terza. E se la potenza della prima supera la potenza della seconda, per il quadrato di vna retta, incommensurabile alla prima; la potenza ancora della terza superarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, incommensurabile alla terza.

Siano le quattro rette linee proportionali A, B, C, D; e la potenza della prima A superi la potenza della seconda B, per il quadrato della retta E; e la potenza della terza C superi la potenza della quarta D, per il quadrato della retta F. Dico che, se la retta E è commensurabile in lunghezza alla prima A, sarà ancora la retta F commensurabile in lunghezza alla terza C; e se la retta E



e in-

è incommensurabile in lunghezza alla prima A, ancora la retta F sarà incommensurabile in lunghezza alla terza C. Perche il quadrato di A, per ipotesi, supera il quadrato di B per il quadrato di E, sarà E la differenza frà il quadrato di A, ed il quadrato di B; e per simile ragione, il quadrato di F sarà la differenza di quanto il quadrato di C supera il quadrato di D. In oltre, perche A à B è come C à D, sarà il quadrato di A [a] al quadrato di B, come il quadrato di C al quadrato di D; e, diuidendo, la differenza frà i quadrati di A, & B, cioè, il quadrato di E, al quadrato di B, [b] sarà come la differenza frà i quadrati di C, & D, cioè, il quadrato di F al quadrato di D: ed inuertendo, il quadrato di B al quadrato di E [c] sarà come il quadrato di D al quadrato di F. Hor perche il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato di D; ed il quadrato di B al quadrato di E è come il quadrato di D al quadrato di F, per l'egualità, il quadrato di A al quadrato di E [d] sarà come il quadrato di C al quadrato di F; e la proportione della retta A alla retta E [e] sarà come quella della retta C alla retta F. Se dunque la retta A è commensurabile in lunghezza alla retta E, sarà ancora la retta C [f] commensurabile in lunghezza alla retta F; e se la retta A è incommensurabile in lunghezza alla retta E, [g] sarà ancora la retta C incommensurabile in lunghezza alla retta F, come fù proposto dimostrare.



* il quadrato di

a 22. del 6.
b 17. del 5.
c Corol. alla 4. del 5.
d 22. del 5.
e 22. del 6.
f 10. del 10.
g 10. del 11.

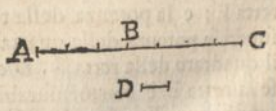
SCOLIO.

Nell'istesso modo si dimostrerà, che se A è commensurabile ad E, solamente in potenza, ancora C sarà commensurabile solamente in potenza alla retta F.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XVI.

La composta di due grandezze commensurabili è commensurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono: e se la composta è commensurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due saranno commensurabili frà loro.

Siano le due grandezze AB, BC commensurabili, le quali, giunte insieme, compongano la grandezza AC. Dico che la composta AC è commensurabile ad AB, ed è ancora commensurabile alla grandezza BC. Perche le due AB, BC sono cõmensurabili, per la 1. defin.



di

di questo, haueranno vna commune misura; sia la loro commune misura [a] la notata D. Perche D misura AB, e misura BC, misurerà ancora [b] il tutto AC; hor essendo D commune misura delle due AC, AB, saranno le due AC, AB [c] commensurabili. Similmente perche D misura AC, e misura ancora BC, le due AC, BC saranno commensurabili.

Di nuouo sia tutta AC commensurabile ad AB, ouero BC; per essempio, sia commensurabile ad AB. Dico che le due AB, BC sono commensurabili. Sia D [d] la commune misura delle due AB, AC; perche D misura il tutto AC, e misura la parte AB, misurerà ancora [e] il rimanente BC; dal che D sarà commune misura delle due AB, BC; e perciò le due AB, BC sono commensurabili, ch'era da dimostrarsi.

a 3. del 10.
b 1. assioma del 10.
c 1. assioma del 10.
d 3. del 10.
e 9. assiom. del 10.

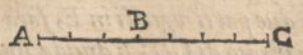
COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che quando la composta di due grandezze è commensurabile ad vna di quelle, sarà ancora commensurabile al rimanente; cioè se AC è commensurabile ad AB, la medesima sarà commensurabile al rimanente BC, stante che se D misura AC, e misura AB, per il 9. assioma, misura ancora il rimanente BC, e perciò le due AC, BC sono commensurabili.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVII.

La composta di due grandezze incommensurabili è incommensurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono; e se la composta di due grandezze è incommensurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due, che la compongono, saranno incommensurabili.

Siano prima le due grandezze AB, BC incommensurabili, le quali, giunte insieme, compongano la grandezza AC. Dico che AC sarà incommensurabile ad AB, ed ancora sarà incommensurabile à BC. Se AC non è incommensurabile ad AB, ouero BC, sarà AC commensurabile ad vna delle due: sia dunque AC commensurabile ad AB, per l'antecedente Corollario, sarà AC commensurabile al rimanente BC; dal che le due AB, BC, [a] saranno commensurabili; ch'è contro all'ipotesi. Non dunque AC è commensurabile ad AB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AC è incommensurabile à BC.



a 16. del 10.

Di nuouo sia AC incommensurabile ad vna delle componenti AB, BC, per essempio sia incommensurabile ad AB. Dico che le due AB, BC sono incommensurabili. Se le due AB, BC non sono incommensurabili,

sa-

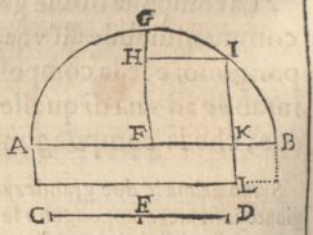
b 16.del 10. sarà AB commensurabile à BC, e tutta AC composta delle due AB, BC [b] sarà commensurabile ad AB, ouero BC, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le due AB, BC sono commensurabili, ma AB è incommensurabile à BC.

COROLLARIO.

Quindi è, che se la composta di due grandezze è incommensurabile ad vna delle componenti, sarà ancora incommensurabile all'altra; cioè, se AC è incommensurabile ad AB, sarà ancora incommensurabile al rimanente BC. Perche se AC fosse commensurabile à BC, per il Corollario all'antecedente propositione, sarebbe AC commensurabile ad AB, ch'è contro all'ipotesi; non dunque AC è commensurabile à BC.

LEMMA I.

Date due rette linee ineguali, applicare alla maggiore vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata.



Sia AB la maggiore, e CD la minore delle rette date, e si voglia alla maggiore AB applicare vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di CD, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà che manchi, à compire la retta AB, per vna figura quadrata. Si diuida CD [a] *in due parti vguali in E, sarà il quadrato di CE* [b] *la quarta parte del quadrato di CD; si diuida similmente AB in due parti vguali in F, e, fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, si descriua il mezzo circolo AGB; nel punto F, sopra la retta AB* [c] *si erigga la perpendicolare FG; perche AB è maggiore di CD, sarà AF, ouero FG maggiore di CE. Si faccia FH* [d] *vguale à CE, e dal punto H si tiri la retta HI,* [e] *parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferenza AGB in qualche punto I; dal punto I si faccia cadere la retta IK,* [f] *perpendicolare ad AB; sarà IK* [g] *vguale ad HF; si continui IK*

a 10.del 1.
b Scol. alla 4. del 2.
c 11.del 1.
d 3.del 1.
e 31.del 1.
f 12.del 1.
g 34. del 1.

verso

verſo L, e ſi faccia KL [h] vguale à KB, e ſi compiſca il rettangolo AL; ſarà il rettangolo AL applicato ad AB, e manca à compire la linea AB per il quadrato LB (ſtante che LK è vguale à KB) Dico che il rettangolo AL è vguale alla quarta parte del quadrato di CD. Perche IK [l] è media proportionale frà le due AK, KB, ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AK, KB, [m] vguale al quadrato di IK: ma il rettangolo AL è vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AK, KB, ſtante che LK è vguale à KB; ſarà il rettangolo AL vguale al quadrato di IK, ouero di FH, cioè vguale al quadrato di CE; ma il quadrato di CE [n] è la quarta parte del quadrato di CD; ſarà il rettangolo AL vguale alla quarta parte del quadrato di CD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

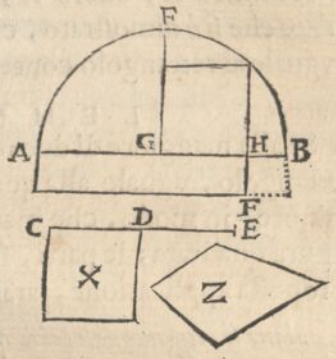
h 3. del 1.

l 13. del 6.

m 17. del 6.

LEMMA II.

Diuidere vna data retta linea talmente, che il rettangolo contenuto dalle parti ſia vguale ad vn dato rettilineo.



Sia data la linea retta AB, ed il rettilineo Z, e ſi voglia diuidere la retta AB in modo, che il rettangolo, contenuto dalle parti, ſia vguale al rettilineo Z. Si faccia il quadrato X [a] vguale al rettilineo Z, ſi continui il lato CD verſo E, e ſi faccia DE [b] vguale al lato CD, ſarà il quadrato X [c] la quarta parte del quadrato di CE. Se la retta CE non è minore di AB, il problema ſarà impoſſibile, ſtante che, douendoſi operare come nell'antecedente Lemma, CD non ſarà minore di FG. Se poi CE ſarà minore di AB, ſi applichi ad AB, per l'antecedente Lemma, il rettangolo AF, vguale al quadrato X, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come per eſſempio, per il quadrato FB; ſara diuiſa la retta AB in H. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB è vguale al rettilineo Z. Perche la mancanza FB è quadrato, ſarà FH vguale ad HB; dal che il rettangolo AF, ſarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle parti AH, HB; ma il rettangolo AF è vguale, per coſtruttione, al quadrato X, cioè al rettilineo Z; ſarà il rettangolo

a 14. del 2.

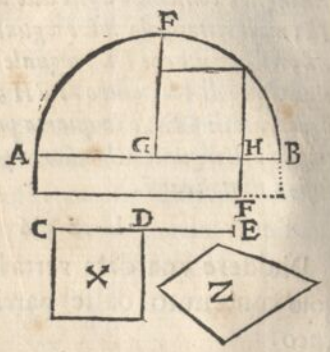
b 3. del 1.

c Scol. alla 4. del 2.

contenuto dalle parti AH, HB, vguale al rettilineo Z, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

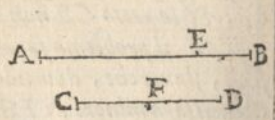
COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che, applicato ad vna retta linea, come AB, vn rettangolo, per essempio, AF, vguale ad vn dato rettilineo Z, ouero X, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, come FB, per questa applicatione sarà diuisa la linea AB talmente in H, che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB, sarà vguale al rettilineo Z, ouero X; stante che si è dimostrato, che il rettangolo applicato AF è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AH, HB.



LEMMA III.

Se alla maggiore di due rette ineguali sia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; le parti, fatte nella maggior linea dalla proposta applicatione, saranno frà di loro ineguali.



Siano le rette ineguali, cioè AB maggiore, e la minore CD, la quale sia diuisa in due parti vguali in F; e sia applicato alla maggiore AB [a] *vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato di CD; cioè* [b] *vguale al quadrato di CF, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come il quadrato di EB; per questa fatta applicatione sarà diuisa la retta AB in due parti, come AE, EB. Dico che le parti AE, EB sono frà di loro ineguali. Se non sono ineguali, sarà AE vguale ad EB, dal che il quadrato di AB* [c] *sarà il quadruplo del quadrato di AE, ouero EB. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, per quel, che si è di-*

a lem. 1.

b Scol. alla 4. del 2.

c Scol. alla 4. del 2.

mostra-

mostrato ne i due antecedenti Lemma, è vguale al quadrato di CF; essendo il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di CF, il medesimo quadrato di CD sarà il quadruplo del rettangolo contenuto dalle due AE, EB: ma il rettangolo, contenuto dalle due AE, EB, è vguale al quadrato di EB (stante che EB è supposta vguale ad AE) sarà il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di EB; fù dimostrato il quadrato di AB essere il quadruplo del medesimo quadrato di EB; il quadrato dunque di CD sarà vguale al quadrato di AB, ed il lato CD sarà vguale al lato AB, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque la parte AE è vguale ad EB, ma sono frà di loro ineguali, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

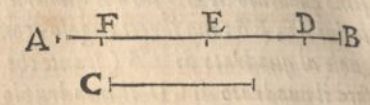
Perche EB è il lato di quel quadrato, che rappresenta la mancanza per compire la linea, sarà manifesto che EB è la minor parte, & AE la maggiore.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVIII.

Se saranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore sia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata: se le parti della maggior linea sono commensurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea supera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea commensurabile in lunghezza alla proposta maggiore. E se il quadrato della maggior linea supera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad essa maggior linea; applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta, sarà diuisa la maggiore in due parti commensurabili in lunghezza.

Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore C, ed alla maggiore AB, per il primo Lemma, sia applicato vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la linea AB, ma, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e sia per

essempio, la mancanza per quanto è il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti A D, D B. Dico prima, che se le parti AD, DB sono commensurabili in lunghezza, il quadrato di AB supererà il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla maggiore AB.



Perche la retta AB dalla fatta applicatione è diuisa nelle parti AD, DB, per il Coro ll. dopo il Lemma 3. sarà AD maggiore di DB; e per il Lemma 2. e suo Corollario, il rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, sarà vguale alla quarta parte del quadrato della retta C; e perciò il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, sarà vguale al quadrato della retta C. In oltre, essendo AD maggiore di DB, si diuida la retta AB [a] in due parti vguali in E, il punto E caderà frà li punti A, & D; ed il quadrato di AB [b] sarà il quadruplo del quadrato di EB; cioè il quadruplo quadrato di EB è vguale al quadrato di AB; si faccia EF [c] vguale ad ED, restarà DB vguale ad AF, ed il quadrato di FD [d] sarà il quadruplo del quadrato di ED; cioè il quadruplo quadrato di ED è vguale al quadrato di FD. Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in D, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, [e] col quadrato di ED, vguale al quadrato di EB; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadruplo quadrato di ED, sarà vguale al quadruplo quadrato di EB; ma il quadruplo quadrato di EB è dimostrato vguale al quadrato di AB; ed il quadruplo quadrato di ED è mostrato vguale al quadrato di FD; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di FD, vguale al quadrato di AB: fù dimostrato, che il quadruplo rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, è vguale al quadrato di C; il quadrato dunque della retta C, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di AB; e perciò il quadrato di AB supera il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato di F D. Dico che FD è commensurabile in lunghezza ad AB. Perche AF è vguale à DB, la composta delle due AF, DB, sarà il doppio di DB; e perciò la composta delle due AF, DB sarà commensurabile in lunghezza alla retta DB. In oltre perche le due AD, DB, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza, sarà tutta AB [f] commensurabile in lunghezza alla parte DB: ma la composta delle due AF, DB, è commensurabile in lunghezza alla medesima DB; sarà tutta AB [g] commensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB. Hor essendo tutta AB commensurabile in lunghezza alla retta composta delle due AF, DB, per il Corollario alla 16. propositione di questo, sarà tutta AB commensurabile in lunghezza al rimanente FD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che il quadrato di AB superi il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB; applicato alla maggiore AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che

a 10. del 1.
b Scol. alla 4. del 2.
c 3. del 1.
d Scol. alla 4. del 2.
e 5. del 2.
f 16. del 10.
g 12. del 10.

manchi

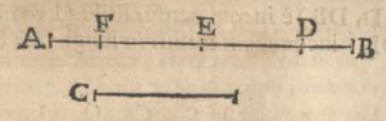
manchi à compire la linea AB per vna figura quadrata, ſarà diuiſa la retta AB come in D. Dico che le parti AD, DB ſono commenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come prima ſi fece, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD. Perche il quadrato di AB, per ipoteſi, ſupera il quadrato di C per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza ad AB, ed il quadrato di AB, per quel, che ſi è dimoſtrato, ſupera il quadrato di C per il quadrato di FD; perciò AB ſarà commenſurabile in lunghezza alla retta FD; e, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta AB ſarà commenſurabile in lunghezza al rimanente AF, DB; cioè alla compoſta delle due AF, DB: mà la retta DB, come ſopra ſi diſſe, è commenſurabile in lunghezza alla medeſima retta, compoſta delle due AF, DB; in conſeguenza le due AB, BD, h ſono commenſurabili in lunghezza; e perche tutta AB, (ch'è compoſta delle due AD, DB) è commenſurabile in lunghezza ad vna di quelle, cioè alla retta AB; le due AD, DB K ſono commenſurabili in lunghezza, ch'era da dimoſtrarſi.

h 12. del 10.

K 16. del 10.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XIX.

Se ſaranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; ſe le parti della maggior linea ſono incommenſurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea ſuperarà il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, incommenſurabile in lunghezza alla propoſta maggior linea. E ſe il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza ad eſſa maggiore linea; applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta ſarà diuiſa la maggiore in due parti, incommenſurabili in lunghezza.

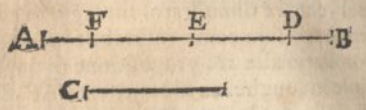


Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore ſia C; ed alla maggiore AB, per il primo Lemma all' antecedente propoſitione, ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e la mancanza ſia, per

eſſem-

essempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico prima che, se le parti AD, DB, sono incommensurabili in lunghezza, il quadrato di AB superarà il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla retta AB.

Si faccia la costruttione della precedente propositione, e si proui, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD: si proui ancora, che la composta delle due AF, DB, è commensurabile alla retta DB. Perche le rette AD, DB, per ipotesi, sono incommensurabili in lunghezza, sarà tutta AB [a] incommensurabile in lunghezza alla parte DB: ma DB, per quel, che si è detto, è commensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB; sarà tutta AB [b] incommensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB; e per il Corollario alla 17. propositione, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente FD; mà il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD, essendosi dimostrata FD incommensurabile in lunghezza ad AB, il quadrato di AB superarà il quadrato di C, per quanto è il quadrato d'vna retta, come è FD, incommensurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 17. del 10.

b 14. del 10.

Di nuouo, sia il quadrato di AB maggiore del quadrato di C, per quanto è vna retta incommensurabile in lunghezza ad AB; e sia applicato ad AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di C, in modo, che manchi à compire la linea AB, per quanto è vna figura quadrata, e la mancanza sia, per essempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico che le parti AD, DB sono incommensurabili in lunghezza. Supposta la medesima costruttione dell'antecedente propositione, si dimostrerà, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD; si che, per ipotesi, AB sarà incommensurabile in lunghezza alla retta FD, e, per il Corollario alla propositione 17, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente AF, DB, cioè alla composta delle due AF, DB: mà, per quel, che si disse nella dimostratione dell'antecedente propositione, la composta delle due AF, DB, è commensurabile in lunghezza alla retta DB; sarà la retta AB [c] incommensurabile in lunghezza alla retta DB. Hor se tutta la retta AB (ch'è composta delle due AD, DB) è incommensurabile ad vna, cioè à DB, saranno le due AD, DB, [d] incommensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi.

c 14. del 10.

d 17. del 10.

SCOLIO I.

Sin qui Euclide hà trattato delle grandezze commensurabili, ed incommensu-

mensurabili frà di loro, e conseguentemente s'inoltra à trattare delle grandezze comparate alla Rationale, spiegata nella definitione quinta di questo, che sono quelle grandezze, che si dicono Rationali, ò Irrationali, secondo che sono commensurabili, ò incommensurabili alla detta Rationale. E per maggior chiarezza, deuesi auuertire, che in due modi Euclide considera la commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze, cioè, ò considera la commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze, comparate frà di loro; ouero le considera comparate alla Rationale, della quale pienamente fù parlato dopo la settima definitione di questo. La commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze frà di loro (del che hà trattato fino à questo luogo) la nomina con le medesime voci di commensurabile, ed incommensurabile; quella poi, che riguarda la comparatione alla Rationale (della quale si parlerà nelle cose seguenti) l'esprime con le voci denominate dalla medesima Rationale; cioè, quelle rette, che sono commensurabili in lunghezza alla Rationale, che per la nona propositione, sono ancora commensurabili in potenza, le chiama Rationali in lunghezza, e potenza; e quelle rette, che alla Rationale sono commensurabili solamente in potenza, si dicono Rationali in potenza solamente; e quelle rette, che alla Rationale sono incommensurabili in potenza, le quali, per la nona propositione di questo, sono ancora alla medesima Rationale incommensurabili in lunghezza, le chiama Irrationali. Donde è manifesto, che due riguardi cadono nelle comparationi, cioè, uno è quello della comparatione frà di loro, e l'altro della comparatione rispetto alla Rationale. Quanto à quello, che si fà nella comparatione frà di loro, si esprime con le voci di Commensurabili in lunghezza, e potenza; ò di Commensurabili in potenza solamente; ouero d'Incommensurabili in lunghezza, e potenza, secondo che saranno, ò non saranno commensurabili frà di loro. Quello poi, che si farà nella comparatione, rispetto alla Rationale, si esprimerà con le voci di Rationali in lunghezza, e potenza; ò di Rationali solamente in potenza; ouero d'Irrationali in lunghezza, e potenza, secondo che saranno commensurabili, ò incommensurabili alla Rationale. Nota, che quando le rette linee sono alla Rationale commensurabili solamente in potenza, cioè, quando le rette linee, comparate alla Rationale, non sono commensurabili in lunghezza, mà sono ad essa Rationale solamente commensurabili in potenza, all'hora questi due riguardi s'vniscono insieme, in modo, che, se le rette linee commensurabili solamente in potenza alla Rationale, saranno commensurabili frà di loro in lunghezza, quelle si chiameranno Rationali in potenza, e commensurabili frà di loro in lunghezza: se poi saranno commensurabili solamente in potenza alla Rationale, ed ancora saranno commensurabili solamente in potenza frà di loro, si chiameranno Rationali in potenza, ed ancora commensurabili frà di loro in potenza.

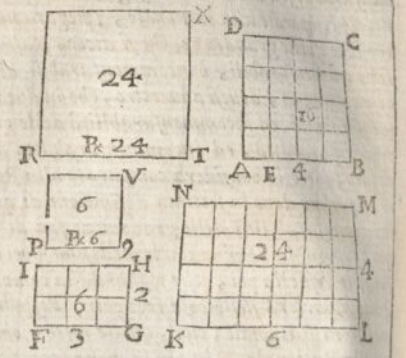
Quindi è, che i numeri sordi, cioè quelli, da i quali non si può estrarre la radice, ò lato, senza che soprauanzi cosa alcuna, comparati frà di loro, possono essere commensurabili in lunghezza, e per la nona di questo, commensurabili ancora in potenza; e comparati alla Rationale, possono ancora essere incommensurabili in lunghezza, e commensurabili in potenza; e secondo questo caso, quei numeri sordi si dicono Rationali in potenza, e commensurabili frà di loro in lunghezza, e potenza; come per essempio. Sia esposta la

Ra-

Rationale AB, espressa col numero 4; cioè, che costi di quattro vnità determinate, il di cui quadrato ABCD constarà di 16. vnità quadrate: e sarà il quadrato AC, per la 5. definittione, Rationale, al quale deuono essere comparati gli altri piani; ciò fatto, si multiplichi vna delle vguali parti, ò vnità, che sono in AB, quanto si vuole, e produca, per essempio, la retta, ò numero FG. Perche l'vnità AE, per costruttione, è commune misura delle due AB, FG; sarà FG commensurabile in lunghezza alla rationale AB; e per la definittione 6. di questo, FG sarà Rationale. Nel punto G si erigga la retta GH perpendicolare ad FG; si faccia GH multiplice di AE in modo, che sia maggiore, o minore di FG di vna sola vnità, frà li due FG, GH a *non cade medio proportionale; sarà GH commensurabile ad AB, e perciò sarà Rationale; con i lati FG, GH sia fatto il piano rettangolo GI. Perche i lati FG, GH, constano di parti vguali ad AE, ogn'vna delle vnità quadrate, che compongono il piano FH, sarà vguale à ciascuna delle vnità quadrate, che compongono il Rationale AC; e perciò il quadrato di AE sarà commune misura de i piani FH, AC: mà AC è Rationale, sarà FH ancora Rationale. Si esponga poi il piano rettangolo KM, in modo, che il lato KL sia il doppio di FG; ed LM sia il doppio di GH; sarà FG à GH, come KL ad LM; dalche i piani FH, KM saranno frà di loro simili. In oltre, perche AE misura FG, e per costruttione, FG misura KL, l'vnità AE misurerà KL; e perciò KL è commensurabile alla Rationale AB, e per la 6. definittione, KL sarà Rationale. Nell'istesso modo si proverà, che LM è Rationale, e sarà il piano KM commensurabile al rationale AC; e per la 9. definitione, il piano KM sarà Rationale. Di più perche FG à GH è come KL ad LM, e frà li due FG, GH, non cade medio proportionale, ne meno per l'8. proposittione dell'8. cade medio proportionale frà li due KL, LM, e per la 20 proposittione del 7. lib., i piani FH, KM non sono numeri quadrati; per la qual cosa i loro lati non sono esprimibili, rispetto alle vnità determinate nella Rationale AB, mà si considerano surdamente; come i notati PQ, RT, i di cui quadrati siano i notati PV, RX; sarà PV vguale al piano FH, e sarà RX vguale à KM: mà i due FH, KM, per quel, che si è dimostrato, sono commensurabili al Rationale AC: mà i lati PQ, RT, non essendo esprimibili, rispetto alle vnità della Rationale AB, perciò sono incommensurabili ad AB. Hor essendo i lati PQ, RT, incommensurabili in lunghezza ad AB, e le potenze PV, RX sono commensurabili al Rationale AC, i lati PQ, RT saranno quelli, che si dicono Rationali solamente in potenza alla proposta Rationale AB.*

Finalmente perche i piani KM, FH, sono frà loro simili, sarà il piano KM al piano FH, come il qaadrato del lato KL al quadrato del lato FG; mà il quadrato di KL è il quadruplo del quadrato di FG (per essere KL il dop-

a scol. vlt del 9.

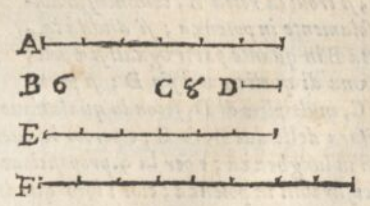


pio di FG) sarà il piano KM il doppio del piano FH: ma KM è vguale ad RX, ed il piano FH è vguale à PV; sarà il quadrato RX il quadruplo del quadrato PV; ed il lato RT sarà il doppio del lato PQ: dal che i lati RT, PQ sono commensurabili in lunghezza, e la commune misura sarà PQ; e sono ancora commensurabili in potenza, stante che VP misura quattro volte RX. D'onde è manifesto, che i numeri sordi PQ, RT, comparati frà di loro, senza hauere relatione alla Rationale AB, sono commensurabili in lunghezza, e potenza; ma, comparati alla Rationale AB, si dicono Rationali solamente in potenza, ed irrationali in lunghezza: auuertendo sempre, che questa voce di Rationale, ed Irrationale, hà sempre relatione alla comparatione, rispetto la Rationale proposta; cioè, rispetto alle vnità determinate nella Rationale AB; e non hà relatione alla comparatione frà di loro; perche, quando si fà la comparatione frà di loro, e non rispetto alla Rationale, le loro relationi si esprimono con le voci di Commensurabili, ed Incommensurabili.

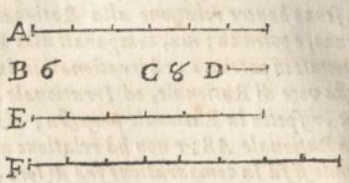
SCOLIO II.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che le rette commensurabili in lunghezza frà di loro, ò sono commensurabili in lunghezza alla proposta Rationale, come sono le notate FG, GH, KL, LM, le quali sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono ancora commensurabili in lunghezza alla Rationale AB; ouero sono alla Rationale commensurabili solamente in potenza, come sono i lati PQ, RT, i quali sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono solamente commensurabili in potenza alla Rationale AB; e queste sempre si chiamano Rationali; cioè, se sono commensurabili in lunghezza alla Rationale, si dicono Rationali in lunghezza, e se sono commensurabili solamente in potenza alla Rationale, si dicono Rationali in potenza. E perche due rette, Rationali in lunghezza, possono essere ambedue ineguali alla esposta Rationale; e può essere, che vna di quelle due sia vguale alla Rationale; perciò le dette Rationali si possono diuidere in tre generi. Il primo de' quali è, quando vna di due rette, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale, è vguale alla medesima Rationale. Il secondo genere è quando di due rette, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale, nissuna è vguale alla detta Rationale. Ed il terzo genere è, quando due rette sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono alla Rationale solamente commensurabili in potenza. E questi tre generi di Rationali si possono trouare, come fà il P. Clauio nel seguente modo.

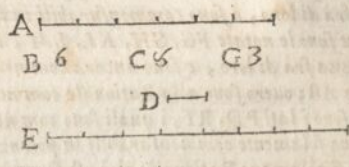
Siano presi due qualunque numeri ineguali B, & C, e sia esposta la Rationale A, diuisa in tante vguali parti, per quante vnità sono nel numero B. Si esponga poi la retta D, vguale ad vna delle parti, che sono nella Rationale A; e si prenda E, multiplice di D,



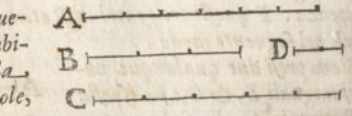
come la Rationale A è multiplice della medesima D ; e si prenda la retta F, in modo, che sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero C. Perche A, ed E sono vguali multiplici di D, saranno in E tante parti vguali à D, per quante ne sono in A; e perciò le due A, ed E sono frà di loro vguali ; ma la retta D, per costruttione, è commune misura delle tre A,E,F ; le tre rette dunque A, E, F sono commensurabili in lunghezza, e perciò le due E, ed F sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono commensurabili in lunghezza alla Rationale A; e per la 6. definitione, sono Rationali. Si è dimostrata la Rationale E, vguale alla esposta Rationale A ; si saranno dunque ritrouate le due Rationali E, ed F, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale A ; & vna di esse, come E, sarà vguale alla Rationale A. E queste sono quelle Rationali, che habbiamo chiamate del primo genere.



Siano di nuouo esposti tre numeri ineguali, come B,C,G, e sia la Rationale A diuisa in tante parti vguali, per quante vnità sono in B ; e sia D vna di quelle parti. Si prendano poi le rette E, F, in modo, che E sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero C ; e la retta F sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero G ; saranno le rette E,F ineguali alla Rationale A. E perche D è commune misura delle rette A,E,F, saranno le rette A,E,F, commensurabili in lunghezza ; e perciò le rette E,F sono commensurabili in lunghezza alla Rationale A, e per la 6. definitione, le rette E,F sono Rationali. Si saranno dunque ritrouate le Rationali E,F, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale A ; e nissuna delle due E,F, è vguale alla esposta Rationale A. E queste sono le Rationali del secondo genere.



Finalmente sia esposta la Rationale A, alla quale, per l'vndecima di questo, si troui la retta B, commensurabile solamente in potenza ; si diuida la retta B in quante parti vguali si vuole, ed vna di quelle parti sia D ; si prenda C, multiplice di D, secondo qualunque multiplicatione, sarà D commune misura delle due B, & C ; e perciò le due B, & C sono frà loro commensurabili in lunghezza ; e per la 9. propositione di questo, sono ancora frà loro commensurabili in potenza ; cioè i loro quadrati sono frà loro commensurabili. Dico che le due B, & C sono alla Rationale A commensurabili solamente in



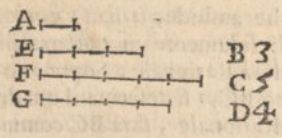
poten-

potenza. Perche il quadrato di B, per costruttione, è commensurabile al quadrato di A; sarà il quadrato di C [a] *commensurabile al quadrato di A; dal che C sarà Rationale in potenza ad A. In oltre perche le rette C, & B sono commensurabili in lunghezza, e la retta B, per costruttione, è incommensurabile in lunghezza alla Rationale A; sarà* [b] *ancora la retta C incommensurabile in lunghezza alla Rationale A; ed haueremo ritrouate le due Rationali C, & B, frà di loro commensurabili in lunghezza, e commensurabili solamente in potenza alla Rationale A. E queste sono le Rationali del terzo genere, come fù proposto fare, e dimostrare.*

a 12. del 10.

b 14. del 10.

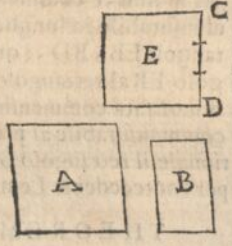
Volendosi ritrouare quante si voglia linee Rationali commensurabili frà loro in lunghezza, si operi in questo modo. Si espongano tanti numeri B, C, D, per quante sono le Rationali da trouarsi, e si prendano altrettante rette E, F, G, multiplici di A, in modo, che la retta E contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero B, si faccia similmente che la retta F contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero C, e che la retta G contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero D; essendo A commune misura delle rette E, F, G, saranno le rette E, F, G, commensurabili frà loro in lunghezza, e saranno Rationali, stante che sono commensurabili alla Rationale A.



LEMMA.

Quello spatio, ch'è commensurabile allo spatio Rationale, è ancora Rationale.

Sia lo spatio A Rationale, al quale sia commensurabile lo spatio B. Dico che lo spatio B è Rationale. S'intenda CD la Rationale, alla quale deuono essere comparate le altre grandezze, il di cui quadrato sia E; per l'ottaua definitione di questo, sarà il quadrato E quello, che chiamiamo Rationale, al quale deuono essere comparati gli altri piani. Perche lo spatio B è supposto Rationale, sarà dunque B [a] *Rationale rispetto al Rationale E, e perciò i due B, & E, sono commensurabili. In oltre, perche gli spatij E, ed A sono commensurabili al medesimo spatio B, sarà A* [b] *commensurabile al Rationale E; e, per la 6. definitione di questo, lo spatio A sarà Rationale, ch'era da dimostrarsi.*



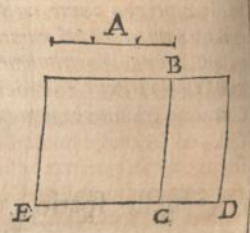
a 9. defin. del 10.

b 12. del 10.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XX.

Il rettangolo, contenuto da linee rette Rationali in lunghezza, e commensurabili secondo qualch'vno de i modi sopradetti, sarà Rationale.

Sia esposta la Rationale A, e lo spatio rettangolo BD, il quale sia contenuto dalle rette Rationali in lunghezza BC, CD, e commensurabili secondo vno de i tre predetti modi, spiegati nel secondo de gli antecedenti Scolij; cioè, che l'vno, ò l'altro de i lati, BC, CD, sia vguale all'esposta Rationale A; ò che nissuno di essi sia vguale alla Rationale A; mà che ambidue ò siano commensurabili in lunghezza, ò commensurabili solamente in potenza alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD sarà Rationale. Sopra vno de i lati BC, CD, per essempio, sopra al lato BC, [a] si descriua il quadrato EB. Perche la retta BC, per ipotesi, è Rationale, sarà BC commensurabile, ò in lunghezza, ò solamente in potenza all'esposta Rationale A: per la qual cosa il quadrato di BC, cioè il quadrato EB, [b] sarà commensurabile al quadrato della Rationale A: mà il quadrato della Rationale A [c] è quel Rationale, rispetto al quale, tutti gli altri spatij, che gli sono commensurabili, sono Rationali; essendo il piano EB, commensurabile al quadrato della Rationale A, sarà il quadrato EB [d] Rationale. In oltre, perche BC, come lato del quadrato BE, è vguale ad EC, e la retta BC, per ipotesi, è commensurabile in lunghezza al lato CD, sarà EC commensurabile in lunghezza al medesimo lato CD. Si considerino i rettangoli EB, BD, i quali hanno la medesima altezza BC; sarà il rettangolo EB al rettangolo BD, [e] come la base EC alla base CD, mà EC è dimostrata commensurabile in lunghezza al lato CD, sarà il piano EB [f] commensurabile al piano BD. E perche il quadrato EB è dimostrato Rationale, il rettangolo BD, ch'è commensurabile allo spatio Rationale EB, per l'antecedente Lemma, sarà Rationale, il che era da dimostrarsi.



a 46. del 1.
b 3. defin. del 10.
c 8. defin. del 10.
d 9. defin. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.

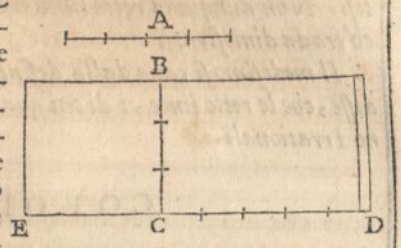
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXI.

Se vn rettangolo Rationale sarà applicato ad vna retta Rationale; l'altro lato sarà Rationale, e sarà ancora commensurabile in lunghezza à quel lato, al quale è fatta l'applicatione.

Sia esposta la Rationale A, alla quale tutte le altre si comparano; e sia data la retta BC Rationale, secondo vno de i tre detti modi, spie-

gati

gati nello Scolio secõdo alla 19. propositione di questo; cioè che ò BC sia vguale, ò non vguale alla Rationale A, sia però ò commensurabile in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, alla esposta Rationale A, e si applichi alla rationale BC il rettangolo Rationale BD, e ne risulti il lato CD. Dico che il lato CD è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza al lato BC. Sopra al lato BC [a] si descriua il quadrato EB. Essendo BC, per ipotesi, Rationale, dimostraremo, come nell'antecedente propositione si fece, che il quadrato EB è Rationale. Hor essendo BD, per ipotesi, Rationale, ed il quadrato EB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; saranno gli spatij BE, BD [b] commensurabili al quadrato della Rationale A; e perciò i rettangoli EB, BD, [c] sono commensurabili frà loro. In oltre perche i rettangoli EB, BD, hanno la medesima altezza BC, sarà il quadrato EB al rettangolo BD, come la base EC, ouero BC, alla base CD: mà il quadrato EB è dimostrato commensurabile al rettangolo BD; sarà BC [d] commensurabile alla retta CD; dal che le rette BC, CD sono frà loro commensurabili in lunghezza. E perche le Rationali CB, ed A, sono commensurabili ò in lunghezza, ouero commensurabili solamente in potenza; essendo CB commensurabile à CD, sarà ancora A [e] commensurabile à CD ò in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza. Hor essendo CD commensurabile alla rationale A ò in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, per la sesta definitione di questo, sarà CD Rationale. Per la qual cosa, applicato il piano Rationale BD al lato Rationale BC, ne risulta il lato CD Rationale, e commensurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimostrarsi.

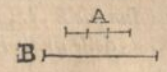


a 46. del 1.
b 9. defin. del 10.
c 12. del 10.
d 10. del 10.
e 12. del 10.

LEMMA I.

Il lato di qualunque quadrato, vguale à qualche spatio Irrationale, è Irrationale.

Sia il quadrato di qualche retta linea B vguale à qualche spatio Irrationale, cioè, che sia Irrationale. Dico che la retta linea B è ancora Irrationale. Si esponga la Rationale A. Se la retta linea B non è Irrationale, quella necessariamente sarà Rationale, e per la sesta definitione, sarà commensurabile ad A ò in lunghezza, ouero solamente in potenza, e perciò il quadrato della retta B sarà commensurabile al quadrato della Rationale A; e per la



nona definitione, il quadrato di B sarà Rationale, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque la retta linea B è Rationale, mà sarà Irrationale, ch'era da dimostrarsi.

Il medesimo si caua dalla definitione vndecima di questo, doue si disse, che le rette linee, i di cui quadrati sono Irrationali, si chiamano Irrationali.

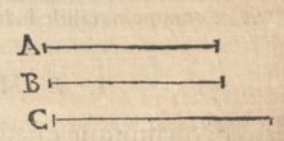
COROLLARIO.

Da quel, che si è detto nell'antecedente Lemma, e da quel, che si disse nella dimostratione alla 20. propositione, si caua, che il quadrato d'vna retta Rationale è Rationale.

LEMMA II.

Ritrouare due, ò più rette, Rationali, commensurabili solamente in potenza.

Le rette Rationali, che sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, sono di due generi; cioè, ò vna di quelle è vguale all'esposta Rationale, ò ambedue sono ineguali alla detta Rationale. Habbiansi prima da trouare quelle del primo genere; cioè quelle, delle quali vna è vguale all'esposta Rationale. Sia dunque l'esposta Rationale A, e sia la retta B vguale ad A. Poi si troui la



a 11.del 10. *retta C, [a] commensurabile solamente in potenza alla retta B; sarà ancora C commensurabile solamente in potenza alla Rationale A; e per la sesta definitione di questo, sarà la retta C Rationale: mà B, per essere vguale ad A, è ancora Rationale; le due dunque B, C, sono Rationali, e sono commensurabili solamente in potenza, delle quali B è vguale alla Rationale A, ch'era da farsi nel primo luogo.*

Per trouare quelle del secondo genere; cioè, che nissuna delle due sia vguale all'esposta Rationale. Sia di nuouo esposta la Rationale A, e si troui

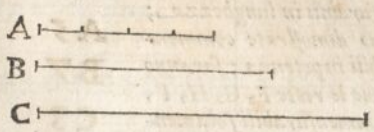
b 11.del 10. *la retta B, [b] commensurabile solamente in potenza alla Rationale A, per la sesta definitione di questo, B sarà Rationale. Similmente si troui la retta*

c 11.del 10 *C, [c] commensurabile solamente in potenza alla retta B. Perche A, & B,*

sono

sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, e la retta B, per costruttione, è commensurabile à C solamente in potenza; sarà A d *commensurabile à C solamente in potenza. Hor essendo C commensurabile ad A, solamente in potenza, per la sesta definitione, C sarà Rationale. Per la qual cosa le due B, & C sono Rationali, e sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, delle quali nissuna è vguale alla Rationale A, come fù proposto ritrouare.*

d Scol. alla 12. propos. del 7.



Bisognando poi ritrouare quante rette Rationali si vogliano, commensurabili solamente in potenza, si operi nel seguente modo.

Si espongano tanti numeri primi, per quante rette Rationali si vogliano, come sono i numeri A, B, C, D, E; poi si prenda la Rationale F, e si faccia come il numero A al numero B, così il quadrato di F al quadrato di vn altra rètta, che sia G, come si disse nel Corollario alla sesta propositione di questo. Di nuouo si faccia come il numero B al numero C, così il quadrato di G al quadrato d'vn altra retta, che sia H. E similmente, si faccia come il numero C al numero D, così il quadrato di H al quadrato di I, e come il numero D al numero E, così il quadrato di I al quadrato di K; e con quest'ordine in infinito. Dico che le rette F, G, H, I, K sono Rationali, commensurabili solamente in potenza. Perche il quadrato di F al quadrato di G è come A à B; ed il quadrato di G al quadrato di H è come B à C; ed ancora il quadrato di H al quadrato di I è come C à D; ed il quadrato di I al quadrato di K è come D ad E; sarà per l'egualità, il quadrato di F al quadrato di K come A ad E; e similmente il quadrato di F al quadrato di I sarà come A à D, il quadrato di F al quadrato di H, come A à C; il quadrato di G al quadrato di K, come B ad E; il quadrato di G al quadrato di I, come B à D; ed il quadrato di H al quadrato di K, come C ad E. Per la qual cosa i quadrati delle rette F, G, H, I, K sono come i numeri A, B, C, D, E, e per la sesta propositione di questo, i quadrati delle rette F, G, H, I, K sono frà di loro commensurabili; dal che le rette F, G, H, I, K sono commensurabili in potenza. Dico che le rette F, G, H, I, K sono incommensurabili in lunghezza. Perche i quadrati delle rette F, G, H, I, K, sono come i numeri primi A, B, C, D, E; ed i numeri

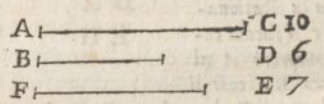


meri primi, per il Corollario all'vltimo Scolio dell'ottauo Libro non sono come i numeri quadrati; in conseguenza i quadrati delle rette F, G, H, I, K, non sono come i numeri quadrati; e per la nona propositione di questo, le rette F, G, H, I, K sono incommensurabili in lunghezza; furono dimostrate commensurabili in potenza; saranno dunque le rette F, G, H, I, K, commensurabili solamente in potenza. Finalmente, perche F, per ipotesi, è Rationale, ed i quadrati delle rette G, H, I, K sono comparati al quadrato della Ra.



tionale F; perciò le rette F, G, H, I, K sono Rationali. E così sarà manifesto il modo da trouare quante si voglia rette Rationali, commensurabili frà di loro solamente in potenza, il che era da farsi, e dimostrarsi.

Se saranno proposte quante si voglia rette Rationali commensurabili solamente in potenza, e se ne vogliano ritrouare delle altre, che con le proposte siano commensurabili solamente in potenza, si operi in questo modo. Siano proposte le due Rationali A, B, commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato di A al quadrato di B sia come il numero C al numero D, si prenda qualunque altro numero E, non quadrato, che sia primo à ciascuno de numeri C, & D, poi si faccia per il Corollario alla sesta propositione di questo, come il numero D al numero E così il quadrato della retta B al quadrato d'vn altra retta come F. Dico che la retta F è Rationale commensurabile solamente in potenza alle due A, & B, perche il quadrato della retta B al quadrato della retta F è come il numero D al numero E: perciò i quadrati delle rette B, ed F sono commensurabili, e le rette B, ed F sono commensurabili almeno in potenza; mà la retta B è supposta Rationale, la retta dunque F, che gl'è commensurabile, sarà Rationale. In oltre perche D ad E sono numeri primi, per quel, che si disse nel fine dell'ottauo Elemento non sono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, mà per costruttione il numero D al numero E è come il quadrato della retta B al quadrato della retta F, il quadrato dunque della retta B al quadrato della retta F non è come numero quadrato à numero quadrato, e per la nona propositione di questo, le rette B, ed F sono incommensurabili in lunghezza, e perciò sono commensurabili solamente in potenza. Finalmente essendo il quadrato di A al quadrato di B come il numero C al numero D, ed il quadrato di B al quadrato di F è come il numero D al numero E; per l'egualità il quadrato di A al quadrato di F sarà come il numero C al numero E; mà li numeri C ed E per essere numeri primi nõ sono come numero quadrato à numero quadrato, in conseguenza il quadrato di A al quadrato di F non sarà come numero quadrato à numero quadrato,



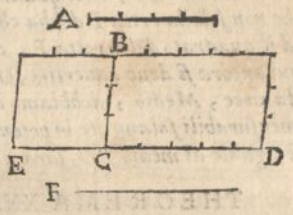
e per

è per la 9. propoſitione di queſto, le rette A, ed F, ſono incommenſurabili in lunghezza, mà ſono commenſurabili in potenza, ſtante che li loro quadrati ſono come i numeri C & E; ſaranno dunque le rette A, & F, Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, come fù propoſto fare, e dimoſtrare. Nell'iſteſſo modo ſe ne poſſono trouare quante ſi voglia altre.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXII.

Il rettangolo, contenuto da due rette linee Rationali, e commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, è Irrationale: e la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è parimente Irrationale; e queſta retta linea ſi chiamerà Media.

Sia eſpoſta la Rationale A, ed il propoſto rettangolo ſia BD, il quale ſia contenuto da i lati BC, CD, Rationali, e frà di loro commenſurabili ſolamente in potenza, ſecondo vno de gli antedetti modi, ſpiegati nel ſecondo de gli antecedenti Lemma; cioè ò che vno de i lati BC, CD ſia vguale alla rationale A, ouero ambidue ſiano ineguali alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD è Irrationale, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo BD, ſarà ancora Irrationale, e ſi chiamerà Media. Sopra ad vno de i lati BC, CD, per eſſempio, ſopra al lato BC, [a] ſi deſcriua il quadrato BE. Perche BC, per ipoteſi, è Rationale, per il Corollario dopo la vigeſima propoſitione, ſarà il quadrato EB Rationale, e perciò [b] ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale A. In oltre, perche i due rettangoli EB, BD, hanno la medeſima altezza BC, ſarà il quadrato EB al rettangolo BD [c] come la baſe EC, ouero BC, alla baſe CD: mà BC (per eſſere commenſurabile ſolamente in potenza à CD) è incommenſurale in lunghezza alla medeſima CD; ſarà il quadrato EB [d] incommenſurabile al rettangolo BD. Finalmente perche il quadrato EB è commenſurabile al quadrato della Rationale A, e ſi è dimoſtrato il quadrato EB eſſere incommenſurabile al rettangolo BD, ſarà il quadrato di A [e] incommenſurabile al rettangolo BD. Hor eſſendo il rettangolo BD incommenſurabile al quadrato della Rationale A, per la definitione decima, il rettangolo BD ſarà Irrationale. Frà li due lati BC, CD, [f] ſi troui vna media proportionale, che ſia F; [g] il quadrato della retta F ſarà vguale al rettangolo BD: mà il rettangolo BD è irrationale, ſarà il quadrato della retta F irrationale, e per il primo de gli antecedenti Lem-



a 46. del 1.

b 9. defin. del 10.

c 1. del 6.

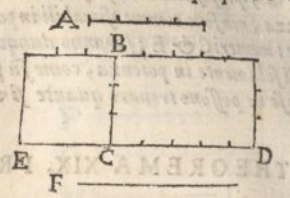
d Scol. alla prop. 10. del 10.

e 14. del 10.

f 13. del 6.

g 17. del 6.

ma, sarà la retta F irrationale; la quale, essendo media proportionale frà i due lati BC, CD, commensurabili solamente in potenza, si chiamerà Media. Per la qual cosa il rettangolo, contenuto da i lati BC, CD, commensurabili solamente in potenza, è irrationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale allo irrationale BD, è parimente irrationale; la quale si chiamerà Media, come fù proposto dimostrare.



SCOLIO.

Deuesi però auuertire, che non tutte le rette, che sono medie proportionali frà due lati, che contengono vn rettangolo, si deuono chiamare Medie, mà quando si dirà Media, s'intenderà quella retta, ch'è media proportionale frà le due rette Rationali, e frà di loro commensurabili solamente in potenza.

Fù dimostrato dopo la prima propositione del sesto Libro, che, se saranno due qualunque rette linee, come BC, CD, il quadrato dell'vna al rettangolo, contenuto dalle due, è come il medesimo rettangolo al quadrato dell'altra; cioè, il quadrato di BC al rettangolo BD, è come il medesimo rettangolo BD al quadrato di CD; dal che il rettangolo BD è medio proportionale frà il quadrato del lato BC, ed il quadrato del lato CD; e perciò vuole il Campano, che non solo la retta F debba chiamarsi media, mà il rettangolo ancora BD, ed il quadrato della retta F, che gli è vguale, si debba chiamare Medio. E qui ancora si deue auuertire, che, quando vn rettangolo si chiamerà con questa voce, Medio, dobbiamo intendere quello, ch'è contenuto da i lati commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato della sudetta media F, ch'è vguale al medio BD, sarà quello, che si chiamerà ancora Medio.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIII.

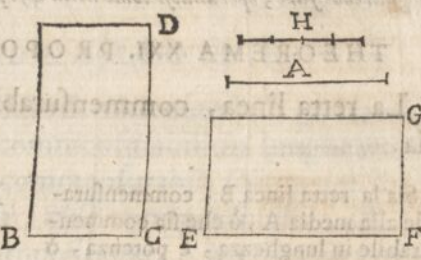
Se à qualche retta Rationale è applicato vn rettangolo, vguale al quadrato della media; l'altro lato del rettangolo sarà Rationale, e sarà incommensurabile in lunghezza à quella Rationale, alla quale fù fatta l'applicatione.

Sia la media A, e qualunque retta Rationale BC, alla quale sia applicato il rettangolo BD, [a] vguale al quadrato della media A. *Dico* che il lato CD è Rationale, ed è incommensurabile in lunghezza al lato BC. Perche la retta A, per ipotesi, è media, il suo quadrato sarà vguale à quel rettangolo, ch'è contenuto da due rette Rationali, e frà di loro commensurabili solamente in potenza; altrimente, per lo Scolio ante-

a 45. del 1.

ceden-

cedente, la retta A non sarebbe quella, che chiamiamo Media. Sia quel rettangolo il notato EG, contenuto da i due lati Rationali EF, FG, commensurabili frà di loro solamente in potenza. Essendo il rettangolo BD, per costruttione, vguale al quadrato della Media A, ed il rettangolo EG vguale al medesimo quadrato di A; sarà il rettangolo BD vguale al rettangolo EG: per la qual cosa i rettangoli BD, EG [b] hanno i lati reciprochi intorno à gli angoli vguali; e sarà come BC ad EF, così FG al lato CD; ed il quadrato di BC al quadrato di EF [c] sarà come il quadrato di FG al quadrato di CD: ma il quadrato di BC è commensurabile al quadrato di EF (stante che le rette BC, EF, sono suppoſte Rationali) in conseguenza il quadrato di FG [d] sarà commensurabile al quadrato di CD; e perciò le rette FG, CD sono commensurabili almeno in potenza. E perche BC è suppoſta Rationale, se BC sarà quella Rationale, alla quale si comparano tutte le altre, essendo DC commensurabile almeno in potenza alla Rationale BC; sarà DC [e] Rationale; e se BC non è quella Rationale, alla quale si comparano tutte le altre, sia quella la retta H. Perche BC è suppoſta Rationale, sarà BC [f] commensurabile, almeno in potenza, alla espoſta Rationale H: ma CD è commensurabile, almeno in potenza, alla retta BC; sarà ancora DC [g] commensurabile, almeno in potenza, all' espoſta Rationale H: per la qual cosa la retta CD [h] sarà Rationale. *Dico finalmente, che CD è incommensurabile in lunghezza alla retta BC. Si prendano i due lati EF, FG come* basi *di due rettangoli,* e *l'altezza commune sia EF;* sarà il quadrato di EF al rettangolo, contenuto dalle due EF, FG, [K] come la baſe EF alla baſe FG. Nell'istesso modo, preſe DC, & CB, come basi di due rettangoli, e sia DC l'altezza commune, sarà il quadrato di DC al rettangolo DCB, come DC à CB. In oltre, perche i lati EF, FG sono commensurabili solamente in potenza, saranno dunque incommensurabili frà di loro in lunghezza; e perche il quadrato di EF al rettangolo EFG, per quel, che si è dimoſtrato, è come EF ad FG; essendo EF incommensurabile in lunghezza ad FG, sarà il quadrato di EF [l] incommensurabile al rettangolo EFG: fù moſtrato il rettangolo EFG vguale al rettangolo BCD; sarà il quadrato di EF incommensurabile al rettangolo BCD. Di più, perche le rette EF, CD sono Rationali, saranno almeno commensurabili frà di loro in potenza; e perciò il quadrato di EF sarà commensurabile al quadrato di CD: ma il quadrato di EF è dimoſtrato incommensurabile al rettangolo DCB; sarà il quadrato di DC [m] incommensurabile al rettangolo DCB: ma il quadrato di DC al rettangolo DCB, per quel, che si è dimoſtrato, è come DC à CB; essendo il quadrato di DC incommensurabile



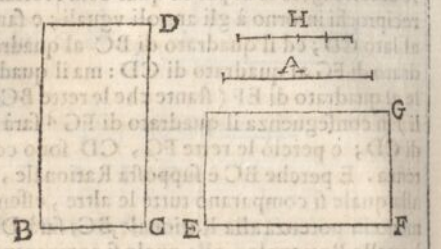
b 14. del 6.
c 22. del 6.
d 10. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 6. defin. del 10.
g 12. del 10.
h 6. defin. del 10.
K 1. del 6.
l 10. del 6.
m 13. del 10.

bile al rettangolo DCB, sarà il lato DC [n] incommensurabile al lato BC. Per la qual cosa il lato DC è incommensurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimostrarsi.

n 13.del 10.

SCOLIO.

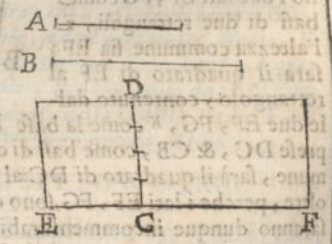
Perche il quadrato della media A è vguale al rettangolo BD, applicato alla Rationale BC; sarà A media proportionale frà i lati BC, CD; e perciò applicando à qualche Rationale BC il quadrato della media A, ne risulterà la terza proportionale CD. Si che, nelle cose à venire, douendosi applicare à qualche Rationale BC il quadrato della media A, per facilità, si faccia come la Rationale BC alla media A, così A ad vn altra, che ne risulterà il terzo lato CD; ed in questo modo saremo liberi dalla lunga operatione, che bisognarebbe fare, operandosi come nella 45. propos. del primo lib.



THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

La retta linea, commensurabile alla Media, è Media.

Sia la retta linea B, commensurabile alla media A, ò che sia commensurabile in lunghezza, e potenza, ò sia commensurabile in potenza solamente. Dico che la retta B sarà Media. Sia esposta la Rationale DC, alla quale sia applicato il rettangolo DE, [a] vguale al quadrato della media A, per lo Scolio alla propos. 22, sarà il rettangolo ED medio, il quale, applicato alla Rationale DC, fà il lato EC [b] Rationale, ed incommensurabile al lato DC in lunghezza. Di nuouo si applichi alla Rationale DC [c] il rettangolo DF, vguale al quadrato della retta B; e perche le rette A, & B, per ipotesi, sono commensurabili, i loro quadrati [d] saranno frà loro commensurabili, ed i rettangoli DF, DE, che sono vguali à i loro quadrati, saranno frà di loro commensurabili: ma il rettangolo DE al rettangolo DF [e] è come la base EC alla base CF; essendo il rettangolo ED commensurabile al rettangolo DF, sarà EC [f] commensurabile alla retta CF: ma EC è dimostrata incommensurabile alla Rationale CD, sarà CF [g] incommensurabile alla Rationale CD. In oltre perche EC è



a Scol.antecedente.

b 23.del 10.

c Scol.antecedente.

d 9.del 10.

e 1. del 6.

f 10.del 10.

g 14.del 10.

dimo-

dimostrata Rationale, non essendo commensurabile alla Rationale CD in lunghezza, sarà necessariamente [h] alla Rationale CD commensurabile in potenza; perche, se fusse altrimente, CD non sarebbe Rationale. Hor essendo le due EC, CF, commensurabili in lunghezza, saranno ancora [K] commensurabili frà loro in potenza: ma EC è commensurabile in potenza alla Rationale CD, sarà ancora CF commensurabile in potenza alla Rationale CD; e perciò CF [l] sarà Rationale: per la qual cosa le due DC, CF sono Rationali, e commensurabili frà di loro solamente in potenza; e per lo Scolio alla propos. 22, il rettangolo DF è medio. Finalmente, perche il quadrato della retta B è vguale al rettangolo DF, contenuto da i lati DC, CF, Rationali, e commensurabili frà di loro solamente in potenza, perciò la retta B [m] sarà Media. Per la qual cosa la retta, ch'è commensurabile alla Media, è Media, ch'era da dimostrarsi.

h 6. defin. del 10.
K 9. del 10.
l 6. defin. del 10.
m 22 del 10.

COROLLARIO I.

Da quel, che si è detto, appare, che il rettangolo, il quale è commensurabile al Medio, è ancora Medio; mentre si è dimostrato, che il rettangolo DF, commensurabile al medio DE, è Medio.

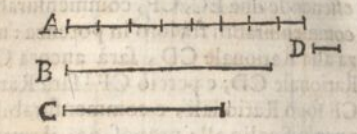
COROLLARIO II.

Le rette linee frà di loro commensurabili, per la nona *propositione*, ò sono commensurabili in lunghezza, e potenza, ouero sono commensurabili solamente in potenza. E perche la retta, ch'è commensurabile alla Media, per l'antecedente propositione, è Media; sarà manifesto, che due Medie, frà di loro commensurabili, ò saranno commensurabili in lunghezza, e potenza, ouero saranno commensurabili solamente in potenza; se saranno commensurabili in lunghezza, e potenza; si chiameranno Medie commensurabili in lunghezza; ed in questa voce vi si comprende ancora commensurabili in potenza: e se saranno commensurabili solamente in potenza, si chiameranno Medie commensurabili solamente in potenza.

LEMMA.

Ritrouare quattro Medie, cioè due commensurabili in lunghezza, e due altre commensurabili solamente in potenza.

Sia esposta qualunque Media A, e si troui la retta B, cõmensurabile in lunghezza alla media A; che si fà col diuiderla in quante parti vguali si vogliano, ed vna di quelle parti sia D; poi si prenda la retta B, multiplice di D, secondo qualunque multiplicatione; sarà D commune misura delle due A, & B, e percio le due A, & B, sono commensurabili in lunghezza. In oltre, per l'vndecima di questo, si troui la retta C, commensurabile solamente in potenza alla retta A, cioè che sia solamente incommensurabile in lunghezza, e per l'antecedente propositione, essendo le due B, & C, commensurabili ad A, cioè vna commensurabile in lunghezza, e l'altra solamente in potenza, quelle saranno Medie; ed in questo modo saranno ritrouate le due Medie A, & B, commensurabili in lunghezza, e saranno ritrouate ancora le due Medie A, & C, commensurabili solamente in potenza, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

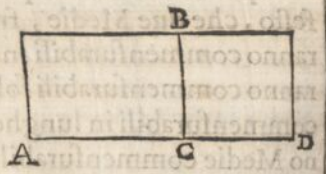


THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Il rettangolo, contenuto da due rette Medie, commensurabili in lunghezza, è Medio.

Sia il rettangolo AB, contenuto dalle due rette AC, BC, le quali siano Medie, commensurabili frà di loro in lunghezza. Dico che il rettangolo AB è Medio.

Sopra la media BC [a] si descriua il quadrato BD; per lo Scolio alla propositione 22. il quadrato B D sarà Medio. Si considerino i rettangoli AB, BD, che hanno la medesima altezza B C; sarà il rettangolo A B al rettangolo BD, [b] come la base AC alla base CD, ouero CB: ma AC, per ipotesi, è commensurabile in lunghezza à CB, ouero CD; sarà il rettangolo AB, [c] commensurabile al Medio BD, e per il Corollario 1. all'antecedente propositione, sarà il rettangolo AB Medio. Per la qual cosa il rettangolo, contenuto dalle medie, commensurabili in lunghezza, è Medio, ch'era da dimostrarsi.



a 46. del 1.

b 1. del 6.

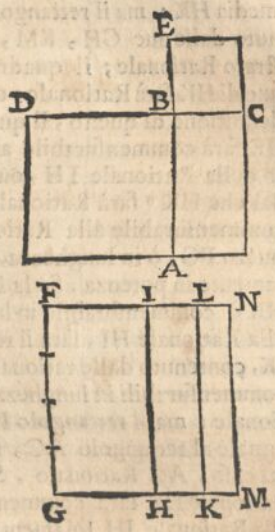
c 10. del 10.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Il rettangolo contenuto dalle rette, che sono Medie,

com-

commensurabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è Medio.

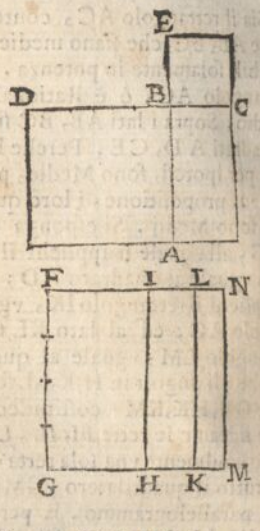


Sia il rettangolo AC, contenuto dalle rette AB, BC, che siano medie, commensurabili solamente in potenza. Dico che il rettangolo AC, ò è Rationale, ouero è Medio. Sopra i lati AB, BC si descriuano i quadrati AD, CE. Perche le due AB, BC, per ipotesi, sono Medie, per lo Scolio alla 22. propositione, i loro quadrati AD, CE, sono Medij. Si esponga la Rationale FG, alla quale si applichi il rettangolo FH [a] vguale al quadrato AD; al lato IH si applichi il rettangolo IK, vguale al rettangolo AC; ed al lato KL si applichi il rettangolo LM, vguale al quadrato CE. Perche gli angoli in H,K,I,L sono retti, le rette GH, HK, KM [b] costituiscono vna sola retta linea; e le rette FI, IL, LN costituiscono similmente vna sola retta linea; dal che tutto il quadrilatero FGMN sarà vn solo parallelogrammo. E perche le rette FG, IH, LK, NM [c] sono frà di loro vguali, essendo FG Rationale, sarà ancora IH, ouero LK, Rationale. E perche i quadrati AD, CE sono Medij, i rettangoli ancora FH, LM, che sono vguali à quei quadrati, saranno Medij; i quali, applicati alle Rationali FG, LK, ne risultano i lati GH, KM [d] Rationali, ed incommensurabili alle Rationali FG, LK; ed essendo le rette AB, BC, commensurabili in potenza, i loro quadrati AD, CE saranno commensurabili, ed i rettangoli FH, LM, che sono vguali à i medesimi quadrati, saranno frà di loro commensurabili. In oltre, essendo i rettangoli FH, LM, sotto vguali altezze, sarà il rettangolo FH al rettangolo LM, [e] come la base GH alla base KM: ma il rettangolo FH è dimostrato commensurabile al rettangolo LM, sarà GH [f] commensurabile ad MK; e perciò le rette GH, KM sono commensurabili in lunghezza. E perche le rette GH, KM sono state dimostrate Rationali, in conseguenza [g] saranno commensurabili alle Rationali FG, LK: ma si disse, che le rette GH, KM sono incommensurabili in lunghezza alle Rationali FG, LK; saranno dunque le rette GH, KM, commensurabili solamente in potenza alle Rationali FG, LK, e commensurabili frà di loro in lunghezza; e per la 20. propositione di questo, il rettangolo contenuto dalle due GH, KM, sarà Rationale. Di più, essendo AB vguale à DB, ed il lato BC vguale ad EB, sarà AB à BE, [h] come DB à BC, cioè [K] come DA ad AC: ma AB à BE è come AC à CE, sarà DA ad AC, [l] come AC à CE; dal che i tre AD, AC, CE sono continui proportionali; ma i tre DA, AC, CE sono vguali à i tre FH, IK, LM; saranno i tre FH, IK, LM continui proportionali. E perche i tre

a 45. del 1.
b 14. del 1.
c 34. del 1.
d 32. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.
g 6. defin. del 10.
h Corol. alla 7. del 5.
K 1. del 6.
l 11. del 5.

rettan-

rettangoli FH,IK, LM [m] ſono come le baſi GH,HK,KM,ſaranno le rette GH,HK,KM,continue proportionali,ed il rettangolo delle eſtreme GH, KM , [n] ſarà vguale al quadrato della media HK : ma il rettangolo contenuto dalle due GH , KM , fù dimoſtrato Rationale ; il quadrato dunque di HK ſarà Rationale ; e per la 9. definitione di queſto , il quadrato di HK ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale I H , ouero F G ; dal che HK [o] ſarà Rationale , e ſarà commenſurabile alla Rationale HI , ouero FG , ò in lunghezza,ouero ſolamente in potenza . Se la Rationale HK è commenſurabile in lunghezza alla Rationale HI , ſarà il rettangolo IK, contenuto dalle rationali IH,HK commenſurabili in lunghezza , [p] Rationale : ma il rettangolo IK è fatto vguale al rettangolo AC , ſarà , in tal caſo , AC Rationale . Se poi la Rationale HK ſarà commenſurabile alla Rationale IH ſolamente in potenza , il rettangolo IK, contenuto dalle Rationali IH , HK, commenſurabili ſolamente in potenza, [q] ſarà Medio ; ma il rettangolo IK è vguale al rettangolo AC ; il rettangolo dunque AC, in queſto caſo , ſarà Medio, come fù propoſto dimoſtrare.



m 1.del 6.
n 17.del 6.
o 6.defin. del 6.
p 20.del 10.
q 22.del 10.

CONSETTARIO.

Dalle coſe dette ſi conclude , che [a] il rettangolo , contenuto da due rette Rationali , e commenſurabili in lunghezza , è Rationale ; che [b] il rettangolo , contenuto da due rette Rationali , commenſurabili ſolamente in potenza , è Irrationale , e ſi chiama Medio ; ed il quadrato , che gli è vguale , ſi chiama Medio ; il di cui lato ſi dice parimente Media ; che [c] il rettangolo , contenuto da due rette Medie , commenſurabili in lunghezza , è Medio ; e che [d] il rettangolo , contenuto da due rette Medie , commenſurabili ſolamente in potenza , ò è Rationale , ouero è Medio .

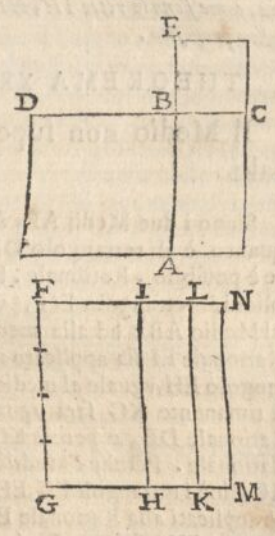
a 20.del 10.
b 22.del 10.
c 25.del 10.
d 26.del 10.

SCO-

SCOLIO.

Perche due rette Rationali non possono in altri modi essere commensurabili, se non che ò in lunghezza, ò solamente in potenza, è manifesto dall'antecedente Consettario, ch'Euclide sin qui hà spiegato la natura de i rettangoli contenuti da quelle Rationali secondo i due predetti modi; poiche, nella 20. propositione hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due Rationali, commensurabili in lunghezza, è Rationale; e quello, contenuto da due rationali, commensurabili solamente in potenza, è Medio; e quella retta, il di cui quadrato è vguale all'antedetto Medio, la chiama Media. E perche le medie ancora, ò sono commensurabili in lunghezza, ouero solamente in potenza, hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due medie, commensurabili in lunghezza, è ancora Medio; e che il rettangolo, contenuto da due medie, commensurabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è medio. Resta solo d'inuestigare, qual rettangolo sia quello, ch'è contenuto da due Medie incommensurabili in lunghezza, e potenza; al che suppliſce il P. Clauio, col dimostrare, che quello non è Rationale, ne Medio; mà che costituisce vn terzo genere; stante che è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e da quella retta, che si chiama Media; e la dimostratione è la seguente.

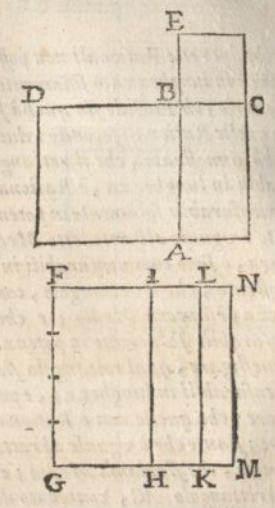
Sia il rettangolo AC, contenuto dalle due Medie AB, BC, incõmensurabili in lunghezza, e potenza. Dico che il rettangolo AC non è Rationale, ne meno è Medio, &c. s'intenda fatta la costruttione del antecedente Theorema, e si dimostri, come iui si fece, che le rette GH, KM sono Rationali; e che sono alla Rationale FG, ouero LK, incommensurabili in lunghezza. E perche le medie AB, BC, per ipotesi, sono incommensurabili in lunghezza, e potenza, perciò i loro quadrati AD, CE, [a] *ed i rettangoli FH, LM, che sono vguali à quei quadrati, saranno incommensurabili: mà FH ad LM* [b] *è come GH à KM; saranno le rette GH, KM,* [c] *incommensurabili in lunghezza. E perche le rette GH, KM, sono state dimostrate Rationali, perciò sono frà di loro commensurabili solamente in potẽza; ed il rettangolo, contenuto da esse rette GH, KM,* [d] *sarà Irrationale, e sarà quello, che si chiama Medio. Ed essendo il rettangolo, contenuto dalle due GH, KM,* [e] *per le cose dimostrate nell'antecedente propositione, vguale al quadrato di HK, sarà il quadrato di HK Medio, ed il lato HK sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Media. Per la qual cosa il rettangolo IK, ouero AC, non è Rationale; perche se fosse rationale, applicato alla Rationale IH, l'altro lato HK* [f] *sarebbe rationale, ch'è contro à quel, che si è dimostrato. Dico che ne meno IK è medio, perche, se fos-*



a 9. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 22. del 10.
e 17. del 6.
f 21. del 10.

g 23. del 10

ſe Medio, applicato alla Rationale HI, ne riſultarebbe il lato HK Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale HI: mà HK fù dimoſtrata irrationale, ſarebbe Rationale, ed irrationale, ch'è impoſſibile. Non dunque il rettangolo IK, ouero AC, che gli è vguale, è Medio; ne meno, per quel, che ſi è dimoſtrato, è Rationale; in conſeguenza il rettangolo AC è d'vn altro genere, vguale à quello, che è contenuto dalla Rationale, come IH, e dalla Media, per eſſempio HK. Donde ne ſegue, che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto da due Medie incommenſurabili in lunghezza, e potenza, come (per l'vltima ſuppoſitione) ſono le due AB, BC, non è Media, mà è di quel genere di linee, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla media, come ſono le rette IH, HK, ch'è il noſtro propoſito.



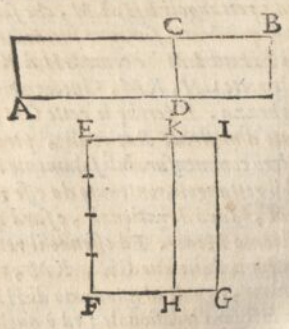
THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

Il Medio non ſupera il Medio per vno ſpatio Rationale.

Siano i due Medij AB, AC, ed il Medio AB ſuperi il medio AC, per quanto è il rettangolo DB. Dico che DB non è Rationale. Sia DB, ſe è poſſibile, Rationale. Si eſponga la Rationale EF, alla quale ſi ap-

a 45. del 1.

plichi il rettangolo EG, [a] vguale al Medio AB; ad alla medeſima Rationale EF ſia applicato il rettangolo EH, vguale al medio AC, il rimanente KG ſarà vguale al Rationale DB, e perciò KG ſarà Rationale. Perche i Medij AB, AC, cioè i rettangoli EG, EH, ſono applicati alla Rationale EF, i



b 23. del 10

lati FG, FH [b] ſaranno Rationali, ed ogn'vno incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo perche il Rationale KG è applicato alla Rationale KH, ouero EF, l'altro lato HG

c 21. del 10.

[c] ſarà Rationale, commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Hor perche le due EF, HG ſono commenſurabili in

lunghez-

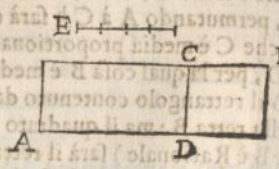
lunghezza, e la retta EF è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad FH, sarà HG [d] incommensurabile in lunghezza alla medesima FH. Prese FH, ed HG come basi di due rettangoli, ed FH sia altezza commune, sarà il quadrato di FH al rettangolo delle due FH, HG, [e] come FH ad HG: mà FH è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad HG; sarà il quadrato di FH [f] incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG. In oltre perche le rette FH, HG, per quel, che si è dimostrato, sono Rationali, perciò i loro quadrati sono commensurabili, e l'aggregato de i quadrati di FH, HG, [g] sarà commensurabile al quadrato di FH; mà il quadrato di FH è Rationale; perciò l'aggregato de'quadrati di FH, HG, che gl'è commensurabile per il Lemma, che antecede alla 20. propos. di questo è Rationale. Similmente il doppio rettangolo, contenuto dalle due FH, HG, è cõmensurabile al semplice rettangolo delle medesime FH, HG (stante che il doppio rettangolo contiene il semplice due volte.) Hor perche i quadrati di FH, HG, giunti insieme, sono commensurabili al quadrato di FH, ed il quadrato di FH è incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG; l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [h] sarà incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG: mà il doppio rettangolo delle due FH, HG, è commensurabile al semplice rettangolo delle due FH, HG; sarà l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [K] incommensurabile al doppio rettangolo delle due FH, HG; e per la 17. di questo, il Composto de i quadrati delle due FH, HG, col doppio rettangolo delle due FH, HG, sarà incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG: mà il Composto de i due quadrati FH, HG, col doppio rettangolo delle due FH, HG, [l] è vguale al quadrato di FG; sarà il quadrato di FG incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG: Mà l'aggregato de i quadrati di FH, HG, per essere commensurabile al quadrato di FH, è Rationale, essendo il quadrato di FG incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG, ch'è Rationale, per la decima definitione di questo, il quadrato di FG sarà irrationale; ed il lato FG [m] sarà irrationale, ch'è impossibile, mentre fù dimostrato, che la retta FG è Rationale, incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Non dunque il rettangolo DB, ch'è la differenza di quanto il medio AB supera il medio AC, è Rationale, che era da dimostrarsi.

d 14. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.
g 16. del 10.
h 14. del 10.
K 14. del 10.
l 4. del 2.
m 11. defin. del 10.

SCOLIO.

Il Rationale supera il Rationale per vno spatio Rationale.

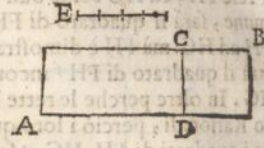
Sia il Rationale AB, il quale superi il Rationale AC, per il rettangolo DB. Dico che il rettangolo DB è Rationale. Si esponga la Rationale E, rispetto alla quale si comparano tutte le altre. Perche i rettangoli AB, AC sono Rationali, ogn'vno [a] sarà commensurabile al quadrato



a 9. defin. del 10.

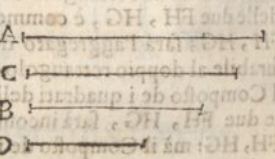
b 12.del 10.

della Rationale E; e perciò [b] *saranno frà di loro commensurabili. Hor essendo tutto il rettangolo AB, ch'è composto de i due AC, DB, commensurabile ad AC, sarà, per il Corollario alla 16. propos., il medesimo rettangolo AB commensurabile al rettangolo DB: ma AB, per ipotesi, è Rationale; sarà DB, per il Lemma, che antecede la 20. propos. Rationale, il che era da dimostrarsi.*



PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ritrouare due Medie, commensurabili frà di loro solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale.



Si trouino, per il 2. Lem. dopo la 21. propos., due rette Rationali, e commensurabili solamente in potenza, che siano le notate A, & B; si troui frà le due A, & B, [a] vna media proportionale, che sia C; e si faccia [b] come A à B, così C ad vn'altra, che sia D. Dico che le due C, & D sono le Medie, commensurabili solamente in potenza, e contengono vn rettangolo Rationale. Perche le due A, & B sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto da esse, [c] Irrationale, che si chiama Medio: ma il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, [d] è vguale al quadrato di C (stante che C è media proportionale frà le due A, & B) sarà il quadrato di C [e] Medio, e la retta C sarà quella, che si chiama Media. E perche la proportione di A à B è come quella di C à D, e le due A, & B sono commensurabili solamente in potenza, saranno le due C, & D, [f] commensurabili solamente in potenza: ma la retta C è dimostrata Media, sarà la retta D, [g] che gli è commensurabile, Media, e saranno ritrouate le due Medie C, & D, commensurabili solamente in potenza. Dico finalmente, che il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, è Rationale. Per costruttione A à B è come C à D, permutando A à C [h] sarà come B à D; ma A à C è come C à B (stante che C è media proportionale frà le due A, & B) sarà C à B [K] come B à D; per la qual cosa B è media proportionale frà le due C, & D; e perciò il rettangolo contenuto dalle due C, & D, [l] è vguale al quadrato della retta B: ma il quadrato di B è Rationale, (mentre per costruttione B è Rationale) sarà il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, Rationale, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 13. del 6.
b 12. del 6.
c 22. del 10.
d 17. del 6.
e Scol. alla propos. 22. del 10.
f Scol. alla propos. 10. del 10.
g 14. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 17. del 6.

PROBLE-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXIX.

Ritrouare due Medie commensurabili solamente in potenza, le quali contengano quel Rettangolo, che si chiama Medio.



Per lo Scolio alla propos. 21. di questo, si trouino tre rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, che siano le notate A,B,C; frà le due A,& B, [a] si troui la media proportionale D; sarà il rettangolo contenuto dalle due A, & B, [b] vguale al quadrato di D. Poi si faccia si come B à C, [c] così D ad vn altra, che sia E. Dico che le due D, ed E sono le medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che si chiama Medio. Perche le due A, & B sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, Irrationale, cioè [d] quello, che si chiama Medio: ma il rettangolo delle due A, & B è vguale al quadrato di D; sarà il quadrato di D Medio, e la retta D [e] sarà Media. Inoltre, perche B à C è come D ad E, e le due B, & C, per costruttione, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; saranno le due D, ed E, [f] commensurabili solamente in potenza: ma D è dimostrata Media, sarà E, [g] che gli è commensurabile solamente in potenza, Media; e perciò le due D, ed E sono Medie, commensurabili solamente in potenza. Dico che le Medie D, ed E, contengono quel rettangolo, che si dice Medio. Perche B à C è come D ad E, permutando, B à D [h] sarà come C ad E; ma B à D è come D ad A (stante che le tre B, D, A sono continue proportionali) sarà D ad A [K] come C ad E; ed il rettangolo, contenuto dalle estreme D, ed E, [l] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle Medie A, & C: ma il rettangolo contenuto dalle due Rationali A, & C, commensurabili solamente in potenza, [m] è Medio; il rettangolo dunque, contenuto dalle Medie D, ed E, sarà Medio, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 13. del 6.
b 17. del 6.
c 12. del 6.
d 22. del 10.
e Scol. alla 22. del 10.
f Scol. alla 10. del 10.
g 24. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 16. del 6.
m 22. del 10.

LEMMA I.

Ritrouare due numeri piani simili.

Si espongano quattro numeri proportionali A, B, C, D, talmente, che A à B sia come C à D; ed A, multiplicando B, produca il numero E; come ancora C, multiplicando D, produca F; i numeri E, ed F, che hanno i lati proportionali, per la 21. defin. del 7, sono numeri piani simili, che era da farsi.

A	3	6 C
B	5	10 D
E	15	60 F

Nel

a 28. e 29. prop. del 9.

Nel 9. lib. si è dimostrato, che [a] se il numero disparo, ouero il numero paro, multiplica vn numero paro, produce numero paro; ed il numero disparo multiplica il numero disparo, produce numero disparo; sarà manifesto di quali numeri dobbiamo valerci, per trouare due numeri piani simili, che ambidue siano numeri pari, ò ambidue numeri dispari. E perche per trouare due numeri piani simili, si deuono prendere quattro numeri proportionali, come antecedentemente si è fatto, pigliandoli ò tutti quattro numeri pari, ouero il primo, e terzo sia numero paro, ed il secondo, e quarto numero disparo, sempre i piani simili, che ne verranno, saranno numeri pari; e se tutti quattro saranno numeri dispari, i piani simili, che ne verranno, saranno ambidue numeri dispari; e se il primo, e secondo, sarà disparo, ed il terzo, e quarto sarà numero paro, vno de' piani simili sarà numero paro, e l'altro disparo.

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, in modo, che il loro aggregato sia numero quadrato.

Per l'antecedente Lemma si trouino due numeri piani, simili, come AB, & C, i quali siano ambidue ò numeri pari, ouero ambidue numeri dispari; e dal numero AB se ne detragga il numero DB, vguale al numero C: perche da vn numero paro, detratto vn numero paro, resta numero paro; e similmente dal numero disparo, detratto il numero disparo, resta numero paro, ò che i due AB, BD siano pari, ò pure siano ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro. Si diuida il numero paro AD in due parti vguali, che siano AE, ED. Dico che il prodotto, fatto dalla multiplicatione di AB in BD, sarà vno de i numeri quadrati; e l'altro sarà al quadrato di ED i quali gionti insieme comporranno vn numero quadrato. Perche i numeri AB, BD sono piani simili, per la prima propositione del nono Libro, il prodotto, fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, sarà numero quadrato. In oltre, perche il numero AD è diuiso in due parti vguali in E, ed à quello se gli è aggiunto il numero DB, per il sesto Theorema dopo la 14. propositione del Libro nono, il prodotto fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, col quadrato del numero ED, è vguale al quadrato del numero EB. Per la qual cosa i numeri quadrati sono,

A . . . . . E . . . . . D . . . . . B
C . . . . . .

no, vno il prodotto di AB in BD; e l'altro il quadrato di ED; i quali, giunti insieme, fanno il numero quadrato EB, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

COROLLARIO.

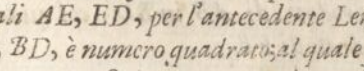
Perche il prodotto, fatto da AB in BD, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di EB, la differenza frà il quadrato di EB, ed il quadrato di DE, sarà il prodotto, fatto da i due AB, BD: Si che, se i due AB, BD, sono numeri piani, simili, sarà noto il modo di trouare due numeri quadrati, che la loro differenza sia numero quadrato; poiche, detratto da AB il numero DB, vguale al numero C, e l'auanzo AD, sia diuiso in due parti vguali, vno di quelli numeri quadrati, sarà il quadrato di EB, e l'altro il quadrato di ED.

Se poi i numeri presi AB, & C, ouero AB, & BD, non sono piani simili, ma ambidue siano numeri pari, ò ambidue dispari, nell'istesso modo si troueranno i due numeri quadrati EB, ED, la di cui differenza sarà il prodotto de i due AB, BD, il quale non sarà numero quadrato; perche, se il prodotto, fatto da i due AB, BD, fusse numero quadrato, i due AB, BD, sarebbero piani simili, ch'è contro all'ipotesi.

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, che il loro aggregato non sia numero quadrato.

Siano esposti i due numeri piani simili AB, & C, ambidue pari, ouero ambidue dispari; e, detratto dal numero AB il numero DB, vguale al numero C, saranno i numeri AB, BD piani simili; e perche sono ambidue pari, ouero ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro; il quale, diuiso ne i due numeri vguali AE, ED, per l'antecedente Lemma, il prodotto, fatto da i due AB, BD, è numero quadrato; al quale si aggiunga il quadrato di ED, l'aggregato sarà numero quadrato, cioè sarà il quadrato del



nu-

numero EB; da ED se ne leui l'vnita EF, sarà il quadrato di DF minore del quadrato di DE. Dico che il prodotto, fatto da AB in BD, ch'è numero quadrato, col quadrato del numero FD, non fa numero quadrato. Se l'aggregato del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è numero quadrato, quel numero quadrato, ò sarà maggiore, ò vguale, ò minore del quadrato di FB. Sia prima, se è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, maggiore del quadrato di FB; sarà il suo lato, ò radice, maggiore di FB. Hor se quel lato è maggiore di FB, ò sarà vguale ad EB, ò sarà maggiore di EB, non potendo

A.....E.F....D.....B
C.....

essere minore di EB, stante che EB supera FB per vna sola vnità; si che, essendo quel lato maggiore di FB, e minore di EB, bisognarebbe diuidere l'vnità EF, ch'è impossibile, nella quantità discreta. Non dunque quel lato è minore di EB, ma sarà ò vguale ad EB, ouero maggiore. Sia prima vguale ad EB, in tal caso, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, sarà vguale al quadrato di EB: ma, per il Lemma antecedente, il prodotto di AB, in BD, col quadrato di ED, è vguale al medesimo quadrato di EB: sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED: se ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, resta il quadrato di FD vguale al quadrato di ED, ed il lato FD vguale al lato ED, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il lato del quadrato composto del prodotto di AB, in BD, col quadrato di DF, è vguale ad EB. Sia di nuouo quel lato maggiore di EB, sarà il suo quadrato maggiore del quadrato di EB; cioè il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, sarà maggiore del quadrato di EB: fù dimostrato, nel Lemma antecedente, il quadrato di EB vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, maggiore del prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; se ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, resta il quadrato di FD maggiore del quadrato di ED; ed il numero FD sarà maggiore del numero ED; la parte maggiore del tutto, ch'è impossibile. Non dunque il lato del quadrato, composto del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è maggiore di EB, ne meno, per quel che si è dimostrato, è vguale, ne minore di EB. Per la qual cosa il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, non è maggiore del quadrato di FB.

Di nuouo sia, se è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, vguale al quadrato di FB. Dal numero AE se ne detraggano le due vnità AH, sarà AH il doppio dell'vnità EF.

A..H...E.F....D.....B
C.....

Perche il tutto AD, per costruttione, è il doppio di ED, e la parte AH è il doppio di EF, per la 7. propositione del 7, il rimanente HD sarà il doppio del rimanente FD; e percio HD è diuiso ne i due numeri vguali HF, FD, à i quali aggiunto il numero DB, per il 6. Theorema dopo la propositione 14. del 9, il prodotto di HB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB: ma, per la suppositione fatta, il medesimo quadrato di FB è vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di FD; sarà il prodotto di AB in BD col quadrato di DF, vguale al prodotto di HD in DB, col quadrato di FD: se ne leui il commune quadrato di FD, resta il prodotto di AB in BD vguale al prodotto di HB in BD: dal che DB, multiplicando HB, e multiplicando AB, produce numeri vguali, e, per la 17. del 7, il prodotto al prodotto è come il numero multiplicato BH al numero multiplicato AB: ma i prodotti sono stati dimostrati vguali; perciò i numeri AB, HB sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB.

Sia finalmente, s'è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del quadrato di FB. Perche il prodotto di HB in BD, col quadrato di DF, per quel, che si è dimostrato, è vguale al quadrato di FB; ed il prodotto di AB in BD, col quadrato FD, per la fatta suppositione, è minore del quadrato di FB; sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del prodotto di HB in BD, col quadrato di FD: se ne leui il commune quadrato di FD, resta il prodotto di AB in BD, minore del prodotto di HB in BD. Hor perche i numeri AB, HB, multiplicano il medesimo numero DB, il prodotto di AB in BD al prodotto di HB in BD, per la 18. del 7, sarà come il multiplicante AB al multiplicante HB: ma il prodotto di HB in BD è dimostrato minore del prodotto di HB in BD; sarà il numero AB minore del numero HB; il tutto minore della parte, ch'è impossibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è minore del quadrato di FB; non è maggiore, ne vguale, per quel, che si è dimostrato, in conseguenza il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, non è numero quadrato, come fù proposto dimostrare.

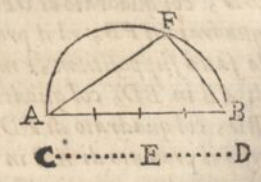
SCOLIO.

Dall'antecedente Lemma si caua il modo da trouare due numeri, il di cui aggregato non habbia à ciascuno di quelli la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: poiche, se per l'antecedente Lemma si trouano due numeri quadrati, che il loro composto non sia numero quadrato, quel composto, che non è quadrato, à ciascuno de i due quadrati trouati, non sarà come numero quadrato à numero quadrato. Ouero, se si diuiderà vn numero quadrato in due numeri non quadrati, quel quadrato à ciascuno de i non quadrati, non sarà come numero quadrato à numero quadrato.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXX.

Ritrouare due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore.

Sia esposta la Rationale AB, e per la seconda parte all'antecedente Corollario, si trouino due numeri quadrati, la differenza de'quali non sia quadrato; e siano quelli i numeri quadrati CD, CE, la di cui differenza DE non sia numero quadrato; presa la Rationale AB come diametro d'vn circolo, intorno al quale si descriua il mezzo circolo AFB; poi, per il Corollario alla 6. propos. di questo, si faccia come il numero CD al numero non quadrato ED, così AB ad vn altra quantità BF, la quale sia addattata nel mezzo circolo AFB; si tiri la retta AF, sarà l'angolo AFB, [a] nel semicircolo, retto; ed il quadrato di AB [b] sarà vguale à i quadrati de i due lati AF, FB; e perciò il quadrato di AB è maggiore del quadrato di AF, per quanto è il quadrato di FB. Dico che le rette AB, BF sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB supera il quadrato della minore FB, per il quadrato d'vna retta, come AF, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB. Perche il quadrato di AB al quadrato di FB, per costruttione, è come il numero CD al numero ED; saranno i quadrati di AB, FB, [c] commensurabili: ma il quadrato della Rationale AB [d] è Rationale, sarà il quadrato di FB [e] Rationale, ed il suo lato FB sarà Rationale; per la qual cosa le rette AB, FB sono Rationali. E perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come il numero CD al numero DE; ed il numero CD al numero DE nõ è come numero quadrato à numero quadrato, stante che ED non è numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di FB



a 21. del 3.
b 47. del 1.
c 6. del 10.
d 8. defin. del 10.
e 9. defin. del 10.

è co-

è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AB, FB [f] sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate commensurabili in potenza; saranno le Rationali AB, FB commensurabili solamente in potenza.

[f] 9. del 10.

Finalmente, perche il numero CD al numero DE è come il quadrato di AB al quadrato di FB, per la conuersione della proportione, l'antecedente CD alla differenza CE [g] sarà come l'antecedente, cioè il quadrato di AB, al quadrato di AF (che è la differenza frà li due quadrati AB, FB) cioè sarà il quadrato di AB al quadrato di AF, come il numero quadrato CD al numero quadrato AF: per la qual cosa le rette AF, AB, [h] sono commensurabili in lunghezza. Saranno dunque ritrouate le due rette AB, FB, Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB supera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

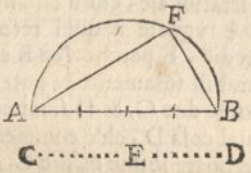
[g] Corol. alla 19. del 5.

[h] 9. del 10.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXXI.

Ritrouare due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore.

Si esponga la retta Rationale AB, e per il 2. Lemma dopo la 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come CE, ED, in modo, che il loro aggregato CD non sia numero quadrato. Sopra la Rationale AB si descriua il mezzo circolo AFB; poi, per il Corollario alla 6. propos. di questo, si faccia come il numero CD al numero DE, così il quadrato di AB al quadrato della retta FB, la quale [a] si addatti nel mezzo circolo AFB; si tiri la retta AF. Si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che il quadrato di AB supera il quadrato di FB, per quanto è il quadrato di AF; e si mostri ancora, che le due AB, FB sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, stante che questo si dimostra nell'istesso modo, che si fece all'antecedente propositione. In oltre, perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come CD à DE, per la conuersione della proportione, sarà il numero DC al numero CE, [b] come il quadrato di AB al quadrato di AF: ma CD à CE [c] non è come numero quadrato à numero quadrato (stante che CD non è numero quadrato) ne meno il quadrato di AB al quadrato di AF è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AF, AB [d] sono incommensurabili in lunghezza. Per la qual cosa saranno ritrouate le due Rationali AB, BF, commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato della maggiore AB



[a] 1. del 4.

[b] Corol. alla 19. del 5.

[c] 24. del 8.

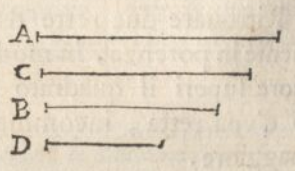
[d] 9. del 10.

ſupera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXXII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Si trouino, per la 30. propoſitione di queſto, due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, come A, & B, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore B, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſa maggiore A: frà le due A, & B, [a] ſi troui vna media proportionale, che ſia C, ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, vguale al quadrato della retta C. Poi ſi faccia ſi come A à B, [b] così C ad vn altra, che ſia D. Dico che le due rette C, & D ſono le medie, che ſi cercano. Perche le due A, B ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medeſime A, & B, [c] ſarà irrationale, che ſi chiama Medio; e la retta C, il di cui quadrato è vguale à quel rettangolo, ſarà quella retta, che ſi chiama Media. E perche A à B è come C à D, e le due A, & B ſono commenſurabili ſolamente in potenza; per lo Scolio alla 10. propoſitione di queſto, le due C, & D, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa D, ch'è commenſurabile alla media C, [d] ſarà Media; e ſaranno ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza. Dico che contengono vn rettangolo Rationale. Perche A à B è come C à D, permutando, A à C [e] ſarà come B à D; ma A à C è come C à B (ſtante che C è media proportionale frà le due A, & B) ſarà C à B, [f] come B à D; e perciò B è media proportionale frà le due C, & D. Per la qual coſa il rettangolo, contenuto dalle eſtreme C, & D, [g] è vguale al quadrato della retta B: ma la retta B è poſta Rationale, ſarà il quadrato di B [h] Rationale; cioè il rettangolo, contenuto dalle medie C, & D, è Rationale. Finalmente perche A à B è come C à D, ed il quadrato di A, per coſtruttione, ſupera il quadrato di B, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato ancora di C ſuperarà il quadrato di D, [K] per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore C; e ſaranno ritrouate le due Medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettan-



a 13. del 6.
b 12. del 6.
c 22. del 10.
d 24. del 10.
e 16. del 5.
f 11. del 5.
g 17. del 6.
h 8. defin. del 10.
K 15. del 10.

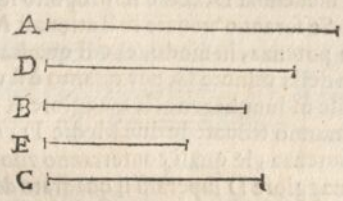
rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore C, ſupera il quadrato della minore D, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore C, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

Se ſaranno trouate le Rationali A, B, l commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore B, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla maggiore A; ed il rimanente ſi faccia come prima, haueremo ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore C ſuperarà il quadrato della minore D, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore C, il che tutto ſi dimoſtra, come ſopra ſi fece. l 31. del 10.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXXIII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano quel rettangolo, che ſi chiama Medio; ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Si trouino due rette Rationali, come A, & C, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore C, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore A; poi, per lo Scolio alla propoſit. 21. di queſto, ſi troui la retta B Rationale, e commenſurabile alle due A, & C, ſolamente in potenza; Ciò fatto, ſi troui vna media proportionale, [b] frà le due A, & B, che ſia D; ſarà il quadrato della retta D [c] vguale al rettangolo, contenuto dalle due A, & B. Si faccia poi come D à B, [d] così C ad vn altra, che ſia E, ſarà il rettangolo delle eſtreme D, ed E, [e] vguale al rettangolo delle medie B, & C. Dico che le due D, ed E ſono le Medie, che ſi cercano. Si prendano le due A, & C, come baſi di due rettangoli, e ſia B altezza commune; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, al rettangolo contenuto dalle due B, & C, [f] come le baſe A alla baſe C: ma il rettangolo delle due A, & B, è vguale al quadrato della retta D; ed il rettangolo delle due B, & C, è vguale al rettangolo delle due D, ed E; ſarà il quadrato di D al rettangolo delle due D, ed E, come A à C. Preſe D, ed E, come baſi di due rettangoli, e ſia D altezza commune; ſarà il quadrato di D al rettangolo delle due D, ed E, [g] come la baſe D alla baſe E: ma il quadrato di D al rettãgolo delle due D, ed E, fù moſtrato eſſere come A à C;



a 30. del 10.

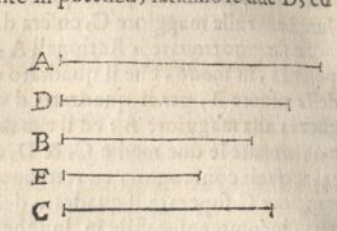
b 13. del 6.
c 17. del 6.
d 12. del 6.
e 16 del 6.

f 1. del 6.

g 1. del 6.

ſarà

sarà dunque A à C, come D ad E; e perche le due A, & C sono, per costruttione, commensurabili solamente in potenza, saranno le due D, ed E, per lo Scolio alla 10. propositione di questo, commensurabili solamente in potenza. In oltre, perche il quadrato di D, è vguale al rettãgolo contenuto dalle due rationali A, & B, commensurabili solamente in potenza; sarà il quadrato di D [h] irrationale, e la retta D sarà Media; ma si disse, che la retta E è cõmensurabile alla media D, perciò la retta E [K] sarà Media. Hor essendo le rette B, & C, Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle due B, & C, [l] sarà irrationale; cioè quello, che si chiama Medio: ma il rettangolo delle due B, & C, fù dimostrato vguale al rettangolo delle due D, ed E; il rettangolo dunque, contenuto dalle due D, ed E, sarà Medio; E saranno ritrouate le due Medie D, ed E, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che si chiama Medio. Dico finalmente, che il quadrato di D supera il quadrato di E, per il quadrato di vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore D. Perche fù dimostrato, che A à C è come D ad E, e, per costruttione, il quadrato di A supera il quadrato di C, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato di D [m] superarà il quadrato di E, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla medesima D, come fù proposto fare, e dimostrare.



h 22. del 10.
K 24. del 10.
l 22. del 10.
m 15. del 10.

Se saranno trouate le Rationali A, & C, [n] commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A superi il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore A; ed il rimanente si faccia come prima, saranno trouate le due Medie D, ed E, commensurabili solamente in potenza, le quali conterranno vno spatio Medio, ed il quadrato della maggiore D superarà il quadrato della minore E, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile alla maggiore D; e la dimostratione è la medesima, fatta di sopra.

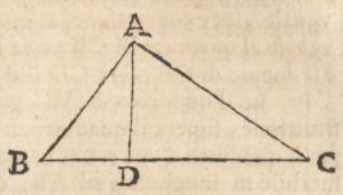
n 31. del 10.

LEMMA.

Se sia il triangolo rettangolo ABC, e l'angolo retto sia BAC, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato BC. Dico che il rettangolo, contenuto dalle due BC, CD è vguale al quadrato di AC; che il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, è vguale al quadrato di AB; che il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; e che il rettangolo, contenuto dalle due

AD,

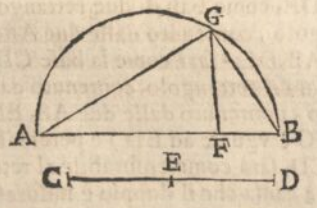
AD, BC, è vguale al rettangolo, contenuto da i due lati BA, AC.



Perche AD diuide il triangolo ABC ne i due triangoli ADC, ADB, ſimili frà di loro, e ſimili à tutto il triangolo ABC, conſiderando i due ſimili triangoli ABC, ADC, ſarà BC à CA, come CA à CD; ed il rettangolo, contenuto dalle due BC, CD, ſarà vguale al quadrato di AC. Similmente, conſiderando i ſimili triangoli ABC, ABD, ſarà CB ad AB, come AB à BD; ed il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, ſarà vguale al quadrato di AB. Di nuouo, conſiderando i ſimili triangoli ADB, ADC, ſarà BD à DA, come DA à DC, ed il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, ſarà vguale al quadrato di AD. Finalmente, conſiderando i ſimili triangoli ABC, ADB, ſarà DC à CA, come BA ad AD; ed il rettangolo contenuto dalle eſtreme BC, AD, ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BA, AC, come fù propoſto dimoſtrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXIV.

Ritrouare due rette linee, incommenſurabili in potenza, in modo, che il compoſto de i loro quadrati ſia Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio.



Si trouino due rette Rationali, come AB, CD, [a] commenſurabili ſolamente in potenza; e che il quadrato della maggiore AB ſuperi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB: ſi diuida CD in due parti vguali in E; poi per il ſecondo Lemma dopo la 17. propoſitione di queſto, ſi applichi ad AB vn rettangolo, vguale al quadrato di CE, in modo, che manchi à compire la retta AB, per vna figura quadrata; per il Corollario al citato Lemma, ſarà diuiſa AB talmente in F, che il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, ſarà vguale al quadrato di CE; cioè ſarà vguale alla quarta parte del quadrato di tutta CD. Intorno alla retta AB ſi deſcriua il mezzo circolo AGB; nel punto F [b] ſi erigga la retta FG, perpendi-

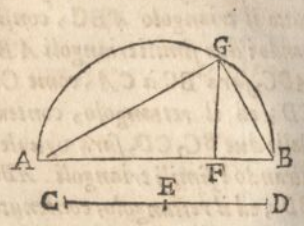
a 31. del 10.

b 11. del 1.

colare

colare ad AB, la quale, continuata, concorra con la circonferenza in qualche punto G: si tirino le rette AG, GB; l'angolo AGB [c] sarà retto, e, per l'antecedente Lemma, il rettangolo, contenuto dalle due AF, FB, sarà vguale al quadrato di FG: mà il rettangolo delle due AF, FB, è vguale, per costruttione, al quadrato di CE; sarà il quadrato di FG vguale al quadrato di CE; e la retta FG vguale alla retta CE; mà CD è il doppio di CE; sarà CD il doppio di FG. Supposto questo.

c 31. del 3.



Perche il quadrato di AB, per costruttione, supera il quadrato di CD, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad AB; e si è applicato ad AB il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, vguale alla quarta parte del quadrato della minore CD, che gli manchi à compire la linea, vna figura quadrata; per la decimanona propositione di questo, le parti AF, FB sono frà di loro incommensurabili in lunghezza. Prese AF, FB, come basi di due rettangoli, de' quali sia AB altezza commune; sarà il rettangolo, contenuto dalle rette BA, AF, al rettangolo, contenuto dalle rette AB, BF, [d] come le base AF alla base FB: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo delle due BA, AF, è vguale al quadrato di AG; ed il rettangolo delle due AB, BF, è vguale al quadrato di GB; il quadrato dunque di AG al quadrato di GB [e] sarà, come AF ad FB: fù dimostrata AF incommensurabile in lunghezza ad FB; sarà il quadrato di AG [f] incommensurabile al quadrato di GB; per la qual cosa le rette AG, GB, [g] sono incommensurabili in potenza. E perche il quadrato della Rationale AB [h] è Rationale, ed è vguale [K] à i quadrati delle due AG, GB, haueremo ritrouato due rette, come AG, GB, incommensurabili in potenza, che il loro composto fanno il quadrato di AB Rationale. Dico che il rettangolo contenuto dalle rette AG, GB è Medio. Prese CD DE, come basi di due rettangoli, e sia AB altezza commune; il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, al rettangolo, contenuto dalle due AB, DE, [l] sarà come la base CD alla base DE: mà CD è il doppio di DE, sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, ED, ouero dalle due AB, FG (stante che FG è vguale ad ED) e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, sarà commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, (à causa che il doppio è misurato da quello, che è sua metà). Hor essendo le due AB, CD, Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, [m] sarà irrationale, cioè quello, che si chiama Medio: essendo il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, commensurabile al Medio, cioè al rettangolo, contenuto dalle due AB, CD; il rettangolo ancora, contenuto dalle due AB, FG, [n] sarà Medio: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio. Per la qual

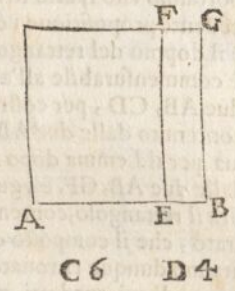
d 1. del 6.
e 11. del 5.
f 10. del 10.
g 4. defin. del 10.
h 8. de fin. del 10.
K 47. del 1.
l 1. del 6.
m 22. del 10.
n Corol. alla 24. del 10.

cosa

cosa le rette AG, GB sono incommensurabili in potenza; i loro quadrati compongono il quadrato di AB, ch'è Rationale; e contengono quel rettangolo, che si chiama Medio, come fù proposto fare, e dimostrare.

SCOLIO.

Non sarà inutile dimostrare in questo luogo quel, che si dimostra in vn Scolio Antico, cioè. Se sia possibile, che due spatij irrationali compongano vno spatio Rationale. Si esponga la retta Rationale AB, e si prendano due numeri ineguali, come C maggiore, ed il minore sia D, che non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato: sopra la Rationale AB [a] *si descriua il quadrato AG; sarà il quadrato AG* [b] *Rationale. Si faccia poi sicome C à D, così il quadrato di AB al quadrato di AE; dal punto E* [c] *si tiri la retta EF, parallela al lato BG. Perche il quadrato di AB al quadrato di AE è come il numero C al numero D; non essendo il numero C al numero D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di AE sarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa i lati AB, AE* [d] *di quei quadrati sono incommensurabili in lunghezza. Hor essendo AB, composta delle due AE, EB, incommensurabili in lunghezza ad AE; la medesima AB* [e] *sarà incommensurabile in lunghezza al restante EB. In oltre, perche il quadrato di AB, cioè AG, al rettangolo AF,* [f] *è come AB ad AE, ed AB è incommensurabile in lunghezza ad AE; sarà il quadrato AG* [g] *incommensurabile al rettangolo AF: Mà il quadrato AG è Rationale, perciò il rettangolo AF sarà irrationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo EG è irrationale. Per la qual cosa i due irrationali, AF, EG, compongono lo spatio AG Rationale, ch'era da dimostrarsi.*



a 46. del 1.
b 8. defin. del 10.
c 31. del 1.
d 9. del 10.
e Corol. alla 17. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.

Se poi i due Rettangoli AF, EG fossero Rationali, si dimostrerà, che tutto il composto AG è Rationale. Perche l'vno, e l'altro de i Rettangoli AF, EG, si suppone Rationale, perciò saranno frà di loro [h] *commensurabili, per la qual cosa tutto il Composto da loro, cioè AG,* [K] *sarà commensurabile ad ogn'vno di essi, ed in conseguenza tutto il Composto AG, essendo commensurabile à i Rationali AF, EG,* [l] *sarà Rationale; il che era da dimostrarsi.*

h 9. defin. del 10.
K 16. del 10.
l 9. defin. del 10.

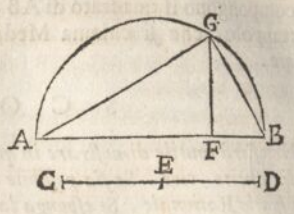
PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XXXV.

Ritrouare due rette linee, incommensurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti insieme, compongano vn'spatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, sia Rationale.

Si ritrouino due rette Medie, come AB, CD, [a] commensurabili sola-

a 32. del 10.

mente in potenza, le quali contengano vn rettângolo Rationale, in modo, che il quadrato della maggiore AB ſuperi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB. Si facciano le altre coſe, come nell'antecedente propoſitione, e ſi moſtri, come iui ſi fece, che le rette AG, GB ſono incommenſurabili in potenza; e perche il quadrato della media AB è Medio, eſſendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, i quadrati delle due AG, GB, giunti inſieme, comporranno vno ſpatio Medio. Si dimoſtri ancora, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; e perciò l'vno è commenſurabile all'altro. E perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, per coſtruttione, è Rationale, ſarà ancora il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, che gli è commenſurabile, [c] Rationale: mà per il Lemma dopo la 33. propoſitione, il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AG, GB; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Rationale: mà ſi è dimoſtrato, che il compoſto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio; ſi ſaranno dunque ritrouate le due rette AG, GB, *incommenſurabili in potenza*, i di cui quadrati, giunti *inſieme*, compongono vn Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, è Rationale, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



b 47. del 1.

c 9. defin. del 10.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XXXVI.

Ritrouare due rette linee, incommenſurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vn' ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, ſia Medio; il quale ſia incommenſurabile al compoſto de i loro quadrati.

Si ritrouino due Medie AB, CD, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn' ſpatio Medio; ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB; e ſi facciano tutte le altre coſe, come fù fatto nella 34. propoſitione di queſto; e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le rette AG, GB, ſono incommenſurabili in potenza. E perche il quadrato della Media AB è Medio, eſſendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, il compoſto de i quadrati delle rette AG, GB, ſarà Medio. In oltre ſi dimoſtri, come ſi fece nella 34. propoſitione di queſto, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; per il che il rettangolo delle due AB, GF, è commenſurabile al rettangolo delle due AB, CD.

a 33. del 10.

b 47. del 1.

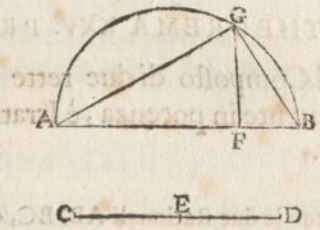
E per-

E perche il rettangolo delle due AB, CD, per costruttione, è Medio, il rettangolo delle due AB, GF, [c] che gli è commensurabile, sarà Medio: mà il rettangolo contenuto dalle due AB, GF, [d] è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio.

c Corol. alla 24. del 10.
d Lem. dopo la 33. del 10.

In oltre, perche AB, per costruttione, è incommensurabile in lunghezza alla retta CD, e la retta CD è commensurabile alla sua metà CE; sarà AB [e] incommensurabile alla retta CE. Prese AB, CE, come basi di due rettangoli, e sia AB altezza commune, sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AB, CE, [f] come le base AB alla base CE; mà il rettangolo delle due AB, CE, è vguale al rettangolo, conteto dalle due AB, GF (per essere GF vguale à CE) sarà il quadrato di AB al rettangolo delle due AB, GF, come AB à CE: il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, come AB ad EC: mà AB è dimostrata incommensurabile in lunghezza à CE; sarà il quadrato di AB [g] incommensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; cioè incommensurabile al Medio, contenuto dalle due AG, GB. Per la qual cosa haueremo trouate le due rette AG, GB, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, composti insieme, fanno vn' spatio Medio; come ancora il rettangolo contenuto dalle medesime è Medio, il quale è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, come fù proposto fare, e dimostrare.

e 13. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.



SCOLIO.

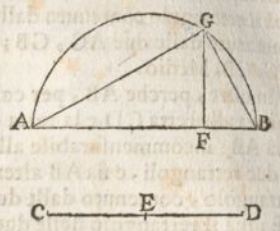
Da quel, che si è detto se ne caua il seguente problema.

Ritrouare due medie, incommensurabili in lunghezza, e potenza.

Essendosi dimostrato, che il quadrato di AB, cioè il composto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio, ed ancora il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, è Medio; e questo è incommensurabile al composto de i quadrati delle rette AG, GB; sarà il lato dell'aggregato de i quadrati di AG, GB Media; e sarà ancora Media il lato del rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, le quali saranno incommensurabili in lunghezza; perche, se non sono incommensurabili in lunghezza, i loro quadrati, [a] cioè il rettangolo delle due AG, GB, e l'aggregato de i quadrati delle medesime AG, GB, saranno commensurabili,

a 9. del 10.

ch'è contro à quello, che si è dimostrato. Non dunque i detti lati sono commensurabili in lunghezza; mà sono in lunghezza incommensurabili, e perciò, se si prenda la retta AB, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle rette AG, GB, e si troua vna media proportionale frà le due AG, GB, il di cui quadrato è vguale al rettangolo delle due AG, GB, saranno la retta AB, e quella media proportionale trouata, due Medie incommensurabili in lunghezza, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



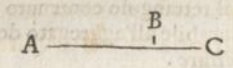
PRINCIPIO DE' SENARII.

Per compositione.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXVII.

Il Composto di due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, è Irrationale; e si chiamerà Binomio.

Siano le due Rationali AB, BC, *commensurabili solamente in potenza, le quali si aggiungano insieme, in modo, che facciano la sola retta linea* AC. *Dico che tutta la composta* AC *è Irrationale. Perche le Rationali* AB, BC, *sono commensurabili solamente in potenza, sarà la retta* AB *incommensurabile in lunghezza alla retta* BC;



ed, essendo il quadrato di AB commensurabile al quadrato di BC, l'aggregato de i due quadrati di AB, e BC, [a] sarà commensurabile al quadrato di BC: prese AB, BC, come basi di due rettangoli, de' quali BC sia altezza commune; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di BC, [b] come la base AB alla base BC: mà AB è incommensurabile in lunghezza alla retta BC; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] incommensurabile al quadrato di BC: mà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [d] incommensurabile al quadrato di BC: mà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, è dimostrato commensurabile al quadrato di BC; sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, [e] incommensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [f] è vguale al quadrato di AC; essendo l'aggregato de i quadrati di AB, BC, incommensurabile al dop-

a 16. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 14. del 10.
e 14. del 10.
f 4. del 2.

pio

pio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; sarà il quadrato di AC g incommensurabile, tanto all'aggregato de i quadrati di AB, BC, quanto al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. In oltre, per quel, che si è dimostrato, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, è commensurabile al quadrato di BC, ed il quadrato di BC h è Rationale, per essere BC Rationale; sarà l'aggregato de i quadrati di AB, BC, K Rationale: Mà il quadrato di AC, per quel, che si è dimostrato, è incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC; sarà il quadrato di AC l Irrationale. Per la qual cosa il suo lato AC m sarà Irrationale; e questa retta irrationale AC, composta delle due AB, BC, commensurabili solamente in potenza, si chiamerà Binomio, ch'era da dimostrarsi.

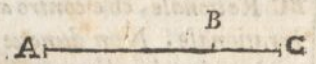
g 17. del 10.
h 8. defin. del 10.
K 9. defin. del 10.
l 10. defin. del 10.
m 11. defin. del 10.

COROLLARIO.

Appare da quel, che si è detto, che da due rette commensurabili solamente in potenza, se ne generano due rette Irrationali; cioè quella retta, che frà loro è media proportionale, è Irrationale, e si chiama Media; e quella, che nasce dal loro composto, è Irrationale, e si chiama Binomio.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se due di quelle Medie, commensurabili solamente in potenza, che contengono vn rettangolo Rationale, si compongono insieme; tutta la retta, composta di quelle due, è Irrationale; e si chiamerà Prima Bimediale.



Si compongano le due Medie AB, BC, commensurabili solamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, in modo, che facciano la sola retta linea AC. Dico che la composta AC è irrationale. Perche le Medie AB, BC sono commensurabili solamente in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di BC; e l'aggregato de i quadrati AB, BC, a sarà commensurabile al quadrato di BC. Prese le due AB, BC, come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia BC; sarà il rettangolo delle due AB, BC, al quadrato di BC, b come la base AB alla base BC: ma AB è incommensurabile in lunghezza alla retta BC; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, c incommensurabile al quadrato di BC: ma il rettangolo delle due AB, BC, è commensurabile al doppio rettangolo delle medesime AB, BC; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, d incommensurabile al quadrato di BC. Fù dimostrato l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, essere commensurabile al quadrato di BC; sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB,

a 16. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 14. del 10.

BC,

e 14.del 10. BC, [e] incommensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AB, BC, [f] è vguale al quadrato della retta AC; essendo l'aggregato de i quadrati di AB, BC, incommensurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC; sarà il quadrato di AC [g] incommensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC: ma il doppio rettangolo delle due è commensurabile al semplice rettangolo delle medesime AB, BC; sarà il quadrato di AC [h] incommensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, BC: fù supposto il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, Rationale; sarà il quadrato di AC [K] Irrationale; ed in conseguenza il suo lato AC [l] sarà irrationale. La retta AC, composta delle due Medie AB, BC, commensurabili solamente in potenza, che contengono vno spatio Rationale, si chiamerà Prima Bimediale; il che era da dimostrarsi.



f 4.del 2.

g 17.del 10.

h 8.defin. del 10.

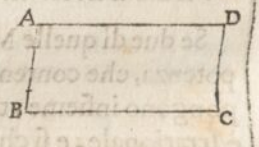
K 10.defin. del 10.

l 11.defin. del 10.

LEMMA.

Il Rettangolo, contenuto da vna retta Rationale, e da vn altra Irrationale, è Irrationale.

Sia il rettangolo ABCD, contenuto dalla Rationale AB, e dall'Irrationale BC. Dico che il rettangolo BD è Irrationale. Se non è Irrationale, sarà, in conseguenza, Rationale: applicato dunque il Rationale BD alla Rationale AB, [a] produrrà il lato BC Rationale, ch'è contro all'ipotesi, mentre il lato BC è supposto Irrationale. Non dunque il rettangolo ABCD è Rationale, ma sarà Irrationale, ch'era da dimostrarsi.



a 21.del 10.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXIX.

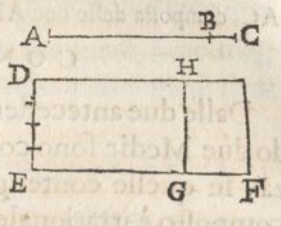
Se due Medie, commensurabili solamente in potenza, contengono vn' spatio Medio; e quelle si compongano in modo, che costituiscano vna sola retta linea; la composta sarà Irrationale, e si chiamerà Seconda Bimediale.

a 29. del 10. Si compongano le due Medie AB, BC, [a] commensurabili *solamente* in potenza, che contengano quel rettangolo, che si chiama Medio, in modo, che facciano la sola retta linea AC. Dico che la retta AC è Irrationale. Si esponga la Rationale DE, alla quale si applichi il rettangolo DF, [b] vguale al quadrato di tutta la retta AC; ed alla medesima Ra-

b 45.del 1.

tio-

tionale DE si applichi il rettangolo DG, vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC. Perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] è vguale al quadrato di AC, cioè vguale al rettangolo DF; detrattone l'aggregato de i quadrati di AB, BC, cioè il rettangolo DG, resta il rettangolo HF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; e perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, per ipotesi, è Medio; ed il rettangolo delle due AB, BC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AB, BC; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC per il Coroll. alla 24. propositione di questo, Medio: per la qual cosa il rettangolo HF, ch'è vguale al doppio rettangolo delle due AB, BC, sarà Medio. In oltre perche le due rette AB, BC, per ipotesi sono Medie, i loro quadrati, cioè i quadrati di AB, BC, saranno Medij; ed essendo le rette AB, BC, commensurabili in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di BC; e l'aggregato de i quadrati di AB, BC, [d] sarà commensurabile à ciascuno di essi quadrati di AB, ouero BC, e, per il Coroll. alla 24. propos. di questo, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, sarà Medio: ma il rettangolo DG è vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC, sarà il rettangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH, il lato DE [e] è vguale all'opposto HG: ma DE, per costruttione, è Rationale, sarà HG ancora Rationale; alle quali sono applicati i Medij DG, HF, saranno i lati EG, GF, [f] Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale DE. Prese le rette AB, BC, come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia BC; sarà il rettangolo delle due AB, BC al quadrato di BC, [g] come AB à BC: ma AB, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza à BC, sarà il rettangolo delle due AB, BC, [h] incommensurabile al quadrato di BC. E perche il rettangolo delle due AB, BC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AB, BC; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, cioè il rettangolo HF, [K] incommensurabile al quadrato di BC. Similmente, essendosi dimostrato l'aggregato de i due quadrati AB, BC, commensurabile al quadrato di BC; ed il quadrato di BC è dimostrato incommensurabile ad HF; sarà l'aggregato de i due quadrati di AB, BC, [l] cioè il rettangolo DG, incommensurabile al rettangolo HF. Finalmente perche i rettangoli DG, HF, hanno vna medesima altezza, il rettangolo DG al rettangolo HF, [m] sarà come la base EG alla base GF; ma il rettangolo DG è dimostrato incommensurabile al rettangolo HF; sarà la retta EG [n] incommensurabile alla retta GF: dal che le rette EG, GF sono incommensurabili in lunghezza: ma le medesime rette EG, GF, furono dimostrate Rationali; saranno le Rationali EG, GF, commensurabili solamente in potenza; e per la 37. propos. di questo, il loro composto, cioè la retta EF, sarà Irrationale; e per l'antecedente Lemma, il rettangolo DF, contenuto



c 4. del 2.

d 16. del 10.

e 34. del 1.

f 23. del 10.

g 1. del 6.

h 10. del 10.

K 14. del 10.

l 14. del 10.

m 1. del 6.

n 10. del 10.

dalla

dalla Rationale DE, e dalla Irrationale EF, è Irrationale. Per la qual cosa il quadrato di AC, ch'è vguale al rettangolo DF, sarà Irrationale; ed il suo lato EF è Irrationale, ch'era da dimostrarsi. Si chiamerà la retta AC, composta delle due AB, BC, seconda Bimediale.

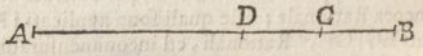
CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propositioni si caua, che, quando due Medie sono commensurabili solamente in potenza, se quelle contengono vn' spatio Rationale, il loro composto è irrationale, e si chiama prima Bimediale: ma se contengono vn' spatio Medio, il loro composto è irrationale, e si chiama seconda Bimediale.

LEMMA.

Se vna retta linea sarà diuisa in due parti ineguali, sarà l'aggregato de i quadrati delle parti maggiore del doppio rettangolo, contenuto dalle parti, per quanto è il quadrato della differenza delle medesime parti.

Sia la retta AB, diuisa in due parti ineguali, come AC, CB; da AC se ne tagli la parte



a 3.del 1. *CD,* [a] *vguale à CB; sarà AD la differenza di quanto la maggior parte AC supera la minore CB. Dico che l'aggregato de i quadrati delle parti ineguali AC, CB, supera il doppio rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per quanto è il quadrato di AD. Perche la retta AC è diuisa in qualunque modo in D, i quadrati delle due AC, CD,* [b] *sono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CD, col quadrato del restante AD: ma DC è fatta vguale à CB; perciò i quadrati delle due AC, CB sono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CD, ouero dalle due AC, CB, col quadrato di AD. Hor se al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, bisogna aggiungere il quadrato di AD, acciòche sia vguale à i quadrati delle due AC, CB; saranno i quadrati delle due AC, CB, maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per quanto è il quadrato della differenza AD, come fù proposto dimostrare.*

b 7.del 2.

Appare

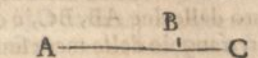
COROLLARIO.

Appare dunque, che se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, i quadrati delle parti ineguali sono maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle medesime parti ineguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XL.

Se due rette linee sono incommensurabili in potenza, ed i loro quadrati, giunti insieme, compongano vno spatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da esse, sia Medio; il composto di queste due rette linee sarà Irrationale, e si chiamerà Maggiore.

Siano le due rette AB, BC, [a] incommensurabili in potenza, che i loro quadrati, giunti insieme, compongano vno spatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da esse, sia Medio, e questi si aggiungano insieme, in modo, che facciano la sola retta AC. Dico che la composta AC è Irrationale.



a 34. del 10.

Perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AB, BC; ed il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, per ipotesi, è Medio; il doppio rettangolo delle due AB, BC, che gli è commensurabile, per il Corollario primo alla 24. propositione, sarà ancora Medio, e perciò sarà Irrationale; ma l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, per ipotesi, è Rationale; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, [b] incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo delle medesime AB, BC, [c] è vguale al quadrato di AC; sarà il quadrato di AC, [d] composto di quelle due grandezze incommensurabili, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC: ma l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipotesi, è Rationale; sarà il quadrato di AC, [e] che gli è incommensurabile, Irrationale. Per la qual cosa la retta AC [f] è Irrationale, ch'era da dimostrarsi. E questa si chiamerà Maggiore, stante che l'aggregato de i quadrati AB, BC, ch'è Rationale, per l'antecedente Lemma, supera il doppio rettangolo delle due AB, BC, ch'è stato dimostrato Medio, per il quadrato della loro differenza; pigliando Euclide la denominatione dalla maggioranza del Rationale sopra il Medio.

b 10. defin. del 10.

c 4. del 2.
d 17. del 10.

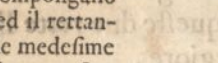
e 10. defin. del 10.
f 11. defin. del 10.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XLI.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Rationale; il compoſto di queſte due rette linee ſarà Irrationale; e ſi chiamerà linea potente per lo ſpatio Rationale, e Medio.

a 35. del 10.

Siano le due rette AB, BC, [a] incommenſurabili in potenza, che i loro quadrati compongano vno ſpatio Medio, ed il rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC, ſia Rationale, e queſte giunte inſieme, compongano la retta AC. Dico che la retta AC è Irrationale. Perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; eſſendo il rettangolo delle due AB, BC, per ipoteſi, Rationale, ſarà il doppio rettangolo delle medeſime AB, BC, [b] Rationale: ma *l'aggregato de i quadrati di* AB, BC, per ipoteſi, è Medio, e perciò Irrationale; *il doppio rettangolo dunque* delle due AB, BC, [c] *ſarà incommenſurabile all'aggregato de i quadrati* delle medeſime AB, BC. *E perche il quadrato di* AC *ſi compone de i due incommenſurabili; cioè del doppio rettangolo delle due* AB, BC, [d] *e dell'aggregato de i quadrati delle medeſime* AB, BC; ſarà il quadrato di AC [e] *incommenſurabile al doppio rettangolo* delle due AB, BC: ma, *per quel, che ſi è dimoſtrato, il* doppio rettangolo delle due AB, BC, è *Rationale; perciò il* quadrato di AC, che gli è incommenſurabile, [f] ſarà *irrationale;* ed il ſuo lato, cioè la retta AC, [g] ſarà Irrationale, che era da dimoſtrarſi. E queſta retta linea AC ſi chiamerà linea potente, per lo ſpatio Rationale, e Medio, cioè, che la potenza, ò quadrato, della linea AC, ſi compone del Rationale, ch'è il doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; e del Medio, ch'è l'aggregato de i quadrati delle medeſime AB, BC.



b 9. defin. del 10.

c 10. defin. del 10.

d 4. del 2.

e 17. del 10.

f 10. defin. del 10.

g 11. defin. del 10.

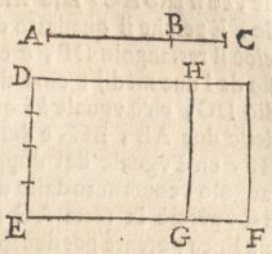
THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XLII.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro ſia Medio, incommenſurabile al compoſto de i loro quadrati; quelle rette linee, giunte inſieme, coſtituiſcono vna retta linea

Irra-

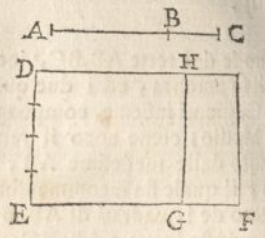
Irrationale; E si chiamerà linea potente, per due spatij Medij.

Siano le due rette AB,BC,[a] incommensurabili in potenza, ed i due quadrati di AB, BC, giunti insieme, compongano vno spatio Medio; come anco il rettangolo, contenuto dalle medesime AB, BC, sia Medio, il quale sia incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC. Dico che, composte le rette AB, BC, in modo, che facciano la sola retta linea AC, la retta linea AC sarà Irrationale. Si esponga la Rationale DE, alla quale si applichi il rettangolo DF, [b] vguale al quadrato della retta AC; ed alla medesima Rationale DE s'applichi il rettangolo DG, vguale all'aggregato de i quadrati delle rette AB, BC. Perche il quadrato della retta AC, cioè il rettangolo DF, [c] è vguale à i quadrati delle parti AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle medesime parti AB, BC, ed i quadrati delle parti AB, BC, giunti insieme, sono vguali al rettangolo DG; sarà il rimanente rettangolo HF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti AB, BC. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medesime AB, BC; ed il rettangolo delle due AB, BC, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, che gli è commensurabile, per il Coroll. alla 24. propositione di questo, Medio: mà il doppio rettangolo delle due AB, BC, è dimostrato vguale al rettangolo HF; sarà il rettangolo HF Medio. Similmente l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipotesi, è Medio; il rettangolo DG è fatto vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC; sarà il rettangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH [d] i lati oppositi DE, HG sono frà di loro vguali: ma DE, per costruttione, è Rationale, sarà ancora HG Rationale; alle quali, applicati i medij DG, HF, ne risultano le rette EG, GF, [e] Rationali, & incommensurabili in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipotesi, è incommensurabile al rettangolo delle medesime AB, BC; ed il rettangolo delle due AB, BC, è commensurabile al doppio rettangolo delle medesime AB, BC; sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, [f] cioè il rettangolo DG, incommensurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC, cioè al rettangolo HF; ma il rettangolo DG al rettangolo HF, [g] è come EG à GF; essendo il rettangolo DG incommensurabile al rettangolo HF, sarà EG [h] incommensurabile à GF; per il che le due rette EG, GF sono incommensurabili in lunghezza. E perche le rette EG, GF sono state dimostrate Rationali; perciò sono commensurabili solamente in potenza: per la qual cosa tutta la retta EF, [K] composta di quelle due, sarà irrationale; ed il rettangolo, contenuto dalla irrationale EF, e dalla Rationale DE, per il Lemma dopo la 38. propo-



a 36. del 10.
b 45. del 1.
c 4. del 2.
d 34. del 1.
e 23. del 10.
f 13. e 14. del 10.
g 1. del 6.
h 10. del 10.
K 37. del 10.

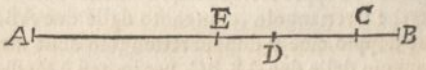
sitione di questo, sarà irrationale; ma il rettangolo DF, per costruttione, è vguale al quadrato di AC; sarà il quadrato di AC irrationale, ed il lato AC [1] sarà irrationale. E perche il quadrato di AC, cioè il rettangolo DF, è composto de i due medij; cioè del medio DG, ch'è vguale à i quadrati delle due AB, BC, e del medio HF, ch'è vguale del doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, perciò la retta AC si chiama linea potente per due spatij Medij, il che era da dimostrarsi.



[1] 11. defin. del 10.

LEMMA I.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, e di nuouo sia diuisa in due altre parti ineguali; i quadrati delle parti più ineguali, sono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali.



Sia la retta linea AB diuisa prima in due parti ineguali in C, e di nuouo la medesima AB sia diuisa in due altre parti ineguali, come in D; e siano le due AC, CB più ineguali delle due AD, DB. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB sono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Si diuida la retta AB [a] *in due parti vguali in E; ò il punto D cade frà i punti E, & C, ouero cade frà i punti A, ed E; cada prima frà i punti E, & C. Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, sarà il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC,* [b] *vguale al quadrato di EB; e per l'istessa ragione, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di ED, è vguale al medesimo quadrato di EB; e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, col quadrato di EC, è vguale al rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di ED: se ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, & ED, resta il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, minore del rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, sarà minore del doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB. Inoltre, perche la retta AB è diuisa in C, i quadrati delle parti AC, CB,*

[a] 10. del 1.

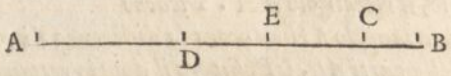
[b] 5. del 2.

col

col doppio rettangolo, contenuto dalle medesime parti AC, CB, [c] *è vguale al quadrato di AB. Similmente, essendo AB diuisa in D, i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo, contenuto dalle medesime parti, è vguale al medesimo quadrato di AB. Per la qual cosa i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle parti AC, CB, sarà vguale à i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medesime parti AD, DB. Da vna di queste vgualità se ne leui il doppio rettangolo delle parti AC, CB; e dall'altra se ne leui il doppio rettangolo delle parti AD, DB; essendosi dimostrato il doppio rettangolo delle due AC, CB, minore del doppio rettangolo delle due AD, DB, restano i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

c 4. del 2.

Cada il punto D frà i punti A, ed E. Perche AE è vguale ad EB,



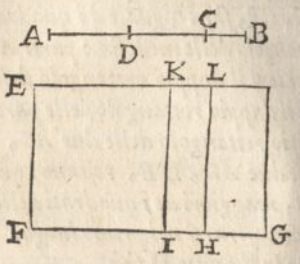
sarà AD minore di DB; e, per l'istessa ragione, CB sarà minore di AC. E perche le parti AC, CB, si suppongono più ineguali delle due AD, DB; sarà AD maggiore di CB: ma EB è vguale ad EA, il restante EC sarà maggiore di ED. Hor perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, [d] *sarà vguale al quadrato di EB. Similmente la retta AB è diuisa in due parti ineguali in D, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di AE, cioè al quadrato di EB; per la qual cosa il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, sarà vguale al rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE: se ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, e di DE, resta il rettangolo delle parti AC, CB, minore del rettangolo delle parti AD, DB; e, procedendosi, come prima si fece, si dimostrerà, che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, sono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, come fù proposto dimostrare.*

d 5. del 2.

LEMMA II.

Supposte le medesime cose. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, superano i quadrati delle parti meno ineguali, AD, DB, per quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB, supera il doppio rettangolo delle parti più ineguali AC, CB.

a 45. del 1. *A qualunque retta EF,* [a] *si applichi il rettangolo EG, vguale al quadrato di AB; ed alla medesima retta EF si applichi il rettangolo EH, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti più ineguali AC, CB; e similmente ad EF si applichi il rettangolo EI, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Perche i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, per l'antecedente Lemma, superano i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, perciò il rettangolo EH sarà maggiore del rettangolo EI, la loro differenza sia, per esempio, il rettangolo KH. Dicoche*



il rettangolo KH è ancora la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti AD, DB, supera il doppio rettangolo delle parti AC, CB. Perche i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle me-

b 4. del 2. *desime parti AC, CB,* [b] *è vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, per costruttione, è vguale al rettangolo EH; sarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle parti AC, CB. Similmente, perche i quadrati delle*

c 4. del 2. *parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medesime parti AD, DB,* [c] *è vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AD, DB, per costruttione, è vguale al rettangolo EI; sarà il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; per la qual cosa il rettangolo KH sarà la differenza di quanto il rettangolo KG supera il rettangolo LG: ma il rettangolo KG è vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; ed il rettangolo LG è vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti più ineguali AC, CB; sarà KH la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali supera il doppio rettangolo delle parti più ineguali; ma fù dimostrato, che il medesimo rettangolo KH è la differenza di quanto i quadrati delle parti più ineguali superano i quadrati delle parti meno ineguali; la differenza dunque di quanto i quadrati delle parti più ineguali superano i quadrati delle parti meno ineguali, è vguale alla differenza, di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali supera il doppio rettangolo delle parti più ineguali, ch'era da dimostrarsi.*

COROL-

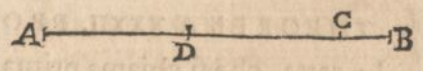
COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che il doppio rettangolo delle parti AC, CB, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLIII.

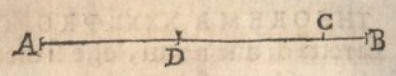
La retta di due nomi, che si dice Binomio, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia la retta composta di due nomi AB, diuisa ne i suoi nomi, nel punto C; cioè, che le parti AC, CB, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza, come appare nella 37. propositione di questo. Dico che la retta AB non si può diuidere in due altre Rationali, commensurabili solamente in potenza, in altro punto, fuori del punto C. Diuidasi, s'è possibile, in altri nomi ineguali à i due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le parti AD, DB siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza: è manifesto che la retta AB non è diuisa in C in due parti vguali; perche, se fosse diuisa in due parti vguali in C, le rette AC, CB sarebbero commensurabili in lunghezza, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto, che le rette AC, CB sono commensurabili solamente in potenza. Per l'istessa ragione la retta AB non è diuisa in D, in due parti vguali. In oltre, per ipotesi, i nomi BD, DA non sono i medesimi, che i nomi AC, CB, cioè le parti BD, DA, non sono vguali alle parti AC, CB; cioè la maggior parte BD non è vguale alla maggior parte AC; ne la minore AD è vguale alla minore CB; saranno le parti AC, CB, ò più ineguali, ò meno ineguali delle parti BD, DA; e per il primo de gli antecedenti Lemma, i quadrati delle parti AC, CB, ò sono maggiori, ò minori de i quadrati delle parti AD, DB. Di più, perche le rette AC, CB, per ipotesi, sono Rationali, i loro quadrati, cioè i quadrati delle rette AC, CB [a] sono Rationali, ed il composto de i quadrati delle rette AC, CB, per lo Scolio alla 34. propositione, sarà Rationale. E perche le rette AD, DB, per la fatta suppositione, sono Rationali, l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà Rationale: mà il Rationale supera il Rationale (per lo Scolio alla vigesimasettima di questo) per vn Rationale; essendo l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ch'è Rationale, ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB, ch'è Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà Rationale: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de quadrati di AD, DB (per il secondo de gli antecedenti Lemma) è vguale alla differenza, ch'è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo



[a] 8. defin. del 10.

golo delle parti AD, DB; sarà la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti di AD, DB Rationale. Finalmente, perche il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle due Rationali AC, CB, commensurabili solamente in potenza, [b] è Medio; il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commensurabile, [c] sarà medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. Di più, per l'antecedente Corollario, il doppio rettangolo delle parti AC, CB, che si disse esser Medio, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB, che similmente è Medio, e perciò l'vno supera l'altro di qualche quantità: e perche il medio non supera il medio per spatio Rationale, [d] mà lo supera per vno spatio Medio; la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB sarà Medio; fù antecedentemente dimostrata Rationale, sarebbe medio, e sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la retta AB, composta di due nomi, si diuide ne i suoi nomi in altro punto, che nel solo punto C, come fù proposto dimostrare.



b 22. del 10.
c Corol. alla 24. del 10.
d 27. del 10.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIV.

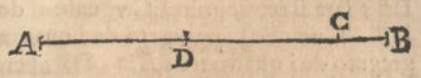
La retta, che si chiama prima Bimediale, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia AB la prima Bimediale, diuisa in C in due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale, come richiede la propositione 38. di questo. Dico che AB non si diuide in due altre Medie, commensurabili solamente in potenza, che contengano vno spatio Rationale, in altro punto, fuori del punto C. Diuidasi, s'è possibile, in due altre medie, ineguali alle due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le Medie AD, DB siano commensurabili solamente in potenza, e contengano vn rettangolo Rationale; si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le parti AC, CB, ò sono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB, e che l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, è maggiore, ò minore dell'aggregato de i quadrati di AD, DB. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle medesime parti AC, CB, per ipotesi, è Rationale; il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, che gli è commensurabile, [a] sarà Rationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: mà vn Rationale supera vn Rationale, [b] per vno spatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB sarà Rationale: mà, per il secondo Lemma dopo la 42. propositione, la differenza frà il doppio

a 9. defin. del 10.
b Scol. alla prop. 27. del 10.

rettan-

rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, per la qual cosa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà spatio Rationale. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipotesi, sono Medie commensurabili solamente in potenza; saranno i quadrati delle rette AC, CB Medij, frà di loro commensurabili, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB [c] sarà commensurabile all'vno, ed all'altro quadrato: mà l'vno, e l'altro quadrato è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per il Corollario alla 24. propositione di questo, Medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è ancora Medio: e perche il Medio non supera il Medio [d] per vno spatio Rationale, non sarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB spatio Rationale: mà fù dimostrato antecedentemente, che questa differenza è spatio Rationale, sarebbe, e non sarebbe spatio Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la Bimediale AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, che nel punto C, come fù proposto dimostrare.



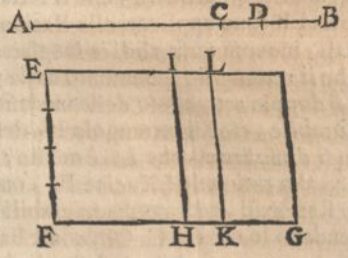
c 16. del 10.

d 27. del 10.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLV.

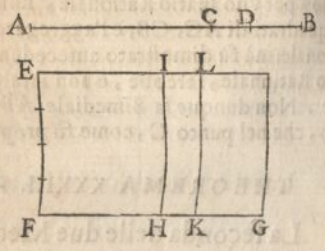
La seconda delle due Medie, cioè la Bimediale seconda, si diuide nelle sue Medie in vn sol punto.

Sia AB *la seconda Bimediale, diuisa in C, nelle due Medie AC, CB, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Medio*, come ricerca la 39. propositione di questo. Dico che AB non si diuide in due altre medie, commensurabili solamente in potenza, che contengano vno spatio Medio, in altro punto, fuor che nel punto C. Diuidasi, s'è possibile, in due Medie, diuerse dalle due AC, CB, cioè ineguali alle due AC, CB nel punto D, in modo, che le medie AD, DB siano cõmensurabili solamente in potenza, e contengano vno spatio Medio. Si dimostri, come si fece nella 43. propositione, che i quadrati delle rette AC, CD, ò sono maggiori, ouero minori de i quadrati delle rette AD, DB; si esponga la Rationale EF, alla quale si applichi il rettangolo EG, [a] vguale al quadrato di AB; ed alla medesima Rationale EF si applichi il rettangolo EH, vguale all'aggregato



a 45. del 1.

gregato de i quadrati delle rette AC, CB; essendo i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [b] vguali al quadrato di AB, cioè vguali al rettangolo EG; ed i quadrati di AC, CB sono vguali al rettangolo EH, sarà il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo IG. Nell'istesso modo, se si applica alla Rationale EF [c] il rettangolo EK, vguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; sarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; perciò il rettangolo EK sarà ineguale al rettangolo EH; dal che le rette FK, FH [d] sono ineguali. In oltre, perche i quadrati di AC, CB, per il Lemma alla 39. propositione di questo, sono maggiori del doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà EH maggiore di IG: per la qual cosa EH [e] sarà maggiore della metà di EG; ed il lato FH sarà maggiore della metà di FG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che FK è maggiore della metà di FG, ed in conseguenza le parti FH, HG sono ò più ineguali, ò meno ineguali, delle parti FK, KG. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipotesi, sono Medie, commensurabili in potenza; i quadrati di AC, CB saranno Medij frà di loro commensurabili, ed il composto de i quadrati di AC, CB [f] sarà commensurabile tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato DC: si disse, che i quadrati di AC, & CB, sono Medij; l'aggregato de quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, ch'è commensurabile ad ogn'vno di loro, per il Corollario alla 24. propositione di questo, sarà ancora Medio. Nell'istessa maniera si prouerà, che il rettangolo EK è Medio; e perche i Medij EH, EK sono applicati alla Rationale EF, i lati FH, FK [g] saranno Rationali, incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Similmente, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime parti AC, CB, che gli è commensurabile, cioè il rettangolo IG, [h] sara ancora Medio. E nell'istesso modo si dimostrerà, che LG è medio; applicati dunque i due rettangoli IG, LG alla rationale LK, cioè IH, ouero EF, gli altri lati HG, KG [K] saranno Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Si prendano le rette AC, CB, come basi di due rettangoli, ed AC sia altezza commune; sarà il quadrato di AC al rettangolo delle parti AC, CB, [l] come AC à CB: mà AC, per ipotesi, è incommensurabile *in lunghezza* à CB; sarà il quadrato di AC [m] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. Hor essendo le due AC, CB, per *ipotesi*, commensurabili solamente in potenza, sarà il quadrato di AC commensurabile al quadrato di CB; e l'aggregato de i due quadrati di AC, CB [n] sarà commensurabile al quadrato di AC: mà il quadrato di AC è incommensura-



bile

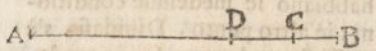
b 4. del 2.
c 45. del 1
d 1. del 6. & Scol. alla 16. del 5.
e 1. del 6. & Scol. alla 16. del 5.
f 16. del 10.
g 23. del 10.
h Coroll. alla 24. del 16.
K 23. del 10.
l 1. del 6.
m 10. del 10
n 16. del 10.

bile al rettangolo delle due AC, CB, sarà l'aggregato de i quadrati AC, CB [o] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà l'aggregato de i quadrati AC, CB, cioè EH, [p] incommensurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo IG. Et essendo EH ad IG, [q] come la base FH alla base HG; sarà FH [r] incommensurabile ad HG; dal che le due FH, HG sono incommensurabili in lunghezza: mà le rette FH, HG furono dimostrate Rationali, in conseguenza sarà FH commensurabile solamente in potenza ad HG. Per la qual cosa tutta la retta FG [t] sarà irrationale, & sarà quella linea, chiamata Binomio, diuisa ne i suoi nomi nel punto H. Tutto quel, che si è fatto, considerando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG; si faccia considerando le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; e si dimostrerà, che tutta FG è quella retta, che chiamiamo Binomio, diuisa ne i suoi nomi nel punto K. Per la qual cosa il medesimo binomio sarà diuiso ne i suoi nomi nel punto H, ed ancora nel punto K, [u] ch'è contro alla 43. propositione. Non dunque la Bimediale seconda AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimostrarsi.

o Scol. alla 14. del 10.
p 14. del 10.
q 1. del 6.
r 10. del 10.
t 37. del 10.
u 43. del 10.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVI.

La Maggiore si diuide ne i suoi nomi in vn solo punto.

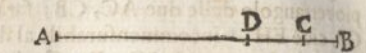


Sia la Maggiore AB, diuisa ne i suoi nomi nel punto C, in modo, che le parti AC, CB, siano incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Rationale; ed il rettangolo delle medesime sia Medio, come richiede la 40. propositione di questo.

Dico che AB non si diuide in altro punto ne i nomi, che ritengano le medesime conditioni. Si diuida, se è possibile, nel punto D, in modo, che le due AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sia Rationale; ed il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, sia Medio. Si dimostrerà, come si fece nella 43, che le parti AC, CB, ò sono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB; e per il 2. Lemma dopo la propos. 42. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'istessa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CD, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre, essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, Rationale; e l'aggregato de i quadrati AD, DB, similmente Rationale; sarà [a] la loro differenza Rationale: ma si disse, che questa differenza è vguale alla differenza, che è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB: la differenza dunque frà il doppio rettan-

a Scol. alla 27. del 10.

golo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, sarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, che gli è commensurabile, per il Corollario alla 24. propositione, sarà Medio. E nell'istesso modo si proverà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. E perche il Medio non supera il Medio [b] per vno spatio Rationale, la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, non sarà Rationale: ma antecedentemente tal differenza fù mostrata Rationale; sarà, e non sarà Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la Maggiore AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimostrarsi.

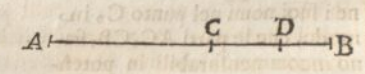


b 27.del 10.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XLVII.

La linea Potente per il Rationale, e Medio, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia AB la linea Potente per il Rationale, e Medio, diuisa ne i suoi nomi nel punto C; cioè, che le rette AC, CB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati delle medesime AC, CB, sia Medio; ed il Rettangolo, contenuto da esse, sia Rationale, come ricerca la 41. propos. di questo. Dico che AB non si diuide in altri nomi, che habbiano le medesime conditioni, in altro punto. Diuidasi, s'è possibile, nel punto D, in modo, che le rette AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i loro quadrati sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, sia Rationale. Si dimostri, come si fece nella 43. propos. di questo, che le due AD, DB sono più, ò meno ineguali, delle due AC, CB; e per il 2. Lemma dopo la 42. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'istessa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB: ma la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, per lo Scolio alla 27. propos. è Rationale (stante che ogn'vno di quei rettangoli, per ipotesi, è Rationale) sarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. E perche gli aggregati di quei quadrati, per ipotesi, sono Medij, ed il Medio non supera il Medio [a] per spatio Rationale; sarebbe tal differenza Rationale, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la retta AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuor che nel punto C, ch'era da dimostrarsi.



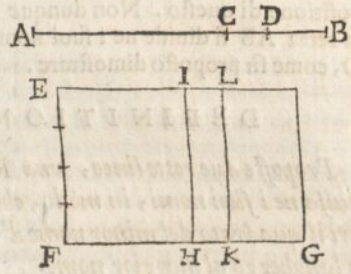
a 27.del 10.

THEO-

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIONE XLVIII.

La linea potente per due Medij, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia la linea potente per due Medij AB, diuisa ne i suoi nomi nel punto C, in modo, che le rette AC, CB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i loro quadrati sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, come ricerca la propos. 42. di questo. *Dico* che AB non si diuide in altri nomi, delle medesime conditioni, in altro punto, fuori del punto C. Si diuida, s'è possibile nel punto D, in altri nomi, in modo, che le parti AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medesime parti AD, DB, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati. Si faccia la medesima costruttione della 45. propos. e si dimostri, come iui si fece, che le parti FH, HG, ò sono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti FK, KG. Perche il rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Medio, il suo doppio, cioè il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commensurabile, per il Corollario alla 24. di questo, sarà Medio: ma, per costruttione, il rettangolo IG è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà il rettangolo IG Medio. Nell'istesso modo si proverà, che il rettangolo LG è Medio. In oltre, perche l'aggregato de i quadrati AC, CB, per ipotesi, è Medio, il rettangolo EH, che, per costruttione, è vguale all'aggregato di quei quadrati, sarà Medio. E nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo EK è Medio. E perche i medij EH, IG, sono applicati alla Rationale EF; i lati FH, HG, [a] saranno Rationali, e saranno incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. E per simile ragione le rette FK, KG sono Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Di più, essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB, [b] sarà ancora incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB, cioè al rettangolo IG: ma il rettangolo EH al rettangolo IG [c] è come FH ad HG; ed EH è dimostrato incommensurabile ad IG; sarà FH [d] incommensurabile ad HG. Dal che le due FH, HG sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali; saranno le due FH, HG, [e] commensurabili solamente in potenza. Per la

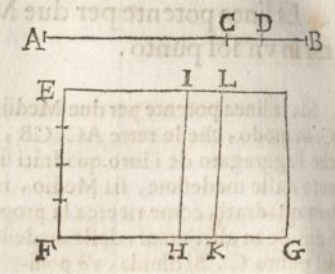


a 23. del 10.
b Corol. alla 24. del 10.
c 1. del 6.
d 10. del 10.
e 10. defin. del 10.

qual

f 37. del 10. qual cosa tutta la retta FG [f] sarà irrationale, e sarà quella, che fù chiamata Binomio; la quale è diuisa ne i suoi nomi nel punto H. Tutto quello, che si è fatto, considerando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG, si farà ancora, col considerare le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; ed in tal modo si dimostrerà, che FG [g] è quella retta, che si chiama Binomio, e che si diuide ne i suoi nomi nel punto K. Per la qual cosa il Binomio FG si diuide ne i suoi nomi nel punto H, e si diuide ancora nel punto K, ch'è contro alla 43. propositione di questo. Non dunque la retta AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuor che nel punto D, come fù proposto dimostrare.

g 37. del 10.



DEFINITIONI SECONDE.

Proposte due rette linee, vna Rationale, e l'altra sia Binomio, diuisa ne i suoi nomi, in modo, che il quadrato del maggior nome superi il quadrato del minor nome d'vna retta linea, commensurabile in lunghezza al maggior nome.

I.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, la composta del maggiore, è minor nome, si chiamerà Primo Binomio.

I I.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si chiamerà Secondo Binomio.

I I I.

Se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si dirà Terzo Binomio.

Di nuouo, se il quadrato del maggior nome è maggiore del quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile al maggior nome.

Se

IV.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si chiamerà Quarto Binomio.

V.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si dirà Quinto Binomio.

VI.

E se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, si chiamerà Sesto Binomio.

Procedendo Euclide col suo impareggiabil ordine, dalle cose semplici alle composte, e da queste alle più composte; dopo dimostrata la commensurabilità, ed incommensurabilità delle semplici grandezze frà di loro; fatta la comparatione di queste alla Rationale, e spiegato il nascimento, e natura delle Medie; passa alla generatione delle composte, e dimostra, che sono tutte Irrationali, disponendo sempre le cose con ordine accomodato alla nostra intelligenza; cioè, dal Rationale fà passaggio al Medio, e dal Medio all'Irrationale. E perche le rette Irrationali sono innumerabili, ne scieglie le più elementari, e le distribuisce in tredici classe; cioè, una semplice, sei per compositione, e sei per sottrattione. Quelle per compositione sono le sei seguenti, cioè. Quelle rette, che separatamente sono composte di due Rationali, commensurabili solamente in potenza, costituiscono il primo genere d'irrationali; ed ogn'una si chiama Binomio, come apparisce nella 37. propos. di questo. Quelle, che separatamente sono composte di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano uno spatio Rationale, costituiscono il secondo genere; ed ogn'una si chiama prima Bimediale, come nella propositione 38. Similmente quelle, che si compongono di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono uno spatio Medio, formano il terzo genere; ed ogn'una si chiama seconda Bimediale, come nella 39. propositione. Le rette linee poi, che separatamente sono composte da due linee rette, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, insieme giunti, compongano un Rationale, ed il rettangolo, contenuto da loro, è Medio; costituiscono il quarto genere, ed ogn'una si chiama Maggiore, come nella 40. propositione. Oltre à ciò, quelle rette linee, che separatamente sono composte di due linee rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano un Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio; costituiscono il quinto genere; ed ogn'una si chiama Potente per un Rationale, ed un Medio, come nella 41. propositione. E finalmente quelle rette linee, che separatamente sono composte di due rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano un Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, costituiscono il sesto genere, ed ogn'una si chiama

Poten-

Potente di due Medie, come nella 42. propoſitione. Spiegata la generatione di queſte ſei linee, e douendole comparare alla Rationale, diuide prima il genere de' Binomij in ſei linee di due nomi, cioè in ſei Binomij, con queſt' ordine.

Perche ogni Binomio è compoſto di due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, queſte due rette, che compongono il Binomio, non poſſono eſſere ambedue commenſurabili in lunghezza alla Rationale; perche ſe ciò foſſe, ſarebbero frà di loro commenſurabili in lunghezza, ed il loro aggregato ſarebbe vna linea Rationale, ch'è contro à quel, che ſi dimoſtrò nella generatione del Binomio alla propoſitione 37: perilche ò vna di quelle, ò l'altra, ò niſſuna, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale. E di queſti due nomi, che compongono il Binomio, vno ſarà maggiore dell'altro: perche, ſe foſſero vguali, ſarebbero commenſurabili frà di loro in lunghezza, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi ſuppongono commenſurabili ſolamente in potenza. Hor eſſendo ineguali i nomi, che compongono il Binomio, il quadrato del maggior nome ſuperarà il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome; Se il quadrato del maggior nome ſupera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome, ne naſcono trè Binomij in queſta forma. Se il maggior nome è commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiama primo Binomio. Se alla Rationale ſarà commenſurabile in lunghezza il minor nome, ſi dirà ſecondo Binomio. E ſe niſſuno de' nomi è commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ſi chiamerà terzo Binomio. In oltre quando il quadrato del maggior nome ſupera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza al maggior nome, ne naſcono tre altri Binomij, in queſto modo. Se il maggior nome ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiamerà quarto Binomio. Se poi alla Rationale ſarà commenſurabile in lunghezza il minor nome, ſi chiamerà quinto Binomio. E ſe niſſuno de i due nomi ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiamerà ſeſto Binomio. E di queſti conſeguentemente ſe ne dimoſtra la loro generatione.

Quanto poi à gli altri cinque generi di linee ſopra nominati, come la prima Bimediale, la ſeconda Bimediale, la Maggiore &c. non ſi diuidono in altri generi di linee, come ſi è fatto del Binomio; ſtante che tutti i nomi, che compongono queſte linee, ſono incommenſurabili in lunghezza alla Rationale.

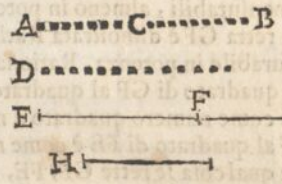
PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLIX.

Ritrouare il Primo Binomio.

Per la ſeconda parte del Corollario alla 29. propoſitione di queſto, ſi trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non ſia numero quadrato: ſarà la proportione di AB, à BC, come numero quadrato à numero quadrato; e la proportione di BA ad AC non ſara come numero quadrato à numero quadrato. Si eſponga poi qualche Rationale D, e ſi prenda EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D, ſarà EF Rationale. Si faccia poi, per il Corollario alla 6. propo-

ſitione

sitione di questo, si come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG sarà vna di quelle linee, che chiamiamo Primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, saranno i quadrati delle due EF, FG, [a] frà di loro commensurabili; dalche le rette EF, FG sono almeno commensurabili in potenza; ma la retta EF fù dimostrata Rationale, sarà FG, [b] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. E perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, ed il numero AB al numero AC, per costruttione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette EF, FG, [c] sono incommensurabili in lunghezza: Ma le medesime EF, FG, furono dimostrate Rationali, commensurabili in potenza; il loro composto, cioè tutta la retta EG, [d] sarà irrationale, e sarà vna di quelle, che habbiamo chiamata Binomio. Dico che EG è primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, e, per costruttione, AB è maggiore di AC; sarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG; dal quadrato di EF se ne detragga il quadrato di FG, per il Lemma alla propositione decima quarta, e quel, che resta, sia il quadrato della retta H; sarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG. In oltre, perche il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuersione della proportione, l'antecedente AB alla differenza frà l'antecedente AB, ed il conseguente AC, cioè à BC, [e] sarà come il quadrato di EF, ch'è antecedente, alla differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, ch'è conseguente, cioè al quadrato di H. Hor essendo AB à BC, come il quadrato di EF al quadrato di H; e la proportione di AB à BC, per costruttione, è come numero quadrato à numero quadrato; sarà il quadrato di EF al quadrato di H, come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette FE, & H, [f] sono commensurabili in lunghezza. Finalmente, perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome EF; ed il maggior nome EF, per costruttione, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D, per la prima delle antecedenti definitioni, sarà EG quella retta, che si chiama primo Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

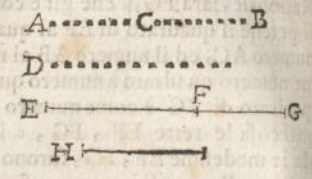


[a] 6. del 10.
[b] 6. defin. del 10.
[c] 9. del 10.
[d] 37. del 10.
[e] Corol. al. la 19. del 5.
[f] 9. del 10.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE L.

Ritrouare il secondo Binomio.

Si trouino, come si disse nell'antecedente propositione, due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC, non sia numero quadrato. Sia esposta la Rationale D, e sia presa la retta FG, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta GF [a] Rationale. Si faccia per il Corollario alla sesta propositione, si come il numero AC al numero AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG sarà il secondo Binomio, che si cerca. Perche il quadrato di GF al quadrato di FE è come il numero AC al numero AB, saranno i quadrati delle due GF, FE, [b] commensurabili; dal che le rette GF, FE sono commensurabili, almeno in potenza: ma la retta GF è dimostrata Rationale, sarà la retta FE, [c] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. Di nuouo, perche AC ad AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE; ed il numero AC al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di GF al quadrato di FE è come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette GF, FE, [d] sono incommensurabili in lunghezza: furono già dimostrate Rationali, in conseguenza le rette GF, FE, sono commensurabili solamente in potenza, ed il loro aggregato, cioè tutta la retta EG, [e] sarà irrationale, e sarà quella retta, che si chiama Binomio. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo secondo Binomio. Perche il numero AC al numero AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE, inuertendo, AB ad AC sarà come il quadrato di EF al quadrato di FG: ma BA, per costruttione, è maggiore di AC; sarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG. Dal quadrato di EF, per il Lem. alla 14. propos. di questo, se ne sottragga il quadrato di FG, e quel, che resta, sia il quadrato di H; sarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG. E procedendo come nell'antecedente propositione, si dimostrerà, che la retta H è commensurabile in lunghezza al maggior nome EF. E perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza al maggior nome EF; e, per costruttione, il minor nome FG è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà EG quella retta, che si chiama secondo Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.



a 6. defin. del 10.

b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

e 37. del 10.

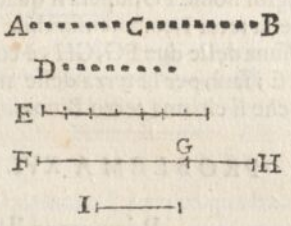
PROBLEMA XV. PROPOSITIONE LI.

Ritrouare il terzo Binomio.

Per la seconda parte del Corollario alla 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non sia numero quadrato; poi si prenda vn altro numero D non quadrato,

che

che non habbia ad AC la proportione di numero quadrato à numero quadrato, il che facilmente s'ottiene, se si fà il numero D maggiore di AC per vna vnità, ò due, al più; cioè se, facendosi D maggiore di AC d'vna vnità, fusse numero quadrato, all' hora s'aggiungerà à D vn'altra vnità; mà se con l'aggiunta d'vna sola vnità non fusse numero quadrato, non farà bisogno aggiungerui altra vnità, perche, in quel caso, il numero D non sarà piano, simile ad AC, e perciò non hauerà la proportione ad AC, come numero quadrato à numero quadrato; ed oltre à ciò, non essendo D numero quadrato, ne meno hauerà la proportione ad AB, come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga poi qualunque Rationale E, e, per il Corollario alla sesta propositione, si faccia si come il numero D al numero AB, così il quadrato della Rationale E al quadrato di FG. Essendo i quadrati di E, ed FG, come numero à numero, [a] saranno frà di loro commensurabili, e perciò le rette E, & FG, sono commensurabili, al meno in potenza: mà la retta E è posta Rationale, sarà FG, [b] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. In oltre, perche il numero D al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il numero D al numero AB è come il quadrato di E al quadrato di FG; il quadrato di E al quadrato di FG non sarà come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette E, & FG [c] sono incommensurabili in lunghezza. Di nuouo, per il Corollario alla sesta propositione, si faccia si come AB ad AC, così il quadrato di FG al quadrato di GH. Hauendo i quadrati di FG, & GH, la proportione del numero AB al numero AC, [d] saranno frà di loro commensurabili, e le rette FG, GH saranno commensurabili al meno in potenza: mà la retta FG è dimostrata Rationale, sarà la retta GH [e] ancora Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il quadrato di FG al quadrato di GH è come AB ad AC, il quadrato di FG al quadrato di GH non sarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette [f] FG, GH sono incommensurabili in lunghezza: mà furono dimostrate Rationali, in conseguenza sono commensurabili solamente in potenza; e per la 37. propositione di questo, tutta la retta FH è irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio. Dico che la retta FH è quella linea, che si chiama terzo Binomio. Perche D ad AB, per costruttione, è come il quadrato della retta E al quadrato di FG, e la proportione di AB ad AC è come quella del quadrato di FG al quadrato di GH; per l'vgualità, sarà D ad AC, [g] come il quadrato di E al quadrato di GH; mà D ad AC non hà la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; ne meno il quadrato di E al quadrato di GH è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette E, & GH, [h] sono incommensurabili in lunghezza. Di più essendo AB ad AC come il quadrato di FG al quadrato di GH, ed il numero AB,



a 6. del 10.

b 6. defin. del 10.

c 9. del 10.

d 6. del 10.

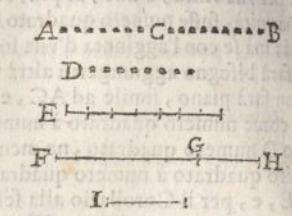
e 6. defin. del 10.

f 9. del 10.

g 22. del 5.

h 9. del 10.

per costruttione, è maggiore di AC; sarà il quadrato di FG maggiore del quadrato di GH. Sia il quadrato di I la differenza di quanto il quadrato di FG supera il quadrato di GH. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC [K] come il quadrato di FG alla differenza frà il quadrato di FG, ed il quadrato di GH; cioè al quadrato di I: mà AB à BC è come numero quadrato à numero quadrato; sarà il quadrato di FG al quadrato di I come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette FG, ed I [l] sono commensurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome FG, supera il quadrato del minor nome GH, per il quadrato della retta I, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome FG, e nissuna delle due FG, GH, è commensurabile in lunghezza alla Rationale E; sarà, per la terza delle antecedenti definitioni, la retta FH quella, che si chiama terzo Binomio ch'era da dimostrarsi.



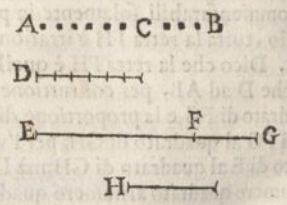
K Corol. al. la 19. del 5.

l 9. del 10.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE LII.

Ritrouare il quarto Binomio.

Per lo Scolio alla propositione 29. *si trouino due numeri, come AC, CB in modo, che il loro aggregato AB à nissuno di loro sia come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga qualche Rationale D, e si prenda la retta EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta EF Rationale, e, procedendosi nel rimanente, come si fece alla 49 propositione di questo, si prouerà, che tutta la retta EG è Binomio. Dico che EG è quella retta, che si chiama quarto Binomio.* Sia il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, e si proui, come si fece nella 49. propositione, che, per la conuersione della proportione, AB à BC è come il quadrato di EF al quadrato di H: mà, per costruttione, AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: dal che [a] le rette EF, ed H, sono incommensurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il maggior nome EF è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la



a 9. del 10.

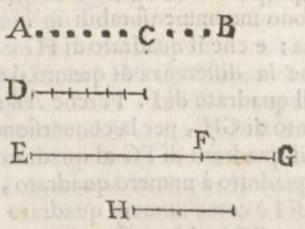
quar-

quarta delle antecedenti definitioni, la retta EG sarà quella, che si chiama quarto Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIONE LIII.

Ritrouare il quinto Binomio.

Si trouino i numeri AC, CB, come si disse nell'antecedente propositione, e del rimanente si faccia quanto si disse nella 50. propositione, ponendo FG commensurabile in lunghezza alla Rationale D; e come iui si fece, si dimostri la retta EG essere Binomio. Dico che EG è quella linea, che si chiama quinto Binomio. Si dimostri similmente, come si fece nella 50. propositione, che il quadrato di EF è maggiore del quadrato di FG; sia il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG; e procedendosi, come nella 49. propositione, si proui, per la conuersione della proportione, AB à BC essere come il quadrato di EF al quadrato di H.

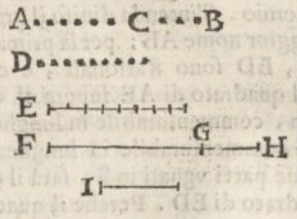


E perche AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato; dal che le rette EF, ed H, [a] sono incommensurabili in lunghezza: per la qual cosa il quadrato del maggior EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il minor nome EF è commensurabile il lunghezza alla Rationale D, e per la quinta delle antecedenti definitioni, sarà EG il quinto Binomio, che si cerca, come fù proposto fare, e dimostrare. [a] 9.del 10.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIONE LIV.

Ritrouare il sesto Binomio.

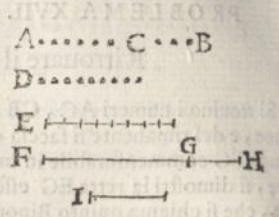
Si trouino due numeri, come AC, CB, che non siano piani simili, e nissuno sia numero quadrato; ed il loro composto, cioè AB, non sia numero quadrato, ne sia à ciascuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB à BC, ne meno AB ad AC, sia come numero quadrato à numero quadrato; il che si farà per il Corollario 2. all'vltima propositione del 9. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per essempio D, il quale non haurà ad AC, ne meno ad AB, la proportione,



che

che hà il numero quadrato al numero quadrato: ciò fatto, si esponga qualunque Rationale E, e si faccia si come il numero D al numero AB, [a] così il quadrato di E al quadrato di FG. Il rimanente si faccia come nella propositione 51, e si dimostri, come iui si fece, che le rette E, ed FG sono incommensurabili in lunghezza; e che tutta la retta FH è Binomio. Dico che FH è quella, che si chiama *sesto Binomio*. Si dimostri similmente, come si fece nella 51. *propositione*, che le rette E, & GH sono incommensurabili in lunghezza; e che il quadrato di FG è maggiore del quadrato di GH: sia dunque la differenza di quanto il quadrato di FG supera il quadrato di GH, il quadrato di I. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC, come il quadrato di FG al quadrato di I: ma AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di FG al quadrato di I è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette FG, ed I, [b] sono incommensurabili in lunghezza. E perche il maggior nome FG supera il minor nome GH, per il quadrato della retta I, incommensurabile in lunghezza al maggior nome FG; e nissuno de i nomi FG, GH, è commensurabile in lunghezza alla Rationale E, per la 6. definitione, la retta FG sarà quella, che si chiama sesto Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

a Coroll. alla 6. del 10.



b 9. del 10.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIONE LV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal primo Binomio, è Irrationale; ed è quella, che chiamiamo Binomio.

Sia esposto il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal primo Binomio AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Irrationale, ed è quella, che chiamiamo Binomio. S'intenda diuiso il primo Binomio AD ne i suoi nomi, e sia il maggior nome AE; per la prima delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE: ed oltre à ciò la retta AE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, sarà il quadrato di EF [b] la quarta parte del quadrato di ED. Perche il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE; se alla retta AE, per il primo, ò secondo Lemma, dopo la 17. propositione di questo, si applichi il rettangolo GX, vguale al quadrato di EF, cioè

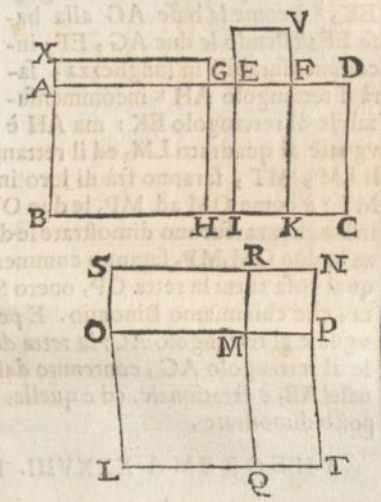
a 10. del 1.

b Scol. alla 4. del 2.

vgua-

vguale al quadrato EV, ch'è la quarta parte del quadrato di ED, in modo, che manchi à compire la retta AE d'vna figura quadrata; per la 18. propoſ. di queſto, la retta AE ſarà diuiſa in qualche punto G, e le parti AG,GE, ſaranno frà di loro commenſurabili in lunghezza, e per il Lemma 2. dopo la 17. propoſ. il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, ſarà vguale al quadrato di EF. Per li punti G, E, F, [c] ſi tirino le rette GH, EI, FK, parallele ad AB, ouero CD: poi ſi faccia il quadrato LM [d] vguale al rettangolo AH, e ſi faccia il quadrato MN vguale al rettangolo GI, e ſi diſpongano queſti due quadrati in modo, che i lati OM, MP, facciano vna ſola retta linea, come OP. Perche gli angoli OMQ, RMP ſono retti, vgualmente s'aggiunga l'angolo QMP, i due angoli OMQ, QMP, ſaranno vguali à i due angoli QMP, PMR: ma gli angoli OMQ, QMP, [e] ſono vguali à due angoli retti; ſaranno i due angoli QMP, PMR, vguali à due angoli retti; e perciò le rette QM, MR, [f] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Si prolunghino le rette NP, NR, ſino che concorrano con le rette LO, LQ, continuate come in T, ed S. In oltre, perche OM, come lato del quadrato, è vguale ad MQ, ed il lato RM è vguale ad MP; ſarà tutta OP vguale ad RQ: ma OP è vguale ad SN, e la retta RQ è vguale ad NT; ſarà SN vguale ad NT, per la qual coſa il rettangolo ST ſarà quadrato.

c 31. del 1.
d 14. del 2.
e 13. del 1.
f 14. del 1.



Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, per coſtruttione, è vguale al quadrato di EF; ſarà AG ad EF, [g] come EF ad EG: ma AG ad EF è come il rettangolo AH [h] al rettangolo EK; e la proportione di FE ad EG [K] è come il rettangolo EK al rettangolo GI; ſarà il rettangolo AH al rettangolo EK, [l] come il medeſimo rettangolo EK al rettangolo GI; per la qual coſa il rettangolo EK ſarà Medio proportionale frà i due rettangoli AH, GI, cioè frà i due quadrati LM, MN: ma frà i due quadrati LM, MN, per il Theor. 5. nello Scolio dopo la prima del 6. libro, è Medio proportionale il rettangolo MT; ſarà il rettangolo MT vguale al rettangolo EK; e perche il rettangolo MT [m] è vguale al rettangolo MS, ed il rettangolo EK [n] è vguale al rettangolo FC, ſarà il rettangolo MS vguale al rettangolo FC. Hor eſſendo il rettangolo AH vguale al quadrato ML, il rettangolo GI vguale al quadrato RP, ed i rettangoli EK, FC, vguali à i rettangoli TM, MS, ſarà tutto il quadrato ST vguale à tutto il rettangolo AC.

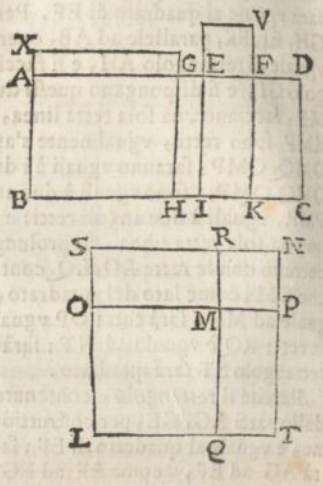
g 17. del 6.
h 1. del 6.
K 1. del 6.
l 11. del 5.
m 43. del 1.
n 36. del 1.

Eſſendoſi dimoſtrato, che le due AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza, ſarà tutta AE [o] commenſurabile in lunghezza tanto ad AG,

o 16. del 10.

quan-

quanto ad EG : ma nel primo Binomio AD il maggior nome AE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; saranno le due AG, GE, [p] commensurabili in lunghezza alla medesima Rationale AB : per la qual cosa le due AG, GE, [q] sono Rationali, ed i rettangoli AH, GI, contenuti dalle Rationali GA, AB, & EG, GH, per la 20. propositione di questo, sono Rationali; dal che i quadrati LM, MN, che gli sono vguali, sono ancora Rationali, e perciò i loro lati OM, MP sono Rationali. In oltre, perche le due AE, AG sono commensurabili in lunghezza, e la retta AE è incommensurabile in lunghezza ad ED; sarà AG [r] incommensurabile in lunghezza ad ED: ma la retta ED è commensurabile in lunghezza alla sua meta EF; sarà AG [t] incommensurabile in lunghezza ad EF. Finalmente, perche il rettangolo [u] AH al rettangolo EK, è come la base AG alla base EF; essendo le due AG, EF, incommensurabili in lunghezza, sarà il rettangolo AH [x] incommensurabile al rettangolo EK: ma AH è vguale al quadrato LM, ed il rettangolo EK è vguale ad MT, i rettangoli LM, MT, saranno frà di loro incommensurabili. E perche LM ad MT [y] è come OM ad MP, le due OM, MP, [z] saranno incommensurabili in lunghezza; furono dimostrate le due OM, MP, Rationali; in conseguenza le due OM, MP, saranno commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa tutta la retta OP, ouero SN, [a] sarà Irrationale, e sarà quella retta, che chiamiamo Binomio. E perche il quadrato di SN, cioè ST; è vguale al rettangolo AC; la retta dunque SN, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, contenuto dal primo Binomio AD, e dalla Rationale AB, è Irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio, come fù proposto dimostrare.



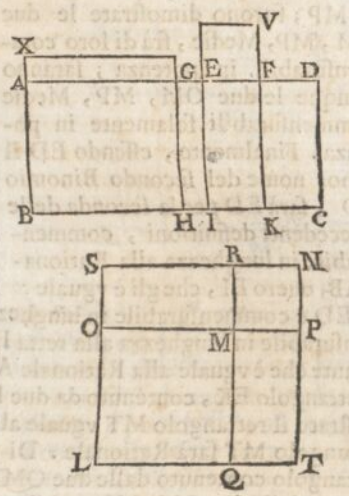
p Scol. alla 12. del 10.
q 6. defin. del 10.
r 14. del 10.
t 14. del 12.
u 1. del 6.
x 10. del 10.
y 1. del 6.
z 10. del 10.
a 37. del 10.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIONE LVI.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal secondo Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama prima Bimediale.

Sia il rettangolo AC contenuto dalla Rationale AB, e dal secondo Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo

golo AC, è Irrationale; ed è quella, che si chiama prima Bimediale. S'intenda diuiso il secondo Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE il maggior nome, e per la seconda delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, il maggior nome AE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, come nell'antecedente propositione, e si dimostri, come iui si fece, che la retta OP, ouero SN, è quella, il di cui quadrato LN è vguale al rettangolo AC. Dico che OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che si chiama prima Bimediale. a 10. del 1.



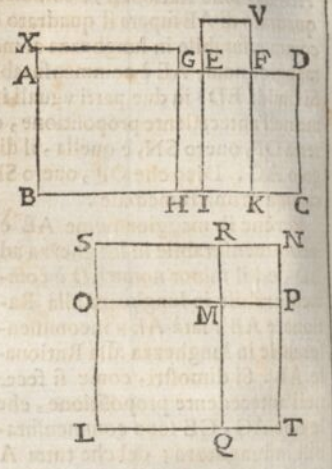
Perche il maggior nome AE è incommensurabile in lunghezza ad ED, ed il minor nome ED è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; sarà AE [b] incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le due AG, GE sono commensurabili in lunghezza; dal che tutta AE [c] sarà cõmensurabile in lunghezza tanto ad AG, quanto à GE. E perche il maggior nome AE è la Rationale del secondo Binomio AD, le due AG, GE, [d] che le sono commensurabili, saranno Rationali. Hor essendo le due AG, GE, commensurabili in lunghezza ad AE, e la retta AE, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB; le due AG, GE [e] saranno incommensurabili in lunghezza alla medesima Rationale AB; per la qual cosa, tanto le due AB, AG, quanto le due AB, GE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e perciò i rettangoli AH, GI [f] sono Medij: Mà il quadrato LM è vguale al rettangolo AH, ed il quadrato MN è vguale al rettangolo GI; saranno i quadrati LM, MN Medij, ed i loro lati OM, MP [g] sono Medie.

b 13. del 10.
c 16. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 14. del 10.
f 22. del 10.
g 22. del 10.

Di nuouo, perche il rettangolo AH al rettangolo GI [h] è come la base AG alla base GE, e le basi AG, GE sono commensurabili in lunghezza, saranno i rettangoli AH, GI [K] frà di loro commensurabili, ed i quadrati LM, MN, che gli sono vguali, saranno ancora frà di loro commensurabili; per la qual cosa i loro lati OM, MP sono commensurabili, al meno in potenza. In oltre, essendo AE commensurabile in lunghezza ad AG, e la medesima AE è incommensurabile in lunghezza al minor nome ED, sarà AG [l] incommensurabile in lunghezza ad ED: mà ED è commensu-

h 1. del 6.
K 10. del 10
l 14. del 10.

m 14.del 10. rabile in lunghezza alla sua metà EF, sarà AG m incommensurabile ad
n 1.del 6. EF. E perche il rettangolo AH al rettangolo EK n è come le base AG
alla base EF, essendo AG incommesurabile in lunghezza ad EF, sarà il
o 10.del 10. rettangolo AH o incommensurabile
al rettangolo EK: mà EK, per quel,
che si disse nell'antecedente propo-
sitione, è vguale ad MT, & AH è
vguale ad LM; sarà LM incommen-
surabile ad MT; e perche la pro-
p 1.del 6. portione di LM ad MT è come p O
q 10.del 10. M ad MP, in conseguenza OM q sa-
rà incommensurabile in lunghezza
ad MP; furono dimostrate le due
OM, MP, Medie, frà di loro com-
mensurabili in potenza; saranno
dunque le due OM, MP, Medie
commensurabili solamente in po-
tenza. Finalmente, essendo ED il
minor nome del secondo Binomio
AD, sarà ED per la seconda delle
antecedenti definitioni, commen-
surabile in lunghezza alla Rationa-
le AB, ouero EI, che gli è vguale:



r 12.del 10. mà ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF, sarà EF r com-
mensurabile in lunghezza alla retta EI. E perche la retta EI è Rationale
(stante che è vguale alla Rationale AB) perciò EF s sarà Rationale; ed
s 6. defin. del 10. il rettangolo EK, contenuto da due Rationali, sarà u Rationale: fù di-
u 20.del 10. mostrato il rettangolo MT vguale al rettangolo EK, in conseguenza il
rettangolo MT sarà Rationale. Di più, essendo OM vguale ad MQ, il
rettangolo contenuto dalle due QM, MP sarà vguale al rettangolo con-
tenuto dalle due OM, MP: mà il rettangolo contenuto dalle due QM,
MP, cioè il rettangolo MT, è Rationale; sarà il rettangolo, contenuto
dalle due OM, MP Rationale. Per la qual cosa le Medie OM, MP, com-
mensurabili solamente in potenza, contengono vn rettangolo Rationa-
le, e per la 38. di questo, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed
è quella, che si chiama prima Bimediale; come fù proposto dimostrare.

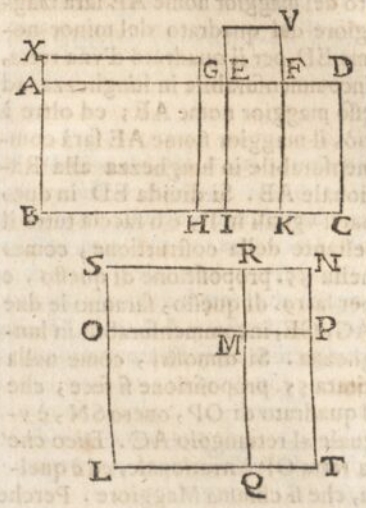
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIONE LVII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal terzo Binomio, è irrationale; ed è quella, che si chiama seconda Bimediale.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal terzo Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama seconda Bimediale. S'intenda diuiso il terzo Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE

il

il maggior nome, per la terza delle antecedenti definitioni, le due AE, ED saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE sarà maggiore del quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabili in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, nissuna delle due AE, ED sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, e tutto il rimanente della costruttione si faccia come nella 55. propositione di questo, e si dimostri come iui si fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC; e, procedendosi come nell'antecedente propositione, si dimostrerà, che le rette OM, MP sono Medie, commensurabili solamente in potenza. In oltre, perche ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF, e, per ipotesi, la medesima ED è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ouero EI, sarà EF [a] incommensurabile in lunghezza ad AB, ouero EI: mà EF, per essere commensurabile alla Rationale ED, è Rationale; le due dunque EF, EI saranno Rationali, e perciò sono commensurabili solamente in potenza; ed il rettangolo EK, contenuto dalle medesime EF, EI [b] sarà Medio, e perciò MT, ch'è vguale ad EK, sarà ancora Medio. E perche il rettangolo MT è contenuto dalle Medie OM, MP (per essere OM vguale ad MQ) il rettangolo dunque contenuto dalle medie OM, MP sarà Medio. Hor, essendo le due OM, MP Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, sarà tutta OP, per la 39. di questo, irrationale; e sarà quella, che si chiama seconda Bimediale, ch'era da dimostrarsi.



[a] 14. del 10.

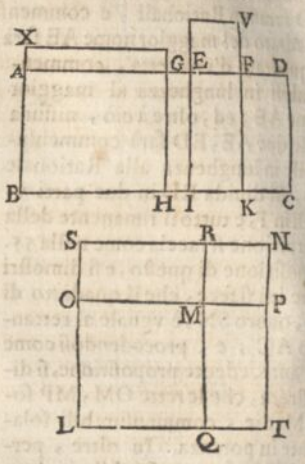
[b] 22. del 10.

THEOREMA XL. PROPOSITIONE LVIII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dal quarto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama Maggiore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quarto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama Maggiore. Sia diuiso il quarto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, de'quali AE sia il mag-

giore, e per la quarta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, saranno Rationali, commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE sarà maggiore del quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad esso maggior nome AE; ed oltre à ciò, il maggior nome AE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. *Si diuida* ED *in due parti vguali in* F, *e si faccia tutto il restante della costruttione, come nella* 55. *propositione di questo, e per la* 19. *di questo, saranno le due* AG, GE, *incommensurabili in lunghezza.* Si dimostri, come nella citata 55. propositione si fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama Maggiore. Perche il rettangolo AH al rettangolo GI [a] è come AG à GE, essendo AG *incommensurabile in lunghezza ad* EG, sarà AH [b] *incommensurabile à* GI, *e perciò i due quadrati* LM, MN, *che sono vguali à i rettangoli* AH, GI, *sono ancora incommensurabili; dal che i loro lati* OM, MP *sono incommensurabili in potenza. E perche il maggior nome* AE *è commensurabile in lunghezza alla Rationale* AB; *sarà dunque* AE [c] *Rationale, ed il rettangolo* AI, *contenuto dalle Rationali* AE, AB, [d] *sarà ancora Rationale: ma il rettangolo* AI *è vguale all'aggregato de i quadrati* LM, MN; *sarà l'aggregato de i quadrati delle rette* OM, MP, *Rationale.*



a 11. del 6.
b 10. del 10.
c 6. defin. del 10.
d 20. del 10.

In oltre, perche AD, per ipotesi, è quarto Binomio, il minor nome ED sarà incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB: ma ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF; sarà EF [e] incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB. E perche EF, per essere commensurabile alla Rationale ED, [f] è Rationale, sarà EF commensurabile solamente in potenza alla Rationale AB, ouero EI: per la qual cosa il rettangolo EK [g] è Medio; fù dimostrato, nella 55. propositione, il rettangolo MT vguale ad EK, in conseguenza MT, ch'è contenuto dalle due OM, MP, è medio. Le due dunque OM, MP, sono incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Rationale; ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio; e per la 40. propositione di questo, tutta la retta OP è Irrationale, ed è quella, che si chiama Maggiore, *il che era da dimostrarsi.*

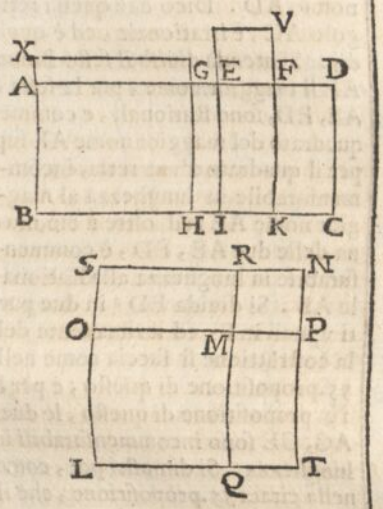
e 14. del 10.
f 6. defin. del 10.
g 22. del 10.

THEO-

THEOREMA XLI. PROPOSITIONE LIX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal quinto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama potente per il Rationale, e Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quinto Binomio AD. *Dico* che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per il Rationale, e Medio. S'intenda diuiso il quinto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, de'quali AE sia il maggiore, e per la 5. delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED sono Rationali, commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE supera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad AE; ed, oltre à ciò, il minor nome ED è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, ed il restante della costruttione si faccia come nella 55. propositione di questo; per la 19. di questo, saranno le due AE, GE incommensurabili in lunghezza. Si dimostri, come nella citata 55. propositione si fece, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. *Dico* che la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per il Rationale, e Medio. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le rette OM, MP sono incommensurabili in potenza; e perche il maggior nome AE è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB, e la medesima AE è Rationale, per essere vno de i nomi del quinto Binomio AD; perciò le due AE, AB sono commensurabili solamente in potenza, ed il rettangolo AI, contenuto dalle due AE, AB, [a] commensurabili solamente in potenza, è Medio. Ma il rettangolo AI, per costruttione, è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN; sarà l'aggregato de i quadrati delle due OM, MP, Medio. In oltre, perche ED è il minor nome del quinto Binomio, perciò è commensurabile alla Rationale AB, ed in conseguenza è Rationale; sarà la sua metà EF, [b] che gli è commensurabile, Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale AB: per la qual cosa il rettangolo EK, ch'è contenuto dalle



[a] 22. del 10.

[b] 6. defin. del 10.

Ratio-

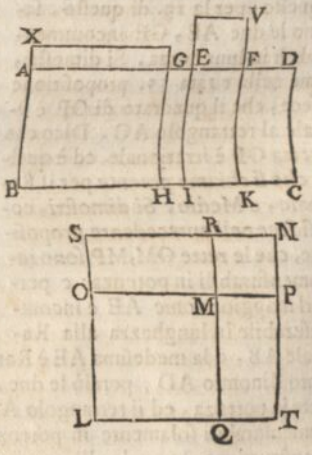
c 20.del 10. Rationali EF, EI, [c] commensurabili in lunghezza, sarà Rationale. Ma EK è vguale al rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP; sarà il rettangolo contenuto dalle due OM, MP, Rationale. Saranno dunque le rette OM, MP, incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati LM, NN, è Medio; ed il rettangolo, contenuto da esse, è Rationale; e per la 41. propositione di questo, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente per il Rationale, e Medio, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XLII. PROPOSITIONE LX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal sesto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama potente di due Medij.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal sesto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente di due Medij. S'intenda diuiso il sesto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE il maggior nome, per la sesta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE supera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, niuna delle due AE, ED, è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. *Si diuida ED* [a] *in due parti vguali in F, ed il rimanente della costruttione si faccia come nella* 55. *propositione di questo*, e per la 19. propositione di questo, le due AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. Si dimostri poi, come nella citata 55. propositione, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per due Medij. Si dimostri, come si fece nella 58. propositione, che le rette OM, MP sono incommensurabili in potenza; e si dimostri, come nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati LM, MN, è Medio: similmente si dimostri, come nella 58. propositione, che il rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP, è Medio. Finalmente perche ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF,

a 10.del 1.



e la

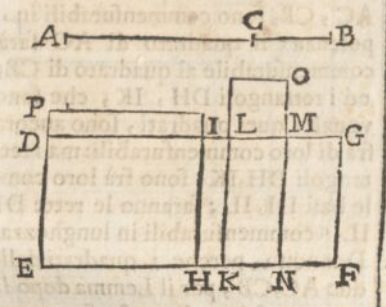
e la medesima ED è incommensurabile in lunghezza ad AE ; sarà EF [b] incommensurabile in lunghezza ad AE. E perche il rettangolo AI al rettangolo EK [c] è come AE ad EF, essendo le due AE, EF, incommensurabili in lunghezza, sarà AI [d] incommensurabile ad EK; ma il rettangolo AI è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN, ed il rettangolo EK è vguale al rettangolo MT ; sarà l'aggregato de i quadrati di OM, MP, incommensurabile al rettangolo MT, ch'è contenuto dalle medesime OM, MP. Le rette dunque OM, MP sono commensurabili solamente in potenza ; l'aggregato de i loro quadrati LM, MN, è Medio; ed il rettangolo MT, contenuto dalle medesime rette OM, MP, è Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati LM, MN ; e per la 42. propositione di questo, la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per due Medij, come fù proposto dimostrare.

b 13. del 10.
c 1. del 6.
d 10. del 10.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIONE LXI.

Applicando il quadrato del Binomio alla Rationale, l'altro lato, che ne risulta, è primo Binomio.

Sia il Binomio AB, diuiso ne i suoi nomi AC, CB, e sia AC il maggior nome : sia esposta la rationale DE, alla quale sia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato del Binomio AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama primo Binomio. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato del maggior nome AC; & alla retta HI si applichi il rettangolo IK, vguale al quadrato del minor nome CB: e perche il quadrato di AB [c] è vguale à i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime AC, CB, essendo DK vguale à i quadrati delle due AC, CB, sarà il rimanente LF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Si diuida LG [d] in due parti vguali in M, dal punto M [e] si tiri la retta MN, parallela ad ED, ouero GF ; i due rettangoli LN, MF, [f] saranno frà di loro vguali, ed ogn'vno sarà vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche AB, per ipotesi, è binomio, le parti AC, CB, [g] saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; per il che i quadrati di AC, CB, sono Rationali, e frà loro commensurabili ; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] sarà commensurabile, tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato di CB : ma i quadrati di AC, & CB, sono Rationali, sarà il loro composto, cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [K] Rationale: ma l'aggregato de i detti quadrati è vguale al rettangolo DK ; sarà il rettangolo DK Rationale; il quale, applicato alla Rationale DE, [l] produce



a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 4. del 2.
d 10. del 1.
e 31. del 1.
f 36. del 1.
g 37. del 10
h 16. del 10.
K 9. defin. del 10.
l 21. del 10.

l'altro lato DL Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche le due AC, CB, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto da AC, CB, [m] Medio; ma questo è commensurabile al suo doppio, il doppio rettangolo dunque, contenuto dalle due AC, CB, cioè il rettangolo LF, [n] sarà Medio; e perciò, applicato il Medio LF alla Rationale DE, ouero LK, fà l'altro lato LG [o] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE: fù dimostrata DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, le due DL, LG, [p] saranno incommensurabili in lunghezza; ed haueremo le due DL, LG, Rationali, commensurabili solamente in potenza, e per la 37. di questo, tutta la retta DG sarà Binomio. Dico che DG è primo Binomio.

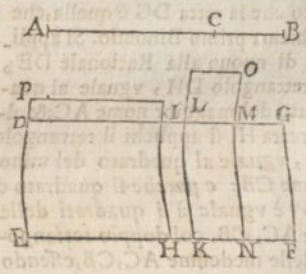
m 22. del 10

n Corol. alla 24. del 10.

o 23. del 10.

p 13. del 10.

Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per l'vltimo Coroll. alla 1. del sesto, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB; ed i quadrati delle medesime AC, CB, sono vguali, per costruttione, à i rettangoli DH, IK; sarà il rettangolo delle due AC, CB, cioè il rettangolo LN, medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; dal che i rettangoli DH, LN, IK sono continui proportionali: Ma i rettangoli DH, LN, IK [q] sono come le basi DI, LM, IL; saranno le rette DI, LM, IL, continue proportionali; e la retta LM sarà media proportionale frà le due DI, IL: per la qual cosa il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, [r] è vguale al quadrato della media LM. In oltre, perche le rette AC, CB, sono commensurabili in potenza, il quadrato di AC sarà commensurabile al quadrato di CB; ed i rettangoli DH, IK, che sono vguali à quei quadrati, sono ancora frà di loro commensurabili: ma i rettangoli DH, IK [t] sono frà loro come le basi DI, IL; saranno le rette DI, IL, [u] commensurabili in lunghezza. Di nuouo, perche i quadrati delle due AC, CB, per il Lemma dopo la 39. propositione di questo, sono maggiori del doppio rettangolo, cõtenuto dalle medesime AC, CB, ed i quadrati delle due AC, CB, sono vguali al rettangolo DK, e similmente il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo LF; in conseguenza il rettangolo DK sarà maggiore del rettangolo LF: Ma i rettangoli DK, LF, [x] sono come le basi DL, LG; sarà la base DL maggiore della base LG. Hor essendo DL maggiore di LG, ed il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, per quel, che si è dimostrato, è vguale al quadrato di LM, cioè è vguale alla quarta parte del quadrato della minore LG; sarà applicato alla maggiore LD il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la linea DL per vna figura quadrata, e la retta DL da tale applicatione è diuisa in I, nelle parti DI, IL, le quali, per quel, che si è dimostrato, sono commensura-



q 1. del 6.

r 17. del 6.

t 1. del 6.

u 10. del 10.

x 1. del 6.

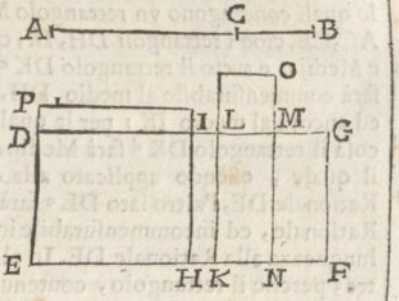
bili

bili in lunghezza; per la 18. di questo, il quadrato della maggiore DL supera il quadrato della minore LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore DL: e perche la maggiore DL, per quel, che si è dimostrato nella prima parte, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la prima delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà primo Binomio, comè fù proposto dimostrare.

THEOREMA XLIV. PROPOSITIONE LXII.

Applicando il quadrato della prima bimediale alla Rationale, il lato, che ne risulta, è secondo Binomio.

Sia la prima Bimediale AB, diuisa ne i suoi nomi, ed il maggior nome sia AC; si applichi alla Rationale DE [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è secondo binomio. Si proseguisca la costruttione dell'antecedente propositione, in modo, che i due rettangoli DH, IK siano vguali à i quadrati delle rette AC, CB, ed ogn'vno de i rettangoli LN, MF, vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche le due AC, CB, sono i nomi della prima bimediale AB, per la 38. di questo, le rette AC, CB, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio; saranno i quadrati delle due AC, CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, frà loro commensurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK sarà commensurabile à ciascuno de i Medij DH, IK, e per il Corollario alla 24. propositione di questo, sarà DK Medio; il quale, essendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL, [b] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, per ipotesi, è Rationale, il suo doppio, che gli è commensurabile, cioè il rettangolo LF, [c] sarà Rationale; il quale, essendo applicato alla Rationale DE, cioè ad LK, che gli è vguale, ne risulta il lato LG [d] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Hor perche DL è incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commensurabile in lunghezza alla medesima DE, sarà DL [e] incommensurabile in lunghezza ad LG: ma le due DL, LG sono state dimostrate Rationali, saranno dunque le due DL, LG Rationali, e commensurabili solamente in potenza: per la qual cosa tutta la retta DG [f] sarà quella, che chiamiamo Binomio. Dico che la retta DG è secondo Binomio. Si dimostri, come si fece nella seconda parte dell'antecedente propositione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato di



a 45. del 1.

b 23. del 10.

c 9. defin. del 10.

d 21. del 10.

e 13. del 10.

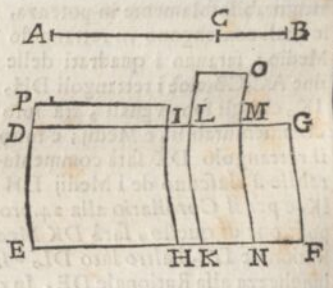
f 37. del 10.

vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minor nome LG, per il quadrato d'vna retta, cõmensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e si è dimostrato, che il minor nome LG è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà la retta DG quella, che si chiama secondo Binomio; il che era da dimostrarsi.

THEOREMA XLV. PROPOSITIONE LXIII.

Applicando il quadrato della seconda Bimediale alla Rationale, il lato, che ne risulta, è terzo Binomio.

Sia la seconda Bimediale AB, il di cui maggior nome AC, ed il minore CB; ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama terzo Binomio. Sia fatta tutta la costruttione, come nella 61. propos. Perche i nomi AC,CB, [b] che compongono la seconda Bimediale, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, saranno i quadrati delle rette AC,CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, commensurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK [c] sarà commensurabile al medio DH, ed ancora al medio IK: per la qual cosa il rettangolo DK [d] sarà Medio, il quale, essendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [e] sarà Rationale, ed *incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi*, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [f] che gli è commensurabile, sarà Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC,CB, è vguale al rettangolo LF; sarà il rettangolo LF Medio; il quale, applicato alla Rationale LK, cioè DE, fà il lato LG [g] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Prese AC,CB, come basi di due rettangoli, e sia AC altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle parti AC,CB, [h] come AC à CB: ma AC è incommensurabile in lunghezza à CB, sarà il quadrato di AC [K] incommensurabile al rettangolo delle due AC,CB. Similmente perche i quadrati delle due AC,CB *sono* commensurabili, *il loro aggregato* [l] sarà commensurabile al quadrato di AC: ma il quadrato di AC è incommensurabile al rettangolo *delle* due AC, CB, sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [m] *incommensurabile* al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al suo *doppio*, sarà l'aggregato de i



a 45. del 1.
b 39. del 10.
c 16. del 10.
d Coroll. alla 24. del 10.
e 23. del 10.
f Coroll. alla 24. del 10.
g 23. del 10.
h 1. del 6.
K 10. del 10.
l 16. del 10.
m 13. del 10

qua-

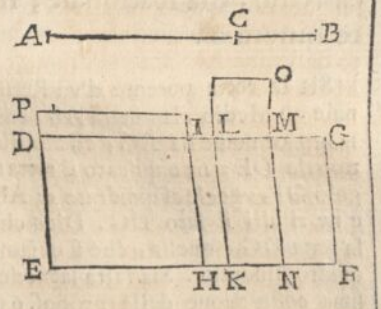
quadrati delle rette AC, CB, [n] incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB; fù fatto, per costruttione, il rettangolo DK vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il rettãgolo LF è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo LF; mà i rettangoli DK, LF [o] sono come le basi DL, LG; le rette dunque DL, LG [p] saranno incommensurabili in lunghezza; le quali essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 37. propositione di questo, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama Binomio. Dico che è il terzo Binomio. Si dimostri, come si fece nella propositione 61. di questo, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minore LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e nissuna di loro, per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà quella, che si chiama terzo Binomio, come fù proposto dimostrare.

n 13. del 10.
o 1. del 16.
p 10. del 10.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIONE LXIV.

Applicando il quadrato della Maggiore alla Rationale, il lato, che ne risulta, è quarto Binomio.

Sia quella retta, che si chiama Maggiore, AB, il di cui maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE [a] *sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quarto Binomio.* Sia fatta la medesima costruttione della propositione 61. di questo. Perche i nomi AC, CB, compongono la maggiore AB, per la 45. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle medesime AC, CB, è Rationale; ed il rettangolo delle due AC, CB, è Medio: ma il rettangolo DK, per costruttione, è vguale à i quadrati delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK Rationale. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle due AC, CB, sarà il rettangolo LN medio, & il doppio LF, ch'è commensurabile ad LN, [b] sarà ancora Medio. Hor essendo applicato il Rationale DK alla Rationale DE, l'altro lato DL [c] sarà Rationale, e sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, essendo il Medio LF applicato alla Rationale LK, ouero DE, l'altro lato LG [d] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK,



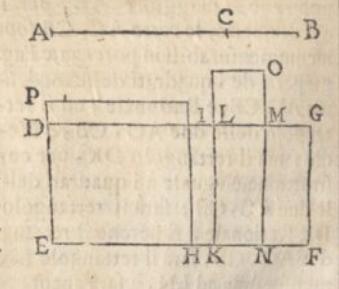
a 45. del 1.
b Corol. al. la 24. del 10.
c 21. del 10.
d 23. del 10.

ouero DE. Et essendo DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è incommensurabile in lunghezza alla medesima
e 13.del 10. DE, le due DL, LG [e] saranno incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, in conseguenza sono Rationali, e commensura-
f 37. del 10. bili solamente in potenza; e perciò tutta la retta DG [f] sarà Binomio. Dico che è il quarto Binomio. Si dimostri, come si fece nella 61. propos. di questo, che DL è maggiore di LG; e che il rettangolo contenuto dalle parti DI,IL, è vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG. Si considerino i nomi AC, CB, i quali sono incommensurabili in potenza, e perciò i loro quadrati sono incommensurabili frà di loro, ed i rettangoli DH, IK, che sono vguali à quei quadrati, saranno
g 1. del 6. frà di loro incommensurabili: ma i rettangoli DH,IK, [g] sono come le ba-
h 10.del 10. si DI,IL; saranno le rette DI, IL, [h] incommensurabili in lunghezza. Hor essendo il rettangolo delle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, sarà applicato ad LD il rettangolo delle due DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la retta DL, per vna figura quadrata, risultandone per tale applicatione le parti DI,IL, per quel, che si è dimostrato, incommensurabili in lunghezza, e per la 19. di questo, il quadrato di DL supera il quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome DL. E perche il maggior nome DL è stato dimostrato commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la 4. delle antecedenti definitioni, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama quarto Binomio, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIONE LXV.

Applicando il quadrato della potente d'vn Rationale, e Medio, alla Rationale, il lato, che ne risulta, è il quinto Binomio.

Sia la retta potente d'vn Rationale, e Medio, la notata AB, ed il maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE
a 45.del 1. [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quinto Binomio. Sia fatta la medesima costruttione della propos. 61. Perche AB è supposta la linea potente per il Rationale, e Medio, per la 41. di questo, le rette AC,CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle rette AC,CB, è Medio; ed il rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, è Rationale: ma, per costruttione, il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC,CB; sarà il



rettan-

rettangolo DK Medio. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle medesime AC, CB; sarà il rettangolo LN Rationale, il di cui doppio LF sarà Rationale. Hor essendo il medio DK applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] sarà Rationale, e sarà incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, essendo il Rationale LF applicato alla Rationale LK, cioè DE, l'altro lato LG [c] sarà Rationale, commensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE; e perche DL è incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commensurabile in lunghezza alla medesima DE; le due DL, IG [d] saranno incommensurabili in lunghezza: ma le habbiamo dimostrate Rationali, saranno dunque le due DL, LG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 37. di questo, la retta DG è Binomio. Dico che è quinto Binomio. Si dimostri, come si fece nella 61. propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, è vguale alla quarta parte del quadrato di LG; e si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile al maggior nome DL: e perche il minor nome LG è dimostrato commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà quella, che si chiama quinto Binomio, come fù proposto dimostrare.

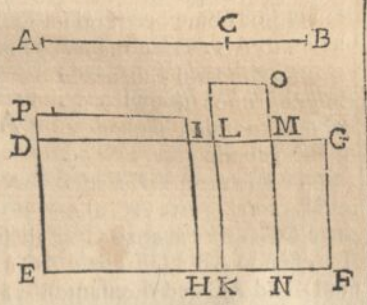
b 23. del 10.
c 21. del 10.
d 13. del 10.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIONE LXVI.

Applicando alla Rationale la potente per due Medij, il lato, che ne risulta, è il sesto Binomio.

Sia AB *la potente per due Medij, il di cui maggior nome sia* AC; alla Rationale DE [a] *si applichi il rettangolo* DF *vguale al quadrato di* AB, *e ne risulti il lato* DG. *Dico che la retta* DG *è quella, che si chiama sesto Binomio*. Sia fatta la costruttione della 61. propositione di questo. Perche AB è la potente per due Medij, per la 42. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza, e l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, è Medio; ed il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, è Medio, incommensurabile all'aggregato de i detti quadrati: e perche il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, sarà il rettangolo DK *Medio*. Similmente essendo il rettangolo LN vguale al rettangolo delle due AC, CB, sarà il rettangolo LN Medio, ed il suo doppio LF [b] sarà ancora *Medio*. Hor essendo i Medij DK, LF applicati alla Rationale DE, ouero LK, *i lati* DL, LG [c] saranno Rationali, e saranno in-

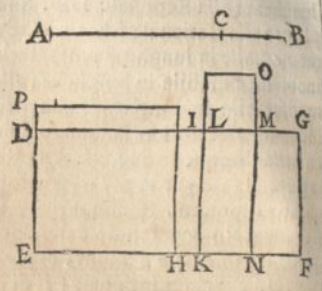
a 45. del 1.



b Coroll. al la 24. del 10
c 23. del 10

com-

commensurabili alla Rationale DE, ouero LK. In oltre, perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è incommensurabile al rettangolo delle medesime AC, CB, ed il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo LF: mà i rettangoli DK, LF [e] sono come le basi DL, LG; le rette dunque DL, LG [f] saranno incommensurabili in lunghezza: furono le medesime rette DL, LG mostrate Rationali, in conseguenza le rette DL, LG saranno Rationali, e commensurabili solamente *in potenza*; e, per la 37. di questo, la retta DG sarà quella, che si chiama Binomio. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione che il maggior nome è DL, e che il quadrato di DL è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato della retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome DL. E perche nissuna delle rette DL, LG, per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la festa delle antecedenti *definitioni*, *la retta DG è quella, che si chiama sesto Binomio, il che era da dimostrarsi*.

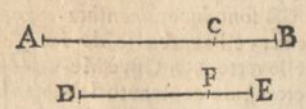


d 13. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIONE LXVII.

La retta linea, ch'è commensurabile in lunghezza al Binomio, ancor essa è Binomio del medesimo ordine.

Sia qualunque Binomio AB, diuiso ne i suoi nomi AC, CB, e sia AC il maggior nome, ed il minore CB, e la retta DE sia commensurabile al Binomio AB. Dico che DE è Binomio del medesimo ordine; cioè se AB è primo Binomio, ancora DE sarà primo; se AB è secondo Binomio, sarà ancora DE secondo, &c. Si faccia [a] si come tutta AB à tutta DE, così la parte AC alla parte DF; sarà l'auanzo CB [b] all'auanzo FE come tutta AB à tutta DE. Hor essendo AB à DE come AC à DF, inuertendo, DE ad AB [c] sarà come DF ad AC, ed il restante FE al rimanente CB [d] sarà come *tutta* DE à tutta AB; *fù supposta* DE commensurabile in lunghezza ad *AB*, sarà DF [e] commensurabile *in* lunghezza ad AC, e sarà FE *commensurabile* in lunghezza à CB: e perche *i* nomi AC, CB del *Binomio* AB, [f] sono Rationali, le rette ancora DF, FE, [g] che gli sono commensurabili, sono Rationali. Di nuouo perche AC à DF è come *AB à DE*, ed è AB à DE



a 12. del 6.
b 19. del 5.
c Coroll. alla 4. del 5.
d 19. del 5.
e 10. del 10.
f 37. del 10.
g 6. defin. del 10.

come

come CB ad FE, sarà h AC à DF come CB ad FE; e permutando, AC à CB K sarà come DF ad FE: mà le due AC, CB sono commensurabili solamente in potenza, le due DF, FE l saranno ancora commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa le due DF, FE m sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 37. propositione di questo, la retta DE sarà Binomio. Dico che DE è Binomio del medesimo ordine del Binomio AB.

h 11. del 5.
K 16. del 5.
l 10. del 10.
m 6. defin. del 10.

Perche AC è il maggior nome del Binomio AB, il quadrato di AC superarà il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile, ò incommensurabile in lunghezza ad AC. Sia nel primo luogo commensurabile ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE, ed il quadrato di AC supera il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta cõmensurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propositione di questo, il quadrato di DF superarà il quadrato di FE, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla retta DF: e perche le rette AC, DF sono commensurabili in lunghezza, se AC sarà commensurabile in lunghezza à qualche esposta Rationale, in modo, che AB sia primo Binomio, sarà ancora DF n commensurabile in lunghezza alla medesima Rationale, e per la prima delle seconde definitioni di questo, la retta DE sarà primo Binomio, e perciò del medesimo ordine del Binomio AB. Sia poi CB commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, in modo, che AB sia secondo Binomio. Perche FE è commensurabile in lunghezza à CB, sarà FE o commensurabile in lunghezza alla medesima Rationale, e per la definitione del secondo Binomio, sarà la retta DE secondo Binomio, cioè del medesimo ordine del Binomio AB. Se finalmente ne AC, ne meno CB, è commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, in modo, che AB sia terzo Binomio, essendo le due DF, FE commensurabili in lunghezza alle due AC, CB, nessuna delle due DF, FE p sarà commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, e per la terza delle antecedenti definitioni, la retta DE sarà terzo Binomio, cioè sarà del medesimo ordine del Binomio AB.

n 12. del 10.
o 12. del 10.
p 12. del 10.

In oltre se il quadrato di AC supera il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla retta AC, il quadrato di DF superarà il quadrato di FE, q per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza alla retta DF; e, procedendosi nel medesimo modo di prima, si proverà, che DE è Binomio quarto, ò quinto, ò sesto, secondo che AB sarà quarto, ò quinto, ò sesto Binomio. Per la qual cosa la retta, commensurabile in lunghezza al Binomio, è Binomio del medesimo ordine, come fù proposto dimostrare.

q 15. del 10.

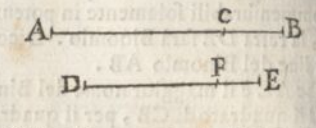
THEOREMA L. PROPOSITIONE LXVIII.

Quella retta, ch'è commensurabile in lunghezza alla bimediale, è ancor essa Bimediale, & è del medesimo ordine.

Sia AB qualunque delle Bimediali, diuisa ne i suoi nomi AC, CB, ed

il

il maggior nome sia AC; e sia DE commensurabile in lunghezza ad AB. Dico che la retta DE è ancora Bimediale, ed è del medesimo ordine della Bimediale AB. Si faccia si come tutta AB à tutta DE, [a] così la parte AC alla parte DF, ed, inuertendo, sarà tutta DE à tutta AB [b] come la parte DF alla parte AC; dal che il restante FE al rimanente CB [c] sarà come tutta DE à tutta AB, cioè come DF ad AC: ma DE è posta commensurabile in lunghezza ad AB; sarà FE [d] commensurabile in in lunghezza à CB: ed ancora DF sarà commensurabile in lunghezza ad AC; ma le due AC, CB, sono medie, saranno le due DF, FE, [e] che gli sono commensurabili, ancora Medie. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, permutando, AC à CB [f] sarà come DF ad FE: ma le due AC, CB [g] sono commensurabili solamente in potenza, saranno ancora le due DF, FE, [h] commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa le rette DF, FE, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, e per la 38. propositione di questo, la retta DE è quella, che si chiama Bimediale. Dico che la Bimediale DE è del medesimo ordine della Bimediale AB. Prese le due AC, CB, come basi di due rettangoli, de' quali AC sia altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [K] come la base AC alla base CB. E nell'istesso modo si proverà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, [l] è come DF ad FE; ma AC à CB è come DF ad FE, sarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [m] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e, permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [n] è come il rettangolo delle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE; ma il quadrato di AC [o] è commensurabile al quadrato di DF (stante che le rette AC, DF sono commensurabili in lunghezza) sarà il rettangolo delle due AC, CB, [p] commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, in modo, che AB sia prima Bimediale; sarà il rettangolo delle due DF, FE, [q] Rationale, e la retta DE [r] sarà prima Bimediale, cioè del medesimo ordine della Bimediale AB. Se poi il rettangolo delle due AC, CB, sarà Medio, in modo, che la retta AB sia seconda Bimediale, sarà il rettangolo delle due DF, FE, [t] Medio, e la retta DE [u] sarà seconda Bimediale, cioè del medesimo ordine della Bimediale AB, ch'era da dimostrarsi.



a 12. del 6.
b Coroll. alla 4. del 5.
c 19. del 5.
d 10. del 10.
e 24. del 10.
f 16. del 5.
g 38. del 10.
h 10. del 10.
K 1. del 6.
l 1. del 6.
m 11. del 5.
n 16. del 10.
o 9. del 10.
p 10. del 10.
q Lem. dopo la 19. del 10.
r 18. del 10.
t 24. del 10.
u 39. del 10.

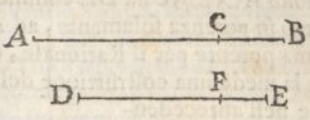
THEOREMA LI. PROPOSITIONE LXIX.

La retta, commensurabile alla Maggiore, è Maggiore.

Sia quella retta, che chiamiamo Maggiore, AB, diuisa ne i suoi nomi AC, CB; e sia la retta DE commensurabile ab AB, ò in lunghezza, ò

poten-

potenza, ouero in potenza ſolamente. Dico che DE ancor eſſa è Maggiore. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che AC à DF, e che CB ad FE, è come AB à DE. Perche DE è commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente, ad AB, [a] ſarà DF commenſurabile nell'iſteſſo modo ad AC, come ancora la retta FE à CB. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, il quadrato di AC [b] al quadrato di DF ſarà come il quadrato di CB al quadrato di FE, e per la 12. del 5. l'aggregato de i quadrati di AC, CB, all'aggregato de i quadrati di DF, FE, è come il quadrato di CB al quadrato di FE: ma il quadrato di CB è commenſurabile al quadrato di FE; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [c] commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [d] è Rationale (ſtante che le rette AC, CB ſono i nomi, che compongono la maggiore AB) in conſeguenza l'aggregato de i quadrati di DF, FE [e] ſarà Rationale.



a 10. del 10.
b 22. del 6.
c 10. del 10.
d 40. del 10.
e 9. defin. del 10.

Preſe AC, CB come baſi di due rettangoli, de'quali AC ſia l'altezza commune, ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [f] come la baſe AC alla baſe CB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, è come DF ad FE: ma DF ad FE è come AC à CB, ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE: e permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [h] ſarà come il rettangolo delle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commenſurabile al quadrato di DF [K] (ſtante che AC, & DF ſono ſtate dimoſtrate commenſurabili in lunghezza, e potenza, ò al meno in potenza) ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, [l] commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche il rettangolo delle due AC, CB, [m] per la natura della maggiore AB, è Medio; ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [n] che gli è commenſurabile, Medio. Di nuouo, perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB ſono incommenſurabili in potenza [o] (ſtante che compongono la maggiore AB) ſaranno le due DF, FE, [p] incommenſurabili in potenza. Hor eſſendo le due DF, FE, incommenſurabili in potenza, e l'aggregato de i loro quadrati, per quel che ſi è dimoſtrato, è Rationale, il rettangolo ancora, contenuto dalle medeſime DF, FE, è Medio; per la 40. di queſto, tutta la retta DE ſarà quella, che ſi chiama Maggiore, come fù propoſto dimoſtrare.

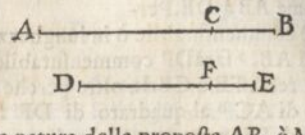
f 1. del 6.
g 11. del 5.
h 16. del 5.
K 9. del 10.
l 10. del 10.
m 40. del 10
n 24. del 10.
o 40. del 10.
p 10. del 10.

THEOREMA LII. PROPOSITIONE LXX.

La retta, commenſurabile alla potente per il Rationale, e Medio, è ancor eſſa potente per il Rationale, e Medio.

Sia AB la retta potente per il Rationale, e Medio, la quale sia diuisa ne i suoi nomi AC, CB, e sia DE commensurabile ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente, ad AB. Dico che DE sarà quella, che si chiama potente per il Rationale, e Medio.

Si faccia la medesima costruttione dell'altre antecedenti, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE: ma l'aggregato



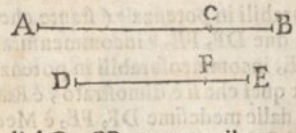
a 41.del 10. b 24.del 10. de i quadrati di AC, CB, [a] per la natura della proposta AB, è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di DF, FE, [b] che gli è commensurabile, Medio. Similmente si dimostri, come nell'antecedente propositione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo contenuto dalle due DF, FE: ma il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, sarà il rettangolo delle due DF, FE, [c] che gli è commensurabile, Rationale. Finalmente si dimostri, come nell'antecedente, che le rette DF, FE sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le due DF, FE, incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Medio; e contengono vn rettangolo Rationale, e per la 41. propos. di questo, sarà la retta DE potente per il Rationale, e Medio, il che era da dimostrarsi.

c lem.'dopo la 19.del 10.

THEOREMA LIII. PROPOSITIONE LXXI.

La retta, commensurabile alla potente per due Medij, è ancor essa potente per due Medij.

Sia la potente per due Medij AB, diuisa ne i suoi nomi AC, CB, e sia DE commensurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza solamente ad AB. Dico che DE è potente per due Medij. Si dimostri come nella 69. propositione, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE, e che il rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, è commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche



a 42.del 10. b 24.del 10. c 42.del 10. tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto il rettangolo delle rette AC, CB, [a] (per la natura della linea AB) è Medio; sarà tanto l'aggregato de i quadrati di DF, FE, quanto il rettangolo, contenuto dalle medesime DF, FE, [b] Medio; e sarà, come nell'antecedente propositione fù dimostrato, DF incommensurabile in potenza. Finalmente, essendo AB, per ipotesi, la retta potente per due Medij, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sarà [c] incommensurabile al rettangolo, contenuto dalle rette AC, CB: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è dimostrato

com-

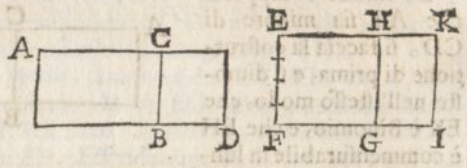
commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; sarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [d] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo di AC, CB, è dimostrato commensurabile al rettangolo delle due DF, FE; sarà l'aggregato de i quadrati delle due DF,FE, incommensurabile al rettangolo delle medesime DF, FE. Per la qual cosa le rette DF, FE sono incommensurabili in potenza; l'aggregato de i quadrati di DF,FE,per quel che si è dimostrato,è Medio;come ancora il rettangolo, contenuto dalle medesime DF, FE, è Medio, ed è incommensurabile all'aggregato de i quadrati DF,FE;e,per la 42.propositione di questo, la retta DE sarà quella, che si chiama potente per due Medij, ch'era da dimostrarsi.

[d] 13.del 10.

[e] 13. del 10.

THEOREMA LIV. PROPOSITIONE LXXII.

La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato dello spatio Rationale, col Medio; ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio.



Sia il rettangolo Rationale AB, al quale sia aggiunto il Medio CD. Dico che la retta,il di cui quadrato è vguale allo spatio AD, ò è Binomio, ò prima Bimediale, ò Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio. Perche AB è Rationale, e lo spatio CD è Medio, sarà AB, ò maggiore, ò minore di CD; perche se fossero vguali sarebbero commensurabili, ed in tal caso ò ambidue sarebbero Rationali, ò pure ambidue Medij,ch'è contro all'ipotesi; non dunque AB è vguale à CD. Supposto prima che AB sia maggiore di CD. Si esponga qualunque Rationale EF, alla quale [a] si applichi il rettangolo EG, vguale al Rationale AB; sarà HG vguale ad EF, e perciò HG sarà Rationale. Si applichi ad HG [b] il rettangolo HI,vguale al Medio CD; sarà HI Medio, ed il rettangolo EG,ch'è vguale al Rationale AB, sarà Rationale: per la qual cosa i due EG, HI, saranno incommensurabili; perche se fossero commensurabili, sarebbero ò tutti due Rationali, ò tutti due Medij. In oltre, essendo alla Rationale EF applicato il Rationale EG, l'altro lato EH [c] sarà Rationale, e sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente essendo alla Rationale HG applicato il Medio HI, l'altro lato HK sarà Rationale, [d] ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF; fù dimostrata EH commensurabile in lunghezza alla medesima EF, saranno le due EH, HK, [e] incommensurabili in lunghezza: ma, per quel che si è dimostrato, sono Rationali, in conseguenza le rette EH,HK sono Rationali, è commensurabili solamente in potenza; per la qual cosa tutta la

[a] 45.del 10.

[b] 45.del 11.

[c] 21.del 10.

[d] 23.del 10.

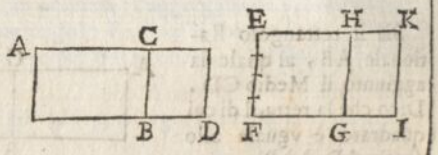
[e] 13.del 10.

f 37. del 1. g 1. del 6.

retta EK f sarà Binomio. E perche lo spatio AB è supposto maggiore di CD, cioè EG maggiore di GK, & EG à GK g è come EH ad HK, sarà EH maggiore di HK, e perciò il quadrato del maggior nome EH superarà il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, ò commensurabile, ò incommensurabile in lunghezza al maggior nome EH. Se il quadrato di EH supera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad EH, per la prima delle prossime antecedenti definitioni, sarà EK primo Binomio; e per la 55. propositione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal primo Binomio EK, è irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio: ma il rettangolo EI, per costruttione, è vguale ad AD, percio la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, è irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio. Ma se il quadrato di EH supera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad EH; essendo EH, per quel che si è dimostrato, commensurabile in lunghezza ad EF; sarà EK quarto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quarto Binomio EK,

h 28. del 10.

cioè al rettangolo AD, h sarà irrationale, e sarà quella, che si chiama Maggiore.



Di nuouo, supposto che AB sia minore di CD, si faccia la costruttione di prima, e si dimostri nell'istesso modo, che EK è Binomio, e che EH è commensurabile in lunghezza ad EF. E perche *AB è minore di CD, cioè EG minore di HI; sarà EH minore di HK: per la qual cosa il quadrato di HK sarà maggiore del quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta ò commensurabile, ouero incommensurabile in lunghezza* ad HK. Se il quadrato del maggior nome HK supera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad HK, sarà EK, per la seconda delle precedenti definitioni, secondo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal secondo Binomio EK, ouero vguale ad AD, sarà K irrationale, e sarà quella, che si

K 56. del 10.

chiama prima Bimediale.

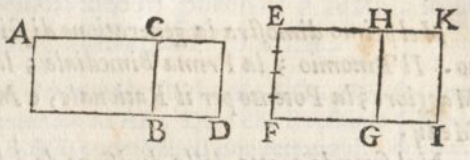
Finalmente se il quadrato di HK supera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome HK, essendo il minor nome EH commensurabile in lunghezza alla Rationale EF, sarà EK quinto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quinto Binomio EK,

l 59. del 10.

cioè vguale ad AD, sarà irrationale; e sarà l quella, che si chiama potente per il Rationale, e Medio. Per la qual cosa la retta, *il di cui* quadrato è vguale al composto dello spatio Rationale, e *Medio*, ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è maggiore, ouero la *potente* per il Rationale, e Medio, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LV. PROPOSITIONE LXXIII.

La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato di due Medij incommenſurabili; ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente di due Medij.



Siano compoſti li due Medij incommenſurabili AB, CD in modo, che facciano il ſolo piano AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale ad AD, ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente per due Medij. Sia eſpoſta la Rationale EF. O il medio AB è maggiore, ouero è minore del Medio CD, non potendo eſſere vguale, ſtante che ſarebbero commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Sia nel primo luogo AB maggiore di CD. Si faccia la coſtruttione dell'antecedente propoſitione, ſarà EG maggiore di HI, e la retta EH maggiore di HK: e perche i Medij AB, CD, per ipoteſi, ſono incommenſurabili, ſarà EG incommenſurabile ad HI; mà EG ad HI [a] è come EH ad HK; ſarà EH [b] incommenſurabile in lunghezza ad HK. In oltre perche i due AB, CD ſono Medij, ſaranno i due EG, HI, che gli ſono vguali, ancora Medij. Hor eſſendo i Medij EG, HI applicati alle Rationali EF, HG, gli altri lati EH, HK ſono [c] Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF. Eſſendo dunque le due EH, HK Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 37. propoſitione di queſto, la retta EK ſarà Binomio. Di più eſſendoſi dimoſtrata EH maggiore di HK, il quadrato di EH ſarà maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza alla maggiore EH. Se il quadrato di EH è maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad EH, eſſendo per quel che ſi è dimoſtrato, ambidue i nomi EH, HK incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF; ſarà EK, per la terza delle precedenti definitioni, terzo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF; e dal terzo Binomio EK, cioè vguale al rettangolo AD, [d] ſarà irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama ſeconda Bimediale. Se poi il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile al maggior nome EH; per che i due EH, HK ſono incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF, per la ſeſta delle precedenti definitioni, ſarà EK ſeſto Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal ſeſto Binomio EK, cioè vguale ad AD, ſarà [e] irrationale, e ſarà quella che ſi chiama potente per due Medij.

Finalmente ſe il Medio AB ſarà minore del Medio CD, procedendoſi nell'iſteſſo modo, ſi prouerà ſimilmente, che la retta EK ò è ſecon-

da

a 1. del 6.
b 10. del 10.
c 23. del 10.
d 57. del 10.
e 60. del 10.

da Bimediale, ouero è la potente per due Medij, il che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Sette sono i Senarij, de' quali ha trattato sin quì Euclide.

Nel primo dimostra la generatione di sei linee Irrationali, che sono. Il Binomio; la Prima Bimediale; la Seconda Bimediale; la Maggiore; la Potente per il Rationale, e Medio; e la Potente per due Medij.

Nel secondo tratta della diuisione de i loro nomi, dimostrando che ciascuna si diuide ne i loro nomi in vn sol punto.

Nel terzo spiega il modo da ritrouare il primo, secondo, terzo, quarto, quinto, e sesto Binomio.

Nel quarto dimostra qual differenza sia frà le linee irrationali del primo Senario frà di loro.

Nel quinto, applicando i quadrati delle irrationali del primo Senario alla Rationale, dimostra l'altro lato, che nasce da tale applicatione, quale linea irrationale sia.

Nel sesto dimostra, che ogni retta, commensurabile à ciascuna delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medesima specie di quella, alla quale è commensurabile.

E nel settimo, in due sole propositioni, spiega manifestamente la differenza delle sopradette irrationali.

Essendosi dimostrato nel sesto Senario, che ogni retta, commensurabile in lunghezza à qualunque delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medesima specie di quella, alla quale è commensurabile; e perche ogni retta è commensurabile alla sua parte Aliquota, sarà manifesto, che non solo la metà, mà qualunque parte aliquota dell'irrationale, essendo commensurabile al tutto, sarà irrationale, e della medesima specie del suo tutto.

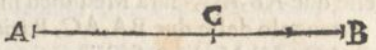
Dopo ch' Euclide hà dimostrato le passioni delle sudette sei linee irrationali generate per compositione, spiega susseguentemente le medesime cose in sei altre linee irrationali, che si generano per sottrattione; il che dimostra in sette altri Senarij, come successiuamente si può vedere.

PRINCIPIO DE' SENARII
PER DETRATTIONE.

THEOREMA LVI. PROPOSITIONE LXXIV.

Se da vna linea Rationale se ne detragga vna Rationale, commensurabile solamente in potenza à tutta, la rimanente sarà Irrationale, e chiamasi Apotome.

Dalla Rationale AB se ne detragga la Rationale AC, che sia commensurabile solamente in potenza ad AB. Dico che il restante CB è irrationale. Prese le rette AB,AC, come basi di due rettangoli, de' quali AB sia altezza commune; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, AC, come AB ad AC: ma AB è incommensurabile in lunghezza ad AC (stante che sono commensurabili solamente in potenza) sarà il quadrato di AB [a] incommensurabile al rettangolo contenuto dalle due BA,AC. In oltre perche AB è commensurabile solamente in potenza ad AC, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB,AC, [b] sarà commensurabile al quadrato di AB: ma il quadrato di AB è dimostrato incommensurabile al rettangolo delle due BA,AC; sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [c] incommensurabile al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. E perche il rettangolo delle due BA,AC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due BA,AC; sarà l'aggregato de i quadrati di AB,AC, [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di più, perche i quadrati delle due BA,AC, [e] sono vguali al doppio rettangolo delle due BA,AC, col quadrato di BC; e si è dimostrato, che i due quadrati di AB,AC, sono incommensurabili al doppio rettangolo delle due BA,AC; i quadrati delle medesime BA, AC, per il Corollario alla 17. propositione di questo, saranno incommensurabili al quadrato di CB: ma l'aggregato de i quadrati di AB,AC, è Rationale (stante che è commensurabile al quadrato della Rationale AB) essendo incommensurabile al quadrato di CB, sarà il quadrato di CB [f] irrationale, ed il suo lato BC [g] sarà irrationale. Si chiami la retta BC Apotome. Se dunque dalla Rationale se ne detrae vna lunghezza Rationale, commensurabile in potenza à tutta, quel che resta è Irrationale, il che era da dimostrarsi.



[a] 10. del 10.
[b] 16. del 10.
[c] 13. del 10.
[d] 13. del 10.
[e] 7. del 2.
[f] 10. defin. del 10.
[g] 11. defin. del 10.

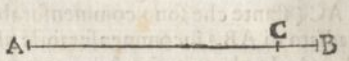
THEOREMA LVII. PROPOSITIONE LXXV.

Se da vna linea Media si detragga vna Media, commensurabile solamente in potenza à tutta, ed il rettangolo

conte-

contenuto da tutta, e dalla detratta sia Rationale; la rimanente sarà Irrationale, e si chiama prima Apotome della Media.

Dalla Media AB ne sia detratta la Media AC, commensurabile solamente in potenza à tutta la Media AB; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, sia Rationale. Dico che il rimanente CB è Irrationale. Perche le rette AB, AC sono commensurabili solamente in potenza, il quadrato di AB sarà commensurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] sarà commensurabile al quadrato di AC. In oltre, perche le rette AB, AC sono Medie, i loro quadrati [b] saranno ancora Medij, e perciò irrationali: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è dimostrato commensurabile al quadrato di AC, ch'è Medio, l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC, [c] sarà Medio, ed in cõseguenza irrationale: fù suppoſto il rettangolo delle due BA, AC, Rationale; l'aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, sarà incommensurabile al rettangolo delle due BA, AC, ch'è Rationale. E perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, [d] è Rationale per essere commensurabile alla sua metà, ch'è Rationale; sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC, incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [e] è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC; sarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, [f] incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Hor se l'aggregato del doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, è incommensurabile alla parte, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; sarà il quadrato di BC [g] incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimostrato Rationale, in conseguenza il quadrato di BC sarà irrationale, ed il suo lato BC sarà irrationale, ch'era da dimostrarsi. Si chiami la retta BC prima Apotome della Media.



a 16. del 10.
b 22. del 10.
c 24. del 10.
d 9. defin. del 10.
e 7. del 2.
f 13. del 10.
g 17. del 10.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIONE LXXVI.

Se da vna linea Media se ne detragga vna Media, commensurabile solamente in potenza à tutta, ed il rettangolo, contenuto da tutta, e dalla media detratta, sia Medio; la rimanente sarà irrationale, e si chiama seconda Apotome della media.

Dalla Media AB ne sia detratta la media AC, commensurabile solamente in potenza à tutta AB, ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, sia Medio. Dico che la rimanente CB sarà irrationale.

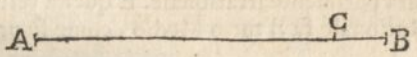
rationale. Perche le rette AB, AC sono commensurabili in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di AC; e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] sarà commẽsurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di AB: mà i quadrati di AB, AC sono Medij (stante che le rette AB, AC sono suppoſte Medie) sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] ch'è commensurabile ad ogn'vno di loro, Medio. In oltre perche il rettangolo delle due BA, AC, per ipoteſi, è Medio; sarà il suo doppio, cioè il doppio rettangolo di BA, AC, [c] che gli è commensurabile, Medio. E perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, [d] col quadrato di BC; l'aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, superarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, ch'è dimoſtrato Medio, per il quadrato di BC: ma il Medio non supera il Medio [e] per spatio Rationale; non sarà dunque il quadrato di BC Rationale. Per la qual cosa il quadrato di BC è irrationale, ed il lato BC è similmente irrationale, come fù propoſto dimoſtrare. Si chiami la retta BC seconda Apotome della Media.

a 16. del 10.
b 24. del 10.
c 24. del 10.
d 7. del 2.
e 27. del 10.

THEOREMA LIX. PROPOSITIONE LXXVII.

Se da vna retta linea se ne detragga vna retta linea, incommensurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, sia Rationale; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime sia Medio; la rimanente sarà irrationale, e si chiamerà Minore.

Dalla retta AB sia detratta la retta AC, incommensurabile in potenza ad AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC sia Rationale; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime BA, AC sia Medio.



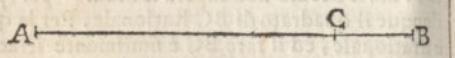
Dico che la rimanente CB sarà irrationale. Perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, [a] è irrationale, stante che, per ipoteſi, è Medio; e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Rationale; l'aggregato dunque de i quadrati di AB, AC sarà incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di nuouo perche l'aggregato de i quadrati, AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC [b] col quadrato di BC; essendo l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC incommensurabile alla parte, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; il medeſimo aggregato de i quadrati di AB, AC, per il Corollario alla 17. propoſitione di queſto, sarà incommensurabile al rimanente, cioè al quadrato di BC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Rationale; sarà il quadrato di BC [c] irrationale, e la retta BC sarà ancora irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. La retta BC sarà quella, che si chiamerà Minore.

a 24. del 10.
b 7. del 2.
c 10. defin. del 10.

THEOREMA LX. PROPOSITIONE LXXVIII.

Se dalla retta linea se ne detrae vna retta linea, incommensurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, sia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Rationale; la rimanente sarà irrationale, e si dirà esser quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dalla retta AB se ne detragga la retta AC, incommensurabile in potenza à tutta AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AB, AC sia Medio; ed il doppio rettangolo contenuto dalle medesime BA, AC sia Rationale. Dico che la rimanente BC sarà irrationale. Perche il doppio rettangolo, contenuto dalle due BA, AC, è rationale, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipotesi, è Medio, e perciò irrationale, sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC [a] incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC col quadrato di BC; sarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, incommensurabile al rettangolo delle due BA, AC. Per la qual cosa il doppio rettangolo delle due BA, AC [c] sarà incommensurabile al quadrato di BC. E perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimostrato Rationale; il quadrato dunque di BC [d] sarà irrationale, ed il lato BC sarà parimente irrationale. E questa retta BC si dirà esser quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.



a 10. de fin. del 10.
b 7. del 2.
c 17. del 10.
d 10. defin. del 10.

THEOREMA LXI. PROPOSITIONE LXXIX.

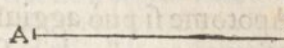
Se dalla retta linea se ne detragga vna retta linea incommensurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta sia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, sia ancora Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati; la rimanente sarà irrationale, e si dirà esser quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dalla retta AB se ne detragga la retta AC, incommensurabile in potenza à tutta AB, in modo, che il composto de i quadrati di AB, AC sia Medio, ed il doppio rettangolo contenuto dalle medesime BA, AC sia

Medio,

Medio, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, AC. Dico che la rimanente CB sarà irrationale.

Perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] è vguale al doppio rettãgolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di BC; il medesimo aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, superarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, che similmente è Medio, per la quantità del quadrato di BC: mà il Medio [b] non supera il Medio per lo spatio Rationale, in conseguenza il quadrato di BC non è Rationale; mà ben si irrationale, ed il suo lato sarà parimente irrationale, come fù proposto dimostrare. La retta linea BC si chiamerà quella, che col Medio fà il tutto Medio.



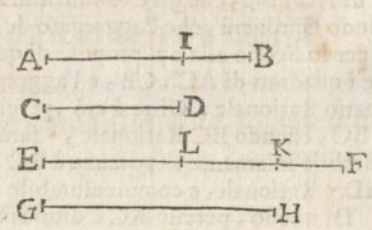
a 7. del 2.

b 27. del 10

LEMMA.

Se saranno quattro quantità, e la differenza frà la prima, e seconda, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta; sarà ancora la differenza frà la prima, e terza, vguale alla differenza frà la seconda, e quarta.

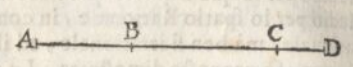
Siano le quattro grandezze AB, CD, EF, GH; e sia IB la differenza frà AB, & CD, e la differenza frà EF, & GH sia KF. Dico che se IB è vguale à KF, la differenza ancora frà AB, & EF, sarà vguale alla differenza frà CD, & GH. Si prenda la differenza frà EK, & AI, che sia LK, sarà EL vguale ad AI; alle vguali EL, AI, s'aggiungano le vguali KF, IB; sarà tutta AB vguale ad EL, insieme con KF; dal che la differenza frà EF, & AB sarà LK: mà, per costruttione, LK è la differenza frà EK, & AI; la differenza dunque frà EF, & AB, è vguale alla differenza frà EK, & AI. In oltre perche IB è la differenza di quanto AB supera CD, sarà AI vguale à CD. Similmente perche KF è la differenza di quanto EF supera GH, sarà EK vguale à GH. Hor essendo AI vguale à CD, ed è ancora EK vguale à GH; la differenza frà EK, & AI sarà vguale alla differenza frà GH, & CD; mà, per quel che si è dimostrato, la differenza frà EK, & AI, è vguale alla differenza frà EF, & AB; sarà la differenza frà EF, & AB, vguale alla differenza frà GH, & CD, come fù proposto dimostrare.



THEOREMA LXII. PROPOSITIONE LXXX.

All'Apotome si può aggiungere vna sola linea Rationale, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta.

Sia l'Apotome AB, alla quale sia aggionta la Rationale BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC.



Dico che non si può aggiungere ad AB altra retta Rationale, come, per esempio BD, che sia commensurabile solamente in potenza ad AD. Sia aggiunta, s'è possibile, la Rationale BD, commensurabile solamente in potenza ad AD. Perche le due AC,CB, per ipotesi, sono commensurabili solamente in potenza, il quadrato di AC sarà commensurabile al quadrato di BC; dal che l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [a] sarà commensurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Rationale, stante che BC, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di AC, BC, che gli è commensurabile, [b] sara Rationale. Nell'istesso modo si proverà, che l'aggregato de i quadrati di AD,DB, è Rationale, e per lo Scolio alla 27. propos. di questo, *la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB*, sarà spatio Rationale. Oltre à ciò, perche AC è commensurabile in potenza à BC, essendo BC Rationale, [c] sarà ancora AC Rationale, e commensurabile solamente in potenza à BC. *Nell'istessa maniera si proverà, che* AD è Rationale, e commensurabile *solamente in potenza à BD*.

a 16. del 10.

b 9. defin. del 10.

c 6. defin. del 10.

Di nuouo, perche AC è diuisa in B, i quadrati delle due AC, CB, [d] *sono vguali al doppio rettangolo delle due*, AC,CB, col quadrato di AB; *dal che l'aggregato de i quadrati di* AC, CB, supera il doppio rettangolo delle due AC, CB, per il quadrato di AB. Similmente la retta AD è diuisa in B, [e] i quadrati delle due AD,DB sono vguali al doppio rettangolo delle due AD,DB, col quadrato di AB, e perciò l'aggregato de i quadrati delle due AD, DB, supera il doppio rettangolo delle medesime AD,DB, per il quadrato di AB; per la qual cosa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC,CB, & il doppio rettangolo delle due AC,CB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AD, DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD,DB. Si considerino quattro quantità, la prima sia l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB; la seconda sia il doppio rettangolo delle medesime AC, CB; la terza sia l'aggregato de i quadrati di AD, DB; e la quarta il doppio rettangolo delle due AD,DB. E perche si è dimostrato, che la differenza frà la prima, e seconda, cioè frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD, DB; per il Lemma antecedente, la differenza

d 7. del 2.

e 7. del 2.

renza frà la prima, e terza, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AC,CB, e l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB,sarà vguale alla differenza frà la seconda, e quarta, cioè frà il doppio rettangolo delle due AC,CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB: ma la differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD,& DB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; la differenza dunque frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB, sarà Rationale.

Finalmente, perche le due AC, CB, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, [f] sarà Medio,& il doppio rettãgolo delle due AC,CB,che gli è commensurabile, sarà ancora Medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, è Medio. E perche il Medio non supera il Medio [g] per spatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ch'è Medio, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, che parimente è Medio, non sarà Rationale: ma questa differenza fù dimostrata Rationale, sarebbe, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque all'Apotome AB si può aggiungere altra Rationale BD, commensurabile solamente in potenza alla composta AD, fuor che la sola Rationale BC, ch'era da dimostrarsi.

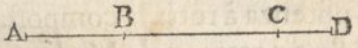
f 22.del 10.

g 27.del 10.

THEOREMA LXIII. PROPOSITIONE LXXXI.

Alla prima Apotome della Media vna sola linea Media si può aggiungere, che sia commensurabile solamente in potenza alla composta, e che contenga con la composta vn rettangolo Rationale.

Sia AB la prima Apotome della Media, alla quale sia aggiunta la Media BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC, e che il rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta BC, sia Rationale. Dico che non è possibile aggiungerui altra Media, come BD, commensurabile solamente in potenza à tutta AD; e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, sia Rationale. Sia aggiunta, s'è possibile, qualche Media BD, commensurabile solamente in potenza ad AD, e che il rettangolo delle due AD,DB, sia Rationale. Perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale, il doppio rettangolo delle medesime AC,CB, che gli è commensurabile, [a] sarà Rationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: per la qual cosa la differenza frà il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, [b] sarà Rationale. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati



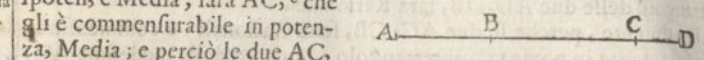
a 9. defin. del 10.

b Scol. alla 27. del 10.

di AC,

di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB; e perche la differenza di questi due doppij rettangoli è ſtata dimoſtrata Rationale, ſarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale.

Di nuouo, perche BC, per ipoteſi, è Media; ſarà AC, [c] che gli è commenſurabile *in* potenza, Media; e perciò le due AC, BC ſono Medie commenſurabili ſolamente *in* potenza: per la qual coſa i loro quadrati ſono Medij frà di loro commenſurabili. Hor eſſendo il quadrato di AC commenſurabile al quadrato di BC, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [d] ſarà commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Medio, ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [e] Medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Medio; e perche il Medio non ſupera il Medio [f] per ſpatio Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, non ſarà Rationale: ma l'iſteſſa differenza fù dimoſtrata Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla Media AB ſi può aggiungere altra Media, fuor che la Media BC, che ſia commenſurabile ſolamente *in* potenza al tutto, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta ſia Rationale, come fù propoſto dimoſtrare.



c Corol. alla 24. del 10.

d 26. del 10.

e 24. del 10.

f 27. d el 10.

THEOREMA LXIV. PROPOSITIONE LXXXII.

Alla ſeconda Apotome della Media vna ſola linea Media ſi può aggiungere, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che contenga con la compoſta vn rettangolo Medio.

Sia AB la ſeconda Apotome della Media, alla quale ſia aggiunta la Media BC, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta AC, ed il rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta CB, ſia Medio. Dico che non è poſſibile aggiungere altra Media ad AB, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta, ſia Medio. S'aggiunga, s'è poſſibile, ad AB qualche altra Media BD, commenſurabile ſolamente in potenza ad AD, e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, ſia Medio.

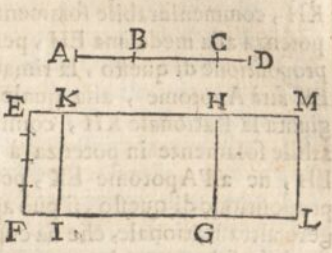
Si eſponga la Rationale EF, alla quale ſi applichi *il rettangolo* EG, [a] vguale all'aggregato de' quadrati di AC, CB; ed *alla medeſima* EF ſi applichi il rettangolo EI, vguale al quadrato di AB, e ſi applichi ancora il rettangolo EL [b] vguale all'aggregato de i quadrati delle due AD,

a 45. del 1.

b 45. del 1.

DB.

DB. Perche i quadrati delle due AC, BC sono vguali al doppio rettangolo delle medesime AC, BC, [c] col quadrato di AB, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per costruttione, è vguale al rettangolo EG; sarà il rettangolo EG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB, col quadrato di AB; se ne leuino gli vguali, cioè il rettangolo EI, ed il quadrato di AB, resta il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo KL è vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre perche BC, per ipotesi, è Media, sarà AC, [d] che gli è commensurabile in potenza, Media; e perciò le due AC, BC sono medie commensurabili solamente in potenza, per la qual cosa i loro quadrati saranno ancora Medij frà di loro commensurabili. Hor essendo i quadrati di AC, CB, commensurabili, il loro aggregato [e] sarà commensurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, BC sono Medij, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, che à loro è commensurabile, [f] sarà ancora Medio; ed il rettangolo EG, ch'è vguale al detto aggregato, sarà parimente Medio, il quale applicato alla Rationale EF farà l'altro lato EH [g] Rationale, & incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente essendo il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, che gli è commensurabile, [h] sarà ancora Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è dimostrato vguale al rettangolo KG; il rettangolo dunque KG sarà Medio, che applicato alla Rationale KI, ouero EF farà il lato KH [K] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale KI; ouero EF. In oltre, perche il quadrato di AC, per ipotesi, è commensurabile al quadrato di CB, sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [l] commensurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di CB. Si prendano le rette AC, CB, come basi di due rettangoli, e sia AC altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [m] come la base AC alla base CB: ma AC, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza à CB sarà il quadrato di AC [n] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB: ma il quadrato di AC è dimostrato commensurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB, l'aggregato dunque de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EG, [o] sarà incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il doppio rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo delle medesime AC, CB; sarà il rettangolo EG [p] incommensurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB: fù dimostrato il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo KG; sarà il rettangolo EG incommensurabile al rettangolo KG. Finalmente perche i rettangoli [q] EG, KG sono come le basi EH, KH; ed i rettangoli EG, KG sono incommensurabili; sarà EH [r] incommen-



c 7.del 2.

d 24.del 10.

e 16.del 10.

f Coroll.alla 24.del 10.

g 23.del 10.

h Coroll.al la 24.del 10.

K 23.del 10.

l 16.del 10.

m 1.del 6.

n 10. del 10.

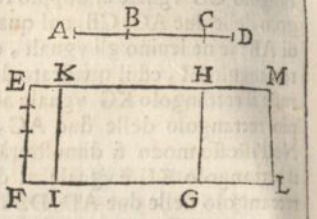
o 13.del 10.

p 13.del 10.

q 1. del 6.

r 10. del 10.

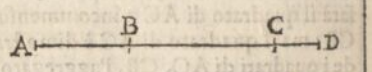
mensurabile in lunghezza à KH: mà furono mostrate Rationali, in conseguenza le rette EH, KH sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH se ne detrae la Rationale KH, commensurabile solamente in potenza alla medesima EH, per la 74 propositione di questo, la rimanente EK sarà Apotome, alla quale è aggiunta la Rationale KH, commensurabile solamente in potenza à tutta EH, ne all'Apotome EK, per l'80. propositione di questo, si può aggiungere altra Rationale, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, fuor che KH. Nell'istesso modo si proverà, che EK è Apotome, e che KM è Rationale, e commensurabile in potenza à tutta EM, che è contro à quel che si è dimostrato, mentre nessun' altra Rationale si può aggiungere ad EK, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, fuor che la Rationale KH. Non dunque alla seconda Apotome della media, notata AB, si può aggiungere altra media, commensurabile solamente in potenza à tutta, e che il rettangolo di tutta e dell'aggiunta sia Rationale, fuor che la media BC, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA LXV. PROPOSITIONE LXXXIII.

Alla minore vna sola retta linea si può aggiungere incommensurabile in potenza à tutta la composta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta la composta, e dell'aggiunta, sia Rationale; e che il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Medio.

Sia la minore AB, alla quale sia aggiunta la retta BC, incommensurabile in potenza à tutta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB sia Rationale, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio. Dico che nessun' altra retta si può aggiungere ad AB, secondo le proposte conditioni. Sia, se è possibile, aggiunta ad AB qualche altra retta BD, che sia incommensurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB sia Rationale, e che il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AD, DB sia Medio. Si dimostri, come si fece nella propositione 80. di questo, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB ed il doppio rettangolo

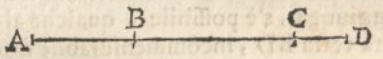


golo delle due AD, DB: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Rationale (ſtante che l'vno, e l'altro aggregato è Rationale) ſarà la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto il doppio rettangolo delle due AC, CB, quanto il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio, non potendo il Medio [a] ſuperare il Medio per ſpatio Rationale; ne meno la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: fù dimoſtrata la medeſima differenza eſſere Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla minore AB ſi può aggiungere altra retta BD, incommenſurabile in potenza à tutta AD, in modo, che l'aggregato de i loro quadrati ſia Rationale, e che contengano vn rettangolo Medio, fuor che la retta BC, ch'era da dimoſtrarſi. [a] 27.del 10.

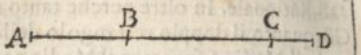
THEOREMA LXVI. PROPOSITIONE LXXXIV.

A quella linea, che col Rationale fà il tutto Medio, vna ſola retta linea ſi può aggiungere, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta ſia Rationale.

Sia AB la retta linea, che col Rationale fà il tutto Medio, alla quale ſia aggiunta la retta BC, incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB ſia Rationale. Dico che non ſi può aggiungere ad AB altra retta, ſecondo le propoſte conditioni. S'aggiunga, s'è poſſibile, ad AB vn'altra retta, come DB, incommenſurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AD, DB ſia Rationale. Si dimoſtri, come ſi fece nell'80. propoſitione di queſto, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB. Perche la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale (ſtante che l'vno, e l'altro doppio rettangolo è ſuppoſto Rationale) ſarà la differẽza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto l'aggregato de i quadrati di AD, DB, per ipoteſi, è Medio, ed il Medio non ſupera il Medio [a] a 27. del 10.



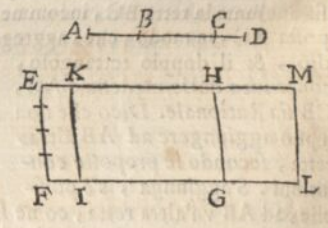
per ſpatio Rationale, ne meno la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſarà Rationale: mà la medeſima differenza fù dimoſtrata Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla retta AB ſi può aggiungere altra retta, ſecondo le ſopra poſte conditioni, fuor che la retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA LXVII. PROPOSITIONE LXXXV.

A quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, vna ſola retta linea ſi può aggiungere incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i detti quadrati.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, alla quale ſia aggiunta la retta BC, incommenſurabile *in potenza à tutta la compoſta* AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB. *Dico che non ſi può aggiungere ad AB altra retta, ſecondo le medeſime conditioni. Si aggiunga, s'è poſſibile, qualche altra retta BD, incommenſurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AD, DB, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AD, DB.* Sia fatta la medeſima coſtruttione dell'82. propoſitione. Perche l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è Medio, il rettangolo EG, che gli è vguale, ſarà ancora Medio, il quale, applicato alla Rationale EF, fà l'altro lato EH [a] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, BC, per ipoteſi, è Medio, ed è vguale, per quel che fù dimoſtrato nel 82. propoſitione, *al* rettangolo KG; ſarà il rettangolo KG Medio, il quale applicato *alla* Rationale KI, ouero EF, fà l'altro lato KH [b] Rationale, ed *incommenſurabile* in lunghezza alla Rationale KI, ouero EF. E perche *il doppio* rettangolo del-



a 23. del 10.

b 23. del 10.

le

le due AC, CB, è ſuppoſto incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſarà il rettangolo KG incommenſurabile al rettangolo EG: ma il rettangolo KG al rettangolo EG [c] è come KH ad EH; eſſendo i rettangoli KG, EG, incommenſurabili, ſarà la retta KH [d] incommenſurabile in lunghezza alla retta EH: furono moſtrate le rette KH, EH, Rationali, in conſeguenza ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH ſe ne ſottrae la Rationale KH, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta EH, l'auanzo EK [e] ſarà Apotome, e la retta HK ſarà quella Rationale, che, aggiunta all'Apotome EK, è commenſurabile in potenza à tutta EH, ne altra Rationale ſi può aggiungere ad EK, che ſia commenſurabile in potenza à tutta la compoſta. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che EK è Apotome, e che MK è Rationale, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta EM: dal che altra Rationale ſi può aggiungere ad EK, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, che è contro à quello che ſi è dimoſtrato. Non dunque alla retta AB ſi può aggiungere altra retta, ſecondo le conditioni della retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

c 1. del 6.
d 10. del 10.
e 74. del 10.

ANNOTATIONE.

Nelle coſe ſeguenti la retta BC, aggiunta all'Apotome AB, ſecondo le conditioni eſpoſte nelle ſei antecedenti propoſitioni, la chiameremo linea congruente, in modo, che quando ſi dirà l'Apotome con la congruente, ſi douerà intendere tutta la retta AC.

DEFINITIONI TERZE.

Eſpoſta la Rationale, e l'Apotome, ſe il quadrato dell'Apotome, con la congruente, ſupera il quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta linea commenſurabile in lunghezza à tutta la compoſta dell'Apotome, e congruente.

I.

Se la compoſta dell'Apotome, e congruente ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà prima Apotome.

II.

Se la ſola congruente ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi dirà ſeconda Apotome.

III.

E ſe ne tutta la compoſta, ne la ſola congruente, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale; ſi dirà terza Apotome.

Di nuouo ſe il quadrato di tutta la compoſta è maggiore del quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza à tutta la compoſta dell'Apotome, e congruente.

IV.

Se la compoſta dell'Apotome, e congruente, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà quarta Apotome.

V.

Se la ſola congruente è commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà quinta Apotome.

VI.

E ſe ne tutta la compoſta, ne *la ſola congruente è commenſurabile in lunghezza alla Rationale*; ſi dirà ſeſta Apotome.

SCOLIO.

Queſte ſei linee, che ſi chiamano Apotome, prima, ſeconda, terza &c. ſono ſei linee irrationali, che reſtano dalle detrattioni fatte de i minori nomi da quelle ſei linee, che furono chiamate Binomij; cioè il maggior nome d'ogni Binomio, leuatone il minor nome, ſi chiama Apotome.

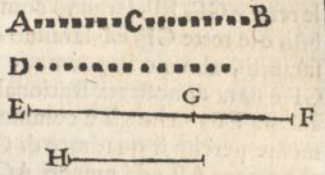
PROBLEMA XIX. PROPOSITIONE LXXXVI.

Ritrouare la prima Apotome.

Per la ſeconda parte al Corollario della 29. propoſitione di queſto, ſi trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non ſia numero quadrato, ſarà la proportione di AB à BC come numero quadrato

drato

drato à numero quadrato; e la proportione di AB ad AC non sarà come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga qualunque Rationale D, e si prenda la retta EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta EF [a] Rationale, e per il Corollario alla 6. propositione di questo, si faccia si come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo prima Apotome. Perche la proportione del quadrato di EF al quadrato di FG, per costruttione, è come il numero AB al numero AC, i quadrati delle due EF, FG [b] saranno commensurabili, e le rette EF, FG, saranno commensurabili, almeno in potenza: ma la retta EF è dimostrata Rationale; sarà la retta FG, che gli è commensurabile in potenza, [c] parimente Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato, e perciò i loro lati EF, FG, [d] sono incommensurabili in lunghezza: furono dimostrate Rationali, e commensurabili in potenza; saranno dunque le rette EF, FG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, il rimanente EG sarà quella, che si chiama Apotome, & FG sarà la sua congruente. Dico che EG è prima Apotome.



a 6. defin. del 10.

b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di FG, ed il rimanente sia il quadrato della retta H; sarà il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Perche AB ad AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuersione della proportione, sarà AB à BC, cioè l'antecedente alla differenza frà l'antecedente, e conseguente, come il quadrato di EF al quadrato di H, cioè come l'antecedente, ch'è il quadrato di EF, alla differenza, ch'è frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Hor essendo il quadrato di EF al quadrato di H come il numero quadrato AB al numero quadrato CB; le due EF, & H [e] sono commensurabili in lunghezza; si che il quadrato di EF, ch'è composta dell'Apotome, e della congruente, supera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza alla composta EF; ed è la composta EF commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la prima delle terze definitioni, la retta EG è quella, che si chiama prima Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 9. del 10.

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE LXXXVII.

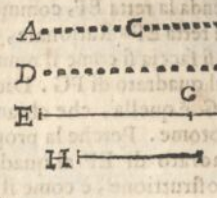
Ritrouare la seconda Apotome.

Si ritrouino due numeri quadrati AB, AC, come si disse nell'antecedente propositione, cioè che la loro differenza AC non sia numero quadrato. Si esponga la Rationale D, e si prenda la retta GF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta GF [a] Rationale: per il

a 6. defin. del 10.

Corol-

Corollario alla 6. propoſitione, ſi faccia ſi come AC ad AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome. Perche il quadrato di FG al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, i quadrati delle rette [b] GF, EF, ſaranno commenſurabili, e le rette GF, EF ſaranno commenſurabili, almeno in potenza; e perche GF è ſtata dimoſtrata Rationale, la retta ancora EF, [c] che gli è commenſurabile in potenza, ſarà Rationale. Similmente perche il quadrato di GF al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, ed i numeri AC, AB, per coſtruttione, non ſono come i numeri quadrati; ne meno il quadrato di FG al quadrato di EF ſarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual coſa le rette GF, EF [d] ſono incommenſurabili in lunghezza; ma furono dimoſtrate Rationali, in conſeguenza le rette GF, EF, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, ſarà la rimanente EG Apotome, la di cui congruente ſarà FG. Dico che EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome. Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di GF, ed il reſtante ſia il quadrato di H. Perche AC ad AB è come il quadrato di GF al quadrato di EF, inuertendo, AB ad AC [e] ſarà come il quadrato di EF al quadrato di FG; e per la conuerſione della proportione, ſarà il numero quadrato AB al numero quadrato BC, [f] come il quadrato di EF al quadrato di H: per la qual coſa le due EF, & H [g] ſono commenſurabili in lunghezza; e perciò il quadrato della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; ed è, per coſtruttione, la congruente GF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la ſeconda delle terze definitioni, la retta EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

e Corol. alla 4. del 5.

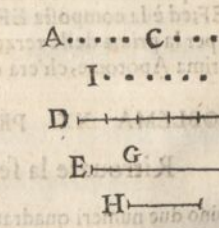
f

g 9. del 10.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIONE LXXXVIII.

Ritrouare la terza Apotome.

Si trouino i due numeri AB, BC, come ſi diſſe nella propoſ. 86; poi ſi troui vn altro numero, per eſempio I, il quale non ſia al numero AB, ne meno al numero AC, come numero quadrato à numero quadrato; il che ſi farà col prendere il numero I vna, ò due vnità maggiore del numero AC, come ſi diſſe nella 51. propoſ. di queſto. Oltre à ciò ſi eſponga qualunque Rationale D, e ſi faccia, per il Corollario alla 6. propoſitione, ſi come il numero I al numero AB, così il quadrato della Rationale D al



qua-

quadrato di EF; saranno i quadrati di D, & EF, [a] commensurabili, e le rette D, & EF saranno commensurabili, almeno in potenza: ma la retta D è posta Rationale, sarà EF, [b] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. E perche il quadrato di D al quadrato di EF è come il numero I al numero AB; e, per costruttione il numero I al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di D al quadrato di EF è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette D, & EF, [c] sono incommensurabili in lunghezza. Di nuouo si faccia si come AB ad AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che EG è la terza Apotome. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, sarà il quadrato di EF commensurabile al quadrato di GF; [d] e perciò le rette EF, FG, sono commensurabili almeno in potenza: e perche EF fù dimostrata Rationale, ancora FG, che gli è commensurabile in potenza, [e] sarà Rationale. Inoltre, essendo il quadrato di EF al quadrato di FG, come AB ad AC; ed i numeri AB, AC, per costruttione, non hanno la proportione de i numeri quadrati; ne meno i quadrati delle due EF, FG, hanno la proportione de i numeri quadrati; e perciò le rette EF, FG, [f] sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, saranno dunque le due EF, FG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propos. di questo, EG sarà Apotome, e la sua congruente sarà GF. Dico che EG è quella, che si chiama terza Apotome.

a 6. del 10.
b 6. d efin: del 10.
c 9. del 10.
d 24. del 10.
e 6. de fin. del 10.
f 9. del 10.

Perche il numero I al numero AB è come il quadrato di D al quadrato di EF; ed il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per l'egualità, sarà il numero I al numero AC, [g] come il quadrato di D al quadrato di GF: ma il numero I al numero AC, per costruttione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di D al quadrato di GF è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa i lati D, & GF, [h] sono incommensurabili in lunghezza. Fù dimostrata EF incommensurabile in lunghezza alla medesima D, in conseguenza nessuna delle due EF, FG è commensurabile in lunghezza alla Rationale D. Dal quadrato di EF se ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente sia il quadrato di H. Si dimostri, come si fece nell'86. propositione di questo, che la retta H è commensurabile in lunghezza ad EF; e sarà il quadrato della composta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza alla composta EF. E perche niuna delle due EF, GF, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la terza delle terze definitioni, la retta EG sarà quella, che si chiama terza Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

g 22. del 5.
h 9. del 10.

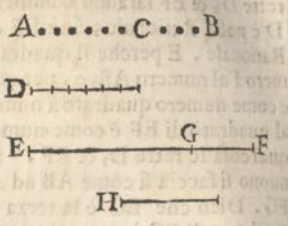
PROBLEMA XXII. PROPOSITIONE LXXXIX.

Ritrouare la quarta Apotome.

Per lo Scolio alla propositione 29. si trouino i due numeri, come AC, CB, in modo, che il loro aggregato AB non sia ad AC, ne meno à CB,

come

come numero quadrato à numero quadrato. Poi si esponga la Rationale D, e si prenda EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per il che EF sarà Rationale; e procedendosi, come si fece nell'86. propositione, si proverà, che EG è Apotome, la di cui congruente sarà GF. Dico che EG è la quarta Apotome. Dal quadrato di EF[a] si detragga il quadrato di GF, ed il rimanente sia il quadrato di H. Essendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuersione della proportione, sarà AB à BC[b] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette EF, ed H[c] sono incommensurabili in lunghezza. Il quadrato dunque della composta EF supera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza alla composta EF; e la composta EF, per costruttione, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la quarta delle terze definitioni, la retta EG sarà quella, che si dice quarta Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



a Lem. dopo la prop. 14.

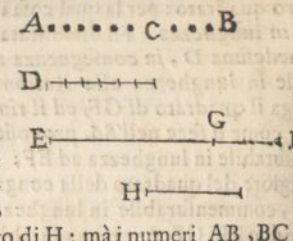
b Corol. alla 19. del 5.

c 9. del 10.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIONE XC.

Ritrouare la quinta Apotome.

Si trouino i due numeri AC, CB, come si fece nell'antecedente propositione; si esponga la Rationale D, e si prenda FG, commensurabile in lunghezza alla Rationale D. Nel resto si proseguisca, come nell'87. propositione, e si dimostri, che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che si dice quinta Apotome. Dal quadrato di EF se ne detragga il quadrato di FG, ed il rimanente sia il quadrato di H. Essendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC[a] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà i numeri AB, BC non hanno la proportione de i numeri quadrati, ne meno i quadrati di EF, ed H, sono come i numeri quadrati; e perciò le rette EF, ed H[b] sono incommensurabili in lunghezza. Per la qual cosa il quadrato della composta EF supera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza alla composta EF; e la congruente GF, per costruttione, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la quinta delle terze definitioni, la retta EG è quella, che si chiama quinta Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



a Corol. alla 19. del 5.

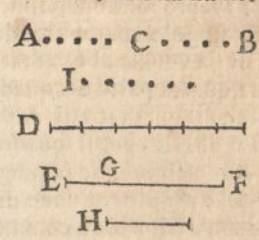
b 9. del 10.

PRO-

PROBLEMA XXIV. PROPOSITIONE XCI.

Ritrouare la seſta Apotome.

Per il Corollario ſecondo all'vltima propoſitione del nono Libro, ſi trouino due numeri come AC, CB, che non ſiano piani ſimili, e niuno ſia numero quadrato; ed il loro compoſto, cioè AB, non ſia numero quadrato, ne à ciaſcuno di loro habbia la proportione di numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB non ſia ad AC, ne meno à BC, come numero quadrato à numero quadrato. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per eſempio I, il quale non hauerà ad AC, ne meno ad AB, la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Si eſponga poi qualunque Rationale D, ed il rimanente ſi faccia come nell'88. propoſitione di queſto; e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le rette D, & EF, ſono incommenſurabili in lunghezza; e che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che ſi chiama ſeſta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella citata 88. propoſitione, che D è incommenſurabile in lunghezza alla retta GF; per la qual coſa neſſuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D: dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H; e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'89. propoſitione, che H è incommenſurabile in lunghezza alla retta EF. Hor eſſendo il quadrato della compoſta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e niuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta EG è ſeſto Binomio, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



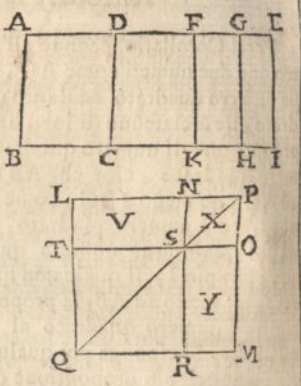
THEOREMA LXVIII. PROPOSITIONE XCII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla prima Apotome, è Apotome.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla prima Apotome AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Apotome. Sia DE la congruente dell'Apotome AD, per la definitione della prima Apotome, le due AE, DE, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e tutta la compoſta AE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato della compoſta AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla medeſima AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F; ſarà il quadrato di DF, ouero di FE,

[a] 10. del 1.

FE, [b] la quarta parte del quadrato di DE; sia poi per il primo Lemma dopo la propositione 17. di questo, applicato ad AE vn rettangolo vguale al quadrato di EF, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, e quel rettangolo sia quello, ch'è contenuto dalle due AG, GE, cioè sia diuisa AE, per il Lemma secondo dopo la citata 17. propositione, talmente in G, che il rettangolo contenuto dalle parti AG, GE *sia vguale al quadrato di FE*, cioè *alla quarta parte del quadrato di D E*. *Perche il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE, per la 18. propositione di questo, le rette AG, GE, sono commensurabili in lunghezza*; dal che tutto l'aggregato AE sarà tanto ad AG, come à GE, [c] cõmensurabile in lunghezza: mà AE è cõmensurabile in lunghezza alla Rationale AB; saranno le due AG, GE [d] commensurabili in lunghezza alla medesima Rationale AB; e perciò le due AG, GE, [e] *sono Rationali*. *Da i punti F, G, E si tirino le rette FK, GH, EI [f] parallele ad AB, le quali cõcorreranno con la retta BC, continuata, come in K, H ed I; saranno le rette FK, GH, EI rationali; stante che ogn'vna è vguale alla Rationale AB*: per la qual cosa *i rettangoli AH, GI, che sono contenuti dalle rationali AG, AB, & EG, GH, commensurabili in lunghezza, sono Rationali*. *In oltre perche DE è commensurabile solamente in potenza ad AE, le due DE, AE saranno incommensurabili in lunghezza*: mà AE è *commensurabile in lunghezza ad AB*; sarà DE [h] incommensurabile in *lunghezza alla medesima AB*. E perche DE è commensurabile alla sua metà FE, ouero DF; sarà FE, ouero DF [K] incommensurabile in lunghezza ad AB: mà le due DF, FE sono rationali, stante che sono commensurabili alla Rationale DE; saranno le due DF, FE Rationali, ed ogn'vna sarà commensurabile solamente in potenza ad AB, ouero FK. Per la qual cosa i due rettangoli DK, FI, che sono contenuti da lati rationali, e commensurabili solamente in potenza, sono [l] Medij.



Si faccia il quadrato LM [m] vguale al rettangolo AH; e si faccia il quadrato NO vguale al rettangolo GI; i quadrati NO, LM, haueranno vn angolo commune, e perciò [n] sono intorno al medesimo diametro PQ. Si continui OS in T, ed il lato NS in R. Perche il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, per costruttione, è vguale al quadrato di FE; sarà FE [o] media proportionale frà le due AG, GE; e sarà AG ad EF come EF ad EG: mà i rettangoli AH, IF, IG sono [p] come le basi AG, FE, EG; essendo le basi AG, FE, GE continue proportionali, saranno i rettangoli AH, FI, GI [q] continui proportionali, ed il rettangolo FI sarà Medio proportionale frà li due rettangoli AH, GI: furono fatti i quadrati LM,

NO

b Scol. alla 4. del 2.
c 16. del 2.
d 12. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 31. del 1.
g 20. del 10.
h 13. del 10.
K 13. del 10.
l 22 del 10.
m 14. del 2.
n 26. del 6.
o 17. del 6.
p 1. del 6.
q 11. del 5.

NO vguali à i rettangoli AH, GI; sarà il rettangolo FI Medio proportionale frà i quadrati LM, NO. E perche il rettangolo LO è Medio proportionale frà i medesimi quadrati LM,NO; in conseguenza il rettangolo LO sarà vguale al rettangolo FI: mà il rettãgolo FI è vguale al rettangolo DK, ed il rettangolo LO è vguale al rettangolo NM; sarà tutto il rettangolo DI vguale allo gnomone VXY,col quadrato di NO:leuatone vgualmente gli vguali,cioè il quadrato di NO,ed il rettangolo GI;resta il rettangolo DH vguale allo gnomone VXY; fù fatto,per costruttione,il rettangolo AH vguale al quadrato LM; sarà il rimanente rettangolo AC vguale al quadrato TR; e perciò il quadrato del lato TS sarà vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella retta, che chiamiamo Apotome.

Perche i rettangoli AH,GI sono dimostrati Rationali, i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno Rationali, & i loro lati LP, NP, cioè TO, SO sono Rationali: In oltre perche il rettangolo FI è dimostrato Medio, il rettangolo LO, che gli è vguale, sarà ancora Medio, e perciò irrationale: ma il quadrato NO è Rationale; i rettangoli LO,NO saranno incommensurabili; e le rette TO, SO, [r] che sono come i rettangoli LO, NO, [f] saranno incommensurabili in lunghezza. Hor essendosi dimostrate le due TO, OS, Rationali, e incommensurabili in lunghezza, saranno le rette TO, SO, Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Si che, detratta dalla Rationale TO la Rationale OS, commensurabile solamente in potenza à tutta OT, la rimanente TS, per la 74. di questo, sarà Apotome, ch'era da dimostrarsi.

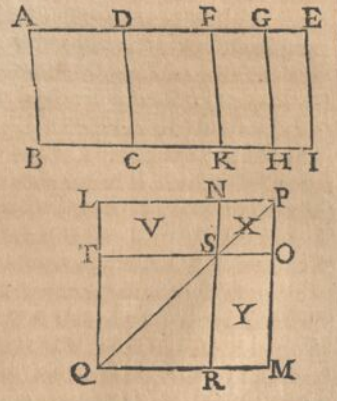
r 1. del 6.

f 10. del 10.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIONE XCIII.

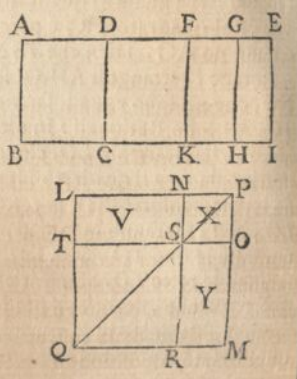
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla seconda Apotome, è la prima Apotome della Media.

Sia il rettangolo AC contenuto dalla Rationale AB, e dalla seconda Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che si chiama prima Apotome della Media. Sia DE la congruente della seconda Apotome AD; per la definitione della seconda Apotome, le rette AE,DE, saranno Rationali, commensurabili solamente in potenza; e la congruente DE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla composta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente della co-



a 10. del 1.

ſtruttione ſi faccia, come nell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le parti AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza; e che tutta AE è commenſurabile in lunghezza tanto ad AG, quanto à GE. Perche la congruente ED, per la natura dell'Apotome, è commenſurabile ſolamente in potenza alla compoſta AE, ſaranno le due AE, DE, incommenſurabili in lunghezza; ma DE è commenſurabile in lunghezza ad AB; ſarà AE [b] incommenſurabile in lunghezza alla medeſima AB; ma AE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza alle due AG, GE; ſaranno le due AG, GE, [c] incommenſurabili in lunghezza alla Rationale AB. E perche le due AG, GE ſono commenſurabili ad AE, ch'è Rationale; ſaranno le due AG, GE [d] Rationali; ed in conſeguenza le due AG, GE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza ad AB. Per la qual coſa i rettangoli AH, GI, contenuti dalle Rationali ſolamente in potenza, [e] ſono Medij. In oltre, perche DE è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà DF, ouero FE, e la medeſima DE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; le due DF, FE, [f] ſaranno commenſurabili in lunghezza alla Rationale AB, ouero FK, *che gli è vguale*; e perciò le due DF, FE, [g] *ſono Rationali; ed i rettangoli DK, FI, che ſono contenuti da linee Rationali, e commenſurabili in lunghezza*, ſono [h] *Rationali. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC.* Dico che TS *è la prima Apotome della Media.*



Perche le rette AG, GE, ſono commenſurabili in lunghezza, i rettangoli AH, GI, [k] che hanno la proportione di AG à GE, ſaranno [l] commenſurabili: ma i rettangoli AH, GI, ſono vguali à i quadrati LM, NO; i medeſimi quadrati LM, NO, ſaranno commenſurabili, ed i loro lati LP, NP, ouero TO, OS, ſono commenſurabili almeno in potenza. Di più perche i rettangoli AH, GI, ſono ſtati dimoſtrati Medij, i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſarannno Medij, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS, ſono Medie, commenſurabili almeno in potenza. Oltre à ciò, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo FI Rationale, e, per quel che ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, è vguale al rettangolo LO; ſarà il rettangolo LO Rationale: ma il quadrato NO è dimoſtrato Medio, ſarà il Rationale LO incommenſurabile all'irrationale NO; ed i lati TO, OS, [m] che ſono come i rettangoli LO, NO, ſaranno [n] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrati i lati TO, OS Medie, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette TO, OS Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono il Rationale LO (ſtante che PO è vguale ad OS) e per la 75. propoſitione, detratta dalla Media OT la

Media

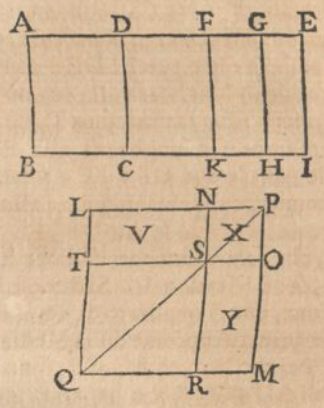
b 13. del 10.
c 13. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 22. del 10.
f 12. del 10
g 6. defini del 10.
h 20. del 10.
K 1. del 6. l 10. del 10.
m 1. del 6. n 10. del 10.

Media OS, commensurabile solamente in potenza ad OT, la rimanente TS sarà la prima Apotome della Media, il che era da dimostrarsi.

THEOREMA LXX. PROPOSITIONE XCIV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla terza Apotome, sarà la seconda Apotome della Media.

Sia il tettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla terza Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, sarà quella, che si chiama seconda Apotome della Media. Sia DE la congruente della terza Apotome AD, per la definitione della terza Apotome, le rette AE, DE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e niuna delle due AE, DE, è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato della composta AE supera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad essa composta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, e si faccia il restante della costruttione, come nella 92. propositione di questo; e, come iui si fece, si dimostri, che le rette AG, GE, sono commensurabili frà loro in lunghezza; dal che l'aggregato AE sarà commensurabile in lunghezza [b] tanto ad AG, quanto ad EG: ma la retta AE, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB: le due dunque AG, GE, [c] sono incommensurabili in lunghezza ad AB. E perche le medesime AG, GE, sono commensurabili ad AE, ch'è Rationale; saranno ancora loro [d] Rationali. Per la qual cosa tanto le due BA, AG, quanto le due BA, GE, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e perciò i rettangoli AH, GI, contenuti da esse, [e] saranno Medij. In oltre perche la Rationale DE è commensurabile in lunghezza alla sua metà DF, ouero FE; e la medesima DE, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza ad AB; le due DF, FE, [f] saranno Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale AB: dal che tanto le due BA, DF, quanto le due BA, FE, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa i rettangoli DK, FI, [g] contenuti da esse, sono Medij. Si dimostri poi, come si fece nella propositione 92. che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la seconda Apotome della Media.



a 10. del 1.
b 16. del 10.
c 14. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 22. del 10.
f 14. del 10.
g 22. del 10.

Perche i rettangoli AH, GI, per quel che si è dimostrato, sono Medij, perciò i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno Medij, ed i lo-

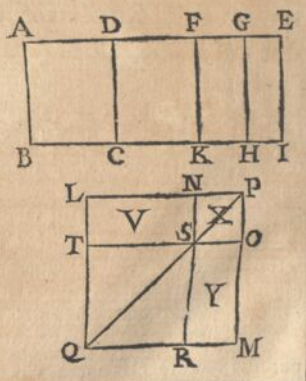
ro lati LP, NP, ouero TO, OS, ſono Medie. Di nuouo, eſſendoſi dimoſtrate le rette AG, GE, commenſurabili in lunghezza, i rettangoli AH, GI, [h] che ſono come AG, à GE, ſaranno [K] commenſurabili, ed i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſono commenſurabili; dal che i lati LP, PN, ouero TO, OS, ſono commenſurabili, almeno in potenza. Oltre à ciò, eſſendo, per ipoteſi, ED commenſurabile ſolamente in potenza ad AE, le due AE, ED, ſaranno incommenſurabili in lunghezza: ma la retta AE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza ad EG, ſarà DE [l] incommenſurabile in lunghezza ad EG: ma DE è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà FE; le due FE, EG, [m] ſaranno incommenſurabili in lunghezza, ed i rettangoli FI, GI, [n] che ſono come le rette FE, GE, ſaranno [o] incommenſurabili. E perche i rettangoli FI, GI, ſono vguali à i rettangoli LO, NO; i rettangoli dunque LO, NO, ſono incommenſurabili, e le rette TO, OS, [p] che ſono come i rettangoli LO, NO, ſaranno [q] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrate Medie, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette TO, OS, Medie, commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo FI eſſer Medio, ſarà il rettangolo LO, che gli è vguale, Medio. Hor eſſendo le due TO, OS, Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono il rettangolo RO Medio, per la 76. propoſ. di queſto, detratta dalla Media OT la Media OS, la rimanente TS ſarà la ſeconda Apotome della Media, ch'era da dimoſtrarſi.

h 1. del 6.
K 10. del 10
l 14. del 10.
m 15. del 10
n 1. del 6.
o 10. del 10.
p 1. del 6.
q 10. del 10.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIONE XCV.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dall'Apotome quarta, è quella, che ſi chiama Minore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quarta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che ſi chiama Minore. Sia DE la congruente della quarta Apotome AD, per la definitione della quarta Apotome, le rette AE, DE, ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e la retta AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato di AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza all'iſteſſa AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ſi applichi ad AE il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, vguale al quadrato di FE, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di DE, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; e da tale applicatione ſia diuiſa



a 1. del 10.

la retta AE in G; perche il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla medesima AE, per la 19. propositione di questo, le parti AG, GE, sono incommensurabili in lunghezza. Il restante della costruttione si faccia come nella 92. propositione di questo. Perche AE, per la natura della quarta Apotome, è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, il rettangolo AI, contenuto da esse, [b] sarà Rationale. Similmente, essendo DE, per l'istessa ragione, Rationale, ed è incommensurabile in lunghezza ad AB; saranno le due AB, DE, Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e perciò il rettangolo DI, contenuto dalle due AB, DE, [c] sarà Medio. In oltre, essendo le due AG, GE, incommensurabili in lunghezza, ed il rettangolo AH al rettangolo GI [d] è come AG, à GE; i rettangoli AH, GI, [e] saranno incommensurabili. Si dimostri poi, come si fece nella 92. di questo, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la Minore.

b 20. del 10.
c 22. del 10.
d 1. del 6.
e 10. del 10.

Per costruttione il rettangolo AI è vguale à i quadrati LM, NO, cioè vguale all'aggregato de i quadrati di LP, PN, ouero di TO, OS: ma il rettangolo AI è dimostrato Rationale; l'aggregato dũque de i quadrati di TO, OS, sarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo DI è dimostrato Medio, il doppio rettangolo LO, cioè il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, che gli è vguale, sarà ancora Medio. Finalmente perche i rettangoli AH, GI sono dimostrati incommensurabili, i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno incommensurabili, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS sono incommensurabili in potenza. E perche l'aggregato de i loro quadrati è dimostrato Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime TO, OS, è Medio, per la 77. propositione di questo, la retta TS è quella, che si chiama Minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIONE XCVI.

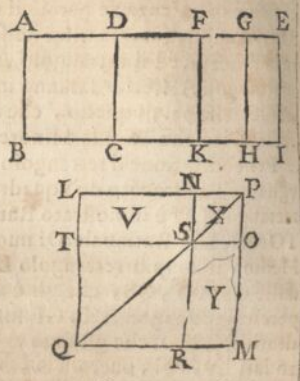
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla quinta Apotome, è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quinta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che si dice col Rationale fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della quinta Apotome AD; per la defin. della quinta Apotome, le rette AE, DE sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; e la congruente DE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile alla medesima AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, come nell'altre; e per quel che si è dimostrato nell'antecedente propositione, le due AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. E perche AE è Rationale,

a 10. del 6.

ed

ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB, sarà, come fù dimostrato alla 93. propositione, il rettangolo AI Medio. In oltre, perche DE è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza alla Rationale
b 20.del 10. AB; sarà il rettangolo DI [b] Rationale. Si proui, come si fece nell'antecedente propositione, che i due rettangoli AH, GI, sono incommensurabili; e si dimostri, come nella 92. propositione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.



Essendosi dimostrato, che il rettangolo AI è Medio, l'aggregato de i quadrati LM, NO, che gli è vguale, sarà Medio; cioè l'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS, è Medio. Parimente, essendosi dimostrato il rettangolo DI Rationale, sarà il doppio rettãgolo LO, che gli è vguale, Rationale: ma il rettangolo LO è contenuto dalle due rette TO, OS, (stante che OS è vguale ad OP) sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, Rationale. Si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le due TO, OS sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le due rette TO, OS, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, da loro contenuto, è Rationale, per la 78. propositione di questo, sarà la rimanente TS quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIONE XCVII.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e della sesta Apotome, è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla sesta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della sesta Apotome AD, per la definitione di detta Apotome, le rette AE, DE, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e niuna delle due AE, DE, sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE sarà maggiore del quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla compo-
a 10. del 1. sta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, come si fece nell'antecedenti propositioni; saranno le due AG, GE, come fù dimostrato nella 95. propositione frà di loro incommensu-

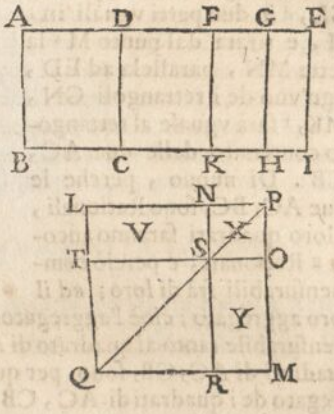
rabili:

rabili: per la qual cosa i rettangoli AH, GI, che sono come le basi AG, GE, saranno incommensurabili. Di nuouo, perche le due AE,ED sono Rationali, ed ogn'vna è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB; tanto le due AB, AE, quanto le due AB, DE sono Rationali, & commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa i rettangoli AI, DI, [b] sono Medij. Di più, essendo, per ipotesi, le due AE,DE, commensurabili solamente in potenza, cioè incommensurabili in lunghezza, i rettangoli AI, DI, che sono [c] come le basi AE,DE; saranno [d] frà loro incommensurabili. Si dimostri, come si fece nella 92. propositione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

b 22.del 10.

c 1.del 6.

d 10.del 10.



Essendo AI per quel che si è dimostrato, Medio, ed il rettangolo AI, è vguale all'aggregato de i quadrati LM,NO, cioè all'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS; l'aggregato de i quadrati delle rette TO,OS, sarà ancora Medio. In oltre, perche DI è vguale al doppio rettangolo LO, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due TO,OS, ed il rettangolo DI è dimostrato Medio; sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle rette TO,OS, Medio. Di più, essendosi dimostrato DI incommensurabile al rettangolo AI, sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle due TO,OS, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di TO, OS. Finalmente si dimostri, come si fece nella propositione 95. che le rette TO, SO, sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le rette TO,SO, incommensurabili in potenza; l'aggregato de loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è ancora Medio, ed è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, e per la 79. propositione, la rimanente TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.

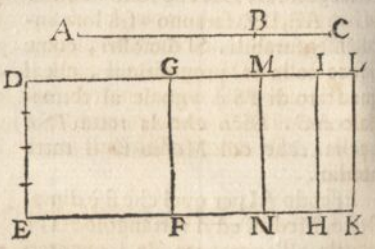
THEOREMA LXXIV. PROPOSITIONE XCVIII.

Applicando il quadrato dell'Apotome alla Rationale, l'altro lato, che ne risulta, è prima Apotome.

Sia l'Apotome AB, e la sua congruente BC, in modo, che le due AC, BC, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e sia esposta qualunque Rationale DE, alla quale si applichi [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è pri-

a 45.del 1.

ma Apotome. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato di AC, ed al lato IH si applichi il rettangolo IK vguale al quadrato di B C, in modo, che tutto il rettangolo DK sia vguale all'aggregato de i quadrati delle due AC, CB. E perche l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, cioè il rettangolo DK, è vguale [c] al doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, col quadrato di AB; leuatone il quadrato di AB, cioè il rettangolo DF, resta il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Si che diuisa GL, [d] in due parti vguali in M, e tirata dal punto M [e] la retta MN, parallela ad ED, ogn'vno de i rettangoli GN, MK, [f] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB. Di nuouo, perche le due AC, BC, sono Rationali, i loro quadrati saranno ancora [g] Rationali, e perciò commensurabili frà di loro; ed il loro aggregato; cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] sarà commensurabile tanto al quadrato di AB, quanto al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, CB, sono, per quel che si è detto, *Rationali; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, Rationale;* il quale, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [K] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche le due *AC, CB,* per ipotesi, sono Rationali, e commensurabili *solamente in potenza; il* rettangolo contenuto *dalle medesime AC, CB, sarà Medio, & il doppio* rettangolo *delle due AC, CB, che gli è commensurabile,* sarà ancora *Medio; ma il doppio rettangolo delle due AC, CB,* è vguale al rettangolo *GK; il rettangolo dunque GK* sarà Medio, il quale, applicato alla *Rationale GF,* ouero DE, [l] fà il lato GL Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale GF, ouero DE. E perche GK è irrationale, cioè è Medio, ed il rettangolo DK è dimostrato Rationale; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo GK; e le rette DL, LG, [m] che sono come i rettangoli DK, GK, sono [n] incommensurabili in lunghezza; le quali, essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e, per la 74. propositione di questo, la rimanente DG sarà Apotome. Dico che è prima Apotome.



Per l'vltimo Coroll. alla 1. propos. del 6. Libro, il rettangolo contenuto dalle due AC, BC, cioè il rettangolo MK, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, BC, ed i quadrati delle due AC, BC sono vguali à i rettangoli DH, IK; sarà il rettangolo MK Medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; e sarà il rettangolo DH al rettangolo MK, come il medesimo rettangolo MK al rettangolo IK; ma questi rettangoli sono [o] come le rette DI, LM, LI; saranno le rette DI, LM, LI, continue proportionali; ed il rettangolo contenuto dalle estreme DI, LI, [p] sarà

vgua-

b 45. del 1.
c 7. del 2.
d 10. del 1.
e 31. del 1.
f 36. del 1.
g 8. defin. del 10.
h 16. del 10.
K 21. del 10.
l 23. del 10.
m 1. del 6.
n 10. del 10.
o 1. del 6.
p 17. del 6.

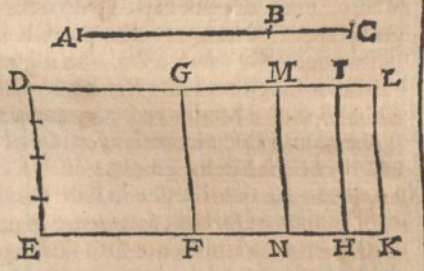
vguale al quadrato di ML. Si è dunque ad LD applicato il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di IL. In oltre, perche i quadrati delle due AC, BC, sono commensurabili, saranno i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, frà di loro commensurabili, ed i lati DI, IL, che sono q come i rettangoli DH, IK, saranno r commensurabili in lunghezza. Hor essendo le rette DL, GL, ineguali, ed alla maggiore DL si è applicato il rettangolo contenuto dalle rette DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato della minore GL, e gli manca à compire la linea per il quadrato di IL; essendo le parti DI, IL, commensurabili in lunghezza; per la 18. propositione di questo, il quadrato di DL superarà il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla composta DL; ed è la composta DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la prima delle terze definitioni, sarà DG prima Apotome, ch'era da dimostrarsi.

q 1. del 6.
r 10. del 10.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIONE XCIX.

Applicando alla Rationale il quadrato della prima Apotome della Media; l'altro lato, che ne risulta, sarà la seconda Apotome.

Sia AB la prima Apotome della Media, e la sua congruente sia BC, in modo, che le due AC, BC, siano Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale. Si esponga qualunque Rationale DE, alla quale s'applichi a il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è seconda Apotome. Si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, in modo, che i rettangoli DH, IK, siano vguali à i quadrati di AC, CB, ed il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, BC, e la metà, cioè il rettangolo MK, vguale al semplice rettangolo delle due AC, CB. Perche le due AC, CB, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, saranno Medij, frà di loro commensurabili; dal che il loro aggregato DK b sarà commensurabile all'vno, ed all'altro; e perciò DK c sarà Medio, il quale, applicato alla Rationale DE, fà l'altro lato DL d Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, cioè



a 45. del 1.
b 16. del 10.
c Corol. alla 24. del 10.
d 23. del 10.

il rettangolo GK, sarà Rationale, il quale applicato alla Rationale GF, ouero DE, [e] fà il lato GL Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche DK è irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale; i rettangoli DK, GK, saranno incommensurabili: ma i rettangoli DK,GK,[f] sono come le basi DL,GL; saranno le rette DL, GL, [g] incommensurabili in lunghezza: furono dimostrate Rationali, perciò le rette DL, GL, saranno Rationali, commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, la rimanente DG sarà Apotome; la di cui congruente sarà GL. Dico che DG è seconda Apotome. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che il quadrato di DL supera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla medesima DL. E perche si è dimostrato, che la congruente GL è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la seconda delle terze defin. DG, sarà seconda Apotome, ch'era da dimostrarsi.

e 21.del 10.

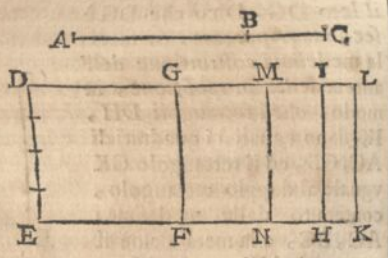
f 1.del 6.

g 01.del 10.

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIONE C.

Applicando alla Rationale il quadrato della seconda Apotome della Media, l'altro lato, che ne risulta, è terza Apotome.

Sia AB la seconda Apotome della Media, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, CB, siano Medie, commensurabili solamente in potenza, e che contengano vn rettangolo Medio. *Si esponga qualunque Rationale DE, alla quale sia applicato* [a] *il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è terza Apotome. Si faccia la medesima costruttione, che si è fatta nelle antecedenti, e si dimostri, come nella precedente propositione, che il rettangolo DK è Medio, il quale, applicato alla Rationale DE, [b] fà il lato DL Rationale, ed incommensurabile in lunghezza ad ED. E perche il rettangolo contenuto dalle due AC,CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC,CB, cioè il rettangolo GK, sarà Medio; il quale, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà il lato GL Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Prese AC, BC, come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia AC; sarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [d] come AC à CB: ma, per ipotesi, le due AC, CB, sono incommensurabili in lunghezza; sarà il quadrato di AC e incommensurabile al rettangolo conte-*



a 45.del 1.

b 23.del 10.

c 23.del 10.

d 1.del 6.

e 10.del 10.

nuto

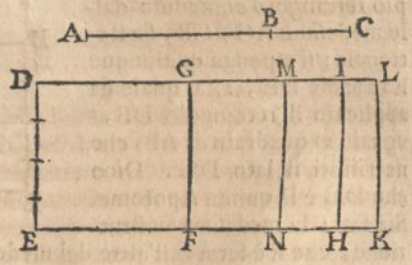
nuto dalle due AC, CB. In oltre, perche le rette AC, CB, sono, per ipoteſi, commenſurabili in potenza, i loro quadrati ſaranno frà loro commenſurabili; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [f] ſarà commenſurabile al quadrato di AC: ma il quadrato di AC è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [g] incommenſurabile al rettangolo delle medeſime AC, CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AC, BC; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, [h] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo GK: ſono i rettangoli DK, GK, [K] come le baſi DL, LG; ſaranno le rette DL, LG, [l] incommenſurabili in lunghezza; e perche furono dimoſtrate Rationali, le due dunque DL, GL, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la rimanente DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è terza Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella propoſitione 98, che il quadrato di DL ſupera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla compoſta DL. Perche neſſuna delle due DL, GL, per quel che ſi è dimoſtrato, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle terze definitioni, ſarà DG quella, che ſi chiama terza Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

f 16. del 10.
g 14. del 10.
h 14. del 10.
K 1. del 6.
l 10. del 10.

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIONE CI.

Applicando alla Rationale il quadrato della Minore, il lato, che ne riſulta, ſarà quarta Apotome.

Sia la minore AB, e la ſua congruente BC, in modo, che le due AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati ſia Rationale, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio; e ſia eſpoſta qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato della minore AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la quarta Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione, come nell'altre del medeſimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, per ipoteſi, è Rationale, applicato alla Rationale DE, [b] fà l'altro lato DL Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, cioè GK, è Medio, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà l'altro lato GL [c]



a 45. del 5.
b 21. del 10.
c 23. del 10.

Ratio-

Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche DK è Rationale, ed il rettangolo GK è irrationale, cioè Medio, i rettangoli DK, GK, saranno frà loro incommensurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] sono come le basi DL, GL; saranno le rette DL, GL, [e] incommensurabili in lunghezza; e perche le medesime DL, GL, furono dimostrate Rationali, le due dunque DL, GL, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 74. propositione, la rimanente DG sarà Apotome, la di cui congruente sarà GL. Dico che DG è quarta Apotome. Perche le due AC, BC, per ipotesi, sono incommensurabili in potenza, saranno i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, incommensurabili: ma i rettangoli DH, IK, [f] sono come le basi DI, IL, le rette DI, IL [g] saranno incommensurabili in lunghezza. E perche il rettangolo contenuto dalle medesime DI, IL, è vguale al quadrato di ML, come fù dimostrato nella 98. propos., sarà applicato alla retta DL il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di LI. E perche le rette DI, IL, sono state dimostrate incommensurabili in lunghezza, per la 19. propos. di questo, il quadrato della composta DL supera il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza alla composta DL; e fù dimostrata la composta DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la quarta delle terze defin. sarà DG la quarta Apotome, ch'era da dimostrarsi.

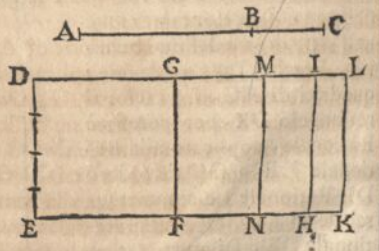
d 1. del 6: e 10. del 10.

f 1. del 6. g 10. del 10.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIONE CII.

Applicando alla *Rationale il quadrato di quella*, che col Rationale fà *il tutto Medio*, *l'altro lato*, che ne risulta, *sarà la quinta* Apotome.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, CB siano incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sia Rationale: si esponga qualunque Rationale DE, alla quale sia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato di AB, che ne risulti il lato DG. Dico che DG è la quinta Apotome. Sia fatta la medesima costruttione, che si è fatta nell'altre del medesimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] sarà Rationale, ed incommensura-



a 45. del 1.

b 23. del 10.

bile

bile in lunghezza alla Rationale DE. Di più perche il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, cioè il rettangolo GK, è Rationale, applicato alla Rationale DE, l'altro lato GL [c] sarà Rationale, e commensurabile in lunghezza, alla Rationale DE. Hor essendo DK irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale, i rettangoli DK, GK, saranno incommensurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] sono come le basi DL, GL; saranno le rette DL, GL, [e] incommensurabili in lunghezza, le quali essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione, la retta DG sarà Apotome, la di cui congruente sarà GL. Dico che DG è quinta Apotome. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che il quadrato di DL è maggiore del quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza alla composta DL. Essendosi dimostrato, che la congruente GL è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle terze definitioni, la retta DG sarà quella, che si dice quinta Apotome, come fù proposto dimostrare.

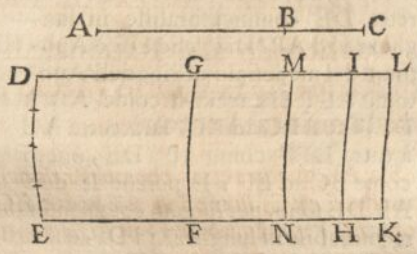
c 23. del 10

d 1. del 6.

e 10. del 10.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIONE CIII.

Applicando alla Rationale il quadrato di quella retta, che col Medio fà il tutto Medio; l'altro lato, che ne risulta, sarà la sesta Apotome.



Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, CB, siano incommensurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB. Sia esposta qualunque Rationale DE, alla quale sia applicato il rettangolo DF [a] vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è la sesta Apotome. Si faccia la medesima costruttione delle altre del medesimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà l'altro lato DL [b] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, cioè il rettangolo GK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [c] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è incommensurabile, per ipotesi, al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo

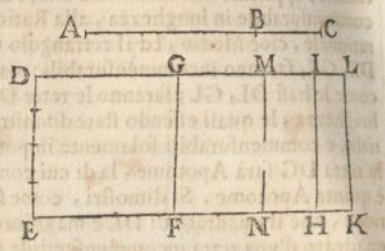
a 45. del 1.

b 23. del 10.

c 23. del 10.

GK.

d 1.del 6. e 10.del 10. GK, ed i rettangoli DK, GK [d] sono come le basi DL, LG, saranno le rette DL,LG, [e] incommensurabili in lunghezza: ma le medesime DL, LG sono state dimostrate Rationali, saranno le due DL, LG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione, la rimanente DG sarà Apotome. Dico che è sesta Apotome. *Si dimostri, come si fece nella 101. propositione, che il quadrato di DL supera il quadrato della congruẽte GL, per il quadrato d'vna retta incommensurabile alla composta DL.* E perche le due DL,GL, sono state dimostrate incommensurabili in lunghezza alla Rationale DE; per la sesta delle terze definitioni, la retta DG sarà la sesta Apotome, ch'era da dimostrarsi.

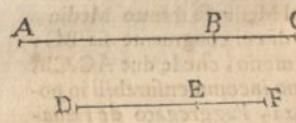


THEOREMA LXXX. PROPOSITIONE CIV.

La retta linea, ch'è commensurabile in lunghezza all' Apotome, è Apotome del medesimo ordine.

Sia l'Apotome AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC,BC, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e sia la retta DE *commensurabile in lunghezza ad AB. Dico che DE è Apotome del medesimo ordine dell'Apotome AB. Si faccia si come AB à DE,* [a] *così BC ad EF, sarà tutta AC à tutta DF,* [b] *come AB à DE, ouero come BC ad EF.* E perche le due AB,DE sono, per ipotesi, commensurabili in lunghezza, sarà AC [c] commensurabile in lunghezza à DF, e sarà BC commensurabile in lunghezza ad EF: ma le due AC, BC, per ipotesi, sono Rationali; saranno le due DF,FE, che gli sono commensurabili, [d] ancora Rationali; e perche le due AC,CB, sono commensurabili solamente in potenza, le due ancora DF, EF, per lo Scolio alla 10. propositione, saranno commensurabili in potenza: per la qual cosa le due DF,FE, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 74. propositione, la rimanente DE sarà Apotome. Dico che è del medesimo ordine dell'Apotome AB. E prima sia il quadrato di AC maggiore del quadrato di BC, per il quadrato d'vna retta linea, commensurabile in lunghezza ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE, per la 15. propositione, ancora il quadrato di DF superarà il quadrato di FE, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla retta DF. Se dunque AC è commensurabile in lunghezza à qualche Rationale, in modo, che AB sia prima Apotome; es-

a 12. del 6. b 12.del 5. c 10. del 10. d 6. defin. del 10.



sendo

sendo DF, commensurabile in lunghezza ad AC, sarà ancora DF [c] commensurabile in lunghezza alla medesima Rationale, e per la prima delle terze definitioni, la retta DE sarà prima Apotome, cioè del medesimo ordine dell'Apotome AB. Se poi BC sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale, sarà nell'istesso modo EF commensurabile in lunghezza alla medesima Rationale; ed ambedue AB, DE, saranno seconde Apotome. E se nessuna delle due AC, CB, sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale, ne meno alcuna delle due DF, FE, sarà commensurabile in lunghezza alla medesima Rationale: per la qual cosa le due AB, DE, saranno terze Apotome.

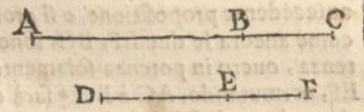
[c] 10. del 10.

Finalmente sia il quadrato di AC maggiore del quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propositione, il quadrato di DF sarà maggiore del quadrato di EF, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla medesima DF; e perciò, come prima, se AB è quarta, ò quinta, ò sesta Apotome, ancora DE sarà quarta, quinta, ò sesta Apotome, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIONE CV.

La retta linea, ch'è commensurabile all'Apotome della Media, è ancor essa Apotome della Media, e del medesimo ordine.

Sia qualunque Apotome della Media AB, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, BC, siano Medie, commensurabili solamente in potenza; e sia DE commensurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero solamente in potenza. Dico che la retta DE è Apotome della Media, e del medesimo ordine. Si faccia, come prima, si come AB à DE, [a] *così BC ad EF; sarà tutta AC à DF,* [b] *come AB à DE, è come BC ad EF. Perche le due AB, DE, per ipotesi, sono commensurabili ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza solamente; saranno le due AC, DF,* [c] *e le due ancora BC, EF, nell'istesso modo commensurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente. E perche le due AC, BC, sono Medie, le due ancora DF, FE, che gli sono commensurabili;* [d] *saranno Medie. In oltre, perche AC à DF è come BC ad EF, permutando, AC à CB* [e] *sarà come DF ad FE: ma le due AC, CB sono commensurabili solamente in potenza, per lo Scolio alla 10. propositione, le due DF, FE, saranno commensurabili solamente in potenza: sono le due DF, FE, per quel che si è dimostrato, Medie, e, per la 75. propositione, la rimanente DE sarà prima Apotome della Media. Dico che è del medesimo ordine della Media AB. Prese AC, CB come basi di due rettangoli, de'quali AC sia altezza commune, sarà il quadrato di AC* [f] *al rettangolo contenuto delle due AC, CB, come AC à CB. E nell'istesso modo*



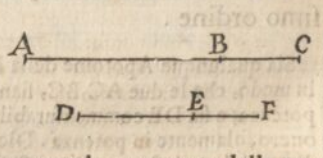
[a] 12. del 6.
[b] 11. del 5.
[c] 10. del 10.
[d] Corol. alla 24. del 10.
[e] 16. del 5.
[f] 1. del 6.

si dimostrerà, che DF ad FE è come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE: ma DF ad FE è dimostrata come AC à CB; sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [h] sarà come il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commensurabile al quadrato di DF (stante che le rette AC, DF, sono dimostrate commensurabili) sarà il rettangolo delle due AC, CB, [K] commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è Rationale, in modo, che AB sia prima Apotome della Media, sarà ancora il rettangolo contenuto dalle due DF, FE, [l] che gli è commensurabile, Rationale: Dal che la retta DE sarà quella, che si chiama prima Apotome della Media, cioè del medesimo ordine dell'Apotome AB. Se poi il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, in modo, che AB sia seconda Apotome della Media; sarà il rettangolo delle due DF, FE, che gli è commensurabile, Medio. Per la qual cosa la retta DE sarà [m] seconda Apotome della Media, ch'era da dimostrarsi.

g 11. del 5.
h 16. del 5.
K 10. del 10.
l 9. defin. del 10.
m 76. del 10.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIONE CVI.

La retta linea, ch'è commensurabile alla minore, è ancor essa Minore.



Sia la Minore AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC, BC, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio: e sia DE commensurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente. Dico che la retta DE è quella, che si chiama Minore. Si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, e si proui, come iui si fece, che le due DF, AC, come ancora le due EF, BC, sono commensurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente. E perche AC à DF è come BC ad EF, permutando, AC à BC [a] sarà come DF ad EF, ed il quadrato di AC al quadrato di BC [b] sarà come il quadrato di DF al quadrato di FE; e componendo, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, al quadrato di CB, [c] sarà come l'aggregato de i quadrati di DF, FE, al quadrato di FE; e permutando, l'aggregato de i quadrati di AC, CB all'aggregato de i quadrati di DF, FE, [d] sarà come il quadrato di CB al quadrato di EF: Ma il quadrato di CB è commensurabile al quadrato di FE (stante che le rette CB, FE, sono state dimostrate commensurabili) sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [e] commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di DF, FE, che gli è commensurabile, [f] sarà Rationale. Si dimostri, come si fece nell'antece-

a 16. del 5.
b 22. del 6.
c 18. del 5.
d 16. del 5.
e 10. del 10.
f 9. defin. del 10.

dente

dente propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due DF, FE; dal che il doppio rettangolo delle due AC, CB, sarà commensurabile al doppio rettangolo delle due DF,FE: ma il doppio rettangolo delle due AC,CB, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, [g] che gli è commensurabile, Medio. E perche AC à BC è come DF ad FE, e le due AC, BC, sono, per ipotesi, incommensurabili in potenza; saranno le due ancora DF, FE, [h] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF, FE, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime DF, FE, è Medio: per la 77. propositione di questo, la retta DE sarà quella, che si chiama Minore, come fù proposto dimostrare.

g Corol. alla 24. del 10.

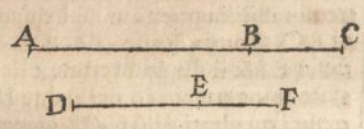
h 10. del 10.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIONE CVII.

La retta linea, ch'è commensurabile à quella, che col Rationale fà il tutto Medio, è ancor essa quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC,CB, siano incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati, cioè di AC,CB, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC,CB, sia Rationale; e sia DE commensurabile ad AB in qualunque modo. Dico che ED è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Si faccia la medesima costruttione dell'altre antecedenti, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è commensurabile all'aggregato de i quadrati delle due DF, FE: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [a] Medio. Similmente si dimostri, come si fece nella 105. propositione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo delle due DF,FE; dal che i loro doppij saranno ancora commensurabili: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, che gli è commensurabile, [b] Rationale. Finalmente perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB, per ipotesi, sono incommensurabili in potenza; saranno ancora le due DF, FE, [c] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF,FE, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di DF, FE, è Medio; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è Rationale; per la 78. propositione di questo, sarà la retta DE quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.



a Corol. alla 24. del 10.

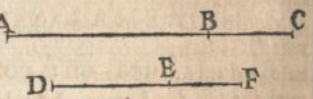
b 9. defin. del 10.

c 10. del 10.

THEOREMA LXXXIV. PROPOSITIONE CVIII.

La retta linea, ch'è commensurabile à quella, che col Medio fà il tutto Medio, è ancor essa quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, BC siano incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati; e sia DE commensurabile ad AB in qualunque modo. Dico che DE è quella, che col Medio fà il tutto Medio.



Si faccia la medesima costruttione dell'altre di questo Senario, e si dimostri, come nella 106. che l'aggregato de i quadrati di AC, CB è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. Essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB Medio, sarà ancora l'aggregato de i quadrati di DF, FE [a] Medio. In oltre si dimostri, come si fece nella 105. propositione, che il rettangolo delle due AC, BC è commensurabile al rettangolo delle due DF, FE, i loro doppij saranno ancora commensurabili: *ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE,* [b] *che gli è commensurabile, Medio. Di nuouo perche AC à CB è come DF ad FE; sono le due AC, CB, per ipotesi,* [c] *incommensurabili in potenza, le due ancora DF, FE* [c] *saranno incommensurabili in potenza. Finalmente perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, come si disse, è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; & il doppio rettangolo delle due AC, CB è commensurabile al doppio rettangolo delle due DF, FE;* essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB; sarà l'aggregato de i quadrati delle due DF, FE [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime DF, FE. Hor perche le due DF, FE sono incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo delle medesime DF, FE, è Medio incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati; per la 79. propositione, la retta DE sarà quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.

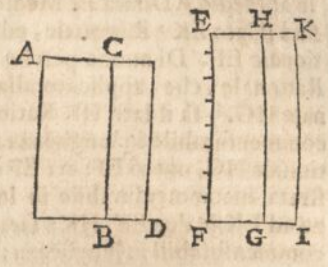
a 24. del 10.
b 24. del 10.
c 10. del 10.
d 14. del 10.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIONE CIX.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Rationale supera il Medio, è vna delle due irrationali, cioè, ò Apotome, ouero la Minore.

Dal

Dal Rationale AD ne sia detratto il Medio CD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo spatio AB, ò è Apotome, ouero è la Minore. Sia esposta qualunque Rationale EF, alla quale sia applicato il rettangolo EG [a] vguale allo spatio AB; essendo HG vguale ad EF, sarà HG Rationale. Si applichi ad HG il rettangolo HI, [b] vguale al Medio CD, in modo, che tutto il rettangolo EI sia vguale al Rationale AD; dal che EI sarà Rationale, ed il lato EK [c] sarà Rationale, è commensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo essendo HI Medio (per essere vguale al Medio CD) applicato alla Rationale HG, l'altro lato HK [d] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF; ma EF, per quel che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza ad EK: le due EK, HK [e] saranno incommensurabili in lunghezza. E perche le medesime sono state dimostrate Rationali; perciò le rette EK, HK, saranno commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, la rimanente EH sarà Apotome, la di cui congruente sarà HK. Inoltre il quadrato della composta EK supera il quadrato della congruente HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza ad EK, ouero sarà alla medesima incommensurabile. Se è commensurabile ad EK, essendosi dimostrata EK commensurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la prima delle terze definitioni, sarà EH prima Apotome; e per la 92. propositione di questo, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla prima Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, sarà Apotome. Se poi il quadrato di EK supera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommensurabile ad EK, essendosi dimostrata la retta EK commensurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la quarta delle terze definitioni, la retta EH sarà la quarta Apotome, la di cui congruente sarà HK; e per la 95. propositione di questo, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla quarta Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, è quella, che si chiama Minore, come fù proposto dimostrare.



a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 21. del 10.
d 23. del 10.
e 13. del 10.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIONE CX.

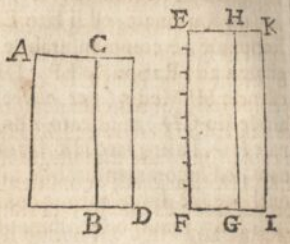
La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Medio supera il Rationale, ò sarà prima Apotome della Media, ouero sarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dal Medio AD ſe ne detragga il Rationale CD . Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AB, ò è prima Apotome, ouero è quella, che col Rationale fà il tutto Medio. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione. Eſſendo il rettangolo EI vguale al Medio AD, ſarà EI Medio, il quale, applicato alla Rationale EF, farà il lato EK [a] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo perche HI è vguale al Rationale CD, ſarà HI Rationale, che, applicato alla Rationale HG, [b] fà il lato HK Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF: ma EF è dimoſtrata incommenſurabile in lunghezza ad EK; le due EK, HK [c] ſaranno incommenſurabili in lunghezza; E perche ſono Rationali, perciò ſono le due HK, EH Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente EH è Apotome, la di cui congruente ſarà HK. In oltre il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, ouero incommenſurabile: Se ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, eſſendoſi dimoſtrata la congruente HK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la ſeconda delle terze definitioni, EH ſarà ſeconda Apotome; e per la 93. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla ſeconda Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà la prima Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla medeſima EK; eſſendoſi dimoſtrata la congruente HK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la quinta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la quinta Apotome; e per la 96. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale EF, e dalla quinta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimoſtrarſi.

123. del 10.

b 21. del 10.

c 13. del 10.



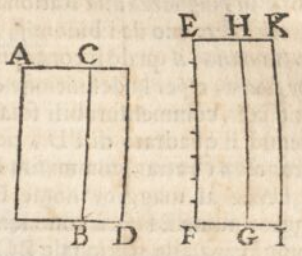
THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIONE CXI.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza, ch'è frà due Medij, trà loro incommenſurabili; ò è la ſeconda Apotome della Media, ouero è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dal Medio AD ne ſia detratto il Medio CD, il quale ſia incommenſurabile al tutto AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al

rima-

rimanente AB, ò è la seconda Apotome della Media, ouero è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia fatta la medesima costruttione della 109. propositione. Perche i due rettangoli EI, HI, per costruttione, sono vguali à i due Medij AD, CD, i due EI, HI, saranno Medij, i quali, applicati alla Rationale EF, ouero HG, fanno i lati EK, HK [a] Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF.



a 23.del 10.

E perche i due AD, CD, cioè EI, HI, per ipotesi, sono incommensurabili, ed i rettangoli EI, HI [b] sono come le basi EK, HK, le rette EK, HK [c] saranno incommensurabili in lunghezza: ma sono state dimostrate Rationali; saranno in conseguenza le due EK, HK Rationali, commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, la rimanente EH sarà Apotome, la di cui congruente sarà HK. Di nuouo il quadrato di EK supera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza alla composta EK, ouero sarà incommensurabile: Se è commensurabile in lunghezza ad EK. Perche nessuna delle due EK, HK è commensurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la terza delle terze definitioni, il rimanente EH sarà la terza Apotome; e per la 94. propositione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla terza Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, sarà la seconda Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK supera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza ad EK; essendosi dimostrato, che nessuna delle due EK, HK, è commensurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la sesta delle terze definitioni, la retta EH sarà la sesta Apotome, la di cui congruente sarà HK; e per la 97. propos. di questo, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla sesta Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, è quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.

b 1. del 6.

c 10.del 10.

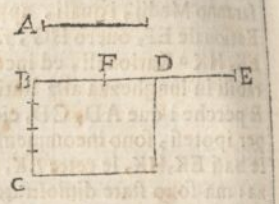
THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIONE CXII.

L'Apotome è diuersa dal Binomio.

Sia qualunque Apotome A. Dico che A non è Binomio. Sia A, se è possibile, qualcuno de i binomij. Sia esposta qualunque Rationale BC, alla quale si applichi il rettangolo CD [a] vguale al quadrato della retta A. Perche A, per ipotesi, è Apotome, l'altro lato BD sarà quella, che si chiama prima Apotome; alla quale s'intenda aggiunta la sua congruente DE, e per la definitione della prima Apotome, le due BE, DE, saranno Rationali, commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di BE superarà il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commen-

a 45.del 1.

ſurabile in lunghezza alla medeſima BE; e la retta BE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale BC. Di nuouo perche A è ſuppoſta ancora eſſere vno de i binomij, ſarà il lato BD, per la 61. di queſto, primo binomio; il quale ſi concepiſca diuiſo ne i ſuoi nomi, e ſia BF il maggior nome; e per la definitione del primo Binomio, le due BF, FD ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato di BF ſuperarà il quadrato di FD, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza al maggior nome BF; ed il maggior nome BF ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale BC. E perche tanto BE, come BF, è commenſurabile in lunghezza alla medeſima BC; le due BE, BF [b] ſaranno frà loro commenſurabili in lunghezza. Hor eſſendo tutta BE commenſurabile in lunghezza alla ſua parte BF, ſarà la medeſima BE [c] commenſurabile in lunghezza al rimanente FE: ma BE è Rationale; ſarà FE, [d] che gli è commenſurabile, Rationale. In oltre perche le due BE, DE, ſono ſtate dimoſtrate Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſaranno le medeſime BE, ED incommenſurabili in lunghezza: ma BE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza ad FE, ſarà ED [e] incommenſurabile in lunghezza ad FE; furono dimoſtrate ambedue Rationali, in conſeguenza le medeſime FE, DE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente FD ſarà Apotome; e perciò irrationale. Fù dimoſtrata la retta FD Rationale; ſarà Rationale, ed Irrationale, ch'è impoſſibile. Non dunque A, eſſendo Apotome, è la medeſima che vno de i Binomij: ma è diuerſa dal Binomio, come fù propoſto dimoſtrare.



b 12. del 10.

c 16. del 10. d 6. defin. del 10.

c 14. del 10.

SCOLIO.

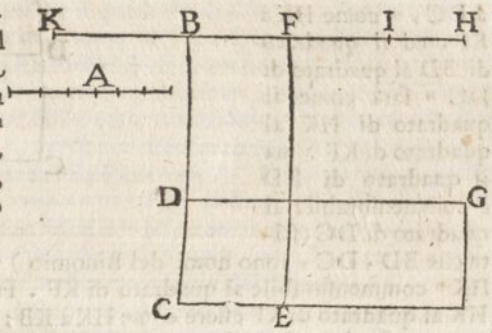
Le linee Irrationali diuerſe frà di loro, delle quali ſi è parlato ſin hora, ſono le ſeguenti tredici linee.

1 Media.
2 Binomio, che ſi diuide in ſei ſpecie.
3 Prima Bimediale.
4 Seconda Bimediale.
5 Maggiore.
6 Potente per il Rationale, e Medio.
7 Potente per due Medij.
8 Apotome, che ſi diuide in ſei ſpecie.
9 Prima Apotome della Media.

10 Seconda Apotome della Media.
11 Minore.
12 Col Rationale fà il tutto Medio.
13 Col Medio fà il tutto Medio.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIONE CXIII.

Applicando il quadrato della Rationale al Binomio, il lato, che ne risulta, sarà Apotome, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi del Binomio, e sono nella medesima proportione; ed, oltre à ciò, l'Apotome, che da questa applicatione si genera, tiene il medesimo ordine del Binomio.

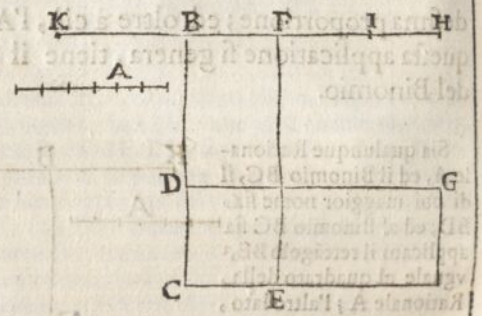


Sia qualunque Rationale A, ed il Binomio BC, il di cui maggior nome sia BD; ed al Binomio BC sia applicato il rettãgolo BE, [a] vguale al quadrato della Rationale A; l'altro lato, che ne risulta, sia BF. Dico che BF è Apotome, i di cui nomi, cioè la composta dell'Apotome, e sua congruente per vn nome, e la detta congruente per l'altro nome, sono commensurabili à i nomi BD, DC, del Binomio BC; e che sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò, l'Apotome BF è del medesimo ordine del Binomio BC. Di nuouo al minor nome DC del Binomio, si applichi il rettangolo CG [b] vguale al quadrato della Rationale A; sarà CG Rationale, il quale, applicato alla Rationale DC, fà l'altro lato DG, [c] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DC. Si faccia BH vguale alla retta DG, sarà BH Rationale, e commensurabile in lunghezza à DC. E perche i rettangoli BE, CG, sono frà di loro vguali; sarà BC à CD, [d] come DG, ouero HB, à BF; e diuidendo, BD à DC [e] sarà come HF ad FB: ma BD, per ipotesi, è maggiore di DC, sarà HF maggiore di FB. Si faccia FI vguale ad FB, e si faccia, si come HI ad IF, [f] così FB à BK; componendo, sarà HF ad FI, [g] ouero HF ad FB, come FK à BK: ma HF ad FB, per quel che si è dimostrato, è come BD à DC; sarà BD à DC [h] come FK à BK: e perche i due BD, DC, (come nomi del Binomio) sono Rationali, e commensurabili solamente in

a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 21. del 10.
d 14. del 6.
e 17. del 5.
f 10. del 6.
g 18. del 5.
h 11. del 5.

potenza: i due dunque FK, BK saranno ancora Rationali, e commensurabili solamente in potenza.

Di nuouo, perche l'antecedente HF al conseguente FB è come l'antecedente FK al conseguente KB; gli antecedenti insieme HF, FK, cioè HK, à i conseguenti insieme FB, BK, cioè FK, [k] saranno come vn antecedente ad vn conseguente; cioè come FK à KB. Hor essendo HK ad FK come FK à KB, sarà FK Media proportionale frà le due HK, BK; dal che la prima HK alla terza KB, per il Lemma 8. dopo la 18. del 6. Libro, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima HK alla seconda KF; [l] ma il quadrato di HK al quadrato di KF hà la medesima duplicata proportione di HK à KF: sarà il quadrato di HK al quadrato di KF, come la prima HK alla terza KB. In oltre, perche BD à DC, per quel che si è dimostrato, è come FK à KB, & è FK à KB come HK à KF; sarà BD à DC, [m] come HK à KF; ed il quadrato di BD al quadrato di DC [n] sarà come il quadrato di HK al quadrato di KF: ma il quadrato di BD è commensurabile al quadrato di DC (stãte che BD, DC, *sono nomi del Binomio*) *sarà ancora il quadrato di* HK [o] *commensurabile al quadrato di* KF. *Fù dimostrato il quadrato di* HK *al quadrato di* KF *essere come* HK à KB; essendo il quadrato di HK *commensurabile al quadrato di* KF, sarà la retta HK [p] commensurabile in lunghezza alla retta KB; e la medesima HK, per il Corollario alla 16. propositione di questo, sarà commensurabile in lunghezza al restante BH. Fù dimostrata BH Rationale, in conseguenza HK, [q] che gli è commensurabile, sarà Rationale: e similmente KB, che è commensurabile à KH, sarà ancora Rationale. E perche le due FK, KB, furono dimostrate commensurabili solamente in potenza, essendo KB Rationale, sarà ancora FK, [r] che gli è commensurabile, Rationale. Per la qual cosa, le due FK KB sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 74. propositione di questo, la rimanente BF sarà Apotome, la di cui congruẽte sarà BK, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Essendosi dimostrata tutta HK commensurabile in lunghezza alla parte KB, saranno le parti KB, BH [t] commensurabili in lunghezza: ma BH fù dimostrata commensurabile in lunghezza alla retta DC, sarà KB [u] cõmensurabile in lunghezza alla medesima DC. In oltre perche si è dimostrato, che BD à DC è come FK à KB, permutando, [x] sarà BD ad FK come DC à KB: fù dimostrata la retta DC commensurabile in lunghez-

za

k 18. del 5.
l 20. del 6.
m 11. del 5.
n 22. del 6.
o 10. del 10.
p 10. del 10.
q 6. defin. del 10.
r 6. defin. del 10.
t 16 del 10.
u 12. del 10.
x 16. del 5.

za alla retta BK; sarà BD y ancora commensurabile in lunghezza ad FK. Hor essendo FK commensurabile in lunghezza à BD, e la retta BK commensurabile in lunghezza à DC; le rette dunque FK, KB, che sono i nomi dell'Apotome BF, saranno commensurabili in lũghezza à i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo. y 10.del 10.

Similmente essendosi dimostrato, che BD à DC è come FK à BK, i nomi dunque FK, KB, dell'Apotome BF, sono nella medesima proportione de i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

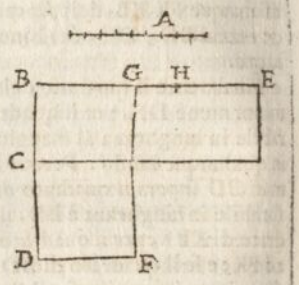
Finalmente il quadrato del maggior nome BD supera il quadrato del minor nome DC, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza al maggior nome BD, ouero sarà incommensurabile in qualunque modo. Perche BD, à DC, è come FK à KB, se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza à BD, il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB z, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad FK; e se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome BD; il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza ad FK. Di più, se BD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora FK (ch'è commensurabile in lunghezza à BD) commensurabile in lunghezza alla Rationale A: e se il minor nome DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora KB, (ch'è commensurabile à DC in lunghezza) commensurabile in lunghezza alla Rationale A. Ed in vltimo, se nessuna delle due BD, DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ne meno alcuna delle due FK, KB & sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che si disse nelle seconde, e terze definitioni, l'Apotome BF sarà del medesimo ordine del Binomio BC; cioè, se il Binomio BC sarà primo, ò secondo, ò terzo Binomio &c. sarà ancora l'Apotome BF prima, ò seconda, ò terza Apotome &c. come fù proposto dimostrare. z 15.del 10. & 14.del 10.

THEOREMA XC. PROPOSITIONE CXIV.

Applicando il quadrato della Rationale all'Apotome, l'altro lato, che ne risulta, è Binomio; i di cui nomi sono commensurabili à i nomi dell'Apotome, e sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò il Binomio è del medesimo ordine dell'Apotome.

Sia la Rationale A, e l'Apotome BC, la di cui congruente sia CD; sarà BD il maggior nome dell'Apotome, e perciò Rationale. Sia applicato all'Apotome BC il rettangolo CE, a vguale al quadrato della Rationale A, dal quale risulti il lato BE. Dico che BE è Binomio, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi BD, DC, dell'Apotome BC, e sono a 45.del 1.

nella medesima proportione; ed oltre à ciò, il Binomio BE è del medesimo ordine dell'Apotome BC. Alla composta BD si applichi il rettangolo BF [b] vguale al quadrato della Rationale A; sarà il rettangolo BF Rationale, ed vguale al rettangolo CE. E perche il Rationale BF è applicato alla Rationale BD, il lato BG, che ne risulta, sarà [c] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla composta BD. Perche i due rettangoli BF, CE, per costruttione, sono frà di loro vguali, perciò hanno i lati reciprochi, e sarà BE à BG [d] come BD à BC; e per la conuersione della proportione, BE ad EG [x] sarà come BD, à DC. Si diuida EG in H, in modo, che EH ad HG [e] sia come BE ad EG; e sarà tutta BE à tutta GE come la parte EH, detratta da BE, alla parte HG, detratta da GE; dal che il rimanente BH al rimanente HE [f] sarà come tutta BE à tutta GE: ma BE ad EG, per costruttione, è come EH ad HG; sarà BH ad HE [g] come la medesima HE ad HG: per la qual cosa EH è Media proportionale frà le due BH, HG. E perche la prima BH alla terza HG, per il Lemma 8. dopo la 18. del 6, hà duplicata proportione, che la prima BH alla seconda HE; ed il quadrato di BH al quadrato di HE [h] hà la medesima duplicata proportione, che hà BH ad HE; sarà il quadrato di BH al quadrato di HE come la prima BH alla terza HG. E perche fù dimostrato, che BD à DC è come BE ad EG, cioè come BH ad HE; e le due BD, DC, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza (stante che sono nomi dell'Apotome BC) saranno le due BH, HE [K] commensurabili solamente in potenza: per la qual cosa i quadrati delle due BH, HE, sono commensurabili; e le rette BH, GH, che furono dimostrate come i quadrati di BH, HE, [l] sono commensurabili in lunghezza. Hor essendo BH commensurabile in lunghezza alla parte GH, [m] sarà ancora commensurabile in lunghezza al rimanente BG; e le due BG, GH, saranno commensurabili in lunghezza frà loro. E perche BG fù dimostrata Rationale, e commensurabile in lunghezza alla retta BD; sarà ancora BH Rationale, e commensurabile in lunghezza alla medesima BD. In oltre, perche le due BH, HE sono state dimostrate commensurabili solamente in potenza, e la retta BH è dimostrata Rationale; sarà ancora HE, la quale gli è commensurabile in potenza, [n] Rationale; e perciò le due BH, HE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 37. propositione di questo, la retta BE sarà Binomio, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo, essendosi dimostrato che BH ad HE è come BD à CD; permutando, BH à BD [o] sarà come HE à CD: fù dimostrata BH commensurabile in lunghezza à BD; sarà ancora HE [p] commensurabile in lunghezza à CD: per la qual cosa le due BH, HE, che sono i nomi del Binomio BE, sono commensurabili in lunghezza alle due BD, CD, che

sono

b 45. del 1.
c 21. del 10.
d 14. del 6.
x Corol. 2. la 19. del 5. e 10. del 6.
f 19. del 5.
g 11. del 5.
h 20. del 6.
K 10. del 10.
l 10. del 10. m Corol. alla 16. del 10.
n 6. defin. del 10.
o 16. del 5.
p 10. del 10.

sono i nomi dell'Apotome BC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo. Fù ancora dimostrata BH ad HE come BD à DC, perciò hanno la medesima proportione, ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

Finalmente perche BD à DC è come BH ad HE, se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla medesima BD, ancora il quadrato di BH superarà il quadrato di HE, [q] per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad essa BH; e se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza à BD, ancora il quadrato di BH superarà il quadrato di HE, [r] per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza à BH. Si che, se BD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ancora BH (ch'è commensurabile in lunghezza à BD) sarà commensurabile [t] in lunghezza alla Rationale A: e se CD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ancora HE (ch'è commensurabile in lunghezza à CD) sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A: E finalmente, se nessuna delle due BD, DC è commensurabile in lunghezza ad A, ne meno alcuna delle due BH, HE [u] sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che si disse nelle seconde, e terze definitioni, BE sarà Binomio del medesimo ordine dell'Apotome BC; cioè, se l'Apotome BC sarà prima, ò seconda, ò terza Apotome &c, sarà ancora BE primo, ò secondo, ò terzo Binomio &c, ch'era da dimostrarsi.

q 15 del 10.

r 15. del 10.

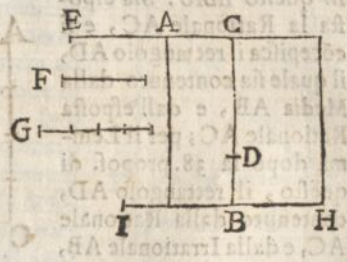
t 13. del 19.

u 14. del 10.

THEOREMA XCI. PROPOSITIONE CXV.

Se vn rettangolo è contenuto dall'Apotome, e dal Binomio, ed i nomi del Binomio sono commensurabili à i nomi dell'Apotome, e sono nella medesima proportione; la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è Rationale.

Sia il rettangolo AB, contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB, i di cui nomi CD, DB, siano commensurabili à i nomi CE, AE, dell'Apotome AC; e sia CD à DB, come CE ad EA; s'intenda la retta F, il di cui quadrato sia vguale al rettangolo AB. Dico che la retta F è Rationale. Sia esposta la Rationale G; si applichi al Binomio CB il rettangolo CH, [a] vguale al quadrato della Rationale G; sarà CH Rationale, ed il lato BH [b] sarà Apotome, della quale IB sia la congruente; dal che i nomi saranno HI, IB, commensurabili in lunghezza à i nomi CD, DB, e nella medesima proportione, cioè HI ad IB sarà come CD à DB: ma



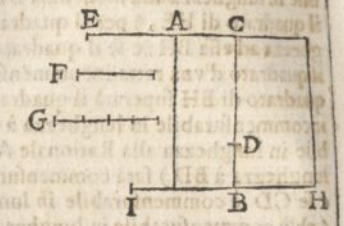
a 45. del 1.

b 113. del 10.

CD à

c 11. del 5. d 16. del 5. e 19. del 5. f 12. del 10. g 10. del 10. h 1. del 6. K 10. del 10. l 9. defin. del 10. m 8. defin. del 10.

CD à DB, per ipotesi, è come CE ad EA; sarà HI ad IB c come CE ad EA; e permutando, tutta HI à tutta CE d sarà come la parte IB alla parte EA; dal che l'auanzo HB all'auanzo CA e sarà come tutta HI à tutta CE. In oltre perche tanto IH, come CE, è commensurabile in lunghezza à CD; le due HI, CE f saranno commensurabili in lunghezza: ma HI à CE è dimostrata essere come HB à CA; sarà HB g commensurabile in lunghezza à CA. Hor perche i rettangoli HC, BA, hanno vna medesima altezza, sarà HC ad AB, h come HB à CA; e perche HB è commensurabile in lunghezza ad AC; sarà HC K commensurabile ad AB: ma HC è Rationale, sarà il rettangolo AB, che gli è commensurabile, l Rationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale ad AB, m sarà Rationale, come fù proposto dimostrare.



COROLLARIO.

Da quel che si è detto, è manifesto, che vno spatio Rationale può essere contenuto da due rette Irrationali; mentre il rettangolo AB è Rationale, ed è contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB, che sono linee Irrationali.

THEOREMA XCII. PROPOSITIONE CXVI.

Dalla Media ne nascono infinite linee Irrationali; e nessuna è la medesima delle tredici spiegate antecedentemente.

Sia la Media AB. Dico che dalla Media AB ne nascono infinite linee Irrationali; e nessuna di quelle è la medesima di quelle tredici spiegate in questo libro. Sia esposta la Rationale AC, e si cõcepisca il rettangolo AD, il quale sia contenuto dalla Media AB, e dall'esposta Rationale AC; per il Lemma dopo la 38. propos. di questo, il rettangolo AD, contenuto dalla Rationale AC, e dalla Irrationale AB, sarà Irrationale. Sia BE la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, sarà BE Irrationale.



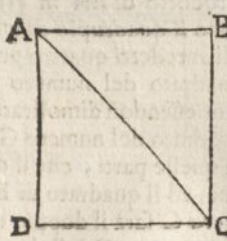
Dico

Dico, che BE non è alcuna di quelle tredici notate dopo la 112. propoſ. di queſto. Perche, applicando alla Rationale AC il quadrato della media, il lato, che ne riſulta, per la 23. propoſ. di queſto, è Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AC; applicando dunque ad AC il quadrato della media AB, il lato, che non riſulta, ſarà Rationale, e perciò non ſarà il medeſimo, che l'irrationale BE. In oltre applicando ad AC ciaſcun quadrato dell' altre dodici irrationali, delle quali ſi è parlato di ſopra, ciaſcun lato, che ne riſulta, ò è vno de'Binomij, ouero vna delle Apotome, come appariſce nelle propoſitioni 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. di queſto. E perche il quadrato dell'irrationale BE, applicato alla Rationale AC, fà il lato AB Media; ſarà manifeſto, che l'irrationale BE è differente da tutte le tredici ſopra notate, mentre applicato il ſuo quadrato alla Rationale AC, fà il lato differente da quei lati fatti da'quadrati di quelle tredici, applicati alla medeſima Rationale AC.

Si compiſca il rettangolo DE, il quale ſarà contenuto dalla Rationale BD, e dall'irrationale BE; e per il lemma dopo la 38. propoſ. il rettangolo DE ſarà irrationale. S'intenda la retta EF, il di cui quadrato ſia vguale all'irrationale DE, ſarà EF irrationale. Dico, che l'irrationale EF non è alcuna di quelle tredici ſopra nominate, ne meno è la medeſima, che BE. Perche il quadrato di EF, cioè il rettangolo DE, applicato alla Rationale BD, fà il lato BE, ed i quadrati di quelle tredici, come ancora il quadrato di BE, applicati alla Rationale BD, fanno, per quel che ſi è dimoſtrato, i lati diuerſi da BE, ſarà manifeſto, che EF non è alcuna di quelle tredici, ne meno è la medeſima, che BE. Nell'iſteſſo modo, che ſi ſono trouate le irrationali BE, EF, ſe ne poſſono ritrouare infinite altre, diuerſe da quelle tredici, e diuerſe frà di loro, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XCIII. PROPOSITIONE CXVII.

Il Diametro, ò Diagonale del quadrato, è incommenſurabile in lunghezza al lato del medeſimo quadrato.

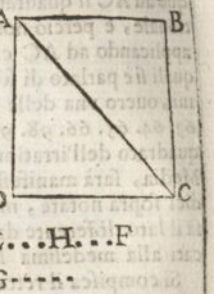


Sia il quadrato ABCD, il di cui diametro AC. Dico, che il diametro AC è incommenſurabile in lunghezza al lato AB. Se il diametro AC non è incommenſurabile in lunghezza ad AB, ſarà dunque al lato AB commenſurabile in lunghezza, e perciò il diametro AC al lato AB [a] haurà la proportione, che hà il numero al numero. Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, ſiano i minimi di quelli, che hanno la proportione di EF à G. Perche il quadrato del lato AC [b] è vguale à i quadrati de i due lati AB, BC, ed i quadrati de i lati AB, BC ſono frà di loro vguali, ſarà il quadrato

a 5. del 10.

b 47. de. 1.

drato di AC il doppio del quadrato del lato AB. In oltre perche il quadrato di AC al quadrato di AB [c] hà duplicata proportione di quella, che hà il lato AC al lato AB, e per ipoteſi, AC ad AB è come il numero EF al numero G; il quadrato di AC al quadrato di AB hauerà duplicata proportione di quella, che hà il numero EF al numero G: ma il quadrato del numero EF al quadrato del numero G [d] hà la medeſima duplicata proportione, che hà il numero EF al numero G; hauerà il quadrato di AC al quadrato di AB l'iſteſſa proportione, quale hà il quadrato del numero EF al quadrato del numero G: ma il quadrato di AC è il doppio del quadrato di AB; farà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G; e perciò dal quadrato del numero EF ſe ne può prendere la metà, cioè il quadrato del numero F ſarà numero paro. Dico che il numero EF è ancora numero paro: Perche ſe EF non è numero paro, ma è numero diſparo, multiplicato in ſe medeſimo, quel che produce [e] ſarà numero diſparo, e in conſeguenza il quadrato del numero EF ſarebbe numero diſparo, ch'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato; mentre ſi è dimoſtrato, che il quadrato del numero EF è numero paro. Non dunque il numero EF è *diſparo, ma è numero paro.* E perche i numeri EF, & G, ſono *i minimi nella loro proportione*, ſaranno [f] in conſeguenza frà di loro primi, ed eſſendoſi dimoſtrato EF eſſere numero paro, ſarà G numero diſparo; perche ſe foſſe *numero paro*, i numeri pari EF, & G, hauerebbero per *commune miſura il numero* due, ed in tal caſo *non ſarebbero frà di loro primi*, che è contro à quel che ſi è *dimoſtrato*. *Non dunque G è numero paro*, ma è numero diſparo. *Si diuida il numero paro EF in due parti vguali*, che ſiano i due *EH. HF. Perche EH* è vguale ad HF, il prodotto di EH in ſe medeſimo ſarà vguale al prodotto di EH in HF; e ſarà ancora vguale al prodotto di HF in ſe medeſimo; e così i quattro prodotti, cioè il prodotto di EH in ſe medeſimo, quello, che ſi fà da HF in ſe medeſimo, e due volte il prodotto di EH in HF, ſono frà di loro vguali; e perciò tutti inſieme ſono il quadruplo di vno, cioè il quadruplo del quadrato di EH. Ma gli antedetti quattro prodotti ſono vguali [g] al quadrato di EF; ſarà il quadrato del numero EF il quadruplo del quadrato del numero EH. Hor eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G, ed è il quadruplo del quadrato del numero EH, di quelle parti, che il quadrato di EF è quattro, il quadrato di G ſarà due, ed il quadrato di EH ſarà vno: per la qual coſa il quadrato del numero G ſarà *il* doppio del quadrato del numero EH. Hor ſe il quadrato del numero G è il doppio del quadrato del numero EH, *ſi può* dunque il quadrato del numero G diuidere *in* due parti vguali, e perciò ſarà numero paro. E procedendoſi, come prima ſi fece, *ſi dimoſtrerà*, che G è numero paro: ma fù dimoſtrato eſſere numero diſparo, ſarà dunque G numero paro, e numero diſparo, ch'è *impoſſibile*. Non dunque il



c 20. del 6.
d 12. del 8.
e 29. del 9.
f 24. del 7.
g 4. Theor. dopo la 14. del 9.

diametro AC è commensurabile in lunghezza al lato AB, ma sono incommensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi.

In altro modo si dimostrerà il medesimo. Sia, se è possibile, il diametro AC commensurabile in lunghezza al lato AB, sarà la proportione di AC ad AB, [h] come quella del numero al numero. Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, siano i minimi nella loro proportione; in conseguenza saranno frà di loro primi. Dico prima, che G non è l'vnità. Perche AC ad AB è come EF à G, sarà il quadrato di AC al quadrato di AB, per quel che sopra si è dimostrato, come il quadrato di EF al quadrato di G: ma il quadrato di AC fù sopra dimostrato il doppio del quadrato di AB; sarà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G. Se dunque G sarà l'vnità, il suo quadrato sarà ancora l'vnità: ma il quadrato di EF è il doppio del quadrato di G; sarà il quadrato di EF il numero due, il che non può essere, stante che EF, per ipotesi, non è l'vnità; e perciò al minimo sarà il numero due; nel qual caso il numero EF sarebbe due, ed il suo quadrato sarebbe ancora due, ch'è impossibile. Non dunque G è l'vnità, ma sarà qualche numero. E perche si è dimostrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G; in conseguenza il quadrato del numero G misura il quadrato del numero EF, e per la 14. propos. del 8. lib. il lato dell'vno misura il lato dell'altro, cioè il numero G misurerà il numero EF: ma il numero G misura se medesimo, perciò i numeri G, & EF, che hanno vna commune misura, sono frà di loro composti: sono, per quel che si disse, numeri frà di loro primi; sarebbero frà di loro primi, e sarebbero frà di loro composti, ch'è impossibile. Non dunque il diametro AC è commensurabile al lato AB, ma sono incommensurabili, ch'era da dimostrarsi.

[h] 5. del 10.

SCOLIO.

Sogliono i Commentatori aggiungere quì vn'appendice, cauata da alcuni esemplari Greci, in ordine à ritrouare altre grandezze incommensurabili, tanto ne' piani, come ne i solidi: ma perche ancora non si è parlato de' solidi, m'è parso bene porre quest'appendice nel fine del duodecimo Elemento.

Fine del Decimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO VNDECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Il Solido, ò corpo, è quello, che hà lunghezza, larghezza, e grossezza.

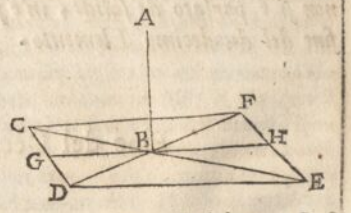
II.

L'estremo del solido è la superficie.

III.

La linea retta si dice essere perpendicolare, ouero eretta al piano, quando concorrendo con vn *solo estremo* in quel piano, *fà angoli retti con tutte le rette linee*, che passano per *il concorso*, e giacciono in quel medesimo piano.

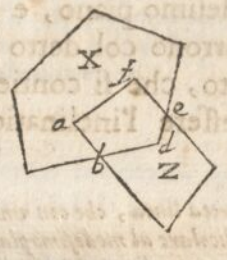
Si concepisca la retta linea AB eleuata, in modo, che concorra nel piano CDEF col solo estremo B, e dal punto B s'intendano distese nel piano CDEF quante rette linee si vogliano, come BC, BG, BD, BE, BH, BF, &c. se la retta AB farà angoli retti con tutte le nominate rette, e con tutte l'infinite altre, che dal punto B si distenderanno nel piano CDEF, la retta AB si dirà essere eretta, cioè perpendicolare, al piano CDEF.

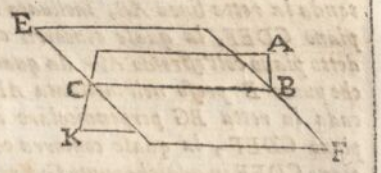


I V.

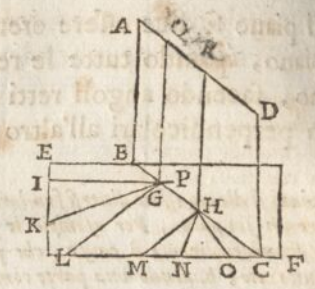
Il piano si dice essere eretto, ouero perpendicolare, al piano, quando tutte le rette, che giacciono in vn piano, facendo angoli retti con la commune settione, sono perpendicolari all'altro piano.

I piani si dicono essere diuersi frà loro, quando continuati non possono costituire vn sol piano. Per esempio le figure piane Z, ed X, benche si seghino scambieuolmente à causa, che parte dell'vna cade dentro dell'altra, con tutto ciò, hauendo vna parte commune, come la notata a b d e f, non sono in diuersi piani, ma costituiscono il solo piano Z X, in modo, che se i due piani Z, ed X saranno continuati da tutte le parti indeterminatamente, non saranno due piani distinti, ma costituiranno vn solo piano: e questi non si dicono piani diuersi, ma si dicono essere in vn medesimo piano. Quei piani poi, che, segandosi scambieuolmente, e continuati non costituiscono vn medesimo piano, si dicono essere piani diuersi; come sono i piani AC, EF, i quali si segano scambieuolmente, non hanno alcuna parte commune, e continuati non possono costituire vn sol piano. E perche ogni piano hà lunghezza, e larghezza, se due piani diuersi concorreranno scambieuolmente, ò concorreranno secondo la loro lunghezza, ouero secondo la loro larghezza, sì che in qualunque modo il loro commune concorso necessariamente sarà vna linea, come apparisce ne i piani diuersi AC, EF, che concorrono scambieuolmente, ed il loro commune concorso è la linea BC. Hor se i piani AC, EF si concepiranno continuati, non potendo costituire vn sol piano, stante, che gli supponiamo piani diuersi, la continuatione dell'vno sarà diuersa dalla continuatione dell'altro; cioè la continuatione CF, del piano EF caderà totalmente fuori del piano AK; e la continuatione BK, del piano AC, caderà totalmente fuori del piano EF, perche altrimente costituirebbero vn sol piano, ch'è contro all'ipotesi, mentre si suppongono essere piani diuersi; e perciò continuati si segaranno nella linea BC del concorso. E per l'auuenire la linea BC, ch'è commune segamento, si chiamerà commune settione de i piani, che scambieuolmente si segano; e si dice commune settione, stante che la linea BC





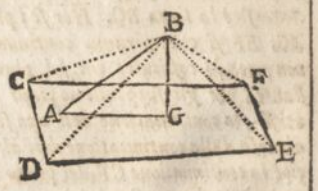
giace nel piano AC, e giace ancora nel piano EF. Supposto questo, si considerino i piani diuersi ABCD, & EF, i quali si seghino scambieuolmente, e la loro commune settione sia la linea BG; si concepiscano presi nel piano ABCD quanti si voglia punti Q, R, da i quali si concepiscano tirate le rette QG, RH, giacenti nel piano ABCD, e che facciano angoli retti con la commune settione BC; se le rette QG, RH, &c. saranno perpendicolari al piano EF, cioè se faranno angoli retti con tutte le infinite rette GI, GK, GL, HM, HN, HO, &c. che sono distese nel piano EF, il piano ABCD si dirà esser'eretto, cioè essere perpendicolare al piano EF.



V.

Quando vna retta linea, inclinata ad vn piano, concorre in quel piano solamente con vno de'suoi estremi, e da qualche punto di essa cade vn'altra retta, perpendicolare al medesimo piano, e frà i punti, doue queste due rette concorrono col detto piano, è tirata vna retta; l'angolo acuto, che si contiene da questa, e dall'inclinata, si dice essere l'inclinatione, che hà la retta inclinata al piano.

La retta linea, che con vno de i suoi estremi concorre in vn piano, e non è perpendicolare al medesimo piano, si dice essere inclinata à quel piano. Hor s'intenda la retta linea AB, inclinata al piano CDEF, la quale concorra col detto piano coll'estremo A; e da qualche punto B preso nell'inclinata AB, cada la retta BG perpendicolare al piano CDEF, la quale concorra col piano CDEF in qualche punto G; tirata la retta AG, l'angolo acuto BAG, contenuto dall'inclinata BA, e dalla retta AG, si dice essere l'inclinatione, che hà la retta BA al piano CDEF.

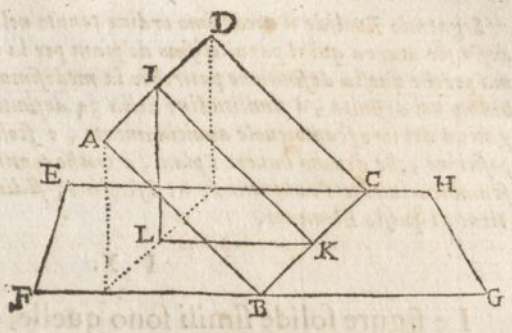


V I.

Quando dalla commune settione di due piani, che

scam-

ſcambieuolmente ſi ſegano non ad angoli retti, ſono tirate due rette linee, vna in vn piano, e l'altra nell' altro piano, le quali facciano angoli retti con la commune ſettione: l'angolo acuto, che ſi contiene da quelle rette, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà vno di quei piani all'altro.

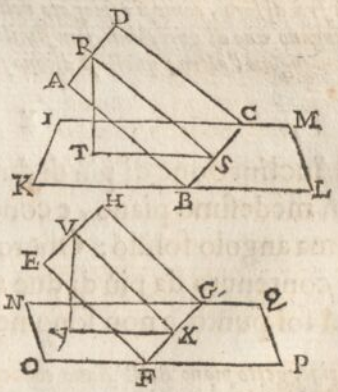


Vn piano ſi dice eſſere inclinato ad vn altro piano, quando concorrendo con quel piano, non lo ſega perpendicolarmente; come nella figura ſeguente il piano ABCD ſega il piano EFGH, e la commune ſettione è la linea BC. Se il piano ABCD non è perpendicolare al piano EFGH, ſi dirà il piano ABCD eſſere inclinato al piano EFGH; e preſo nella commune ſettione BC qualunque punto K, dal quale nel piano EG ſia diſteſa la retta KL, che faccia angoli retti con la commune ſettione BC, e dal medeſimo punto K nel piano ABCD ſia tirata la retta KI, che ſimilmente faccia angoli retti con la linea BC, l'angolo acuto IKL, che ſi contiene dalla retta IK, e dalla retta KL, è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ABCD al piano EFGH: e ſi chiama ancora angolo dell'inclinatione.

VIII.

I piani ſi dicono eſſere ſimilmente inclinati quando gli angoli delle loro inclinationi ſono frà di loro vguali.

S'intendano i piani ABCD, EFGH, inclinati à i piani IKLM, NOPQ, e le loro inclinationi ſiano gli angoli RST, VXY; Se gli angoli RST, VXY, ſono frà di loro vguali, i piani ABCD, EFGH, ſi diranno eſſere ſimilmente inclinati à i piani KLMI, NOPQ.



VIII.

Piani paralleli, ò equidistanti, sono quelli, che continuati da tutte le parti mai s'auuicinano, ne si scostano in luogo alcuno della loro infinita estensione.

Seguendo Euclide il medesimo ordine tenuto nel definire le rette parallele, definisce ancora quì il parallelismo de'piani per la negatiua del loro concorso; ma perche questa definitione patirebbe la medesima eccettione dell'altra, l'habbiamo noi definita, à similitudine della 34. definitione del primo, per la negatiua del loro scambieuole auuicinamento, e scostamento. Quale poi sia la positione, che deuono hauere i piani, accioche continuati da tutte le parti mai scambieuolmente s'auuicinino, ne si scostino, si dimostrerà nella 14. propositione di questo Elemento.

IX.

Le figure solide simili sono quelle, che sono contenute da piani simili, e di numeri vguali.

X.

Le figure solide simili, ed vguali, sono quelle, che sono contenute da piani simili, ed vguali di numero, e grandezza.

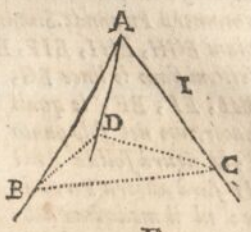
Quando i piani, che contengono vn solido, sono vguali di numero à i piani, che contengono vn altro solido, cioè che tante faccie siano in vno, per quante faccie sono nell'altro; se i piani, che contengono vno di quelli, sono simili à i corrispondenti piani, che contengono l'altro solido; quei solidi si dicono essere simili frà di loro, come si è spiegato nella nona definitione: se poi i piani, che contengono vno di quei solidi, sono simili, ed vguali à i corrispondenti piani, che contengono l'altro; quelli si dicono solidi simili, & vguali.

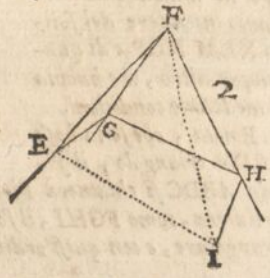
XI.

L'inclinatione di più di due rette linee, che non sono in vn medesimo piano, e concorrono in vn sol punto, si chiama angolo solido: Ouero, l'angolo solido è quello, ch'è contenuto da più di due angoli piani, che s'vniscono in vn sol punto, e non sono nel medesimo piano.

Nel soggetto piano BAC siano collocate le rette BA, CA, che concorrano scambieuolmente nel punto A, in modo, che costituiscano l'angolo pia-

no BAC; s'intenda poi inclinata la retta AD in modo, che l'estremo A sia nel soggetto piano, e l'estremo D sia eleuato in alto, la retta AD farà angolo con la retta AC nel piano DAC, e farà ancora angolo con la retta AB nel piano DAB; e così haueremo i tre angoli DAC, DAB, BAC, collocati in diuersi piani, i quali s'vniscono nel medesimo punto A. Hor la scambieuole inclinatione delle rette BA, DA, CA, concorrenti nel punto A; ouero la scambieuole vnione, che gli angoli piani BAD, DAC, BAC, fanno nel punto A, si chiama angolo solido. Similmente, nella seconda figura; S'intendano le rette EF, IF, nel soggetto piano, le quali, concorrendo insieme, costituiscano l'angolo piano EFI; s'intendano poi inclinate le rette HF, GF, in modo, che con vno de i loro estremi concorrano in F, e gli altri estremi H, & G, siano eleuati in alto; la retta HF farà angolo con la retta IF, nel piano HFI; e farà angolo ancora con la retta FG, nel piano FGH. Finalmente la retta GF farà angolo con la retta EF, nel piano GFE, e farà angolo con FH, nel piano GFH; e così haueremo quattro angoli in diuersi piani, che sono gli angoli EFG, GFH, HFI, IFE, la di cui vnione nel punto F si chiama angolo solido, come si disse.





XII.

Quando dagli estremi d'vn piano rettilineo si stendono piani rettilinei, in modo, che i contigui scambieuolmente si seghino, e le communi settioni concorrano in vn sol punto; il solido, contenuto da quei piani rettilinei, si chiama Piramide.

Dagli estremi del piano rettilineo DBC si concepiscano stendersi i piani rettilinei ABD, ADC, ABC, in modo, che i contigui ABD, ADC, scambieuolmente si seghino, secondo qualche linea AD: Similmente i contigui ADB, ABC, si seghino, e la commune settione sia AB; e si seghino ancora i cõtigui piani ABC, ACD, secondo la linea AC, e le communi settioni AD, AB, AC, concorrano nel solo punto A; la figu-

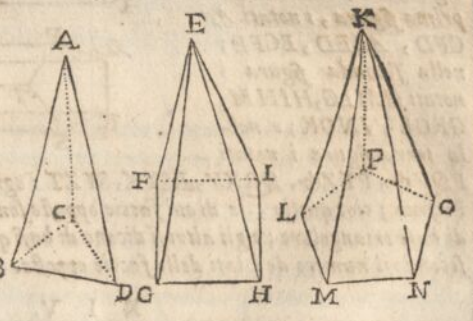
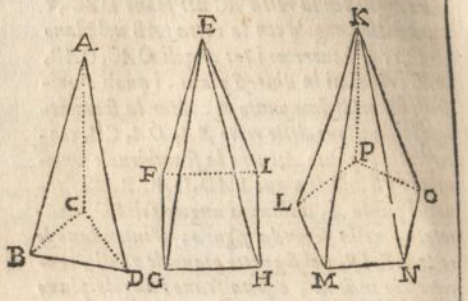


figura ſolida, contenuta da i piani ABD, ADC, ABC, BDC, è quella, che ſi chiamerà Piramide. Similmente da gli eſtremi del piano FGHI, ſi ſtendano i piani EGH, EHI, EIF, EFG, in modo, che i contigui ſi ſeghino, e le communi ſettioni ſiano le linee EG, EH, EI, EF, le quali concorrano nel ſolo punto E, la figura ſolida EFG HI ſarà ancora Piramide: ed il medeſimo dobbiamo intendere del ſolido KLM NOP, e di qualunque altro, che habbia le medeſime conditioni.

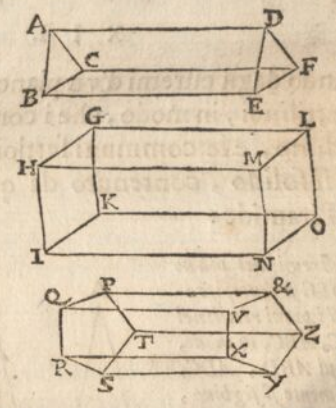


E nota, che ſe la baſe CBD è triangolo, il ſolido ABDC ſi chiamerà Piramide di baſe triangolare: ſe la baſe ſarà quadrilatera, come FGHI, il ſolido EFGHI, ſi chiamerà Piramide di baſe quadrangolare, e con queſt'ordine per le altre.

X I I I.

Il Priſma è la figura ſolida contenuta da piani, de' quali due, che ſono oppoſti, ſono frà loro vguali, ſimili, e paralleli; e gli altri ſono tutti parallelogrammi.

Per eſempio nella figura ſeguente, i piani oppoſti, cioè i triangoli ABC DEF, ouero i quadrangoli HIKG, MNOL; ouero i pentagoni PQR ST, VXYZ&, ſiano ſimili, vguali, e paralleli, e gli altri ſiano parallelogrammi, come nella prima figura, i notati A CFD, ABED, BCFE; nella ſeconda figura i notati HMLG, HINM, GKOL, INOK; e nella terza figura i notati PQV&, PTZ&, QRXV, RSTX, SYZT: ogn'vno di queſti ſolidi ſi chiama Priſma; cioè quello, le di cui faccie oppoſte ſono triangoli, ſi chiama Priſma di baſe triangolare; e gli altri ſi dicono di baſi quadrangolari, ò pentagonali, ſecondo il numero de i lati delle faccie oppoſte.



X I V.

La Sfera è il ſolido deſcritto dalla reuolutione del mez-

zo circolo, fatta intorno al ſuo diametro poſto immobile, fin che ritorna nel luogo, d'onde partì.

Ouero, ſecondo Theodoſio, è la figura ſolida, contenuta da vna ſola ſuperficie, alla quale tutte le rette, che vi cadono da vno de i punti di dentro, ſono frà di loro vguali.

XV.

Aſſe della sfera è quella retta linea, intorno alla quale fù circonuoluto quel mezzo circolo, che deſcriſſe la sfera.

XVI.

Il centro della sfera è quel medeſimo punto, ch'è centro del detto mezzo circolo.

XVII.

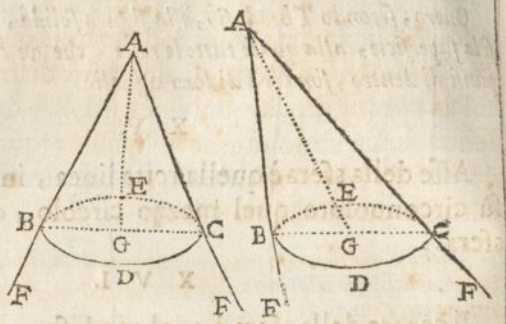
Il diametro della sfera è la retta linea, che paſſa per il centro, e termina con ambidue gli eſtremi nella ſuperficie della sfera.

XVIII.

Quando per qualche punto fiſſo in ſublime, e per la circonferenza d'vn circolo, che non ſia nel medeſimo piano, paſſa vna retta linea indeterminata, la quale, ſtando fermo il punto in ſublime, ſi muoua per la circonferenza di quel circolo, fin che ritorna nel luogo d'onde partì; la figura ſolida, contenuta dal circolo, e dalla ſuperficie deſcritta dall'intiera reuolutione di quella retta linea, la chiameremo Cono.

Spiega Euclide la generatione del Cono con la reuolutione del triangolo rettangolo intorno ad vno de ſuoi lati, che contengono l'angolo retto: ma perche la definitione, che ne dà, non è così generale, come quella, che pone Apollonio Pergeo ne'ſuoi Elementi Conici, mi è parſo bene, aderendo à quel che ne definiſce il medeſimo Apollonio, mutare la definitione d'Euclide, ed in ſuo luogo porne vn'altra più generale; la quale, benche non ſia la medeſima ſpiegata dal detto Appollonio, è nondimeno poco da quella differente, non parendomi neceſſario ſpiegare in queſto luogo, che coſa ſia ſuperficie del Cono, e che coſa ſiano i Coni oppoſti, eſſendo materia, che appartiene totalmente alla dottrina

delle ſettioni Coniche, e come tale ſe ne parlerà al proprio luogo. E per ſpiegatione della ſoprapoſta definitione, ſi conſideri il circolo BDCE, ed il punto A fuori del piano BDCE; e dal punto A s'intenda tirata la retta AF, che paſſi per la circonferenza del circolo BDC, e poſto il punto A immobile, s'intenda muouerſi la retta linea AF in modo, che ſcorra per tutta la circonferenza BDCEB, finche ritorna nel luogo d'onde partì: il ſolido ABDCE, contenuto dal circolo BDCE, e dalla ſuperficie deſcritta dalla intiera reuolutione della retta AF, per la circonferenza BDCE, è quello, che chiameremo Cono, il di cui vertice, ò cima, ſarà il punto immobile A.



X I X.

Aſſe del Cono è la retta linea tirata dal vertice del Cono al centro di quel circolo, intorno al quale ſi fece la reuolutione; *che nella figura antecedente ſarà la retta AG.*

X X.

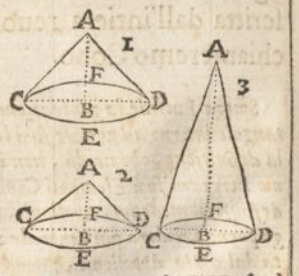
Baſe del Cono è quel medeſimo circolo, intorno al quale ſi riuolge la retta linea, che deſcriſſe il Cono; *che nella ſopra poſta figura è il circolo BDCE.*

Notiſi, che quando l'aſſe AG è perpendicolare alla baſe BDCE, come nell'antecedente figura, il Cono ABDCE ſi chiama Cono retto; e ſe l'aſſe AG non è perpendicolare alla baſe BDCE, ſi chiama Cono ſcaleno. Di più ne i coni retti, ſe l'aſſe AB della ſeguente figura è vguale alla retta CB, ch'è ſemidiametro del circolo CD, ſarà l'angolo BAC la metà d'vn angolo retto, [a] *e tutto l'angolo CAD ſarà retto; ed in tal caſo il ſolido ACD ſi chiama Cono rettangolo come nella prima figura. Se poi l'aſſe AB è minore del ſemidiametro BC, come nella ſeconda figura, ſarà l'angolo BAC maggiore della metà d'vn angolo retto,* [b] *e tutto l'angolo CAD ſarà ottuſo, e perciò il Cono ACD ſi dice Cono ambligonio. E finalmente ſe l'aſſe AB è maggiore del ſemidiametro BC come nella terza figura l'angolo CAB* [c] *ſarà minore della metà d'vn'angolo retto, e tutto l'angolo CAD ſarà acuto, ed in queſt'altro caſo il Cono ACD ſi dice Cono oſſigonio.*

a 5. & 32. del 1.

b 18. & 32. del 1.

c 18. & 32. del 1.

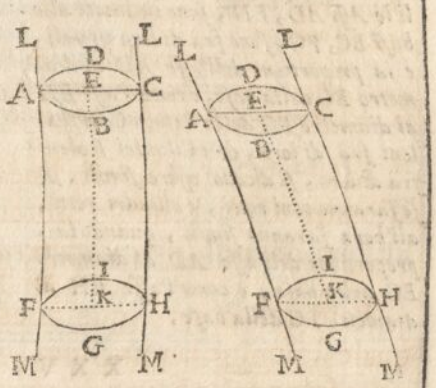


Quando

XXI.

Quando due circoli, sempre equidistanti, si muouono intorno à i loro centri, posti immobili, in modo, che rapiscano quella retta linea indeterminata, che passa per li corrispondenti estremi di due loro diametri paralleli; il solido contenuto da quei due circoli, e dalla superficie descritta dalla reuolutione di quella retta, che passa per gli estremi de i detti diametri, fin che ritorna al luogo d'onde partì, lo chiameremo Cilindro.

Questa definitione ancora è più generale di quella, che pone Euclide, e l'habbiamo esposta alquanto differente da quella, che pone il Sereni nella sua settione del Cilindro à causa, che non fà bisogno in questi elementi definire, che cosa sia superficie Cilindrica, non parlandosi in modo alcuno delle settioni del Cilindro. E per chiarezza di quanto si è detto, si concepiscano i due circoli ABCD, FGHI, frà di loro equidistanti; i di cui centri siano i punti E, & K, & i diametri AC, FH, siano frà di loro paralleli; per li corrispondenti estremi A, ed F, de i diametri AC, FH, si concepisca passare la retta linea indeterminata LM, e s'intendano immobili i centri E, K, intorno à i quali si muouino i circoli ABCD, FGHI, in modo, che siano sempre equidistanti, e nella loro reuolutione rapiscano i diametri AC, FH, assieme con la retta LM, fin tanto, che la retta LM ritorni nel luogo donde partì; il solido contenuto da i circoli ABCD, FGHI, e dalla superficie descritta dall'intiera reuolutione della retta LM, sarà quello, che chiameremo Cilindro.



XXII.

La retta linea, che congiunge i centri de circoli circonuoluti, si chiama Asse del Cilindro, *che nella figura antecedente è la retta EK.*

XXIII.

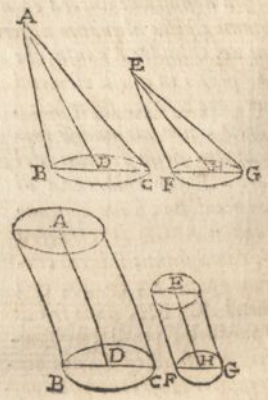
Basi del Cilindro si chiamano quei due circoli, che nella loro reuolutione descrissero il Cilindro, *come sono i circoli ABCD, FGHI.*

Quando l'asse EK è perpendicolare alle basi ABCD, FGHI, il Cilindro AFHC si chiama Cilindro retto; e se l'asse EK non è perpendicolare alle basi ABCD, FGHI, il solido AFHC si chiama Cilindro scaleno.

XXIV.

I Coni frà di loro, ed i Cilindri frà di loro, si dicono simili, quando ne i Coni, e Cilindri retti, le assi sono proportionali à i Diametri delle basi; e ne i Coni, e Cilindri scaleni, quando le inclinationi delle Assi alle basi sono frà di loro vguali, e le assi sono proportionali à i diametri delle basi.

Per esempio se gli angoli co'i quali le Assi AD, EH, sono inclinate alle basi BC, FG, sono frà di loro vguali, e la proportione dell'asse AD al diametro BC della base, è come l'asse EH al diametro FG della base; i Coni scaleni frà di loro, & i Cilindri scaleni frà di loro, si dicono essere simili. E se saranno coni retti, e cilindri retti, all'hora saranno simili, quando la proportione dell'asse AD al diametro BC della base, è come l'asse EH al diametro FG della base.



XXV.

Il Cubo, e la figura solida contenuta da sei quadrati vguali.

XXVI.

Il Tetraedro è la figura solida, contenuta da quattro triangoli equilateri, & vguali frà loro.

XXVII.

L'Ottaedro è la figura solida, contenuta da otto triangoli equilateri, ed vguali.

XXVIII.

Il Dodecaedro è la figura solida contenuta da dodeci pentagoni vguali, equilateri, & equiangoli.

L'Ico-

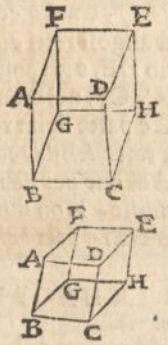
XXIX.

L'Icosaedro è la figura solida, contenuta da vinti triangoli equilateri, ed vguali.

XXX.

Il Parallelepipedo è la figura solida contenuta da sei figure quadrilatere, delle quali le opposte sono frà di loro parallele.

Nella seguente figura il solido FBCE è contenuto da sei quadrilateri, che sono ABCD, BCHG, GHEF, ADEF, ABGF, DCHE, e gli opposti sono paralleli, cioè il quadrilatero ABCD è parallelo al quadrilatero opposto FGHE, come ancora il quadrilatero ABGF è parallelo all' opposto DCHE, ed il quadrilatero ADEF è parallelo al suo opposto BCHG.



XXXI.

La figura solida si dice essere iscritta nella figura solida, quando tutti gli angoli della figura iscritta toccano, ò i lati, ò gli angoli, ò le faccie della figura, nella quale è iscritta.

XXXII.

La figura solida si dice essere circoscritta intorno alla figura solida, quando co'i suoi angoli, ò lati, ò faccie, tocca tutti gli angoli di quella figura, intorno alla quale è circoscritta.

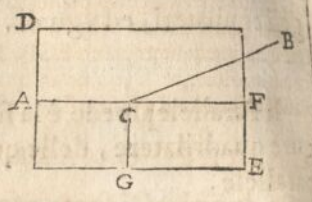
Nelle due antecedenti definitioni non è necessario, che tutti gli angoli della figura iscritta tocchino, ò tutti gli angoli, ò tutti i lati, ò tutte le faccie della figura, alla quale è circoscritta; ma basta che alcuni tocchino gli angoli, altri tocchino i lati, ed altri le faccie; e finalmente, pur che gli angoli della figura interna tocchino tutti, non importa, che tocchino lati, ò angoli, ò faccie della figura esterna.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Non è possibile, che parte d'vna linea retta sia

distesa

distesa nel soggetto piano, e parte ne sia eleuata in sublime.



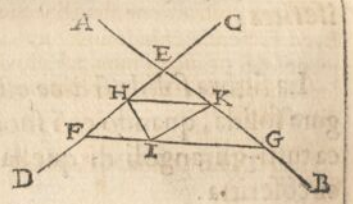
Nel piano DE, se è possibile, sia distesa parte della retta AB, come AC, e parte ne sia eleuata in sublime, come fà la retta CB, in modo, che AC sia totalmente distesa nel piano DE, e la parte CB sia totalmente eleuata. Si ponga nel piano DE la retta CG [a] ad angoli retti con la retta AC, e nel medesimo piano DE, nel punto C, si ponga la retta CF [b] ad angoli retti con CG. Perche le rette AC, CF, sono nel medesimo piano DE, e gli angoli GCA, GCF, sono retti, per la 14. del primo, le rette AC, CF, nel piano DE, costituiscono la sola retta linea AF: per il che AC è parte della retta AF: ma, per ipotesi, la medesima AC è parte della retta AB; la retta dunque AC sarà commune parte delle due rette AB, AF, che per l'annotatione dopo la 3. propositione del 1. al num. 2. è impossibile. Non dunque parte della retta AB è collocata nel soggetto piano DE, e parte eleuata in sublime, ch'era da dimostrarsi.

[a] 12. del 1.

[b] 11. del 1.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due rette linee si segano scambieuolmente, sono in vn medesimo piano; ed ogni triangolo è in vn medesimo piano.



Si seghino le rette AB, CD in qualche punto E, e preso nelle rette ED, EB, due qualunque punti F, & G, tirata la retta FG. Dico prima che il triangolo EFG è in vn medesimo piano. Se il triangolo EFG non è in vn medesimo piano, parte di esso ne sarà nel soggetto piano, e parte in sublime; sia nel soggetto piano la parte EHIG, ed il rimanente FHI sia in sublime, sarà della retta EF la parte EH nel soggetto piano, e la parte HF in sublime, ch'è contro all'antecedente propositione. Di nuouo, supposto che la parte EFIK sia nel soggetto piano, e la parte IKG in sublime, similmente sarà della retta EG la parte EK nel soggetto piano, e la parte KG in sublime, che per l'antecedente propositione è impossibile. Nell'istesso modo si dimostrerà, che nessun'altra parte del triangolo è in diuerso piano; e perciò tutto il triangolo EFG, è in vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

In oltre. Dico che le rette AB, CD sono in vn medesimo piano.

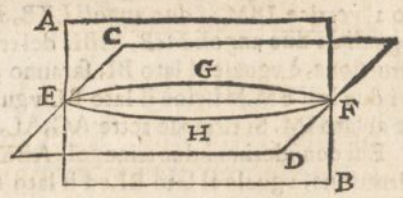
Perche

Perche ſi è dimoſtrato, che il triangolo EFG è in vn medeſimo piano, i ſuoi eſtremi, cioè le rette EF, FG, GE, ſaranno nel medeſimo piano, e tutta la retta GA ſarà nel medeſimo piano EFG; perche altrimente la parte EG ſarebbe nel ſoggetto piano EFG, e la parte EA ſarebbe in ſublime, il che per l'antecedente propoſ. è impoſſibile. Per l'iſteſſa ragione la retta DC è nel medeſimo piano EGF. Per la qual coſa le rette AB, CD, che ſcambieuolmente ſi ſegano in qualche punto E, ſono in vn medeſimo piano, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se due piani ſi ſegano ſcambieuolmente, la loro commune ſettione è linea retta.

Si ſeghino ſcambieuolmente i piani AB, CD, e la loro commune ſettione ſia la linea EF. Dico, che la linea EF è linea retta. Se EF non è linea retta, dal punto E al punto F ſi tiri vna retta linea; ò quella congrue con la linea E, ed in tal caſo la linea EF è retta; ò pure non congrue con EF, e giace in vno de i due piani AB, CD. Sia prima collocata nel piano AB, come fà la linea EGF. Di nuouo dal punto E al punto F, nel piano CD, ſi tiri vna retta linea, la quale ò congruerà con EF, ed all'hora EF ſarà retta linea; ò paſſerà fuori della linea EF, come fà la linea EHF. Perche le linee EGF, EHF, per coſtruttione, ſono linee rette, ed ambedue concorrono ne i punti E, ed F, perciò chiudono figura, il che, per l'annotatione dopo la terza propoſ. del primo, al num. 3. è impoſſibile. Non dunque le linee EGF, EHF ſono linee rette, ma la commune ſettione EF ſarà linea retta, ch'era da dimoſtrarſi.



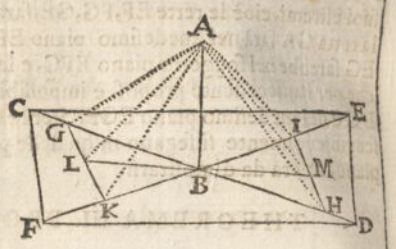
THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se nella commune interſegatione di due rette linee, che ſcambieuolmente ſi ſegano, ſia eleuata vna retta linea, che faccia angoli retti con le rette, che ſi ſegano; quella ſarà perpendicolare al piano, nel quale ſono collocate le rette, che ſcambieuolmente ſi ſegano.

Si ſeghino le rette CD, FE, in qualche punto B; e nel punto B cada la retta AB, in modo, che faccia angoli retti con le rette CD, FE; cioè che gli angoli ABD, ABE, ABC, ABF, ſiano retti. Dico, che la retta AB è perpendicolare al piano CFDE, nel quale ſi ſuppongono collocate le rette

CD,

CD,EF. Perche le rette CD, FE, si segano, per ipotesi, nel punto B, saranno per la 2. propos. di questo, in vn medesimo piano: sia quel piano il notato CFDE; dalle rette BE, BF [a] si taglino le vguali parti BI,BK;e dalle rette BD, BC, si taglino le vguali parti BH,BG;e si tirino le rette HI, KG. Si considerino i due triãgoli GBK, IBH. Perche IB, per costruttione, è vguale à BK, ed il lato HB è vguale à BG; i due lati IB, BH, sono vguali à i due lati KB, BG, l'angolo IBH è vguale all'angolo al vertice GBK; [b] sarà la base IH vguale alla base GK; e l'angolo BIH vguale all'angolo BKG. Per il punto B si faccia passare, nel piano CD, qualunque retta MBL,in modo, che seghi le rette GK, IH, come in L, ed M,e si considerino i due triangoli BKL,BIM. Perche l'angolo BKL è dimostrato vguale all'angolo BIM, e l'angolo LBK [c] è vguale all'angolo al vertice IBM; i due angoli LKB, LBK, del triangolo LBK, saranno vguali à i due angoli MIB, MBI, del triangolo MBI; il lato KB, per costruttione, è vguale al lato BI, saranno gli altri due lati BL, LK, [d] vguali à i due lati BM,MI;cioè il lato BL vguale al lato BM,ed il lato KL vguale al lato IM. Si tirino le rette AG,AL,AK,AH,AM,AI.



E si considerino i due triangoli ABK, ABI. Essendo il lato BK, per costruttione, vguale al lato BI,ed il lato AB è commune, i due lati AB,BK, saranno vguali à i due lati AB,BI; l'angolo ABK,per ipotesi,è vguale all'angolo ABI, stante che l'vno, e l'altro è retto; perciò la base AK [e] sarà vguale alla base AI. Nell'istesso modo, considerando i triangoli ABH, ABG,si dimostrerà,che il lato AH è vguale al lato AG.Si considerino poi i triangoli AKG,AIH, de'quali i due lati AI, IH, per quel che si è dimostrato, sono vguali à i due lati AK, KG, la base AH è dimostrata vguale alla base AG, e perciò l'angolo AIH [f] sarà vguale all'angolo AKG. Di più ne'triangoli AKL,AIM, i due lati AK,KL sono stati dimostrati vguali à i due lati AI, IM; l'angolo AKL è dimostrato vguale all'angolo AIM; sarà la base AM [g] vguale alla base AL. Finalmente si considerino i due triangoli ABL, ABM. Perche il lato BM è dimostrato vguale al lato BL, ed il lato AB è commune ad ambidue i triangoli; saranno i due lati AB, BM, vguali à i due lati AB,BL; la base AM è dimostrata vguale alla base AL,sarà l'angolo ABM [h] vguale all'angolo ABL: per la qual cosa gli angoli ABM, ABL [K] sono retti, e la retta AB è perpendicolare alla retta LM. Nell'istesso modo prouaremo, che la retta AB è perpendicolare à qualunque altra retta, che passa per il punto B, e giace nel piano CFDE; e perciò la retta AB è perpendicolare à tutte le infinite rette linee, che passano per il punto B,e giacciono nel piano CD; ed in conseguenza sarà AB perpendicolare al piano CFDE, che passa per quelle infinite rette linee: ma le rette CD,EF sono nel piano CFDE,sarà la retta AB [l] perpendicolare

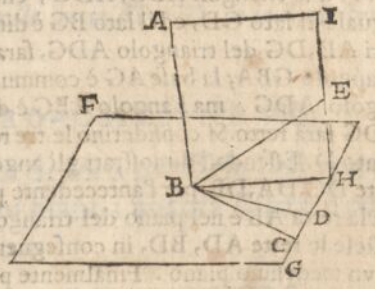
a 3.del 1.
b 4. del 1.
c 15.del 1.
d 26.del 1.
e 4. del 1.
f 8. del 1.
g 4.del 1.
h 8. del 1.
K 10. def. del 1.
l 3. def. del 11.

dicolare al piano, nel quale sono distese le rette CD, FE, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea cade nella commune intersegatione di tre rette linee, e fà angoli retti con tutte tre quelle; le medesime tre rette linee sono in vn medesimo piano.

Si seghino scambieuolmente le tre rette linee EB, DB, CB, in qualche punto B, nel quale cada la retta AB, in modo, che gli angoli ABE, ABD, ABC, siano retti. Dico, che le rette BC, BD, BE, sono in vn medesimo piano. Se non sono in vn medesimo piano, perche due di quelle, prese in qualunque modo, sono in vn medesimo piano; siano le due BD, BC, nel piano FG, e la retta BE, se è possibile, sia in sublime. Perche la retta AB fà angoli retti con le due BD, BC, per l'antecedente propos. la retta AB sarà perpendicolare al piano FG, nel quale giacciono le due BD, BC. In oltre le due AB, BE, segandosi in B, [a] sono in vn medesimo piano; sia quel piano il notato ABEI, il quale continuato passerà per il punto B: e perche il punto B è nel piano FG, perciò il piano ABE, continuato, passando per il punto B, segarà il piano FG; sia la commune settione la linea BH; sarà BH [b] linea retta, distesa nel piano FG, e le tre AB, BE, BH sono nel medesimo piano ABH: fù dimostrata la retta AB perpendicolare al piano FG, sarà l'angolo ABH [c] retto: ma l'angolo ABE, per ipotesi, è retto, l'angolo dunque ABE sarà vguale all'angolo ABH; la parte è vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque le rette BC, BD, BE sono in diuersi piani, ma sono in vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.



a 2. del 11.

b 3. del 11.

c 3. def. del 11.

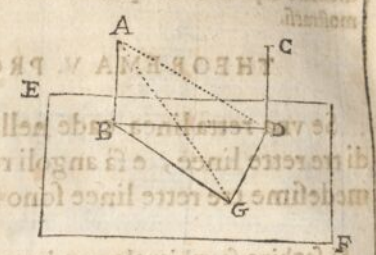
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due rette linee sono perpendicolari ad vn medesimo piano, quelle sono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD, perpendicolari al piano EF. Dico, che le rette AB, CD, sono frà di loro parallele. Dal punto D al punto B si tiri la retta BD. Perche i punti B, & D, sono nel piano EF, sarà la retta BD nel medemo piano EF: dal punto D nel piano EF, [a] si tiri la retta DG, in modo, che

a 11. del 1.

l'angolo GDB sia retto; si faccia
b 3. del 1. DG b vguale ad AB, e si tiri la retta BG. Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono perpendicolari al piano EF, e le rette BD, DG, GB, sono nel piano EF, gli
c 3. defin. del 11. ăgoli CDG, CDB, ABG, ABD, c saranno angoli retti. Si tirino le rette AG, AD; e si considerino i due triangoli GDB, ABD. Perche il lato DG è fatto vguale al lato AB, ed il lato BD è cõmune,



i due lati dũque GD, DB, del triangolo GDB, sono vguali à i due lati AB, BD, del triangolo ABD, l'angolo GDB è vguale all'angolo ABD, stante
d 4. del 1. che sono retti; sarà la base BG d vguale alla base AD. In oltre si considerino i due triangoli ABG, ADG; essendo il lato AB, per costruttione, vguale al lato GD, ed il lato BG è dimostrato vguale al lato AD; i due lati AD, DG, del triangolo ADG, saranno vguali à i due lati GB, BA, del
e 8. del 1. triangolo GBA; la base AG è commune, sarà l'angolo ABG e vguale all'angolo ADG: ma l'angolo ABG è dimostrato retto, l'angolo dunque ADG sarà retto. Si considerino le tre rette DC, DA, DB, che si segano nel punto D. Essendosi dimostrati gli angoli GDC, GDA, GDB, retti, le tre rette DC, DA, DB, per l'antecedente propos. sono in vn medesimo piano; ma la retta AB è nel piano del triangolo ABD, cioè nel piano, doue sono distese le rette AD, BD, in conseguenza le rette AB, BD, AD, CD, sono in vn medesimo piano. Finalmente perche le rette AB, CD, sono in vn medesimo piano segate dalla retta BD, & i due angoli interni ABD, CDB, per quel che si è dimostrato, sono retti, saranno le rette AB, CD
f 28. del 1. frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi.

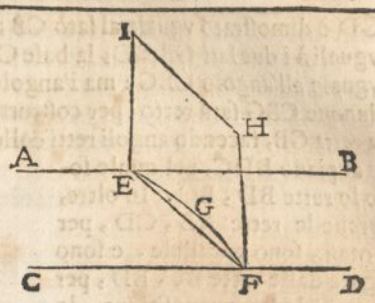
THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se frà due punti, presi in due rette parallele, è tirata vna linea retta, quella sarà nel medesimo piano con le proposte parallele.

Siano le due rette parallele AB, CD, nelle quali siano presi due qualunque punti E, ed F; e dal punto E al punto F sia tirata la retta EF. Dico che la retta EF è nel medesimo piano con le parallele AB, CD. Perche le rette AB, CD sono, per ipotesi, parallele, per la 34. defin. del primo, sono in vn medesimo piano; se la retta EF non è nel piano ABCD, sia, se è possibile, in qualche altro piano, fuori del piano ACBD; per li punti E, ed F, si faccia passare vn'altro piano, che seghi il piano ACDB, e la commune
g 3. del 11. settione sia la linea EGF; sarà la commune settione EGF g linea retta: e perche le rette EGF, & EF, concorrono insieme ne i punti E, ed F, perciò

chiudono

chiudono figura, che per l'annotatione dopo la terza del primo lib. num. 3. è impossibile. Non dunque la retta EF è in altro piano, fuori del piano ACDB: ma è nel medesimo piano ACDB, doue sono distese le parallele AB, CD, ch'era da dimostrarsi.



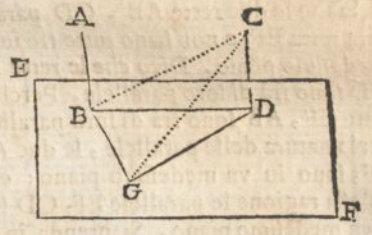
SCOLIO.

Se le rette linee AB, CD, non fossero parallele, se saranno collocate in vn medesimo piano, la retta EF, ed ogn'altra, che le congiunge sarà ancora nel medesimo piano colle rette AB, CD, e la dimostratione è la medesima.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se due rette linee sono frà di loro parallele, ed vna di quelle è perpendicolare ad vn piano; ancora l'altra è perpendicolare al medesimo piano.

Siano le rette AB, CD, frà di loro parallele, e la retta CD sia perpendicolare al piano EF. *Dico, che ancora AB è perpendicolare al piano EF.* Si continui la retta AB, *fin che concorra col piano EF in qualche punto B; dal punto B al punto D si tiri la retta BD: essendo i punti B, &* D, nel piano EF, sarà la retta BD nel medesimo piano EF; dal punto B nel piano EF si tiri la retta BG, [a] in modo, che l'angolo GBD sia retto; si faccia GB [b] vguale alla retta CD, e si tiri la retta GD. Perche la retta CD, per ipotesi, è perpendicolare al piano EF, gli angoli CDB, CDG, [c] sono retti. Si tirino le rette CB, CG, e si considerino i due triangoli CDB, GBD. Perche il lato GB, per costruttione, è vguale al lato CD, ed il lato BD è commune; i due lati CD, DB, del triangolo CDB, sono vguali à i due lati GB, BD, del triangolo GBD; l'angolo CDB è vguale all'angolo GBD, stante che sono retti, sarà la base CB [d] vguale alla base GD. Similmente si considerino i due triangoli CDG, CBG, de'quali il lato GB, per costruttione, è vguale al lato CD, il lato

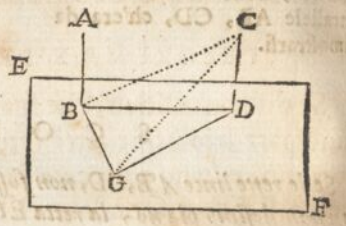


a 11. del 1.
b 3. del 1.
c 3. defin. del 11.
d 4. del 1.

GD è dimostrato vguale al lato CB; i due lati dunque CD, DG, sono vguali à i due lati GB, BC; la base CG è commune, sarà l'angolo CDG e vguale all'angolo CBG: ma l'angolo CDG è dimostrato retto, l'angolo dunque CBG sarà retto: per costruttione l'angolo GBD è retto, perciò la retta GB, facendo angoli retti colle due BD, BC, sarà [f] perpendicolare al piano BDC, nel quale sono le rette BD, BC. In oltre, perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono parallele, e sono segate dalle rette BC, BD, per l'antecedente propositione, le rette BC, BD, saranno nel medesimo piano con le parallele AB, CD: ma la retta GB è dimostrata perpendicolare al piano CBD; sarà dunque GB perpendicolare al piano ABDC, e perciò l'angolo ABG [g] sarà retto. Finalmente perche le rette AB, CD sono parallele, segate dalla retta BD, i due angoli ABD, CDB [h] sono vguali à due angoli retti, ma l'angolo CDB è dimostrato retto, sarà l'angolo ABD retto. E perche l'angolo ABG fù dimostrato retto, sarà la retta AB perpendicolare alle due rette BD, BG; e perciò sarà perpendicolare [K] al piano, doue sono le due GB, BD, cioè sarà perpendicolare al piano EF, come fù proposto dimostrare.

e 8. del 1.

f 4. del 11.



g 3. defin. del 11.

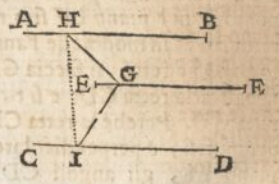
h 29. del 1.

K 4. del 11.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se due rette linee sono parallele ad vn altra retta linea, che non è nel medesimo piano, quelle due sono frà di loro parallele.

Siano le due rette AB, CD parallele alla retta EF, e non siano tutte tre in vn medesimo piano. Dico che le rette AB, CD sono frà di loro parallele. Perche le rette EF, AB sono frà di loro parallele, per la natura delle parallele, le due AB, EF, sono in vn medesimo piano: e per l'istessa ragione le parallele EF, CD sono in vn medesimo piano. Si prenda in EF qualche punto G, dal quale, nel piano EFBA, si tiri la retta GH, [a] in modo, che faccia angoli retti colla retta EF, e dal medesimo punto G nel piano ECDF, si tiri la retta GI, ad angoli retti con la medesima retta EF: Si prolunghino le rette GH, GI, sin che concorrano con le due AB, CD come in H, ed I: Essendo per costruttione, gli angoli EGH, EGI, retti, sarà la retta EG [b] perpendicolare al piano HGI, doue sono le rette HG, GI; E perche le rette AH, EG, per ipotesi, sono frà loro parallele, e la



a 11. del 1.

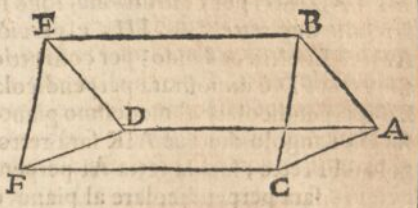
b 4. del 11.

retta

retta EG è dimostrata perpendicolare al piano HGI; sarà la retta AH [c] perpendicolare al medesimo piano HGI. Similmente, perche le rette EG CI, per ipotesi, sono parallele, e la retta EG è perpendicolare al piano HGI, sarà la retta CI [d] perpendicolare al medesimo piano HGI, dal che le due rette AH, CI sono perpendicolari al medesimo piano HGI, e per la 6. propositione di questo, le rette AH, CI, cioè le due AB, CD, sono frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi. c 8. del 11. d 8. del 11.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se due rette linee, che scambieuolmente concorrono, sono parallele à due altre rette linee, che similmente concorrono, e siano collocate in diuersi piani, in modo, che i concorsi si corrispondano dalla medesima parte; quelle rette linee conterranno angoli vguali.

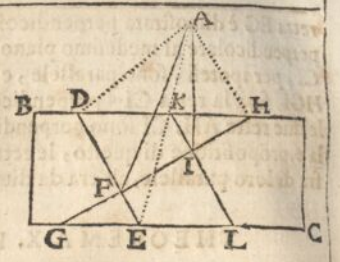


Siano le rette AB, CB, che concorrano scambieuolmente in qualche punto B, le quali siano parallele alle due DE, FE, che concorrono nel punto E; cioè AB sia parallela à DE; e la retta CB sia parallela ad FE, *in modo, che le due AB, CB, non siano nel medesimo piano, nel quale sono le due DE, FE, e che i concorsi B, & E siano collocati dalla medesima parte EB.* Dico che l'angolo ABC è vguale all'angolo DEF. *Si taglino le rette* BA, ED [a] frà di loro vguali, e si faccia EF vguale à BC; *si tirino le rette* AC, DF, FC, DA, EB. Perche le due BA, ED sono frà di loro vguali, e parallele, saranno le rette EB, DA, [b] frà di loro vguali, e parallele. Similmente, essendo le due BC, EF, frà di loro vguali; e parallele, saranno le due FC, EB, [c] frà di loro vguali, e parallele. Hor essendo FC vguale, e parallela ad EB, e la retta DA è vguale, e parallela alla medesima EB; le due FC, DA [d] saranno frà di loro vguali, e parallele: dal che le rette DF, AC, che le congiungono, [e] sono frà di loro vguali, e parallele. Si considerino i triangoli ABC, DEF: perche i lati AB, BC, per costruttione, sono vguali à i due lati DE, EF, e la base CA è dimostrata vguale alla base FD, sarà l'angolo CBA [f] vguale all'angolo FED, come fù proposto dimostrare. a 3. del 1. b 33. del 1. c 33. del 1. d 9. del 11. e 33. del 1. f 8. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XI.

Da vn dato punto in sublime far cadere vna retta perpendicolare al soggetto piano.

Sia

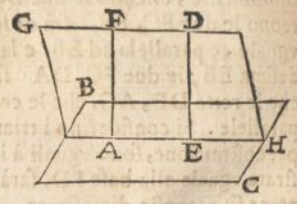


Sia A il dato punto in ſublime, ed il ſoggetto piano BC ; ſi vuole dal punto A far cadere vna retta perpendicolare al ſoggetto piano BC. Si tiri nel piano DC qualunque retta linea DE ; per il punto A , e per la retta DE , ſi concepiſca paſſare il piano ADE, nel quale dal punto A ſia tirata la retta AF , [a] che faccia angoli retti colla retta DE . Se la retta AF è perpendicolare al piano BC , ſarà la retta AF quella perpendicolare, che ſi cerca : ma ſe AF non è perpendicolare al piano BC, per il punto F, nel piano BC, ſi faccia paſſare la retta GFH [b] ad angoli retti con la retta DE ; poi , per le rette AF, FH, ſi concepiſca paſſare il piano AFH , e dal punto A ſi tiri nel piano AFH la retta AI , [c] ad angoli retti con la retta FH . Dico che la retta AI è perpendicolare al piano BC . Per il punto I ſi faccia paſſare la retta LK, [d] parallela alla retta DE . Perche gli angoli DFA, DFH, per coſtruttione, ſono retti, ſarà la retta DF perpendicolare alle due rette FA , FH ; e perciò ſarà perpendicolare [e] al piano AFH . In oltre , eſſendo, per coſtruttione , la retta KI parallela ad FD , e la retta FD è dimoſtrata perpendicolare al piano AFH , ſarà la retta KI [f] perpendicolare al medeſimo piano AFH : ma la retta AI è nel piano AFH , l'angolo dunque AIK ſarà retto ; ſù fatto , per coſtruttione, l'angolo AFI retto ; ſarà la retta AI perpendicolare alle due rette KI , IF , e perciò [g] ſarà perpendicolare al piano, doue giacciono le rette KI, IF: ma le rette KI, IF, per coſtruttione, ſono nel piano BC ; la retta dunque AI ſarà perpendicolare al piano BC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 12. del 1.
b 11. del 1.
c 12. del 1.
d 31. del 1.
e 4. del 11.
f 8. del 11.
g 4. del 11.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XII.

Dato vn punto in vn piano , eriggere in quel punto vna retta perpendicolare al dato piano .



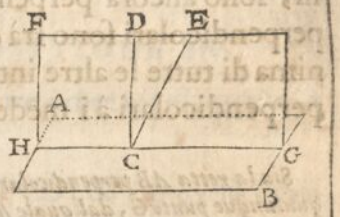
Sia il dato punto A nel piano BC , e ſi voglia nel punto A eriggere vna retta perpendicolare al dato piano BC . Si prenda qualche punto in ſublime, come il punto D , dal quale, per l'antecedente propoſitione, ſi faccia cadere la retta DE perpendicolare al piano BC ; ſe la retta DE cade nel punto A , ſarà DE la perpendicolare , che ſi cerca : ma ſe non cade nel punto A ; dal punto E al punto A ſi tiri la retta EA, e per le rette DE, EA, ſi concepiſca paſſare il piano GH ; poi dal punto A ſi tiri la retta AF [a] parallela alla retta DE . Dico che la retta FA è perpendicolare al piano BC . Perche le rette FA, DE, per coſtruttione ſono frà di loro parallele ; e la retta DE è perpendicolare al piano BC, ſarà la retta FA [b] perpendicolare al medeſimo piano BC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 31. del 1.
b 8. del 11.

THEO-

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Non è possibile, che da vn medesimo punto, preso in vn piano, si possiano tirare dalla medesima parte due rette linee perpendicolari all'istesso piano.



Nel piano AB sia preso qualche punto C, nel quale sia eleuata la retta CD perpendicolare al piano AB. Dico essere impossibile, che nel medesimo punto C, e dalla medesima parte DE, si possa eleuare altra retta perpendicolare al medesimo piano AB. Si eleui, se è possibile, nel punto C la retta CE, perpendicolare al piano AB. Perche le rette, DC, EC, si segano in C, perciò sono [a] in vn medesimo piano; sia quello il piano DCE, il quale continuato segarà il piano AB in qualche linea HG; essendo HG commune settione de i piani FG, AB, sarà HG [b] linea retta; E perche la retta DC, per ipotesi, è perpendicolare al piano AB, l'angolo DCG [c] sarà retto. Similmente la retta EC, per la fatta suppositione, è perpendicolare al piano AB, dal che l'angolo ECG [d] sarà retto: ma l'angolo DCG è dimostrato retto, sarà l'angolo ECG vguale all'angolo DCG; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque dal medesimo punto C si possono tirare dalla medesima parte DE due rette perpendicolari al medesimo piano AB, ch'era da dimostrarsi.

a 2. del 11.
b 3. del 11.
c 3. defin. del 11.
d 3. defin. del 11.

Il medesimo si dimostra più breuemente in questo modo. Si eriggano, s'è possibile, nel medesimo punto C le due rette CD, EF, perpendicolari al piano AB. Perche le due rette DC, EC sono perpendicolari al medesimo piano AB, perciò sono [e] frà di loro parallele; ma, per ipotesi, le rette DC, EC concorrono nel punto C; sarebbero parallele, e concorrerebbero, ch'è impossibile. Non dunque &c. ch'era da dimostrarsi.

e 6. del 11.

SCOLIO DEL CLAVIO.



Nell'istesso modo si può dimostrare, che da qual che punto A, in sublime non possono cadere due rette perpẽdicolari al medesimo piano. Dal medesimo pũto A, se è possibile, cadano le rette AD, AE perpendicolari al piano BC. Perche le rette AD, AE, si segano in A, perciò sono [g] in vn medesimo piano; sia quello il piano FG, il quale continuato seghi il piano BC, e la commune settione sia [h] la retta HG. Perche le rette AD, AE sono perpendicolari al piano BC, gli angoli ADE, AED [K] sono retti; dal che due angoli d'vn triangolo non sono minori di due retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo. Non dunque da vn medesimo punto in sublime può cadere più d'vna retta perpendicolare ad vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.

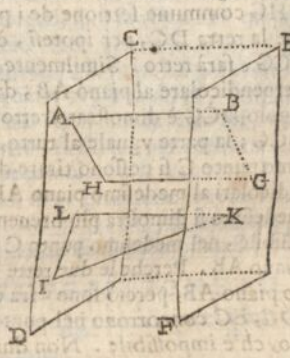
g 2. del 11.
h 3. del 11.
K 3. defin. del 11.

LEM-

LEMMA.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, tutte le altre rette, che sono perpendicolari ad vno di quei piani, sono ancora perpendicolari all'altro piano; le dette perpendicolari sono frà di loro vguali; ed ogn'vna è la minima di tutte le altre interposte frà quei piani; e non sono perpendicolari à i medesimi piani.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF, e preso nel piano EF, qualunque punto G, dal quale sia tirata la retta GH perpendicolare al piano CD. Dico prima che GH è perpendicolare al piano EF. Si tirino le rette AH, BG. Perche le rette GH, BA sono perpendicolari al piano CD, gli angoli GHA, BAH, [a] *sono retti, e perciò le rette BA, GH,* [b] *sono frà di loro parallele; ma AB è supposta perpendicolare al piano EF, sarà la retta HG, che gli è parallela,* [c] *perpendicolare al medesimo piano EF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'altra retta linea perpendicolare ad vno de i piani CD, EF, è ancora perpendicolare all'altro piano, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*



Di nuouo. Dico che la perpendicolare GH è vguale ad AB. Perche la retta AB è perpendicolare ad ambidue i piani CD, EF, gli angoli HAB, GBA, [d] *sono retti, dal che le rette GB, HA* [e] *sono frà di loro parallele, ed il quadrilatero AHGB* [f] *è parallelogrammo; e sarà HG* [g] *vguale al lato opposto AB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'altra retta interposta frà i piani CD, EF, perpendicolare à i medesimi, è vguale alla perpendicolare AB; e perciò tutte sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.*

Finalmente, Dico, che ogn'vna delle perpendicolari, come AB, è la minima di qualunque altra retta interposta frà i piani CD, EF, la quale non sia perpendicolare ad alcuno di essi piani CD, EF. Frà i piani CD, EF, s'interponga qualunque retta IK, non perpendicolare à i piani CD, EF; dal punto K si tiri la retta KL [h] *perpendicolare al piano CD; per quel che si è dimostrato nella prima parte, sarà KL perpendicolare al piano EF, e per l'antecedente dimostratione, sarà KL vguale ad AB; si tiri la retta IL. Essendo*

[a] 3. defin. del 11.
[b] 28. del 1.
[c] 8. del 11.
[d] 3. defin. del 11.
[e] 28. del 1.
[f] 35. defin. del 1.
[g] 34. del 1.
[h] 12. del 11.

do la retta KL, per costruttione, perpendicolare al piano CD, l'angolo KLI [K] *sarà retto; e perciò l'angolo KIL sarà minore dell'angolo KLI, ed il lato KL* [m] *sarà minore del lato IK: ma la retta KL fù dimostrata vguale ad AB; sarà la perpendicolare AB minore di KI. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AB è minore d'ogn'altra retta interposta frà i piani CD, EF, la quale non sia perpendicolare à i medesimi piani. Per la qual cosa la perpendicolare AB sarà la minima, come fù proposto dimostrare.*

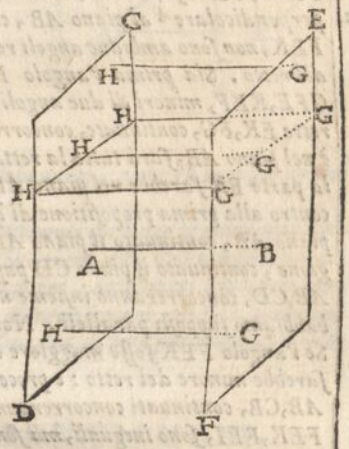
K 3. defin. del 11.
l 17. del 1.
m 19. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, quei due piani sono frà di loro paralleli.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF. Dico che i piani CD, EF, sono frà di loro paralleli. Si prenda nel piano EF qualunque punto G, dal quale si tiri la retta GH [a] perpendicolare al piano CD; sarà GH, per l'antecedente Lemma, perpendicolare al piano EF, e sarà vguale ad AB; ed ogn'vna delle rette AB, GH, sarà quella, che disegna il minimo interuallo, ò distanza frà i piani CD, EF; se concepiremo continuati i piani CD, EF, da tutte le parti indeterminatamente, e da gl'infiniti punti, che si possono immaginare nel piano EF, cadano rette linee perpendicolari al piano CD, quelle tutte sono perpendicolari al piano EF, ogn'vna disegna il minimo interuallo frà i piani CD, EF, e sono tutte frà di loro vguali: per la qual cosa i piani CD, EF, continuati in infinito, in nessun luogo della loro estensione s'auuicinano, o si scostano, e per la definitione ottaua di questo, i piani CD, EF, sono frà di loro paralleli, come fù proposto dimostrare.

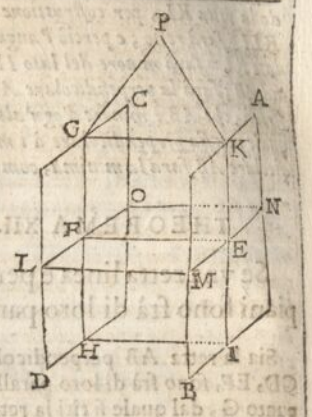
a 11. del 1.



SCOLIO.

La conuersa all'antecedente propositione, si farà nel seguente modo.

Se due piani sono frà di loro paralleli, la retta, ch'è perpendicolare ad vno di essi, sarà ancora perpendicolare all'altro.



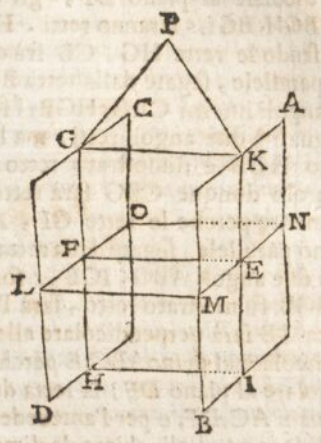
Siano i piani paralleli AB,CD, e la retta EF, interposta frà essi, sia perpendicolare al piano CD. Dico che la medesima retta EF è perpendicolare al piano AB. Per la retta EF si faccia passare il piano LMNO, che seghi i piani AB,CD, secondo la loro larghezza, e le communi settioni
a 3.del 11. *siano* [a] *le rette linee MN,LO. Di nuouo per la retta FE s'intenda passare vn altro piano, come GHIK, che seghi i piani AB, CD, secondo la loro lunghezza, e le com-*
b 3. del 11. *munì settioni siano le rette* [b] *IK,HG. Perche la retta EF, per ipotesi, è perpendicolare al piano CD, gli angoli EFG, EFO,*
c 3.def. del 11. [c] *sono retti. Inoltre, perche la retta EF fà angoli con le rette EN, EK, se gli angoli FEN, FEK sono retti, la retta FE sarà*
d 4. del 11. *perpendicolare* [d] *al piano AB, ch'è il nostro proposto. Se poi gli angoli FEN, FEK, non sono ambidue angoli retti, vno di quelli ò sarà minore, ò maggiore del retto. Sia prima l'angolo FEK minore del retto: saranno i due angoli GFE,KEF, minori di due angoli retti, e per lo Scolio dopo la 31. del primo, le rette EK,FG, continuate, concorrono in qualche punto P. Perche la retta EK*
e 1. del 11. *è nel piano AB, sarà tutta la retta EKP* [e] *nel medesimo piano AB, altrimente la parte EK sarebbe nel piano AB, e la parte KP sarebbe in altro piano, ch'è contro alla prima propositione di questo. Hor essendo la retta EKP tutta nel piano AB, continuato il piano AB, passerà per il punto P. E per l'istessa ragione, continuato il piano CD passerà per il medesimo punto P; dal che i piani AB,CD, concorreranno insieme nel punto P, ch'è contro all'ipotesi, mentre gli habbiamo supposti paralleli. Non dunque l'angolo FEK è minore del retto. Se l'angolo FEK fosse maggiore del retto, il supplemento, cioè l'angolo FEI, sarebbe minore del retto: e procedendosi come prima, si mostrerà, che i piani AB,CB, continuati concorreranno dalla parte DB. Non dunque gli angoli FEK,FEI, sono ineguali, ma sono angoli retti. Nell'istesso modo si proverà, che gli angoli FEN,FEM, sono retti; dal che la retta FE è perpendicolare al piano AB, ch'era da dimostrarsi.*

Per facilitare i modi del dimostrare, aggiungo il seguente Theorema.

Se due piani non sono paralleli, continuati concorreranno da qualche parte; e se due piani, continuati da tutte le parti, mai concorrono, quelli sono frà di loro paralleli.

Siano

Siano prima i due piani AB,CD, non paralleli. Dico che continuati concorreranno ſcambieuolmente da qualche parte. Si prenda nel piano AB qualche punto E, dal quale cada la retta EF [a] *perpendicolare al piano CD, e ſi faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente Theorema; gli angoli EFG, EFO* [b] *ſaranno retti; ſe gli angoli FEK, FEN ſono retti, la retta FE* [c] *ſarà perpendicolare al piano AB; e per l'antecedente propoſitione, i piani AB,CD, ſono frà di loro paralleli, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque gli angoli FEN, FEK, ſono ambidue angoli retti. Non ſia dunque vno di quelli retto, come per eſempio l'angolo FEK; ſarà l'angolo FEK, ò maggiore, ouero minore del retto: e procedendoſi come nell'antecedente Theorema, ſi dimoſtrerà che i piani concorrono verſo P, ouero dalla parte BD. Se poi l'angolo FEN non ſarà retto, ſi dimoſtrerà nell'iſteſſo modo, che i piani AB, CD, ò concorrono dalla parte ON, ouero dalla parte LM. Per la qual coſa i piani non paralleli continuati concorreranno da qualche parte, come fù propoſto di moſtrare nel primo luogo.*



a 11. del 11.
b 3. defin. del 11.
c 4. del 11.

Di nuouo, ſuppoſto che i piani AB,CD, continuati da tutte le parti, mai concorrono. Dico che ſono frà loro paralleli. Se i piani AB, CD non ſono paralleli, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, continuati concorreranno da qualche parte, ch'è contro all'ipoteſi. Se dunque i piani AB,CD, continuati non concorrono inſieme da neſſuna parte, ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se due rette linee ſcambieuolmente concorrono inſieme, e ſono parallele à due altre, che ſimilmente concorrono inſieme, e non ſono nel medeſimo piano; i piani, che paſſano per quelle, ſono frà di loro paralleli.

Siano le due rette linee AB, CB, concorrenti in qualche punto B, le quali ſiano parallele alle due DE, EF, poſte in altro piano, e concorrenti in qualche punto E; cioè AB ſia parallela ad ED, e la retta CB ſia parallela ad EF. Dico che i piani AC, DF, ſono frà di loro paralleli. Dal punto B ſi tiri la retta BG [a] perpendicolare al piano DF; dal punto G ſi tiri la retta GH [b] parallela ad EF; e la retta GI parallela ad ED. Perche

a 11. del 11.
b 31. del 1.

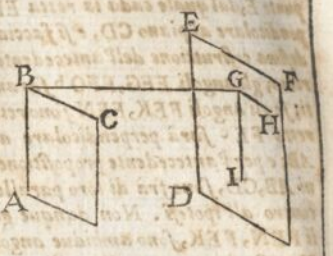
c 9.del 11. d 9.del 11. le rette CB,HG ſono parallele ad EF, ſaranno c frà di loro parallele. Similmente, eſſendo le rette IG,AB, parallele alla retta ED, ſarà IG d parallela ad AB. In oltre, perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF, gli angoli BGH, BGI, e ſaranno retti. Hor eſſendo le rette HG, CB frà di loro parallele, ſegate dalla retta BG, gli angoli interni CBG, HGB, f ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo HGB è dimoſtrato retto, l'angolo dunque CBG ſarà retto parimente perche le rette GI, AB ſono parallele, ſegate dalla retta BG, i due angoli ABG, IGB, g ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo IGB fù moſtrato retto, ſarà l'angolo ABG ancora retto: dal che la retta GB ſarà perpendicolare alle due rette BC,BA, e perciò h ſarà perpendicolare al pianoABC. E perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF; la retta dunque BG è perpendicolare ad ambidue i piani AC,DF, e per l'antecedente propoſitione, i piani AC,DF, ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

c 3.defin del 11.

f 29.del 1.

g 29.del 1.

h 4.del 11.



SCOLIO.

Il P. Clauio aggiunge il ſeguente problema.

Dato vn piano, ed vn punto fuori di eſſo, per il dato punto far paſſare vn piano equidiſtante al dato piano.

Sia dato il piano AC, ed il punto D fuori del dato piano; ſi vuole per il punto D far paſſare vn piano, parallelo al piano AC. Dal punto B al punto D ſi tiri la retta BD, e per le rette AB,BD, ſi concepiſca paſſare vn piano, come ABDE indeterminato verſo DE; e per le due CB, BD, ſi concepiſca paſſare il piano CBDF, indeterminato verſo DF; dal punto D nel piano ABD, ſi tiri la retta DE, a parallela ad AB; e dal medeſimo punto D nel piano CBD, ſi tiri la retta DF b parallela alla retta BC. Perche le rette FD, DE, concorrenti nel punto D, ſono parallele alle due CB, AB, che concorrono nel punto B; per l'antecedente propoſitione, il piano EF, che paſſa per il punto D, è parallelo al piano AC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 31. del 1. b 31.del 1.

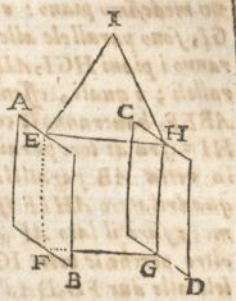


THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due piani paralleli ſono ſegati da qualche piano, le loro communi ſettioni ſono parallele.

Siano

Siano i due piani paralleli AB,CD, ſegati dal piano EFGH, e le communi ſettioni ſiano le rette EF,HG. Dico,che le rette EF,HG,ſono frà di loro parallele. Se le rette EF,GH,non ſono parallele, per lo ſcolio ſecondo alla 31. propoſit. del primo, continuate concorreranno in qualche punto: concorrano, s'è poſſibile, in qualche punto I. Perche la retta GH è nel piano CD, ſarà tutta la retta GHI nel medeſimo piano CD,altrimente la parte GH della retta GI,ſarebbe nel pianoCD,e la parte HI in altro piano, che per la prima propoſ. di queſto, è impoſſibile; e perciò tutta la retta GI è nel piano CD;ſi che,continuato il piano CD,quello paſſerà per il punto I. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che continuato il piano AB,quello paſſerà per il medeſimo punto I; per la qual coſa continuati i piani AB, CD concorrono ſcambieuolmente nel punto I, ch'è contro all'ipoteſi,mentre habbiamo ſuppoſti i pianiAB,CD,paralleli.Non dunque continuate le rette FE,GH, concorrono: e ſe non concorrono,per il ſecondo ſcolio alla 31. propoſit. del primo, ſono parallele, come fù propoſto di moſtrare.

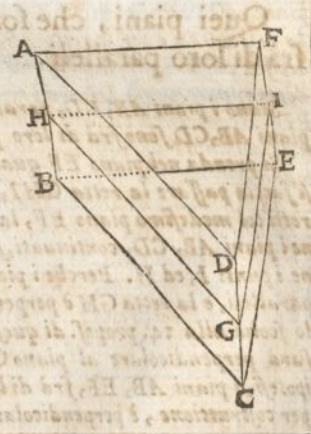


SCOLIO.

Qui facilmente ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Se due piani, che ſcambieuolmente concorrono, ſono ſegati da vn'altro piano, e le communi ſettioni ſono frà di loro parallele; le medeſime ſaranno parallele alla commune ſettione, che fanno quei due piani nel loro concorſo.

Siano i due piani ABCD,DCEF,i quali concorrano ſcambieuolmente, e la commune ſettione ſia DC: ſiano poi ſegati i piani ABCD,DCEF,dal piano ABEF, e le communi ſettioni AB, FE, ſiano frà di loro parallele. Dico, che le rette AB,FE ſono parallele alla retta DC. Si prenda nella retta DC qualunque punto G,dal quale ſi tiri la retta GH [a] *parallela alla retta AD; e dal medeſimo punto G ſi tiri la retta GI parallela alla retta DF. Perche le rette GH, DA, ſono parallele, ſegate dalla retta DG, le tre rette HG,GD,DA,* [b] *ſono in un medeſimo piano: ma le due GD, DA ſono nel piano ABCD, ſarà la retta GH nel medeſimo*



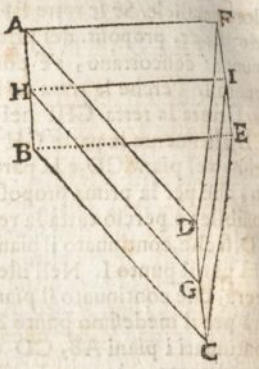
a 31. del 11.

b 7. del 11.

ſimo

simo piano ABCD, e perciò continuata GH segarà la retta AB in qualche punto H. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta GI sega la retta FE in qualche punto I. Si tiri la retta HI, sarà il triangolo HGI [c] in vn medesimo piano: e perche le rette HG, GI, sono parallele alle rette AD, DF, saranno i piani HGI, ADF, [d] frà di loro paralleli; i quali, essendo segati dal piano ABEF, haueranno le communi settioni AF, HI [e] frà di loro parallele: ma fù supposta la retta AB parallela alla retta FE, il quadrilatero AHIF [f] sarà parallelogrammo, e sarà il lato AF [g] vguale ad HI. In oltre perche le rette IG, GH, sono parallele alle due FD, DA, l'angolo IGH [h] sarà vguale all'angolo FDA. Similmente perche le rette HI, IG, sono parallele alle due AF, FD, sarà l'angolo HIG [K] vguale all'angolo AFD; ed essendo le due rette IH, HG, parallele alle due FA, AD, l'angolo FAD sarà vguale all'angolo IHG; per la qual cosa i triangoli GIH, DFA, sono equiangoli, e la proportione di AF ad FD [l] sarà come quella di HI ad IG: fù dimostrata AF vguale ad HI; sarà FD [m] vguale ad IG. Similmente FA ad AD [n] sarà come IH ad HG: ma FA è vguale ad IH, sarà AD [o] vguale ad HG. Hor essendo le due AD, HG frà di loro vguali, e parallele, sarà AH [p] parallela alla retta DG, cioè AB sarà parallela à DC. Parimente, essendo FD vguale, e parallela ad IG, sarà FI [q] parallela alla retta DG, cioè FE parallela alla retta DC, ch'era da dimostrarsi.

c 8. del 11.
d 15. del 11.
e 16. del 11.
f 35. defin. del 1.
g 34. del 1.
h 10. del 11.
K 10. del 11.
l 4. del 6.
m 14. del 5.
n 4. del 6.
o 14. del 5.
p 33. del 1.
q 33. del 1.



Non sarà inutile aggiungere quì il seguente Theorema.

Quei piani, che sono paralleli ad vn'altro piano, sono frà di loro paralleli.

Siano i piani AB, CD, paralleli al piano EF. Dico, che i piani AB, CD sono frà di loro paralleli.

Si prenda nel piano EF qualunque punto G, per il quale si faccia passare la retta GHI, in modo, [a] *che faccia angoli retti col medesimo piano EF, la quale prolungata concorra ne i piani AB, CD, continuati, se bisogna; concorra dunque ne i punti I, ed H. Perche i piani CD, EF, per ipotesi, sono paralleli, e la retta GH è perpendicolare al piano EF, per lo scolio alla 14. propos. di questo, la medesima retta GH sarà perpendicolare al piano CD. In oltre, essendo, per ipotesi, i piani AB, EF, frà di loro paralleli, e la retta IG, per costruttione, è perpendicolare al piano EF, per lo citato*

a 12. del 11.



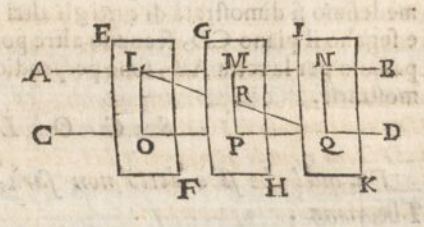
scolio

ſcolio, la medeſima retta IG ſarà perpendicolare al piano AB; dal che la retta IH ſarà perpendicolare à i due piani AB, CD; e per la 14. propoſ. di queſto, i piani AB, CD, ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se due rette linee ſono ſegate da piani paralleli, le parti interpoſte frà i piani paralleli ſono proportionali.

Siano le rette AB, CD, ſegate da i piani paralleli EF, GH, IK, ne i punti L, M, N, O, P, Q. Dico che la proportione di LM ad MN è come quella di OP à PQ. Si tirino le rette LO, NQ. Eſſendo i punti L, O, N, Q ne i piani EF, IK, le rette LO, NQ ſaranno ne i medeſimi piani EF, IK. Si tiri la retta LQ, la quale ſeghi il piano GH in qualche punto R; dal punto R alli punti P, ed M, ſi tirino le rette RM, RP: eſſendo i punti M, R, P nel piano GH, le rette MR, RP ſaranno nel medeſimo piano GH. Perche il triangolo LQN [a] è in vn medeſimo piano, i piani paralleli GH, IK, ſaranno ſegati dal piano LQN; per il che le communi ſettioni MR, NQ [b] ſaranno frà di loro parallele. Similmente il triangolo LOQ [c] è in vn medeſimo piano, e ſega i piani paralleli EF, GH, per la qual coſa le communi ſettioni LO, RP [d] ſono frà di loro parallele. In oltre perche il triangolo LQN è ſegato dalla retta MR parallela ad NQ, ſarà LM ad MN, [e] come LR ad RQ; parimente perche il triangolo LQO è ſegato dalla retta RP parallela al lato LO, ſarà OP à PQ [f] come LR ad RQ: ma fù dimoſtrata LM ad MN, come LR ad RQ, ſarà LM ad MN [g] come OP à PQ, ch'era da dimoſtrarſi.

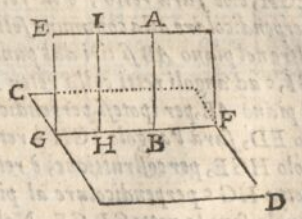


a 2. del 11.
b 16. del 11.
c 2 del 11.
d 16. del 11.
e 2. del 6.
f 2. del 6.
g 11. del 5.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna retta linea è perpendicolare à qualche piano, tutti i piani, che paſſano per quella retta linea, ſono perpendicolari al medeſimo piano.

Sia la retta linea AB perpendicolare al piano CD. Dico, che tutti i piani, che paſſano per la retta AB ſono perpendicolari al piano CD. Per la retta AB ſi concepiſca paſſare vn piano, come EF, il quale ſeghi il piano CD, e la commune ſettione ſia [a] la retta GF, nella quale ſia preſo qualunque punto H, e dal punto H ſi tiri la retta HI [b] parallela ad AB; le tre

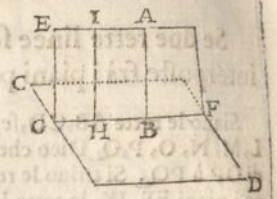


a 3. del 11.
b 31. del 1.

rette

c 7. del 11. rette IH, AB, HB c sono in vn medesimo piano: ma le due AB, BH sono nel piano EF, sarà dunque la retta IH nel medesimo piano EF. Hor perche le due rette IH, AB, sono frà di loro parallele, e la retta AB è supposta perpendicolare al piano CD, sarà ancora IH d perpendicolare al medesimo piano CD. E perche il punto H è preso ad arbitrio nella retta GF, se da gl'infiniti punti, che possiamo immaginarci nella retta GF, sono tirate rette linee parallele ad AB, tutte saranno nel medesimo piano EF, e saranno perpendicolari al piano CD. Per la qual cosa il piano EF, che passa per quelle infinite rette linee, e sarà perpendicolare al piano CD. Il medesimo si dimostrerà di tutti gli altri piani, che passano per la retta AB, e segano il piano CD, secondo altre positioni; e perciò tutti i piani, chè passano per la retta AB, sono perpendicolari al piano CD, ch'era da dimostrarsi.

d 8. del 11.



e 4. d. fin. del 11.

SCOLIO.

Da quel che si è detto non sarà difficile dimostrare il seguente Theorema.

Se le communi settioni di due piani, perpendicolari ad vn'altro piano, sono frà di loro parallele, quei due piani saranno frà loro paralleli: e se di due piani paralleli vno è perpendicolare ad vn'altro piano, ancora l'altro sarà perpendicolare al medesimo piano.

Siano prima i due piani AB, CD, perpendicolari al piano ED, in modo, che le cõmuni settioni EB, FD, siano frà di loro parallele. Dico prima, che i piani AB, CD, sono frà di loro paralleli. Si prẽda nella retta EB qualũque punto G, e dal punto G nel piano ED si tiri la retta GH, a *ad angoli retti con la retta EB, Perche le rette EB, FD sono, per ipotesi, parallele, sarà l'angolo DHG* b *vguale all'angolo EGH, cioè sarà retto; e la retta GH sarà perpendicolare alla commune settione FD. In oltre nel piano AB si tiri dal punto G la retta GI,* c *ad angoli retti colla retta EB. Essendo il piano AB, per ipotesi, perpendicolare al piano ED, sarà l'angolo IGH* d *retto; ma l'angolo HGE, per costruttione, è retto, sarà la retta HG* e *perpendicolare al piano AB, nel quale sono le rette GI, GE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta GH è perpendico-*

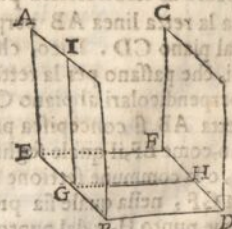
a 11. del 1.

b 29 del 1.

c 11. del 1.

d 4. definit. del 11.

e 4. del 11.



lare

lare al piano CD ; e per la 14. propoſit. di queſto, i piani AB,CD, ſono frà di loro paralleli.

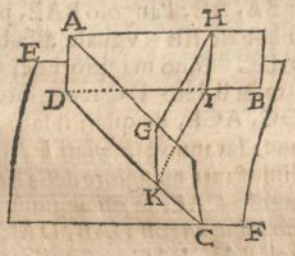
Di nuouo, ſuppoſto, che i piani AB,CD ſiano frà di loro paralleli, ed il piano AB ſia perpendicolare al piano ED. Dico, che il piano CD ſarà perpẽdicolare al medeſimo piano ED. Perche i piani AB,CD, ſono paralleli, ſegati dal piano ED, le communi ſettioni EB,FD, [f] ſono frà di loro parallele. Si ſupponga fatta la medeſima coſtruttione antecedente, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che la retta HG è perpendicolare al piano AB. E perche i piani AB,CD, ſono paralleli, e la retta HG è perpendicolare al piano AB, la medeſima retta HG, per lo ſcolio alla 14. prop. di queſto, ſarà perpendicolare al piano CD; e per l'antecedente propoſ. il piano ED, che paſſa per la retta GH, farà angoli retti col piano CD. Per la qual coſa il piano CD è perpendicolare al piano ED, ch'era da dimoſtrarſi.

f 16. del 11.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se due piani, che ſi ſegano ſcambieuolmente, ſono perpendicolari ad vn'altro piano, la loro commune ſettione ſarà perpendicolare al medeſimo piano.

Sia AD la commune ſettione de i piani AB, AC, i quali ſiano perpendicolari al piano EF. Dico, che la commune ſettione AD è perpendicolare al medeſimo piano EF. Si prendano due qualunque punti ne i piani AB,AC, come per eſempio K,ed I, da i quali, ne i piani AC, AB, ſi tirino le rette KG,IH [a] ad angoli retti colle rette DC,DB. Perche i piani ſono, per ipoteſi, perpendicolari al piano EF, le rette HI,GK, che ſono perpendicolari alle communi ſettioni BD, DC, ſaranno [b] perpendicolari al piano EF: per la qual coſa ſono frà di loro [c] parallele, ed in conſeguenza [d] ſono in vn medeſimo piano: Sia quel piano il notato GKIH. Perche i piani AK, AI, che concorrono nella retta AD, ſono ſegati dal piano GKIH, e le communi ſettioni GK, HI ſono frà di loro parallele, per lo ſcolio alla 16. propoſ. di queſto, le rette HI, GK, ſono parallele alla retta AD. Hor eſſendo la retta AD parallela ad HI, e la retta HI, per coſtruttione, è perpendicolare al piano EF, ſarà AD [e] perpendicolare al medeſimo piano EF, ch'era da dimoſtrarſi.



a 11. del 1.

b 4. definit. del 11.
c 6. del 11.
d 34. defin. del 1.

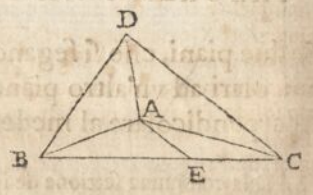
e 8. del 11.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se vn'angolo ſolido è contenuto da tre angoli piani, due

di quelli angoli piani, presi in qualunque modo, sono maggiori del terzo.

Sia l'angolo solido A, contenuto da i tre angoli piani DAB, DAC, BAC. Dico, che due di questi angoli, presi in qualunque modo, sono maggiori del terzo. Se questi tre angoli sono frà di loro vguali, sarà manifesto, che due, giunti insieme, sono maggiori del terzo. Se poi due de i detti angoli sono frà loro vguali, ed il terzo sia minore d'ogn'vno de gli vguali, sarà ancora manifesto, che due, presi insieme, sono maggiori del terzo. Se finalmente vno di questi, come l'angolo BAC, è maggiore di ciascuno de gli altri due BAD, DAC. Dico, che i due DAB, DAC, giunti insieme, sono maggiori del terzo ãgolo BAC. Nel piano BAC



a 23. del 1. si faccia l'angolo BAE [a] vguale all'angolo BAD, sarà l'angolo BAC maggiore dell'angolo BAE, dal che la retta AE segarà l'angolo BAC. Nelle rette AB, AC, si prendano due qualunque punti B, & C; si tiri la retta BC. Essendo, per costruttione, la retta AE nel piano BAC, continuata segarà il lato BC in qual-

b 3. del 1. che punto E. Si faccia AD [b] vguale ad AE, e si tirino le rette BD, DC. Si considerino i due triangoli ADB, ABE, de i quali il lato AD è vguale al lato AE, il lato AB è commune; saranno i due lati DA, AB vguali à i due BA, AE; l'angolo BAE, per costruttione, è vguale all'angolo BAD,

c 4. del 1. sarà la base BE [c] vguale alla base BD. Nel triangolo DBC, i due lati

d 20. del 1. BD, DC [d] sono maggiori del terzo lato BC; leuatone gli vguali lati DB, BE, resta il lato DC maggiore del lato EC. Si considerino i due triangoli ADC, ACE, de' quali il lato AE è vguale al lato AD, il lato AC è commune; saranno i due lati DA, AC vguali à i due lati CA, AE; la base DC

e 25. del 1. è dimostrata maggiore della base EC, sarà l'angolo DAC [e] maggiore dell'angolo CAE; se gli aggiungano gli vguali angoli DAB, BAE, ne vengono i due angoli DAB, DAC, maggiori de i due BAE, EAC: ma i due angoli BAE, EAC, costituiscono tutto l'angolo BAC; i due angoli dunque BAD, DAC, insieme giunti, sono maggiori dell'angolo BAC, ch'era da dimostrarsi.

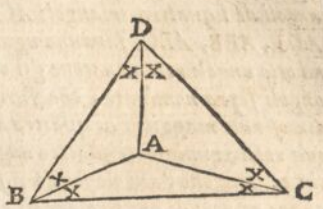
THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Tutti gli angoli piani, che contengono vn'angolo solido, giunti insieme, sono minori di quattro angoli retti.

Sia l'angolo solido A contenuto da i tre angoli piani BAD, DAC,

BAC.

BAC. Dico, che i tre angoli piani BAD, DAC, BAC, giunti insieme, sono minori di quattro angoli retti. Si tirino le rette BD, DC, CB, e si concepisca il punto A in sublime, ed il piano del triangolo DBC, nel soggetto piano; saranno le rette AB, AD, AC, inclinate al soggetto piano DBC; dal che saranno costituiti ne i punti B, D, C, tre altri angoli solidi, cioè l'angolo solido B sarà contenuto da tre angoli piani, de'quali due sono i superiori, che sono i notati con la lettera X, e l'altro stà di sotto, ch'è l'angolo BDC. Similmente l'angolo solido D è contenuto da i due angoli notati X, che stãno di sopra, e dall'angolo inferiore BDC; e l'ãgolo solido C è similmente cõtenuto da i due angoli superiori X, e dall'angolo DCB, che stà sotto. Di nuouo, considerando l'angolo solido B, i due angoli piani X, per l'antecedente prop. giunti insieme, sono maggiori dell'angolo DBC, che stà sotto. Similmente nell'angolo solido D, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo BDC, che stà di sotto; e nell'angolo solido DCB, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo DCB; dal che i sei angoli notati X sono maggiori de i tre angoli del triangolo DBC: ma i tre angoli del triangolo DBC, [a] sono vguali à due angoli retti, i sei angoli dunque notati X saranno maggiori di due angoli retti. Finalmente, perche tre angoli d'ogni triangolo [b] sono vguali à due angoli retti, i noue angoli de i tre triangoli ABD, ADC, ACB, cioè i sei notati X, co'i tre angoli intorno al punto A, saranno vguali à sei angoli retti: se da questi se ne leuano i sei angoli notati X, che furono dimostrati maggiori di due angoli retti, resteranno i tre angoli DAC, DAB, BAC, minori di quattro angoli retti, ch'era da dimostrarsi.



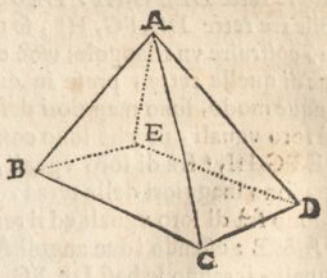
a 32. del 1.

b 32. del 1.

SCOLIO.

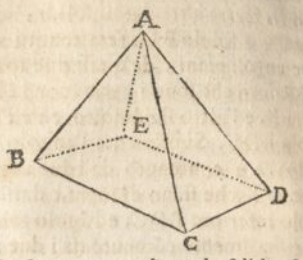
Il medesimo si dimostra se l'angolo solido sarà contenuto da più di tre angoli piani, nel seguente modo.

Sia l'angolo solido A, contenuto da i quattro angoli piani BAC, CAD, DAE, BAE. Dico, che questi quattro angoli sono minori di quattro angoli retti. Perche i due angoli ACE, ACD, [c] sono maggiori dell'angolo BCD, & i due angoli ADC, ADE, sono maggiori dell'angolo CDE; come ancora i due angoli AED, AEB, sono maggiori dell'angolo BED, & i due ABE, ABC sono maggiori dell'angolo EBC; gli otto



c 20. del 11.

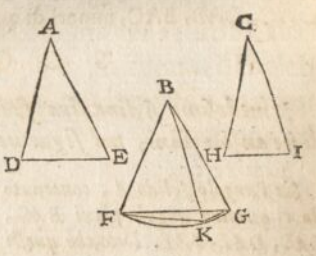
angoli ACB, ACD, ADC, ADE, AED, AEB, ABE, ABC, saranno maggiori de
i quattro angoli del quadrilatero BCDE; [b] *ma i quattro angoli del quadrila-*
b Scol. alla 32. del 1.
tero BCDE, sono vguali à quattro angoli retti; i sopradetti otto angoli saranno
c 32. del 1.
maggiori di quattro angoli retti. E perche i tre angoli di ogni triangolo [c] *sono*
vguali à due angoli retti, i dodici
angoli de i quattro triangoli ACD,
ADE, AEB, ABC, saranno vguali
ad otto angoli retti; leuatone gli otto
angoli sopra nominati, che furono
dimostrati maggiori di quattro an-
goli retti, i rimanenti quattro angoli
che contengono l'angolo solido A, sa-
ranno minori di quattro angoli ret-
ti. L'istesso si dimostrerà se l'angolo
solido è contenuto da più di quattro



angoli piani; e perciò tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo solido, sono
minori di quattro angoli retti, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se saranno tre angoli piani, due de' quali, presi in qualunque modo, siano maggiori del terzo; e siano contenuti da rette linee vguali; è possibile costruire vn triangolo con le tre rette, che congiungono gli estremi delle linee vguali.



Siano i tre angoli piani A, B, C, de' quali i due A, & B, siano maggiori del terzo C; i due B, & C siano maggiori dell'angolo A; & i due A, & C siano maggiori dell'angolo B; e siano contenuti dalle rette vguali AD, AE, BF, BG, CH, CI; tirate le rette DE, FG, HI. Dico che colle tre rette DE, FG, HI, se ne può costruire vn triangolo; cioè che due di quelle rette, prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Se i tre angoli A, B, & C, sono frà loro vguali, perche sono contenuti da lati vguali, saranno le basi
a 4. del 1.
DE, FG, HI, [a] frà di loro vguali; e perciò due, prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Se poi due di quegli angoli, come A, & B, sono frà di loro vguali, ed il terzo C è minore di ciascuno de gli vguali A, & B; essendo i due angoli A, & B, vguali, e contenuti da rette linee
b 4. del 1.
vguali, saranno le basi DE, FG, [b] frà di loro vguali. In oltre, perche i lati FB, BG sono vguali à i lati HC, CI, e l'angolo FBG si suppone mag-

giore

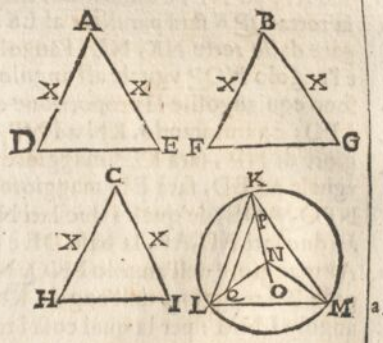
giore dell'angolo C, sarà la base FG, [c] ouero DE maggiore di HI, e perciò due, prese in qualunque modo, saranno maggiori della terza. Se finalmente vno di quelli, come per esempio, l'angolo FBG, è maggiore dell'angolo A, ed è ancora maggiore dell'angolo C. Dico similmente, che delle tre rette DE, FG, HI, due prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Alla retta AF, nel punto B, si costituisca l'angolo FBK [d] vguale all'angolo A, sarà l'angolo FBG maggiore dell'angolo FBK, e la retta BK passerà frà le rette FB, BG; e fatto centro in B, coll'interuallo BF, ouero BG, si descriua l'arco FKG; si prolunghi la retta BK, fin che concorre coll'arco FKG in qualche punto K. Perche la retta FG [e] cade dentro del circolo FKG; perciò il punto K cade sotto la retta FG; si tirino le rette FK, KG. Nel triangolo FKG i due lati FK, KG [f] sono maggiori del terzo lato FG. Si considerino i due triangoli ADE, BFK. Perche i due lati DA, AE, sono vguali à i due lati FB, BK; e l'angolo FBK, per costruttione è vguale all'angolo A, sarà la base FK [g] vguale alla base DE. E perche i due angoli A, & C, per ipotesi, sono maggiori dell'angolo FBG, se dall'angolo FBG se ne leua l'angolo FBK, ch'è vguale all'angolo A, resta l'angolo KBG minore dell'angolo C. Hor essendo i due lati KB, BG, vguali à i due lati HC, CI, e l'angolo C maggiore dell'angolo KBG; sarà la base HI [h] maggiore della base KG: ma il lato FK fù dimostrato vguale al lato DE; i due lati HI, DE, saranno maggiori de i due lati FK, KG. E perche i due lati FK, KG, [K] sono maggiori del terzo lato FG; i due lati dunque HI, DE, insieme giunti, sono maggiori del terzo lato FG. Per la qual cosa delle tre rette DE, FG, HI, prese due in qualunque modo, quelle giunte insieme, sono maggiori della terza; e per la 22. propositione del 1. con le tre rette DE, FG, HI, si può descriuere vn triangolo, il che era da dimostrarsi.

c 24. del 1.
d 23. del 1.
e 2. del 3.
f 20. del 1.
g 4. del 1.
h 24. del 1.
K 20. del 1.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXIII.

Costruire vn angolo solido con tre angoli piani, due de' quali, presi in qualunque modo, siano maggiori del terzo; e che tutti tre, insieme giunti, siano minori di quattro angoli retti.

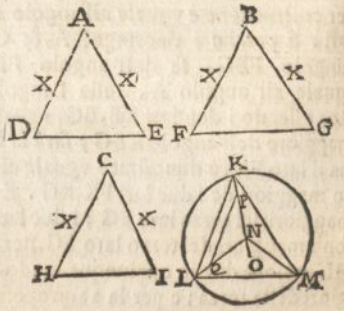
Siano i tre angoli piani A, B, C, due de' quali, presi in qualunque modo, siano, giunti insieme, maggiori del terzo; e che tutti tre, insieme giunti, siano minori di quattro angoli retti: si vuole costruire vn angolo solido, che gli angoli piani, che lo contengono, siano vguali à gli angoli piani A, B, C. Tutte le rette X che contengono i dati angoli A, B, C, [a] si facciano frà di loro vguali, e si tirino le rette DE, FG, HI, colle quali, per l'antecedente



a 3. del 1.

propo-

propoſitione ſi può deſcriuere vn triangolo: ſia dunque con le rette DE, FG, HI, [b] deſcritto il triangolo KLM; e ſia il lato LM vguale al lato HI, il lato LK vguale al lato DE, ed il lato KM vguale al lato FG; intorno al triangolo KLM [c] ſi circoſcriua il circolo KLM, il di cui centro N ò caderà dentro del triangolo KLM, ò caderà in vn lato, ouero caderà fuori: cada primieramente dentro del triangolo KLM; ſi tirino le rette NK, NL, NM. Dico che ogn'vna di queſte è minore di ciaſcun lato X. Se ciaſcuna delle rette NK, NL, non è minore del lato X, ò ſarà maggiore, ouero vguale. Suppoſto prima, che NK, ouero NL, ſia vguale ad X. Perche i due lati NK, NL ſono vguali à i due AD, AE, e la baſe KL, per coſtruttione, è vguale alla baſe DE, ſarà l'angolo KNL [d] vguale all'angolo A. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B; e che l'angolo LNM è vguale all'angolo C; dal che i tre angoli intorno al centro N ſono vguali à i tre angoli A, B, C; ſi prolunghi KN verſo O, i due angoli ONM, MNK [e] ſono vguali à due angoli retti; e ſimilmente i due angoli ONL, LNM, ſono vguali à due angoli retti; dal che tutti gli angoli LNM, MNK, KNL, che ſono intorno al centro N ſono vguali à quattro angoli retti: ma gli angoli intorno al centro N furono moſtrati vguali à gli angoli A, B, C; gli angoli dunque A, B, C ſono vguali à quattro angoli retti, *ch'è contro all'ipoteſi*. *Non dunque ogn'vna delle rette NK, NL, NM, è vguale al lato X. Di nuouo ſia* NK, ouero NL, *maggiore del lato X; ſi facciano le rette* NP, NQ, [f] ogn'vna vguale ad X; e ſi tiri la retta PQ. Perche LN è vguale ad NK, e la retta QN vguale ad NP, ſarà LN ad NK, come QN ad NP; e permutando, LN ad NQ [g] ſarà come KN ad NP; e diuidendo, LQ à QN [h] ſarà come KP à PN; è perciò la retta QP [K] ſarà parallela al LK. E perche le parallele LK, QP ſono ſegate dalle rette NK, NL, l'angolo NPQ [l] ſarà vguale all'angolo NKL; e l'angolo NQP vguale all'angolo NLK; dal che i triangoli NPQ, NKL ſono equiangoli, e la proportione di NK à KL [m] ſarà come quella di NP à PQ; e permutando, KN ad NP [n] ſarà come KL à PQ: ma KN è maggiore di NP, ſarà KL [o] maggiore di QP; fù fatta, per coſtruttione KL vguale ad ED, ſarà ED maggiore di PQ. Si conſiderino i due triangoli NPQ, ADE, de'quali i due lati NP, NQ, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati AD, AE, la baſe DE è maggiore della baſe PQ; ſarà l'angolo A [p] maggiore dell'angolo PNQ. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che l'angolo B è maggiore dell'angolo KNM, e che l'angolo C è maggiore dell'angolo LNM: per la qual coſa i tre angoli A, B, C ſono maggiori de i tre angoli LNM, LNK, KNM: ma queſti tre angoli furono dimoſtrati vguali

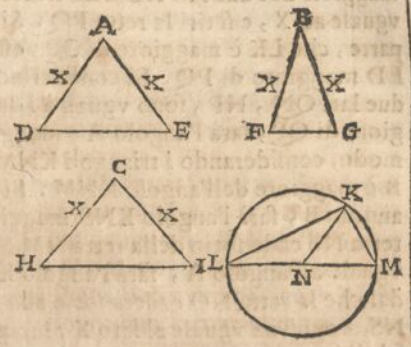


b 22. del 1.
c 5. del 4.
d 8. del 1.
e 13. del 1.
f 3. del 1.
g 16. del 5.
h 17. del 5.
K 2. del 6.
l 29. del 1.
m 4. del 6.
n 16. del 5.
o 14. del 5.
p 25. del 1.

à quat-

àquattroangoli retti;i tre angoli dunque A,B,C sono maggiori di quattro angoli retti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ciascuna delle rette NK,NL,NM,è maggiore, ne vguale à ciascun lato X,ma ogn'vna delle rette NK,NL,NM, è minore di ciascun lato X.

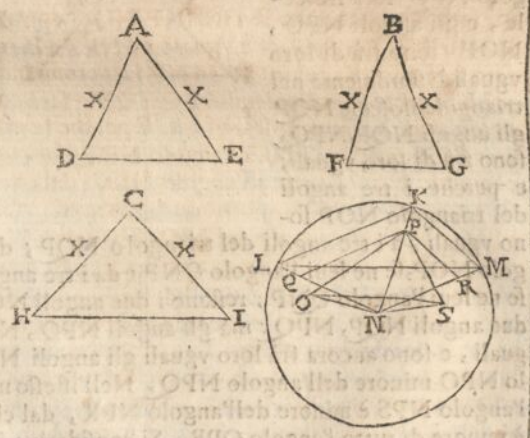
Di nuouo cada il punto N in vno de i lati del triãgolo KLM,come nel lato LM; si tiri la retta NK. Dico similmente,che ciascuno de semidiametri NK,NL,NM è minore di ciascun lato X. Perche, se non è minore, ò sarà vguale, ouero maggiore. Siano prima le due LN, NK,vguali alle due HC,CI. Perche NK è vguale ad NM,sarà LM vguale alle due LN, NK: ma le due LN, NK, furono supposte vguali alle due HC, CI; sarà tutta LM vguale alle due HC,CI. E perche nel triangolo CHI, i due lati HC, CI, q sono maggiori del terzo lato HI; sarà LM maggiore di HI, che è contro alla costruttione,mentre LM fù fatta vguale ad HI. Non dunque ciascuna delle rette NL, NK, NM è vguale al lato X. Siano, se è possibile, le due NK, NL, maggiori de i lati HC,CI. Essendo LM vguale alle due LN,NK, sarà LM maggiore de i due lati HC, CI; ma i due lati HC, CI, r sono maggiori del terzo lato HI; sarà LM maggiore di HI, ch'è contro alla costruttione. Non dunque ciascuna retta NK,NL, NM è maggiore, ne vguale al lato X, ma ogn'vna è minore del lato X.



q 20. del 1.

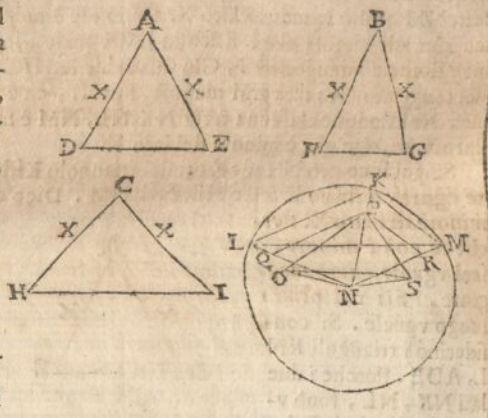
r 20. del 1.

Se poi il centro N cade fuori del triangolo KLM, come nella seguente figura; si tirino le rette NL, NK, NM. Dico che ogn'vna di queste è minore del lato X. Perche se non è minore, ò sarà vguale,ouero maggiore. Sia nel primo luogo vguale. Si considerino i triangoli KNL, ADE. Perche i due lati NK, NL, sono vguali à i due lati DA, AE, e la base LK è vguale alla base DE, sarà l'angolo LNK f vguale all' angolo A. Nell' istesso modo si proverà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B; dal che tutto l' angolo LMN sarà vguale à i due angoli A, & B, giunti insieme. Si consideri-



f 8. del 1.

siderino i triangoli LMN, CHI; essendo i due lati LN, NM, vguali a i
t 8.del 1. due lati HC, CI, la base LM è vguale alla base HI, sarà l'angolo LNM e
vguale all'angolo C: ma l'angolo LNM fù dimostrato vguale à i due an-
goli A, & B, giunti insieme; saranno i due angoli A, & B insieme, vgua-
li all'angolo C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ogn'vna delle rette
NL, NK, NM, è vguale al lato X. Siano di nuouo i due lati NK, NL
u 3.del 1. maggiori de i due lati AD, AE; si facciano le rette NP, ed NQ, u ogn'vna
vguale ad X, e si tiri la retta PQ. Si dimostri, come si fece nella prima
parte, che LK è maggiore di QP; essendo LK vguale ad ED, sarà il lato
ED maggiore di PQ. Si considerino i triangoli QNP, ADE. Perche i
due lati QN, NP, sono vguali à i due lati AD, AE, e la base DE è mag-
x 25.del 1. giore di QP, sarà l'angolo A x maggiore dell'angolo LNK. Nell'istesso
y 23.del 1. modo, considerando i triangoli KNM, BFG, si dimostrerà, che l'angolo
B è maggiore dell'angolo KNM. Si faccia l'angolo KNS y vguale all'
angolo B, sarà l'angolo KNS maggiore dell'angolo KNM; e perciò la
z 23.del 1. retta NS cade sotto della retta NM. Similmente si faccia l'angolo KNO z
vguale all'angolo A, sarà l'angolo KNO maggiore dell'angolo KNL;
dal che la retta NO caderà sotto alla retta NL. Si facciano le rette NO,
a 3.del 1. NS, a ogn'vna vguale al lato X; saranno le rette NO, NQ, NP, NR, NS
frà di loro vguali; si tiri
la retta OS. Perche le
rette QP, PR, per quel
che si dimostrò nella
prima parte, sono pa-
rallele à i lati LK, KM,
b 29.del 11. sarà l'angolo QPR b v-
guale all'angolo LKM.
Di nuouo, essendo NP
vguale ad NO, *il trian-
golo NPO sarà isosce-
le, e gli angoli NPO,*
c 5. del 1. NOP c sono frà di loro
vguali. E similmente nel
triangolo isoscele NQP
gli angoli NQP, NPQ,
sono frà di loro vguali;
e perche i tre angoli
del triangolo NOP so-
d 32.del 1. no vguali d à i tre angoli del triangolo NQP; da i tre angoli del trian-
golo NOP, se ne leui l'angolo ONP, e da i tre angoli del triangolo NQP,
se ne leui l'angolo QNP; restano i due angoli NOP, NPO, minori de i
due angoli NQP, NPQ: ma gli angoli NPO, NOP sono frà di loro v-
guali, e sono ancora frà loro vguali gli angoli NPQ, NQP; sarà l'ango-
lo NPO minore dell'angolo NPQ. Nell'istesso modo si dimostrerà, che
l'angolo NPS è minore dell'angolo NPR; dal che tutto l'angolo OPS,
è minore di tutto l'angolo QPR. Si considerino i triangoli NPO, ADE.
Perche i due lati NO, NP, sono vguali à i due lati DA, AE, e l'angolo



PNO

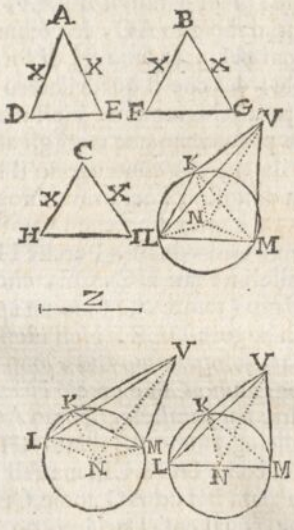
PNO è fatto vguale all'angolo A, sarà la base PO [e] vguale alla base DE: ma DE, per costruttione, è vguale ad LK, sarà OP vguale ad LK. Nell'istesso modo si dimostrerà che PS è vguale al lato KM. Si considerino i triangoli LKM, OPS. Perche i due lati LK, KM sono vguali à i due lati OP, PS, e l'angolo LKM è dimostrato maggiore dell'angolo OPS, sarà la base LM [f] maggiore delle base OS: ma LM, per costruttione, è vguale ad HI, sarà HI maggiore di OS. Di più perche i due lati HC, CI, sono vguali à i due lati ON, NS, e la base HI è maggiore della base OS, sarà l'angolo C [g] maggiore dell'angolo ONS: ma l'angolo ONS, per costruttione, è vguale à i due angoli A, & B; sarà l'angolo C maggiore de i due angoli A, & B, insieme giunti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ciascuna delle rette NL, NK, NM, è maggiore, ne vguale al lato X; ma ogn'vna è minore, come si disse.

e 4. del 1.

f 24. del 1.

g 25. del 1.

Finalmente essendosi dimostrato, che ciascuna delle rette NM, NK, NL, è minore del lato X, il quadrato del lato NK, ouero NM, ouero NL, sarà minore del quadrato di ciascun lato X; si sottragga dunque il quadrato di NK, ouero NL, ouero NM, dal quadrato del lato X, e quel che resta sia il quadrato della retta Z; sarà il quadrato di NK, ouero NL, ouero NM, col quadrato della retta Z, vguale al quadrato del lato X. Nel punto N si erigga la retta NV, [h] perpendicolare al piano KLM, e si faccia NV [K] vguale alla retta Z; si tirino le rette KV, LV, MV. Dico che gli angoli piani LVM, LVK, MVK, che contengono l'angolo solido V, sono vguali à i dati angoli piani A, B, C. *Perche la retta VN è perpendicolare al piano KLM, gli angoli VNL, VNK, VNM, [l] sono retti. Hor perche la retta Z è vguale ad NV, sarà il quadrato di LN, col quadrato di Z, vguale al quadrato di LN, col quadrato di NV; e perche il quadrato di LN; col quadrato di Z, per quel che si è detto, è vguale al quadrato del lato X; sarà il quadrato di LN, col quadrato di NV, vguale al quadrato del lato X:* Ma i quadrati de i due lati LN, NV, [m] sono vguali al quadrato di LV; sarà il quadrato di LV vguale al quadrato di X, ed il lato LV sarà vguale al lato X. Similmente i quadrati de i due lati KN, NV, sono vguali à i quadrati delle due NK, & Z: ma i quadrati delle due NK, & Z, sono vguali al quadrato del lato X; i quadrati de i lati KN, NV, cioè il quadrato di VK, [n] sarà vguale al quadrato di X, ed il lato VK sarà vguale al lato X. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il lato MV è vguale al lato X. Si considerino i due triangoli VLM, CHI. Perche i due lati VL, VM, sono vguali à i due lati CH, CI, e la base LM è vguale alla base HI; sarà l'angolo LVM [o] vguale all'angolo C. Similmente



K 3. del 1.

l 3. defin. del 11.

m 47. del 1.

n 47. del 1.

o 8. del 1.

te ne i triangoli VKL, ADE, i due lati VK, VL, ſono vguali à i due lati AD,AE, la baſe KL è vguale alla baſe DE, ſarà l'angolo KVL p vguale all'angolo A. E perche ne i triangoli VKM, BFG, i due lati VK, VM, ſono vguali à i due lati BF,BG, la baſe KM è vguale alla baſe FG, ſarà l'angolo KVM q vguale all'angolo B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

p 8. del 1.

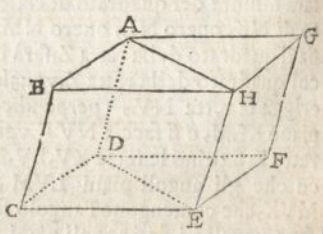
q 8. del 1.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

Se vn ſolido è contenuto da piani paralleli, gli oppoſti piani ſono parallelogrammi ſimili, ed vguali.

Sia il ſolido ACEG, contenuto da piani paralleli, cioè che il piano BE ſia parallelo all'oppoſto piano AF, che il piano AC ſia parallelo all'oppoſto GE, e che il piano BG ſia parallelo all'oppoſto piano CF. Dico che i piani oppoſti BE,AF, ouero i due AC,GE, ouero i due BG, CF, ſono parallelogrammi, ſimili, ed vguali. Perche i piani paralleli BE, AF, ſono ſegati dal piano AC, le communi ſettioni BC, AD, a ſono frà di loro parallele. Similmente, perche i piani paralleli BG,CF, ſono ſegati dal piano AC, le communi ſettioni BA, CD ſono frà di loro parallele; dal che il quadrilatero ABCD è parallelogrammo. Nell'iſteſſo modo proueremo,che tutti gli altri quadrilateri, che contengono il ſolido CG, *ſono parallelogrammi, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

a 16. del 11.



Di nuouo dico che i parallelogrammi oppoſti BG,CF ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Perche i lati AB, BH, che concorrono in B, ſono paralleli à i lati DC, CE, che concorrono in C, e non ſono nel medeſimo piano (ſtante che ſono ne i piani oppoſti) ſarà l'angolo ABH b vguale all'angolo DCE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,che gli altri angoli del parallelogrammo BG, ſono vguali à i corriſpondenti angoli del parallelogrammo CF; e perciò i parallelogrammi BG,CF, ſono equiangoli. In oltre nel parallelogrammo AC il lato AB c è vguale al lato DC, e nel parallelogrammo BE il lato BH è vguale all'oppoſto CE,è perciò AB à BH ſarà come DC à CE: ma AB è vguale à GH, ed il lato CD è vguale ad EF, ſarà BH ad HG come CE ad EF; e ſarà HG à GA come EF ad FD: per la qual coſa i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali;ed in conſeguenza i parallelogrammi BG,CF ſono frà di loro ſimili.Si tirino le rette AH,DE.Perche i due lati AB,BH,ſono vguali à i due lati DC,CE, e l'angolo ABH è vguale all'angolo DCE,ſarà la baſe AH vguale alla baſe DE, ed il triangolo ABH d vguale al triangolo DCE, come ancora il doppio, cioè il parallelogrammo BG, e ſarà vguale al doppio, cioè al parallelogrammo CF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli altri parallelogrammi oppoſti ſono ſimili, ed vguali. E queſto è quel ſolido, ch'Eu-

b 10. del 11.

c 34. del 1.

d 4. del 1.

e 34. del 1.

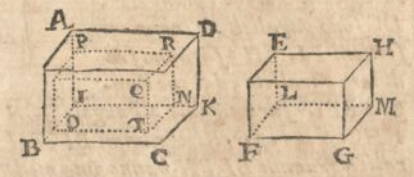
clide

clide chiama nella 30.defin. di questo. Parallelepipedo. Se il solido dunque contenuto da piani paralleli &c. ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

De i parallelepipedi simili, quello, che hà la base maggiore, è maggiore dell'altro, che hà la base minore.

Siano i simili parallelepipedi ABCD, EFGH, le di cui basi siano i simili parallelogrammi BK, FM, e sia la base BK maggiore della base FM. Dico che il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo EFGH. Perche i piani BK, FM, sono frà loro simili, e per ipotesi il piano BK è maggiore del piano FM, sarà IK [a] *maggiore di LM, ed IB maggiore di LF. Si faccia IN* [b] *vguale ad LM, e si faccia IO vguale ad LF, e si compisca il parallelogrammo ON. Di nuouo, perche i solidi BD, FH, sono simili, perciò i piani, che contengono il solido BD* [c] *saranno simili à i piani, che contengono il solido FH, cioè il piano BA sarà simile al piano FE, ed il piano AK simile al piano EM. Hor essendo il piano AB simile al piano EF, sarà BI ad IA* [d] *come FL ad LE: ma BI è maggiore di FL, sarà AI* [e] *maggiore di LE. Si faccia IP* [f] *vguale ad LE, e si compisca il parallelogrammo PO; co'i lati PI, IN, si compisca il parallelogrammo IR; si facciano i piani opposti, e sarà descritto il parallelepipedo POTR sopra la base ON. In oltre per la similitudine de i parallelepipedi BD, FH, l'angolo solido I sarà vguale all'angolo solido L, cioè l'angolo PIN* [g] *sarà vguale all'angolo ELM, l'angolo PIO vguale all'angolo ELF, e l'angolo OIN vguale all'angolo FLM. Hor perche i lati OI, IN sono vguali à i lati FL, LM, sarà OI ad IN come FL ad LM, l'angolo OIN è vguale all'angolo FLM, sarà il parallelogrammo ON simile, ed vguale al parallelogrammo FM. Similmente, essendo i lati OI, IP vguali à i lati FL, LE, e l'angolo OIP vguale all'angolo FLE, il parallelogrammo OP sarà simile, ed vguale al parallelogrammo FE: ed essendo i lati PI, IN, vguali à i lati EL, LM, e l'angolo PIN vguale all'angolo ELM, sarà il parallelogrammo IR simile, ed vguale al parallelogrammo LH: ma per l'antecedente propositione, gli opposti parallelogrammi sono simili, ed vguali; in conseguenza il parallelepipedo POTR* [h] *sarà vguale al parallelepipedo EFGH: ma il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo POTR, stante che lo contiene, sarà il parallelepipedo ABCD maggiore del parallelepipedo EFGH, ch'era da dimostrarsi.*

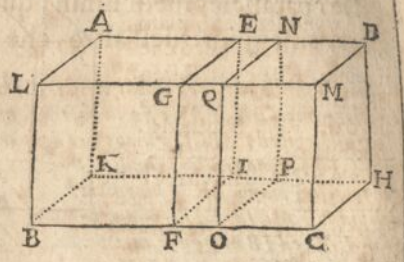


a Scol. alla 20. del 6.
b 3. del 1.
c 9. defin. del 11.
d 1. defin. del 6.
e 14. del 5.
f 3 del 1.
g 9. defin. del 11.
h 10. defin. del 11.

LEMMA.

Quando vn piano, segando vn parallelepipedo, è parallelo à i piani opposti, se diuide la base in due parti vguali, diuide il parallelepipedo in due parallelepipedi simili,

ed vguali; e se diuide la base in due parti ineguali, quel parallelepipedo sarà maggiore, il quale è posto sopra la base maggiore.



Sia il parallelepipedo AB CD, segato dal piano EF, parallelo al piano CD, ouero AB ed il piano EF seghi prima la base BH in due parti vguali. Dico che i parallelepipedi BE, FD, sono frà di loro vguali. Perche i piani EF, DC sono paralleli, le communi

a 16. del 11. *settioni FI, CH* [a] *saranno frà di loro parallele, dal che l'angolo BFI* [b] *sarà vguale all'angolo BCH, e l'angolo KIF, vguale all'angolo*

b 29. del 1. c 34. del 1. *KHC; si che i parallelogrammi BI, FH* [c] *saranno equiangoli. E perche i parallelogrammi BI, FH, hanno vna medesima altezza, perciò sono* [d] *come le basi BF, FC: ma i parallelogrammi BI, FH, si suppongono vguali, sarà la base*

d 1. del 6. e 14. del 5. *BF* [e] *vguale alla base FC, e la proportione di BF ad FI sarà come quella di FC à CH: per la qual cosa i parallelogrammi BI, FH,* [f] *sono frà loro simili, ed vguali. In oltre, perche i parallelogrammi BG, GC, hanno le basi vguali*

f 1. defin. del 6. g 36. del 1. *BF, FG, e sono frà le medesime parallele LM, BC, perciò sono* [g] *frà di loro vguali; e procedendosi, come prima si fece, si dimostrerà, che i parallelogrammi BG, FM, sono frà loro simili, ed vguali. Per la qual cosa i tre parallelogrammi FH, FM, FE, sono simili, ed vguali à i tre parallelogrammi FK, FL, FE. E*

h 10. defin. del 11. *perche gli opposti sono, per l'antecedente propositione, simili, ed vguali, in conseguenza il parallelepipedo BE* [h] *sarà simile, ed vguale al parallelepipedo FD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo sia segato il parallelepipedo BD dal piano NO, parallelo à i piani AB, DC, in modo, che le base BP sia maggiore della base OH. Dico che il

K 10. del 1. *parallelepipedo BN sarà maggiore del parallelepipedo OD. Si diuida BC* [K] *in due parti vguali in F, e per il punto F si faccia passare il piano FE,* [l] *parallelo al piano CD, quello sarà parallelo* [m] *al piano ON, e perciò continuati i pia-*

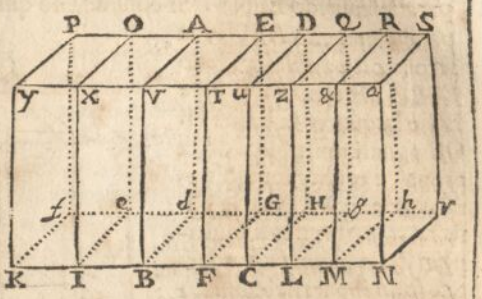
l Scol. alla 25. del 11. m Scol. alla 16. del 11. *ni FE, ON, mai scambieuolmente concorreranno; per la qual cosa il piano FE segarà i piani BQ, LN, AP, e le communi settioni FG, GE, EI, IF, caderanno nel luogo interposto frà i piani AB, NO, ed in conseguenza il solido FD sarà maggiore del solido OD: ma, per quel che si è prima dimostrato, il solido BE è simile, ed vguale al solido FD, sarà il solido BE maggiore del solido OD, e tutto il parallelepipedo BN sarà molto maggiore del parallelepipedo OD, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Se vn solido parallelepipedo è segato da vn piano equi-

distante

distante à i piani opposti ; sarà la base alla base come il solido al solido.

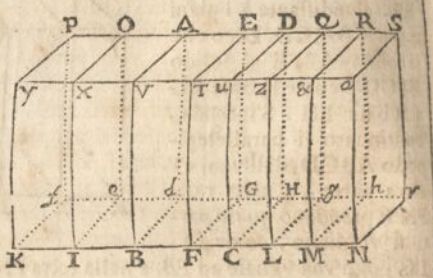


Sia il parallelepipedo ABCD segato dal piano EF, equidistante à i piani opposti BA,CD. Dico che il solido ABFE al solido EFCD, è come la base BG alla base FH. S'intenda continuato il parallelepipedo ABCD, dall'vna, e l'altra parte, e nella retta FK si prendano quãte parti si vogliano, come BI, IK, [a] ogn'vna vguale ad FB; e nella retta FN, si prendano quante parti si vogliano, come CL, LM, MN, ogn'vna vguale ad FC; per li punti I, K, L, M, N, si facciano passare i piani KP, IO, LQ, MR, NS, [b] paralleli al piano AB. Perche i solidi ABFE, EFCD, sono contenuti da piani paralleli, perciò sono parallelepipedi, e per l'antecedente propositione, i loro piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. Nell'istesso modo si proverà, che tutti gli altri solidi BAOI, IOPK, DCLQ, QLMR, RMNS sono parallelepipedi, e che in ogn'vno i piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. In oltre perche i parallelogrammi Ke, Id, BG, sono sopra le vguali basi KI, IB, BF, e sono frà le medesime parallele *fG, KF,* [c] *perciò sono frà di loro vguali ;* e sono ancora simili, stante che *i lati opposti Kf, Ie, Bd, sono frà loro vguali,* e paralleli, ed i lati KI, IB, BF, per costruttione, *sono frà loro vguali ; si che i parallelogrammi* Ke, Id, BG, sono equiangoli, ed *hanno i lati intorno à gli angoli vguali* proportionali, cioè KI ad Ie, è come *IB à Bd, ouero come BF ad FG.* Similmente i parallelogrammi KX, IV, BT, sono *sopra le vguali basi KI,* IB, BF, e frà le medesime parallele YT, KF, e perciò sono frà di loro vguali. E procedendosi nel modo antecedente, si dimostrerà, che sono ancora fra loro simili. Et essendo i parallelogrammi KP, IO, BA, frà di loro simili, ed vguali, i tre parallelogrammi BG, BT, BA, del parallelepipedo BE, saranno vguali, e simili à i tre parallelogrammi Id, IV, BA, del parallelepipedo OIBA, e saranno ancora simili, ed vguali à i tre parallelogrammi KE, KX, IO, del parallelepipedo PKIO : ma questi in ogn'vno de i detti parallelepipedi sono vguali, e simili [f] à gli opposti; perciò i parallelepipedi PKIO, OIBA, ABFE, sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i parallelepipedi EFCD, DCLQ, QLMR, RMNS, sono frà di loro vguali ; e sarà il parallelepipedo PKFE multiplice del parallelepipedo ABFE, come la base KG è multiplice della base BG. E similmente tutto il parallelepipedo EFNS sarà multiplice del parallelepipedo EFCD, come la base Fr è multiplice della base FH. Se il lato KF è vguale ad FN, sarà la base KG vguale alla base Fr, e per l'antecedente Lemma, tutto il parallelepipedo PKFE

[a] 3. del 1.
[b] Scol. alla 15. del 11.
[c] 36. del 1.
[f] 24. del 11.

sarà

sarà vguale al parallelepipedo EFNS. Se poi KF è minore, ò maggiore di FN, sarà la base KG minore, ò maggiore della base Fr, e per l'antecedente Lemma, il parallelepipedo PKFE sarà minore, ò maggiore del parallelepipedo EFNS. Si considerino quattro quantità, la prima sia il parallelepipedo ABFE, la seconda il parallelepipedo EFCD, la terza sia la base BG, e la quarta la base FH. Gli vguali multiplici della prima, e terza, sono il parallelepipedo PKFE, e la base KG, e gli vguali multiplici della seconda, e quarta, sono il parallelepipedo EFNS, e la base Fr. E perche se il parallelepipedo PKFE, ch'è multiplice della prima ABFE, è vguale al parallelepipedo EFNS, ch'è multiplice della seconda EFCD, ancora la base KG, ch'è multiplice della terza BG, è vguale alla base Fr, ch'è multiplice della quarta FH; e se il parallelepipedo PKFE è maggiore, ò minore del parallelepipedo EFNS, ancora la base KG sarà maggiore, ò minore della base Fr, per la 6. definitione del quinto, la prima, cioè il parallelepipedo ABFE, alla seconda, cioè al parallelepipedo EFCD, sarà come la terza, cioè la base BG, alla quarta, ch'è la base FH. Per la qual cosa il parallelepipedo ABCD sarà diuiso dal piano EF, in modo, che il parallelepipedo ABFE al parallelepipedo EFCD, sarà come la base BG alla base FH, ch'era da dimostrarsi.



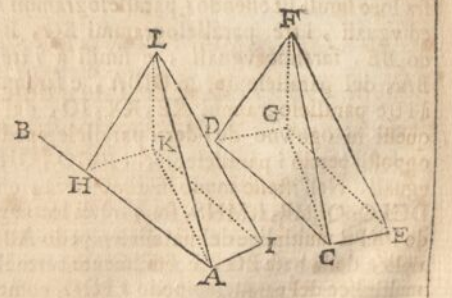
PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVI.

Ad vna data retta linea, in vn punto in essa, costituire vn angolo solido, vguale ad vn angolo solido dato.

Sia data la retta AB, ed il punto in essa A, e sia dato l'angolo solido C, si vuole nel punto A, sopra la retta AB, costituire vn angolo solido, vguale all'angolo solido C. Nella retta CF si prenda qualunque punto F, dal quale si faccia cadere[a] la retta FG perpendicolare al piano DC EG; si tirino le rette GD, GC, GE, FE, FD; poi alla retta AB, nel punto A, si faccia l'angolo BAI[b] vguale all'angolo pia-

a 11. del 11.

b 23. del 1.



no

no DCE; e nel medesimo punto A, nel piano BAI, si costituisca l'angolo BAK, e vguale all'angolo DCG; sarà il rimanente angolo KAI vguale al rimanente angolo GCE. Si faccia AK [d] vguale alla retta CG, poi nel punto K si eleui la retta KL [e] perpendicolare al piano BAIK; si faccia KL [f] vguale ad FG, si tiri la retta LA. Dico che l'angolo solido A, contenuto da gli angoli piani LAB, LAI, BAI, è vguale al dato angolo solido C. Si faccia AH [g] vguale alla retta CD, e si tagli AI vguale à CE; dal punto K si tirino le rette KH, KI; e dal punto L si tirino le rette LH, LI; e si considerino i due triangoli HAK, DCG, de'quali i due lati HA, AK, per costruttione, sono vguali à i due lati DC, CG, l'angolo HAK è vguale all'angolo DCG, [h] sarà la base HK vguale alla base DG. Similmente ne i triangoli KAI, GCE, i due lati KA, AI, sono vguali à i due lati GC, CE, l'angolo KAI è dimostrato vguale all'angolo GCE, sarà la base [K] KI vguale alla base GE. In oltre, perche le rette FG, LK, sono perpendicolari à i piani DCEG, HAIK, gli angoli FGD, FGC, FGE, come ancora gli angoli LKH, LKA, LKI, [l] sono retti. Ne i triangoli LKI, FGE, essendo, per costruttione, il lato LK vguale al lato FG, e si è dimostrato il lato KI vguale al lato GE, e l'angolo LKI vguale all'angolo FGE, in conseguenza [m] la base LI sarà vguale alla base FE. Similmente ne i triangoli FGC, LKA, i due lati FG, GC, per costruttione sono vguali à i due lati LK, KA, gli angoli FGC, LKA, sono retti, perciò la base LA [n] sarà vguale alla base FC. Di più ne i triangoli LKH, FGD, i due lati LK, KH, sono vguali à due lati FG, GD, gli angoli LKH, FGD, sono retti; sarà la base LH vguale alla base FD. Si considerino poi i triangoli LAI, FCE, de'quali i due lati LA, AI sono vguali à due lati FC, CE; la base LI è dimostrata vguale alla base FE; sarà l'angolo LAI [o] vguale all'angolo FCE. Finalmente ne i triangoli LAH, FCD, i due lati LA, AH, sono vguali à i due lati FC, CD, la base LH è dimostrata vguale alla base FD, sarà l'angolo LAH [p] vguale all'angolo FCD: ma l'angolo BAI, per costruttione è vguale all'angolo DCE, i tre angoli piani dunque LAB, LAI, BAI, che contengono l'angolo solido A, sono vguali à i tre angoli piani FCD, FCE, DCE, che contengono l'angolo solido C; e perciò l'angolo solido A è vguale all'angolo solido C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 23. del 1.
d 3. del 1.
e 12. del 11.
f 3. del 1.
g 3. del 1.
h 4. del 1.
K 4. del 1.
l 3. defin. del 11.
m 4. del 1.
n 4. del 1.
o 8. del 1.
p 8. del 1.

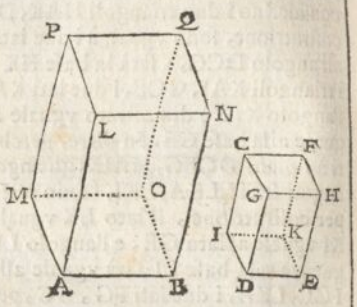
PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXVII.

Sopra vna data retta linea descriuere vn parallelepipedo simile, e similmente posto ad vn dato parallelepipedo.

Sia data la retta linea AB, ed il solido parallelepipedo CDEF, e si voglia sopra la retta AB descriuere vn parallelepipedo simile, e similmente posto, al dato parallelepipedo CDEF. Nel punto A sopra la retta AB, per l'antecedente propositione, si costituisca l'angolo solido A, vguale all'angolo solido D, in modo, che l'angolo LAB sia vguale all'angolo GDE, l'angolo LAM sia vguale all'angolo GDI, e l'angolo MAB sia

vguale

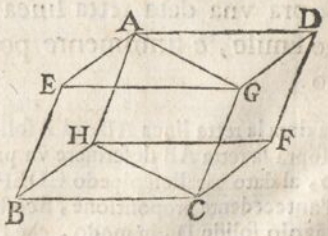
a 12. del 6. vguale all'angolo IDE; poi si faccia come ED à DG, a così BA ad AL; e di nuouo si faccia come GD à DI, così LA ad AM; sarà per l'egualità
b 22. del 5. ED à DI b come BA ad AM. Co'i due lati LA, AB, si compisca il parallelogrammo AN; co'i due MA, AB, si faccia il parallelogrammo AO; e co'i due LA, AM, si faccia il parallelogrammo AP. Per il punto B si
c Scol. alla 15. del 11. faccia passare il piano BQ c parallelo al piano AP; per il punto M si faccia passare il piano MQ parallelo al piano AN; e per il punto P si faccia passare il piano PN parallelo al piano MB; e sarà descritto il parallelepipedo PABQ alla retta AB, quale Dico esser simile, e similmente posto al parallelepipedo dato CDEF. Perche l'angolo LAB è vguale all'angolo GDE, e la proportione di LA ad AB è come quella di GD à DE, sarà il parallelogrammo LB
d 1. defin. del 6. d simile, e similmente posto al parallelogrammo GE. Similmente perche l'angolo LAM è vguale all'angolo GDI, e la proportione di LA ad AM è come quella di GD à DI, sarà il parallelogrammo AP simile, e similmente posto al parallelogrammo DC. Ed oltre à ciò, essendo l'angolo BAM vguale all'angolo EDI, e la proportione di ED à DI è come quella di BA ad AM; il parallelogrammo AO sarà simile, e similmente posto al parallelogrammo DK; per la qual cosa i tre parallelogrammi EG, DC, DK, sono simili, e similmente posti à i tre parallelogrammi AN, AP,
c 24. del 11. AO, i loro opposti e sono ancora simili, e perciò i parallelepipedi CDEF, PABQ, saranno simili, e similmente posti, che era da farsi, e dimostrarsi.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Il piano, che sega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani opposti, lo diuide in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, nel quale i piani opposti siano i parallelogrammi ED, BF, si tirino i diametri, ò diagonali, che siano le rette AG, HC. Perche i quadrilateri BG, BA sono parallelogrammi, sarà GC vguale, e parallela ad EB, e la retta AH sarà vguale, e



paral-

parallela alla medesima EB; dal che le rette AH, GC [a] sono frà di loro vguali, e parallele; e le rette AG, HC, che le congiungono, [b] sono frà di loro vguali, e parallele; e perciò saranno in vn medesimo piano; ed il quadrilatero AHCG sarà parallelogrammo. Dico, che il piano AHCG diuide il parallelepipedo BD in due parti vguali. Perche gli opposti parallelogrammi ED, BF, sono frà di loro simili, ed vguali, le loro metà saranno ancora [c] simili, ed vguali; e sarà il triangolo AEG simile, vguale, e parallelo al triangolo HBC; ed il triangolo AGD sarà simile, vguale, e parallelo al triangolo HCF. Nel parallelogrammo ED i lati opposti, e gli angoli opposti, [d] sono frà di loro vguali, e perciò la proportione di AE ad EG è come quella di GD à DA; si che i triangoli AEG, ADG sono frà loro equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli [e] vguali proportionali, e perciò sono [f] simili; e sarà il triangolo AEG simile, ed vguale al triangolo AGD. Per l'istessa ragione i triangoli HBC, HCF, sono frà loro simili, ed vguali, e tutti quattro i triangoli AEG, AGD, BHC, HCF, sono frà loro simili, ed vguali. Finalmente perche il parallelogrammo AB è simile, ed vguale al parallelogrammo DC, come ancora il parallelogrammo EC è simile, ed vguale al parallelogrammo HD; essendo il parallelogrammo AHCG commune, saranno i tre parallelogrammi AB, EC, AC, simili, ed vguali à i tre parallelogrammi CD, DH, AC; ed i triangoli AEG, HBC, sono simili, ed vguali à i triangoli AGD, HCF; e per la 10. definit. di questo, i prisma AHBG, AHCD, sono frà di loro simili, ed vguali. Per la qual cosa il piano AHCG, che passa per le diagonali AG, HG, diuide il parallelepipedo ABCD in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi.

a 9. del 11.
b 33. del 1.
c 20. del 6. & 34. del 1.
d 34. del 1.
e 4. del 6.
f 1. definit. del 6.

COROLLARIO.

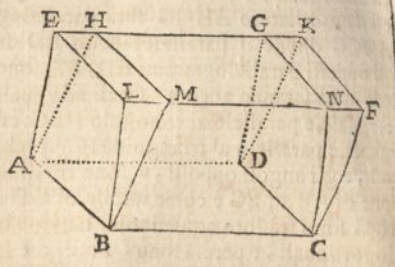
Quando dunque vn piano sega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani opposti, lo sega in due prismi di basi triangolari, e perciò ogni prisma di base triangolare è la metà del parallelepipedo, che hà la medesima altezza, la di cui base è il doppio della base triangolare di esso prisma.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIX.

Se i solidi parallelepipedi hanno vna medesima base, e sono frà i medesimi piani paralleli, ed i lati, che si eleuano sopra la base in ciascuna di due faccie opposte, terminano nella medesima retta linea, quei solidi parallelepipedi sono frà di loro vguali.

Sopra la medesima base ABCD, e frà i medesimi piani paralleli EF, AC, siano collocati i parallelepipedi EBCG, HBCK, ed in ciascuna delle

facciе oppoſte BF,AK,i lati eleuati ſopra la baſe cõcorrano nelle medeſime rette LF,EK,cioè i lati BL,BM,CN,CF,cõcorrano nella medeſima retta LF; ed i lati AE,AH,DG, DK, nella faccia oppoſta concorrano colla medeſima retta EK. Dico,che i parallelepipedi EBCG,HBCK, ſono frà di loro vguali. Perche *i* parallelogrammi *LBCN*, MBCF, hanno *la* medeſima baſe *BC*, e ſono frà *le* medeſime parallele LF, BC, [a] perciò ſono frà di loro vguali; detrattone il commune trapetio MBCN, reſta il triangolo LBM vguale al triangolo NCF. Nell'iſteſſo modo ſi proverà,che il triangolo EAH è vguale al triangolo GDK. In oltre nel parallelogrammo *LC i lati* oppoſti LN,BC, [b] ſono frà di loro vguali; e nel parallelogrammo BF il lato MF [c] è vguale all'oppoſto BC; dal che LN ſarà vguale ad MF, e detrattane la commune MN, reſta LM vguale ad NF. Nel parallelogrammo EB, i lati oppoſti EA,LB ſono [d] frà di loro vguali,e nel parallelogrammo BH il lato AH è vguale all'oppoſto BM; come ancora nel parallelogrammo EM i lati oppoſti EH, LM, ſono frà di loro vguali, dal che i tre lati AE,EH,HA del triangolo EAH, ſono vguali à i tre lati BL,LM,MB, del triangolo LBM, e per l'8. propoſitione del primo, *i* triangoli AEH,BLM, ſono equiangoli, & vguali; e perciò, [e] hanno *i lati* intorno à gli angoli vguali proportionali, *e per la 1. definit.* del 6. ſono frà di loro ſimili, ed vguali. *Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà*, che i triangoli CNF,DGK, *ſono frà di loro ſimili,ed vguali.* E perche nel parallelogrammo *BF il lato BM* [g] *è vguale all'oppoſto* CF,e nel parallelogrammo *BN il lato BL è vguale all'oppoſto* CN; eſſendoſi dimoſtrato *il lato LM vguale ad NF, i tre lati* BL,LM,MB, del triangolo LBM, ſono vguali *à i tre lati* CN, NF, FC del triangolo CNF; e perciò i triangoli BLM,CNF, ſono equiangoli, haueranno i lati [h] intorno à gli angoli vguali proportionali; per la qual coſa ſono frà di loro ſimili: ma furono dimoſtrati vguali, in conſeguenza ſono frà loro ſimili, ed vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i triangoli EAH,GDK, ſono frà loro ſimili, ed vguali. I quattro triangoli dunque LBM,EAH,NCF,GDK, ſono frà loro ſimili, ed vguali. Di nuouo perche i parallelogrammi EM,GF, ſono ſopra le vguali baſi LM,NF, e frà le medeſime parallele EK,LF, [K] perciò ſono frà di loro vguali; & eſſendo GN parallela ad EL, ſarà l'angolo ELM [l] vguale all'angolo GNF, e l'angolo NGK vguale all'angolo LEH; ſi che *i* parallelogrammi EM,GF, ſono equiangoli. E perche il lato EL [m] è vguale all'oppoſto GN, ſarà EL ad LM, come GN ad NF: per la qual coſa i parallelogrammi EM, GF ſono frà loro ſimili; furono dimoſtrati vguali, in conſeguenza ſono frà loro ſimili, ed vguali. Nel parallelepipedo EBCG, *i* piani oppoſti EB, GC, [n] ſono frà loro ſimili, ed vguali: e *nel* parallelepipedo HBCK, *i* piani oppoſti HB,KC, ſono ſimili, ed vguali; dal che i tre paralle-



a 35. del 1.
b 34. del 1.
c 34. del 1.
d 34. del 1.
e 4. del 6.
g 34. del 1.
h 4. del 6.
K 36. del 1.
l 29. del 1.
m 34. del 1.
n 24. del 11.

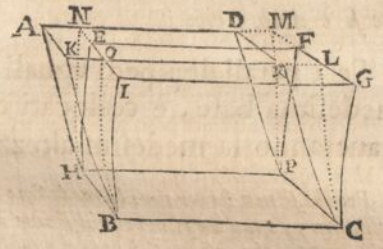
logrammi

logrammi EB,EM,HB,sono simili,ed vguali à i tre parallelogrammi CG, GF,CK;ed i triangoli BLM,AEH,sono simili,ed vguali à i triãgoli CNF, DGK; e per la 10.definitione di questo, i prisma ABME,DCFG, sono frà di loro vguali, se gli aggiunga vgualmente il solido HBCG, ne viene il parallelepipedo EBCG vguale al parallelepipedo HBCK, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXX.

Se i solidi parallelepipedi hanno vna medesima base, e sono frà i medesimi piani paralleli, ed i lati, che si eleuano sopra la base, in nessuna delle faccie opposte terminano nella medesima retta linea, quei parallelepipedi sono frà di loro vguali.

Sopra la medesima base HBCP, e frà i medesimi piani paralleli AG, HC, siano collocati i parallelepipedi ABCD,EBCF, ed i lati eleuati alla base in nessuna faccia concorrano colla medesima retta linea, cioè, che i lati BK, BI, CR, CG, non siano nel medesimo piano; E similmente i lati HE,PF,non siano nel medesimo piano co'i lati HA,PD;ne i lati BK, HA siano nel medesimo piano co'i lati BI,HE; ne meno i lati CG,PF,siano nel medesimo piano co'i lati CR, PD. Dico, che il parallelepipedo ABCDè vguale al parallelepipedoEBCF.Si prolũghino i latiKR,AD,IE fin che si seghino co'i lati GF, AD,cõtinuati,come inM,L,ed N; si tirino le rette HN, BO, CL, PM. Nel parallelogrammo EHBI, il lato IE è parallelo all'opposto HB: e nel parallelogrammo AB il lato AK è parallelo al medesimo lato HB; e perciò le rette AK, EI, ouero IN, [a] sono frà di loro parallele: Ma nel parallelogrammo AKRD, il lato KR è parallelo al lato AD, sarà il quadrilatero AKON [b] parallelogrammo,e sarà AK [c] vguale ad NO:ma il lato AK è vguale al suo opposto HB, sarà NO vguale ad HB; e perche fù dimostrata la retta NO, parallela ad HB, sarà NO vguale, e parallela ad HB; per la qual cosa le rette NH,OB,sono frà di loro vguali,e parallele,ed il quadrilatero NHBO è parallelogrammo. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrilatero MPCL è parallelogrammo. E perche il piano CF è parallelo al piano EB,sarà tutto il piano MC parallelo al piano NB.Similmente, essendo il piano KBCR parallelo al piano AHPD, sarà tutto il piano KBCL parallelo al piano AHPM; ed il solido,le di cui faccie opposte so-



a 9. del 11.

b 35. defin. del 1.

c 34. del 1.

d 30. defin. del 11.

no i parallelogrammi NHBO, MPCL, cioè il solido MNHBOLCP, d sarà parallelepipedo. In oltre si considerino i due parallelepipedi, cioè ABCD, & MNHBOLCP, i quali hanno la medesima base HBCP, sono frà i medesimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati sopra la base in ciascuna delle due faccie opposte concorrono in vna medesima retta linea, cioè i lati HA, HN, PD, PM, concorrono nella medesima retta AM; come anco i lati BK, BO, CR, CL, concorrono nella medesima retta linea KL; e per l'antecedente propos. i detti parallelepipedi sono frà di loro vguali. Finalmente i parallelepipedi EBCF, MNHBOLCP, hanno la medesima base HC, sono frà i medesimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati alla base, cioè HN, HE, BO, BI, concorrono nella medesima retta NI, ed i lati CG, CL, PF, PM, concorrono nella medesima retta MG, perciò e sono frà di loro vguali. Per la qual cosa il parallelepipedo ABCD sarà vguale al parallelepipedo EBCF, come fù proposto dimostrare.

e 29. del 11.

CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propositioni è manifesto, che quando due parallelepipedi hanno vna medesima base, e sono frà i medesimi piani paralleli, in qualunque modo siano collocati, sempre sono frà di loro vguali.

SCOLIO.

La conuersa alle due antecedenti propositioni è chiara da quel, che si è detto, cioè

Se i parallelepipedi vguali sono costituiti sopra d'vna medesima base, e collocati dalla medesima parte, quelli haueranno la medesim' altezza.

Perche se non haueranno la medesima altezza, vno di quelli sarà più alto dell'altro, se con vn piano equidistante alla base se ne leui la parte più alta, i rimanenti, che restano frà i piani paralleli, sarebbero, per quel che si è dimostrato, frà di loro vguali, ch'è contro all'ipotesi.

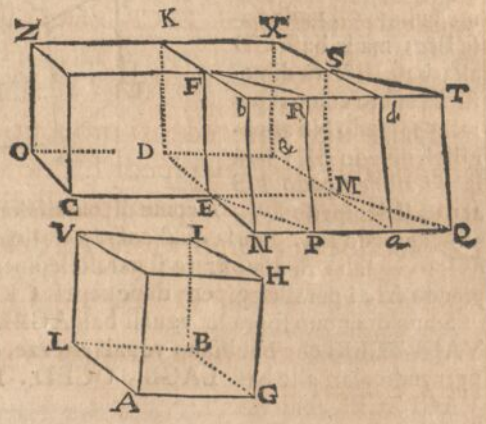
THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno vguali basi, e la medesima, ò vguali altezze, sono frà di loro vguali.

Sopra le vguali basi AB, CD, siano costituiti i parallelepipedi AI, CK, i quali habbiano vguali altezze. Dico, che i parallelepipedi AI, CK, sono frà di loro vguali. Supposto prima, che i lati GH, EF, siano perpendicolari alle basi AB, CD, saranno GH, EF, le loro vguali altezze: si prolunghi il

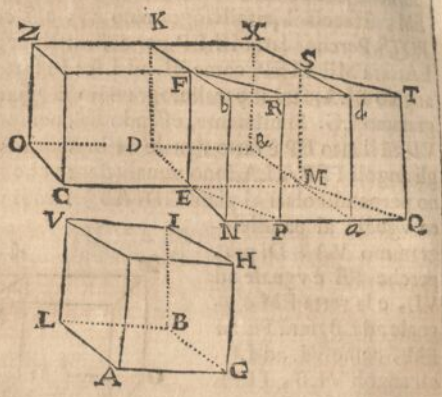
lato

lato CE verſo M, e ſi faccia EM vguale ad LB ; nel piano OMP, ſopra la retta EM, in punto E, ſi coſtituiſca l'angolo MEP [a] vguale all'angolo BLA ; ſi faccia EP vguale ad LA, e ſi compiſca il parallelogrammo EQ; poi colle due FE,EP, [b] ſi faccia il parallelogrammo ER, e colle due FE, EM, ſi faccia il parallelogrammo ES, e ſi compiſca il parallelepipedo PQTS. Perche i lati ME,EP, per coſtrutttione, ſono vguali à i due lati BL, LA, ſarà ME ad EP, come BL ad LA ; fù fatto l'angolo MEP vguale all' angolo BLA, ſarà il parallelogrammo EQ ſimile, ed vguale al parallelogrammo LG. Similmente, eſſendo EF, per ipoteſi, vguale ad HG, ouero VL, ed il lato EP è fatto vguale ad LA, ſarà FE ad EP, come VL ad LA ; gli angoli FEP,VLA, ſono vguali (ſtante che le rette FE,VL ſi ſuppongono perpendicolari à i piani CD, AB) ſarà il parallelogrammo FP ſimile, ed vguale al parallelogrammo VA. Di più, perche FE è vguale ad VL, e la retta EM è vguale ad LB, ſarà FE ad EM, come VL ad LB ; gli angoli VLB, FEM, ſono retti, ſarà il parallelogrammo FM ſimile, ed vguale al parallelogrammo VB; e coſi i tre parallelogrammi EQ, FP, FM, ſono ſimili, ed vguali à i corriſpondenti tre parallelogrammi LG, VA, VB; gli oppoſti [c] ſono ſimili, ed vguali, e perciò i parallelepipedi FPQS, VAGI, ſono frà di loro vguali. Si cõpiſca il parallelepipedo KEMX. Perche le rette CE, EM, per coſtruttione, fanno vna ſola retta linea, ſarà il parallelogrammo CS vn ſolo piano, ed il ſolido ZCMX ſarà vn ſolo parallelepipedo ; ſi prolunghino le rette DE, & M, fin che concorrano colla retta PQ, continuata in qualche punto N, ed a, ſi prolunghino le rette XS, KF, fin che concorrano con RT, come in b, & d; ſi tirino le rette bN, & da, e ſarà coſtrutto il parallelepipedo FNaS. E perche i parallelepipedi FNaS, FPQS, hanno la medeſima baſe ES, e ſono frà i medeſimi piani paralleli NT, ES, [d] perciò ſono frà di loro vguali: ma il parallelepipedo FPQS fù dimoſtrato vguale al parallelepipedo AI, ſarà il parallelepipedo FNaS vguale al parallelepipedo AI. Di nuouo perche i parallelogrammi PM, NM, hanno la medeſima baſe EM, e ſono frà le medeſime parallele NQ, EM, perciò ſono [e] frà di loro vguali: ma il parallelogrãmo PM fù dimoſtrato vguale al parallelogrãmo AB, ouero CD, ſarà il parallelogrammo NM vguale al parallelogrammo CD; e, preſo il parallelogrammo E&, come terza quantità, ſarà il parallelogrammo NM al parallelogrammo E&, [f] come il parallelogrammo CD al medeſimo parallelogrammo E&. Si conſideri il parallelepipedo NX, ſegato dal piano ES



a 23. del 1.
b 3. del 1.
c 34. del 11.
d 29. & 30. del 11.
e 36. del 1.
f 7. del 5.

g 25.del 11. no ES equidistante al piano Nd, sarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX g come la base NM alla base E&; ma la base NM alla base E& fù dimostrata essere come il parallelogrammo CD al parallelogrammo E&, sarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX h come il piano CD al piano E&. Di più, essendo il parallelepipedo CX segato dal piano KE, parallelo al piano CZ, sarà il parallelepipedo CK al parallelepipedo EX K come la base CD alla base E&; ma la base CD alla base E& fù dimostrata essere come il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX; sarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX, l come il parallelepipedo CK al medesimo parallelepipedo EX. Per la qual cosa i parallelepipedi NS, CK m sono frà di loro vguali: fù dimostrato il parallelepipedo NS vguale al parallelepipedo AI; i parallelepipedi dunque AI, CK sono frà di loro vguali.



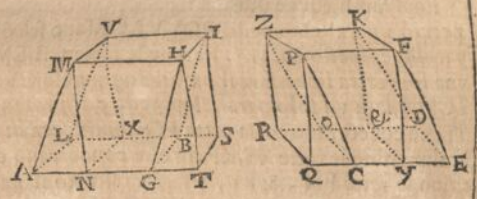
h 11.del 15.

K 25.del 11.

l 11. del 15.

m 9. del 5.

Siano di nuouo sopra le vguali basi AGBL, OCED, i parallelepipedi VAGI, ZCEK, che habbiano vguali altezze, e non siano i lati GH, EF, perpendicolari alle basi LAGB, OCED. *Dico che i parallelepipedi* VAGI, ZCEK, sono frà di loro vguali. *Da i punti M, H, I, V,* n *alla base AB, continuata, si facciano cadere le rette perpendicolari MN, HT, IS, VX, e da punti Z, P, F, K, alla base OCED, continuata, si facciano cadere le perpendicolari ZR, PQ, FY, K&.* Perche le altezze de i parallelepipedi sono frà di loro vguali, tutte le dette perpendicolari saranno frà di loro vguali. Si tirino le rette NX, TS, RQ, &Y, e saranno costrutti i due parallelepipedi VNTI, ZQYK, che hanno i lati eleuati perpendicolari alle basi. Hor essendo la base XNTS vguale al piano opposto VMHI, ed il parallelogrāmo VMHI o è vguale alla base LAGB, sarà la base LAGB vguale alla base XNTS. Nell'istesso modo si proverà, che la base &RQY è vguale alla base OCED; per la qual cosa le basi XNTS, RQY&, sono frà di loro vguali; *i lati PQ, HT, sono perpendicolari alle basi, e per quel che si è dimostrato nella prima parte, i parallelepipedi VNTI, ZQYK, sono*



n 11. del 11.

o 24.del 11.

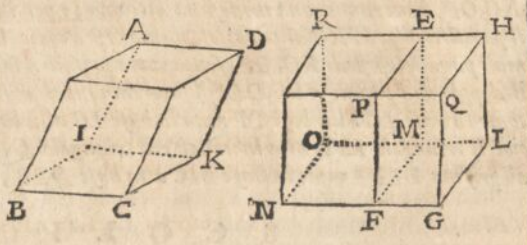
frà

frà di loro vguali. Finalmente perche i parallelepipedi VAGI, VNTI, hanno la medesima base VMHI, e sono frà i medesimi piani paralleli MI, AS, [o] perciò sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si proverà, che i parallelepipedi ZQYK, ZCEK sono frà di loro vguali; mà i due parallelepipedi VNTI,ZQYK, furono dimostrati vguali, i parallelepipedi dunque VAGI,ZCEK, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi. [o] 29. & 30. del 11.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXII.

I solidi parallelepipedi, che hanno vguali altezze, sono frà di loro come le basi.

Siano i due parallelepipedi ABCD, EFGH, i quali habbiano la medesima, ò vguali altezze. Dico che il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, è come la base BK alla base FL. Al lato FM si applichi il parallelogrammo NM, [a] in modo, che l'angolo FMO sia vguale all'angolo GLM; à i quali s'aggiunga vgualmente l'angolo FML; i due angoli FMO, FML, saranno vguali à i due angoli FML,GLM, ma i due angoli FML,GLM, [b] sono vguali à due angoli retti, saranno i due angoli FML, FMO, vguali à due angoli retti; e le rette OM, ML, [c] costituiranno la sola retta linea OL; dal che i due parallelogrammi FO,FL, costituiscono il solo piano NL: si compisca il parallelepipedo RNGH, il quale haverà la medesima altezza, che hà il parallelepipedo ABCD. E perche la base BK è vguale alla base NM, sarà il parallelepipedo ABCD [d] vguale al parallelepipedo RNFE; e sarà il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, [e] come il parallelepipedo RNFE al medesimo parallelepipedo EFGH: ma i due RNFE, EFGH, [f] sono come le basi NM, FL; sarà il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, come la base NM, ouero BK, alla base FL, ch'era da dimostrarsi.



* vguale alla base BK

a 45. del 1.

b 29. del 11.

c 14 del 1.

d 31. del 1.

e 7. del 5.

f 25. del 11.

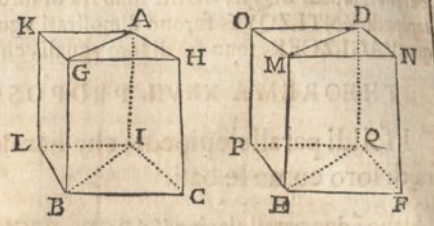
COROLLARIO I.

Da quel che si è detto è manifesto, che se saranno due Prismi di basi triangolari, i quali haueranno la medesima altezza, il Prisma al Prisma è come la base triangolare dell'vno alla base triangolare dell'altro.

Per esempio siano i Prismi di basi triangolari ABC, DEF, che habbiano

vguali

vguali altezze; co' i lati GH, HA, si faccia il parallelogrammo KH, e co' i lati BC, CI, si faccia il parallelogrammo LC, e si compisca il parallelepipedo KC, hauerà il parallelepipedo KC la medesima altezza, che hà il prisma ABC, e per la propositione 28. di questo, il parallelepipedo KC, sarà il doppio del prisma ABC. Di nuouo co' i lati MN, ND, si faccia il parallelogrãmo ON, e co' i lati EF, FQ si faccia il parallelogrammo PF; si compisca il parallelepipedo OF: e per le ragioni antedette, il parallelepipedo OF è il doppio del Prisma DEF, ed hà la medesima altezza, che hà il prisma DEF: ma i prismi ABC, DEF, per ipotesi, hanno vna medesima altezza; perciò i parallelepipedi KC, OF, haueranno vna medesima altezza; e per l'antecedente propositione, il parallelepipedo KC al parallelepipedo OF è come la base LC alla base PF: ma i parallelepipedi KC, OF, sono come i prismi ABC, DEF [a] (stante che sono il doppio de i prismi ABC, DEF) sarà dunque il prisma ABC al prisma DEF come la base LC alla base PF: ma la base LC alla base PF [b] è come la metà, cioè il triangolo IBC, alla metà, ch'è il triangolo QEF; sarà il prisma ABC al prisma DEF [c] come la base BIC alla base QEF, ch'è il nostro proposto.



a 15. del 5.

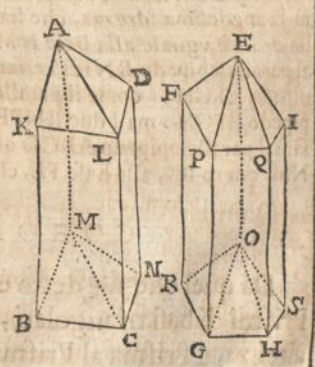
b 15. del 5.

c 11. del 5.

SCOLIO.

Quel che si è detto de i prismi di basi triangolari, si verifica ancora de i prismi, le di cui basi hanno più di tre lati.

Siano i prismi ABCD, ERGHI, di basi moltilatere, che habbiano vguali altezze. Dico che il prisma ABCD al prisma ERGH è come la base MBCN alla base ORGHS. Da gli angoli A, & E à gli angoli opposti de i poligoni AKLD, EFPQI, si tirino le rette AL, EP, EQ, e da gli angoli M, ed O, à gli angoli opposti delle basi, si tirino le rette MC, OG, OH. Perche nel prisma ERGHI i piani opposti EFPQI, ORGHS, [d] sono frà di loro simili, vguali, e paralleli; tirate le rette EP, FQ, OG, OH, i poligoni EFPQI, ORGHS, [e] saranno diuisi in triangoli di numero vguale; ed i triangoli in vno saranno simili à i triangoli corrispondenti dell'altro; e perciò il triangolo EFP sarà simile al triangolo ORG; il triangolo EPQ sarà simile al triangolo OGH; ed il tri-



d 13. defin. del 11.

e 20. del 6.

angolo

angolo EQI sarà simile al triangolo OHS. Nell'istesso modo si proverà, che il triangolo ALD è simile al triangolo MCN, ed il triangolo AKL è simile al triangolo MBC. In oltre perche i piani FG, PH, QS, ES, ER, [f] per la natura del prisma, sono parallelogrammi, i lati opposti de' quali [g] sono vguali, e paralleli, saranno tutte le rette FR, PG, QH, IS, EO, frà di loro vguali, e parallele; Hor essendo la retta PG vguale, e parallela ad EO, sarà EP [h] vguale, e parallela ad OG, ed il quadrilatero EPGO sarà parallelogrammo. Similmente essendo QH vguale, è parallela ad EO, sarà EQ [K] vguale, e parallela ad OH, ed il quadrilatero EOHQ sarà parallelogrammo. E perche i tre lati EF, FP, PE, sono vguali à i tre lati OR, RG, GO, stante che sono lati opposti de i parallelogrammi FG, GE, ER; perciò i triangoli EFP, ORG, [l] sono frà loro vguali; furono dimostrati simili, e sono ne i piani paralleli FI, RS, perciò sono frà loro simili, vguali, e paralleli. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli EPQ, OGH, sono simili, vguali, e paralleli; e che i triangoli EQI, OHS, sono frà loro simili, vguali, e paralleli. Per la qual cosa i solidi EOGRFP, EOGHQP, EOSHQI, sono prismi di basi triangolari. Nell' istesso modo si dimostrerà, che i solidi AMBCLK, AMNCLD, sono prismi di basi triangolari. Si considerino i prismi ERGO, EGHO, i quali hanno vna medesima altezza, e per il Corollario antecedente, il prisma ERGO al prisma EGHO, è come la base ORG alla base OGH; e componendo, il prisma ERGHO al prisma EGHO, [m] è come la base ORGH alla base OGH: ma il prisma EGHO al prisma EHSO, per l'antecedente Corollario, è come la base OGH alla base OHS; sarà per l'vgualità, il prisma ERGHO al prisma EHSO [n] come la base ORGHO alla base OHS; e componendo, tutto il prisma ERGHSO al prisma EHSO [o] è come la base ORGHS alla base OHS; ed inuertendo, il prisma EHSO à tutto il prisma ERGHSO, [p] è come la base OHS à tutta la base ORGHS. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutto il prisma ABCD al prisma ACNM, è come la base MBCN alla base MCN: ma il prisma ACNM al prisma EHSO è come la base MCN alla base OHS (stante che per ipotesi, hanno altezze vguali) sarà, per l'egualità, il prisma ABCD al prisma EHSO [q] come la base MBCN alla base OHS: fù dimostrato il prisma EHSO à tutto il prisma ERGHSO, come la base OHS à tutta la base ORGHS; per l'egualità, [r] sarà tutto il prisma ABCD al prisma ERGHSO, come la base MBCN alla base ORGHS, ch'era da dimostrarsi.

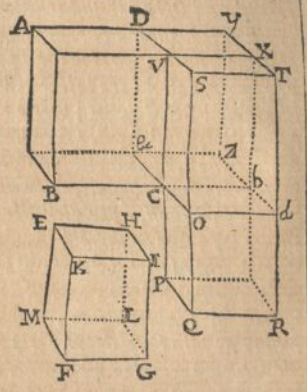
f 13. defin. del 11.
g 34. del 1.
h 33. del 1.
K 33. del 1.
l 8. e 4. del 11.
m 18. del 5.
n 22. del 5.
o 18. del 5:
p Corol. alla 4. del 5.
q 22. del 5.
r 22. del 5.

COROLLARIO II.

Quindi è che i prismi di vguali basi, se sono frà piani paralleli, sono ancora frà di loro vguali, stante che, essendo frà piani paralleli, sono sotto vna medesima altezza, e per quel che si è dimostrato, sono frà loro come le basi: Se dunque le basi sono frà di loro vguali, i prisma saranno ancora frà di loro vguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXIII.

I ſimili ſolidi parallelepipedi hanno triplicata proportione, che i loro lati homologhi.



Siano i ſimili parallelepipedi ABCD, EFGH. Dico che il parallelepipedo AB CD al ſimile parallelepipedo EFGH hà triplicata proportione, che il lato homologo BC al lato homologo FG. Si prolunghi il lato BC verſo b, e ſi faccia Cb [a] vguale ad FG, ouero KI; Similmente ſi prolunghi &C verſo O, e ſi faccia CO vguale ad FM, ouero EK; e ſi continui VC verſo P, e ſi faccia CP vguale ad EM, ouero KF; ſi compiſcano i parallelogrammi Ob, CQ, Pb; e ſi faccia il parallelepipedo O C R d. Perche i parallelogrammi B&, KH ſono ſimili, ſtante che i propoſti parallelepipedi ſono ſimili, ſarà l'angolo BC& vguale all'angolo KIH, ouero KEH: ma l'angolo BC& è vguale all'angolo OCb, ſarà l'angolo OCb vguale all'angolo KEH: E perche i lati bC, CO ſono vguali à i lati HE, EK, la proportione di bC à CO ſarà come quella di HE ad EK; dalche i parallelogrammi Ob, KH [b] ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Similmente eſſendo l'angolo VC& vguale all'angolo KFM, ouero KEM, e l'angolo VC& è vguale all'angolo PCO, ſarà l'angolo PCO vguale all'angolo KEM. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che l'angolo bCP è vguale all'angolo HEM. E perche i lati OC, CP ſono vguali à i lati KE, EM, ſarà OC à CP come KE ad EM; dal che i parallelogrammi OP, KM, ſono frà loro ſimili, ed vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i parallelogrammi bP, HM, ſono frà loro ſimili, ed vguali; per la qual coſa tutto il parallelepipedo CQRb [c] ſarà vguale al parallelepipedo EFGH. Co'i due lati VC, CO, ſi compiſca il parallelogrāmo VO. Eſsēdo VP vna ſola retta linea, ſarà VQ vn ſolo parallelogrammo, co'i due lati VC, Cb, ſi compiſca il parallelogrammo VCbX, ſarà tutto il parallelogrammo PX vn ſolo piano. Si compiſca il parallelepipedo VOdX; ſarà tutto il ſolido VQRX vn ſolo parallelepipedo. Si compiſca il parallelepipedo ABbY. Perche la retta &CO è vna ſola retta linea, ſarà DO vn ſolo piano, ed il ſolido DOdY vn ſolo parallelepipedo.

Perche i parallelepipedi BD, FH, ſono, per ipoteſi, frà di loro ſimili, ſarà la baſe B& [d] ſimile alla baſe MG, ouero EI; dalche la proportione di BC à C& [e] ſarà come quella di HE ad EK: ma HE ad EK è come bC à CO, ſarà BC à C& [f] come bC à CO; e permutando BC à Cb [g] ſarà come &C à CO; ma BC à Cb è come il parallelogrammo B& [h] al parallelogram-

mo

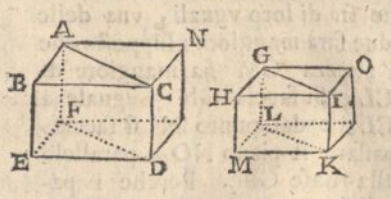
[a] 3. del 1.
[b] 1. defin. del 6.
[c] 10. defin. del 11.
[d] 9. defin. del 11.
[e] 1. defin. del 6.
[f] 11. del 5.
[g] 16. del 5.
[h] 1. del 6.

mo &b, e la proportione di &C à CO, [k] è come il parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd, sarà il parallelogrammo B& al parallelogrammo &b [l] come il medesimo parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd; e perciò i parallelogrammi B&,&b,Cd, sono continui proportionali. E perche il parallelepipedo BD al parallelepipedo CY, [m] è come la base B& alla base CZ, ed il parallelepipedo CY al parallelepipedo OX, è come la base &b alla base Cd; essendo le basi B&,&b,Cd, continue proportionali, saranno i parallelepipedi BD, CY, OX, [n] continui proportionali. Di nuouo per la similitudine de i parallelepipedi BD, FH, i parallelogrammi CD, GH, ouero FE, sono simili; [o] e sarà VC à C& [p] come ME ad EK, cioè come PC à CO; e permutando, sarà VC à CP [q] come &C à CO; ma &C à CO [r] è come il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, e la proportione di VC, à CP è come il parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ, sarà il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, [t] come il medesimo parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ. Per la qual cosa i parallelogrammi DC, CS, CQ, sono continui proportionali: ma i parallelepipedi CY, OX, CR, [u] sono come le basi DC, CS, CQ, stante che hanno la medesima altezza; essendo le basi CD, CS, CQ, continue proportionali, saranno i parallelepipedi CY, OX, CR continui proportionali; e tutti quattro i parallelepipedi BD, CY, OX, CR sono cõtinui proportionali; ed haueremo quattro quantità, cioè la prima BD, la seconda CY, la terza OX, e la quarta CR, continue proportionali, e per il Lemma 8. dopo la 18. propositione del 6. la prima BD alla quarta CR hà triplicata proportione di quella, che hà la prima BD alla seconda CY: ma BD à CY è come la base B& alla base CZ, cioè come BC à Cb; haurà BD à CR triplicata proportione, che BC à Cb: ma Cb è fatta vguale ad FG, ed il parallelepipedo CR è dimostrato vguale al parallelepipedo FH; haurà il parallelepipedo BD al parallelepipedo FH triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo BC al lato homologo FG; ch'era da dimostrarsi.

[k] 1. del 6.
[l] 11. del 5.
[m] 32. del 11.
[n] 11. del 5.
[o] 9. defin. del 11.
[p] 1. defin. del 6.
[q] 16. del 5.
[r] 1. del 6.
[t] 11. del 5.
[u] 32. del 11.

SCOLIO.

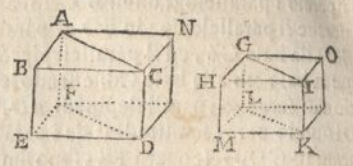
I simili prismi di basi triangolari sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.



Siano i simili prismi AED, GMK le di cui basi siano i triangoli FED LMK. Dico che il prisma AED al simile prisma GMK, hà triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK. Co i lati AB, BC, si faccia il parallelogrammo BN, e si compisca il parallelepipedo EN. Similmente si compisca il parallelepipedo MO perche i prismi AED, GMK, sono simili, sarà il piano EC [a] simile al piano MI, ed il piano EA simile al piano MG; e parimente il triangolo ABC sarà simile al trian-

[a] 9. defin. del 11.

golo GHI; dal che l'angolo ABC è vguale all'angolo GHI; e la proportione di AB à BC sarà come quella di GH ad HI; per la qual cosa i parallelogrammi BN, HO, sono frà loro simili. Hor essendo i piani EC, EA, BN, simili à i piani MI, MG, HO; e gli opposti sono simili, ed vguali; sarà il parallelepipedo EN [b] simile al parallelepipedo MO; e per l'antecedente propositione, il parallelepipedo EN al parallelepipedo MO hauerà triplicata proportione, che



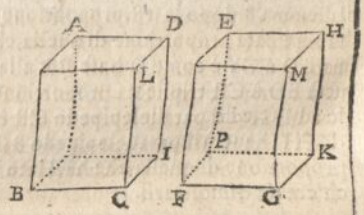
b 9. defin. del 11.

c 15. del 5.

il lato homologo ED al lato homologo MK: ma i parallelepipedi EN, MO, [c] sono come le loro metà, cioè come i prismi AED, GMK; hauerà il prisma AED al prisma GMK triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK, ch'era da dimostrarsi.

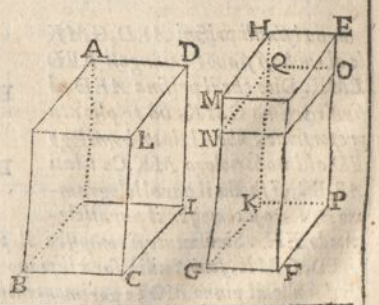
THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIV.

Gli vguali parallelepipedi hanno le basi reciproche all'altezze; e quei parallelepipedi, che hanno le basi reciproche all'altezze, sono frà di loro vguali.



Siano prima i parallelepipedi ABCD, EFGH frà di loro vguali, le di cui basi siano BI, FK. Dico che la base BI alla base FK, è come l'altezza del solido FH all'altezza del solido BD. Supposto prima, che i lati CL, GM, siano perpendicolari alle basi BI, FK; saranno i lati CL, MG, le altezze de i solidi BD, FH. Hor se l'altezze CL, GM, sono vguali, saranno i parallelepipedi BD, FH, [a] come le basi: ma i parallelepipedi BD, FH, sono supposti vguali, perciò le basi BI, FK saranno frà di loro vguali; e sarà la base BI alla base FK, come l'altezza GM all'altezza CL.

a 31. del 11.



Se l'altezze GM, CL, non sono frà di loro vguali, vna delle due sarà maggiore; supposto che l'altezza GM sia maggiore di CL. Si faccia GN [b] vguale à CL, e dal punto N si faccia passare il piano NO [c] parallelo alla base GP. Perche i parallelepipedi ABCD, NGFO, hanno vguali altezze, perciò sono [d] come le basi BI, GP; e perche il piano NO è parallelo al

b 3. del 1.

c Scol. alla 15. del 1.

d 32. del 11.

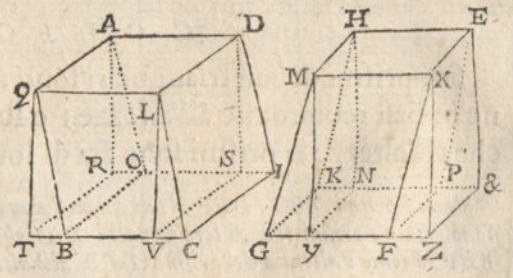
piano

piano GP, sarà il parallelepipedo GE al parallelepipedo GO, [e] come il piano GH al piano GQ, cioè [f] come GM à GN. In oltre, perche i solidi parallelepipedi BD, GE, per ipotesi, sono frà di loro vguali, preso il solido GO come terza quantità, sarà il solido BD al solido GO, [g] come il solido GE al medesimo solido GO: ma il solido GE al solido GO è come GM à GN, sarà il solido BD al solido GO, [h] come GN ad NG: si disse, che il solido BD al solido GO è come la base BI alla base GP; sarà la base BI alla base GP, [l] come l'altezza MG all'altezza NG: ma NG è fatta vguale ad LC, sarà la base BI alla base GP, come l'altezza MG all'altezza CL, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che le basi siano reciproche all'altezze, cioè che la base BI alla base GP sia come l'altezza GM all'altezza CL. Dico che i solidi parallelepipedi DB, GE sono frà di loro vguali. Se le altezze CL, GM sono frà di loro vguali, essendo la base BI alla base GP come l'altezza GM all'altezza CL, e l'altezza GM è posta vguale all'altezza CL; sarà la base BI vguale alla base FK, ed il parallelepipedo BD [m] vguale al parallelepipedo FH, ch'era da dimostrarsi.

Se l'altezze non sono vguali, sia l'altezza GM maggiore dell'altezza CL; si faccia, come prima, CN [n] vguale à CL, e dal punto N si faccia passare il piano NO, [o] parallelo alla base GP; sarà il solido GE al solido GO, [p] come GM à GN; ed i parallelepipedi BD, GO, hauendo vguali altezze, [q] saranno come le basi BI, GP. Perche, per ipotesi, la base BI alla base GP è come l'altezza MG all'altezza LC, ouero NG, e la proportione di MG ad NG è come il solido GE al solido GO; sarà la base BI alla base GP [r] come il solido GE al solido GO: ma il solido BD al solido GO è come la base BI alla base GP; sarà il solido BD al solido GO, [t] come il solido GE al medesimo solido GO; e perciò [u] i parallelepipedi BD, GE, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

Siano di nuouo i parallelepipedi ABCD, EFGH, le di cui basi siano OBCI, KGFP, ed i lati eleuati alle basi, cioè CL, GM, non siano perpendicolari alle dette basi. Da i punti A, D, L, Q al piano della base OBCI [x] si facciano cadere le perpendicolari AR, QT, DS, LV, e da i punti H, M, X, E, si facciano cadere le rette MY, HN, E&, XZ, perpendicolari al piano della base KGFP; le perpendicolari LV, MY &c. saranno le altezze de i proposti parallelepipedi ABCD, EFGH. Nel solido ATVD, si tirino le rette TV, RS, TR, VS, e nel solido HYZE si tirino le rette YZ, Z&, &N, NY, e saranno descritti i parallelepipedi ATVD, HYZE, le di cui basi sono TV SR, NYZ&. Nel parallelepipedo ABCD la base OBCI [y] è vguale all'opposto parallelogrammo QD; e



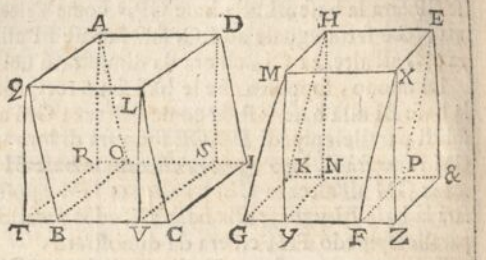
nel

e 25. del 11.
f 1. del 6.
g 7. del 5.
h 11. del 5.
l 11. del 5.
m 31. del 11.
n 3. del 1.
o Scol. alla 15. del 11.
p 25. del 11.
q 32. del 11.
r 11. del 5.
t 11. del 5.
u 9. del 5.
x 11 del 11.
y 24. del 11.

nel parallelepipedo ATVD la baſe RTVS è vguale al medeſimo parallelogrammo oppoſto QD, e perciò le baſi RTVS, OBCI, ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le baſi KGFP, NYZ&, ſono frà di loro vguali. In oltre, perche i parallelepipedi ABCD, ATVD, hanno la medeſima baſe QD, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, per-

z 29. & 30. del u.

ciò ſono frà di loro vguali; e per ſimile ragione i parallelepipedi EFGH, EZYH, ſono frà di loro vguali. Se dunque ſupponiamo il parallelepipedo ABCD vguale al parallelepipedo EFGH, ſarà il parallelepipedo ATVD vguale al parallelepipedo HYZE. E perche i lati LV, MY, ſono perpendicolari alle baſi, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, la baſe RTVS alla baſe KGFP, ſarà come l'altezza MY all'altezza LV: ma la baſe RTVS è dimoſtrata vguale alla baſe OBCI; e la baſe KGFP fù dimoſtrata vguale alla baſe NYZ&, ſara la baſe OBCI alla baſe KGFP, come l'altezza MY all'altezza LV, e perciò le baſi ſono reciproche all'altezze, ch'era da dimoſtrarſi.



Se poi la baſe OBCI alla baſe KGFP è come l'altezza MY all'altezza LV. Dico che i parallelepipedi ABCD, EFGH, ſono frà di loro vguali. Perche la baſe OBCI alla baſe KGFP, è come l'altezza MY all'altezza LV; e la baſe OBCI è dimoſtrata vguale alla baſe RTVS; come ancora la baſe KGFP è dimoſtrata vguale alla baſe NYZ&; ſarà la baſe RTVS alla baſe NYZ&, come l'altezza MY all'altezza LV; e per quel che ſopra ſi è dimoſtrato, i parallelepipedi ATVD, HYZE, ſono frà di loro vguali: ma il parallelepipedo ATVD fù dimoſtrato vguale al parallelepipedo ABCD; ed il parallelepipedo HYZE fù dimoſtrato vguale al parallelepipedo EFGH; i parallelepipedi ABCD, EFGH ſaranno frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

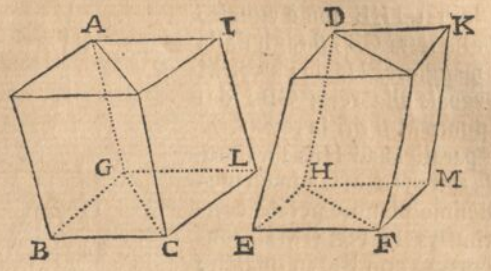
SCOLIO.

Se i priſmi di baſi triangolari ſono frà loro vguali, hanno le baſi reciproche all'altezze; e ſe le baſi ſono reciproche all'altezze, i priſmi ſono frà di loro vguali.

Siano i priſmi ABC, DEF, le di cui baſi ſiano i triangoli BGC, EHF, e ſiano prima i priſmi frà di loro vguali. Dico che la baſe BGC alla baſe EHF è come l'altezza del priſma DEF all' altezza del priſma ABC. Si compiſcano i parallelepipedi BI, EK. Perche i priſmi ABC, DEF, ſono frà

loro

loro vguali, i loro dupli, cioè i parallelepipedi BI, EK, [a] *ſono frà loro vguali; e ſarà la baſe BL alla baſe EM,* [b] *come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI: ma la baſe BL alla baſe EM è come il triangolo BGC* [c] *al triangolo EHF, che ſono loro metà; ed i parallelepipedi BI, EK, hanno le medeſime altezze de i priſmi; in conſeguenza la baſe BGC alla baſe EHF ſarà come l'altezza del priſma DEF all'altezza del priſma ABC.*



a 28. del 11.
b 34. del 11.
c 34. del 1. & 15. del 5.

Di nuouo Dico che, ſe la baſe BGC alla baſe EHF è come l'altezza del priſma DEF all'altezza del priſma ABC, i priſmi ABC, DEF, ſono frà loro vguali. Perche i priſmi ABC, DEF, hanno l'iſteſſa altezza de i parallelepipedi BI, EK, ed il triangolo BGC al triangolo EHF [d] *è come il doppio al doppio, cioè come il parallelogrammo BL al parallelogrammo EM; ſarà il piano BL al piano EM, come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI; e per l'antecedente propoſitione, i parallelepipedi BI, EK, ſono frà di loro vguali; e le loro metà, cioè i priſmi ABC, DEF, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.*

d 34. del 1. & 15. del 5.

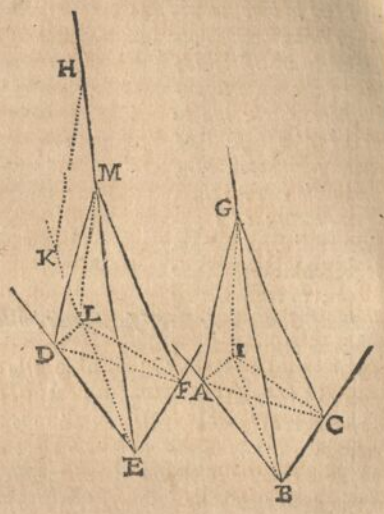
THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXV.

Se ſaranno due angoli piani, à i vertici de'quali ſiano inclinate due rette linee, che facciano i corriſpondenti angoli, con quelle, che contengono i propoſti angoli piani frà loro vguali; e da due qualunque punti, preſi nelle rette inclinate, cadano due perpendicolari à i piani, doue ſono gli angoli propoſti; e da i punti, doue le perpendicolari cadono, ed i vertici de i propoſti angoli, ſi tirino due rette linee; gli angoli contenuti da queſte, e dall'inclinate, ſono frà di loro vguali.

Siano gli angoli piani ABC, DEF, ed à i vertici E, & B, ſiano inclinate le rette BG, EH, in modo, che gli eſtremi H, & G, ſiano eleuati in alto; e ſia l'angolo HED vguale all'angolo GBA, e l'angolo HEF ſia vguale all'angolo GBC; e preſi nelle rette EH, BG, due qualunque punti H, & G, da i quali ſi facciano cadere le rette HK, GI, [a] perpendicolari à i piani DEF, ABC; e da i punti L, ed I, à i punti E, & B, ſiano tirate le rette LE, IB.

a 11. del 11.

Dico,



Dico, che l'angolo HEL è vguale all'angolo GBI. Se la retta HE non è vguale alla retta GB, si tagli dalla
b 3. del 1. maggioreEH [b] la parteEM vguale alla retta GB; dal punto M si tiri la retta ML
c 31. del 1. [c] parallela ad HK; saranno
d 34. defin. del 1. le rette HK,ML [d] in vn medesimo piano,e perciò,continuata la retta ML concorrerà con EK in qualche punto L. Hor essendo ML parallela ad HK, e la retta HK è perpendicolare al piano DEF, sarà la retta
e 8. del 11. ML [e] perpédicolare al medesimo piano DEF: dal pũto L nel piano DEF si tirino le rette LD, LF, [f] ad
f 12. del 1. angoli retti con le rette ED, EF; e dal punto I nel piano ABC si tirino le rette IA, IC ad angoli retti colle rette AB,BC; e si tirino le rette MD,MF, GA, GC. Perche la retta ML è perpendicolare al piano DEF, gli angoli
g 3. defin. del 11. MLF,MLE,MLD [g] sono retti. Similmente perche la retta GI è perpendicolare al piano ABC, gli angoli GIC,GIB,GIA, sono retti. Nel triangolo rettangolo MLE il quadrato di ME
h 47. del 1. [h] è vguale à i quadrati de i due lati ML,LE: ma il quadrato di LE
K 47. del 1. [K] è vguale à i quadrati delle due ED, DL (stante che l'angolo EDL è retto) sarà il quadrato di ME vguale à i quadrati delle tre ML, LD, DE: ma i quadrati delle due ML, LD, sono vguali al quadrato di MD; sarà il quadrato di ME vguale à i quadrati de i due lati MD, DE; per la qual cosa l'angolo MDE
l 48. del 1. [l] sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo GAB è retto. Di nuouo perche il
m 47. del 1. quadrato di ME [m] è vguale à i quadrati de i due lati ML, LE, ed il quadrato di LE è vguale à i quadrati de i due lati LF,FE; sarà il quadrato di ME vguale à i quadrati delle tre ML, LF, FE: E perche i quadrati delle
n 47. del 1. due ML, LF, [n] sono vguali al quadrato di MF, sarà il quadrato di ME
o 48. del 1. vguale à i quadrati de i due lati MF, FE; dal che l'angolo MFE [o] sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà,che l'angolo GCB è retto. Si considerino i triangoli MEF,GBC. Perche l'angolo MEF,per ipotesi,è vguale all'angolo GBC, e l'angolo MFE è vguale all'angolo GCB(stante che
p 32.del 1. gli habbiamo dimostrati retti) sarà il rimanente angolo EMF [p] vguale al
q 4. del 1. restante angolo BGC; e sarà ME ad EF [q] come GB à BC: ma ME è fatta
r 14. del 5. t 4. del 6. vguale alla retta GB, in conseguenza EF [r] sarà vguale à BC. Similmente sarà EM ad MF [t] come BG à GC;ma EM è vguale à BG,sarà ancora MF
u 14.del 5. [u] vguale a GC. In oltre si considerino i due triangoli MDE, GAB, de i

quali

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [671] - 656

quali gli angoli MED,GBA, per ipotesi, sono frà di loro vguali; gli angoli MDE,GAB, sono vguali, perche sono retti; saranno i rimanenti angoli DME, AGB x frà di loro vguali; e la proportione di ME ad ED y sarà come quella di GB à BA; fù fatta ME vguale alla retta GB, sarà dunque DE z vguale ad AB. Parimente EM ad MD a è come BG à GA; ma EM è vguale à GB, b sarà MD vguale ad AG. Si considerino i due triangoli DEF, ABC. Perche i due lati DE, EF, sono stati dimostrati vguali a i due lati AB, BC, e l'angolo DEF, per ipotesi, è vguale all'angolo ABC; sarà la base DF c vguale alla base AC; l'angolo EDF sarà vguale all'angolo BAC; e l'angolo EFD vguale all'angolo BCA. Da gli angoli retti EDL,BAI, se ne leuino gli vguali angoli EDF,BAC, restano gli angoli LDF, IAC, frà di loro vguali. Similmente da gli angoli retti LFE, ICB, se ne leuino gli vguali angoli EFD,BCA, resta l'angolo LFD vguale all'angolo ICA. Ne i triangoli LDF,IAC, il lato DF è dimostrato vguale al lato AC, gli angoli LDF,LFD, sono vguali à i due angoli IAC, ICA; sarà il lato LD d vguale al lato IA; e sarà LF vguale ad IC. Ne i triangoli LDE,IAB, perche i due lati LD,DE, sono vguali à i due lati IA, AB; e gli angoli LDE, IAB, sono frà loro vguali, stante che sono retti; sarà la base LE e vguale alla base IB. Oltre a ciò ne i triangoli MLD, GIA, perche gli angoli MLD,GIA, sono retti, sarà il quadrato di MD f vguale à i quadrati de i due lati ML, LD; ed il quadrato di GA, sarà vguale à i quadrati di GI,IA: ma il quadrato di MD è vguale al quadrato di GA, stante che le rette MD, GA, le habbiamo dimostrate vguali; perciò i quadrati delle due ML,LD, saranno vguali à i quadrati de i due lati GI, IA; leuatone i quadrati delle vguali DL,IA, resta il quadrato di ML vguale al quadrato di GI; e la retta ML sarà vguale alla retta GI. Finalmente si considerino i due triangoli MLE, GIB, de' quali il lato ME, per costruttione, è vguale al lato GB, il lato LE è dimostrato vguale al lato IB, saranno i due lati ME, EL, vguali à i due lati GB, BI; la base ML è dimostrata vguale alla base GI, sarà l'angolo MEL g vguale all'angolo GBI, come fù proposto dimostrare.

x 32. del 1.
y 4. del 6.
z 14. del 5.
a 4. del 6.
b 14. del 5.
c 4 del 1.
d 26. del 1.
e 4. del 1.
f 47. del 1.
g 8. del 1.

COROLLARIO.

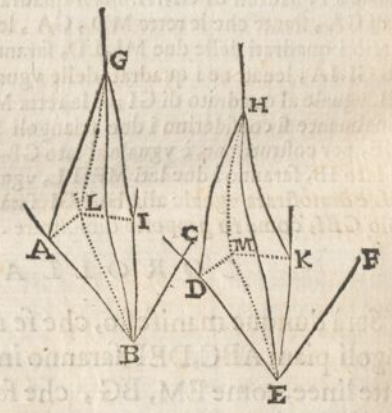
Sarà dunque manifesto, che se ne i vertici di due vguali angoli piani ABC,DEF, saranno inclinate à quel piano due rette linee, come EM, BG, che facciano i corrispondenti angoli con le rette, che contengono l'angolo piano, frà di loro vguali; cioè, che l'angolo MEF sia vguale all'angolo GBC; e l'angolo MED vguale all'angolo GBA; e siano fatte le rette EM, BG, frà di loro vguali; le rette ML, GI, che cadono perpendicolari à i piani DEF,ABC, sono frà di loro vguali.

SCOLIO.

Aggiungo quì il seguente Theorema molto necessario alle cose da dimostrarsi.

Se l'angolo piano ABC è vguale all'angolo piano DEF, & à i vertici B, ed E, siano inclinate le rette GB, HE, in modo, che l'angolo GBC sia vguale all'angolo HEF, e l'angolo GBA sia vguale all'angolo HED; e da i punti B, ed E, ne i piani ABC, DEF, siano tirate le rette BI, EK, in modo, che l'angolo IBC sia vguale all'angolo KEF. Dico, che l'angolo GBI è vguale all'angolo HEK.

a 3. del 1. b 11. del 11. *Nelle rette eleuate BG, EH si prendano due parti vguali,* a *come* BG, EH, *e da i punti G, ed H* b *si facciano cadere rette linee perpendicolari à i piani* ABC, DEF: *Se quelle cadono nelle rette* BI, EK, *come fanno le rette* GI, HK, *per l'antecedente propositione, gli angoli* GBI, HEK, *sono frà di loro vguali. Se poi le perpendicolari cadono fuori delle rette* BI, EK, *come fanno le rette* GL, HM; *si tirino le rette* LB, ME; *sarà, per l'antecedente propos.* l'angolo GBL *vguale all'angolo* HEM. *Da i punti* L, ed M, *si tirino le rette* c *LI, LA, MK, MD, ad angoli retti colle rette* BI, BA, EK, ED; *e si tirino le rette* GI, GA, HK, HD. *Essendo le rette* GL, HM, *perpendicolari à i piani* ABC, DEF, *gli angoli* GLB, GLI, GLA, HME, HMK, HMD, d *sono retti. Si considerino i triangoli rettangoli* GLB, HME. *Perche gli angoli* GBL, HEM, *sono frà di loro vguali, e gli angoli* GLB, HME, *sono retti; sarà il rimanente angolo* BGL e *vguale al rimanente angolo* EHM; *dal che i triangoli* GLB, HME, *sono equiãgoli; e la proportione di* GB *à* BL f *sarà come quella di* HE *ad* EM: *ma* GB *è vguale ad* HE, *sarà* BL g *vguale ad* EM. *Similmente* BG *à* GL h *sarà come* EH *ad* HM; *ma* GB *è vguale ad* EH, K *sarà* GL *vguale ad* MH. *Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che* ED *è vguale ad* AB, *e che* DH *è vguale ad* AG, *e si considerino i due triangoli* GLA, HMD. *Perche gli angoli* GLA, HMD, *sono retti, sarà il quadrato di* GA l *vguale à i quadrati*



c 12. del 1. d 3. definit. del 1. e 32. del 1. f 4. del 6. g 14. del 5. h 4. del 6. K 14. del 5. l 47. del 1.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [673] - 658

drati de i lati GI, LA; ed il quadrato di HD è vguale à i quadrati de i lati HM, MD: ma il quadrato di GA è vguale al quadrato di HD (ſtante che GA è dimoſtrata vguale ad HD) i quadrati de i due lati GL, LA, ſaranno vguali à i quadrati de i due lati HM, MD: ſe ne leuino i quadrati delle vguali GL, HM, reſta il quadrato di LA vguale al quadrato di DM, ed il lato AL ſarà vguale ad MD. Ne i triangoli ABL, DEM, i due lati AB, BL, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i due lati DE, EM, la baſe AL è vguale alla baſe MD, ſarà l'angolo ABL [m] *vguale all'angolo DEM. In oltre, eſſendo, per ipoteſi, l'angolo DEF vguale all'angolo ABC, e l'angolo FEK vguale all'angolo CBI, ſarà il rimanente angolo KED* [n] *vguale al rimanente angolo IBA; da i quali ſe ne leuino gli vguali angoli ABL, DEM, reſta l'angolo LBI vguale all'angolo MEK. Ne i triangoli MEK, LBI, gli angoli LIB, MKE, per coſtruttione, ſono retti; gli angoli LBI, MEK, ſono ſtati dimoſtrati vguali, i rimanenti angoli BLI, EMK,* [o] *ſono frà di loro vguali, ed i triangoli LBI, MEK, ſono equiangoli; e ſarà LB à BI,* [p] *come ME ad EK: ma LB è dimoſtrata vguale ad ME, ſarà BI* [q] *vguale ad EK. Similmente BL ad LI* [r] *ſarà come EM ad MK, il lato BL è vguale ad EM, ſarà LI* [t] *vguale ad MK. Si conſiderino i triangoli GLI, HMK, de' quali i due lati GL, LI, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i due lati HM, MK, l'angolo GLI è vguale all'angolo HMK, ſtante che ſono retti, ſarà la baſe GI* [u] *vguale alla baſe HK. Finalmente, perche i due lati GB, BI, del triangolo GBI, ſono vguali à i due lati HE, EK, del triangolo HEK; la baſe GI è dimoſtrata vguale alla baſe HK, ſarà l'angolo GBI* [x] *vguale all'angolo HEK, ch'era da dimoſtrarſi.*

m 8. del 1.
n 32. del 1.
o 32. del 1.
p 4. del 6.
q 14. del 5.
r 4. del 6.
t 14. del 5.
u 4. del 1.
x 8. del 1.

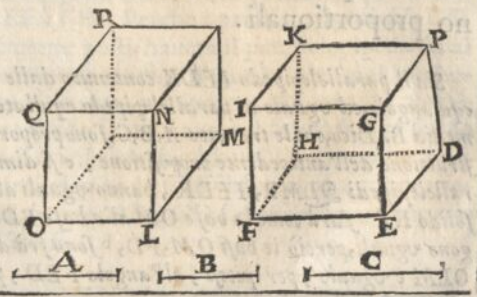
THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVI.

Se tre linee rette [*] *ſono proportionali, il ſolido parallelepipedo contenuto da quelle tre rette linee è vguale al parallelepipedo equilatero, che ſi deſcriue ſopra la media, equiangolo all'altro.*

[*] come A, B, C,

Si coſtituiſca l'angolo ſolido E, con tre angoli piani, preſi ad arbitrio, come ſono i tre angoli DEF, DEG, FEG. Si faccia poi ED [a] vguale ad A; ſi faccia EG vguale alla media B; e ſi faccia EF vguale à C; ſi compiſca il parallelepipedo IEDK, il quale ſarà contenuto dalle tre rette ED, EF, EG, vguali alle tre rette A, B, C. Di nuouo ſi eſponga la retta LM; e nel punto L ſi coſtituiſca l'angolo ſolido L, [b] vguale all'angolo ſolido E, cioè, che l'angolo piano MLO ſia vguale all'angolo DEF, l'angolo MLN ſia vguale all'angolo DEG, e l'angolo GEF vguale all'angolo

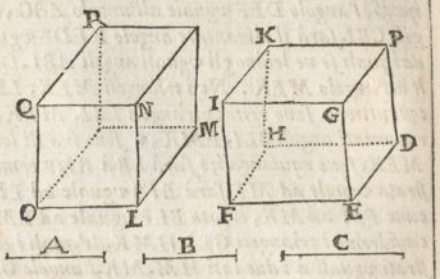
a 3. del 1.



b 23. del 11.

c 3. del 1. NLO. Si faccia ogn'vna delle rette LM, LN, LO, c vguale alla media B, e si compisca il parallelepipedo QLMR; il quale sarà equilatero, stante che tutti i lati de i parallelogrammi, che lo contengono, sono vguali frà loro; e sarà equiangolo, per costruttione, al parallelepipedo IEDK. Dico che i parallelepipedi QLMR, IEDK, sono frà di loro vguali. Perche la proportione di A à B è come quella di B à C, essendo le tre A, B, C, vguali alle tre DE, ML, EF, sarà DE ad ML come ML, ouero LO ad EF: ma, per costruttione, l'angolo FED è vguale all'angolo OLM, i parallelogrammi dunque OM, FD, hanno intorno à gli angoli vguali i lati reciprochi, e perciò sono d frà di loro vguali. Si considerino gli vguali angoli piani OLM, FED, à i vertici de'quali, cioè à i punti L, ed E, sono elcuate le rette vguali NL, GE, e l'angolo GED è vguale all'angolo NLM; come ancora l'angolo GEF è vguale all'angolo NLO; e per il corollario antecedente, le rette, che da i punti N, & G, cadono perpendicolari à i piani OLM, FED, sono frà di loro vguali; per la qual cosa l'altezze de i parallelepipedi QLMR, IEDK, sono frà di loro vguali: furono dimostrate le basi OM, FD, frà di loro vguali; i parallelepipedi dunque QLMR, IEDK, e sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

d 14. del 6.



e 31. del 11.

SCOLIO.

La conuuersa dell'antecedente propositione si dimostra facilmente nel seguente modo

Se il parallelepipedo contenuto da tre rette linee è vguale, ed equiangolo al parallelepipedo equilatero, descritto sopra la linea intermedia, quelle tre rette linee sono proportionali.

Sia il parallelepipedo IEDK contenuto dalle tre rette A, B, C, il quale sia equiangolo, ed vguale al parallelepipedo equilatero QLMR, descritto sopra la media B. Dico, che le tre rette A, B, C, sono proportionali. S'intenda fatta la costruttione dell'antecedente propositione, e si dimostri, come iui si fece, che i parallelepipedi QLMR, IEDK, hanno vguali altezze, dal che il solido LR al solido KE a *sarà come la base OM alla base FD: ma i solidi RL, KE si suppongono vguali, perciò le basi OM, FD,* b *sono frà di loro vguali. E perche l'angolo OLM è vguale, per ipotesi, all'angolo FED, perciò i parallelogrammi OM,*

a 32. del 11.

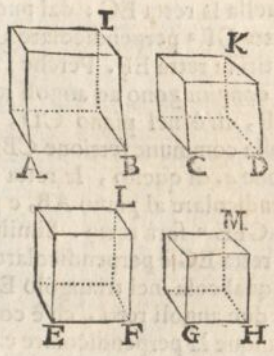
b 14. del 5.

FD,

FD, [c] *haueranno intorno à gli angoli vguali i lati reciprochi; e sarà FE ad LM, come OL ad ED. Ma OL, per ipotesi, è vguale ad LM, sarà EF ad LM, come la medesima LM ad ED, cioè sarà la retta* C *alla retta* B, *come la medesima* B *ad* A, *ch'era da dimostrarsi.* c 14. del 6.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se quattro linee rette sono proportionali, i parallelepipedi simili, e similmente descritti sopra di esse, sono proportionali: e se i parallelepipedi simili, e similmente posti, sono proportionali, i loro lati homologhi sono proportionali.



Habbia prima AB à CD la medesima proportione, che hà EF, à GH, ed i parallelepipedi AI, CK, descritti sopra le due AB, CD, siano simili, è similmente posti, cioè che le due AB, CD, siano loro lati homologhi; e sopra le due EF, GH, siano descritti i parallelepipedi EL, GM, simili, e similmente posti. Dico che il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK, è come il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM. Perche i *solidi parallelepipedi AI, CK, sono simili, haverà il solido AI al solido CK triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo AB al lato homologo* CD: ma, per ipotesi, AB à CD è come EF à GH, haverà il solido AI al solido CK [b] triplicata proportione di quella, che hà EF à GH: ma il solido parallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM [c] hà la medesima triplicata proportione di quella, che hà EF, à GH; haverà il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK l'istessa proportione, che hà il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. Di nuouo, supposto che il parallelepipedo AI al simile parallelepipedo CK sia come il parallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM. Dico che AB à CD è come EF à GH. Perche i parallelepipedi AI, CK, si suppongono simili, e similmente posti, haverà il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK [d] triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo AB al lato homologo CD: ma, per ipotesi, il solido AI al solido CK è come il solido EL al solido GM, haverà il solido EL al solido GM [e] triplicata proportione di quella, che hà AB à CD. E perche il parallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM [f] hà triplicata proportione di quella, che hà EF à GH; haverà AB à CD l'istessa proportione, che hà EF à GH, ch'era da dimostrarsi.

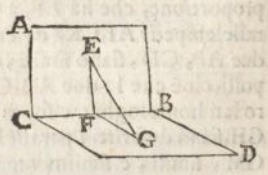
a 33. del 11.
b 11. del 5.
c 33. del 11.
d 33. del 11.
e 11. del 5.
f 33. del 11.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se vn piano è perpendicolare ad vn altro piano, e da qualche punto preso in vno di quei piani si faccia cadere vna retta perpendicolare all'altro piano, quella caderà nella loro commune settione.

Sia il piano AB, perpendicolare al piano CD, e la loro commune settione sia la retta CB; e preso nel piano AB qualunque punto E, dal quale si faccia cadere vna retta perpendicolare al piano CD. Dico che quella cade nella commune settione CB. Se non cade nella commune settione CB, cada fuori, se è possibile, e sia quella la retta EG; dal punto G si tiri la retta GF [a] perpendicolare alla retta CB, e si tiri la retta EF. Perche i piani CD, AB, si congiungono ad angoli retti, e la retta GF, ch'è nel piano CD, fà angoli retti colla commune settione CB; per la definitione 4. di questo, la retta GF sarà perpendicolare al piano AB, e perciò l'angolo GFE [b] sarà retto. Similmente perche la retta EG è perpendicolare al piano CD, l'angolo EGF [c] sarà retto; per la qual cosa, nel triangolo EGF, gli angoli EGF, EFG, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo. Non dunque la perpendicolare cade fuori della commune settione CB, ma cade in essa commune settione CB, come fà la retta EF, ch'era da dimostrarsi.



a 12. del 1.

b 3. defin. del 11.

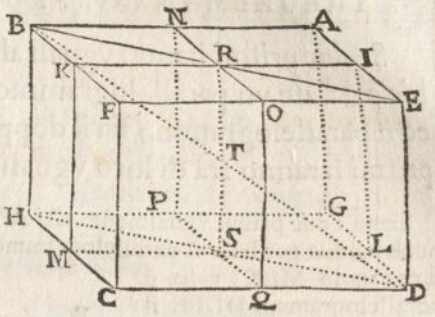
c 3. defin. del 11.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

Se i lati di due piani opposti d'vn parallelepipedo sono diuisi in due parti vguali, la commune settione de i piani, che passano per le opposte diuisioni, e la diagonale d'esso parallelepipedo, si segano scambieuolmente in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, la di cui diagonale sia BD, ed i lati de i due piani opposti BE, HD, siano diuisi in due parti vguali ne i punti O, I, N, K, Q, L, P, M; e per le opposte diuisioni passino i piani KMLI, NPQO, i quali si seghino scambieuolmente, e la commune settione sia la retta RS. Dico che la retta RS, e la diagonale BD, si segaranno scambieuolmente in due parti vguali. Si tirino le rette RB, RE, SD, SH. Perche DL è vguale, e paparallela ad MC, sarà CD [a] vguale, e parallela ad ML. Similmente perche CQ è vguale, e parallela ad HP, sa-

a 33. del 1.



rà PQ [b] vguale, e parallela ad HC, e sarà ancora [c] parallela à GD; dal che i quadrilateri QM, QL, [d] sono parallelogrammi, e sarà CQ [e] vguale ad MS, e la retta QD vguale ad SL: ma CQ, per ipotesi, è vguale à QD, sarà MS vguale ad SL. E perche la retta LD, per ipotesi, è vguale ad MH, i due lati DL, LS, del triangolo DLS, saranno vguali à i due lati HM, MS, del triangolo HMS; l'angolo DLS [f] è vguale all'angolo HMS (stante che DG è parallela ad HC) sarà la base DS [g] vguale alla base HS, e l'angolo LSD vguale all'angolo MSH; vgualmente se gli aggiunga l'angolo MSD, i due angoli HSM, MSD, saranno vguali à i due angoli MSD, DSL: ma i due angoli MSD, DSL, [h] sono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque HSM, MSD, sono vguali à due angoli retti; e perciò le rette HS, SD, [K] costituiscono vna sola retta linea. Nell'istesso modo si proverà, che la retta BR è vguale alla retta RE, e che le due BR, RE costituiscono vna sola retta linea. In oltre perche i lati ED, BH, sono vguali, e paralleli al lato FC, i due BH, ED, [l] saranno frà di loro vguali, e paralleli: per la qual cosa le rette BE, HD, [m] che congiungono gli estremi, sono frà di loro vguali, e parallele, e le loro metà BR, SD, sono frà di loro vguali, e parallele. E perche le parallele BE, HD, sono segate dalle rette BD, RS, [n] perciò sono in vn medesimo piano; ed in cõseguenza le rette BD, RS, si segano scambieuolmẽte in qualche punto T. Di più, essendo le rette BE, HD, parallele, e sono segate dalla retta BD, gli angoli alterni TDS, TBR, [o] sono frà di loro vguali. Si considerino i triangoli TRB, TSD. Perche l'angolo TDS è vguale all'angolo TBR, e gli angoli al vertice STD, RTB, [p] sono frà di loro vguali, i due angoli STD, SDT, saranno vguali à i due angoli RTB, RBT; il lato SD è dimostrato vguale al lato RB; i due rimanenti lati ST, TD, [q] saranno vguali à i restanti due lati RT, TB; cioè ST sarà vguale ad RT, e la retta DT sarà vguale à TB, ch'era da dimostrarsi.

b 33. del 11.
c 30. del 1.
d 35. defin. del 1.
e 34. del 1.
f 29. del 1.
g 4. del 1.
h 13. del 1.
K 14. del 1.
l 9. del 11.
m 33. del 1.
n 7. del 11.
o 29. del 1.
p 15. del 1.
q 26. del 1.

COROLLARIO.

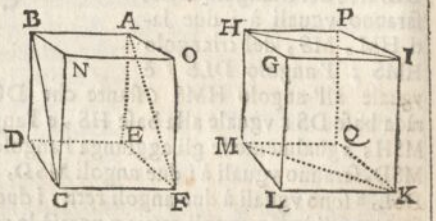
Appare da quel che si è detto, che tutte le diagonali d'vn parallelepipedo si segano scambieuolmente in due parti vguali in vn sol punto; Come per essempio nel punto T, doue tutti sono segati dalla commune settione RS in due parti vguali.

THEO-

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XXXX.

Se due prismi hanno vguali altezze, e di essi vno habbia per base vn parallelogrammo, e l'altro vn triangolo, ed il parallelogrammo sia il doppio del triangolo; quei due prismi saranno frà di loro vguali.

Siano i due prismi vgualmente alti ABCDEF, GHIKLM, il primo de' quali habbia per base il parallelogrammo DCFE, e la base dell'altro sia il triangolo MLK; e sia il parallelogrammo DCFE il doppio del triangolo MLK. Dico che il prisma ABCD EF è vguale al prisma GHI KLM. Co'i due lati BD, DC, si compisca il parallelogrammo DN, ed haueremo i tre parallelogrammi DN,DF, DA. Si facciano gli opposti, in modo, che si compisca il parallelepipedo DO. Di nuouo co'i due lati ML,LK, si faccia il parallelogrammo LQ, e si compisca il parallelepipedo LP; haueranno i parallelepipedi CA,LP,le medesime altezze de'prismi,e perciò saranno vgualmente alti. Perche il parallelogrammo LQ [a] è il doppio del triangolo MLK, ed il parallelogrammo CE, per ipotesi, è il doppio del medesimo triangolo MLK; sarà il parallelogrammo LQ vguale al parallelogrammo CE: ma le altezze de i proposti parallelepipedi, per ipotesi, sono frà loro vguali; i parallelepipedi dunque CA, LP, che hanno le basi vguali, e l'altezze vguali, [b] sono frà di loro vguali. E perche il piano BCFA diuide il parallelepipedo AC [c] in due parti vguali; ed il piano HMKI diuide il parallelepipedo LP in due parti vguali; si come tutto il parallelepipedo AC è vguale à tutto il parallelepipedo LP, così la metà dell'vno, cioè il prisma ABCDEF, è vguale alla metà dell'altro, cioè al prisma GHIKLM, come fù proposto dimostrare.



a 34. del 1.

b 31. del 11.

c 28. del 11.

Fine del Vndecimo Elemento.

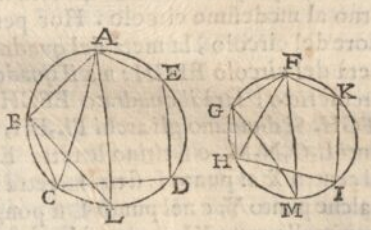
EVCLI-

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO DVODECIMO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I poligoni ſimili deſcritti ne i circoli, ſono frà di loro, come i quadrati de i diametri.

SIANO i poligoni ſimili ABCDE,FGHIK, deſcritti ne i circoli ABLD, FGMI, i di cui diametri ſiano AL,FM. Dico che il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM. Perche i poligoni ABCDE,FGHIK, per ipoteſi, ſono ſimili, perciò [a] ſaranno equiangoli, ed i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali. Sia dunque l'angolo ABC vguale all'angolo FGH; *ſi tirino le rette AC,FH. Eſſendo AB à BC, come FG à GH, i triangoli* ABC,FGH [b] *ſaranno equiangoli, e ſarà l'angolo* ACB vguale all'angolo FHG. Si tirino le rette *BL,GM.* Gli angoli BCA,BLA, [c] che ſono nella medeſima portione BCDA, ſono frà di loro vguali; e ſimilmente gli angoli GHF, GMF, nella medeſima portione GMKF, ſono frà di loro vguali: ma gli angoli BCA,GHF, furono dimoſtrati vguali; gli angoli dunque BLA, GMF, ſaranno frà di loro vguali. E perche gli angoli LBA, MGF, ne i ſemicircoli ABL,FGM, [d] ſono frà di loro vguali, ſtante che ſono retti, ſaranno i due angoli ALB, ABL, del triangolo ALB, vguali à i due angoli FMG, FGM, del triangolo FMG; ed il rimanente angolo BAL [e] ſarà vguale al reſtante angolo GFM; dal che i triangoli ABL,FGM, ſono equiangoli; e ſarà AL ad AB [f] come FM ad FG; e permutando, AL ad FM [g] ſarà come BA ad FG. S'intendano ſopra i diametri AL,FM, deſcritti due quadrati. Perche i quadrati ſono poligoni ſimili, ed i poligoni ſimili



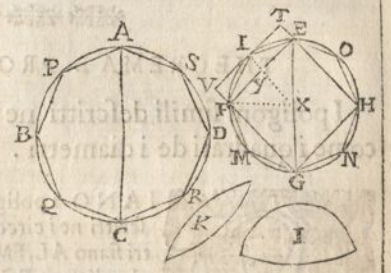
a 1. defin. del 6.
b 6. del 6.
c 21. del 3.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 5.

ABCDE,FGHIK ſono deſcritti ſopra i lati homologhi AB,FG, eſſendo AL ad FM, come AB ad FG, ſarà il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM, [h] come il poligono ABCDE al ſimile poligono FGHIK, ch'era da dimoſtrarſi.

h 22.del 6.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

I circoli hanno l'iſteſſa proportione, che i quadrati de i loro diametri.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, i di cui diametri ſiano le rette AC, EG. Dico che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD, al circolo EFGH; ouero, che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH.

Se il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG non è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH, ſia, ſe è poſſibile, il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD ad vn altra quantità I, la quale ò ſia minore, ouero maggiore del circolo EFGH; e ſuppoſto prima che la quantità I ſia minore del circolo EFGH, per quanto è il piano K, ſaranno i due I, & K, inſieme giunti, vguali al circolo EFGH.

a 6.del 4.

S'iſcriua nel circolo EFGH [a] il quadrato EFGH, il quale per lo Scolio alla 9. propoſitione del 4. ſarà la metà del quadrato circoſcritto intorno al medeſimo circolo. Hor perche il quadrato circoſcritto è maggiore del circolo, la metà del quadrato circoſcritto ſarà maggiore della metà del circolo EFGH: ma il quadrato EFGH è la metà del quadrato circoſcritto; ſarà il quadrato EFGH maggiore della metà del circolo EFGH. Si diuidano gli archi FE, EH, HG, GF, [b] in due parti vguali ne i punti L, O, N, M, e ſi tirino le rette EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE; dal centro X al punto L ſi tiri la retta XL, la quale ſegarà la retta FE in qualche punto Y; e nel punto L ſi ponga la retta VLT, [c] che faccia angoli retti colla retta XL; toccarà la retta VT [d] il circolo nel punto L; ſi tiri la retta XF. Perche gli archi FL, LE, ſono fra di loro vguali, gli angoli LXF, LXE, [e] ſaranno frà di loro vguali. E perche i lati EX, XY, ſono vguali à i due lati FX, XY, e gli angoli FXY, EXY, ſono frà di loro vguali, ſarà FY [f] vguale ad EY, e perciò la retta XL [g] ſega la retta FE ad angoli retti in Y; per la qual coſa le rette VT, FE, [h] ſono frà di loro parallele; e continuata la retta VT, ſin che concorra co' i lati GF, HE, prolungati in T, ed V, ſarà il quadrilatero VFET [K] parallelogrammo, il quale [l] ſarà il doppio del triangolo LFE. E perche il parallelogrammo VFET è maggiore

b 30. del 3.
c 11. del 1.
d Corol. alla 16. del 3.
e 27. del 3.
f 4. del 1.
g 3. del 3.
h 28. del 1.
K 35. defin. del 1.
l 41. del 1.

giore della portione FLE, la metà del parallelogrammo VFET sarà maggiore della metà della portione FLE : ma il triangolo FLE è la metà del parallelogrammo VFET, sarà il triangolo LFE maggiore della metà della portione FLE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri triangoli OEH, NHG, MGF, sono maggiori delle metà delle portioni EOH, HNG, GMF; e perciò tutti i detti triangoli, insieme giunti, saranno maggiori di tutte le portioni giunte insieme. Se di nuouo si diuidano gli archi EO, OH, HN &c. in due parti vguali, e si tirino le corde, che sottendono quei piccioli archi, saranno in quelle picciole portioni descritti altri triangoli, i quali giũti insieme, dimostraremo come prima si è fatto, che sarãno maggiori delle metà delle portioni, giunte insime, e cõ quest'ordine si proceda nell'altre portioni, che restano fuori di questi triangoli. Hor dal circolo EFGH se ne detragga il quadrato EFGH, ch'è maggiore della metà; e dalle portioni, che restano, se ne leuino i triangoli, che sono maggiori della metà di esse portioni, e dall'altre portioni, che restano, se ne leuino gli altri triangoli, che sono più della metà di esse portioni, e con quest'ordine si proceda, fin che tutte le portioni vltime restate, giunte insieme, [m] siano minori della quantità K; e supposto che il tutto sia fatto, e le portioni restate siano le notate EO, OH, HN, NG, GM, MF, FL, LE, le quali, giunte insieme, siano minori della quantità K. Perche le due K, ed I, giunte insieme, sono vguali al circolo EFGH, dalle due K, ed I, se ne leui la quantità K, e dal circolo se ne leuino le dette portioni EO, OH, HN, NG &c. che sono minori di K, resterà il poligono ELFMGNHO, maggiore della quantità I. S'iscriua nel circolo ABCD il poligono APBQCRDS simile al poligono ELFMGNHO; il che si fà nell'istesso modo, col quale si è iscritto il poligono ELFMGNHO nel circolo EFGH; per l'antecedente propositione, sarà il poligono APQRS al simile poligono ELMNO, come il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG : ma il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per ipotesi, è come il circolo ABCD alla quantità I, sarà il poligono APQRS al poligono ELMNO, [n] come il circolo ABCD alla quantità I; e permutando, il poligono APQRS al circolo ABCD, [o] sarà come il poligono ELMNO alla quantità I : ma il poligono APQRS è minore del circolo ABCD, sarà il poligono ELMNO [p] minore della quantità I; fù dimostrato maggiore, sarà il poligono ELMNO maggiore, è minore della quantità I, ch'è impossibile. Nõ dunque la quãtità I è minore del circolo EFGH; e perciò il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG nõ è come il circolo ABCD ad vna quãtità minore del circolo EFGH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, non è come il circolo EFGH ad vna quantità minore del circolo ABCD.

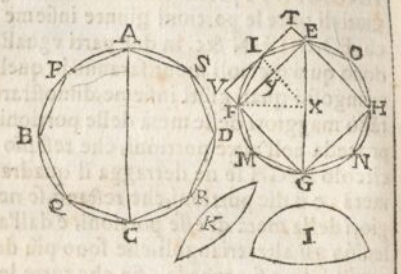
Di nuouo, supposto che la quantità I sia maggiore del circolo EFGH. Si concepisca la quãtità I al circolo ABCD essere come il circolo EFGH ad vn altra quantità, che per esempio sia K; permutando, sarà la quantità I al circolo EFGH, [q] come il circolo ABCD alla quantità K : ma la quantità I è posta maggiore del circolo EFGH, sarà il circolo ABCD [r] maggiore della quantità K; cioè la quantità K sarà minore del circolo ABCD.

m 1. del 10.
n 11. del 5.
o 6. del 5.
p 4. del 5.
q 16. del 5.
r 14. del 5.

ABCD. Perche il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per costruttione, è come il circolo ABCD alla quantità I, inuertendo la quantità I al circolo ABCD [t] sarà come il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC; ma la quantità I al circolo ABCD, per costruttione, è come il circolo EFGH alla quantità K, sarà il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, [u] come il circolo EFGH alla quantità K, minore del circolo ABCD, ch'è contro à quello, che si è dimostrato antecedentemente. Non dunque la quantità I è maggiore del circolo EFGH, ne meno, per quel che si è dimostrato, è minore, in conseguenza la quantità I sarà vguale al circolo EFGH. Hor essendo il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD alla quantità I, e la quantità I è vguale al circolo EFGH, sarà il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD al circolo EFGH, ch'era da dimostrarsi.

t Corol. all. 4. del 5.

u 11. del 5.



COROLLARIO.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, *che i circoli* sono frà di loro come *i simili poligoni iscritti in essi*, stante che tanto *i circoli*, *come i poligoni simili*, descritti in essi, *sono come i quadrati de i* diametri.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

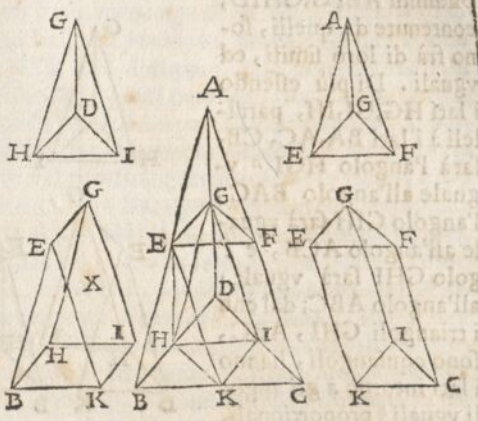
Ogni Piramide di base triangolare si diuide in due Piramidi di basi triangolari, simili, ed vguali frà di loro, e simili à tutta la Piramide; & in due prismi vguali, che giunti insieme, sono maggiori della metà della Piramide.

Sia la Piramide ABCD, la di cui base triangolare sia DBC, ed il vertice A; si diuidano tutti i lati di essa Piramide [a] in due parti vguali ne i punti E,F,G,K,I,H, e si tirino le rette EF,FG,GE,KI,IH,HK,IG,HG,KE, HE, e sarà diuisa la Piramide ABCD, nelle due Piramidi AEFG,GHID, le di cui basi sono *i* triangoli EGF,HDI, ed i vertici A,& G; e ne i due solidi EGIKBH,FGEKCI, *i* quali, come dimostreremo, sono prismi, cioè il prisma EGIKBH hà le faccie opposte EBK,GHI triangolari, e la base HBKI è parallelogrammo, e l'altro prisma FGEKCI hà per base il trian-

a 10. del 1.

golo

golo IKC, al quale è opposto il triangolo EGF; e questi due prismi sono separati dal parallelogrammo EGIK, ch'è piano commune dell'vno, e l'altro. Dico che le due Piramidi AEFG,GHID, sono frà di loro simili, ed vguali, ed ogn'vna è simile à tutta la Piramide ABCD, e che i due prisma EGIKBH, FGEKCI, sono frà di loro vguali,e giunti insieme, sono maggiori della metà della Piramide ABCD. Perche i lati AD,AB,sono diuisi in due parti vguali in G,ed E, sarà la proportione di AG à GD come quella di AE ad EB; per la qual cosa la retta EG [b] sarà parallela al lato BD. Similmente essendo i lati AB, BD, diuisi in due parti vguali in E,& H, per la medesima ragione sarà EH parallela à GD. Parimente essendo i lati DA, DB,DC, diuisi in due parti vguali in G,H,ed I, per le cose dette,la retta HG è parallela ad AB,la retta GI è parallela ad AC, e la retta HI è parallela al lato BC. E finalmente, essendo i lati CD,DB,BC, diuisi in due parti vguali in H,K, ed I, la retta KI sarà parallela à BD, e la retta HK è parallela à DC; e perciò tanto il quadrilatero EHDG, quanto il quadrilatero EBHG, ed il quadrilatero GICF, come il quadrilatero HBKI, è parallelogrammo; e sarà GD [c] vguale ad EH, la retta EG vguale ad HD, EG sarà vguale ad HB, e la retta GH vguale ad EB, ouero AE; e similmente HI sarà vguale à BK,la retta IG vguale ad FC,ouero AF,e la retta GF vguale ad IC, ouero DI. Si considerino i due triangoli AGE, GDH, de'quali i lati AG,GE, sono vguali à i due lati GD, DH, la base AE è vguale alla base GH, sarà il triangolo AGE [d] vguale,ed equiangolo al triangolo GDH;dalche i lati intorno à gli angoli vguali [e] sono proportionali, e perciò sono fra loro simili. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli AGF,GDI, sono frà loro simili,ed vguali. In oltre,perche le rette HD,DI, sono parallele alle due EG, GF, sarà l'angolo HDI [f] vguale all'angolo EGF. Ne i triangoli EGF,HDI, i due lati HD, DI, sono stati dimostrati vguali à i due lati EG, GF, e l'angolo HDI vguale all'angolo EGF, sarà la base HI [g] vguale alla base EF, i rimanenti angoli DHI,DIH, saranno vguali à i restanti angoli GEF,GFE, ed il triangolo DHI vguale al triangolo GEF. E perche i triangoli GEF, DHI, sono equiangoli,haueranno perciò [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, ed in conseguenza [K] saranno frà loro simili; si che i triangoli GEF,DHI, sono frà loro simili, ed vguali. Si considerino i triangoli AEF, GHI, de'quali i due lati EA,AF,per quel che si è dimostrato,sono vguali



b 2. del 6.

c 34. del 1.

d 8. e 4. del 1

e 4. del 6.

f 10. del 11.

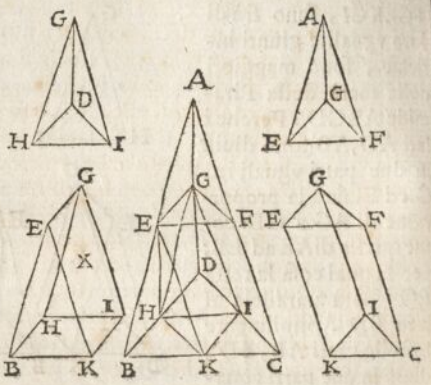
g 4. del 1.

h 4. del 6.

K 1. defin. del 6.

l 8, 4. del 1.
m 4. del 6.

à i due lati HG, GI, la baſe EF è vguale alla baſe HI, ſarà il triangolo AEF l vguale, ed equiangolo al triangolo GHI, e perciò m ſono frà loro ſimili, ed vguali. Hor eſſendo i quattro triangoli AGE, AGF, AEF, EGF, ſimili, ed vguali à i quattro triangoli GDH, GDI, GHI, DHI, le piramidi AEFG, GHID, contenute da quelli, ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Di più eſſendo i lati HG, GI, IH, paralleli à i lati BA, AC, CB,



n 10. del 10. ſarà l'angolo HGI n vguale all'angolo BAC, l'angolo GIH ſarà vguale all'angolo ACB, e l'golo GHI ſarà vguale all'angolo ABC; dal che i triangoli GHI, ABC, ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali o proportionali, e perciò p ſono ſimili frà loro. Nel triangolo DAB la retta GH è dimoſtrata parallela ad AB, e per il Coroll. alla 4. del 6, i triangoli DGH, DAB, ſono ſimili frà loro. Parimente eſſendo GI parallela ad AC, ſarà il triangolo DIG ſimile al triangolo DCA; ed eſſendo HI parallela al lato BC, ſarà il triangolo DHI ſimile al triangolo DBC: ſi che i quattro triangoli GHI, GDH, GDI, IDH, ſono ſimili à i quattro triangoli ABC, ADB, ADC, CDB; e perciò la piramide GHID q ſarà ſimile alla piramide ABCD. Di più, eſſendoſi dimoſtrato, che il triangolo DBC è ſimile al triangolo DHI, e che il triangolo GEF è ſimile al medeſimo triangolo DHI, i triangoli DBC, GEF, r ſaranno frà di loro ſimili. E perche le rette EG, GF, EF, ſono parallele à i lati DB, DC, BC, ſarà il triangolo AGE, t ſimile al triangolo ADB, il triangolo AGF ſimile al triangolo ADC, ed il triangolo AEF ſarà ſimile al triangolo ABC; dal che le piramidi AEGF, ABDC u ſono ſimili frà di loro. Per la qual coſa le piramidi AEGF, GHDI, ſono ſimili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna è ſimile à tutta la piramide ABCD, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

o 4. del 6.
p 1. defin. del 6.
q 9. defin. del 11.
r 12. del 6.
t 10. del 11. & 4. del 6.
u 9. defin. del 11.

Di nuouo, perche i lati BA, BC, ſono diuiſi in due parti vguali in E, & K, ſarà BK à KC come BE ad EA, e perciò le rette EK, FC x ſono frà di loro parallele; ſù moſtrata GI parallela ad FC, ſarà EK y parallela ad IG: e perche le rette EG, GF, EF, furono dimoſtrate parallele alle tre BD, DC, CB, i quadrilateri EKIG, GICF, EKCF ſono parallelogrammi, ed in conſeguenza i loro lati oppoſti z ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa i lati EG, GF, EF, ſono vguali, e paralleli à i lati KI, IC, CK, ed i triangoli GEF, IKC, a ſono frà loro equiangoli, vguali, e paralleli; ed eſſendo equiangoli, i lati intorno à gli angoli vguali b ſono proportionali, e perciò c ſono frà loro ſimili. Hor eſſendo i triangoli EGF, KIC, frà

x 2. del 6.
y 9. del 11.
z 34. del 1.
a 8. & 4. del 2.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.

loro

loro simili, vguali, è paralleli, ed i quadrilateri EKIG,GFCI,FCKE, sono parallelogrammi, per la definitione 13. di questo, il solido EGFCKI è prisma. Similmente essendo i tre lati EB, BK, KE vguali, e paralleli à i tre lati GH,HI,IG, i triangoli EBK, GHI [d] saranno simili, vguali, e paralleli. E perche i quadrilateri EKIG, EBHG, BHIK, furono dimostrati parallelogrammi, per la citata definitione 13. di questo, il solido GEB KIH è ancora prisma, la di cui base è il parallelogrammo HBKI, il quale è [e] il doppio del triangolo HKI, cioè il doppio del triangolo IKC. E perche gli antedetti prisma sono frà i piani paralleli EGF, DBC, cioè hanno vna medesima altezza, essendo la base parallelogramma BI il doppio della base triangolare IKC, sarà il prisma GEBKIH [f] vguale al prisma GEFCIK. Finalmente nel parallelogrammo KD il lato HK [g] è vguale al lato DI, fù dimostrato il lato BK vguale al lato HI, ed il lato BH, per costruttione, è vguale al lato HD, i tre lati dunque BH,HK,KB, sono vguali à i tre lati HD,DI,IH, dal che i triangoli HBK, DHI, [h] sono frà loro equiangoli, ed vguali; ed essendo equiangoli, hanno i lati [K] intorno à gli angoli vguali proportionali, e perciò [l] sono simili. Parimente essendo i quadrilateri EBHG, EHDG, parallelogrammi, sarà EB [m] vguale ad HG, ed il lato EH sarà vguale al lato GD: ma BH è vguale ad HD, i tre lati dunque EH,HB,BE, sono vguali à i tre lati GD,DH,HG; e per le ragioni antedette, sarà il triangolo EHB [n] simile, ed vguale al triangolo GDH; ed oltre à ciò, essendo i tre lati EH, HK, KE, vguali à i tre lati GD,DI,IG, saranno i triangoli EHK, GDI [o] frà loro simili, ed vguali; e tutta la piramide EHBK [p] sarà simile, ed vguale alla piramide GDHI. E perche il prisma GEBKIH, che hà la base parallelogramma, è maggiore della piramide EBKH, stante che la contiene, sarà il medesimo *prisma maggiore della piramide GHID*: ma il prisma EGFCKI di base triangolare è *vguale al prisma GEBKIH*, sarà il prisma di base triangolare EGFCKI *maggiore della piramide GHID*, cioè maggiore della piramide AEFG. Per la qual cosa i due *prismi GEBKIH*, GEFCKI, giunti insieme, sono maggiori delle due piramidi GHID, AFEG; ed in conseguenza sono maggiori della metà di tutta la piramide ABCD, il che era da dimostrarsi.

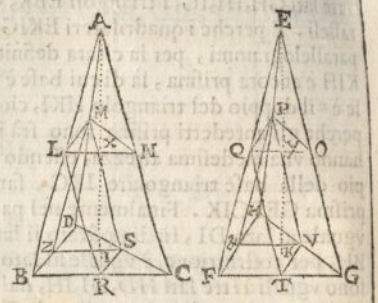
[d] 10. dell' 11. & 4. del 1, e 4. del 6.
[e] 34. del 1.
[f] 40. del 11.
[g] 34 del 1.
[h] 8, & 4. del 1.
[K] 4. del 6. 11. defin. del 6.
[l]
[m] 34. del 1.
[n] 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
[o] 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
[p] 10. defin. del 11.

LEMMA.

Se saranno due piramidi di basi triangolari, e d'vguali altezze, ogn'vna delle quali sia diuisa in due piramidi simili, ed vguali frà loro, e simili à tutta la piramide, et in due prismi vguali frà loro, che giunte insieme, siano maggiori della metà della piramide, come si disse nell'antecedente propositione; ciascun prisma in vna, al corrispondente prisma nell'altra, sarà come la base di tutta la piramide alla base dell'altra piramide.

Siano

Siano le piramidi ABCD, EFGH, le di cui basi triangolari siano DBC, HFG, e l'altezze vguali siano le perpendicolari AI, EK, ed ogn'vna di esse piramidi sia diuisa in due piramidi, e due prismi, secondo le conditioni dell'antecedente propositione. Dico che il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV è come la base della piramide ABCD alla base della piramide EFGH; cioè come la base DBC alla base HFG. Perche i piani LMN, BDC, per quel che fù dimostrato nell'antecedente propositione, sono paralleli, perciò segano le rette AI, AC, [a] *proportionalmente, e sarà AN ad NC come AX ad XI: ma AN, per costruttione, è vguale ad NC, sarà AX vguale ad XI. Nell'istesso modo si proverà, che EY è vguale ad YK; e perche tutta l'altezza AI è supposta vguale all'altezza EK, perciò la metà XI sarà vguale alla metà YK; dal che i prismi LMNCRS, OPQGTV, sono* [b] *come le basi RSC, VTG. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le rette RS, TV, sono parallele à i lati DB, HF, sarà il triangolo DBC* [c] *simile al triangolo SRC, ed il triangolo HFG sarà simile al triangolo VTG. In oltre perche i lati BC, FG, sono diuisi in due parti vguali in R, & T, sarà BC à CR come FG à GT, per la qual cosa il triangolo DBC al simile triangolo SRC sarà come il triangolo FHG* [d] *al simile triangolo VTG; e permutando, il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo SRC* [e] *al triangolo VTG: ma il triangolo SRC al triangolo VTG è come il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV; sarà il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV,* [f] *come il triangolo DBC al triangolo HFG: Ma i prismi LMNCRS, OPQGTV, sono vguali à i prismi MLRBZS, PQTF&V, il prisma ancora MLRBZS al prisma PQTF&V sarà, come la base BDC alla base FHG, ch'era da dimostrarsi.*



a 17. del 11.

b Corol. alla 32. del 11.

c Corol. alla 4. del 6.

d 22. del 6. e 16. del 5.

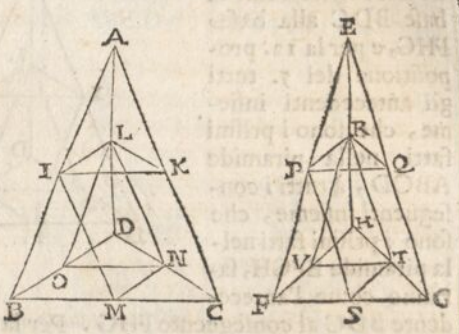
f 11. del 5.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se saranno due piramidi di vguali altezze, che habbiano le basi triangolari, ed ogn'vna di esse sia diuisa in due piramidi simili, ed vguali frà loro, e simili à tutta la piramide, & in due prismi vguali, che, giunti insieme, siano maggiori della metà di tutta la piramide; ed ogn'vna di quelle piramidi, che risulta da tal diuisione, sia diuisa in due altre piramidi, e due prismi, come la prima; e le piramidi, che risultano da questa diuisione, siano similmente diuise in due piramidi, e due prismi, come prima, e con-

quest'

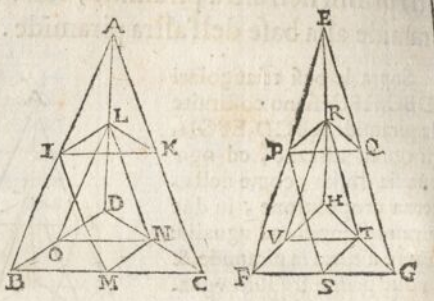
queſt'ordine in infinito; tutti i priſmi, che riſulteranno da queſte diuiſioni in vna piramide, giunti inſieme, à tutti i priſmi nell'altra piramide, ſono come la baſe della piramide alla baſe dell'altra piramide.



Sopra le baſi triangolari DBC,HFG, ſiano coſtituite le piramidi ABCD,EFGH, di vguali altezze, ed ogn' vna ſia diuiſa, come nella terza propoſitione, in due piramidi ſimili, ed vguali,e ſimile à tutta la piramide,& in due priſmi frà loro vguali, che giunti inſieme,ſiano maggiori della metà di tutta la piramide, e le piramidi in vna di eſſe ſiano le notate AIKL,LOND, e nell'altra ſiano EPQR, RVTH; parimente i priſmi in vna di eſſe ſiano i notati LIBMNO, ILKCMN, e nell'altra ſiano RPFSTV, PRQGST; e di nuouo ogn'vna delle piramidi AIKL,LOND, EPQR, RVTH, ſia ſimilmente diuiſa in due piramidi, e due priſmi, come prima; ed ogn'vna delle piramidi, che riſultano da queſta diuiſione, ſi diuida parimente in due piramidi, e due priſmi, nell'iſteſſo modo di prima, e con queſt'ordine ſi proceda in infinito. Dico che tutti i priſmi, *che ſi fanno nella piramide ABCD à tutti i priſmi, che ſi fanno nella piramide EFGH, ſono come la baſe DBC alla baſe HFG*. Perche le piramidi AIKL,LOND *ſono frà di loro ſimili*, ed vguali, ſarà la baſe ILK [a] vguale alla baſe ODN: ma *il triangolo ILK* [b] *è vguale al triangolo* MNC, ſtante che ſono le baſi oppoſte del priſma,ſarà *il triangolo DON* vguale al triangolo MNC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo HVT è vguale al triangolo TSG. Si dimoſtri come ſi fece nell'antecedente Lemma, che il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo NMC al triangolo TSG,ſarà ancora il triangolo DBC al triangolo HFG, come il triangolo LIK al triangolo PRQ, e ſarà il triangolo DBC al triangolo HFG come il triangolo DON al triangolo HVT. Di nuouo il priſma ILKCNM al priſma PRQGST, per l'antecedente Lemma, è come la baſe DBC alla baſe HFG, ed il priſma LIBMNO al priſma RPFSTV è come la baſe BDC alla baſe HFG, ſaranno gli antecedenti inſieme, cioè l'aggregato de i due priſmi LIBCKD, à i conſeguenti inſieme, ch'è l'aggregato de gli altri due priſmi RPFGQH, [c] come l'antecedente BDC al conſeguente FHG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i priſmi nella piramide AIKL, giunti inſieme, à i priſmi nella piramide EPQR, giunti inſieme, ſono come la baſe ILK alla baſe PRQ, cioè come la baſe BDC alla baſe FHG: e ſimilmente tutti i priſmi nella piramide LOND à tutti i priſmi nella piramide RVTH, [d] ſono come la

a 10. defin. del 11.
b 13. defin. del 11.
c 12. del 5.
d 12. del 5.

baſe ODN alla baſe HVT, cioè come la baſe BDC alla baſe FHG. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che tutti i priſmi in ogn'altra piramide fatta in ABCD à tutti i priſmi nella corriſpondente piramide fatta in EFGH, eſſere come la baſe BDC alla baſe FHG, e per la 12. propoſitione del 5. *tutti gli antecedenti inſieme, che ſono i priſmi fatti nella piramide ABCD*, à tutti i conſeguenti inſieme, che ſono i priſmi fatti nella piramide EFGH, ſaranno come l'antecedente BDC al conſeguente FHG. Per la qual coſa *tutti i priſmi à tutti priſmi ſono come la baſe BDC alla baſe FHG*, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

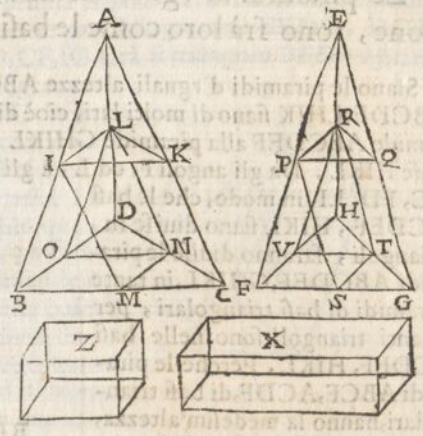
Le piramidi di baſi triangolari, che hanno la medeſim' altezza, ſono come le loro baſi.

Sopra le baſi triangolari *DBC, HFG, ſiano coſtituite le piramidi d'vguali altezze ABCD, EFGH. Dico, che la baſe DBC alla baſe HFG è come le piramide ABCD alla piramide EFGH*, cioè come la piramide *ABCD ad vna quantità vguale alla* piramide EFGH. Se la baſe BDC *alla baſe HFG non* è come la piramide ABCD ad vna quantità vguale alla piramide EFGH, s'intenda la baſe DBC alla baſe HFG eſſere come la piramide ABCD alla quantità X, la quale ò ſarà minore, ò maggiore della piramide EFGH. Sia nel primo luogo la quantità X minore della piramide EFGH, per quanto è il ſolido Z, in modo, che i due ſolidi X, & Z, giunti inſieme, ſiano vguali alla piramide EFGH. Si diuida la piramide EFGH nelle due piramidi EPQR, RVTH, ſimili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna ſimile à tutta la piramide EFGH, e ne i due priſmi RPF STV, PRQGST, vguali frà di loro, e che, giunti inſieme, ſiano maggiori della metà della piramide EFGH, nel modo, che ſi fece alla terza propoſitione di queſto: E ſimilmente ſia diuiſa ogn'vna delle piramidi EPQR, RVTH, in due piramidi, e due priſmi, nel modo fatto alla citata 3. propoſit. di queſto, ed ogn'vna di quelle piramidi, che riſultano da queſta diuiſione, ſi diuidano in due altre piramidi, e due priſmi, come prima, e con queſt'ordine ſi proceda fin che le piramidi, che riſultano dall'vltima diuiſione, giunte inſieme, [a] ſiano minori del ſolido Z: e ſuppoſto, che, fatta queſta ſucceſſiua diuiſione, le piramidi reſtate ſiano EPQR, RVTH,

[a] 1. del 10.

le

le quali, giunte insieme, siano minori del solido Z. Perche i due solidi Z, ed X, giunti insieme, sono vguali alla piramide EFGH, detratto da i due solidi Z, ed X, il solido Z, e dalla piramide EFGH detrattane le piramidi EPQR, RVTH, che sono minori del solido Z, restano i due prismi RPF STV, PRQGST, maggiori del solido X. Sia poi diuisa la piramide ABCD nel modo, ch'è stata diuisa la piramide EFGH, per l'antecedente propositione, i prismi, che sono nella piramide ABCD, à i prismi, che sono nella piramide EFGH, hanno l'istessa proportione, quale hà la base DBC alla base HFG: ma la base DBC alla base HFG è come la piramide ABCD al solido X, saranno i prismi, fatti nella piramide ABCD, à i prismi fatti nella piramide EFGH, [b] come la piramide ABCD al solido X; e permutando, i prismi nella piramide ABCD alla piramide ABCD, [c] saranno come i prismi nella piramide EFGH al solido X: ma i prismi nella piramide ABCD sono minori della medesima piramide ABCD, saranno i prismi nella piramide EFGH [d] minori del solido X: e perche i prismi nella piramide EFGH furono dimostrati maggiori del solido X, sarebbero i prismi della piramide EFGH maggiori, e minori del solido X. Non dunque il solido X è minore della piramide EFGH, e perciò la base DBC alla base HFG non è come la piramide ABC ad vna quantità minore della piramide EFGH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la base HFG alla base DBC non è come la piramide EFGH ad vna quantità minore della piramide ABCD.



b 11. del 5.

c 16. del 5.

d 14. del 5.

Di nuouo, supposto, che X sia maggiore della piramide EFGH, s'intenda come X alla piramide ABCD, così la piramide EFGH ad vn'altra quantità, che per essempio sia il solido Z; e permutando, sarà il solido X alla piramide EFGH, [e] come la piramide ABCD al solido Z: ma il solido X, per suppositione, è maggiore della piramide EFGH, sarà la piramide ABCD [f] maggiore del solido Z, cioè il solido Z sarà minore della piramide ABCD. In oltre, perche la base DBC alla base HFG, per ipotesi, è come la piramide ABCD al solido X, inuertendo, sarà il solido X alla piramide ABCD, [g] come la base HFG alla base DBC; ma il solido X alla piramide ABCD, per costruttione, è come la piramide EFGH al solido Z, sarà la base HFG alla base BDC, [h] come la piramide EFGH al solido Z, ch'è minore della piramide ABCD; il che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque il solido X è maggiore della piramide EFGH, ne meno, per quel che si è dimostrato, è minore, & in conseguenza il solido X

e 16. del 5.

f 14. del 5.

g Corall. alla 4. del 6.

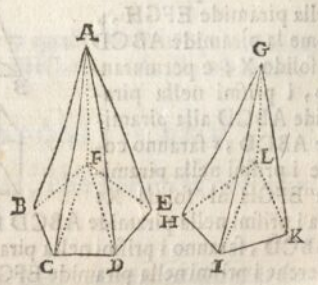
h 11. del 5.

è vguale alla piramide EFGH. E perche la baſe DBC alla baſe HFG è come la piramide ABCD al ſolido X, eſſendo il ſolido X vguale alla piramide EFGH, ſarà la baſe DBC alla baſe HFG, come la piramide ABCD alla piramide EFGH, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Le piramidi di vguali altezze, che hanno le baſi poligone, ſono frà loro come le baſi.

Siano le piramidi d'vguali altezze ABCDEF, GHIKL, le di cui baſi FBCDE, LHIK ſiano di molti lati, cioè di più di tre lati. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL è come la baſe BCDEF, alla baſe HIKL. Da gli angoli F, ed L, à gli angoli oppoſti ſi tirino le rette FC, FD, LI, in modo, che le baſi BCDEF, HIKL ſiano diuiſe in triangoli, ſaranno diuiſe le piramidi ABCDEF, GHIKL, in tante piramidi di baſi triangolari, per quanti triangoli ſono nelle baſi BCDEF, HIKL. Perche le piramidi ABCF, ACDF, di baſi triangolari, hanno la medeſim'altezza, per l'antecedente propoſitione, la piramide ABCF alla piramide ACDF, è come la baſe FBC alla baſe FCD; e componendo, *la piramide ABCDF alla piramide*



ACDF [a] *ſarà come la baſe BCDF alla baſe FCD*: ma la piramide ACDF *alla piramide d'vguale altezza* ADEF, è come la baſe CDF alla baſe FDE; per l'vgualità, la piramide ABCDF alla piramide ADEF [b] ſarà come la baſe BCDF alla baſe FDE. e cõponẽdo, tutta la piramide ABCDEF alla piramide ADEF, [c] ſarà come la baſe BCDEF alla baſe FDE. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la piramide GHIKL alla piramide GIKL è come la baſe HIKL alla baſe LIK; ed inuertẽdo, la piramide GIKL alla piramide GHIKL, [d] è come la baſe LIK alla baſe HIKL. In oltre, perche la piramide ABCDEF alla piramide ADEF è come la baſe BCDEF alla baſe FDE, e la piramide ADEF alla piramide d'vguale altezza GIKL, è come la baſe FDE alla baſe LIK per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GIKL, [e] ſarà come la baſe BCDEF alla baſe LIK: ma la piramide GIKL alla piramide GHIKL è come la baſe LIK alla baſe HIKL; ſarà, per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL, [f] come la baſe BCDEF alla baſe HIKL, ch'era da dimoſtrarſi.

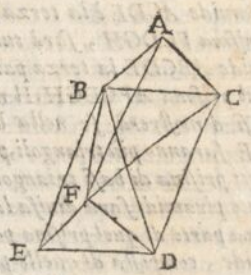
a 18. del 5.
b 22. del 5.
c 18. del 5.
d Coroll. alla 4. del 6.
e 22. del 5.
f 22. del 5.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Ogni prisma di basi triangolari si diuide in tre vguali piramidi di basi triangolari.

Sia il prisma ABCDEF, le di cui basi triangolari siano gli opposti triangoli ABC, FED. Dico, che il prisma ABCDEF si diuide in tre piramidi vguali di basi triangolari. Ne i tre parallelogrammi BEDC, DCAF, ABEF, si tirino le diagonali BD, CF, FB, sarà il triangolo BED [a] vguale al triangolo BDC; e nel parallelogrammo AFDC, il triangolo AFC sarà vguale al triangolo CFD. Si considerino le due piramidi, le di cui basi sono i triangoli BED, BDC, ed il vertice F; cioè le piramidi FBED, FDCB, le quali hanno vna medesima altezza; e sarà la piramide FEDB alla piramide FDCB, [b] come la base BED alla base BDC: ma le basi BED, BDC, sono state dimostrate vguali. Le piramidi dunque FEDB, FDCB [c] sono frà di loro vguali. Di nuouo si considerino due altre piramidi, le di cui basi sono i triangoli FDC, FCA, ed il vertice B, cioè le piramidi BDCF, BFCA, le quali hanno vna medesima altezza, sarà la piramide BFDC alla piramide BFCA, [d] come la base FDC alla base FCA: ma le basi FDC, FCA, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro vguali, in conseguenza le piramidi BFDC, BFCA, [e] sono frà di loro vguali: ma la piramide BFDC fù dimostrata vguale alla piramide BFED; le tre piramidi dunque BFED, BFDC, BFCA, sono frà di loro vguali, ch'era dimostrarsi.



a 34. del 1.

b 5. del 12.

c 14. del 5.

d 5. del 12.

e 14. del 5.

COROLLARIO.

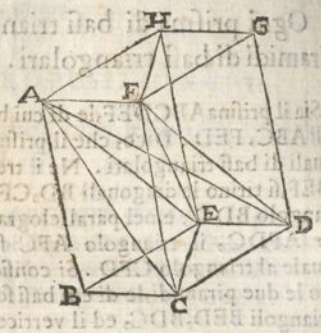
Dall'antecedente propositione si caua, che ogni piramide è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base.

Sopra la base poligona BCDE sia posta la piramide ABCDE, ed il prisma vgualmente alto ACDH, ed i piani opposti AG, BD, siano diuisi in triangoli di numero vguali colle rette HF, EC, sarà diuiso il prisma ACDH in tanti prismi di basi triangolari, per quanti sono i triangoli nella base BCDE; e sarà diuisa la piramide ABCDE in tante piramidi di basi triangolari, per quanti sono i triangolari in essa base BCDE; si tirino le rette DF, EF, e si considerino le due

trian-

f 5. del 12. & 14. del 5.

piramidi ACDE, FCDE, le quali hanno la medesima base CDE, e sono sotto la medesima altezza, perciò sono frà di loro vguali: ma la piramide FCDE, per l'antecedente propositione, è la terza parte del prisma FCDGH, sarà la piramide ACDE la terza parte del prisma FCDGH; per la qual cosa la piramide di base triangolare è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base. In oltre, perche la piramide ABCE, per l'antecedente propositione, è la terza parte del prisma HAFECB, e la piramide ACDE è la terza parte del prisma FCDGH, sarà tutta la piramide ABCDE la terza parte di tutto il prisma ABCDGH. Il medesimo si dimostrerà se nella base BCDE saranno più triangoli, poiche in quanti triangoli è diuisa la base BCDE, in tanti prisma di basi triangolari sarà diuiso il prisma ABCDGH, ed in altretante piramidi sarà diuisa la piramide ABCDE, ogn'vna delle quali sarà la terza parte di quel prisma posto sopra la medesima base; e perciò tutta la piramide, composta di quelle piramidi di basi triangolari, sarà la terza parte di tutto il prisma, composto di quei prismi di basi triangolari. D'onde si conclude, che ogni piramide è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base, come si disse. Intendasi però di quei prismi, la di cui base sia vno di quei piani opposti, che nel prisma deuono essere simili, vguali, e paralleli.

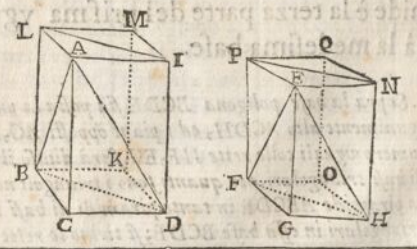


THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Le simili piramidi di basi triangolari sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le simili piramidi ABCD, EFGH, le di cui basi siano i triangoli BCD, FGH, e siano le basi BCD, FGH, simili frà loro; per la similitudine delle piramidi, gli altri triangoli in vno saranno simili à gli altri triangoli nell'altro: sia dunque il triangolo ACD [a] simile al triangolo EGH, il triangolo ABC simile al triangolo EGF, ed il triangolo ABD simile al triangolo EFH. Dico, che la piramide ABCD alla piramide EFGH, hà triplicata proportione, che il lato homologo CD al lato homologo GH. Co'i lati AC, CD, si faccia il parallelogrammo CI; co'i

a 9. def. del 11.



due

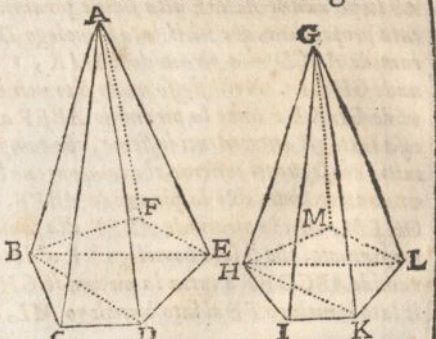
due AC, CB, si faccia il parallelogrammo CL, e co'i due lati BC, CD, si faccia il parallelogrammo CK; si compisca il parallelepipedo LCDM. Nell'istesso modo si compisca il parallelepipedo PGHQ. Si tirino le diagonali LI, PN. Il parallelogrammo LBDI [b] diuide il parallelepipedo LCDM ne i due prismi LAIDCB, LMIDKB, vguali frà loro, e di basi triangolari, e sarà tutto il parallelepipedo LCDM à tutto il parallelepipedo PGHQ, [c] come il prisma LAIDCB al prisma PENHGF. E perche la piramide ABCD [d] è la terza parte del prisma LAIDCB, e la piramide EFGH è la terza parte del prisma PENHGF, i detti prismi saranno vguali multiplici di esse piramidi, e sarà il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, [e] come la piramide ABCD, alla piramide EFGH. In oltre, perche i triangoli ACD, EGH, sono frà loro simili, sarà l'angolo ACD [f] vguale all'angolo EGH, e la proportione di AC à CD, come quella di EG, à GH; per la qual cosa i parallelogrammi CI, GN, sono frà loro simili. Parimente essendo i triangoli ACB, EGF, frà loro simili, per le ragioni antedette, i parallelogrammi CL, GP, sono frà loro simili; ed essendo i triangoli BCD, FGH, frà loro simili, per l'istessa ragione i parallelogrammi CK, GO, sono frà loro simili; dal che i tre parallelogrammi CI, CL, CK, sono simili à i tre corrispondenti parallelogrammi GN, GP, GO; gli opposti sono simili à questi, e perciò il parallelepipedo LCDM [g] sarà simile al parallelepipedo PGHQ; e per la propositione 33. dell'11. il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH: ma il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ è come il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, ed il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, è come la piramide ABCD alla piramide EFGH, hauerà la piramide ABCD alla piramide EFGH, [h] triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH, il che era da dimostrarsi

b 28. del 11.
c 15. del 5. d 7. del 12.
e 15. del 5.
f 1. definit. del 6.
g 9. definit. del 11.
h 11. del 5.

SCOLIO.

Coll'antecedente propositione facilmente si dimostra, che le piramidi simili, le di cui basi siano più di tre lati, sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le piramidi ABCDEF, GHIKLM, simili frà di loro, le di cui basi siano i simili poligoni BCDEF, HIKLM. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKLM hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo FE al lato homologo LM. Perche i poligoni ABCDEF, HIKLM, sono simili sarà [a] CD à DE come IK à KL, e sarà DE ad EF come KL ad LM;



a 1. definit. del 6.

b 16. del 5. LM; e permutandosi, sarà CD ad IK, [b] come DE à KL, e la proportione di DE à KL sarà come quella di EF ad LM. Si dividano i poligoni simili BCDEF, HIKLM [c] in triãgoli di numero vguale, colle rette BD, BE, HK, HL, sarà il triangolo BCD simile al triãgolo HIK, il triangolo BDE sarà simile al triangolo HKL, ed il triangolo BEF sarà simile al triãgolo HLM; e la proportione di CB à BD sarà come quella di IH ad HK; come ancora la proportione di CD à DB sarà come quella di IK à KH. Perche le proposte piramidi sono simili, sarà il triangolo ABC [d] simile al triangolo GHI, ed il triangolo ACD sarà simile al triangolo GIK; dal che la proportione di AB à BC [e] sarà come quella di GH ad HI; ma CB à BD è come IH ad HK, per l'egualità sarà AB à BD [f] come GH ad HK.

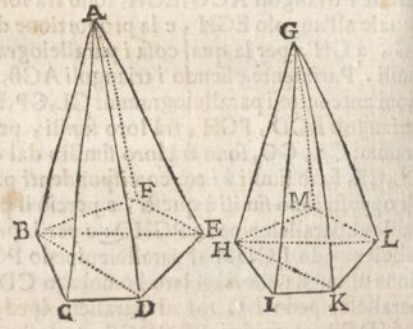
c 20. del 6.

d 9. definit. del 11.

e 1. definit. del 6.

f 22. del 15.

Parimẽte GK à KI è come AD à DC, fù mostrata CD à DB essere come IK à KH, sarà per l'egualità, AD à DB [g] come GK à KH; ed inuertendo BD à DA [h] sarà come HK à KG. Hor essendo AB à BD come GH ad HK, e la proportione di BD à DA è come quella di HK à KG, sarà per l'egualità, AB ad AD [K] come HG à GK; dal che i triangoli ABD, GHK, sono equiangoli, hanno i lati [l] intorno à gli angoli vguali, e perciò [m] sono frà loro simili. E perche i quattro triangoli ABC, ACD, ADB, BCD, sono simili à i quattro triangoli GHI, GIK, GKH, HIK, perciò le piramidi ABCD, GHIK, [n] sono frà loro simili. Nell'istesso modo si proverà, che la piramide ABDE è simile alla piramide GHKL; e che la piramide ABEF è simile alla piramide GHLM; ed hauerà la piramide ABCD alla piramide GHIK [o] triplicata proportione, che il lato homologo CD al lato homologo IK: ma CD ad IK è come DE à KL, hauerà la piramide ABCD alla piramide GHIK [p] triplicata proportione, che il lato DE à KL: ma la piramide ABDE alla simile piramide GHKL [q] hà la medesima triplicata proportione, che hà il lato homologo DE al lato homologo KL, sarà la piramide ABCD alla piramide GHIK, [r] come la piramide ABDE alla piramide GHKL. Nell'istesso modo si proverà, che la piramide ABDE alla piramide GHKL è come la piramide ABEF alla piramide GHLM. Per la qual cosa tutti gli antecedenti insieme, che compongono la piramide ABCDEF, à tutti i conseguenti insieme, che compongono la piramide GHIKLM, [t] sono come vno antecedente, ch'è la piramide ABEF, ad vn conseguente, ch'è la piramide GHLM. Ma la piramide ABEF alla simile piramide GHLM [u] hà triplicata proportione, che il lato homologo FE al lato homologo ML, hauerà tutta la piramide ABCDEF à tutta la piramide GHIKLM [x] triplicata proportione, che il lato homologo FE al lato homologo ML, ch'era da dimostrarsi.



F proporzionali

g 22. del 5.

h Coroll. alla 4. del 5.

K 22. del 5.

l 4. del 6.

m 1. definit. del 6.

n 9. definit. del 11.

o 8. del 12.

p 11. del 5.

q 8. del 12.

r 11. del 5.

t 12. del 5.

u 8. del 12.

x 11. del 5.

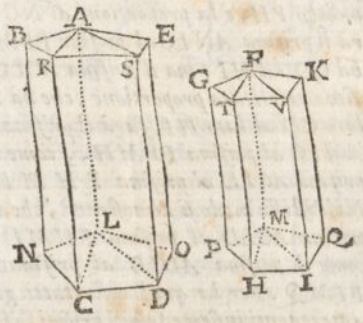
COROL-

COROLLARIO.

Appare da quel che si è detto, che le piramidi simili, di basi poligone, si diuidono in piramidi simili, di numero vguale.

SCOLIO.

Nell'istesso modo si proua, che i prismi simili, di basi poligone, hanno triplicata proportione de i loro lati homologhi.



Siano i simili prismi ABCDE, FGHIK, di basi poligone. Dico che il prisma ABCDE al prisma FGHIK hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ. Perche i prismi sono frà loro simili, perciò i piani, che contengono vno di essi, a *sono simili à i corrispondenti piani, che contengono l'altro; per il che le basi NCDOL, PHIQM, BRSEA, GTVKF, sono frà loro simili. Si diuidano queste basi colle rette LC, LD, MH, MI, AR, AS, FT, FV, in triangoli di numero vguale, saranno i triangoli nelle basi NO, BE,* b *simili à i corrispondenti triangoli, che sono nelle basi PQ, GK; ed i triangoli, che sono nelle basi BE, GK, saranno simili à i corrispondenti triangoli delle basi NO, PQ, e sarà l'angolo NCL* c *vguale all'angolo PHM, e l'angolo LCD vguale all'angolo MHI; ed oltre à ciò la proportione di NC à CL sarà come quella di PH ad HM. In oltre perche i piani CB, CS, sono simili à i corrispondenti piani HG, HV, sarà l'angolo RCN* d *vguale all'angolo THP, e l'angolo RCD vguale all'angolo THI: ma per la similitudine de' poligoni NCDO, PHIQ, gli angoli NCD, PHI, sono frà loro vguali, per lo Scolio alla 35. propositione del 11. sarà l'angolo RCL vguale all'angolo THM. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo CRA è vguale all'angolo HTF. E perche le rette RC, AL, come lati de i parallelogrammi CB, BL, sono vguali, e parallele al lato NB: sarà RC vguale, e parallela ad AL; dal che le due AR, LC, sono* f *vguali, e parallele, ed il quadrilatero ARCL* g *è parallelogrammo. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrilatero FTHM è parallelogrammo. Di più, perche i piani CB, HG, sono frà loro simili, sarà RC à CN* h *come TH ad HP: ma NC à CL è come PH ad HM, per l'egualità, sarà RC à CL,* K *come TH ad HM; l'angolo RCL fù dimostrato vguale all'angolo THM, in conseguenza il parallelogrammo ARCL* l *sarà simile al parallelogrammo FTHM. E perche i tre lati AB, BR, RA, sono vguali à i tre lati LN, NC, CL, i triangoli ABR, LNC,* m *sono frà loro vguali, furono dimostrati simi-*

a 9. defin. del 11.

b 20. del 6.

c 1. defin. del 6.

d 1. defin. del 6.

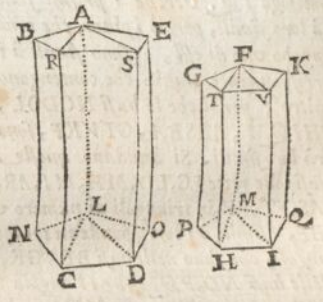
e 34. del 1.

f 33. del 1.
g 35. defin. del 1.

h 1. defin. del 6.

K 22. del 5.
l 1. defin. del 6.
m 8. e 4. del 1.

li, in conſeguenza ſono ſimili, ed vguali, e ſono ancora paralleli, ſtante che
n 13. defin. del 11. *i piani BE, NO, ſono paralleli; per la qual coſa il ſolido ABRCNL* n *è priſma. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il ſolido FGTHPM è priſma, e che tutti gli altri ACDL, ADLO, FHIM, FIQM, ſono priſmi. E perche i triangoli ABR, LNC, ſono ſimili à i triangoli FGT, MPH, ed i parallelogrammi AB NL, BNCR, ARCL, ſono ſimili à i corriſpondenti parallelogrammi FGPM,*
o 9. defin. del 11. *GPHT, FTHM; ſarà il priſma ABRCNL* o *ſimile al priſma FGTHPM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il priſma ACDL è ſimile al priſma FHIM ed il priſma ADLO è ſimile al priſma FIMQ. Di nuouo perche le baſi NO,*
p 1. defin. del 6. *PQ ſono ſimili; ſarà NC à CD* p *come PH ad HI; e permutando, NC à*
q 16. del 5. *PH* q *ſarà come CD ad HI; Similmente CD à DO ſarà come HI ad IQ; e*
r 16. del 5. *permutando, CD ad HI* r *ſarà come DO ad IQ. Finalmente perche il priſma di baſe triangolare ANLC al ſimile priſma FPMH, per lo Scolio alla 33. propoſitione dell'11. hà triplicata proportione, che il lato homologo NC al lato homologo PH, e la proportione di NC à PH è come quella di CD ad HI, hauerà il priſma ANLC al priſma FPMH* s *triplicata proportione di quella, che hà CD ad HI: ma il priſma ACLD al ſimile priſma FHIM* u *hà la mede-*
s 11. del 5. u Scol. alla 33. del 11. *ſima triplicata proportione, che hà il lato CD al lato HI, ſarà il priſma ANLC al priſma FPMH,* x *come il priſma ACLD al priſma FHMI. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il priſma ACLD al priſma FHMI è come il priſma ADLO al priſma FIMQ. Per la qual coſa tutti gli antecedenti inſieme, cioè i priſmi, che compongono tutto il priſma ABCDE, à tutti i conſeguenti inſieme, che ſono i priſmi, che compongono tutto il priſma*
x 12. del 5. *FGHIK,* y *ſaranno come vn' antecedente ad vn conſeguente, cioè come*
y 12. del 5. *il priſma ADLO al priſma FIMQ. Ma il priſma ADLO al priſma FIMQ* z
z Scol. alla 33. del 11. *hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ, hauerà tutto il priſma ABCDE à tutto il priſma FGHIK, &*
& 11. del 5. *triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ, che era da dimoſtrarſi.*



COROLLARIO.

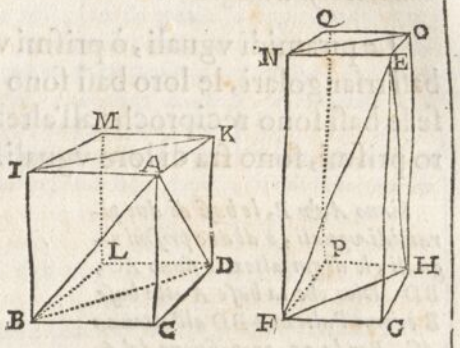
Appare da quel che ſi è dimoſtrato, che i ſimili priſmi di baſi poligone, ſi diuidono in ſimili priſmi di numero vguale.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le vguali piramidi di baſi triangolari hanno le baſi re-

cipro-

ciproche alle altezze; e quelle piramidi di basi triangolari, delle quali le basi sono reciproche alle altezze, sono frà di loro vguali.



Siano le vguali piramidi, di basi triangolari, ABCD, EFGH. Dico che la proportione della base BCD alla base FGH, è come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Co' i lati AC, CB, si faccia il parallelogrammo CI, co'i lati AC, CD, si faccia il parallelogrammo CK, e co' i lati BC, CD, si faccia il parallelogrammo CL; e si compisca il parallelepipedo CM. Nell'istesso modo si compisca il parallelepipedo GQ; si tirino le rette IK, NO; ed haueremo ciascuno de i parallelepipedi CM, GQ, [a] diuiso in due prismi di basi triangolari, i quali hanno le medesime altezze delle proposte piramidi. E perche la piramide ABCD, per ipotesi, è vguale alla piramide EFGH, i loro tripli, [b] cioè i prismi IBCDKA, NFGHOE, sono frà di loro vguali; & i doppij di questi prismi, cioè i parallelepipepi CM, GQ, [c] saranno frà di loro vguali: per la qual cosa la base BCDL alla base FGHP [d] sarà come l'altezza del parallelepipedo GQ all'altezza del parallelepipedo CM: Ma la base BCDL alla base FGHP [e] è come il triangolo BCD al triangolo FGH, e l'altezze de i parallelepipedi, e delle piramidi sono le medesime; sarà dunque il triangolo BCD, ch'è base della piramide ABCD, al triangolo FGH, ch'è base della piramide EFGH, [f] come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 28. del 11.
b 7. del 12.
c 28. del 11.
d 34. del 11.
e 15. del 5.
f 11. del 5.

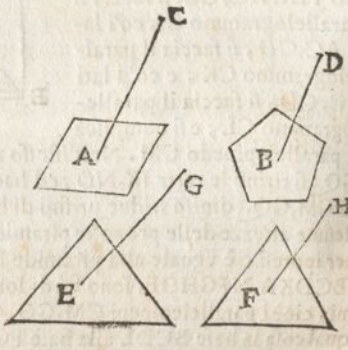
Di nuouo, supposto che la base BCD alla base FGH sia, come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Dico che le piramidi ABCD, EFGH, sono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medesima costruttione. Perche il triangolo BCD al triangolo FGH [g] è come il parallelogrammo CL al parallelogrammo GP, e per ipotesi, il triangolo BCD al triangolo FGH è come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, sarà il parallelogrammo CL al parallelogrammo GP, come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, cioè come l'altezza del parallelepipedo GQ all'altezza del parallelepipedo CM; per la qual cosa i parallelepipedi GQ, CM, [h] sono frà di loro vguali, e le loro metà, cioè i prismi IBCDKA, NFGHOE, [K] sono frà di loro vguali. E perche le piramidi [l] sono le terze parti de i prismi, essendo i prismi frà di loro vguali, le loro terze parti, cioè le piramidi ABCD, EFGH, sono frà di loro vguali, che era da dimostrarsi.

g 15. del 5.
h 34. del 11.
K 28. del 11.
l 7. del 12.

SCOLIO.

Il medesimo si dimostra nelle piramidi, è ne i prismi, che non hanno le basi triangolari.

Le piramidi vguali, ò prismi vguali, che non hanno le basi triangolari, le loro basi sono reciproche all'altezze; e se le basi sono reciproche all'altezze, quelle piramidi, ouero prismi, sono frà di loro vguali.



Siano A, & B, le basi di due piramidi vguali, ò di due prismi vguali, le di cui altezze siano AC, BD. Dico che la base A alla base B è come l'altezza BD all'altezza AC. Per la 25. propositione del 6. si faccia il triangolo E vguale alla base A, e si faccia il triangolo F vguale alla base B. Se i piani A, & B, sono basi di due piramidi, sopra la base E, si erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide AC; e sopra la base F si erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide BD; e se i piani A, & B, sono basi di due prisma, s'intenda eretto sopra la base E vn prisma, che habbia l'altezza AC, e sopra la base F s'intenda eretto vn prisma, che habbia l'altezza BD, in modo, che i piani verticali siano triangoli simili, vguali, e paralleli alle basi E, ed F. Perche le piramidi, ò prismi eretti alle basi A, ed E, hanno la medesima altezza, la loro proportione sarà [a] *come quella delle basi: ma le basi A, ed E, per costruttione, sono frà loro vguali, perciò le piramidi, ouero i prismi eretti sopra le basi A, ed E, saranno frà loro vguali. Nell'istesso modo si proverà, che le piramidi, ò prismi eretti sopra le basi B, ed F, sono frà di loro vguali. Se dunque le piramidi, ò prismi eretti alle basi A, & B, sono frà loro vguali, le piramidi ancora, ò prismi eretti sopra le basi E, ed F sono frà loro vguali: ma le piramidi vguali, e prismi vguali eretti sopra i triangoli E, ed F,* [b] *hanno le basi reciproche all'altezze, sarà la base E alla base F, come l'altezza FH all'altezza EG. Ma le basi E, ed F sono vguali alle basi A, & B, e l'altezze EG, FH, per costruttione, sono vguali all'altezze AC, BD: sarà la base A alla base B, come l'altezza BD all'altezza AC, che era da dimostrarsi nel primo luogo.*

a 32. del 11. e 1mo Scol.

b 6. del 12. & Scol. alla 34. del 11.

Di nuouo, supposto che la base A alla base B sia come l'altezza BD all'altezza AC. Dico che le piramidi, ouero prismi eretti sopra le basi A, & B, sono frà di loro vguali; cioè le piramidi vguali frà loro, ed i prismi vguali frà loro. S'intenda fatta la medesima costruttione di prima; e si dimostri, come so-

pra

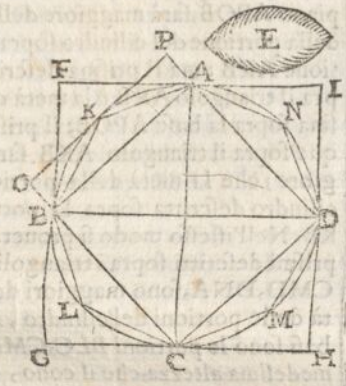
pra si fece, che le piramidi erette alle basi E, F, sono vguali alle piramidi erette alle basi A, & B, e che i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti alle basi A, & B. Perche la base A alla base B, per ipotesi, è come l'altezza BD all'altezza AC, essendo le basi A, & B, vguali alle basi E, ed F, e l'altezze AC, BD, vguali all'altezze EG, FH, sarà la base E alla base F, come l'altezza FH all'altezza EG : per la qual cosa le piramidi erette alle basi triangolari E, ed F, come ancora i prismi eretti alle basi triangolari E, ed F, c sono frà loro vguali. Ma le piramidi erette sopra le basi E, ed F, furono dimostrate vguali alle piramidi erette sopra le basi A, & B, ed i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti sopra le basi A, & B, essendo le piramidi, ò prismi eretti sopra le basi E, ed F, frà di loro vguali, saranno le piramidi, ouero i prismi eretti sopra le basi A, & B, frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 9. del 12. & Scol. alla 34. del 12.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che hà la medesima base, e la medesima altezza,

Habbia il cono, e cilindro, vna medesima altezza, è la commune base sia il circolo ABCD. Dico che il cono è la terza parte del cilindro. Se il cono non è la terza parte del cilindro, ne meno il cilindro sarà il triplo del cono, ma sarà ò maggiore, ò minore del triplo del cono. *Sia prima il cilindro maggiore, che il triplo del cono per quanto è il solido E, sarà il triplo del cono, col solido E, vguale al cilindro.* Si descriua [a] nel proposto circolo il quadrato ABCD, ed intorno al medesimo circolo si circoscriua [b] il quadrato FGHI, e per lo Scolio alla 9. propositione del quarto, il quadrato ABCD sarà la metà del quadrato circoscritto FGHI, e presi poi i quadrati ABCD, FGHI, come basi di due parallelepipedi, sopra i quali si concepiscano descritti due parallelepipedi, che habbiano la medesim'altezza, quale hà il cono, e cilindro proposto. Perche i parallelepipedi, che hanno la medesim' altezza [c] sono come le basi, però il parallelepipedo, la di cui base è il quadrato ABCD, al parallelepipedo, la di cui base è il quadrato FGHI, sarà come la base ABCD alla base FGHI: ma il quadrato ABCD è la metà del quadrato FGHI, il parallelepipedo dunque descritto sopra il quadrato ABCD, sarà la metà del parallelepipedo descritto sopra il quadrato FGHI. Hor perche il parallelepipedo sopra la base FGHI è maggiore del cilindro, che hà per base il circolo ABCD (stante che lo contiene) però la metà del paral-



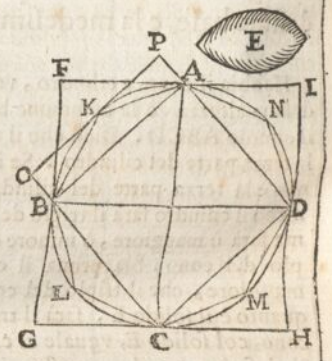
a 6. del 4.

b 7. del 4.

c 32. del 11.

lelepi-

lepipedo ſopra la baſe FGHI, ſarà maggiore, che la metà del cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD; ma il parallelepipedo ſopra la baſe ABCD è la metà del parallelepipedo ſopra la baſe FGHI, il parallelepipedo dũque ſopra il quadrato ABCD ſarà maggiore della metà del cilindro, che ha per baſe il circolo ABCD. Si ſeghino [d] gli archi AB, BC, CD, DA, in due parti vguali, ne i punti K, L, M, N, e ſi tirino le rette AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, AN; E per il punto K ſi faccia paſſare [e] la retta OP in modo, che tocchi il circolo nel punto K, e continuata concorra co' i lati DA, CB, prolongati, come in O, & P, e ſi dimoſtri, come ſi fece nella 2. prop. di queſto, che OP è parallela ad AB. Sopra il triangolo AKB, e ſopra il rettangolo APOB, ſi concepiſcano deſcritti due priſmi, che ambidue habbiano l'iſteſſa altezza del cono, e cilindro propoſto. Perche il triangolo AKB è la metà del rettangolo APOB, il priſma, la di cui baſe è il triangolo AKB, ſarà la metà del priſma deſcritto ſopra la baſe A P O B (ſtante che i priſmi d'vguale altezza ſono [f] come le baſi.) E perche il piano APOB contiene la portione AKB del circolo, perciò il priſma, deſcritto ſopra il piano APOB, ſarà maggiore della portione del cilindro deſcritto ſopra la portione AKB; per la qual coſa la metà del priſma, deſcritto ſopra il piano APOB, ſarà maggiore della metà della portione del cilindro ſopra la portione AKB: ma il priſma deſcritto ſopra il triangolo AKB è la metà del priſma ſopra la baſe APOB; il priſma dũque ſopra il triangolo AKB ſarà maggiore; che la metà della portione del cilindro deſcritta ſopra la portione AKB. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che i priſmi deſcritti ſopra i triangoli BLC, CMD, DNA, ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro, le di cui baſi ſono le portioni BLC, CMD, DNA, del circolo, le quali hanno la medeſima altezza, che il cono, e cilindro propoſto; e per conſeguenza tutt' i priſmi, deſcritti ſopra i detti triangoli, inſieme giunti, ſono maggiori della metà di tutte le portioni del cilindro, deſcritte ſopra le dette portioni del circolo. Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC &c. ſaranno diuiſi [g] in due parti vguali, e da i punti A, K, B, L, C &c. alle diuiſioni, ſiano tirate rette linee, e ſopra i triangoli coſtrutti ſi concepiſcano priſmi vgualmente alti col cono, e cilindro propoſto, ſi moſtrerà, come prima ſi fece, che tutti quei priſma di baſi triangolari, giunti inſieme, ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro propoſto, le quali hanno per baſi le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA del circolo. E con queſt' ordine ſi proceda in infinito. Se dunque dal cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD ſe ne leua più della metà; cioè ſe ne leui il parallelepipedo, deſcritto ſopra del quadrato ABCD; e dalle portioni, che reſtano del cilindro (le quali hanno per baſe le portioni AKB, BLC, CMD, DNA)



ſe

[d] 30. del 3.

[e] Corol. alla 17. del 3.

[f] Scolio alla 32. del 11.

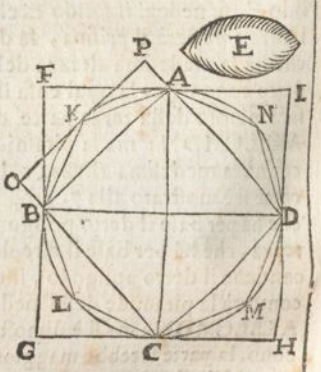
[g] 30. del 3.

se ne leui vna quantità, che sia più della metà, cioè se ne leuino i prismi descritti sopra i triangoli AKB, BLC, CMD, DNA; E similmente dalle portioni del cilindro, che restano, se ne leui più della metà, nel modo, che antecedentemente si è fatto; e con quest'ordine si proseguisca, sempre leuando dalle portioni restate più della metà; si peruenirà finalmente a tal diminutione, che l'vltime portioni [h] del cilindro restate, giunte insieme, saranno minori del solido E. Supposto che sia fatta questa continua detrattione, e le vltime portioni restate del cilindro siano quelle descritte sopra le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, le quali, giunte insieme, siano minori del solido E. Perche il triplo del cono, che hà per base il circolo ABCD, col solido E, insieme giunti, sono vguali al cilindro, che hà per base il medesimo circolo ABCD; se da questo cilindro si leuino le antedette portioni restate, e dal triplo del cono, col solido E, se ne leui il solido E, ch'è maggiore delle portioni detratte dal cilindro; resterà il prisma, la di cui base è il poligono AKBLCMDN, e che hà la medesima altezza del cono, è cilindro, maggiore del triplo del detto cono. Per la qual cosa il cono, la di cui base è il circolo ABCD, sarà minore della terza parte del prisma, che hà per base il poligono AKBLCMDN: ma la piramide descritta sopra il medesimo poligono, che hà la medesima altezza col prisma, è la terza parte di esso prisma, come si è mostrato alla 7. propositione, e suo Scolio; la piramide dunque, che hà per base il detto poligono, sarà maggiore del cono di vguale altezza, che hà per base il circolo ABCD. Hor perche il circolo ABCD contiene il detto poligono, il cono, che hà per base il circolo ABCD, conterrà la piramide della medesima altezza, che hà per base il poligono AKBLCMDN: ma si è dimostrato, che questa piramide è maggiore del cono, *la parte sarebbe maggiore del tutto*, ch'è impossibile. Non dunque il cilindro è *maggiore, che il triplo* del cono.

[h] 1. del 10.

Supposto di nouo, *che il cilindro sia minore, che il triplo* del cono, sarà dunque il cono maggiore *della terza parte del cilindro*. *Hor sia il* cono maggiore della terza parte del cilindro, per quanto è *il solido E*; sarà la terza parte del cilindro, col solido E, vguale al cono. Siano descritti i quadrati ABCD, FGHI, come prima, e sopra di essi siano descritte due piramidi, che habbiano la medesima altezza, che il cono, e cilindro. Perche le piramidi, che hanno la medesima altezza, per la 6. propositione, sono come le basi; essendo il quadrato ABCD la metà del quadrato FGHI, la piramide sopra la base ABCD, sarà la metà della piramide sopra la base FGHI. In oltre perche il quadrato FGHI contiene il circolo ABCD, però la piramide sopra il quadrato FGHI sarà maggiore, che il cono, che hà per base il circolo ABCD; e la metà della piramide sopra la base FGHI, sarà maggiore della metà del detto cono: ma la piramide, che hà per base il quadrato ABCD, è la metà della piramide sopra del quadrato FGHI, sarà la piramide, che hà per base il quadrato ABCD, maggiore, che la metà del cono sopra del circolo ABCD. Si diuidano gli archi AB, BC, CD, DA, e si faccia tutta la costruttione di prima: poi sopra *il* triangolo AKB, e sopra il rettangolo APOB, s'intendano erette due piramidi, che habbiano la medesima altezza, che il

cono, e cilindro proposto, cioè che il detto cono, e questa piramide habbiano vn medesimo vertice. Perche le piramidi, che hanno la medesima altezza, per la propos. 6. sono come le basi, essendo il triangolo AKB la metà del rettangolo APOB, sarà la piramide sopra il triangolo AKB la metà della piramide sopra il rettangolo ABOP. Hor perche il rettangolo ABOP è maggiore della portione AKB del circolo; la piramide sopra il rettangolo APOB, che hà la medesima altezza del cono, sarà maggiore della portione del cono, che hà per base la portione AKB del circolo; e la metà della piramide sopra APOB, sarà maggiore, che la metà della parte del cono sopra la portione AKB del circolo. Ma la piramide sopra AKB è vguale alla metà della piramide sopra APOB; la piramide dunque sopra AKB sarà maggiore, che la metà della parte del cono sopra la portione AKB del circolo. Nell' istesso modo si dimostrerà, che l'altre piramidi sopra i triangoli BLC, CMD, DNA, sono maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per basi le portioni BLC, CMD, DNA, del circolo; e saranno tutte le dette piramidi di basi triangolari insieme, maggiori delle metà delle parti antedette del cono, insieme giunte. Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, si diuidano in due parti vguali, e da i punti A, K, B, L, C, M, D, N, alle diuisioni, si tirino rette linee, le piramidi descritte sopra i triangoli costrutti, le quali habbiano la medesima altezza col cono, insieme giunte, si mostreranno maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per base le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, insieme giunte. E con quest'ordine si procederà in infinito. Se dunque dal cono, che hà per base il circolo ABCD, se ne leua vna quantità maggiore della metà, cioè se ne leui la piramide descritta sopra il quadrato ABCD; e dalle parti restate del cono, cioè quelle, che hanno per base le portioni AKB, BLC, CMD, DNA, del circolo, se ne leui vna quantità maggiore della metà, cioè se ne leuino le piramidi, che hanno per base i triangoli AKB, BLC, CMD, DNA; e di nuouo dalle parti restate del cono, se ne leui vna quantità maggiore della metà, e con quest'ordine, facendo sempre la detrattione dalle parti restate, per vna quantità maggiore della metà, finalmente K resteranno tali portioni di Cono, che insieme giunte, saranno minori del solido E. Supposto, che sia fatta la continua detrattione, e le parti restate del cono siano quelle, che hanno per base le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, del circolo, le quali, giunte insieme, siano minori del solido E. Hor perche la terza parte del Cilindro, insieme col solido E, è posta vguale al cono, che hà per base il circolo ABCD, se dal cono se ne leuano le dette parti restate; e dalla terza parte del cilindro,



K 1. del 10.

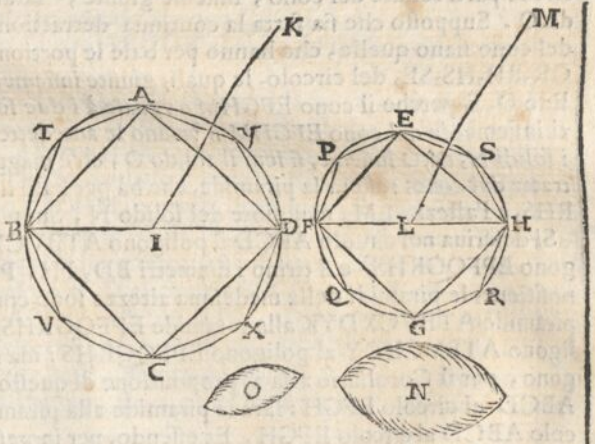
col

col ſolido E, ſe ne leua il ſolido E, ch'è maggiore delle dette parti detratte dal cono; reſterà la piramide, la di cui baſe è il poligono AKBLC MDN, che hà la medeſima altezza, che il cilindro, maggiore della terza parte del cilindro, per la qual coſa il triplo di queſta piramide ſarà maggiore di tutto il cilindro. È perche il triplo della piramide, per la 7. propoſ. e ſuo Scolio, è vguale al priſma, che hà la medeſima baſe, ed altezza con eſſa piramide; però il priſma, deſcritto ſopra del poligono AKBLC MDN, ſarà maggiore, che il cilindro, la di cui baſe è il circolo ABCD, ed hà la medeſima altezza col detto priſma. Ma il poligono, che è baſe del detto priſma, è contenuto dal circolo ABCD, ch'è baſe del cilindro, però il priſma, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN, ſarà contenuto dal cilindro della medeſima altezza, che hà per baſe il circolo ABCD: per la qual coſa il detto priſma ſarà minore del cilindro: ma è ſtato moſtrato maggiore, ſarebbe maggiore, e minore, ch'è impoſſibile. Non dunque il Cilindro è maggiore, che il triplo del cono, ne meno, per quel che ſi è moſtrato, è minore, e perciò il cilindro, che hà per baſe il circolo ABCD, ſarà il triplo del cono della medeſima altezza, e che hà per baſe il medeſimo circolo ABCD. Per la qual coſa il detto cono ſarà la terza parte del cilindro, della medeſima altezza, e baſe, ch'era da dimoſtrarſi.

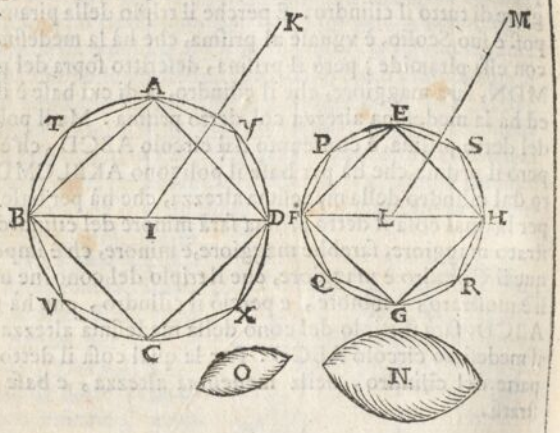
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

I Coni, e Cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono frà loro come le baſi.

Siano eſpoſti i coni, e Cilindri, le di cui baſi ſiano i circoli ABCD, EFGH, e l'altezze vguali IK, LM. Dico che la baſe ABCD alla baſe EFGH è come il cono al cono; ed ancora come il cilindro al cilindro; cioè che la baſe ABCD alla baſe EFGH, è come il cono, ò cilindro KBCDA, ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE. Se la baſe ABCD alla baſe EFGH non è come il cono, ò cilindro KBCDA ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE, ſia la baſe ABCD alla baſe EFGH,



come il cono KBCDA alla quantità N, sarà il solido N, ò maggiore, ò minore del cono MFGHE. Suppoſto prima, che il solido N ſia minore del cono MFGHE, per quanto è il ſolido O, in modo, che i due ſolidi N, ed O, inſieme giunti, ſiano vguali al cono EFGHM. Nel circolo EFGH ſi deſcriua [a] il quadrato EFGH; ſi diuidano gli archi EF, FG, GH, HE, [b] in due parti vguali ne i punti P, Q, R, S; ſi tirino le rette EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE; e ſi dimoſtri, come



a 6. del 4.

b 30. del 3.

ſi fece nella ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, che ſe dal cono EFGHM ſe ne detrae la piramide, che hà per baſe il quadrato EFGH, e l'altezza LM, e dalle parti reſtate del cono, ſe ne detraggono le piramidi, che hanno per baſe i triangoli EPF, FQG, GRH, HSE, e l'altezza ML: e dall'altre parti reſtate dal cono ſe ne detrae ſimilmente più della metà, e con queſt'ordine in infinito, finalmente ſi peruerrà à tanta diminutione, che le parti reſtate del cono, inſieme giunte, [c] ſaranno minori del ſolido O. Suppoſto che ſia fatta la continua detrattione, e le parti reſtate del cono ſiano quelle, che hanno per baſe le portioni EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, del circolo, le quali, giunte inſieme, ſono minori del ſolido O. E perche il cono EFGHM è vguale à i due ſolidi N, ed O, giunti inſieme, ſe dal cono EFGHM ſi leuano le antedette parti, reſtate, e da i ſolidi N, ed O inſieme, ſi leui il ſolido O, ch'è maggiore delle parti detratte dal cono, reſterà la piramide, che hà per baſe il poligono EPFQGRHS, e l'altezza LM, maggiore del ſolido N. Suppoſto queſto.

c 1. del 10.

Si deſcriua nel circolo ABCD il poligono ATBVCXDY ſimile al poligono EPFQGRHS, e ſi tirino i diametri BD, FH. Perche per la 6. propoſitione, le piramidi della medeſima altezza ſono come le baſi, però la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il poligono ATBVCXDY al poligono EPFQGRHS: ma il poligono al poligono, per il Corollario alla 2. propoſitione di queſto, è come il circolo ABCD al circolo EFGH; ſarà la piramide alla piramide, come [d] il circolo ABCD al circolo EFGH. Et eſſendo, per ipoteſi, il circolo ABCD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al ſolido N; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il cono ABCDK al ſolido N; e permutando, la piramide ATBVCXDYK al co-

d 11. del 5.

no

ABCDK, e sarà come la piramide EPFQGRHSM al solido N : ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK (stante che è contenuta da esso cono nell'istesso modo, che il poligono è contenuto dal circolo,) però sarà f minore del solido N : la piramide EPFQGRHSM fù antecedentemente mostrata maggiore, sarà la piramide EPFQGRHSM maggiore, è minore del solido N, ch'è impossibile. Non dunque il solido N è minore del cono EFGHM; onde è impossibile, che il circolo ABCD al circolo EFGH sia come il cono ABCDK ad vna quantità minore dell' cono EFGHM. Nell'istesso modo si mostrerà essere impossibile, che il circolo EFGH al circolo ABCD sia come il cono EFGHM ad vn altra quantità minore del cono ABCDK.

e 16. del 5.

f 14. del 5.

* la piramide EPFQGRHSM

Sia di nuouo il solido N maggiore del cono EFGHM. S'intenda come il solido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn altra quantità, che sia il solido O; e permutando, il solido N al cono MFGHE g sarà come il cono KBCDA al solido O: ma il solido N è posto maggiore del cono MFGHE, sarà il cono KBCDA h maggiore del solido O; cioè il solido O sarà minore del cono KBCDA. In oltre perche il circolo ABCD al circolo EFGH, per ipotesi, è come il cono ABCDK al solido N, inuertendo, il circolo EFGH al circolo ABCD K sarà come il solido N al cono ABCDK: ma, per costruttione, il solido N al cono ABCDK è come il cono EFGHM al solido O, sarà il circolo EFGH al circolo ABCD, l come il cono EFGHM al solido O: ma il solido O è dimostrato minore del cono ABCDK; il circolo dunque EFGH al circolo ABCD, sarà come il cono EFGHM ad vna quantità minore del cono ABCDK, che è contro quello, che si è concluso nella prima parte. Non dunque il solido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno, per quel che si è mostrato, è minore; sarà dunque il solido N vguale al cono EFGHM. Ed essendo il circolo ABCD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al solido N, & il solido N è mostrato vguale al cono EFGH; sarà il circolo ABCD al circolo EFGH come il cono ABCDK al cono EFGHM, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

g 16. del 5.

h 14. del 5.

K Corol. alla 4. del 5.

l 11. del 5.

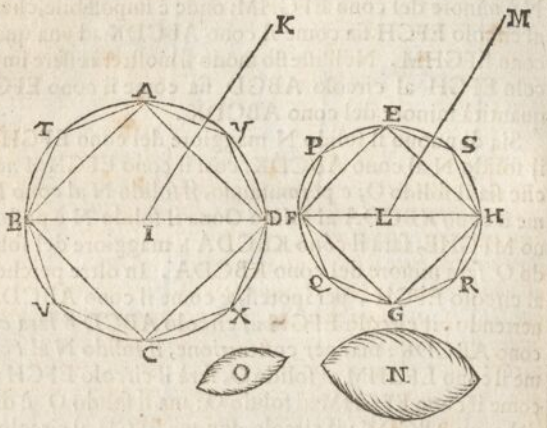
Perche per l'antecedente propos. il cono è la terza parte del cilindro, che hà la medesima altezza, e base, ne segue il cilindro, che hà per base il circolo ABCD, e l'altezza IK, essere multiplice del cono ABCDK, come il cilindro, che hà per base il circolo EFGH, e l'altezza LM, è multiplice del cono EFGHM; e perciò il cilindro, la di cui base è ABCD, al cilindro, la di cui base è EFGH, m sarà come il cono ABCDK al cono EFGHM: ma si è dimostrato, che il cono ABCDK al cono EFGHM è come il circolo ABCD al circolo EFGH; sarà il cilindro, che hà per base il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, e l'altezza LM, come il circolo ABCD al circolo EFGH; cioè come la base alla base. Per la qual cosa i coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le loro basi, ch'era da dimostrarsi.

m 15. del 5.

COROLLARIO.

Perche il cono KABCD al cono MEFGH è come il circolo ABCD al circolo EFGH, ed il cilindro. la di cui base è il circolo ABCD, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, è parimente come il circolo ABCD al circolo EFGH; sarà il cono ABCDK al cono EFGHM, come[n] il cilindro, la di cui base è il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, e l'altezza LM. D'onde è manifesto, che i cilindri, i quali hanno le medesime basi, che i coni, e le medesime altezze, sono frà di loro come i coni.

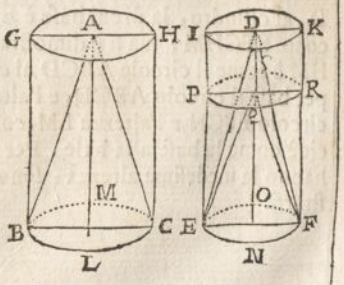
n 11. del 5.



SCOLIO DEL CLAVIO.

I coni, e cilindri, che sono come le basi, hanno vna medesima altezza.

Habbia il cono ABC al cono DEF, ouero il cilindro GBCH al cilindro IEFK, l'istessa proportione, che hà la base BLCM alla base ENFO. Dico che i coni ABC, DEF, ouero i cilindri GBCH, IEFK, hanno la medesima altezza. Se non hanno la medesima altezza, vno de i due sarà più alto. Supponiamo, che il più alto sia il cono DEF, ouero il cilindro IEFK. Sia segato il cono DEF, ò cilindro IEFK,



da

* parallelo alla base ENFO

*da qualche piano PQRS*talmente, che l'altezza interposta frà i piani PQRS, ENFO, sia vguale all'altezza del cono ABC, ouero del cilindro GBCH. Si considerino i coni, cioè ABC, ed il cono, la di cui base è il circolo ENFO, ed il vertice nel piano PQRS, i quali hanno le medesime basi, ed altezze co'i cilindri GBCH, PEFR, e per il Coroll. antecedente, il cono ABC al cono interposto frà i piani PR, EF, sarà come il cilindro GBCH al cilindro PEFR: ma il cono ABC al cono interposto frà i piani PR, EF,* [a] *è come la base BLCM alla base ENFO (stante che hanno la medesima altezza) sarà il cilindro GBCH al cilindro PEFR,* [b] *come la base BC alla base EF: ma la base BC alla base EF, per ipotesi, è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK, sarà dunque il cilindro GBCH al cilindro PEFR,* [c] *come il medesimo cilindro GBCH al cilindro IEFK; imperciochè i cilindri PEFR, IEFK,* [d] *sono frà di loro vguali; la parte sarà vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cono DEF è più alto, che il cono ABC, ma hanno la medesima altezza, che era prima da dimostrarsi.*

[a] 11. del 12.
[b] 11. del 5.
[c] 11. del 5.
[d] 9. del 5.

Di nuouo perche i cilindri GBCH, PEFR, hanno per costruttione, la medesima altezza, per la propos. antecedente, il cilindro GBCH al cilindro PEFR sarà come la base BLCM alla base ENFO: ma, per ipotesi, la base BLCM alla base ENFO è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK; il cilindro dunque GBCH al cilindro IEFK [e] *sarà come il medesimo cilindro GBCH al cilindro PEFR; dal che i cilindri PEFR, IEFK* [f] *sono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cilindro IEFK è più alto, che il cilindro GBCH, ma hanno la medesima altezza. Per la qual cosa i coni, e cilindri, che sono come le basi, hanno la medesima altezza, ch'era da dimostrarsi.*

[e] 11. del 5.
[f] 9. del 5.

COROLLARIO.

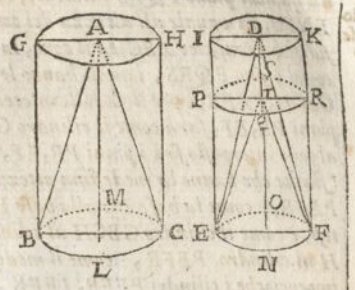
Da qui è manifesto, che i coni, ò cilindri, i quali hanno la medesima altezza, e le basi vguali, sono frà di loro vguali, stante che i coni, ò cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le basi, si che se le basi sono vguali, quei coni, ò cilindri saranno frà di loro vguali.

E ancora manifesto, che gli vguali coni, ò cilindri, che hanno vguali basi, ò la medesima, haueranno vna medesima altezza.

Nell'antecedente figura siano i coni vguali ABC, DEF, ouero i cilindri vguali GBCH, IEFK, che habbiano le vguali basi BC, EF. Dico che hanno la medesima altezza. Se non hanno la medesima altezza, vno sarà più alto dell'altro, supposto che il cono DEF, ouero il cilindro IEFK, sia il più alto. Si faccia passare il piano PR, che seghi il cono, ò cilindro, e sia equidistante alla base EF talmente, che l'altezza interposta frà i piani PQRS, ENFO, sia vguale all'altezza del cono ABC, ò del cilindro GBCH; sopra la base EF si concepisca eleuato il cono TEF, il di cui vertice sia nel piano PQR.

Perche

Perche i coni ABC, TEF, ed i cilindri GBCH, PEFR hanno vna medesima altezza, e per la propositione antecedente, il cono ABC al cono TEF, ed il cilindro GBCH al cilindro PEFR, sarà come la base BC alla base EF: e perche le basi sono frà di loro vguali, perciò il cono ABC sarà vguale al cono TEF, ed il cilindro GBCH vguale al cilindro PEFR: ma per ipotesi, il cono ABC è vguale al cono DEF, ed il cilindro GBCH è vguale al cilindro IEFK, ne segue il cono TEF essere vguale al cono DEF, ed il cilindro PEFR vguale al cilindro IEFK, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cono DEF ò cilindro IEFK, e più alto: ma hanno la medesima altezza.



Di più gli vguali coni, è cilindri, che hanno la medesima altezza, hanno le basi vguali, stante che, per l'antecedente propositione, i coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le basi. Se dunque i coni sono frà di loro vguali, ò i cilindri sono frà di loro vguali, le basi ancora saranno frà di loro vguali.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

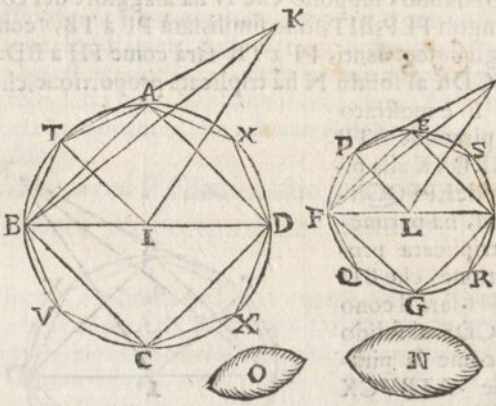
I simili coni, e cilindri hanno triplicata proportione, che i diametri delle loro basi.

Siano le basi de i simili coni, e cilindri, i circoli *ABCD, EFGH*, le assi IK, LM, & i diametri delle basi siano *BD, FH*; e suppostо prima, che li propostі coni, e cilindri siano retti. *Dico*, che il cono al cono, & il cilindro al cilindro, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. Se il cono al cono, & il cilindro al cilindro, non hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, si prenda qualche solido N talmente, che il cono ABCDK al solido N habbia triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH; il solido N ò sarà minore, ò maggiore, ò vguale al cono EFGHM.

Suppostо prima, che il solido N sia minore del cono EFGHM, per quanto è il solido O; sì che i due solidi O, & N, insieme giunti, siano vguali al cono EFGHM. Si faccia la medesima costruttione, e dimostratione, come nell'antecedente propositione, e si dimostri la piramide, la di cui base è il poligono EPFQGRHS, ed il vertice M, essere maggiore del solido N. Si tirino poi le rette BK, TK, PM, FM, i triangoli KTB, MPF, saranno due di quelli, che contengono le piramidi ATBVCXDYK, EPFQOGRHSM; si tirino le rette TI, PL. Perche i coni ABCDK, EFGHM, sono simili, per la 24. definit. dell'11. la proportione dell'asse KI al diametro BD sarà come l'asse ML al diametro FH; e presa la metà de i consequenti, per lo scolio dopo la propos. 22. del quinto, KI ad IB sarà come ML ad LF: ma gli angoli KIB, MLF, sono retti, stante che i coni so-

no sup-

no ſuppoſti retti,ſaranno i triangoli KIB,MLF [a] equiangoli,cioè l'angolo KBI vguale all'angolo MFL, e l'angolo BKI vguale all'angolo LMF; e ſarà KB à BI [b] come MF ad FL. Per l'iſteſſa ragione i triangoli KIT,MLP ſono ſimili, e ſarà KT, à TI come MP à PL. In oltre perche i poligoni ATBVCXDY, EPFQGRHS, per coſtruttione, ſono ſimili, gli archi TB, PF ſaranno frà loro ſimili; e perciò gli angoli TIB, PLF ſono frà loro vguali; dal che i triãgoli iſoſceli ITB,LFP, ſono frà di loro ſimili, e la proportione di IB à BT [c] ſarà come quella di LF ad FP, come ancora IT à TB ſarà come LP à PF. Hor eſſendoſi dimoſtrato, che KB à BI, è come MF ad FL, e la proportione di BI à BT è come quella di FL ad FP, per l'egualità, ſarà KB à BT, [d] come MF ad FP. Similmente eſſendoſi dimoſtrato, che KT à TI è come MP à PL, e la proportione di TI à TB è come quella di PL à PF, per l'egualità, ſarà KT à TB [e] come MP PF; ed inuertendo, BT à TK [f] ſarà come FP à PM. Parimẽte eſſendoſi dimoſtrato KB à BT, come MF ad FP, ed è BT à TK, come FP à PM, per l'egualità, BK à KT [g] ſarà come MF ad FP; dal che i triãgoli KTB, MPF, ſarãno frà loro [h] ſimili. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli altri triãgoli, che circõdano la piramide ATBVCXDYK, ſono ſimili à i corriſpõdenti triãgoli, che circondano la piramide EPFQGRHSM. E perche i poligoni, che ſono baſi di eſſe piramidi, ſono ſimili per coſtruttione, i lati di eſſi poligoni ſaranno di moltitudine vguali; dal che i triangoli ſimili, che circondano le dette piramidi, ſono di numero vguale, e per la 9. definit. dell'11. le piramidi ſaranno frà di loro ſimili; e per l'8. prop. di queſto, ſaranno in triplicata proportione de i loro lati homologhi, cioè la piramide KBIT alla piramide MFLP hà triplicata proportione, che il lato BT al lato homologo EP. Di più perche i triãgoli ITB,LPF, ſono ſimili, ſarà TB à BI [k] come PF ad FL; e permutando, TB à PF [l] ſarà come BI ad FL: ma BI ad FL è come il doppio BD al doppio FH, però TB à PF [m] ſarà come BD ad FH. E perche la piramide alla piramide ſi diſſe hauer [c] triplicata proportione, che TB à PF; e la retta TB à PF è come BD ad FH, hauerà la piramide alla piramide triplicata proportione, che BD ad FH: ma il cono ABCDK al ſolido N ſi diſſe hauere la medeſima proportione triplicata, che hà BD ad FH; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM è come il cono ABCDK [n] al ſolido N: e permutando, la piramide ATBVCXDYK al cono ABCDK [o] ſarà come la piramide EPFQGRHSM



al ſo-

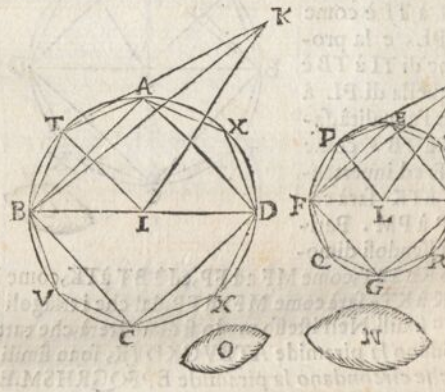
a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 22. del 5.
e 22. del 5.
f Coroll. alla 4. del 5.
g 22. del 5.
h 4 definit. del 6.
k 1. definit. del 6.
l 16. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.

al ſolido N. Ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK (ſtante, che la baſe della piramide è contenuta dalla baſe del cono) ſarà la piramide EPFQGRHSM [p] minore del ſolido N. E perche fù moſtrata maggiore, ſarebbe maggiore, è minore del ſolido N, ch'è impoſſibile. Non dunque il ſolido N è minore del cono EFGHM. Per la qual coſa è impoſſibile, che il cono ABCDK habbia triplicata proportione ad vna quantità minore del cono EFGHM, di quella, che hà BD ad FH. E nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà eſſere impoſſibile, che il cono EFGHM, habbia ad vna quãtità minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà FH à BD.

p. 14. del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che N ſia maggiore del cono EFGHM. Perche i triangoli FLP, BIT, ſono ſimili, ſarà PF à TB, [q] come FL à BI, e duplicando gli conſeguenti, PF a TB ſarà come FH à BD. In oltre, perche il cono ABCDK al ſolido N hà triplicata proportione, che BD ad FH, e per quel che ſi è moſtrato la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, hà parimẽte triplicata proportione, che BD ad FH, ſarà il cono ABCDK al ſolido N come la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM; ed inuertendo, *il ſolido N al cono ABCDK, ſarà come la piramide EPFQGRHSM* alla piramide ATBVCXDYK: ma la piramide EPFQGRHSM alla ſimile piramide ATBVCXDYK, per l'8. propoſitione, hà triplicata proportione, che il lato PF al lato homologo TB, hauerà il ſolido N al cono ABCDK [t] triplicata proportione, che PF à TB: ma PF à TB è dimoſtrata eſſere come FH à BD, ne ſegue la proportione del ſolido N al cono ABCDK eſſere triplicata della proportione, che hà FH à BD. Suppoſto queſto. S'intenda come il ſolido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn'altra quantità, che ſia il ſolido O. Se dunque il ſolido N al cono ABCDK è come il cono EFGHM alla quanrità O, & il ſolido N è poſto maggiore del cono EFGHM, ſarà ancora il cono ABCDK [u] maggiore del ſolido O. Hor eſſendoſi dimoſtrata la proportione del ſolido N al cono ABCDK eſſere triplicata, che la proportione di HF è DB, & il ſolido N al cono ABCDK, per coſtruttione, è come il cono EFGHM al ſolido O; hauerà il cono EFGHM al ſolido O triplicata proportione, che HF à DB: ma il ſolido O è dimo-

q 1. definit. del 6.



t 11. del 5.

u 14. del 5.

ſtrato

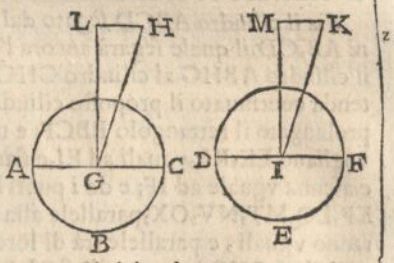
ſtrato minore del cono ABCDK, il cono dunque EFGHM hauerà ad vn ſolido minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà HF à DB; contro à quello, che s'è concluſo nella prima parte. Non dunque il ſolido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno è minore, in conſeguenza il ſolido N ſarà vguale al cono EFGHM.

Finalmente perche il cono ABCDK al ſolido N hà triplicata proportione, che BD ad FH, & il ſolido N è vguale al cono EFGHM, hauerà il cono ABCDK al cono EFGHM triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH.

E perche il cono [x] è la terza parte del cilindro, che hà la medeſima baſe, ed altezza; la proportione dunque del cono al cono ſarà come il cilindro al cilindro: ma ſi è dimoſtrata la proportione del cono al cono eſſere triplicata, che la proportione de i diametri delle baſi; ne ſegue la proportione del cilindro al cilindro eſſere triplicata, che la proportione del diametro della baſe al diametro della baſe. Per la qual coſa i coni, & i cilindri ſimili, ſono in triplicata proportione, che i diametri delle baſi, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. x 10. del 12.

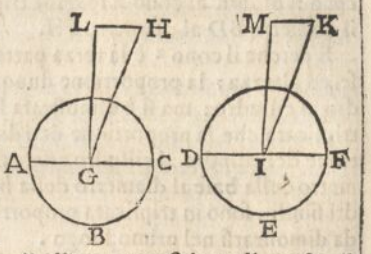
Di nuouo ſi dimoſtrerà col P. Clauio, che i ſimili cilindri ſcaleni, ſono in triplicata proportione de i diametri delle loro baſi.

Siano le baſi de i ſimili coni, e cilindri ſcaleni, i circoli ABC, DEF, e le aſſi ſiano GH, IK. Dico, che il cono ABCH al cono DEFK, & il cilindro al cilindro hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro AC al diametro DF. Si concepiſcano ſopra le medeſime baſi ABC, DEF, due coni, e cilindri retti, i quali habbiano la medeſim'altezza co'coni, e cilindri ſcaleni, le di cui aſſi ſiano GL, IM. Si faccia paſſare vn piano per le rette LG, GH, ed vn'altro per le rette IM, IK, i quali ſeghino le baſi ABC, DEF, per le rette AC, DF; perche i punti G, & I ſono i centri de i circoli, però le rette AC, DF, ſaranno i diametri di eſſi circoli; & eſſendo le aſſi LG, MI perpendicolari à i piani ABC, DEF, i piani, che paſſano per le rette LG, GH, [y] ed MI, IK, ſono retti, cioè perpendicolari alle baſi ABC, DEF; per la qual coſa le perpendicolari, che cadono da i punti H, & K, ſopra le baſi ABC, DEF, [z] caderanno nelle communi ſettioni GC, IF, e gli angoli HGC, KIF, ſaranno le inclinationi, che fanno le aſſi alle baſi ABC, DEF; e per la ſimilitudine de i coni, e cilindri, gli angoli HGC, KIF ſaranno frà di loro vguali. Ma gli angoli CGL, FIM, ſono ancora frà loro vguali, ſtante che ſono retti; i reſtanti angoli dunque HGL, KIM, ſono [a] frà di loro vguali. Si tirino le rette LH, MK. Perche i coni, e cilindri retti, ſi ſono poſti hauere la medeſim'altezza, che i ſcaleni, però le rette LH, MK, ſono parallele à i diametri AC, DF; dal che gli angoli in L, ed M, ſono retti, ed i reſtanti angoli H, & K, ſono frà di y 19. del 11. z 38. del 11. a 32. del 1.



b 32. del 1. c 4. del 6. d 16. del 5. e 1. definit. del 6. f 16. del 5. g 11. del 15. h 16. del 5.

loro vguali. Si che i triangoli GHL,IKM, [b] ſono equiangoli, e la proportione di GH à GL ſarà come [c] quella di IK ad IM; e permutando, GH ad IK,ſarà come [d] GL ad IM. Di nuouo perche i coni,e cilindri ſcaleni ſono ſuppoſti ſimili, la proportione di HG adAC, [e] ſarà come KI à DF;e permutando,HG ad IK ſarà comeAC ad FD: [f] ma GH ad IK è dimoſtrata eſſere come LG ad MI,ſarà dunque LG ad MI [g] come AC à DF; e permutando, LG ad AC [h] ſarà come MI ad FD. Per la qual coſa i coni, e cilindri retti, le di cui baſi ABC, DEF, e le aſſi LG, MI,ſarāno frà loro ſimili,e per quel che ſi è moſtrato nella prima parte, la proportione del cono retto ABCL al cono rettoDEFM,e del cilindro retto al cilindro retto,ſarà triplicata, che la proportione del diametro AC al diametro DF. Hor perche i coni, e cilindri ABCL, ABCH, hanno la medeſim'altezza, e ſono ſopra la medeſima baſe ABC, per il Coroll.all'11.propoſitione di queſto, il cono retto ABCL ſarà vguale al cono ſcaleno ABCH, ed il cilindro ABCL ſarà vguale al cilindro ABCH. E per l'iſteſſa ragione il cono DEFM ſarà vguale al cono DEFK, ed il cilindro DEFM ſarà vguale al cilindro DEFK. Per la qual coſa il cono ABCL al cono DEFM ſarà come il cono ABCH al cono DEFK; ed il cilindro ABCL al cilindro DEFM, ſarà come il cilindro ABCH al cilindro DEFK. Ma ſi è dimoſtrato il cono, ò cilindro ABCL, al cono, ò cilindro DEFM, hauere triplicata proportione di quella,che hà il diametro AC al diametro DF,ne ſegue il cono ABCH al cono DEFK, ed il cilindro ABCH al cilindro DEFK, hauere triplicata proportione,che il diametro AC al diametro DF; e perciò i ſimili coni,e cilindri,ò che ſiano retti, ouero ſcaleni,hanno triplicata proportione, che i diametri delle baſi, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se il cilindro è ſegato da vn piano equidiſtante alle baſi, il cilindro al cilindro ſarà come l'aſſe all'aſſe.

Sia il cilindro ABCD ſegato dal piano GH, parallelo à gli oppoſti piani AB,CD,il quale ſegarà ancora l'aſſe EF in qualche punto I. Dico,che il cilindro ABHG al cilindro GHCD è come l'aſſe EI all'aſſe IF. S'intenda continuato il propoſto cilindro da ambe due le parti, e con eſſo ſia prolungato il rettangolo EBCF; e nell'aſſe EF [a] ſiano preſe quante parti ſi vogliano EK,KL,vguali ad EI,e ſiano ancora preſe le parti FM,MN,NO, ciaſcuna vguale ad IF; e da i punti I, K,L,M, N,O, [b] ſi tirino le rette IH, KP,LQ,MT,NV,OX,parallele alla retta EB,ouero FC,le quali tutte [c] ſaranno vguali, e parallele frà di loro. Si concepiſca poi muouerſi il rettangolo LQXO intorno all'aſſe LO, poſto immobile, il lato QX nella intiera reuolutione, per la definitione 21.dell'11.deſcriuerà le ſuperficie cilindrica,e le rette LQ,KP,IH,MT,NV,OX, per il terzo poſtulato,deſcriueranno i circoli QS, PR, HG,TA, VZ,XY: e per la definit. 21. dell'11. il

a 3. del 1. b 31. del 1. c 34. del 1.

soli-

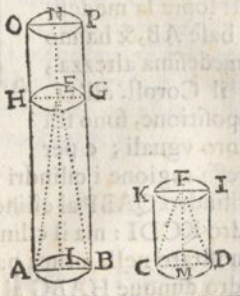
ſolido SQXY ſarà cilindro,e le portioni, SQPR,RPBA,ABHG, GHCD, DCTa, aTVZ, ZVKY, ſono cilindri di baſi vguali, ſtante che i circoli, che hanno i ſemidiametri vguali ſono frà di loro vguali. E perche le parti LK, KE, EI, per coſtruttione, ſono vguali, ed vgualmente inclinate à i circoli SQ, RP, GH, però i cilindri SQPR, RPBA, ABHG, haueranno vguali altezze; hanno, per quel che ſi è detto, baſi vguali, e per il Coroll. alla propoſ. 11. ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i cilindri GHCD, DCTa, aTVZ, ZVXY, ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa la retta LI ſarà multiplice di EI, come il cilindro QHGS è multiplice del cilindro ABHG. E per l'iſteſſa ragione la retta IO ſarà multiplice di IF, come il cilindro GHXY è multiplice del cilindro GHCD. Hor ſe LI è vguale ad IO, i cilindri SQHG, GHXY, haueranno vguali altezze; ſono poſti ſopra vguali baſi, e per il Corollario all'11. propoſitione, ſono frà di loro vguali. Similmente ſe LI è maggiore di IO, il cilindro SQHG ſarà maggiore del cilindro GHXY; e ſe LI è minore di IO, il cilindro SQHG ſarà minore del cilindro GHXY. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia EI, la ſeconda IF, la terza il cilindro ABHG, e la quarta il cilindro GHCD. Perche LI, multiplice della prima, ſe è maggiore di IO, multiplice della ſeconda, ancora il cilindro SQHG, multiplice della terza, è maggiore del cilindro GHXY, multiplice della quarta; e ſe LI è vguale, ò minore di IO, anco il cilindro SQHG ſarà vguale, ò minore del cilindro GHXY: per la 6. defin. del 5. libro, la proportione dell'aſse EI, prima quantità, all'aſse IF, ſeconda quantità, ſarà come il cilindro ABHG, terza quantità, al cilindro GHCD, quarta quantità. Per la qual coſa ſe vn cilindro è ſegato da vn piano, che ſia parallelo alle baſi oppoſte, quello ſarà ſegato in due cilindri, talmente, che il cilindro al cilindro ſarà come l'aſse all'aſse; ch' era da dimoſtrarſi.





THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

I coni, e cilindri poſti ſopra vguali baſi ſono come le loro altezze.



Siano prima ſopra le baſi vguali AB, CD, due coni retti EBA, FDC, e due cilindri retti HABG, KCDI, le di cui aſſi, ò altezze ſiano le rette LE, MF. Dico, che il cono EBA al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza LE all'altezza MF. S'intenda continuato il cilindro HABG verſo HG, e l'aſse LE verſo N; [a] ſi tagli EN vguale ad MF, ed

a 3. del 4.

intorno al centro N s'intenda il circolo OP, equidistante al circolo HG, e per la defin. 21. il solido OHGP è cilindro. Perche i circoli HG, CD sono frà di loro vguali, e le assi NE, FM, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Coroll. alla propositione 11. i cilindri KCDI, OHGP, saranno frà di loro vguali; e perciò il cilindro HABG al cilindro OHGP, sarà

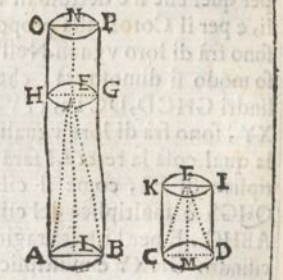
b 7. del 5. come il medesimo cilindro HABG [b] al cilindro KCDI: ma il cilindro HABG al cilindro OHGP, per l'antecedente propositione, è come l'asse LE all'asse EN, sarà

c 11. del 5. il cilindro HABG al cilindro KCDI, [c] come l'asse LE all'asse EN, cioè all'asse MF. Finalmente essendo il cono EAB la terza

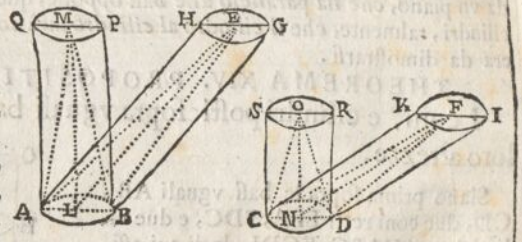
d 10. del 12. parte [d] del cilindro HABG, ed il cono FCD è la terza parte del cilindro KCDI, ne segue il cilindro HABG al cilindro KC

e 15. del 5. DI, essere [e] come il cono EAB al cono FCD: ma si è dimostrato, che il cilindro HABG al cilindro KCDI, è come l'asse EL all'asse FM, il cono dunque EAB, al

f 11. del 5. cono FCD, [f] è come l'asse LE all'asse FM. Per la qual cosa i coni retti, e cilindri retti, che hanno vguali basi, sono come le loro altezze, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Supposto di nuouo, che i coni EAB, FCD; ed i cilindri HABG, KCDI, posti sopra le vguali basi AB, CD, siano scaleni; le di cui altezze siano ML, ON. Dico, che il cono EAB al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza ML all'altezza ON. Sopra le basi AB, CD, siano costrutti i coni retti MAB, OCD, ed i cilindri retti QABP, SCDR, i quali habbiano le medesime altezze ML, ON, e per quel che si è dimostrato nella prima parte, il cono retto MAB al cono retto OCD, come ancora il cilindro retto QABP al cilindro retto SCDR, è come l'altezza ML all'altezza ON. In oltre perche i cilindri QABP, HABG, sono posti sopra la medesima base AB, & hanno la medesima altezza, per il Coroll. all'11. propositione, sono frà di loro vguali; e per l'istessa ragione i cilindri SCDR, KCDI, sono frà di loro vguali; dal che il cilindro QABP al cilindro SCDR, sarà come il cilindro HABG al cilindro KCDI: ma il cilindro QABP al cilindro SCDR, per quel che si è dimostrato nella prima parte, è come l'altezza ML all'altezza ON, il cilindro dunque HABG al cilindro KCDI, sarà come l'altezza ML all'al-



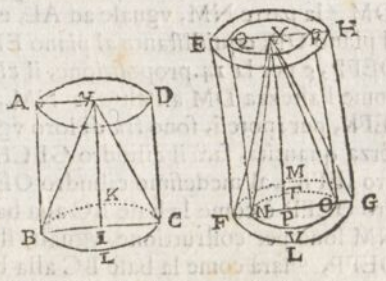
tezza

tezza ON. Di più perche il cilindro HABG, per la 10. propoſit. di queſto, è il triplo del cono EAB, ed il cilindro KCDI è il triplo del cono FCD, ſarà il cilindro HABG al cilindro KCDI, come il cono EAB al cono FCD; ma ſi è dimoſtrato il cilindro HABG al cilindro KCDI, eſſere come l'altezza ML all'altezza ON; ſarà il cono EAB al cono FCD, come l'altezza ML all'altezza ON. Per la qual coſa i coni, e cilindri, che hanno vguali baſi, ſono frà di loro come le altezze, ch'era da dimoſtrarſi. g 15. del 5. h 11. del 5.

SCOLIO.

La conuerſa facilmente la faremo nel ſeguente modo.

I coni, e cilindri, i quali hanno l'iſteſſa proportione, che le loro altezze, ſe non hanno la medeſima baſe, haueranno le baſi vguali.



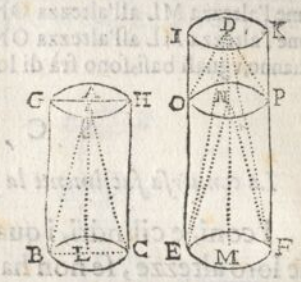
Siano i cilindri ABCD, EFGH, ed i coni TBC, XFG, le di cui altezze ſiano le rette TI, XP, ed habbia il cilindro ABCD al cilindro EFGH, ouero il cono TBC al cono XFG, l'iſteſſa proportione, che le loro altezze. Dico che le baſi BC, FG ſono frà di loro vguali: Se le baſi non ſono frà di loro vguali, vna ſarà maggiore dell'altra: ſuppoſto che la baſe FG ſia maggiore della baſe BC, ſarà dunque il ſemidiametro PG maggiore del ſemidiametro IC. Si tagli PO vguale ad IC; nel piano MFLG, intorno al centro P coll'interuallo PO, ſi deſcriua il circolo NVOT, ſopra la baſe NVOT s'intenda eleuato il cilindro QNOR all'altezza XP, e ſopra la medeſima baſe NVOT, alla medeſima altezza XP, ſia deſcritto il cono XNVOT. Perche i cilindri ABCD, QNOR, ſono ſopra le vguali baſi BC, NO, per l'antecedente propoſitione, il cilindro ABCD al cilindro QNOR ſarà come l'altezza TI all'altezza XP: mà, per ipoteſi, il cilindro ABCD al cilindro EFGH, è come l'altezza TS alla medeſima altezza XP; ſarà dunque il cilindro ABCD al cilindro QNOR a come il medeſimo cilindro ABCD al cilindro EFGH; dal che i cilindri QNOR, EFGH b ſono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque la baſe FG è maggiore della baſe BC, mà ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'eſſendo il cono TBC al cono XFG, come l'altezza TI all'altezza XP, le baſi FG, BC, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi. a 11. del 5. b 9. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Gli vguali coni, e cilindri, hanno le baſi reciproche

alle

alle altezze; e quei coni, e cilindri, che hanno le basi reciproche alle altezze, sono frà di loro vguali.



Siano gli vguali coni ABC, DEF, e gli vguali cilindri GBCH, IEFK, le di cui basi BC, EF, e le altezze AL, DM. Dico che la base BC alla base EF è come l'altezza DM all'altezza AL. Se le altezze AL, DM, sono frà di loro vguali, saranno i cilindri GBCH, IEFK, come le basi: ma
p 11. del 12. i cilindri GBCH, IEFK, [p] per ipotesi, sono frà loro vguali, saranno le basi BC, EF frà di loro vguali; per la qual cosa la base BC alla base EF sarà come l'altezza DM all'altezza AL, che era da prouarsi.

Se le altezze AL, DM, sono ineguali; sia la maggiore DM; si tagli da
a 3. del 1. DM [a] la parte NM, vguale ad AL, e per il punto N si concepisca passare il piano OP, equidistante al piano EF, in modo, che ne risulti il cilindro OEFP, e per la 14. propositione, il cilindro IEFK al cilindro OEFP, sarà come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i cilindri GBCH, IEFK, per ipotesi, sono fra di loro vguali, preso il cilindro OEFP, come terza quantità, sarà il cilindro GBCH al cilindro OEFP; come
b 7. del 5. [b] il cilindro IEFK al medesimo cilindro OEFP; ma il cilindro GBCH al cilin-
c 14. del 12. dro OEFP è come la base BC alla base EF [c] (stante che le altezze AL, NM sono per costruttione, vguali) *il cilindro dunque IEFK al cilindro*
d 11. del 5. OEFP, [d] sarà come la base BC alla base EF: *ma il cilindro IEFK al cilindro* OEFP, è come DM ad NM; *sarà dunque la base BC alla base* EF, [e] come DM ad NM; *la retta NM è vguale ad AL*, sarà la base BC
e 11. del 5. *alla base EF, come l'altezza DM all'altezza* AL; ch'era da dimostrarsi. *Ne i coni, se l'altezza DM è vguale* all'altezza AL, essendo i coni ABC, *DEF, vguali*, per il Corollario all'11. propositione, le basi BC, EF sono frà loro vguali, e però la base BC alla base EF, sarà come l'altezza DM all'altezza AL.

Se l'altezza DM è maggiore dell'altezza AL, si faccia NM vguale ad AL, e si formi il cono ENF, e per la 14. propositione il cono DEF al cono NEF sarà come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i coni ABC, DEF, sono supposti vguali, sarà il cono ABC al cono NEF, come
f 7. del 5. il cono DEF [f] al medesimo cono NEF; ma il cono ABC al cono NEF [g]
g 11. del 12. è come la base BC alla base EF (stante che le altezze NM, AL sono vh 11. del 5. guali) sarà la base BC alla base EF [h] come il cono DEF al cono NEF: E perche si disse che il cono DEF al cono NEF è come DM ad NM, sarà
K 11. del 5. la base BC alla base EF [K] come l'altezza DM all'altezza NM, ouero AL ch'era da dimostrarsi.

Di nuouo sia la base BC alla base EF come l'altezza DM all'altezza AL. Dico che i cilindri IEFK, GBCH sono frà di loro vguali; e *similmente i coni* DEF, ABC, sono frà di loro vguali. Se le altezze AL, DM,

sono

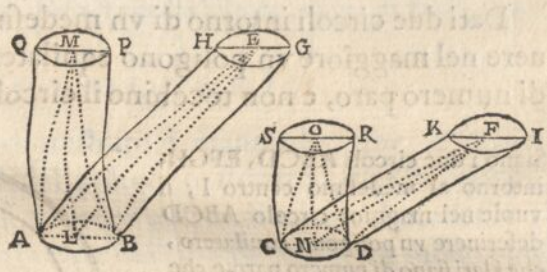
ſono fra di loro vguali, eſsendo BC ad EF, come DM ad AL, e le rette DM, AL, ſono vguali, le baſi ancora BC, EF, [l] ſaranno fra di loro vguali; ſi che i cilindri GBCH, IEFK, hanno le altezze, e baſi vguali, e per il Corollario all'vndecima propoſitione di queſto, i cilindri GBCH, IEFK, ſono fra di loro vguali; e per la medeſima ragione i coni ABC, DEF, ſono fra di loro vguali. Se l'altezza DM è maggiore di AL, ſi faccia la coſtruttione come prima, ſarà NM vguale ad AL: ma i cilindri, che hanno vguali altezze, per l'vndecima propoſitione, ſono come le baſi; ſarà la baſe BC alla baſe EF, come il cilindro GBCH al cilindro OEFP. Suppoſto queſto. Perche per ipoteſi, BC ad EF è come DM ad AL, ed AL, è vguale ad NM, ſarà BC ad EF, come DM ad NM; ma DM ad NM, per la 14. propoſitione, è come il cilindro IEFK al cilindro OEFP, ſarà il cilindro IEFK al cilindro OEFP, [m] come BC ad EF; ſi è moſtrato BC ad EF eſſere come il cilindro GBCH al cilindro OEFP; il cilindro dunque IEFK al cilindro OEFP [n] ſarà come il cilindro GBCH al medeſimo cilindro OEFP. Per la qual coſa i cilindri GBCH, IEFK, ſono frà di loro vguali. Finalmente perche DM è altezza commune del cono DEF, e del cilindro IEFK, ed AL è altezza commune del cono ABC, e del cilindro GBCH, eſſendoſi dimoſtrato che i cilindri GBCH, IEFK, ſono frà di loro vguali, le loro terze parti ſaranno frà di loro vguali: ma i coni, per la 10. propoſitione, ſono la terza parte de i cilindri, ne ſegue i coni ABC, DEF, eſſere frà di loro vguali. Per la qual coſa i coni, e cilindri de'quali le baſi ſono reciproche all'altezze, ſono frà di loro vguali; ch'era da dimoſtrarſi.

l 14. del 5.

m 11. del 5.

n 11. del 5.

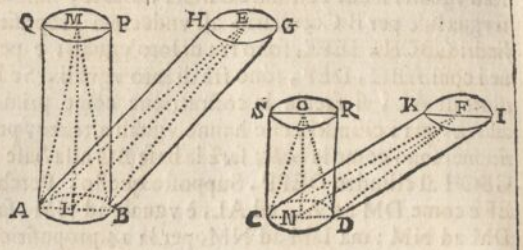
Il medeſimo ſi dimoſtra de i coni, e cilindri ſcaleni, Siano i coni EAB, FCD ed i cilindri HABG, KCDI, le di cui baſi AB, CD, e le altezze ML, ON. Dico prima, che ſe il cono EAB è vguale al cono FCD, & il cilindro HABG è vguale al cilindro KCDI, la proportione della baſe AB alla baſe CD [o] ſarà come l'altezza ON all'altezza ML. Sopra le baſi AB, CD, ſi coſtituiſcano i coni retti MAB, COD, ed i cilindri retti QABP, SCDR, che habbiano le medeſime altezze ML, ON. Perche i coni MAB EAB, hanno la medeſima altezza ML, e ſono ſopra la medeſima baſe AB, per il Corollario all'11. propoſitione, ſono frà di loro vguali. E ſimilmente i loro tripli, cioè i cilindri QABP, HABG, ſono fra di loro vguali. Per l'iſteſſa ragione il cono OCD è vguale al cono FCD, ed il cilindro SCDR è vguale al cilindro KCDI: ma i coni EAB, FCD ſono, per ipoteſi, frà di loro vguali, perciò i coni MAB, OCD, ſono frà di loro vguali; e ſimilmente i cilindri QABP, SCDR, ſono frà di loro vguali; e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, la baſe AB alla baſe



o 14. del 12.

CD,

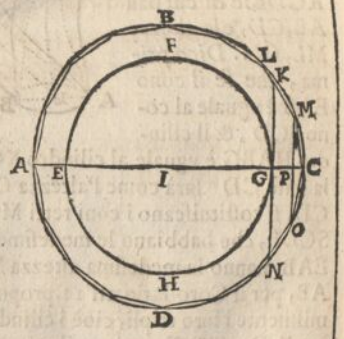
CD, sarà come l'altezza NO all'altezza LM, che era prima da dimostrarsi.



Di nuouo, supposto, che AB à CD sia come NO ad LM. Dico che i coni EAB, FCD, sono frà di loro vguali, e parimente i cilindri HABG, KCDI, sono frà di loro vguali. Supposta la medesima costruttione. Ne i cilindri retti QABP, SCDR, essendo la base AB alla base CD, come l'altezza ON all'altezza ML, per quel che si è dimostrato nella prima parte, i cilindri QABP, SCDR, sono fra di loro vguali, come ancora i coni MAB, OCD sono frà di loro vguali: ma i cilindri QABP, SCDR, sono stati dimostrati vguali à i cilindri HABG, KCDI, ed i coni MAB, OCD, sono stati dimostrati vguali à i coni EAB, FCD, ne segue i cilindri HABG, KCDI, essere frà di loro vguali, come ancora i coni EAB, FCD, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVI.

Dati due circoli intorno di vn medesimo centro, descriuere nel maggiore vn poligono equilatero, che i lati siano di numero paro, e non tocchino il circolo minore.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, intorno al medesimo centro I; si vuole nel maggior circolo ABCD descriuere vn poligono equilatero, che i lati siano di numero paro, e che non tocchino il circolo minore EFGH. Per il centro I si tiri il diametro AC, il quale segarà la circonferenza del circolo interno ne i punti per essempio E, & G, nel punto G, [a] *sopra il diametro AC, si erigga la perpendicolare GK, concorrente colla circōferenza del circolo esterno in qualche punto K; e per il Corollario alla 16. propositione del 3. la retta KG toccarà il circolo FGH nel punto G. Perche l'arco AKC è maggiore dell'arco KC, se ne detragga la metà AB, e dal restante BC, se ne leui la metà BL, e di nuouo dal restante LC se ne leui la metà LM, e con*

a 11. del 1.

quest'

queſt'ordine in infinito, ſi peruerrà finalmente [b] ad vna quantità minore di KC; ſuppoſto che quella ſia l'arco MC, ſi tiri la retta MC. Dico che la retta MC ſarà vno de i lati di quel poligono, che ſi è propoſto deſcriuere. Si diuida l'arco BL nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono in LC; e di nuouo l'arco AB, (che è vguale à BC) ſi diuida nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti BC; ſiche il ſemicircolo ABC ſarà diuiſo in parti vguali, e ciaſcuna di quelle parti ſarà vguale ad MC; ſi diuida poi l'arco ADC nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono nell'arco ABC; ſarà diuiſa tutta la circonferenza del circolo ABCD in parti vguali, e di numero paro; ſi tirino le rette, che ſottendono quegli archi, e ſarà deſcritto il poligono equilatero, e di lati di numero paro. Dico finalmente, che i lati di queſto poligono non toccano la circonferenza del circolo interno. Dal punto M ſi faccia cadere [c] la retta MP perpendicolare al diametro AC. Perche gli angoli KGP, MPG ſono retti, le rette KG, MP, ſono [d] frà di loro parallele; e perche la retta KG tocca il circolo interno nel ſolo punto G, la retta dunque MP cade totalmente fuori del circolo FGH, ne può mai toccarlo in neſſun punto, ſtante che non può mai concorrere colla retta KN, per la diffinitione delle parallele. Hor ſe la retta MO non può mai toccare il circolo FGH, molto meno lo può toccare la retta MC, la quale è più lontana dal circolo FGH di quello, che è la retta LO; e per l'iſteſſa ragione neſſun' altro lato del poligono deſcritto toccarà il detto circolo, ſtante che il circolo FGH, è vgualmente diſtante dal circolo ABCD; per la qual coſa nel circolo maggiore ſi è deſcritto il poligono equilatero, di lati di numero paro, il quale non tocca il circolo minore, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[b] 1. del 10.

[c] 12. del 1.

[d] 28. del 1.

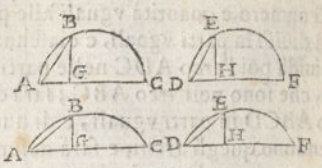
COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che ſe dall'eſtremo di quel lato del poligono iſcritto, che concorre col diametro, cade vna retta perpendicolare al medeſimo diametro, come fà la retta MP, quella in neſſun modo può toccare il circolo interno.

LEMMA I.

Se ſiano due qualunque vguali portioni ABC, DEF, di circoli vguali, e ſia l'arco AB vguale all'arco DE, è da i punti B, ed E, cadano le rette BG, EH, perpendicolari alle corde AC, DF. Dico che la retta BG ſarà vguale ad EH, la retta AG vguale ad HD, e la retta GC vguale ad HF.

Si tiri la retta AB. Perche gli archi ABC, DEF, per ipotesi, sono vguali, perciò le rette AC, DF, [a] saranno frà di loro vguali. Similmente essendo l'arco ABC vguale all'arco DEF, e gli archi AB, DE, per ipotesi, sono vguali, i restanti archi EC, EF, saranno frà di loro vguali; dal che gli angoli BAC, EDF, opposti à gli vguali archi BC, EF, [b] sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli BAG, EDH, angoli retti in G, ed H. Essendosi dimostrato gli angoli BAG, EDH frà loro vguali, i due angoli BAG, BGA del triangolo BAG, saranno vguali à i due angoli EDH, EHD del triangolo EDH, il lato BA è vguale al lato ED (stante che [c] sostendono gli archi vguali AB, DE, saranno i restanti due lati BG, GA [d] vguali à i restanti due lati EH, HD, cioè il lato BG è vguale al lato EH, ed il lato AG è vguale al lato DH: ma le rette AC, DF, sono frà di loro vguali, detrattone le parti vguali AG, DH, restano le parti GC, HF, frà di loro vguali, che era da dimostrarsi.



a 29. del 3.
b 27. del 3.
c 29. del 3.
d 26. del 1.

LEMMA II.

Se nel circolo sia descritto vn quadrilatero, che habbia tre lati vguali, ed il quarto lato sia minore di ciascheduno de gli vguali, tirate le rette dal centro del circolo à gli angoli del quadrilatero, l'angolo nel centro, opposto ad vno de i lati vguali, sarà ottuso.

Nel circolo O B K S, il di cui centro Z, sia iscritto il quadrilatero OBKS, del quale i tre lati OB, BK, KS, siano frà loro vguali ed il quarto lato OS sia minore del lato BK. Dico che tirate le rette ZB, ZK, ZS. ZO, l'angolo BZK, opposto al lato BK, sarà ottuso. Perche i lati SK, KB, BO, sono frà loro vguali, perciò gli archi SK, KB, BO, [a] sono frà loro vguali, e gli angoli al centro SZK, KZB, BZO, [b] sono frà di loro vguali. Di nuouo, essendo i lati ZK, ZB, del triangolo ZKB, vguali à i lati ZO, ZS del triangolo ZSO, e la base KB è maggiore della base SO, [c] l'angolo BZK sarà maggiore dell'angolo OZS. E perche gli angoli OZB, BZK, KZS, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro vguali in conseguenza l'angolo OZS sarà minore di ciascuno degli angoli OZB, BZK, KZS: ma i quattro angoli OZB, BZK, KZS, SZO, intorno al centro Z, sono vguali à quattro angoli retti, perciò ciascun'angolo OZB, BZK, KZS, sarà maggiore d'vn angolo retto, per la qual cosa l'angolo BZK sarà ottuso, ch'era da dimostrarsi.



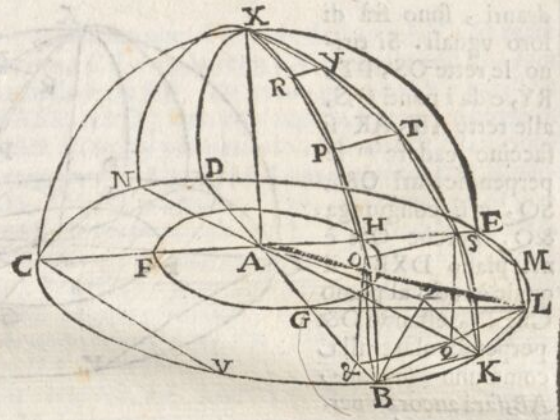
a 28. del 3.
b 27. del 3.
c 25. del 1.
d 13. del 1.

THEO-

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Date due sfere intorno ad vn medesimo centro, descriuere nella maggior sfera vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della minor sfera.

Siano proposte due sfere intorno al medesimo centro A, nella maggiore si vuole iscriuere vn solido polliedro, cioè di molti lati, talmente, che i piani, che contengono il solido polliedro, non tocchino la superficie della minor sfera. Siano segate le proposte sfere da vn piano, che passi per il commune centro A, le communi settioni nelle superficie sferiche, come CBED, FGH saranno circonferenze di circoli massimi, stante che reuoluti quei semicircoli, che descrissero le sfere, le loro circonferenze congruono colle settioni CBED, FGH, cioè colla circonferenza CBED nella maggior sfera, e con la circonferenza FGH nella minore, le quali, per costruttione, sono intorno al medesimo centro A, ed in vn medesimo piano; si tirino i due diametri DB, CE, che si seghino ad angoli retti nel centro A, e dal punto G, nel piano CBL si tiri la retta GL ad angoli retti con la retta AB, [a] la quale concorrerà con la circonferenza BLE in qualche punto L, e toccarà il circolo FGH [b] nel punto G; si tiri la retta LB, e dal punto C, nell'arco CB, si addatti [d] la retta CV vguale alla retta LG. Perche LG è perpendicolare ad AB, il triangolo LGB sarà rettangolo in G, dal che la retta LB, sarà maggiore di LG: ma LG è vguale ad VC, sarà LB maggiore di CV, e l'arco LKB sarà maggiore [f] dell'arco CV; si detragga dal quadrante BLE la sua metà, e dal restante se ne leui la metà, e con quest'ordine si proseguisca fin à tanto, che resti vn arco [g] minore dell'arco CV; e supposto che l'arco restato sia KB; perche KB è minore di CV, e l'arco CV è minore di BL, sarà l'arco BK minore dell'arco BL. E proseguendo come nella propos. antecedente, nel maggior circolo CBED si descriua vn poligono equilatero, che i lati siano pari di numero, e non tocchino la circonferenza FGH del circolo minore; sarà la retta BK vno di quei lati; si addattino i lati KL, LM, ME, ciascuno vguale à BK, & il medesimo si faccia ne gli altri quadranti; si tiri poi la



a 11. del 1.

b Coroll. alla 16. del 6.

d 1. del 4.

e 17. del 1.

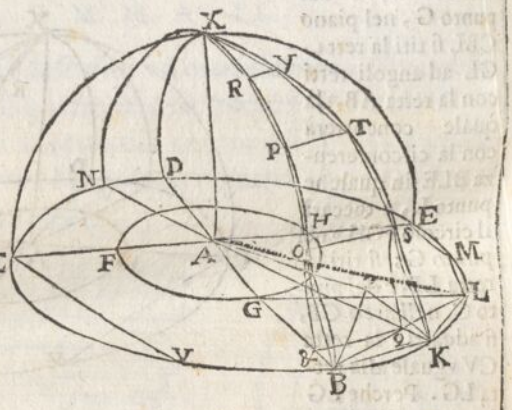
f 28. del 3.

g 1. del 10.

h 12. del 11. retta KA, la quale si prolunghi fino ad N, e nel punto A si erigga [h] la retta AX perpendicolare al piano CBED, concorrente colla superficie della sfera in qualche punto X; per la retta AX, e per il diametro CE, si faccia passare vn piano, che seghi le proposte sfere; similmente per la retta AX, e per ciascuno de i diametri DB, NK, si facciano passare altri piani, che seghino le sfere, e per quel che si è detto, le communi settioni de i piani seganti, e delle superficie sferiche, saranno circonferenze di circoli massimi; siano quelle le notate CXE, NXK, DXB. E perche la retta AX è perpendicolare al piano CBED, i piani de i massimi circoli CXE,

K 19. del 11. NXK, DXB [k] saranno perpendicolari al piano CBED: ma i diametri CE, NK, DB, nel medesimo circolo CBED, sono frà di loro vguali, però i mezzi circoli BED, CXE, NXK, DXB, saranno frà di loro vguali, ed i quadranti, cioè le loro quarte parti BLE, BPX, KTX, EX, sono frà di loro vguali. Per la qual cosa quanti lati del poligono descritto sono nel quadrante BLE, altretanti se ne possono adattare in ciascuno de i quadranti BPX, KTX: si adattino dunque in questi i lati BO, OP, PR, RX, KS, ST,

l 1. del 4. TY, YX. [l] Perche i lati BK, KL, LM, ME, sono frà di loro vguali, e sono ancora vguali à quelli adattati ne i quadranti BPX, KTX, però tutti i lati, adattati in essi quadranti, sono frà di loro vguali. Si tirino le rette OS, PT, RY, e da i punti O, S,



m 12. del 1. alle rette AB, AK si facciano cadere [m] le perpendicolari O&, SQ, e si congiunga &Q. Perche O& è nel piano DXB, il quale è retto al piano CBED, essendo O& perpendicolare alla communi settione

n 38. del 11. AB, sarà ancora [n] perpendicolare al piano CBED. Nell' istesso modo si proverà, che la retta SQ è perpendicolare al medesimo piano

o 6. del 11. CBED: per la qual cosa le rette O&, SQ, sono frà di loro parallele: ma gli archi OB, SK, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Lemma primo, le rette O&, SQ, sono frà di loro vguali, le quali, essendo parallele, saranno in conseguenza vguali, e parallele: si che le rette OS, &Q che

p 33. del 1. congiungono gli estremi, saranno [p] frà di loro vguali, e parallele, & il quadrilatero O&QS sarà parallelogrammo. Similmente essendo gli archi BO, KS frà di loro vguali, e le rette O&, SQ, perpendicolari à i diametri DB, NK, le parti &B, QK, saranno frà di loro vguali: ma, per la definitione del circolo, i semidiametri AB, AK, sono frà di loro vguali; se da essi se ne detraggono le parti vguali &B, QK, resta A& vguale ad AQ,

e sarà

e sarà la proportione di A& ad &B, come quella di AQ à QK; dal che la retta BK [q] sarà parallela ad &Q. Ma si è dimostrata OS parallela alla medesima &Q, le due BK, OS, saranno [r] frà di loro parallele, e le rette OB,SK, che le congiungono, saranno [t] nel medesimo piano, doue sono le parallele OS, BK: per la qual cosa il quadrilatero OBKS sarà vna figura piana. Nell'istesso modo si proverà, che il quadrilatero POST è figura piana, come ancora il quadrilatero RPTY, ed il triangolo XRY. Dal centro A si concepiscano tirate rette linee à i punti O,S,P,T,R,Y, e sarà fatto il solido XBKA, che sarà composto di più piramidi, le di cui basi sono i piani BOSK,POST,PTYR,XRK ed hanno per vertice commune il punto A. Se per il centro A,e per li punti L,ed M, si facciano passare altri diametri, per i quali, e per la retta XA, si facciano passare altri piani, che seghino la medesima sfera, questi disegnaranno nella superficie della sfera altre circonferenze di circoli massimi; e facendosi in esse il medesimo, che si è fatto ne gli archi XB, XK, e similmente quanto si è fatto nella quarta parte XBE della sfera; si faccia ancora nell'altre quarte parti XED,XDC,XCB, ed il simile si faccia nel emisfero inferiore, e sarà costrutto nella maggior sfera il solido polliedro proposto. Dico che i piani, che contengono questo solido polliedro non toccano la superficie della minor sfera GHF.

Perche l'arco BK, per costruttione, è minore dell'arco CV, la retta BK [u] sarà minore della retta CV: ma la retta CV è vguale ad LG, sarà dunque LG maggiore della retta BK. Di nuouo perche Q& è parallela al lato BK, i triangoli ABK, A&Q [x] sono equiangoli, e la proportione di AB à BK [y] sarà come A& ad &Q; e permutando, AB ad A& [z] sarà come BK ad &Q: ma AB è maggiore di A&, sarà BK [a] maggiore di &Q. E perche &Q è vguale ad OS, sarà BK maggiore di OS. Dal centro A al piano OBKS [b] *si faccia cadere la perpendicolare* AZ, e si tirino le rette BZ, KZ. Perche la retta AZ *è perpendicolare al piano* OBKS, sarà ancora perpendicolare alle rette BZ, KZ, [c] *e perciò gli angoli* AZB, AZK, sono retti. Nel triangolo AZB angolo retto in Z, *il quadrato dell'ipotenusa* AB è [d] vguale à i quadrati de i due lati AZ,ZB. Similmente nel triangolo AZK, angolo retto in Z, il quadrato di AK è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZK: ma le rette AB, AK, sono frà di loro vguali, i quadrati dunque delle due AZ,ZB, saranno vguali à i quadrati delle due AZ,ZK; se ne leui il quadrato del commun lato AZ, resta il quadrato di ZB vguale al quadrato di ZK, e la retta ZB vguale alla retta ZK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette tirate dal punto Z à i punti O, ed S, sono frà di loro vguali, e sono vguali alle due ZB, ZK: per la qual cosa il punto Z e sarà il centro di quel circolo,che passa per li punti O,B,K,S, ed il quadrilatero OBKS sarà iscritto nel circolo. E perche i lati OB,BK, KS, [f] sono frà di loro vguali (stante che gli archi OB,BK,KS,sono frà di loro vguali) ed il lato BK è mostrato maggiore di OS,per l'antecedente Lemma 2. l'angolo BZK sarà ottuso,ed il lato BK [g] sarà maggiore di BZ: ma la retta GL è dimostrata maggiore di BK,sarà la retta GL molto maggiore di BZ. Finalmente nel triangolo AGL, angolo retto in G, il quadrato di AL [h] è vguale à i quadrati de i due AG,GL, e similmente nel triangolo AZB, angolo

q 2. del 6. r 9. del 11. t 7. del 11.

u 29. del 3.

x 29. & 32. del 1. y 4. del 6. z 16. del 5. a 14. del 5. b 11. del 11.

c 3. definit. del 11.

d 45. del 1.

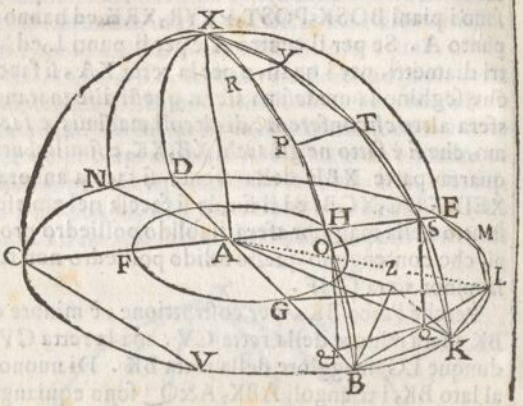
e 9. del 3.

f 29. del 3.

g 19. del 1.

h 47. del 1.

golo retto in Z, il quadrato di AB è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZB: ma i ſemidiametri AB,AL, ſono frà di loro vguali; ſaranno i quadrati delle due LG,GA, vguali à i quadrati delle due BZ,ZA; e perche il quadrato di LG è maggiore del quadrato di BZ (ſtante che LG è dimoſtrata maggiore di BZ,) ſe da i quadrati delle due LG,GA, ſe ne leua il quadrato di LG, e da i quadrati delle due BZ,ZA, ſe ne leua il quadrato della minore BZ, reſta il quadrato di AG minore del quadrato di AZ; e la retta AZ maggiore di AG. E perche la retta AG è ſemidiametro della minor ſfera, ſarà AZ maggiore, che il ſemidiametro della minor ſfera; per la qual coſa il punto Z cade lontano dalla ſuperficie della minor ſfera; e perciò il piano OBKS non tocca la ſuperficie della minor ſfera. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che neſſun piano del ſolido polliedro deſcritto, tocca la ſuperficie della ſfera minore. Per la qual coſa nella maggior ſfera ſi è iſcritto vn ſolido polliedro di faccie di numero paro, *i di cui piani non toccano la ſuperficie della minor ſfera, deſcritta intorno al medeſimo centro della maggiore, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*



SCOLIO.

Se in vn altra ſfera, ſarà iſcritto vn ſolido polliedro, ſimile al ſolido polliedro iſcritto nell'antecedente ſfera, il ſolido polliedro, iſcritto in vna delle ſfere, al ſimile ſolido polliedro, iſcritto nell'altra ſfera, hauerà triplicata proportione, che il diametro dell'vna, al diametro dell' altra ſfera.

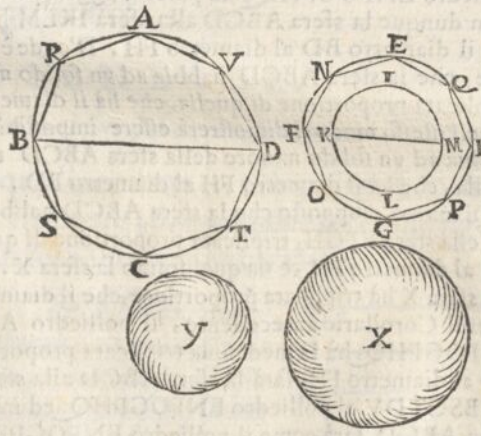
Perche tirato da i centri delle ſfere à tutti gli angoli de i ſimili polliedri linee rette, quei ſolidi polliedri ſaranno riſoluti in tante piramidi; e perche i ſolidi polliedri ſi ſuppongono ſimili, però le piramidi dell'vno ſono ſimili alle corriſpondenti piramidi dell'altro: ma le piramidi ſimili, per l'8. propoſitione, ſono in triplicata proportione, che i loro lati homologhi, la piramide dunque ABKSO, dell'antecedente figura, alla corriſpondente piramide nell'altro ſimile polliedro, hauerà triplicata proportione, che il lato homologo AB, ch'è ſemi-

diame-

diametro della sfera CBE, al lato homologo della corrispondente piramide nell' altro polliedro, che sarà ancora semidiametro di quella sfera, nella quale è iscritto quel polliedro. E nell'istesso modo tutte l'altre piramidi del polliedro descritto nella sfera CBE, alle corrispondenti piramidi dell'altro simile polliedro, haueranno triplicata proportione, che i loro lati homologhi, pigliando quei lati, che sono semidiametri delle sfere; dal che tutte le piramidi del polliedro, descritto nella sfera CBE, prese come antecedenti, à tutte le piramidi del simile polliedro, descritto in altra sfera, prese come conseguenti, K saranno come K 12. del 5.
vn antecedente ad vn conseguente, cioè come la piramide ABKSO alla corrispondente piramide nell'altro polliedro. Ma la piramide ABKSO, alla corrispondente piramide nell'altro polliedro, hà triplicata proportione, che il lato AB, che è semidiametro della sfera CBED, al lato homologo della corrispondente piramide nell'altro polliedro, che e semidiametro dell'altra sfera; cioè la piramide ABKSO alla corrispondente piramide, nell'altro polliedro haurà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto l'altro polliedro; e perciò tutto il polliedro, descritto nella sfera CBED, à tutto il simile polliedro, descritto nell'altra sfera, haurà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto il simile polliedro. Ma i semidiametri delle sfere sono come i diametri delle medesime, il polliedro dunque descritto nella sfera CBED, al polliedro simile descritto in altra sfera, haurà triplicata proportione, che il diametro DB, della sfera CBED, al diametro della sfera, nella quale è descritto il simile polliedro, come si disse.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

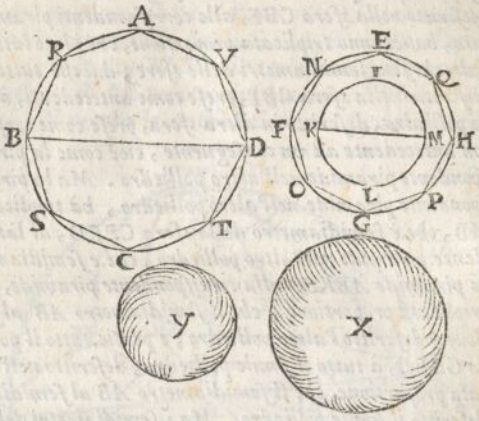
Le sfere sono frà di loro in triplicata proportione de i loro diametri.



Siano le sfere ABCD, EFGH, i di cui diametri BD, FH. Dico che la sfera ABCD alla sfera EFGH hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. Se la sfera ABCD alla sfera EFGH non hà la proportione triplicata del diametro BD al diametro FH, habbia la sfera ABCD ad vn altra sfera, la proportione triplicata, che hà il diametro BD al diametro FH; quella ò sarà minore della sfera EFGH, come IKLM, ouero sarà maggiore, come la sfera X.

ra X. Supposto prima, che sia minore, e sia quella la sfera IKLM posta intorno al medesimo centro della sfera EFGH.

Si iscriua nella sfera EFGH, per l'antecedente propos. vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della sfera minore IKLM, e sia quello il solido polliedro ENFOGPHQ. Sia poi iscritto nella sfera ABCD vn solido polliedro, simile al polliedro ENFOGPHQ, per l'antecedente Coroll. il polliedro ARBSCTDV, descritto nella sfera ABCD, al simile solido polliedro ENFOGPHQ, descritto nella sfera EFGH, hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH: ma la sfera ABCD alla sfera IKLM, per costruttione, hà la medesima proportione triplicata del diametro BD al diametro FH; la proportione dũque della sfera ABCD alla sfera IKLM, sarà come quella del solido polliedro ARBSCTDV al solido polliedro ENFOGPHQ; è permutando, la sfera ABCD al solido polliedro ARBSCTDV, sarà come la sfera IKLM al solido polliedro ENFOGPHQ. Ma la sfera ABCD è maggiore del solido polliedro ARBSCTDV, sarà la sfera IKLM maggiore del solido polliedro ENFOGPHQ; la parte maggiore del tutto, ch'è impossibile. Non dunque la sfera ABCD alla sfera IKLM hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. D'onde è manifesto essere impossibile, che la sfera ABCD habbia ad vn solido minore della sfera EFGH triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. E nell'istesso modo si dimostrerà essere impossibile, che la sfera EFGH habbia ad vn solido minore della sfera ABCD triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD.



a 16. del 5.

b 14. del 5.

Di nuouo, supposto che la sfera ABCD habbia ad vn solido maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, e sia quel solido la sfera X. Perche la sfera ABCD alla sfera X hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, e per il Corollario antecedente, il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ, hà la medesima triplicata proportione, che hà il diametro BD al diametro FH, sarà la sfera ABCD alla sfera X come il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ; ed inuertendo, la sfera X alla sfera ABCD sarà come il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV: ma per il Coroll. antecedente, il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV hà triplicata proportione, che il diametro FH al

diame-

diametro BD, hauerà dunque la sfera X alla sfera ABCD triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD, Suppoſto queſto.

Si concepiſca come la sfera X alla sfera ABCD, così la sfera EFGH ad vn'altra sfera, che ſia Y; permutando, la sfera X alla sfera EFGH, ſarà [c] come la sfera ABCD alla sfera Y: ma la sfera X è poſta maggiore della sfera EFGH, ne ſegue la sfera ABCD [d] eſſere maggiore della sfera Y, cioè la sfera Y ſarà minore della sfera ABCD. Di nuouo eſſendoſi dimoſtrato, che la sfera X alla sfera ABCD hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, e ſi è fatta la sfera X alla sfera ABCD, come la sfera EFGH alla sfera Y, la sfera dunque EFGH alla sfera Y hauerà triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD: per la qual coſa la sfera EFGH hauerà ad vn ſolido minore della sfera ABCD, triplicata portione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, ch'è contro à quello, che ſi è concluſo nella prima parte. Non dunque la sfera ABCD hauerà ad vna sfera maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ne meno, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, hauerà ad vna sfera minore della sfera EFGH triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ed in conſeguenza la sfera ABCD alla sfera EFGH hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 16. del 5.

[d] 14. del 5.

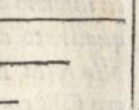
COROLLARIO.

Perche tanto la sfera alla sfera, quanto il polliedro, deſcritto in vna di eſſe, al ſimile polliedro deſcritto nell'altra, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ſarà manifeſto, che la sfera alla sfera è come il ſolido polliedro, al ſolido polliedro.

APPENDICE.

Della quale ſi è parlato nel fine del decimo Elemento.

Date due qualunque linee rette, frà loro incommenſurabili in lunghezza, ritrouare altre grandezze, come figure piane, ò ſolide, frà di loro incommenſurabili.



Siano eſpoſte le rette A, & B frà di loro incommenſuraaili in lunghezza. Si troui frà le due A, & B [a] vna media proportionale, che ſia la retta C. Dico che tutte le figure piane ſimili deſcritte ſopra le rette A, & C ouero ſopra le rette C, & B ſono frà di loro incommenſurabili, e tutt'i ſolidi d'vguali altezze, che hanno

[a] 13. del 6.

per basi le figure piane simili descritte sopra le rette A & C, ouero C, & B sono frà di loro incommensurabili. Similmente tutti i circoli, i di cui diametri sono le rette A, & C, ouero C, & B sono fra di loro incommensurabili, e tutti i coni, e cilindri di vguali altezze, le di cui basi siano i circoli descritti intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B sono frà loro incommensurabili.

A ——————
C ——————
B ——————

b 13. del 6. Perche i piani simili, e similmente posti sopra le rette A, & C [b] hanno duplicata proportione, che li loro lati homologhi, cioè a figura piana descritta sopra la retta A alla figura simile, e similmente posta alla retta C, ha dupplicata proportione di quella, che hà la retta A alla retta C, mà la prima A [c] alla terza B hà la medesima dupplicata proportione di quella, che hà la retta A alla retta C, sarà la figura piana descritta sopra la retta A alla figura simile, e similmente posta sopra la retta C [d] come la retta A alla retta B, mà la retta A per ipotesi è incommensurabile in lunghezza alla retta B, sarà la figura piana descritta sopra la retta B [e] incommensurabile alla figura simile, e similmente posta sopra la retta C, l'istesso si dimostrerà se le figure simili saranno descritte sopra le rette C, & B. Se dunque sopra le rette A, & C, ouero C, & B, saranno descritte due qualunque figure simili, e similmente poste, quelle saranno fra di loro incommensurabili, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

c Lem. 8. dopo la 18. del 6.

d 11. del 5.

e 10. del 10.

Se saranno descritte figure solide di vguali altezze, le di cui basi siano li piani simili, e similmente posti sopra le rette A, & C, ouero C, & B; perche gli solidi d'vguali altezze [f] sono come le basi, essendo le basi per quel che si è dimostrato incommensurabili frà di loro, saranno ancora i solidi [g] frà di loro incommensurabili, se dunque sopra le rette A, & C, ouero C, & B [h] saranno descritti piani simili, e similmente posti, e sopra quei piani simili saranno descritte piramidi, ò prismi, ò altre figure solide d'vguali altezze, quelle figure solide saranno fra loro incommensurabili.

f 32. del 11. & 6. del 12.

g 10. del 11.

h 18. del 6.

Di nuouo, se prese le rette A, & C, come diametri di due circoli, ed intorno alle rette A, & C saranno descritti quei circoli; perche il quadrato della retta A, al quadrato della retta C [K] è come la retta A alla retta B, ed il quadrato del diametro A, al quadrato del diametro C [l] è come il circolo descritto intorno al diametro A, al circolo descritto intorno al diametro C, sarà il circolo descritto intorno al diametro A, al circolo descritto intorno al diametro C, com'è la retta A alla retta B, mà le rette A, & B, per ipotesi sono frà loro incommensura-

K 20. del 6. & Lem. 8. dopo la 18. del 6.

l 2. del 12.

bili

bili in lunghezza, in conſeguenza i circoli deſcritti intorno à i diametri A, & C [m] *ſono frà loro incommenſurabili, e ſe ſopra quei circoli ſaranno deſcritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze; perche li Coni frà di loro, e Cilindri frà di loro* [n] *ſono come le baſi, eſſendo le baſi frà loro incommenſurabili, ſaranno ancora li Coni, ò Cilindri d'vguali altezze deſcritti ſopra di eſſi* [o] *frà loro incommenſurabili. Se dunque intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B, ſi deſcriueranno circoli, quelli ſaranno frà loro incommenſurabili, E ſe ſopra à quei circoli ſaranno deſcritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze, quelli ſaranno frà loro incommenſurabili, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.*

m 10. del 10.

n 11. del 12.

o 10. del 10.

Fine del Duodecimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOTERZO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ed alla maggior parte s'aggiunga la metà di tutta la linea; il quadrato della composta è il quintuplo del quadrato di quella metà aggiunta.

a 30. del 6.



SIA la retta linea AB, a diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, ed alla maggior parte CA s'aggiunga la retta AD, vguale alla metà di tutta la retta AB. Dico, che il quadrato della composta DC è il quintuplo del quadrato dell'aggiunta DA. Sopra la retta CD b si descriua il quadrato CE, si tiri il diametro DF, e dal punto A si tiri la retta AG c parallela al lato DE, la quale segarà il diametro DF in qualche punto H; per il punto H si faccia

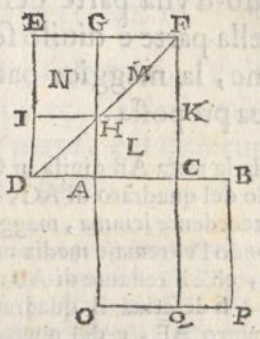
b 46. del 1.
c 31. del 1.
d 31. del 1.

passare la retta IK d parallela al lato DC, e sarà diuiso il quadrato CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due IA, GK, che sono intorno al diametro DF, per il Corollario alla quarta propositione del secondo, sono quadrati, cioè sono i quadrati delle rette DA, AC, & i due AK, IG, sono rettangoli e vguali frà loro. Similmente sopra la retta AB f si descriua il quadrato OB, si continui FC fino in Q; il rettangolo QB sarà contenuto g da i due lati PB, BC: ma il lato PB è vguale ad AB, il rettangolo PC sarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Perche la retta AB è diuisa, per ipotesi, secondo l'estrema, e media proportione in C, sarà AB ad AC, h come AC à CB; ed il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, K sarà vguale al quadrato della media AC, ma il rettangolo delle due AB, BC, è vguale al rettangolo PC, sarà il rettangolo PC vguale al quadrato di AC, cioè vguale al quadrato KG. In oltre, perche AB, per ipotesi, è il doppio di AD, ed è vguale ad AO, sarà AO il doppio di AD; ma AD (come lato del quadrato AI) è vguale ad AH, sarà OA il doppio di AH. Si considerino i rettangoli OC, AK, i quali hanno vna medesim'altezza, ed in conseguenza sono l come le basi OA, AH: ma OA è il doppio

e 43. del 1.
f 46. del 1.
g 1. definit. del 2.
h 3. definit. del 6.
K 17. del 6.
l 1. del 6.

di AH,

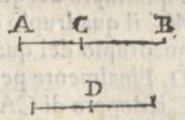
di AH, sarà il rettangolo OC il doppio di AK. E perche il rettangolo AK [m] è vguale al complemento IG, sarà il rettangolo OC vguale à i due complementi CH, HE. Hor à i due complementi CH, HE, s'aggiunga il quadrato KG, ed al rettangolo OC s'aggiunga il rettangolo QB, ne viene tutto il quadrato OB vguale allo gnomone LMN. Finalmente perche AB è il doppio di AD, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato di AB sarà il quadruplo del quadrato di AD, cioè il quadrato OB è il quadruplo del quadrato AI: ma il quadrato OB fù dimostrato vguale allo gnomone LMN, sarà lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato AI: se allo gnomone LMN s'aggiunge il quadrato AI, ne viene tutto il quadrato CE il quintuplo del quadrato AI; cioè il quadrato di CD è il quintuplo del quadrato di DA, ch'era da dimostrarsi. m 43. def. 1.



LEMMA.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna sua parte, il doppio di quella parte è maggiore del restante della linea.

Sia il quadrato della retta AB il quintuplo del quadrato della parte AC, e sia la retta D il doppio di AC. Dico, che la retta D è maggiore della retta CB. Perche la retta D è il doppio di AC, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato della retta D sarà il quadruplo del quadrato di AC. In oltre, perche la retta AB è diuisa in C, il quadrato di AB [a] è vguale à i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB; ma il quadrato di AB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di AC, i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sarà il quintuplo del quadrato di AC; se ne leui il quadrato di AC, resta il quadrato di CB, col doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, il quadruplo del quadrato di AC: ma il quadrato della retta D è il quadruplo del quadrato di AC, sarà il quadrato della retta D vguale al quadrato di CB, col doppio rettangolo delle due AC, CB. Per la qual cosa il quadrato della retta D è maggiore del quadrato di CB, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, e perciò la retta D è maggiore di CB, ch'era da dimostrarsi. a 4. del a.



THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna parte della medesima retta, & il doppio di quella parte è diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà vguale al rimanente della linea proposta.

Sia la retta AB diuisa in C, in modo che il quadrato di AB sia il quintuplo del quadrato di AC, e sia fatta CD il doppio di AC, sarà CD, per l'antecedente lemma, maggiore di CB. Dico, che la retta CD è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è la retta CB, ch'è il restante di AB. Sopra la retta

1 46. del 1. AB [a] si descriua il quadrato BE, si tiri il

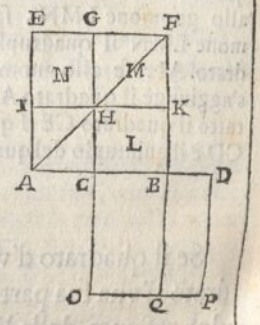
b 31. del 1. diametro AF, e dal punto C si tiri la retta CG [b] parallela ad AE, la quale segarà il dia-

c 31. del 1. metro AF in qualche punto H; per il punto H [c] si faccia passare la retta IK parallela ad EF; sarà diuiso il quadrato BE in quattro parallelogrammi, de' quali i due CI, KG, intorno al diametro AF, per il Coroll. alla 4. propos. del secondo, sono quadrati, ed i com-

d 3. del 1. plementi BH, HE, sono rettangoli vguali; si continui GC verso O, si faccia CO [d] vguale à CD, e si compisca il quadrato CP; si prolunghi FB fino in Q; il rettangolo BP sarà contenuto da i due lati PD, DB: ma PD è vguale al lato CD, sarà il rettangolo PB vguale à quello, che è contenuto dalle due CD, DB. E perche CD è il doppio di AC, sarà il quadrato di CD, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadruplo del quadrato di AC; cioè il quadrato OD è il quadruplo del quadrato CI. Di nuouo perche il quadrato di AB è il quintuplo del quadrato di AC, cioè il quadrato BE è il quintuplo del quadrato IC, leuatone il quadrato IC, resta lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato CI; ma il quadrato OD fu dimostrato il quadruplo del quadrato CI, sarà lo gnomone LMN vguale al quadrato OD. Finalmente perche DC è il doppio di CA, ed è vguale ad OC, sarà OC il doppio di CA; ma la retta CA è vguale ad HC, sarà OC il doppio di CH. E perche i rettangoli OB, CK, [e] sono come le basi OC, CH, es-

e 1. del 6. sendo OC il doppio di CH, sarà il rettangolo OB il doppio del rettan-

f 43. del 1. golo CK: ma il rettangolo CK [f] è vguale al complemento HE, sarà il rettangolo OB vguale à i due complementi BH, HE, giunti insieme; fù dimostrato tutto lo gnomone LMH vguale al quadrato OD, sarà il rettangolo QD vguale al quadrato KG, cioè vguale al quadrato di CB. E perche il rettangolo QD fù dimostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due CD, DB; il rettangolo dunque contenuto dalle due CD, DB, sarà vguale



al qua-

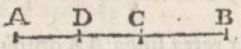
al quadrato di CB; e sarà CD à CB [g] come la medesima CB al rimanente BD. Per la qual cosa la retta CD [h] è diuisa secondo l'estrema, e media proportione nel punto B, e sarà CB la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.

[g] 17. del 6.
[h] 3. defin. del 6.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, è media proportione, il quadrato della retta composta della minor parte, e della metà della maggior parte, è il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione nel punto C, e la maggior parte AC sia diuisa in due parti vguali in D. Dico, che il quadrato della retta DB è il quintuplo del quadrato di DC. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB ad AC [a] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [b] sarà vguale al quadrato della media AC; ma il quadrato di AC, per lo Scolio alla quarta propositione del 2. è il quadruplo del quadrato della metà CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. Se al rettangolo delle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di CD, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, *sarà il quintuplo del quadrato di CD*. In oltre, perche la retta AC è diuisa *in due parti vguali* in D, e se l'è aggiunta la parte CB; il rettangolo contenuto *dalle due AB, BC, col quadrato di CD*, [c] sarà vguale al quadrato di DB: ma, per quel *che si è dimostrato, il* rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, è *il quintuplo del quadrato di CD*, sarà il quadrato di DB il quintuplo del quadrato di CD, come fù proposto di mostrare.



[a] 3. definit. del 6.
[b] 17. del 6.
[c] 6. del 2.

SCOLIO.

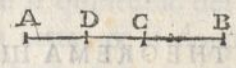
Il Campano fà la conuersa nel seguente modo.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, ed il quadrato della retta composta della minor parte, e della metà della maggior parte, sia il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte; quella retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

Sia la retta AB diuisa in due parti ineguali in C, in modo, che diuisa la maggior parte AC in due parti vguali in D, il quadrato di DB sia il quintuplo

del

del quadrato di DC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in D; e se l'è aggiunta la retta CB, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, [a] *è vguale al quadrato di DB: ma il quadrato di DB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di DC, il quintuplo del quadrato di CD; leuatone il quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. E perche il quadrato della retta AC* [b] *è il quadruplo del quadrato della metà DC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al quadrato di AC: dal che AB ad AC,* [c] *sarà come AC à CB; per la qual cosa la retta AB* [d] *è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*

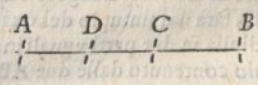


a 6. del 2.
b Scol. alla 4. del 2.
c 17. del 6.
d 3. definit. del 6.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, il quadrato di tutta, col quarto della minor parte, è il triplo del quadrato della parte maggiore.

Sia la retta linea AB diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione. Dico, che il quadrato di tutta AB, col quadrato della minor parte CB, è il triplo del quadrato della maggior parte AC. Perche la retta AB è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB [a] ad AC, come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [b] sarà vguale al quadrato di AC, e perciò il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il doppio del quadrato di AC. Se al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di AC, il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il triplo del quadrato di AC: ma per la 7. propositione del secondo, il doppio rettangolo contenuto delle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale à i quadrati delle due AB, BC; i quadrati dunque delle due AB, BC, sono il triplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.



a 3. definit. del 6.
b 17. del 6.

SCOLIO.

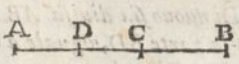
Questa ancora si conuerte nel seguente modo.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, in modo, che il quadrato di tutta, col quadrato della minor parte, sia il triplo del quadrato della maggior parte, quella

retta

retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

Sia diuisa la retta AB in due parti ineguali in C, in modo, che il quadrato di AB, col quadrato della minor parte CB, sia il triplo del quadrato della maggior parte AC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche la retta AB è diuisa in C, per la settima propositione del secondo, il quadrato di AB, col quadrato di BC, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC; ma i quadrati delle due AB, BC, per ipotesi, sono il triplo del quadrato di AC; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il triplo del quadrato di AC; se ne leui il quadrato di AC, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al doppio quadrato di AC; e la metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà vguale al quadrato di AC; dal che AB ad AC [a] sarà come AC à CB. Per la qual cosa la retta AB [b] è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.



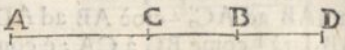
a 17. del 6.
b 3. definit. del 6.

Il Maurolico aggiunge il seguente Theorema.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della composta è il quintuplo del quadrato della maggior parte; e se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, in modo, che aggiuntale vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della composta sia il quintuplo* della maggior parte, quella retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

* del quadrato

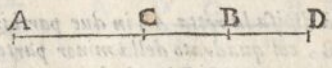
Sia prima la retta AB diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta la retta BD, vguale alla minor parte CB. Dico, che il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC. Perche la retta AB è diuisa in C, e se l'è aggiunta la retta BD, vguale à CB, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, [a] è vguale al quadrato di AD. Inoltre, perche AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, sarà AB ad AC [b] come AC à CB: si che il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [c] sarà vguale al quadrato della media AC; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle medesime AB, BC, sarà il quadruplo del quadrato di AC. Se al quadruplo rettangolo contenuto dalle



a 8. del 2.
b 3. defin. del 6.
c 17. del 6.

due

due AB, BC; s'aggiunge il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il quintuplo del quadrato di AC: ma il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, [d] *è vguale al quadrato di AD; il quadrato dunque di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*



d 8. del 2.

Di nuouo sia diuisa AB in due parti ineguali in C, in modo, che aggiunta ad AB la parte BD, vguale à CB, il quadrato di AD sia il quintuplo del quadrato di AC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ed il quadrato di AD [e] *è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il quintuplo del quadrato della medesima AC: se ne leui il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il quadruplo del quadrato di AC; ed il solo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà vguale al quadrato di AC. Per la qual cosa AB ad AC* [f] *sarà come AC à CB, e la retta AB* [g] *sarà diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*

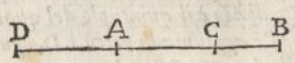
e 8. del 2.

f 17. del 6.
g 3. defin. del 6.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta vna retta vguale alla maggior parte; tutta la composta sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà la linea proposta.

Sia la retta linea AB diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ed alla retta AB sia aggiunta DA vguale alla maggior parte AC. Dico, che la composta DB è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà AB. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB ad AC, [a] cioè AB ad AD, come AC à CB; ed inuertendo, DA ad AB, sarà [b] come BC à CA; e componendo, DB à BA [c] sarà come BA ad AC, cioè come la medesima BA ad AD; per la qual cosa la retta AB [d] è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione, ed AB è la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.



a 3. definit. del 6.
b Corol. alla 4. del 5.
c 18. del 5.
d 3. defin. del 6.

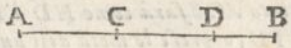
SCO-

SCOLIO I.

La conuersa la dimostraremo col Campano nel modo seguente.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e dalla maggior parte se ne detragga vna retta vguale alla minor parte; quella maggior parte sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà vguale à quella, che in tutta era la minore dell'estreme.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e dalla parte maggiore CB se ne detragga le retta CD, vguale alla minore AC. Dico, che la retta CB è diuisa in D, secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà CD, ch'è vguale ad AC. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB à BC, a come la medesima BC ad AC, cioè come BC à CD; e diuidendo, AC à CB b sarà come BD à DC; ed inuertendo, BC à CA, c ouero CD, sarà come la medesima CD à DB. Per la qual cosa la retta CB d è diuisa in D, secondo l'estrema, e media proportione, e la parte maggiore è la retta CD, ch'era da dimostrarsi.



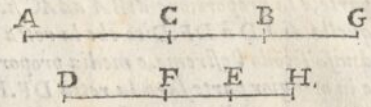
a 3. definit. del 6.
b 17. del 5.
c Coroll. alla 4. del 5.
d 3. definit. del 6.

SCOLIO II.

Di Pappo propos.it. 44. lib. 5. nel Commento del Commandino, ed Hypsicle 7. prop. del 14. Elemento.

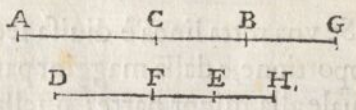
Le parti delle rette diuise secondo l'estrema è media proportione, sono frà loro proportionali.

Sia diuisa la retta AB secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia la maggior parte AC; similmente sia diuisa la retta DE, secondo l'estrema, e media proportione in F, e sia DF la maggior parte. Dico che BA ad AC è come ED à DF, e che AC à CB è come DF ad FE. Si prolunghino le rette AB, DE, verso G, ed H; si faccia BG a vguale à CB, e si faccia EH vguale ad EF, per l'ottaua del secondo, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, col quadrato di DF, è vguale al qua-



a 3. del 1.

drato di DH. Perche la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media
b 3. definit. del 6. proportione, sarà BA ad AC [b] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'
c 17. del 6. estreme AB, BC, sarà [c] vguale al quadrato della media AC. E per l'istessa
ragione il rettangolo contenuto dalle due DE, EF, è vguale al quadrato di
DF; e perciò il rettangolo con-
tenuto dalle due AB, BC, al qua-
d 7. del 5. drato di AC, [d] sarà come il ret-
tangolo contenuto dalle due DE,
EF, al quadrato di DF; e

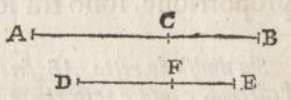


quadruplati gli antecedenti, sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due
AB, BC, al quadrato di AC, come il quadruplo rettangolo contenuto dalle due
DE, EF, al quadrato di DF; e componendo, sarà il quadruplo rettangolo
e 18. del 5. delle due AB, BC, [e] col quadrato di AC, al quadrato di AC, come il quadru-
plo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, col quadrato di DF, al quadrato
f 8. del 2. di DF: ma il quadruplo rettangolo delle due AB, BC, col quadrato di AC, [f]
è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo delle due DE, EF,
col quadrato di DF, è vguale al quadrato di DH; sarà il quadrato di AG
al quadrato di AC, come il quadrato di HD al quadrato di DF, ed il lato GA
g 22. del 6. al lato AC [g] sarà come HD à DF; e diuidendo, GC à CA [h] sarà come HF
h 17. del 5. ad FD; e prese le metà dell'antecedenti, sarà BC à CA, [K] come EF ad FD,
K Scol. alla 22. del 5. e componendo BA ad AC [l] sarà come ED ad DF. Similmente essendo BC à CA
l 18. del 5. come EF ad FD, inuertendo, [m] AC à CB sarà come DF ad FE, ch'era da
m corol. alla 4. del 5. dimostrarsi.

La conuersa di questa propositione, la fa il Sig. Borelli nel seguente modo.

Se due rette sono diuise proportionalmente, ed vna di quelle è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ancora l'altra sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema è media proportione in C, e sia AC la maggior parte; e la proportione di BA ad AC sia come quella di ED à DF. Dico che la retta DE è diuisa secõdo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte sarà la retta DF. Perche BA ad AC è come ED à DF, per la

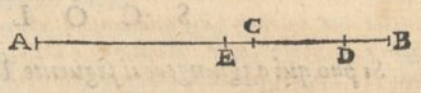


a coroll. alla 19. del 5. conuersione della proportione, sarà AB à BC [a] come DE ad EF; e diuidendo,
b 17. del 5. AC à CB [b] sarà come DF ad FE; ma AC à CB è come BA ad AC (stante
che la retta AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione) sarà DF ad
c 11. del 5. FE, [c] come BA ad AC: ma BA ad AC, per ipotesi, è come ED à DF, sarà ED
d 11. del 5. à DF [d] come DF ad FE. Per la qual cosa la retta DE [e] è diuisa in F secondo
e 3. definit. del 6. l'estrema, e media proportione, e la maggior parte è DF, che era da dimo-
strarsi.

Suppo-

Supposto le cose antedette facilmente si può dimostrare il seguente Theorema.

Se qualunque retta AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, la di cui maggior parte sia AC, e preso in AB qualunque punto D, poi diuisa la maggior parte AC, in modo, che AE ad EC sia come AD à DB. Dico che la retta AD è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in E, e la maggior parte sarà la retta AE.

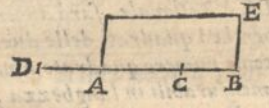


Perche AD à DB è come AE ad EC, inuertendo, [a] *sarà BD à DA come CE ad EA, e componendo, BA ad AD* [b] *sarà come CA ad AE, e permutando BA ad AC* [c] *sarà come DE ad AE: ma BA, per ipotesi, è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, per l'antecedente Theorema, sarà DA diuisa secondo l'estrema, e media proportione in E, di cui AE sarà la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.*

a Corol. alla 4. del 5.
b 18. del 5.
c 16. del 5.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea Rationale è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, l'vna, e l'altra parte è linea irrationale, ed è quella, che si chiama Apotome,



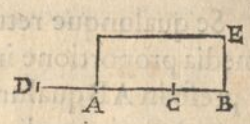
Sia la retta Rationale AB, diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia AC la maggior parte. Dico che ciascuna delle rette AC, CB, è irrationale, e che ambedue, prese separatamente, sono Apotome. Alla parte maggiore AC s'aggiunga la retta AD, vguale alla metà della Rationale AB, sarà il quadrato di CD, per la prima propositione di questo, il quintuplo del quadrato di AD; per la qual cosa il quadrato di CD al quadrato di AD sarà come numero à numero, cioè come 10. à 2, e perciò i quadrati delle due CD, DA, [a] sono commensurabili, e le rette CD, DA, sono commensurabili almeno in potenza: ma la retta AD è Rationale, [b] stante che è commensurabile al suo doppio, cioè alla Rationale AB: sarà dunque CD, [c] che gli è commensurabile, Rationale. In oltre perche i quadrati delle due CD, DA, [d] non sono come numero quadrato à numero quadrato, stante che sono come 10. à 2, le rette CD, DA, [e] saranno incommensurabili in lunghezza, e perciò saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Se dunque dalla Rationale CD, se ne detrae la retta DA, Rationale solamente in potenza, sarà la rimanente AC [f] irrationale, e sarà quella, che si chiama Apotome.

a 6. del 10.
b 6. defin. del 10.
c 6. defin. del 10.
d Scolio nel fine del 9.
e 9. del 10.
f 74. del 10.

g 45. del 1. Di nuouo s'intenda applicato ad AB g il rettangolo AE vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC, sarà il lato BE vguale alla retta

h 3. defin. del 6. CB. Perche AB ad AC h è come AC à CB, il

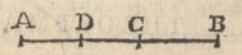
K 17. del 6. rettangolo contenuto dalle due AB, BC, cioè il rettangolo AE, K sarà vguale al quadrato dell'Apotome AC. Hor perche il quadrato dell'Apotome AC, cioè il rettangolo AE, è applicato alla Rationale AB, l'altro lato BE, ouero BC, che ne risulta, per la 98. del 10. è Apotome prima, e perciò le due AC, CB, sono linee irrationali, e sono Apotome, ch'era da dimostrarsi.



SCOLIO.

Si può qui aggiungere il seguente Theorema del Campano.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e la parte maggiore è Rationale, la minore sarà Apotome.



Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, la di cui maggior parte AC sia Rationale. Dico che la minore CB è Apotome. Si diuida AC in due parti vguali in

a 3. del 13. *D, sarà la metà DC Rationale, ed il quadrato di BD a sarà il quintuplo del quadrato di DC; dal che i quadrati delle rette BD, DC, sono come 10. à 2,*

b 6. del 10. *cioè come numero à numero, e perciò i quadrati delle due BD, DC, b sono commensurabili, e le rette BD, DC, sono commensurabili almeno in potenza: ma*

c 6. defin. del 10. *DC è Rationale, sarà ancora DB, c che gli è commensurabile, Rationale. E*

d 9. del 10. *perche i quadrati delle due BD, DC, per lo Scolio nel fine del nono, non sono come numero quadrato à numero quadrato; le due BD, DC d saranno incommensurabili in lunghezza, per la qual cosa le medesime BD, DC sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; se dunque dalla Rationale DB se ne detrae la Rationale DC, commensurabile solamente in potenza, la rimanente BC*

e 74. del 10. *e sarà Apotome, ch'era da dimostrarsi.*

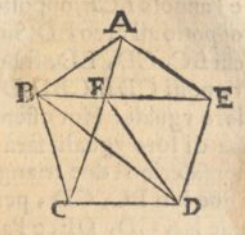
THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se tre angoli d'vn pentagono equilatero, ò contigui, ò non contigui, sono frà loro vguali, quel pentagono sarà equiangolo.

Nel pentagono equilatero ABCDE, siano prima i tre angoli contigui A, B, C, frà di loro vguali. Dico che il proposto pentagono ABCDE è equiangolo. A gli vguali angoli A, B, C, siano sottese le rette DB, CA, BE. Perche i due lati DC, CB, del triangolo DBC, sono vguali à i due lati BA, AE, del triangolo BAE, l'angolo DCB, per ipotesi, è vguale

all'

all'angolo BAE, sarà la base BD [a] vguale alla base BE, e l'angolo BEA, vguale all'angolo BDC. Hor essendo i lati BD, BE, vguali frà loro, gl'angoli BDE, BED, [b] saranno frà di loro vguali, à i quali s'aggiungano gli vguali angoli BDC, BEA, sarà tutto l'angolo AED, vguale all'angolo CDE. In oltre perche i due lati CB, BA, del triangolo CBA, sono vguali à i due lati EA, AB, del triãgolo BAE, e l'angolo CBA, per ipotesi, è vguale all'angolo BAE, sarà la base BE [c] vguale alla base CA, l'ãgolo CAB vguale all'angolo EBA, e l'angolo BCA vguale all'angolo ABE. Hor essendo gli angoli FAB, FBA, frà di loro vguali, sarà il lato FA [d] vguale al lato FB; dalle vguali rette CA, EB, se ne leuino le vguali rette FA, FB, resta CF vguale ad FE: dal punto F all'angolo opposto D si tiri la retta FD. Essendo il lato DC vguale, per ipotesi, al lato DE, è si è dimostrato il lato EF vguale al lato FC, i due lati DC, CF, del triangolo DCF, sono vguali à i due lati DE, EF, del triangolo DEF, la base DF è commune, sarà l'angolo DCF, [e] vguale all'angolo DEF, à i quali s'aggiungano gli vguali angoli BCA, AEB, tutto l'angolo BCD, sarà vguale à tutto l'angolo AED; ma l'angolo AED è dimostrato vguale all'angolo EDC, e l'angolo DCB è supposto vguale ad ogn'vno degli angoli CBA, BAE; tutti gli angoli dunque del pentagono ABCDE sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 4. del 1.
b 5. del 1.
c 4. del 1.
d 6. del 1.
e 8. del 1.

Di nuouo, supposto che i tre angoli vguali non siano contigui, come sono i tre angoli A, C, & D. Dico similmente, che il pentagono ABCDE è equiangolo. Considerando i due triangoli BAE, DCB, si dimostri, come prima si fece, che le basi BE, BD, sono frà loro vguali, e che tutto l'angolo AED è vguale all'angolo CDE: ma l'angolo CDE è posto vguale all'angolo BCD; i tre angoli contigui BCD, CDE, DEA, sono frà di loro vguali, e per quel che si è dimostrato nella prima parte, il pentagono ABCDE è equiangolo, ch'era da dimostrarsi.

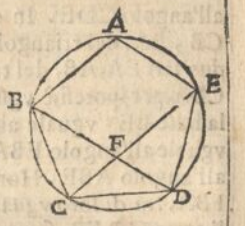
THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se due angoli contigui d'vn pentagono equilatero, ed equiangolo, sono sottesi da due rette linee, quelle si segano scambieuolmente secondo l'estrema, e media proportione, ed ogn'vna, delle parti maggiori è vguale al lato del pentagono.

Sia il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, del quale due cõtigui angoli vguali, come C, D, siano sottesi dalle rette BD, CE, le quali si seghino scambieuolmente in qualche punto F. Dico che le rette EC, BD, si segano scambieuolmente secondo l'estrema, e media proportione; e ciascuna delle parti maggiori EF, FB, è vguale al lato del pentagono. Intorno

al

a 14.del 4. al proposto pentagono a si circoscriua il circolo ABCDE. Essendo il pentagono equilatero, ed equiangolo, gli archi AB, BC, CD, DE, EA b saranno frà di loro vguali, dal che l'arco BAE sarà il doppio dell'arco ED
b 28.del 3.
c 33.del 6. e l'angolo BCE, opposto all'arco BAE, c sarà il doppio dell'angolo ECD opposto all'arco ED. Similmente essendo gli archi BC, CD, ED, frà di loro vguali, gli angoli
d 27. del 3 opposti CDB, CBD, DEC, DCB, d sono frà di loro vguali. Hor essendo li angoli FCD, FDC,
e 6. del 1. fra di loro vguali, sarà CF e vguale ad FD. Si considerino i due triangoli BCD, CDE. Perche i due lati BC, CD, per ipotesi, sono vguali à i due lati CD, DE, e l'angolo BCD è vguale all'
f 4. del 1. angolo CDE, sarà la base CE f vguale alla base BD; se ne leuino le vguali FC, FD, resta FB vguale ad FE. Nel triangolo isoscele FCD, continuato il lato DF verso B, l'angolo BFC
g 32. del 1. g esterno è vguale à i due angoli FCD, FDC, interni ed opposti: ma i due angoli FCD, FDC, furono dimostrati vguali, sarà l'angolo BFC il doppio dell'angolo FCD; e perche l'angolo BCF fù dimostrato il doppio del medesimo angolo FCD, sarà l'angolo BFG vgua-
h 6. del 1. le all'angolo BCF; dal che il lato BF h sarà vguale al lato BC. Finalmente si considerino i triangoli FCD, BCD, de' quali l'angolo DBC è dimostrato vguale all'angolo FCD, e l'angolo FDC è commune, il rima-
K 32. del 1. nente angolo CFD K sarà vguale al restante angolo BCD; i triangoli
l 4. del 6. FCD, BCD, sono equiangoli, e la propositione di BD à DC l sarà come quella di CD à DF: ma CD è vguale al lato CB, ouero BF, sarà BD à BF, come il medesimo lato BF ad FD; per la qual cosa la retta BD, è
m 3. defin. del 6. diuisa in F m secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte BF è vguale al lato BC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta CE è diuisa in F, secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte FE è vguale al lato del pentagono, come fù proposto dimostrare.



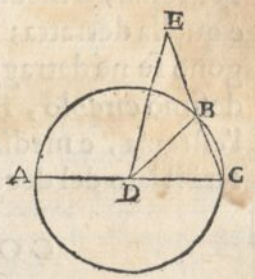
SCOLIO.

Facilmente dimostreremo col P. Clauio, che la retta, la quale sottende vn angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, è parallela al lato opposto à quell'angolo.

Perche antecedentemente si è dimostrato, che gli angoli DEC, DCE, sono frà loro vguali, leuati da gli vguali angoli DEA, DCB, resta l'angolo BCE, vguale all'angolo AEC, vgualmente se gli aggiunga l'angolo A, i due angoli BCE, BAE, saranno vguali à i due angoli BAE, CEA: ma nel quadrilatero
a 2. del 3. *BCEA iscritto nel circolo, i due angoli opposti BAE, BCE, a sono vguali à due*
b 28. del 1. *angoli retti; i due angoli dunque BAE, CEA, b sono vguali à due angoli retti, e perciò le rette BA, CE, sono frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se al lato dell'esagono s'aggiunge il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, tutta la retta composta sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte sarà il lato dell'esagono.



Nel circolo ABC sia il lato del decagono iscritto BC, il quale sia continuato verso E; si faccia BE [a] vguale al semidiametro del circolo ABC, sarà BE [b] il lato dell'esagono iscritto nel circolo ABC. Dico che la retta EC è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in B, la di cui maggior parte è il lato BE dell'esagono. Dal punto C, per il centro D del circolo, si faccia passare il diametro CA, e si tirino le rette DE, DB. Perche CB è lato del decagono, perciò sottenderà la decima parte di tutta la circonferenza del circolo; cioè sottenderà la quinta parte dell'arco ABC; per la qual cosa l'arco AB è il quadruplo dell'arco BC, e l'angolo ADB [c] sarà il quadruplo dell'angolo BDC. In oltre perche le rette BD, BE, sono frà di loro vguali, sarà l'angolo BED [d] vguale all'angolo BDE. Nel triangolo EBD il lato EB è continuato in C, l'angolo esterno CBD [e] è vguale à i due angoli BED, BDE, *interni, ed opposti*: ma i due angoli BED, BDE, sono frà loro vguali, sarà l'angolo DBC *il doppio dell'angolo BED*. E perche l'angolo DBC è vguale all'angolo DCB, *stante che i lati* DB, DC, [f] sono frà loro vguali, l'angolo ancora DCB sarà *il doppio dell'angolo BED*, e perciò i due angoli DBC, DCB, insieme giunti, sono *il quadruplo dell'angolo E*. Nel triangolo BDC il lato CD è continuato verso A, dal che l'angolo esterno ADB [g] sarà vguale à i due angoli DBC, DCB: ma questi sono il quadruplo dell'angolo E, sarà l'angolo ADB il quadruplo dell'angolo E: fù mostrato l'angolo ADB essere il quadruplo dell'angolo CDB, l'angolo dunque CDB sarà vguale all'angolo E. Si considerino i due triangoli DCB, DCE, de' quali l'angolo CDB è vguale all'angolo E, e l'angolo DCB è commune; i due angoli BCD, BDC, del triangolo BDC, saranno vguali à i due angoli DCE, DEC, del triangolo DCE, ed il rimanente angolo CBD [h] sarà vguale al restante angolo CDE, per la qual cosa i triangoli DCB, DCE, sono equiangoli, e la proportione di EC à CD [k] sarà come quella di CD à CB; ma CD è vguale alla retta BD, cioè ad EB; sarà dunque EC ad EB come la medesima EB à BC; dal che la retta EC [l] è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte è la retta BE, ch'è lato dell'esagono, come fù proposto dimostrare.

[a] 3. del 15.
[b] Corol. alla 15. del 4.
[c] 33. del 6.
[d] 5. del 1.
[e] 32. del 1.
[f] 5. del 5.
[g] 32. del 1.
[h] 32. del 1, K 4. del 6.
[l] 3. defin. del 6.

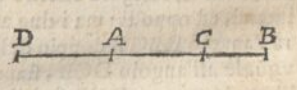
CO-

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato nello Scolio alla 5. propositione di questo, che se vna retta è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e dalla parte maggiore se ne detrae la minor parte, quella parte maggiore sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è quella detratta; sarà manifesto, che se dal lato dell'esagono se ne detragga il lato del decagono, iscritto nel medesimo circolo, il lato dell'esagono sarà diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte sarà il lato del decagono.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che se il lato del esagono è diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo.



Sia AB il lato dell'esagono iscritto in qualche circolo, e la retta AB sia diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, in modo, che AC sia la maggior parte, ed alla retta AB sia aggiunta la retta AD, vguale ad AC, per la 5. di questo, sarà DB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in A, e la maggior parte sarà AB, ch'è lato dell'esagono; e per l'antecedente propositione, la retta AD sarà il lato del decagono: ma AD è posta vguale ad AC, sarà dunque AC il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, ch'è il nostro proposito.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

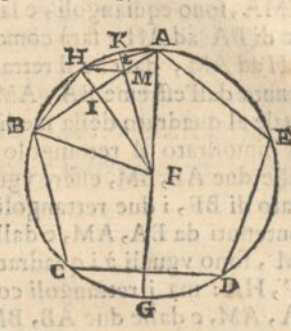
Se nel circolo è iscritto vn pentagono equilatero, ed equiangolo, il quadrato del lato del pentagono, è vguale al quadrato del lato dell'esagono, col quadrato del lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo.

Nel circolo ACD, il di cui centro F, sia iscritto il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo. Dico che il quadrato del lato AB è vguale

al

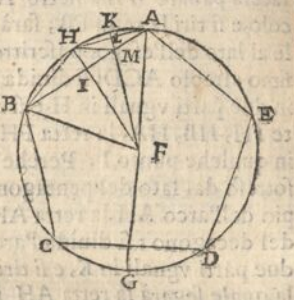
al quadrato del lato del esagono, col quadrato del lato del decagono, iscritto nel medesimo circolo ACD. Dal punto A, per il centro F, si faccia passare il diametro AG del circolo, e si tiri la retta FB; sarà FB [a] vguale al lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo ACD; si diuida l'arco AB [b] in due parti vguali in H, e si tirino le rette FH, HB, HA, la retta FH segarà AB in qualche punto I. Perche l'arco AB, sotteso dal lato del pentagono, è il doppio dell'arco AH, la retta AH sarà il lato del decagono; si diuida l'arco AH [c] in due parti vguali in K, e si tiri la retta FK la quale segarà la retta AH in qualche punto L; e la retta BA in qualche punto M; si tiri la retta HM. Perche l'arco BH è vguale all'arco HA, sarà l'angolo BFH [r] vguale all'angolo HFA. Si considerino i due triangoli FIB, FIA. Perche i due lati BF, FI, sono vguali à i due lati AF, FI, e l'angolo BFI è vguale all'angolo AFI, sarà la base BI [d] vguale alla base AI, e gli angoli in I saranno retti. Similmente essendo l'arco HK vguale all'arco KA, nell'istesso modo si proverà, che la retta HL è vguale alla retta LA; e che gli angoli in L sono retti. In oltre da gli vguali archi ABCG, AEDG (che sono circonferenze de i mezzi circoli) se ne detraggano gli vguali archi ABC, AED, resta l'arco CG vguale all'arco GD. E perche gli archi AB, CD, sono frà loro vguali, le loro metà, cioè gli archi CG, AH, sono frà di loro vguali: ma l'arco AH, per costruttione, è il doppio dell'arco HK, sarà l'arco CG il doppio dell'arco HK. Similmente perche l'arco AB è il doppio dell'arco BH, sarà l'arco CB il doppio dell'arco BH. Hor essendo l'arco CG il doppio dell'arco HK, e l'arco CB il doppio dell'arco BH, sarà tutto l'arco GB il doppio di tutto l'arco BK, e perciò l'angolo GFB [e] sarà il doppio dell'angolo BFK. E perche l'angolo GFB al centro è il doppio dell'angolo FAB [f] alla circonferenza, l'angolo dunque FAB sarà vguale all'angolo BFK. Si considerino i due triangoli ABF, FMB, de' quali l'angolo BFM è vguale all'angolo FAB, l'angolo FBM è commune ad ambidue, saranno i due angoli MFB, MBF, del triangolo FMB, vguali à i due angoli FAB, FBA, del triangolo BFA, ed il rimanente angolo FMB [g] sarà vguale al restante angolo BFA; dal che i triangoli FMB, FAB sono equiangoli, e sarà AB à BF [h] come la medesima BF ad MB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BM, [K] sarà vguale al quadrato della media BF.

Di nuouo nè i triangoli ALM, HLM, angoli retti in L; essendo AL vguale ad LH, i due lati AL, LM, saranno vguali à i due lati HL, LM, gli angoli ALM, HLM, sono frà di loro vguali, sarà la base HM [l] vguale alla base AM, e gli angoli MAH, MHA, frà di loro vguali: ma l'angolo HAM [m] è vguale all'angolo HBM (stante che le rette HA, HB, sono frà di loro vguali) sarà l'angolo AHM vguale all'angolo HBA. Si considerino i due triangoli HMA, HBA, de' quali l'angolo HBA è vguale all'



a Corol. alla 15. del 4.
b 30. del 3.
c 30. del 3.
r 27. del 3.
d 4. del 1.
e 33. del 6.
f 20. del 3.
g 32. del 1.
h 4. del 6.
K 17. del 6.
l 4. del 1.
m 6. del 1.

angolo AHM, e l'angolo HAB è commune ad ambidue, sarà il rimanente angolo AMH n vguale al restante angolo BHA; i triangoli HBA, HMA, sono equiangoli, e la proportione di BA ad AH o sarà come quella di AH ad AM, dal che il rettangolo contenuto dall'estreme BA, AM, p sarà vguale al quadrato della media AH. Ma fù dimostrato il rettangolo contenuto dalle due AB, BM, essere vguale al quadrato di BF, i due rettangoli dunque, contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, sono vguali à i quadrati delle due BF, HA: ma i rettangoli contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, q sono vguali al quadrato di BA, sarà al quadrato di BA vguale à i quadrati delle due BF, HA, cioè il quadrato di AB, lato del pentagono, è vguale al quadrato di BF, lato dell'esagono, col quadrato di HA, ch'è il lato del decagono, come fù proposto dimostrare.



n 32. del 1.
o 4. del 6.
p 17. del 6.
q 1. del 2.

COROLLARIO I.

Appare da quel, che si è dimostrato, che quando vna retta, tirata dal centro d'vn circolo, diuide vn arco in due parti vguali, diuiderà ancora la retta, che sottende quell'arco in due parti vguali, & ad angoli retti, stante che si è dimostrato, che la retta FH, la quale diuide l'arco BA in due parti vguali, diuide ancora la retta BA in due parti vguali, & ad angoli retti.

COROLLARIO II.

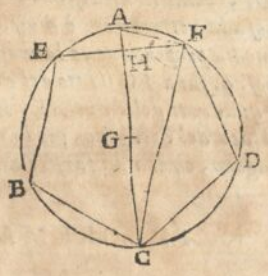
Essendosi dimostrato, che la retta FG diuide l'arco CD in due parti vguali, per l'antecedente Corollario, diuide la retta CD in due parti vguali, & ad angoli retti. Dond'è manifesto, che il diametro del circolo, tirato da vn angolo del pentagono, diuide il lato opposto in due parti vguali, & ad angoli retti, e diuide l'arco sotteso dal lato opposto in due parti vguali; & il medesimo succede in tutti i poligoni equilateri, ed equiangoli iscritti nel circolo, quando sono di lati di numero disparo, il che tutto si dimostra nel modo sudetto.

SCO-

SCOLIO I.

Quì facilmente si può dimostrare il seguente Theorema.

Il quadrato della retta, che sottende l'angolo del pentagono, col quadrato del lato del medesimo pentagono, è il quintuplo del quadrato del semidiametro del circolo, doue è iscritto quel pentagono.



Nel circolo ABCD, il di cui centro G, sia iscritto il pentagono EBCDF, equilatero, ed equiangolo, e sia tirata la retta CF, che sottenda l'angolo CDF del pentagono; e dall'angolo C, per il centro G, si faccia passare il diametro CG, il quale continuato segarà il lato EF, per l'antecedente Corollario, in due parti vguali, & ad angoli retti, e segarà l'arco EAF in due parti vguali in qualche punto A. Dico che i quadrati delle rette CF, FE, giunti insieme, sono il quintuplo del quadrato del semidiametro GA. Si tiri la retta FA, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che FA è lato del decagono iscritto nel circolo EBCD. Perche AC è il doppio di AG, sarà il quadrato di AC [a] il quadruplo del quadrato di AG: ma il quadrato di AC [b] è vguale à i quadrati delle rette CF, FA; i quadrati dunque delle rette CF, FA, saranno il quadruplo del quadrato di AG; à i quadrati delle due CF, FA, s'aggiunga il quadrato di AG, i quadrati delle tre CF, FA, AG, saranno il quintuplo del quadrato di AG: ma il quadrato di EF [c] è vguale à i quadrati delle due GA, AF, perciò i quadrati delle due CF, FE, sono il quintuplo del quadrato di GA, come fù proposto dimostrare.

a Scolio alla 4. del 2.
b 47. del 1.
c 10. del 13.

SCOLIO II.

Non sarà inutile aggiungere quì quel, che Tolomeo spiega nella prima propos. del primo libro del suo Almagesto.

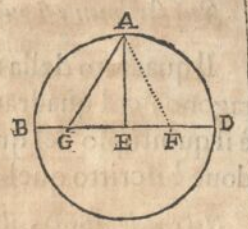
In vn dato circolo ritrouare il lato del decagono, e del pentagono iscritto nel medesimo circolo.

Sia il circolo dato ABCD, il di cui diametro BD, ed il centro E, nel quale sia eleuata, la retta EA [a] perpendicolare al diametro BD; e si voglia ritrouare il lato del decagono, e del pentagono da iscriuersi nel medesimo circolo ABCD. Si diuida il semidiametro ED [b] in due parti vguali in F, si tiri la retta FA, e si faccia FG [c] vguale ad FA; si tiri la retta GA. Dico che EG è il lato del decagono, e che la retta AG è il lato del pentagono. Perche la ret-

a 11. del 1.
b 10. del 1.
c 3. del 1.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [748] - 731
PUBLIC DOMAIN

ta DE è diuiſa in due parti vguali in F, e gli è aggiunta la retta GE, il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, col quadrato di EF, d *è vguale al quadrato di FG, cioè vguale al quadrato di FA; mà il quadrato di FA* e *è vguale à i quadrati de i due lati AE, EF, ſarà il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, col quadrato di FE, vguale à i quadrati delle due AE, EF; ſe ne leui il commune quadrato di EF, reſta il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, vguale al quadrato di AE, cioè vguale al quadrato di ED; e ſarà GD à DE,* f *come la medeſima DE ad EG; per la qual coſa la retta DG* g *è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte è il lato dell'eſagono DE, e per la propoſ. 9. ſarà EG il lato del decagono. E perche il quadrato di GA* h *è vguale à i quadrati delle due AE, EG, eſſendo AE vguale al lato dell'eſagono, ed EG il lato del decagono, per la propoſitione 10. di queſto, ſarà AG il lato del pentagono, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*



d 6. del 2.
e 47. del 1.
f 17. del 6.
g 3 definit. del 6.
h 47. del 1.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se il diametro d'vn circolo è Rationale, il lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcritto in quel circolo, e linea irrationale, ed è quella, che ſi chiama minore.

Habbia il circolo ACD il diametro Rationale, e *nel circolo ACD, ſia* iſcritto il pentagono equilatero, ed equiãgolo *ABCDE. Dico, che* ciaſcun lato, come AB è linea *irrationale, ed è quella, che ſi chiama* minore. Per gli angoli B, ed A, *e per il centro F, ſi facciano* paſſare i diametri AG, BH, *e ſeghi AG il lato CD in* qualche punto I, per il ſecondo Coroll. all'antecedente propoſitione, la retta AG diuide l'arco CD in due parti vguali in G, e diuide ancora la retta CD in due parti vguali, & ad angoli retti in I. Dal ſemidiametro FH ſe ne tagli la quarta parte FL, e dalla retta CA ſi tagli la quarta parte CM. Perche il diametro BH, per ipoteſi, è Rationale, la ſua metà BF, ouero FH, a che gli è commenſurabile, è Rationale, e la retta FL, ch'è commenſurabile ad FH, b ſarà ancora Rationale; per la qual coſa tutta la compoſta BL, c che è commenſurabile all'vna, ed all'altra, ſarà parimente Rationale.

a 6. definit. del 10.
b 6. definit. del 10.
c 16. del 10.

Perche le rette BA, BC, per ipoteſi, ſono frà loro vguali, ſarà l'arco BC d vguale all'arco BA, e per il primo Coroll. all'antecedente propoſitione, la retta BH ſega la retta CA in due parti vguali, & ad angoli retti nel punto K. Si conſiderino i due triangoli AIC, AKF, angoli retti in I, & K, de'quali l'angolo CAI è commune, ſarà il rimanente angolo ACI e vguale al reſtante angolo AFK, dal che i triangoli ACI, AKF, ſono equiangoli, e la proportione di IC à CA f ſarà come quella di KF ad FA; e permutando, ſarà IC ad FK; g come CA ad FA, cioè come CA

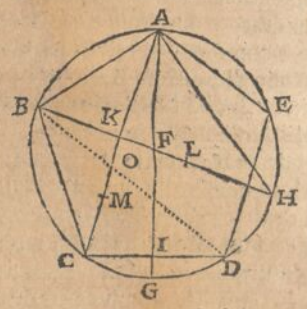
d 28. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 5.

ad FH:

adFH : ma CA ad FH è come la quarta parte di CA alla quarta parte di FH, cioè come CM ad FL, sarà IC ad FK, h come CM ad FL, e permutando, IC à CM k sarà come KF ad FL; e perche IC à CM è come il doppio al doppio, cioè come DC à CK, sarà DC à CK l come KF ad FL; componendo le due insieme DC, CK, à CK, m sarà come KL ad LF; ed il quadrato della retta, composta delle due DC, CK, n al quadrato di CK, sarà come il quadrato di KL al quadrato di LK.

h 11. del 5.
k 16. del 5.
l 11. del 5.
m 18. del 5.
n 22. del 6.

Si tiri la retta BD, la quale segarà la retta AC in qualche punto O, per l'8. propos. di questo, la retta AC sarà diuisa in O secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte OD g sarà vguale al lato CD del pentagono. Hor se alla maggior parte DO, ouero DC, s'aggiunge la metà di DB, cioè la metà di AC, ch'è la retta CK, il quadrato della retta composta delle due DC, CK, per la 1. propos. di questo, è il quintuplo del quadrato di CK: ma il quadrato della retta composta delle due DC, CK, al quadrato di CK, si è dimostrato essere come il quadrato di KL al quadrato di LF; sarà il quadrato di KL il quintuplo del quadrato di LF; cioè il quadrato di KL al quadrato di LF, sarà come numero à numero, e perciò i quadrati delle rette KL, LF, o sono commensurabili, ed i loro lati KL, LF, saranno commensurabili almeno in potenza: ma LF fù dimostrata Rationale, sarà la retta KL, p che gli è commensurabile, Rationale.



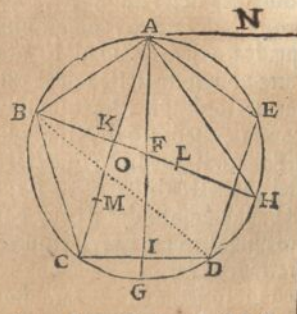
g 8. del 13.
o 6. del 10.
p 6. definit. del 10.

In oltre, perche HF, ouero FB, è il quadruplo di FL, sarà BL il quintuplo di LF: mà il quadrato di KL fù dimostrato il quintuplo del quadrato di LF, sarà il quadrato di KL al quadrato di LF, q come BL ad LF; ed inuertendo, il quadrato di LF al quadrato di LK r sarà come LF ad LB. Si considerino tre quantità, la prima sia LF, la seconda LK, e la terza LB. Perche il quadrato della prima LF al quadrato della seconda LK, è come la prima LF alla terza LK, ed il quadrato di LF al quadrato di LK t hà duplicata proportione, che la prima LF alla seconda LK; sarà la proportione di LF ad LB duplicata di quella, che hà la prima LF alla seconda LK; e perciò le tre quantità LF, LK, LB, sono continue proportionali; e sarà BL ad LK, come LK ad LF, ed il quadrato di BL al quadrato di LK u sarà come il quadrato di KL al quadrato di LF: ma il quadrato di KL è il quintuplo del quadrato di LF, sarà il quadrato di BL il quintuplo del quadrato di LK, e perciò il quadrato di BL al quadrato di LK, per lo Scolio nel fine del 9. non è come numero quadrato à numero quadrato, ed in conseguenza le rette BL, LK, x sono incommensurabili in lunghezza. E perche le rette BL, LK, furono dimostrate Rationali, saranno dunque le rette BL, LK, Rationali, commensurabili solamente in potenza. Si che, detratta dalla Rationale BL, la Rationale KL, commensurabile solamente in potenza, la rimanente BK y sarà irrationale, e sarà quella, che si chiama Apotome, la di cui congruente è la retta KL. Dal quadrato

q 11. del 5.
r Coroi. alla 4. del 5.
t 20. del 6.
u 22. del 6.
x 9. del 10.
y 74. del 10.

di BL

z Lem. dopo la 14. del 10. di BL se ne detragga il quadrato di KL, z ed il restante sia il quadrato della retta N. Perche il quadrato di BL è il quintuplo del quadrato di LK, detratto dal quadrato di BL la sua quinta parte, cioè il quadrato di LK, il rimanente, cioè il quadrato della retta N, sarà il quadruplo del quadrato di KL; e perciò di quelle parti, che il quadrato di BL è cinque il quadrato della retta N sarà quattro; ed in conseguenza il quadrato di BL al quadrato di N, sarà come numero à numero: per la qual cosa i quadrati di BL, e di N, a sono commensurabili, ed i loro lati BL, ed N, sono commensurabili almeno in potenza. E perche la retta BL fù dimostrata Rationale, sarà ancora la retta N, b che gli è commensurabile, Rationale. In oltre, perche il quadrato di BL al quadrato della retta N, è come 5 à 4, per lo Scolio nel fine del 9, i quadrati delle due BL, ed N, non sono come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette BL, ed N c sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, saranno le rette BL, ed N, Rationali, commensurabili solamente in potenza. Di più, essendo la Rationale BF commensurabile in lunghezza alla sua quarta parte FL, sarà tutta la composta BL d commensurabile in lunghezza ad FB: ma FB è commensurabile in lunghezza al suo doppio BH, sarà BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH. E perche il quadrato della Rationale BL supera il quadrato della congruente LK, per il quadrato della retta N, incommensurabile in lunghezza alla composta BL, essendo BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH, per la 4. delle terze definitioni del 10, la retta BK sarà quarta Apotome.



a 6. del 10.

b 6. definit. del 10.

c 9. del 10.

d 16. del 10.

e 31. del 3. Finalmente, perche l'angolo BAH e nel mezzo circolo è retto, e la retta AK è perpendicolare al diametro HB, per il Corollario all'8 del sesto, sarà AB media proportionale frà le due HB, BK, e sarà il quadrato di AB f vguale al rettangolo contenuto dalle due HB, BK. Hor essendo il quadrato della retta AB vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale BH, e dalla quarta Apotome BK, per la 95 propos. del 10, la retta AB sarà quella retta, che si chiama Minore. Per la qual cosa supposto il diametro BH Rationale, il lato AE del pentagono iscritto nel circolo ABCD; sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Minore, ch'era da dimostrarsi.

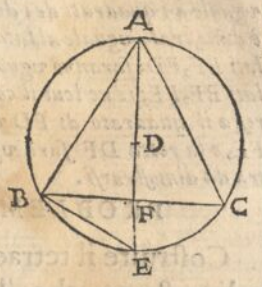
f 17. del 6.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto nel circolo, è il triplo del quadrato del semidiametro del medesimo circolo.

Nel circolo ABC sia iscritto il triangolo equilatero ABC. Dico che il quadra-

quadrato del lato AB è il triplo del quadrato del ſemidiametro del circolo ABC. Dall'angolo A, per il centro D, ſi faccia paſſare il diametro AE, il quale, per il Corollario 2. alla 10. propoſ. di queſto, diuide l'arco BEC in due parti vguali in E, e diuide ancora la retta BC in due parti vguali, & ad angoli retti in F; ſi tiri la retta BE. Perche BC è lato del triangolo equilatero, perciò l'arco BEC,[a] che lo ſottende, ſarà la terza parte di tutta la circonferenza ABC, e l'arco BE ſua metà ſarà la ſeſta parte della medeſima circonferenza; per la qual coſa la retta BE, che ſottende la ſeſta parte della circonferenza ABEC, ſarà il lato dell'eſagono; e per il Coroll. alla 15. prop. del quarto, ſarà BE vguale al ſemediametri ED. E perche l'angolo ABE, nel ſemicircolo ABC,[b] è retto, ſarà il quadrato di AE[c] vguale à i quadrati de i due lati AB, BE: ma il quadrato di AE, per lo ſcolio alla 4. del 2. è il quadruplo del quadrato di ED, cioè il quadruplo del quadrato di BE, i quadrati delle due AB, BE, ſaranno il quadruplo del quadrato di BE. Per la qual coſa il quadrato di AB ſarà il triplo del quadrato di BE: ma BE è vguale al ſemidiametro DE, ſarà il quadrato del lato AB il triplo del quadrato del ſemidiametro DE, ch'era da dimoſtrarſi.



a 28. del 3.

b 31. del 3.
c 47. del 1.

COROLLARIO I.

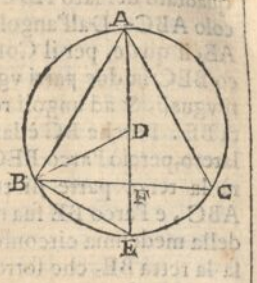
Da quel che s'è detto è manifeſto, che il quadrato del diametro del circolo è nella proportione ſeſquitertia al quadrato del lato del triangolo equilatero, iſcritto in eſſo circolo.

Poiche eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato del lato AB è il triplo quadrato del ſemidiametro AD, ſuppoſto che il quadrato di AB, ſia 3, ſarà il quadrato di AD 1; ma il quadrato del diametro AE è il quadruplo del quadrato di AD, ſe il quadrato di AD è 1, ſarà il quadrato di AE 4, e perciò il quadrato del diametro AE al quadrato di AB ſarà come 4 à 3, cioè nella proportione ſeſquitertia, come ſi diſſe.

COROLLARIO II.

E' ancora manifeſto, che il lato BC, del triangolo equilatero ABC, diuide il ſemidiametro DE in due parti vguali in F.

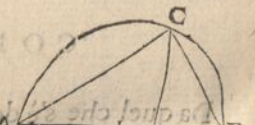
Si tiri la retta DB. Essendosi dimostrato BE essere lato dell'esagono, sarà BE vguale al semidiametro BD; e perche gli angoli in F sono retti,
a 47. del 1. *sarà il quadrato di BD a vguale à i quadrati de i due lati BF, FD; e similmente il quadrato di BE è vguale à i quadrati de i due lati BF, FE; ma BD è dimostrato vguale al lato BE, i quadrati de i due lati BF, FD, saranno vguali à i quadrati de i due lati BF, FE; se ne leui il cõmune quadrato di BF, resta il quadrato di FD vguale al quadrato di FE, e la retta DF sarà vguale alla retta FE, ch' era da dimostrarsi.*

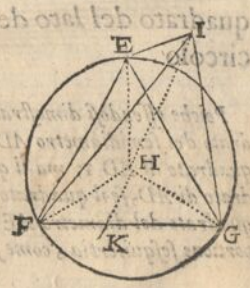


PROBLEMA I. PROPOSITIONE XIII.

Costruire il tetraedro, e comprenderlo nella data sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della data sfera è in proportione sesquialtera al quadrato del lato del tetraedro costrutto.

Sia AB il diametro della data sfera, sopra il quale si descriua il mezzo circolo ACB; si faccia BD vguale alla terza parte di AB, e nel punto D
a 11. del 1. si eleui la retta DC a perpendicolare ad AB, concorrẽte con la circonferenza in qualche punto C; si tirino le rette AC, CB; si prenda poi la retta HE vguale alla retta CD, e fatto centro in H, coll'interuallo EH, si descriua il circolo EFG; nel quale
b 2. del 4. b s'iscriua il triangolo equilatero EFG; si tirino le rette HF, HG, sarà HF, ouero HG, vguale ad EH, cioè vguale alla retta CD. Nel punto H si eleui la retta HI
c 12. del 11. d 3. definit. del 11. c perpendicolare al piano EFG, gli angoli IHE, IHF, IHG saranno retti. Si faccia HI
e 3. del 1. e vguale ad AD, e si tirino le rette IE, IF, IG. Dico che il solido contenuto dai quattro triangoli IEF, IFG, IGE, EFG, è quella piramide, ò tetraedro, che si è proposto fare. Si considerino i due triangoli ADC, IHE. Perche i lati IH, HE, per costruttione, sono vguali à i due lati AD, DC, e gli angoli IHE, ADC,
f 4. del 1. sono frà loro vguali, stante che sono retti, sarà la base AC f vguale alla base IE. Nell'istesso modo, considerando i triangoli ADC, IHF, IHG, si dimostrerà, che ciascuno de i lati IF, IG, è vguale ad AC, e perciò i tre lati IE, IF, IG, sono frà di loro vguali. In oltre per il Coroll. all'8. prop. del 6. la retta CD è media proportionale frà le due AD, DB, e per il Lem. 8. dopo la 18. del 6, la prima AD alla terza DB hà duplicata proportione





di

di quella, che hà la prima AD alla seconda DC: ma il quadrato di AD al quadrato di CD [g] hà la medesima duplicata proportione di quella, che hà AD à DC, sarà il quadrato di AD al quadrato di DC, [h] come AD à DB; e componendo, i quadrati delle due AD, DC, [K] giunti insieme, cioè il quadrato di AC al quadrato di CD sarà come AB à BD: ma AB, per costruttione, è il triplo di BD, sarà il quadrato di AC il triplo del quadrato di CD: fù fatta EH vguale à CD, sarà il quadrato di AC, cioè il quadrato di IE, il triplo del quadrato di EH: ma per l'antecedente propos. il quadrato del lato EF è il triplo del medesimo quadrato di EH, sarà il quadrato di IE vguale al quadrato di EF, e la retta IE vguale alla retta EF: ma le rette IE, IF, IG, sono frà di loro vguali, e sono ancora vguali le tre EF, FG, GE, saranno le rette IE, IF, IG, GE, EF, FG frà di loro vguali; dal che i quattro triangoli IEF, IFG, IGE, EFG, sono equilateri, e frà di loro vguali, ed il solido IEFG per la 26. defin. dell'11, è Tetraedro. Dico che la piramide, ò Tetraedro, IEFG, il di cui vertice I, e la base EFG, è quella, che si comprende nella data sfera; e che il quadrato del diametro AB è sesquialtero al quadrato del lato EF.

g 20. del 6.
h 11. del 5.
K 18. del 5.

Si continui la perpendicolare IH verso K, e si faccia HK [l] vguale alla retta DB; sarà tutta IK vguale ad AB. Perche l'angolo IHE è retto, sarà la retta EH [m] perpendicolare alla retta IK: ma le tre rette IH, HE, HK, per costruttione, sono vguali alle tre rette AD, DC, DB, e queste sono continue proportionali; le tre rette ancora IH, HE, HK, saranno continue proportionali; dal che il rettangolo contenuto dalle due IH, HK, [n] sarà vguale al quadrato della perpendicolare HE; e per lo Scolio alla 17. propos. del 6, il punto E è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il punto F, come ancora il punto G, è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Se dunque si concepisce IK come Asse della sfera, ed intorno ad esso s'intenda circonuoluto il semicircolo, che passa per i punti I, E, K, la circonferenza di quello passerà per i punti G, ed F, e sarà descritta la sfera, il di cui diametro IK è vguale al diametro AB della data sfera, per la qual cosa la sfera descritta comprende il costrutto Tetraedro.

l 3. del 1.
m 3. definit. del 11.
n 17. del 6.

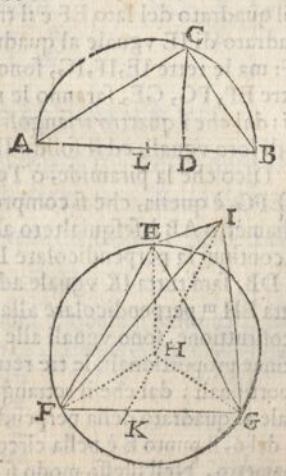
Finalmente, perche AB, per costruttione, è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 3, la retta DB sarà 1, e la retta AD sarà 2, dal che BA ad AD sarà come 3 à 2, cioè sarà nella proportione sesquialtera. Di più, perche AC, per il Coroll. all'8. prop. del 6, è media proportionale frà le due BA, AD, haverà la prima BA alla terza AD [o] duplicata proportione di quella, che hà la prima BA alla seconda AC: ma il quadrato di BA al quadrato di AC [p] hà la medesima duplicata proportione, che hà BA ad AC, sarà il quadrato di BA al quadrato di AC, [q] come BA ad AD: fù dimostrata BA essere nella proportione sesquialtera ad AD, sarà il quadrato di AB sesquialtero al quadrato di AC. E perche IK è vguale ad AB, ed il lato EF è dimostrato vguale ad AC, sarà il quadrato di IK sesquialtero al quadrato di EF. Per la qual cosa il quadrato del diametro della data sfera è nella proportione sesquialtera al quadrato del lato della piramide costrutta IEFG, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

o Lem. 8. dopo la 18. del 6.
p 20. del 6.
q 11. del 5.

COROLLARIO I.

Dal quel che si è detto è manifesto, che il quadrato del diametro della detta sfera è nella proportione quadrupla sesquialtera al semidiametro del circolo circoscritto intorno la base della costrutta piramide.

Poiche essendo il quadrato del diametro IK, ouero AB, nella proportione sesquialtera al quadrato del lato EF, di quelle parti, che il quadrato di IK è 9, il quadrato di EF sarà 6, ed il quadrato di EH sarà 2, (stante che il quadrato di EF è triplo al quadrato di EH,) e perciò di quelle parti, che il quadrato di IK, ouero AB, è 9, il quadrato di EH sarà 2: ma la proportione di 9 à 2 è quadrupla sesquialtera, sarà la proportione del quadrato di AB al quadrato di EH quadrupla sesquialtera, come si disse.



COROLLARIO II.

Appare ancora, *che la retta LD*, tirata dal centro della *sfera perpendicolare* al piano della base della piramide, ch'è quel piano, che passa per la retta DC, e fà angoli retti con AD, è la sesta parte di tutto il diametro AB, cioè la terza parte del semidiametro LB. Perche AB è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 6, la retta BD sarà 2, e la retta BL 3, dal che DL sarà 1, e perciò AB sarà sestupla ad LD, ed LB sarà tripla ad LD, come si disse.

COROLLARIO III.

Dalla costruttione è similmente manifesto, che l'altezza del Tetraedro è due terzi del diametro della sfera, che lo contiene, e di quelle parti, che il quadrato del dia-

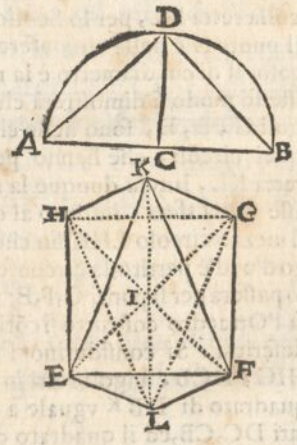
metro

metro è 9, il quadrato dell'altezza perpendicolare del detto Tetraedro è 4.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Costruire l'Ottaedro, e comprenderlo nella sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro costrutto.

Sia AB il diametro della data sfera, diuiso in due parti vguali in C, e fatto centro in C, coll'interuallo CA, ouero CB, sia descritto il mezzo circolo ADB; nel punto C, sia eleuata la retta CD [a] perpendicolare ad AB, e si tirino le rette DB, DA; poi si esponga la retta EF vguale alla retta DB, e sopra la retta EF [b] si descriua il quadrato EFGH; si tirino le diagonali GE, HF, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto I; se intorno al quadrato HEFG fosse circoscritto vn circolo, le rette IG, IH, IE, IF, sarebbero semidiametri di quel circolo, e perciò sono frà di loro vguali. Nel punto I si eleui la retta IK [c] perpendicolare al piano HEFG, la quale si continui sotto al piano HEFG verso L, e tanto IK, come IL, [d] si faccia vguale ad IH; si tirino le rette KH, KG, KE, KF, LF, LE, LG, LH. Dico che il solido contenuto da gli otto triangoli KHE, KEF, KFG, KGH, LFE, LFG, LGH, LHE, è l'Ottaedro proposto. Perche i lati GI, IH, del triangolo GIH, sono vguali à i due lati HI, IE, del triangolo HIE, e la base HG è vguale alla base HE, sarà l'angolo GIH [e] vguale all'angolo HIE, e perciò gli angoli GIH, HIE, sono retti. Similmente perche la retta KI è perpendicolare al piano HEFG, gli angoli KIH, KIG, KIF, KIE [f] sono retti. Si considerino i due triangoli HGI, HIK. Perche IK, è vguale ad IH, ouero IG, i due lati HI, IG, saranno vguali à i due lati HI, IK; gli angoli HIG, HIK, sono frà di loro vguali, stante che sono retti, sarà la base HG [g] vguale alla base HK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il medesimo lato HG è vguale al lato GK, per la qual cosa il triangolo KHG è triangolo equilatero. E procedendosi col medesimo ordine, si proverà, che tutti gli altri triangoli, sopra nominati, sono equilateri; e perche ogn'vno di quei triangoli hà per base vn lato del quadrato EFGH, essendo i lati del quadrato frà di loro



a 11. del 1.

b 46. del 1.

c 12. del 11.

d 3. del 1.

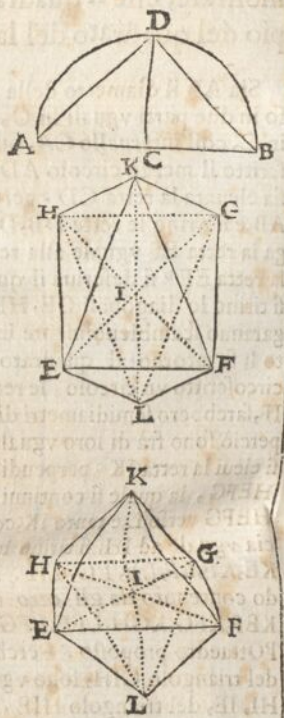
e 8. del 1.

f 3. defin. del 11.

g .4 del 1.

vguali, tutti i lati de i detti triangoli equilateri saranno frà di loro vguali, ed in conseguenza essi triangoli equilateri sono frà di loro vguali; e per la defin. 27. dell'11, il solido contenuto da i detti otto triangoli equilateri, ed vguali, è Ottaedro. Dico che l'Ottaedro costrutto si comprende nella sfera, il di cui diametro è AB; e che il quadrato del diametro AB è il doppio del quadrato del lato KH, ouero KG &c.

Perche le tre rette LI, IH, IK, sono, per costruttione, frà loro vguali, sarà LI ad IH come IH ad IK, ed il rettangolo contenuto dalle due LI, IK, [h] sarà vguale al quadrato di IH: e perche la retta IH fà angoli retti colla retta KL, per lo Scolio alla 17. del 6, il punto H è nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è la retta KL. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli G, F, E, sono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la retta KL. Intesa dunque la retta KL come asse della sfera, intorno al quale si muoua il mezzo circolo LHK, sin che torni nel luogo d'ond'è partito, la circonferenza di quello passerà per li punti G, F, E; per la qual cosa l'Ottaedro costrutto si cõtiene nella sfera descritta. Si considerino i due triangoli HIG, DCB, angoli retti in I, & C, sarà il quadrato di DB [K] vguale à i quadrati de i lati DC, CB, ed il quadrato di HG è vguale à i quadrati de' lati HI, IG: *ma i lati HG, DB, per costruttione, sono frà loro vguali, perciò i quadrati de i lati HI, IG, saranno vguali à i quadrati* de i lati DC, CB, e le loro metà, cioè i quadrati delle rette HI, CD, sono frà di loro vguali; ed in conseguenza la retta IH sarà vguale alla retta CD, ouero CB: furono fatte le rette IK, IL, ogn'vna vguale ad IH; sarà tutta l'asse KL vguale al dato diametro AB; per la qual cosa l'Ottaedro costrutto è iscritto nella data sfera



Finalmente perche gli angoli in C sono retti, ed i lati CB, BD, sono vguali à i due lati CD, CA, sarà la base DB [l] vguale alla base DA. E perche l'angolo ADB [m] nel mezzo circolo è retto, il quadrato di AB [n] sarà vguale à i quadrati de i due lati DB, DA: ma questi sono frà loro vguali, in conseguenza il quadrato di AB sarà il doppio del quadrato di DB. E perche AB è vguale all'asse KL della sfera, ed il lato DB è vguale ad HG, ouero HK, cioè vguale al lato dell'Ottaedro, sarà il quadrato di KL, diametro della sfera, il doppio del quadrato del lato HK dell'Ottaedro costrutto, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

h 17. del 6.
K 47. del 1.
l 4. del 1.
m 31. del 3.
n 47. del 1.

CO-

COROLLARIO I.

Perche gli angoli KIH, KIE, HIF, ſono, per quel che ſi è dimoſtrato, retti, ſarà manifeſto, che nell'Ottaedro tutte le diagonali ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti nel centro della ſfera, che lo contiene, ed in conſeguenza i tre piani HEFG, KELG, KHLF, che paſſano per quelle diagonali; ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti, e la loro commune ſettione ſarà la retta KL; ed eſſendo li angoli LEK,LGK ° ne i ſemicircoli, che hanno per diametro EK, ſaranno perciò retti,ed il quadrilatero KELG (i di cui lati ſono i medeſimi lati vguali dell'ottaedro)ſarà quadrato, e per ſimile ragione il quadrilatero KHLF è quadrato; d' onde appare, che li tre quadrilateri HEFG,KELG,KHLF, ſono figure quadrate vguali frà di loro. ° 31. del 3.

COROLLARIO II.

E ancora manifeſto, che ogn'vno di quei quadrati diuide l'Ottaedro in due piramidi di baſi quadrangolari, ſimili, ed vguali.

Poiche il quadrato HEFG diuide l'Ottaedro nelle due piramidi KHEFG, LFGHE, i di cui vertici ſono in L, & K, e la baſe commune è il medeſimo quadrato HEFG. Similmente il quadrato KHLF diuide l'ottaedro nelle due piramidi ELFKH, GFLHK, ed il quadrato KELG, lo diuide nelle due piramidi FGKEL, HELGK. E queſte piramidi ſono frà loro ſimili, ed vguali, ſtante che ſono contenute da triangoli equilateri, ed vguali, ed hanno per baſi vguali figure quadrate.

COROLLARIO III.

Perche dunque i quadrati, de' quali ogn'vno diuide l'ottaedro in due piramidi vguali, ſono tre ſoli, ſarà manifeſto, che l'ottaedro è diuiſo da quei tre quadrati in ſei vguali piramidi di baſi quadrangolari, due delle quali,preſe in qualunque modo, compongono tutto l'ottaedro.

COROLLARIO IV.

Se concepiremo iſcritti nella medeſima ſfera il Tetrae-

dro,

dro, e l'Ottaedro, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà in sesquitertia proportione al quadrato del lato del Tetraedro.

Poiche essendo il quadrato del diametro della sfera nella proportione sesquialtera al quadrato del lato del Tetraedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato del Tetraedro sarà 4. Similmente perche il quadrato del diametro della sfera è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3. D'ond'è manifesto, che di quelle parti, delle quali il quadrato del lato del Tetraedro è 4, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3, e perciò sono nella proportione sesquitertia.

COROLLARIO V.

Nel quadrato HEFG il lato HG è parallelo all'opposto lato EF, e nel quadrato HLFK il lato HK è parallelo all'opposto LF, dal che i due lati KH, HG, sono paralleli à i due lati EF, FL, ed in conseguenza il piano KHG è parallelo al piano ELF; ed arguendosi nell'istesso modo per gli altri, sarà manifesto, *che nell'Ottaedro i piani de i triangoli opposti sono frà loro* paralleli.



PROBLEMA III. PROPOSITIONE XV.

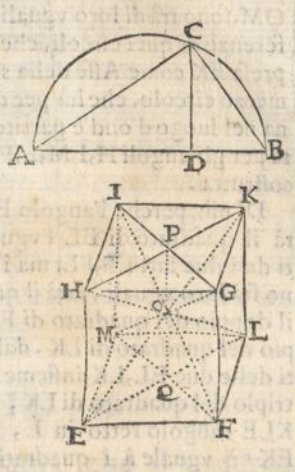
Costruire il Cubo, e comprenderlo nella data sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è triplo al quadrato del diametro del Cubo.

Sia AB il diametro della data sfera, intorno al quale sia descritto il mezzo circolo ACB. Si faccia BD la terza parte di AB, sarà AD il doppio di DB; nel punto D si eleui la retta DC [a] perpendicolare ad AB, e si tirino le rette CB, CA, si esponga poi la retta EF vguale alla retta CB; sopra la retta EF [b] si descriua il quadrato EFGH; ne i punti E, F, G, H, si eriggano le rette HI, EM, FL, GK, [c] perpendicolari al piano EFGH, ed ogn'vna [d] vguale alla retta CB, saranno frà di loro vguali, e

a 11. del 1.
b 46. del 1.
c 12. del 11.
d 3. del 1.

saran-

saranno ancora vguali à i lati del quadrato EFGH ; si tirino le rette IK , KL, LM, MI. Perche le rette GKHI , sono perpendicolari al piano EFGH, perciò sono , frà loro parallele , e le rette IK , HG , saranno frà loro vguali , e parallele; si che il quadrilatero IHGK è parellelogrammo, e per la 34. del 1, i lati , ed angoli opposti , sono frà di loro vguali ; cioè l'angolo IHG sarà vguale all'angolo IKG, e l'angolo KGH vguale all'angolo KIH : ma gli angoli KGH, IHG, sono retti , gli angoli dunque GKI , HIK , sono retti . Ed essendo i lati KG, GH, HI, frà di loro vguali , ed il lato HG f vguale al lato IK, i quattro lati IH, HG , GK, KI , sono frà di loro vguali : gli angoli IHG , HGK, GKI, KIH, sono stati dimostrati retti , e perciò il quadrilatero IHGK è quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri piani EG, EL, LI, IE, KF, che contengono il solido IEFK sono quadrati ; E perche sono eretti sopra gli vguali lati HE , EF , FG, GH, perciò sono frà di loro vguali , ed ogn'vno sarà vguale al quadrato IMLK, il quale g è simile , ed vguale all'opposto HEFG . Per la qual cosa il solido costrutto IEFH è Cubo . Dico che il Cubo IEFK è vguale à quello , che si può iscriuere nella sfera , il di cui diametro è AB . Ne i *piani opposti HK, EL*, si tirino i diametri HK , IG , EL, MF . Perche le due *HE, KL , sono* vguali , e parallele alla retta GF , saranno h frà loro vguali , e *parallele , e perciò le due KH, LE,* K sono frà loro vguali , e parallele , ed il quadrilatero *HELK è parallelogrammo* ; Nell' istesso modo si dimostrerà , che il *quadrilatero IMFG è parallelogrammo* . E perche ogn'vno de i piani HELK, IMFG , l *diuide il Cubo IEFK in* due parti vguali , perciò ambidue per il Corol. alla 39. prop. del 11. passano per il centro del Cubo IEFK; come per esempio per il punto O, e tirate le diagonali KE, IF, HL , GM , queste , per il citato Corollario si segano scambieuolmente in due parti vguali nel centro O. In oltre ne i quadrati EG, GL, gli angoli GFE, GFL, sono retti , e per ciò la retta GF m è perpendicolare al piano EFLM, e l'angolo GFM sarà retto ; per la qual cosa il parallelogrammo IMFG è rettangolo . Si considerino i due triangoli GFM, IMF; essendo i due lati GF, FM , vguali à i due lati IM, MF, e gli angoli GFM, IMF retti, cioè vguali , sarà la base IF n vguale alla base MG, e considerando il rettangolo HELK, nell'istesso modo si dimostrerà , che i diametri KE, HL, sono frà di loro vguali . Di nuouo si considerino i triangoli KLE , IMF . Perche il lato EL , come diametro del quadrato MEFL, è vguale ad MF, ed il lato KL è vguale ad IM , i due lati KL, LE, saranno vguali à i due lati IM, MF: li angoli KLE, IMF, sono vguali , stante che sono retti , sarà la base IF o vguale alla base EK ; per la qual cosa i diametri EK, IF, HL, GM, sono frà di loro vguali ; E



e 6. del 11.

f 34. del 1.

g 24. del 11.

h 9. del 11.
K 33. del 1.

l 28. del 11.

m 4. del 11.

n 4. del 1.

o 4. del 1.

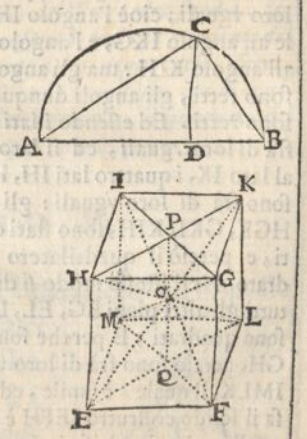
per

p Scol. alla 13. del 6.

per quel che si è detto, i semidiametri OK, OI, OH, OE, OF, OL, OG, OM, sono frà di loro vguali, ed i punti I, H, M, L, F, G, p sono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la diagonale EK: si che, presa EK come Asse della sfera, intorno alla quale s'intenda muouersi il mezzo circolo, che hà per diametro la medesima retta EK, sin che ritorna nel luogo d'ond'è partito, la superficie sferica, che descriuerà, passerà per gli angoli H, I, M, L, F, G, ed il Cubo IEFG sarà iscritto nella sfera costrutta.

q 47. del 1.

Di più, perche l'angolo EFL è retto, sarà il quadrato di EL q vguale à i quadrati de i due lati EF, FL; ma i lati EF, FL, sono frà loro vguali, sarà il quadrato di EL, il doppio del quadrato di FL, cioè il doppio del quadrato di LK, dal che i quadrati delle due EL, LK, insieme giunti, sono il triplo del quadrato di LK. Nel triangolo KLE, angolo retto in L, il quadrato di



r 47. del 1.

EK r è vguale à i quadrati de i due lati EL, LK: ma i due quadrati di EL, LK, sono il triplo del quadrato di LK, sarà il quadrato di EK il triplo del quadrato di LK, cioè il triplo del quadrato di EF: ma EF è è vguale alla retta CB, sarà il quadrato di EK il triplo del quadrato de CB. Di nuouo perche l'angolo ACB t nel mezzo circolo è retto, per il Corollario all'8. prop. del 6, la retta CB sarà *media proportionale* frà le due AB, BD, ed hauerà AB, à BD u *duplicata proportione* di quella, che hà AB à BC: *ma il quadrato di AB al* quadrato di BC x hà la *medesima duplicata proportione di quella*, che hà AB à BC sarà *il quadrato di AB al quadrato di BC* y come AB à BD: fù fatta, per *costruttione la retta AB il* triplo di BD, sarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di CB: ma per quel che si è dimostrato, il quadrato di EK è il triplo del quadrato della medesima CB, il quadrato dunque di EK sarà vguale al quadrato di AB, e la retta EK sarà vguale alla retta AB. Per la qual cosa la sfera descritta intorno al diametro EK, è vguale alla sfera, che si descriue intorno al dato diametro AB, e perciò il Cubo IEFK è quello, ch'è contenuto dalla sfera, il di cui diametro è AB. Finalmente essendosi dimostrato, che il quadrato di EK è il triplo del quadrato di EF, sarà dunque il quadrato del diametro della sfera triplo al quadrato del lato del Cubo iscritto, il che era da farsi, e dimostrarsi.

t 31. del 1.

u Lem. 8. dopo la 18. del 6.

x 20. del 6.

y 11. del 5.

COROLLARIO I.

Essendo la retta PQ cõmune settione de i piani HELK, IMFG, quella, per la 39. propos. dell'11. è diuisa dalla diagonale IF in due parti vguali in O; dal che OP, sarà vguale

ad OQ. E perche i punti P, & Q, ſono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli oppoſti quadrati, paſſa per il centro del Cubo, dou'è diuiſa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifeſto, che nella figura Cuba la retta tirata dal centro del quadrato al centro del quadrato oppoſto, paſſa per il centro del Cubo, nel quale è diuiſa da i diametri di eſſo Cubo in due parti vguali, ed oltre à ciò tutt'i diametri del Cubo ſi diuidono ſcambieuolmente in due parti vguali nel medeſimo centro.

COROLLARIO II.

Da quel che ſi è dimoſtrato appare, che il quadrato del diametro della ſfera è vguale al quadrato del lato del Tetraedro, col quadrato del lato del Cubo, iſcritto nella medeſima ſfera.

Il che è chiaro, conſiderando il mezzo circolo ACB, doue la retta AC, per la coſtruttione del Tetraedro, è vguale al lato del Tetraedro deſcritto nella ſfera, il di cui diametro ſia AB, e la retta CB, per l'antecedente propoſ. è il lato del Cubo iſcritto nella medeſima ſfera. E perche il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due rette AC, CB, ſarà il quadrato del diametro della ſfera vguale à i due quadrati, cioè vno è il quadrato del lato del Tetraedro, e l'altro è il quadrato del lato del Cubo iſcritto nella medeſima ſfera.

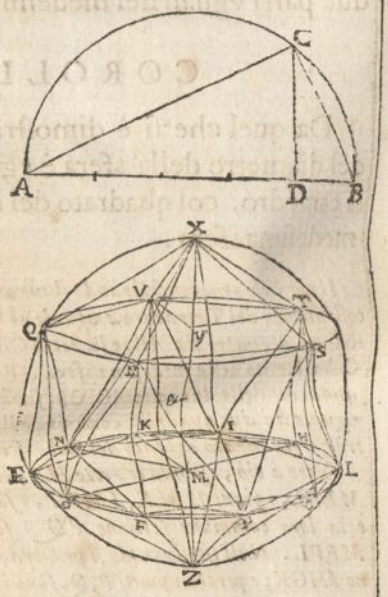
Oltre à ciò, eſſendo le rette HE, KL, IM, GF, perpendicolari al piano MEFL, i piani HELK, IMFG, [a] ſaranno perpendicolari al piano MEFL, e la loro commune ſettione PQ [b] ſarà perpendicolare al medeſimo piano MEFL. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che la retta OP è perpendicolare al piano IHGK; e perche i punti P, Q, ſono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli oppoſti quadrati, paſſa per il centro del Cubo, dou'è diuiſa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifeſto, che nella figura Cuba, la retta, che paſſa per il centro di vno de i quadrati, ed è perpendicolare al medeſimo quadrato, continuata concorre col diametro del Cubo nel centro del medeſimo Cubo, doue tutti i diametri di eſſo Cubo ſi diuidono ſcambieuolmente in due parti vguali. E perche la retta PQ è vguale, e parallela ad EH, la ſua metà OQ, ouero OP, ſarà vguale alla metà del lato HE del Cubo; dal che ſarà ancora manifeſto, che la retta tirata dal centro del Cubo al centro d'vno de i quadrati, è vguale alla metà del lato del Cubo.

a 8. del 11.
b 19. del 11.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XVI.

Costruire l'Icosaedro, e comprenderlo nella sfera, che contiene le altre figure antedette, e dimostrare, che il lato dell'Icosaedro è linea Irrationale, ed è quella, che si chiama Minore.

Sia AB il diametro della data sfera, intorno al quale sia descritto il mezzo circolo ACB; si faccia BD la quinta parte di AB, sarà AB il quintuplo di BD, nel punto D si eleui la retta DC [a] perpendicolare ad AB, e si tiri la retta CB. Sia poi esposto il circolo EFLK, il di cui semidiametro MH, ouero MO, sia vguale alla retta CB; e nel circolo EFLK sia iscritto [b] il pentagono EFG HK equilatero, ed equiangolo; si diuidano gli archi EF, FG, GH, HK, KE, [c] in due parti vguali ne i punti O, P, L, I, N, e si tirino le rette EO, OF, FP, PG, GL, LH, HI, IK, KN, NE. Perche la retta OP è lato del pentagono iscritto, sarà l'arco OP la quinta parte di tutta la circonferenza EFGHK, e la metà, cioè l'arco FP, sarà la decima parte della medesima circonferenza; per la qual cosa la retta FP sarà lato del decagono. Nell'istesso modo si proverà, che ogn'vna delle rette *PG, GL, LH, HI, IK, KN, NE, EO, OF*, è lato del decagono. Negli angoli del pentagono iscritto, cioè ne i punti E, F, G, H, K, si eriggano le rette EQ, FR, GS, HT, KV, [d] perpendicolari al piano [e] del circolo EFG HK, ciascuna delle quali si faccia vguale al semidiametro MH, del circolo EFGHK, e si tirino le rette QR, RS, ST, TV, VQ. Perche le rette QE, RF, SG, TH, VK, sono perpendicolari al piano EFGHK, perciò sono [e] frà di loro parallele; fù fatta ogn'vna di esse vguale al semidiametro MH, perciò sono frà di loro vguali, e parallele, e per la 33. propos. del 1. quelle, che congiungono gli estremi, sono frà di loro vguali, e parallele; per la qual cosa le rette RQ, QV, VT, TS, SR, sono vguali, e parallele alle corrispondenti FE, EK, KH, HG, GF; e per la 10. propos. del 11, l'angolo QRS è vguale all'angolo EFG, l'angolo RST è vguale all'angolo FGH, l'angolo STV vguale all'angolo GHK, l'angolo TVQ vguale all'angolo HKE, e l'angolo VQR vguale all'angolo KEF: dal che il poligono QRSTV



sarà

a 11. del 1.
b 11. del 4.
c 30. del 3.
d 12. del 11.
e 6. del 11.

sarà equilatero, ed equiangolo al poligono EFGHK: ma il poligono EFGHK, per costruttione, è pentagono equilatero, ed equiangolo, sarà il poligono RSTVQ pentagono equilatero, ed equiangolo. Da i punti O,P,L,I,N, à i punti R,S,T,V,Q, si tirino le rette OQ, OR, PR, PS, LS, LT, IT, IV, NV, NQ. Nel triangolo RFP, angolo retto in F, il quadrato di RP è vguale à i quadrati de due lati RF, FP: ma RF [f] è vguale al semidiametro MH, cioè è lato dell'esagono iscritto nel circolo EFGHK, e la retta FP, per quel che si è dimostrato, è lato del decagono iscritto nel medesimo circolo; sarà per la 10. propos. di questo, la retta RP il lato del pentagono iscritto nell'istesso circolo EFGHK. Nell'istesso modo, considerando il triangolo RFO, angolo retto in F, del quale RF è lato dell'esagono, ed FO è lato del decagono, si dimostrerà, che il lato RO è lato del pentagono; ed argumentandosi nel medesimo modo, si proverà, che ogn'vna dell'altre rette PS, LS, LT, IT, IV, NV, NQ, OQ, è lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, iscritto nel circolo EFGHK, e perciò sono frà di loro vguali; ed ogn'vna è vguale à ciascun lato del pentagono EFGHK, ed ancora vguale à ciascun lato del pentagono QRSTV; per la qual cosa i dieci triangoli QOR, ROP, RPS, SPL, SLT, TLI, TIV, VIN, NVQ, NQO, sono equilateri, ed vguali frà loro. Nel centro M si eleui la retta MX [g] perpendicolare al piano EFGHK, la quale si continui verso Z; si faccia MY vguale ad MH, cioè vguale al lato dell'esagono, e si faccia YX, come ancora MZ, vguale al lato del decagono, cioè vguale alla retta FP. Si tirino le rette XT, XS, XR, XQ, XV, VY, TY; e si tirino parimente le rette ZO, ZP, ZL, ZI, ZN, MK, MN. Perche le rette MY, HT, sono perpendicolari al piano EFLK, perciò [h] sono parallele; ma sono ancora vguali, stante che ogn'vna è vguale ad MH, in conseguenza le rette YT, MH, [K] che congiungono gli estremi, sono frà loro vguali, e parallele; ed essendo MH lato dell'esagono, sarà ancora YT lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo. In oltre perche YT è parallela ad MH, l'angolo XYT [l] sarà vguale all'angolo YMH: ma l'angolo YMH è retto, stante che XM [m] è perpendicolare al piano EFLK, l'angolo dunque XYT sarà ancora retto, ed il quadrato di XT [n] sarà vguale à i quadrati de i due lati XY, YT: fù dimostrata la retta YT essere lato dell'esagono, e la retta XY, per costruttione, è lato del decagono, per la 10. propos. di questo, XT sarà lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo. Nell'istesso modo, considerando il triangolo XYV, angolo retto in Y, si dimostrerà, che XV è lato del pentagono. E col medesimo modo d'argumentare, si proverà, che ciascuna delle rette XQ, XR, XS, è lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo EFLK. E perche le rette QR, RS, ST, TV, VQ, sono ancora lati del pentagono iscritto nel circolo QRSTV, ouero EFGH, tutti i lati dunque de i cinque triangoli XQR, XQS, XST, XTV, XVQ, sono frà di loro vguali, ed i detti cinque triangoli sono equilateri, ed vguali. Nell'istesso modo si proverà, che i cinque triangoli OZP, PZL, ZLI, ZIN, ZNO, sono equilateri, ed vguali. E perche le basi di questi triangoli sono i lati del pentagono EFGHK, e le basi de i triangoli XQR, XRS, XST, XTV, XVQ, sono i lati del pentagono QRSTV; essendosi dimostrati i lati del pentagono QRSTV vguali à i

f 47. del 1.

g 12. del 11.

h 6. del 11.

K 33. del 1.

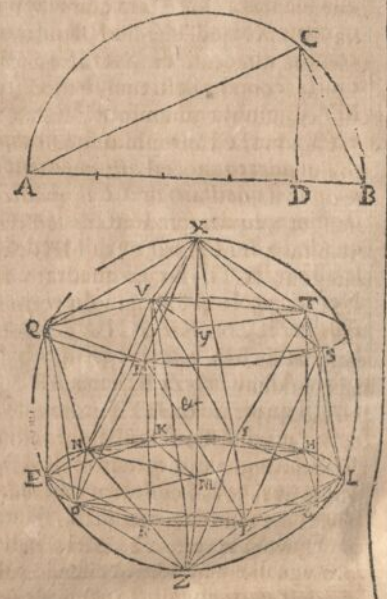
l 29. del 1.

m 3. definit. del 11.

n 47. del 1.

lati del pentagono EFGHK, ſaranno tutti i venti triangoli, che contengono il ſolido XQZLS, frà di loro vguali, ed equilateri, e per la 19. definit. del 11, il ſolido XQEZL ſarà Icoſaedro. Dico ch'è quello, che ſi comprende nella ſfera data, e che ciaſcun lato di eſſo Icoſaedro è linea Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Minore.

Si tiri la retta XO. Eſſendo il punto M centro del circolo EFLK, ſarà MN vguale ad MH, ouero MY, cioè ogn'vna ſarà il lato dell'eſagono; ma YX, per coſtruttione, è lato del decagono, ſarà MX compoſta del lato dell'eſagono, e del lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo; e per la 9. propoſ. di queſto, la retta MX ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, media proportione nel punto Y, la di cui maggior parte ſarà MY; dal che XM ad MY [o] ſarà come MY ad YX; ma MY è vguale ad MN, e la retta MZ è vguale ad YX, ſarà XM ad MN, come la medeſima MN ad MZ; ed il rettangolo contenuto dalle due XM, MZ, [p] ſarà vguale al quadrato della media MN. E perche la retta MN fà angoli retti con XZ, ſtante che XM è perpendicolare al piano *EFLK*, per lo *Scolio alla 17. propoſitione del 6, il punto* N è nella circonferenza di quel circolo, che hà per diametro la retta XZ. Similmente eſſendo ZM lato del decagono, e la retta MY lato dell'eſagono, ſarà ZY [q] diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e ſarà ZY ad YM, [r] come YM ad MZ. In oltre, perche le rette YM, VK, ſono perpendicolari al piano EFLK, perciò [t] ſono frà loro parallele: ma ſono, per coſtruttione, vguali, per eſſere ciaſcuna vguale ad MH, ſarà VY [u] vguale, e parallela ad MK, e ſarà l'angolo VYX [x] vguale all'angolo KMY; fù dimoſtrato l'angolo KMY retto, l'angolo dunque VYX ſarà retto. E perche MK è lato dell'eſagono, ſarà ancora VY lato del eſagono iſcritto nel medeſimo circolo EFLK; per la qual coſa YV ſarà vguale ad YM: e perche ſi è dimoſtrato, che ZY ad YM è come YM ad MZ, eſſendo MY vguale ad YV, e la retta MZ vguale ad YX, ſarà ZY ad YV, come la medeſima YV ad YX, ed il rettangolo contenuto dalle due ZY, YX, ſarà vguale al quadrato di YV, e per lo Scolio alla 17. del 6, il punto V è nella circonferenza di quel circolo, del quale ZX è diametro. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ciaſcuno degli altri angoli Q, R, S, T, O, P, L, I, è nel-



o 3. definit. del 6.
p 17. del 6.
q 9. del 13.
r 3. defin. del 6.
t 6. del 11.
u 33. del 1.
x 29. del 1.
y 17. del 6.

la

la circonferenza di quel circolo, del quale è diametro la medesima retta ZX. Si che presa ZX come Asse della sfera, intorno al quale si concepisca muouersi il semicircolo, che passa per li punti ZNX, sin che ritorna nel luogo, donde partì, la superficie sferica, che descriuerà, passerà per tutti gli angoli del costrutto Icosaedro. Si diuida MY [z] in due parti vguali in &. Perche XY è vguale ad MZ sarà &X vguale ad &Z, dal che XZ alla sua metà X& [a] sarà come MY ad Y&; e permutando, XZ ad YM [b] farà come X& ad &Y, ed il quadrato di XZ al quadrato di MY, [c] sarà come il quadrato di X& al quadrato di &Y. In oltre, perche MX è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in Y, e la maggior parte è MY, aggiunta alla minor parte XY la metà della maggior parte YM, ch' è Y&, per la 3. propos. di questo, il quadrato di X& sarà il quintuplo del quadrato di &Y. E perche il quadrato di X & al quadrato di &Y è come il quadrato di XZ al quadrato di MY, essendo il quadrato di X& il quintuplo del quadrato di & Y, sarà il quadrato di XZ il quintuplo del quadrato di MY, ouero di MH, che gli è vguale: ma MH è fatta vguale alla retta CB, sarà il quadrato di ZX il quintuplo del quadrato di CB. Nel triangolo ACB, angolo retto in C, essendo CD perpendicolare ad AB, per il Corollario all'8. del 6, la retta CB è media proportionale frà le due AB, BD, e sarà il quadrato di AB al quadrato di CB, [d] come la prima AB alla terza BD: ma AB, per costruttione, è il quintuplo di BD, sarà il quadrato di AB il quintuplo del quadrato di CB; fù dimostrato il quadrato di ZX essere il quintuplo del quadrato di CB, sarà il quadrato di ZX vguale al quadrato di AB, e la retta ZX vguale alla retta AB; per la qual cosa il costrutto Icosaedro si comprende nella data sfera, cioè è iscritto nella data sfera.

Finalmente dico, che il lato dell'Icosaedro è quella linea irrationale, che si chiama Minore. S'intenda diuiso il diametro XZ della sfera, in quante parti vguali si vogliono, sarà ZX [e] quella retta, che chiamiamo Rationale, rispetto alla quale *si farà la comparatione del lato dell'Icosaedro.* Hor perche il quadrato di ZX è il quintuplo *del quadrato di* MY, sarà il quadrato di ZX al quadrato di MY, come numero à numero, cioè come 10. à 2, ouero come 25. à 5, e perciò i quadrati di XZ, & YM, [f] sono commensurabili, e le rette XZ, YM, saranno commensurabili almeno in potenza; ma XZ è supposta Rationale, sarà MY, [g] che gli è commensurabile, Rationale: fù fatta MY vguale ad MH, sarà dunque MH Rationale, ed il suo doppio, cioè OH, sarà ancora Rationale. Nel circolo EFLK, il di cui diametro OH Rationale, è iscritto il pentagono equilatero EFGHK, per l'11. propos. di questo, ciascuno de suoi lati è irrationale, ed è quella linea, che si chiama Minore: ma il lato del pentagono iscritto nèl circolo EFLK è l'istesso, che il lato del icosaedro costrutto, sarà il lato del costrutto icosaedro linea irrationale, e sarà quella, che si chiama Minore, come fù proposto fare, e dimostrare.

z 10. del 1.

a 15. del 5.
b 16. del 5.
c 12. del 6.

d Lem. 8. dopo la 18. del 6. & 20. del 6.

e 5. definit. del 10.

f 6. del 10.

g 6. defin. del 10

COROLLARIO I.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, che il quadra-

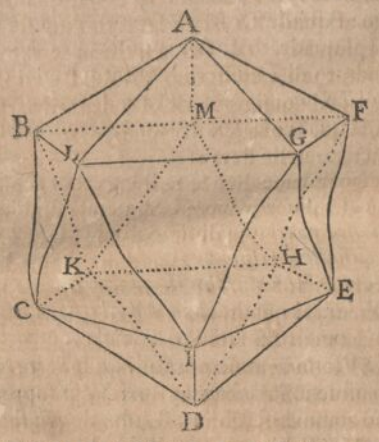
to del diametro della sfera, che comprende l'Icosaedro, è il quintuplo del quadrato del semidiametro di quel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli dell' Icosaedro, stante che si è dimostrato, che il quadrato di ZX è il quintuplo del quadrato di MH.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che il diametro della sfera, che contiene l'icosaedro, è composto del lato dell'esagono, e del doppio lato del decagono iscritto nel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli di esso Icosaedro.

SCOLIO.

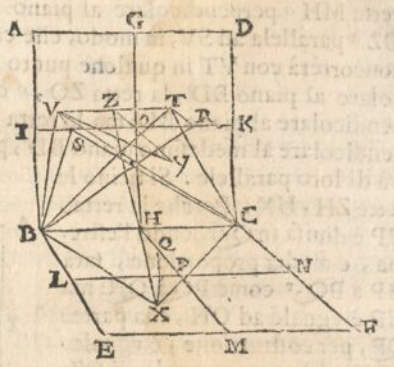
Gli angoli solidi dell' Icosaedro sono dodeci, come appare nella costruttione antecedente, e perciò dodeci piramidi, di basi pentagonali, si possono considerare nell'icosaedro, le quali hanno i vertici in essi angoli; come per esẽpio le piramidi collaterali sono le sei notate ABLGFM, FAGEHM, EFGIDH, DEHKCI, CDILBK, BCKMAL, i di cui vertici sono i punti A, F, E, D, C, B, e le basi sono i pentagoni BLGFM, AGEHM, FGIDH, EHKCI, DILBK, CKMAL, e dell'altre sei tre riguardano la parte, che si mostra à noi, i di cui vertici sono i punti L, I, G, e le basi sono i pentagoni BCIGA, LCDEG, ALIEF, e le altre tre, che sono dalla parte nascosta à noi, hanno i vertici ne i punti M, K, H, e le basi sono i pentagoni ABKHF, BCDHM, DEFMK. E per l'auuenire, quando si dirà il pentagono dell'icosaedro, douremo intendere vno degli antedetti pentagoni.



PROBLEMA V. PROPOSITIONE XVII.

Costruire il Dodecaedro, e comprenderlo nella sfera, che contiene l'antedette figure, e dimostrare, che il lato del Dodecaedro è linea Irrationale, che si chiama Apotome.

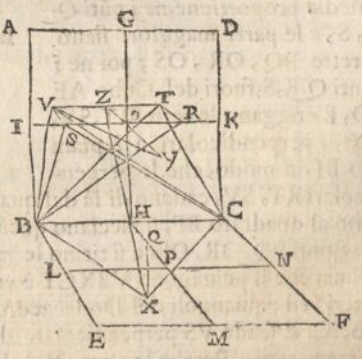
Sia il quadrato ABCD vna baſe del Cubo, che ſi comprende nella data ſfera, e ſia perpendicolare all'vguale quadrato BEFC, in modo, che la commune ſettione de i piani BD, BF, ſia lato commune di ambidue i quadrati BD, BF; ſi diuidano tutti i lati de i quadrati BD, BF, [a] in due parti vguali ne i punti G, I, H, K, L, M, N, e frà i punti oppoſti ſi tirino le rette GH, IK, LN, HM, le quali ſi ſegaranno ne i centri, O, & P, de i quadrati BD, BF, come appare nell'8. propoſ. del 4. Si ſeghino poi le rette OI, OK, HP, [b] ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ne i pũti Q, R, S, e le parti maggiori ſiano le rette PQ, OR, OS; poi ne i punti Q, R, S, fuori del Cubo AEFD, ſi eriggano le rette RT, SV, QX, [c] perpendicolari à i piani BD, BF, in modo, che le perpendicolari RT, SV, cadano di là dal quadrato BD, è la perpendicolare QX ſotto al quadrato BF, ſi facciano queſte perpendicolari vguali alle parti maggiori PQ, OR, OS, e ſi tirino le rette TV, TC, CX, XB, BV. Dico prima, che il pentagono VBXCT è vno di quei dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli del Dodecaedro da coſtruirſi. Si tirino le rette SB, SC. Eſſendo VS perpendicolare al piano BD, gli angoli VSB, VSC, [d] ſaranno retti. Perche la retta OI è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in S, e la parte maggiore è la retta OS, i quadrati delle due OI, IS, ſono il triplo del quadrato di OS: ma OI è vguale ad IB, i quadrati dunque delle due BI, IS, ſono il triplo del quadrato di SO; fù fatta SV vguale ad OS, ſaranno i quadrati delle due BI, IS, il triplo del quadrato di SV. E perche nel triangolo BIS, angolo retto in I, il quadrato di BS [f] è vguale à i quadrati delle due BI, IS, in conſeguenza il quadrato di BS ſarà il triplo del quadrato di SV, ed i quadrati delle due BS, SV, giunti inſieme, ſaranno il quadruplo del quadrato di SV. Ma nel triangolo BSV, angolo retto in S, il quadrato di BV [g] è vguale à i quadrati delle due BS, SV, ſarà il quadrato di BV il quadruplo del quadrato di SV; e per lo Scolio alla 4. del 2, la retta BV è il doppio della retta SV. In oltre, perche le rette VS, TR, ſono perpendicolari al piano BD, perciò [h] ſono frà di loro parallele; ſono ancora vguali frà loro (ſtante che ſono vguali alle vguali rette SO, OR) le rette dunque SV, RT, ſono frà loro vguali, e parallele; dal che le rette VT, SR, [k] ſono frà loro vguali, e parallele: ma RS è il doppio di SO, cioè di SV, ſarà VT il doppio di SV; per la qual coſa il lato VT ſarà vguale ad VB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli altri lati TC, CX, XB, ſono frà loro vguali, ed ogn'vno è vguale ad VT, ouero VB, e perciò il pentagono VBXCT è equilatero.



Di nuouo, perche il piano AC, per ipoteſi, è perpendicolare al piano

a 10. del 1.
b 30. del 6.
c 12. del 11.
d 3. definit. del 11.
e 4. del 13.
f 47. del 1.
g 47. del 1.
h 6. del 11.
K 33. del 1.

l 4. definit. del 11. no BF, perciò la retta OH, ch'è perpendicolare alla retta BC, l sarà perpendicolare al piano BF: ma la rerta XQ, per costruttione, è perpendicolare al medesimo piano BF, le rette dunque OH, XQ, m sono frà di loro parallele. Similmente, perche il piano BF fà angoli retti col piano BD, e la retta MH è perpendicolare alla commune settione BC, sarà la retta MH n perpendicolare al piano BD. Dal punto O si tiri la retta OZ o parallela ad SV, in modo, che cada dietro al quadrato BD, quella concorrerà con VT in qualche punto Z. Essendo la retta SV perpendicolare al piano BD, la retta ZQ, p che gli è parallela, sarà ancora perpendicolare al piano BD: ma la retta HM, ouero HQ, e dimostrata perpendicolare al medesimo piano BD, perciò le due rette OZ, HQ, q sono frà di loro parallele. Si tirino le rette ZH, HX. Perche la retta HP è diuisa in Q, secondo l'estrema, e media proportione, sarà HP à PQ, r come PQ à QH: ma HP è vguale ad OH, e la parte QP, per costruttione, è vguale à QX, ed è ancora vguale ad OZ; sarà OH ad OZ, come XQ à QH. Si considerino i due triangoli ZOH, HQX, che si toccano nell'angolo H, la proportione di XQ à QH è come quella di HO ad OZ, ed i lati homologhi XQ, HO, sono frà loro paralleli; come anco sono paralleli gli homologhi QH, OZ; *e per la 32. del 6, gli altri due lati XH, HZ, costituiscono la sola retta linea ZHX*. E perche le rette ZX, BC, *si segano nel punto H, perciò sono* t in vn medesimo piano, *ed in conseguenza il pentagono* equilatero VBXCT è in vn medesimo *piano; quale dico ch'è* ancora equiangolo.



r 3. definit. del 6.

t 2. del 11.

Si tirino le rette BT, BR. Perche la retta IO è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in S, la di cui maggior parte è OS, ch'è vguale ad OR, sarà IR u diuisa secondo l'estrema, e media proportione in O, e sarà IO la maggior parte, ed OR la minore; per la 4. propos. di questo, i quadrati delle due IR, RO, insieme giunti, sono il triplo del quadrato di IO, cioè il triplo del quadrato di IB: ma per costruttione RT è vguale ad RO, i quadrati dunque delle due IR, RT, sono il triplo del quadrato di IB; ed i quadrati di tutte tre le rette IR, RT, IB, saranno il quadruplo del quadrato di IB. E perche nel triangolo BIR, angolo retto in I, i quadrati delle due BI, IR, x sono vguali al quadrato di BR, i quadrati delle due BR, RT, saranno il quadruplo del quadrato di IB. Nel triangolo TRB l'angolo TRB y è retto, stante che la retta TR è perpendicolare al piano BD, e perciò il quadrato di BT, z è vguale à i quadrati delle due BR, RT: ma i quadrati delle due BR, RT, sono il quadruplo del quadrato di IB; il quadrato dunque di BT sarà il quadruplo del quadrato di IB. E perche il quadrato di AB, ouero BC, a è il quadruplo del

u 5. del 13.

x 47. del 1.

y 3. definit. del 11.

z 47. del 1.

a Scol. alla 4. del 2.

mede-

medesimo quadrato di IB, sarà il quadrato di BC vguale al quadrato di BT, e la retta BC sarà vguale alla retta BT. Nell'istesso modo, tirate le rette CS,CV,si dimostrerà, che la retta CV è vguale alla retta CB, dal che le tre rette CV, CB, BT, sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli BXC, CTV, de quali i due lati BX, XC, sono vguali à i due lati CT, TV, la base BC è dimostrata vguale alla base CV, sarà l'angolo BXC [b] vguale all'angolo CTV:e considerando i triangoli CTV TVB, nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo CTV è vguale all'angolo TVB. E perche nel pentagono equilatero VBXCT, i tre angoli BXC, CTV, TVB, sono frà loro vguali; per la 7. propos. di questo, il pentagono VBXCT sarà equiangolo. Tutto quello,che si è fatto nel lato BC, del Cubo EADF, si faccia in tutti gli altri vndici lati del medesimo Cubo, e sarà fatto vn solido, contenuto da dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli, quale douremo comprendere nella data sfera, e dimostrare, che il lato VB del Dodecaedro è linea irrationale, ed è quella, che si chiama Apotome. [b] 8. del 1.

Si prolunghi la retta ZO verso Y. Perche la retta OY cade nel centro O perpendicolarmente al quadrato BD, ch'è base del Cubo AEFD, per il 1. Coroll. alla 15. propos. di questo, continuata concorre col diametro del Cubo nel centro del medesimo Cubo, doue tutti i diametri di esso Cubo si diuidono in due parti vguali. Si faccia OY vguale ad IO, e si tiri la retta YV. Perche OY è vguale ad OI, e fù fatta OZ vguale ad OR, sarà ZY vguale ad IR. E perche fù dimostrato, che i quadrati delle due IR, RO, sono il triplo del quadrato di IO, e la retta IR è vguale ad YZ, saranno i quadrati delle due YZ,OR, il triplo del quadrato di IO. ma OR è vguale ad OS,cioè ad VZ, i quadrati dunque delle due YZ,ZV, saranno *il triplo del quadrato di OI*. In oltre, essendo le rette RT, VS, vguali, e *parallele*, saranno *le rette VT, SR*, [c] frà di loro vguali, e parallele; dal che gli angoli *SOZ,VZO*, [d] *sono* vguali à due angoli retti:ma l'angolo SOZ è retto, stante che *ZO è perpendicolare al piano BD*, sarà l'angolo VZO ancora retto;e perciò nel triangolo *YZV il quadrato di* VY [f] è vguale à i quadrati delle due YZ,ZV: ma i quadrati delle due YZ, ZV, sono il triplo del quadrato di IO, sarà il quadrato di YV il triplo del quadrato di IO. E perche il quadrato del diametro della sfera [g] è il triplo del quadrato dell'lato AB del Cubo iscritto nella medesima sfera,sarà il quadrato della metà del diametro della sfera il triplo del quadrato di IB, cioè del quadrato di OI: ma il quadrato di VY è ancora il triplo del quadrato di IO, sarà VY la metà del diametro della sfera, nella quale è iscritto il Cubo AEFD, ed il punto Y il centro della medesima sfera; per la qual cosa il punto V è nella superficie della medesima sfera. Nell' istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli B, X, C, T, come ancora i rimanenti angoli del costrutto Dodecaedro, sono nella medesima superficie sferica; e perche il Cubo AEFD si suppone iscritto nella sfera data, in conseguenza il Dodecaedro costrutto,sarà compreso, cioè iscritto nella medesima sfera. [c] 33.del 1. [d] 29. del 1. [e] 3 definit. del 11. [f] 47. del 1. [g] 15.del 13.

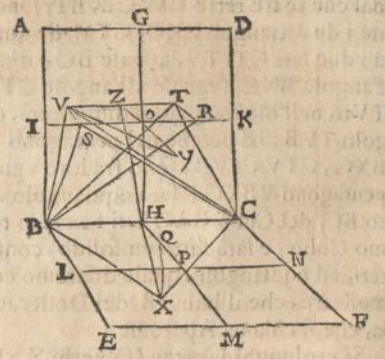
Finalmente,Dico che il lato del Dodecaedro è irrationale,ed è quella linea, che si chiama Apotome. Perche il quadrato del diametro della

sfera è triplo al quadrato del lato del Cubo iſcritto; perciò il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del Cubo iſcritto, è come numero à numero, cioè come 6. à 2; per la qual coſa il diametro della sfera h è commenſurabile in potenza al lato del Cubo. Suppoſto dunque il diametro della sfera Rationale, ſarà il lato del Cubo K ancora Rationale. Di più, perche la retta IO è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte è SO, ſarà IO ad OS l come OS ad SI; e duplato il tutto, ſarà IK ad SR, come è SR alla retta compoſta delle due IS, RK. Se dunque il lato del Cubo, cioè IK, ch'è dimoſtrato Rationale, ſi diuide ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà RS, cioè VT, che gli è vguale; e per la 6. propoſ. di queſto, il lato VT del Dodecaedro è linea irrationale, che ſi chiama Apotome, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

h 6. del 10.

K 6. defin. del 10.

l 3. defin. del 6.



COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrato, che diuiſa IK ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è *la retta SR, ouero* VT, e la minor parte è *la compoſta delle due IS*, RK, ſarà *manifeſto, che diuidendoſi il lato* IK del Cubo, ſecondo *l'eſtrema*, e media proportione, la maggior parte ſarà il lato VT del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera.

COROLLARIO II.

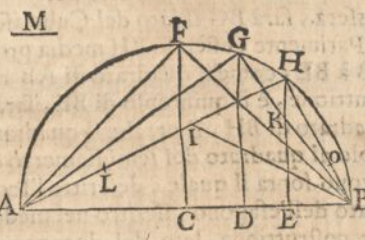
Appare ancora, che il lato del Cubo, cioè BC, ſottende l'angolo del pentagono, ch'è baſe del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera. Oltre à ciò, perche il lato del Cubo, cioè BC, che ſottende l'angolo BXC del pentagono, ſe è diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è vguale al lato del pentagono, ed aggiungendo alla retta BC la detta maggior parte, tutta la compoſta ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media propor-

tione,

tione, di cui la maggior parte sarà BC, sarà manifesto, che diuisa qualunque retta linea secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà il lato del Cubo, e la minor parte il lato del dodecaedro iscritto nella medesima sfera, dou'è iscritto il Cubo.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Ritrouare i lati de i cinque corpi regolari, e comparargli frà loro.



Sia AB il diametro della sfera diuiso in modo, che BC sia la metà di AB, la retta DB sia la terza parte di AB, e la retta EB la quinta parte della medesima AB: intorno al diametro AB sia descritto il mezzo circolo AFB, ne i punti C, D, E, [a] siano eleuate le rette CF, DG, EH, perpendicolari ad AB, e si tirino le rette AF, AG, AH, BF, BG, BH; dalla retta AH se ne tagli la parte HI [b] vguale al lato del decagono iscritto in quel circolo, del quale BH sia semidiametro, cioè sia lato dell'esagono; si diuida BG [c] secondo l'estrema, e media proportione, come nel punto K, e sia BK la parte maggiore. *Dico* prima, che AG è il lato della Piramide, ò Tetraedro, che *AF è il lato dell'Ottaedro*, la retta BG è il lato del Cubo, la retta BI è il lato *dell'Icosaedro*, *e la retta BK* è il lato del Dodecaedro.

a 11. del 1.

b 3. del 1.

c 30. del 5.

Perche DB è la terza parte di AB, di quelle parti, che il diametro AB è 3, la retta DB sarà 1, ed il rimanente AD 2; e perciò AB ad AD sarà come 3. à 2, cioè nella proportione sesquialtera. In oltre perche l'angolo AGB [d] è retto, e la retta GD è perpendicolare ad AB, per il Corollario alla 8. del 6, sarà AG media proportionale frà le due BA, AD, ed hauerà AB ad AD [e] duplicata proportione di quella, che hà AB ad AG: ma il quadrato di AB al quadrato di AG [f] hà la medesima duplicata proportione, che AB ad AG, hauerà il quadrato di AB al quadrato di AG [g] l'istessa proportione, che AB ad AD: ma AB è nella sesquialtera proportione ad AD, sarà il quadrato di AB nella sesquialtera proportione al quadrato di AG. E perche il quadrato del diametro della sfera è nella sesquialtera proportione [h] al quadrato del lato del Tetraedro iscritto nella medesima sfera, essendo AB il diametro della sfera, sarà AG il lato del Tetraedro iscritto.

d 31. del 3.

e Lem. 8. dopo la 18. del 6.

f 20. del 6.

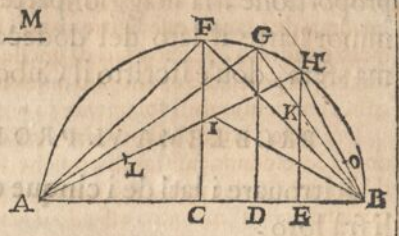
g 11. del 5.

h 13. del 13.

Di nuouo, perche AF è media proportionale frà le due BA, AC, sarà il quadrato di AB al quadrato di AF come AB ad AC; per costruttione AB è il doppio di AC, sarà il quadrato di AB il doppio del quadrato

K 14. del 13. di AF: ma il quadrato del diametro della sfera K è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro iscritto, posta AB diametro della sfera, sarà AF il lato dell'Ottaedro iscritto nella medesima sfera.

In oltre, perche BG è media proportionale frà le due AB, BD, sarà il quadrato di AB al quadrato di BG, come AB à BD: ma AB, per costruttione, è tripla à BD, sarà il quadrato di AB triplo al quadrato di BG. E perche



l 15. del 13. il quadrato della sfera l è triplo al quadrato del Cubo iscritto, se AB si prende come diametro della sfera, sarà BG il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera.

Parimente, essendo BH media proportionale frà le due AB, BE, sarà AB à BE, come il quadrato di AB al quadrato di BH; ma AB, per costruttione, è il quintuplo di BE, sarà il quadrato di AB il quintuplo del quadrato di BH. E perche il quadrato del diametro della sfera m è quintuplo al quadrato del semidiametro di quel circolo, che circonda il pentagono, sopra il quale è descritto l'Icosaedro, sarà BH il semidiametro, ò lato dell'esagono, iscritto nel medesimo circolo: fù fatta la retta HI, per costruttione, lato del decagono iscritto in quel medesimo circolo, i quadrati delle due BH, HI, insieme giunti, saranno vguali al quadrato del lato del detto pentagono: ma il quadrato di BI è vguale à i quadrati delle due BH, HI, sarà BI il lato di quel pentagono; e perche ogni lato di quel pentagono rappresenta vn lato dell'icosaedro, sarà BI il lato dell'icosaedro.

m Corol. 1. alla 16. del 13.

Finalmente, perche il lato BG del Cubo è diuiso secondo l'estrema, e media proportione in K, per il primo Coroll. alla 17. propos. di questo, la maggior parte BK sarà il lato del Dodecaedro, e saranno esposti i lati de i cinque corpi regolari iscritti nella medesima sfera, come fù proposto.

Per la comparatione de i lati ritrouati si osserui il seguente modo. Perche s'è dimostrato, che il quadrato del diametro della sfera è sesquialtero al quadrato del lato dell'Tetraedro, ed è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, e triplo al quadrato del lato del Cubo; di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, sarà il quadrato del lato del Tetraedro 4, quello dell'Ottaedro 3, e quello del Cubo 2. D'ond'è manifesto, che il quadrato del lato del Tetraedro è nella proportione sesquitertia al quadrato del lato dell'Ottaedro, e dupla à quello del Cubo; ed il quadrato del lato dell'Ottaedro è nella proportione sesquialtera al quadrato del lato del Cubo; e perciò il quadrato del diametro della sfera, ed i quadrati de i lati di esse figure, cioè del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, sono come numero à numero, e perciò sono frà loro commensurabili: per la qual cosa il dia-

Quadrato del Diametro della sfera	6
Tetraedro	4
Ottaedro	3
Cubo	2

a 6. del 10.

metro

metro della sfera, ed i lati del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, sono commensurabili in potenza; si che, supposto il diametro della sfera Rationale, i lati delle dette figure, cioè Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, sono Rationali. E perche i numeri 4, 3, 2, i quali sono nelle proportioni de i quadrati de i lati di esse figure, [b] non sono come numero quadrato à numero quadrato, perciò i lati di quelle figure [c] sono solamente commensurabili in potenza: ma furono dimostrate Rationali, perciò sono Rationali, commensurabili solamente in potenza.

[b] Scolio nel fine del 9.
[c] 9. del 10.

Del resto i lati dell'Icosaedro, e del Dodecaedro, in verun modo sono frà loro commensurabili; poiche se fossero commensurabili, essendo il lato del Dodecaedro Apotome, sarà ancora [d] il lato dell'Icosaedro Apotome; ed all'incontro essendo il lato dell'Icosaedro quella linea, che si chiama minore, sarebbe ancora [e] il lato del Dodecaedro linea minore, il che è impossibile, mentre l'Apotome, e la linea Minore sono due linee irrationali [f] totalmente diuerse.

[d] 104. del 10.
[e] 106. del 10.

Benche i lati de i primi tre corpi regolari costrutti siano Rationali, e frà loro commensurabili in potenza, e commensurabili ancora in potenza al diametro della sfera, alla quale s'intendono iscritti, ed i lati dell'altre due, cioè dell'Icosaedro, e del Dodecaedro sono linee irrationali, ed incommensurabili in lunghezza, e potenza, con tutto ciò ritengono questa dispositione; cioè il lato del Tetraedro è maggiore del lato dell'Ottaedro, il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo, il lato del Cubo è maggiore del lato dell'Icosaedro, ed il lato dell'Icosaedro è maggiore del lato del Dodecaedro, cioè si superano col medesimo ordine, col quale sono stati costrutti.

[f] 112. del 10

Il tutto è noto dalla costruttione de i lati, poiche il lato AG del Tetraedro sottende maggior arco di quello, che sottende il lato AF dell'Ottaedro, e perciò AG è maggiore di AF. Di più il lato BF dell'Ottaedro sottende maggior arco di quello, che sottende BG, ch'è lato del Cubo, e perciò il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo. Che poi il lato BG del Cubo sia maggiore del lato BI del Icosaedro, si dimostra in questo modo.

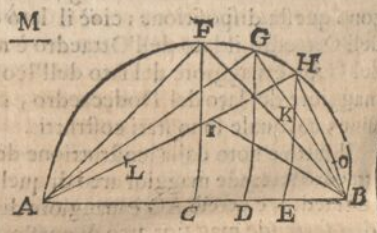
Si faccia come AB à BD, così BD ad vn altra, che sia M. Perche AB è il triplo di BD, perciò BD sarà il triplo di M, e tutta AB sarà il nonuplo della retta M, ma AB ad M è come il quadrato di AB al quadrato di BD, essendo AB nonupla alla retta M, sarà il quadrato di AB nonuplo al quadrato di BD. Posto dunque il quadrato di BD come vnità, sarà il quadrato di AB 9; e perche il quadrato di AB al quadrato di BG è come AB à BD, sarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di BG. Se il quadrato di AB l'intenderemo diuiso in 9 parti vguali, sarà il quadrato di BG 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9; e perche il quadrato di GB è vguale à i quadrati delle due GD, DB, i quadrati delle due GD, DB, giunti insieme, saranno 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9. Se dunque se ne leua il quadrato di BD, ch'è vna di quelle 9. parti, resta il quadrato di GD vguale à 2 di quelle 9. parti. In oltre perche il quadrato di AB al quadrato di BH è come AB à BE, essendo, per costruttione, AB il quintuplo di BE, sarà il quadrato di AB

[g] 47. del 1.

il

il quintuplo del quadrato di BH, cioè sarà come 10. à 2, è perciò di quelle parti, che il quadrato di AB è 10, il quadrato di HB sarà 2: ma di quelle parti, che il medesimo quadrato di AB è 9 il quadrato di GD è 2, essendo ciascuna delle 10. parti del quadrato di AB minori di ciascuna delle 9 parti del medesimo quadrato di AB, sarà il quadrato di BH, ch'è 2, di quelle dieci parti, minore del quadrato di GD, ch'è 2 di quelle 9 parti, e perciò la retta GD è maggiore di BH. Di nuouo si faccia IL vguale ad IH. Perche HB è lato dell'esagono iscritto nel circolo, che circonda quel pentagono, sopra il quale è costrutto l'Icosaedro, ed IH è lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, sarà BH maggiore di HI; si tagli HO vguale ad HI, sarà HI la terza parte della retta composta delle due LH, HO, e perciò IH sarà minore della terza parte della retta composta delle due LH, HB: ma la retta composta delle due LH, HB, è composta del lato HB dell'antedetto esagono, e di LH, ch'è il doppio del lato del decagono, sarà IH minore della terza parte della retta composta del lato di quell'esagono, e del doppio del lato del decagono: ma per il Corollario secondo alla 16. propos. di questo, il diametro AB è composto del lato BH del detto esagono, e del doppio di HI, sarà HI minore della terza parte di AB; fù fatta per costruttione, DB la terza parte di AB, sarà IH minore di BD. E perche HB fù dimostrata minore di GD, le due BH, HI, saranno minori delle due GD, DB, ed i quadrati delle due BH, HI, sono minori, de i quadrati delle due GD, DB: ma il quadrato di IB h è vguale à i quadrati delle due BH, HI, ed il quadrato di BG è vguale à i quadrati delle due GD, DB; il quadrato dunque di IB sarà minore del quadrato di GB, e la retta GB, ch'è lato del Cubo, è maggiore di IB, ch'è lato dell'icosaedro, come fù proposto dimostrare.

h 47. del 1.



Finalmente dico che il lato IB dell'Icosaedro è maggiore del lato BK del Dodecaedro. Perche GB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in K, e la maggior parte è BK, sarà il rettangolo contenuto dalle due BG, GK, k vguale al quadrato di BK, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK, sarà vguale al doppio quadrato di BK. Inoltre, perche BK è maggiore di KG, il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, sarà maggiore del rettangolo contenuto dalle due BG, GK; e perciò il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, col rettangolo delle due BG, GK, sarà maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK: ma i due rettangoli contenuti da GB, BK, e da BG, GK, sono vguali al quadrato di BG, sarà il quadrato di BG maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK; fù dimostrato il doppio rettangolo delle due BG, GK, vguale al doppio quadrato di BK, in conseguenza il quadrato di BG sarà maggiore del doppio quadrato di BK, e tripla-

k 17. del 6.

l 2. del 2.

ta

ta l'vna, e l'altra parte, il triplo quadrato di BG, sarà maggiore del sestuplo quadrato di BK. Di nuouo, per quel che si è dimostrato, il quadrato di AB è il triplo del quadrato di BG, ed è il quintuplo del quadrato di BH, e perciò il triplo quadrato di BG sarà vguale al quintuplo quadrato di BH: ma il triplo quadrato di BG è dimostrato maggiore delli sei quadrati di BK; sarà il quintuplo quadrato di BH maggiore delli sei quadrati di BK; dal che vn solo quadrato di BH sarà maggiore d' vn solo quadrato di BK, ed il lato BH sarà maggiore di BK. Nel triangolo BHI, angolo retto in H, sarà l'angolo BIH [m] minore dell'angolo BHI, e perciò il lato BI [n] sarà maggiore di BH: ma BH è dimostrata maggiore della retta BK; sarà dunque BI, ch'è lato dell'Icosaedro, molto maggiore di BK, ch'è il lato del Dodecaedro. Habbiamo dunque esposti, e comparati i lati de i cinque corpi regolari, il che era da farsi, e dimostrarsi.

m 17. del 1.
n 19. del 1.

SCOLIO.

Spiegata la costruttione de' cinque corpi regolari, e fatta la comparatione de' loro lati, resta che dimostriamo come i corpi regolari non possono essere più di cinque. E nota, che per corpo regolare s'intende quella figura solida contenuta da piani equilateri, equiangoli, ed vguali frà loro. E nota ancora, che per la costitutione dell'angolo solido si ricercano due conditioni, la prima è, che gli angoli piani, i quali contengono l'angolo solido, [a] non siano meno di tre, e la seconda che tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo solido, giunti insieme, [b] non siano minori di quattro angoli retti. Supposto questo.

a 21. defin. del 11.
b 21. del 11.

Perche l'angolo del triangolo equilatero [c] è la terza parte di due angoli retti, cioè la sesta parte di quattro angoli retti, saranno sei angoli del triangolo equilatero sei seste parti di quattro angoli retti, e perciò sei angoli del triangolo equilatero, giunti insieme, sono vguali à quattro angoli retti; dal che con sei angoli del triangolo equilatero non si può costituire angolo solido: dond'è manifesto, che non più di cinque triangoli equilateri, che concorrono secondo vn' angolo, possono costituire angolo solido, e perche con tre triangoli equilateri, che concorrono secondo vn angolo, si costituisce l'angolo solido del Tetraedro, con quattro si costituisce l'angolo solido dell'Ottaedro, e con cinque si costituisce quello dell'Icosaedro, perciò co'i triangoli equilateri non si possono costruire altri corpi regolari, che i tre nominati corpi, cioè il Tetraedro, l'Ottaedro, e l'Icosaedro.

c 32. del 1.

Di nuouo perche l'angolo del quadrato [d] è la quarta parte di quattro angoli retti, i quattro angoli del quadrato saranno vguali à quattro angoli retti, e perciò non più di tre quadrati, che concorrono secondo vn angolo, possono costituire angolo solido, per la qual cosa colle figure quadrate non si possono costruire altri corpi regolari, fuor che il Cubo.

d Scol. alla 32. del 1.

In oltre perche l'angolo del pentagono [e] è la quinta parte di sei angoli retti, cioè tre decime parti di quattro angoli retti, saranno quattro angoli del pentagono, giunti insieme, vguali à dodici decime parti di quattro angoli retti; ma i quattro angoli retti sono vguali à dieci decime parti de i medesimi, le dodici decime parti di quattro angoli retti, cioè i quattro angoli del pentagono so-

e Scol. alla 32. del 1.

no maggiori di quattro angoli retti; e perciò con quattro pentagoni, che concorrono secondo vn'angolo, non si può costituire angolo solido. Donde appare, che colle figure pentagonali non si può costruire altro corpo regolare, fuor che il Dodecaedro.

f Scol. alla 32. del 1.

Finalmente perche l'angolo dell'esagono f *è la terza parte di quattro angoli retti; saranno tre angoli dell'esagono vguali à quattro angoli retti, e perciò con tre figure esagonali, che concorrono secondo vn angolo, non si può costituire angolo solido, ne meno si può costituire angolo solido con due soli esagoni, stante che per costituire l'angolo solido non deuono esser meno di tre angoli piani; per la qual cosa con le figure esagonali non si può costruire corpo alcuno regolare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che con nessun'altro poligono regolare si può costruire nessun corpo regolare; e perciò i corpi regolari sono solamente cinque, cioè Tetraedro, Ottaedro, Cubo, Icosaedro, e Dodecaedro, come fù proposto dimostrare.*

Fine del Decimoterzo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOQVARTO.

Concordano tutti gl' Interpreti, che gli antecedenti tredici Elementi ſono aſſolutamente d'Euclide; ma che i due ſeguenti, cioè decimoquarto, e decimoquinto, ſiano d'Hypſicle Aleſſandrino; e perche il tutto è manifeſto nella ſeguente Epiſtola proemiale preſa dal Commandino, ſtimo ſuperfluo il farci ſopra altro diſcorſo.

PROEMIO D'HYPSICLE ALESANDRINO A PROTARCHO.

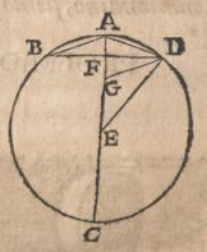
BASILIDE Tyrio, ò Protarco, venendo in Aleſſandria, ed eſſendo molto caro à noſtro padre, per la commune cognitione delle ſcienze Matematiche, nel tempo del peregrinaggio, pratticò lungamente con eſſo lui, e tal volta eſaminando quello, che è ſtato ſcritto da Apollonio della comparatione del Dodecaedro, ed Icoſaedro, che ſi deſcriuono nella medeſima sfera, qual proportione habbiano frà loro, giudicarono ciò non eſſere ſtato ben trattato da Apollonio, e però hauendolo prima emendato, come mio padre diceua, ne fecero memoria. Ma io poi mi ſono abbattuto in vn altro libro, mandato in luce da Apollonio, il quale dirittamente comprendeua la dimoſtratione della coſa propoſta; e per la inueſtigatione del detto problema, ne preſi grandiſſimo piacere. Quello che hà ſcritto Apollonio, ogn' vno facilmente lo può vedere, eſſendo nelle mani di tutti. Ma quello che noi habbiamo con gran ſtudio, per quanto ſi può penſare, compoſto, ed accomodato, mettendolo in ſcritto, ci è piaciuto dedicarlo à te, come à quello, che per l'eccellente cognitione di tutte le ſcienze Matematiche, maſſimamente della Geometria,

sci per esaminare prudentemente le cose, che noi diremo, e per l'amicitia grande, che hai hauuto con mio padre, e per l'amor, che mi porti, sei per ascoltare volentieri questo mio libro. Ma è già tempo, che ponendo fine al proemio veniamo alla cosa proposta.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

La linea retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare al lato del pentagono iscritto nell'istesso circolo, è la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono, che si iscriuono nel medesimo circolo.

Nel circolo ABCD, il di cui centro E, sia BD il lato del pentagono iscritto, e dal centro E cada la retta EF perpendicolare à BD. Dico che la retta EF è la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo ABCD. Si prolunghi la retta EF sin che concorra con la circonferenza del circolo da ambidue le parti, come in A, & C; si faccia FG vguale ad FA, e si tirino le rette, DE, DG, DA, AB. Perche la retta EA passa per il centro E, e sega la retta BD ad angoli retti in F, sarà BF vguale alla retta FD. Si considerino i triangoli DFA, AFB. Perche i due lati AF, FD sono vguali à i due lati AF, FB, e gli angoli in F sono retti, sarà la base AD [b] *vguale alla base AB*, dal che l'arco AD [c] è vguale all'arco AB. *E perche la retta BD* è lato del pentagono iscritto, sarà *l'arco BAD la quinta* parte di tutta la circōferenza ABCD, e *l'arco AD la decima* parte; per la qual cosa la retta AD sarà il lato del decagono *iscritto* nel medesimo circolo ABCD. Ne i triangoli DFA, DFG, i due lati DF, FG, sono vguali à i due lati DF, FA, gli angoli in F sono retti, e perciò la base AD [d] sarà vguale alla base DG, e gli angoli DGA, DAG, saranno frà di loro vguali. In oltre, perche tutta la circonferenza ABCD è quintupla all'arco BAD, la metà della circonferenza ABCD sarà quintupla alla metà dell'arco BAD; cioè l'arco CDA è quintuplo all'arco DA; per la qual cosa l'arco CD sarà quadruplo all'arco DA; ma l'arco CD all'arco DA è come l'angolo CED all'angolo DEA, essendo l'arco CD il quadruplo dell'arco DA, sarà l'angolo CED il quadruplo dell'angolo DEA. E perche l'angolo CED al centro [f] è il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, l'angolo dunque DAE sarà il doppio dell'angolo DEA; fù mostrato l'angolo DGA vguale all'angolo DAE, sarà l'angolo DGA il doppio dell'angolo DEA. Nel triangolo DGE è continuato il lato EG verso A, sarà l'angolo DEA esterno [g] vguale à i due angoli GED, GDE interni, ed opposti; fù dimostrato l'angolo DGA, essere il doppio dell'angolo GED, l'angolo dunque GED



a 3. del 3.
b 4. del 1.
c 28. del 3.
d 4. del 1.
e 33. del 6.
f 20 del 3.
g 32. del 1.

sarà

sarà vguale all'angolo GDE, ed il lato GD [h] sarà vguale al lato GE; ma il lato GD fù dimostrato vguale al lato AD, sarà il lato AD vguale al lato GE; al lato AD s'aggiunga AF, ed al lato GE s'aggiunga GF, ne viene EF vguale alle due DA, AF, giunte insieme; vgualmente s'aggiunga la retta EF, saranno le due EA, AD, giunte insieme, vguali al doppio di EF; per la qual cosa la retta EF è la metà delle due EA, AD giunte insieme; e perche il semidiametro EA è vguale al lato dell'esagono, ed il lato DA è lato del decagono, ambidue iscritti nel circolo ABCD, in conseguenza la retta EF sarà la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono iscritti nel medesimo circolo, ch'era da dimostrarsi.

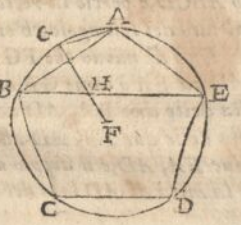
h 6. del 1.

SCOLIO.

Quì facilmente possiamo dimostrare col P. Clauio i due seguenti theoremi.

Il lato dell'esagono al lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo, è come la retta, che sottende l'angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, al lato del medesimo pentagono.

Nel circolo ABCDE, il di cui centro F, sia iscritto il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, e sia AG il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo; si tiri il semidiametro FG, sarà FG, [a] lato dell'esagono. Si tiri la retta BE, che sottenda l'angolo BAE del pentagono. Dico che la retta FG alla retta GA, è come la retta EB al lato BA. Perche la retta FG, lato dell'esagono, col lato del decagono GA, [b] compongono vna retta diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è il lato FG dell'esagono, e la minor parte è il lato GA del decagono, e della retta EB, diuisa secondo l'estrema, e media proportione, in qualche punto H, la maggior parte EH [c] è vguale al lato EA del pentagono, sarà la maggior parte EH alla minor parte HB, [d] come FG à GA; ma EH ad HB è come EB ad EH, sarà EB ad EH [e] come FG à GA. E perche EH è vguale ad EA, ouero AB, sarà EB à BA, come FG à GA, ch'era da dimostrarsi.



a Corol. alla 15. del 4.

b 9. del 13.

c 8. del 9.

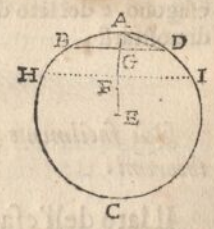
d Scol. alla 5 del 13.

e 11. del 5.

Se la retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare al lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo, è diuisa secondo l'estrema, e media proportione; la maggior parte è vguale alla retta, che dal medesimo centro cade

perpendicolare al lato del triangolo equilatero, e la minor parte è vguale alla metà del lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo.

Nel circolo ABCD ſia la retta BD lato del pentagono iſcritto, e diuiſo l'arco BAD in due parti vguali in A, tirata la retta AD, ſarà AD lato del decagono; dal centro E ſi tiri la retta EA, la quale ſegarà BD [f] *ad angoli retti in qualche punto G, e ſarà EG, per la 1. prop. del 14, la metà della retta compoſta delle due EA, AD, e diuiſa poi la retta EG* [g] *ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, in modo, che EF ſia la maggior parte. Dico che la maggior parte EF è vguale alla retta, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo; e che la minor parte FG è la metà della retta AD, ch'è lato del decagono. Perche al lato dell'eſagono EA, aggiunto il lato AD del decagono,* [h] *ſe ne compone vna retta diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, di cui la maggior parte è AE, e la minor parte AD, e la retta EG è diuiſa ancora ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, la di cui maggior parte è EF, e la minore FG, per lo Scol. 2. alla prop. 5. del 13, ſarà la compoſta delle due EA, AD, ad AE, come è GE ad EF; e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG,* [k] *ſarà come AE ad EF; ma la compoſta delle due EA, AD,* [l] *è il doppio di EG, ſarà la retta AE il doppio di EF. Se dunque per il punto F paſſa la retta HI ad angoli retti con AE, ſarà HI* [m] *lato del triangolo equilatero iſcritto nel circolo ABCD, e perciò la retta EF è quella, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*



Dico di nuouo che FG è la metà di AD. Perche la compoſta delle due EA, AD ad EA è come GE ad EF, per la conuerſione della proportione, la compoſta delle due EA, AD ad AD, [n] *ſarà come EG à GF, e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG ſarà come AD,* [o] *ad FG: ma la compoſta delle due EA, AD, è il doppio di EG, ſarà ancora AD il doppio di FG; e perciò FG è la metà di AD lato del decagono, ch'era da dimoſtrarſi.*

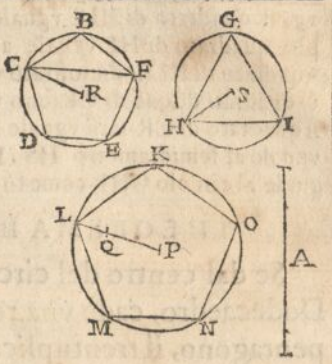
f 1. Corol. alla 10. del 13.
g. 30 del 6.
h 9. del 13.
K 16. del 5.
l 1. del 14.
m Corol. 2. all. 12. del 13.
n Corol. alla 19. del 5.
o 16. del 5.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Il medeſimo circolo comprende il pentagono del Dodecaedro, e il triangolo dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima ſfera.

Sia A il diametro della ſfera, nella quale s'intenda iſcritto il Dodecaedro, la di cui baſe ſia il pentagono BCDEF, e l'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHI. Dico che il circolo circoſcritto intorno al pentagono BCDEF è vguale al circolo circoſcritto intorno al triangolo GHI. Sia eſpoſto il pentagono KLMNO di quell'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHC, ſarà ciaſcun lato LK, KO,

ON,



ON, NM, ML, vguale al lato GH, del triangolo equilatero GHI. Intorno al pentagono KLMNO [a] sia circoscritto il circolo KMN, il di cui centro sia P, si tiri la retta PL, e da i centri R, ed S, si tirino le rette RC, SH, e si seghi la retta PL [b] secondo l'estrema, e media proportione in Q, e per il 2. Coroll. alla 9. propos. del 13, la maggior parte QP sarà il lato del decagono iscritto nel circolo KLMNO, nel quale il lato dell' esagono è vguale ad LP; si tiri la retta CF. Perche la retta CF sottende l'angolo CBF del pentagono, per il Corol 2. alla 17. propos. del 13, sarà CF il lato del cubo iscritto nella medesima sfera, dou'è iscritto il Dodecaedro: e perche il quadrato della retta A, ch'è diametro della sfera, per la 15. prop. del 13, è triplo al quadrato di CF, lato del Cubo, ed il medesimo quadrato della retta A, per il 1 Corol. alla 16 prop. del 13, è quintuplo al quadrato di LP, perciò il triplo quadrato di CF sarà vguale al quintuplo quadrato di LP. In oltre se concepiremo CF, ch'è il lato del detto cubo, diuiso secondo l'estrema, e media proportione, per il Coroll. 1. alla citata 17. propos. del 13, la maggior parte sarà vguale al lato FB del pentagono BCDEF, e per lo Scolio 2. alla 5. propos. del 13, sarà CF alla maggior parte FB, come LP à PQ; e permutando, CF ad LP [c] sarà come FB à PQ, ed il quadrato di CF al quadrato di LP [d] sarà come il quadrato di FB al quadrato di PQ; e *triplati gli antecedenti*, sarà il triplo quadrato di CF al quadrato di LP, come *il triplo quadrato di BF al quadrato di PQ*; e quintuplati i conseguenti, sarà *il triplo quadrato di CF al quintuplo quadrato* di PL, come il triplo quadrato di *BF al quintuplo quadrato di PQ*: ma, per quel che si è dimostrato, il triplo quadrato di CF è *vguale al quintuplo* quadrato di PL, perciò il triplo quadrato di FB [e] sarà vguale al quintuplo quadrato di PQ: e perche il quadrato di ML, lato del pentagono, per la 10. del 13, è vguale al quadrato di PL, lato dell'esagono, col quadrato di PQ, lato del decagono; sarà il quintuplo quadrato di ML vguale al quintuplo quadrato di PL, col quintuplo quadrato di PQ: fù dimostrato il triplo quadrato di CF, vguale al quintuplo quadrato di PL, ed il triplo quadrato di FB vguale al quintuplo quadrato di PQ, sarà il quintuplo quadrato di LM vguale al triplo quadrato di CF, più il triplo quadrato di FB. Di nuouo, perche i quadrati delle due CF, FB, per il 1. Scol. alla 10. propos. del 13, sono il quintuplo del quadrato di CR, il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB, sarà vguale à quindici quadrati di CR: ma il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB fù dimostrato vguale al quintuplo quadrato di LM, sarà il quintuplo quadrato di LM vguale à quindici quadrati di CR. E perche il lato LM per quel che si è detto, è vguale al lato HI, sarà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di CR. Finalmente perche, per la 12. prop. del 13, il

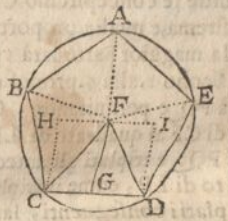
a 14. del 4.
b 30. del 6.
c 16. del 5.
d 22. del 6.
e 14 del 5.

13, il quadrato di HI è vguale al triplo quadrato di HS, sarà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di HS : ma il quintuplo quadrato di HI fù dimostrato vguale à quindici quadrati di CR; i quindici quadrati dũque di CR sono vguali à i quindeci quadrati di HS, D'onde il quadrato di CR sarà vguale al quadrato di HS, ed il semidiametro CR vguale al semidiametro HS. Per la qual cosa il circolo BCDEF sarà vguale al circolo GHI, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se dal centro del circolo circoscritto al pentagono del Dodecaedro, cade vna retta perpendicolare al lato di esso pentagono, il trentuplicato rettangolo contenuto da quella perpendicolare, e dal lato del detto pentagono, è vguale alla superficie del Dodecaedro.

Sia ABCDE vno de pentagoni del Dodecaedro iscritto nel circolo ACD, il di cui centro F, dal quale cada la retta FG perpendicolare al lato CD. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalla retta FG, e dal lato CD, è vguale alla superficie del Dodecaedro. Si tirino le rette FD, FC, e sopra il lato CD, all'altezza FG, si faccia il rettangolo HCDI, il quale [a] sarà il doppio del triangolo FCD; e perche il rettangolo HCDI è contenuto dalle rette HC, CD, e la retta HC è vguale ad FG, sarà il rettangolo contenuto dalle due FG, CD, vguale al doppio triangolo FCD, ed il quintuplo rettangolo contenuto dalle due FG, CD, sarà decuplo al triangolo FCD, cioè il quintuplo rettangolo contenuto dalle due FG, CD, è vguale à dieci triangoli FCD; cioè vguale à due volte i cinque triãgoli FCD, FDE, FEA, FAB, FBC; e perciò il quintuplo rettãgolo contenuto dalle rette FG, CD, è vguale al doppio pentagono ABCDE; e dodecuplicata l'vna, e l'altra parte di questa vgualità, ne vengono sessanta rettangoli, contenuti dalle rette FG, CD, vguali à 24. pentagoni ABCDE; e prese ne la metà, ne vengono trenta rettangoli contenuti dalle rette FG, CD, vguali à dodici pentagoni ABCDE; ma i 12. pentagoni ABCDE, sono vguali alla superficie del Dodecaedro; i trenta rettangoli dunque contenuti dalle rette FG, CD, sono vguali alla superficie del Dodecaedro, ch'era da dimostrarsi.



[a] 41. del 1.

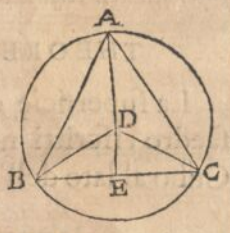
SCOLIO I.

Nell'istesso modo si dimostrerà il seguente Theorema.

Se dal centro del circolo circoscritto intorno ad vno

de i triangoli, ch'è baſe dell'Icoſaedro, cade vna retta perpendicolare ad vn lato; il trentuplo rettangolo contenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triangolo, è vguale alla ſuperficie dell'Icoſaedro.

Sia il triangolo equilatero ABC vno di quelli, che contengono l'Icoſaedro, intorno al quale ſia circoſcritto il circolo ABC, il di cui centro D, dal quale cada la retta DE perpendicolare al lato BC. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale alla ſuperficie dell'Icoſaedro. Si tiri la retta DA, ſarà diuiſo il triangolo ABC ne i tre vguali triangoli DBC, DAC, DAB; e perche come ſi diſſe nella dimoſtratione antecedente, il rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, a è il doppio del triangolo DBC, ſarà il triplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, il doppio de i tre triangoli DBC, DCA, DAB; cioè il triplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale al doppio triangolo ABC; e ventuplicata l'vna, e l'altra parte dell'vgualità, ne viene il ſeſſantuplo rettangolo, contenuto dalle rette DE, BC, vguale al quarantuplo triangolo ABC; e preſe le loro metà, ſarà il trentuplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, vguale à venti triangoli ABC; ma venti triangoli ABC ſono vguali alla ſuperficie dell'Icoſaedro, in conſeguenza il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, ſarà vguale alla ſuperficie dell'Icoſaedro, ch'era da dimoſtrarſi.



a 41. del 1.

COROLLARIO

Quindi è manifeſto, che il rettangolo contenuto da vn lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, e dalla retta, che dal centro di eſſo pentagono cade perpendicolare ad vno de i ſuoi lati, al rettangolo contenuto da vn lato del triangolo equilatero, e dalla retta, che dal centro di eſſo triangolo cade perpendicolare ad vno de i ſuoi lati, è come la ſuperficie del Dodecaedro (di cui ciaſcuna baſe è vguale à quel pentagono) alla ſuperficie dell'Icoſaedro, del quale ciaſcuna baſe è vguale al detto triangolo.

Perche, nel detto pentagono, eſſendo il trentuplo rettangolo, contenuto dalla perpendicolare, e dal lato di eſſo pentagono, vguale alla ſuperficie del Dodecaedro; e ſimilmente nel detto triãgolo il trentuplo rettãgolo cõtenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triãgolo, è vguale alla ſuperficie dell'icoſaedro; ſarà nel pentagono, il trentuplo rettãgolo, cõtenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, alla ſuperficie del Dodecaedro, come nel triangolo il trentuplo

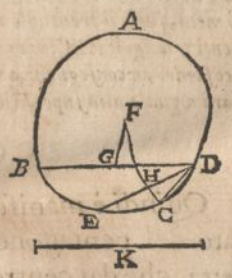
rettan-

rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del triangolo, alla ſuperficie dell'Icoſaedro; e preſa la trenteſima parte degli antecedenti, ſarà il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del pentagono, e dal lato di eſſo pentagono, alla ſuperficie del Dodecaedro, come il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato del medeſimo triangolo, alla ſuperficie dell'Icoſaedro: e permutando, il rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, al rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato di eſſo triangolo, come la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie dell'Icoſaedro.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

La ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima sfera, e come il lato del Cubo al lato dell'Icoſaedro.

Nel circolo ABCD, che ſi circoſcriue intorno al pentagono del Dodecaedro, ed al triangolo dell'Icoſaedro, ſiano addattate le rette cioè BD lato del triangolo del Icoſaedro, e la retta DE lato del pentagono del Dodecaedro; e dal centro F cadano le rette FG perpendicolare al lato BD, ed FH perpendicolare ad ED, e ſia K il lato del Cubo iſcritto nella medeſima sfera, coll'Icoſaedro, e Dodecaedro. Dico, che la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie dell'Icoſaedro è come la retta K, ch'è lato del Cubo, al lato BD del triangolo equilatero. Perche ED è lato del Dodecaedro, cioè è lato del pentagono del Dodecaedro, e la retta FH è perpendicolare ad ED, ſe la retta FH ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte [a] ſarà vguale ad FG, ch'è la retta, che cade perpendicolare al lato BD del triangolo. Similmente ſe concepiremo diuiſo il lato K del Cubo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, per il 2. Coroll. alla 17. propoſ. del 13, la maggior parte ſarà il lato ED del pentagono; e per lo Scolio 2. alla 5. propoſitione del 13, la retta K, ch'è lato del Cubo, alla ſua maggior parte ED ſarà come FH alla ſua maggior parte FG, ed il rettangolo contenuto dall'eſtreme, cioè dalla retta K, e da FG, ſarà vguale [b] al rettangolo contenuto dalle medie ED, FH. Preſe le due K, & BD, come baſi di due rettangoli, e ſia FG altezza commune, ſarà il rettangolo contenuto dalle due K, & FG, al rettangolo contenuto dalle due BD, & FG [c] come la baſe K alla baſe BD; ma il rettangolo contenuto dalle due K, & GF, è dimoſtrato vguale al rettangolo contenuto dalle due ED, FH; ſarà il rettangolo contenuto dalle due ED, FH, al rettangolo contenuto dalle due



a Scol. alla 1. del 14.

b 17. del 6.

c 1. del 6.

BD, FG,

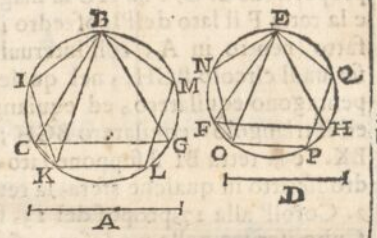
BD, FG, come la retta K al lato BD: ma per l'antecedente Corollario il rettangolo contenuto dalle due ED, FH, al rettangolo contenuto dalle due BD, FG, è come la superficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla superficie dell'Icosaedro, il di cui lato è BD, sarà la retta K, ch'è lato del Cubo, alla retta BD, ch'è lato del triangolo dell'Icosaedro, come la superficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla superficie dell'Icosaedro, il di cui lato EBD, come fù proposto dimostrare.

SCOLIO.

In aiuto della propos. seguente dimostraremo col P. Clauio il seguente Theorema.

I lati del Cubo à i lati dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, sono come i lati del Cubo à i lati dell'Icosaedro, iscritti in qualunque altra sfera.

Sia A il lato del Cubo, e la retta BC il lato dell'Icosaedro iscritti nella medesima sfera; e di nuouo sia D il lato del Cubo, e la retta EF il lato dell'Icosaedro descritti in qualche altra sfera. Dico che il lato A del Cubo al lato BC dell'Icosaedro è come il lato D del Cubo al lato EF dell'Icosaedro. Si compiscano i triangoli degl'Icosaedri BCG, EFH, intorno à i quali a *si circoscriuano i circoli BCG, EFH, ed in essi* b *si iscriuano i pentagoni equilateri, ed equiangoli BIKLM, ENOPQ; si tirino le rette BK, CK, EO, FO. Perche il medesimo circolo* c *comprende il pentagono dol Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icosaedro della medesima sfera, essendo BCG, per ipotesi, il triangolo dell'Icosaedro, sarà BIKLM il pentagono del Dodecaedro: ma per il 2. Coroll. alla 17. prop. del 13, la retta BK è il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera col Dodecaedro, sarà BK il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera coll'Icosaedro; per ipotesi la retta A è il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera col proposto Icosaedro, perciò il lato BK del Cubo sarà vguale al lato A del Cubo proposto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il lato EO del Cubo è vguale al lato D del Cubo proposto. In oltre perche i pentagoni BIKLM, ENOPQ sono equilateri, ed equiangoli, perciò sono frà loro simili, e sarà l'angolo BIK vguale all'angolo ENO: ma gli angoli BIK, BCK, d nella medesima portione sono frà loro vguali. E gli angoli ENO, EFO nella medesima portione sono frà loro vguali, in conseguenza l'angolo BCK sarà vguale all'angolo EFO. Similmente perche i triangoli BCG, EFH sono equilateri, ed in conseguenza equiangoli, sarà l'angolo BGC vguale all'angolo EHF; ma gli angoli BGC, BKC e nella medesima portione sono frà di loro vguali, e gli angoli EHF, EOF, nella me-*



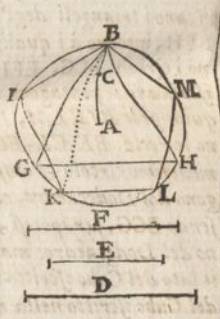
a 5. del 4.
b 11. del 4.
c 2. del 14.
d 21. del 3.
e 21. del 3.

desima portione, sono frà di loro vguali; saranno gli angoli BKC, EOF frà di loro vguali. Ne i triangoli BKC, EOF, i due angoli, BCK, BKC sono
f 32. del 1. *vguali à i due angoli EOF, EFO, e perciò il rimanente angolo KBC sarà vgua-*
g 4. del 6. *le al restante angolo OEF; dal che i triangoli BKC, EOF sono equiangoli, e sarà BK à BC g come è EO ad EF; ma BK fù mostrata vguale alla retta A, e la retta EO vguale à D, perciò A lato del Cubo à BC lato dell'Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come D lato del Cubo ad EF lato dell'Icosaedro iscritti in vn' altra sfera, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della maggior parte, alla retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della minor parte, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera,

Sia esposta qualunque retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia AC la maggior parte; sia poi D il lato del Cubo, e la retta F il lato dell'Icosaedro iscritto nella medesima sfera col Cubo: fatto centro in A, coll'interuallo AB si descriua il circolo BGH, , nel quale a si iscriua il
a 11. del 4. pentagono equilatero, ed equiangolo BIKLM,
b 2. del 4. ed il triangolo b equilatero BGH; si tiri la retta BK. Se la retta BI si suppone lato del *Dodecaedro iscritto in qualche sfera, la retta BK, per il 2. Coroll' alla 17, propos. del 13,* sarà il lato del *Cubo iscritto nella medesima* sfera. In oltre la retta AB, come semidiametro del circolo BGH c è vguale al lato dell'esagono iscritto nel
c Corol. alla 15. del 4. medesimo circolo BGH; se dunque AB è lato dell'esagono, diuiso in C secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte AC d sarà lato
d Corol. 2. alla 9. del 13 del decagono iscritto nell'istesso circolo BGH, e per la 10 propos. del 13, il quadrato di IB, ch'è lato del pentagono, sarà vguale à i quadrati delle due BA, AC. Si esponghi poi la retta E, e il
e 47. del 1. di cui quadrato sia vguale à i quadrati delle due AB, BC. Dico che la retta D, ch'è lato del Cubo, alla retta F, ch'è lato dell'Icosaedro, è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC. Perche il quadrato di BG, lato del triangolo BGH, f è triplo al
f 12. del 13. quadrato del semidiametro AB, ed i quadrati delle due AB, BC, sono il triplo del quadrato di AC, sarà il quadrato di BG al quadrato di AB g come è l'aggregato de' quadrati di AB, BC, cioè il quadrato di E al qua-
g 15. del 5.



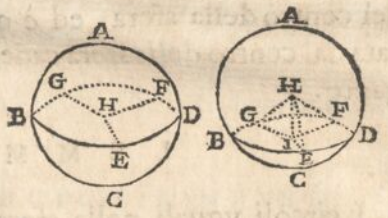
dra to

drato di AC ; e permutando , il quadrato di BG al quadrato della retta E [h] sarà come il quadrato di BA al quadrato di AC. Di nuouo perche la retta BK sottende l'angolo BIK del pentagono , se concepiremo BK diuisa secondo l'estrema , e media proportione , la maggior parte [K] sarà vguale al lato IB del pentagono , e perciò sarà BK à BI come è BA ad AC , ed il quadrato di BK al quadrato di BI [l] sarà come il quadrato di BA al quadrato di AC ; ma il quadrato di BA al quadrato di AC , per quel che si è dimostrato , è come il quadrato di BG al quadrato della retta E, sarà il quadrato di BK al quadrato di BI [m] come è il quadrato di BG al quadraro della retta E ; e permutando , il quadrato di BK al quadrato di BG [n] sarà come il quadrato di BI al quadrato della retta E ; per la qual cosa la retta BK alla retta BG [o] sarà come BI alla retta E ; cioè il lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro , iscritto nella medesima sfera , è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E , il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB,BC: ma per l'antecedente Scolio , *il lato D del Cubo al lato F* dell'Icosaedro , iscritti nella medesima sfera , è come il lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro; sarà il lato D del Cubo al lato F dell'Icosaedro [p] come la retta BI; il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA , AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC, ch'era da dimostrarsi .

h 16. del 5.
K 8. del 13.
l 22. del 6.
m 11. del 5.
n 16. del 5.
o 22. del 6.
p 11. del 5.

LEMMA I.

Se la sfera è sagata da qualche piano , la commune settione è circolo .



Sia la sfera ABCD segata dal piano BEDF, e la commune settione sia BEDFG. Dico che il piano BEDFG è circolo . Passi prima il piano segante per il centro H della sfera. Perche tutte le rette tirate dal centro H della sfera alla superficie sferica , per la definitione della sfera , sono frà di loro vguali , perciò le rette HE, HF, HG, e tutte le altre tirate nel piano BEDFG, sono frà di loro vguali , e per la definitione del circolo , il piano BEDFG sarà circolo . Se il piano BEDFG non passa per il centro H , dal centro H si faccia cadere la retta HI [a] perpendicolare al piano BEDFG , e dal punto I nel piano BEDFG si tirino le rette IF , IE, IG . Essendo HI perpendicolare al piano BEDFG, gli angoli HIE,

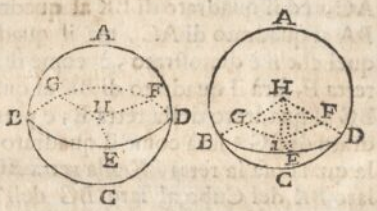
a 11. del 11.

b 3.definit. de. 11.

c 47.del 1.

d 47.del 1.

HIF, HIG [b] *saranno retti, e tutte le rette HE, HF, HG, tirate dal centro H alla superficie della sfera, sono frà di loro vguali. Nel triangolo HIE, angolo retto in I, il quadrato di HE* [c] *è vguale à i quadrati delle due HI, IE; e nel triangolo HIF, il quadrato di HF* [d] *è vguale à i quadrati de i lati HI, IF; per la qual cosa i quadrati de i due lati HI, IE, saranno vguali à i quadrati delle due HI, IF; se ne leui il commune quadrato di HI, resta il quadrato di IE vguale al quadrato di IF, e la retta IE sarà vguale alla retta IF. Nell' istesso modo si dimostrerà, che IF è vguale ad IG, ed è vguale a tutte le altre rette tirate dal punto I nel piano BEDFG. Per la qual cosa il piano BEDFG è circolo, come fù proposto dimostrare.*



COROLLARIO.

Appare dunque che, se il piano segante passa per il centro della sfera, il circolo, che si fà, hà il medesimo centro colla sfera; e se il piano, che sega, non passa per il centro della sfera, il centro del circolo generato, è fuori del centro della sfera, ed è quel punto doue la retta tirata dal centro della sfera cade perpendicolare al piano segante.

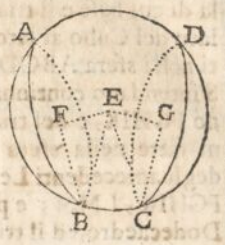
LEMMA II.

I circoli vguali nella sfera sono vgualmente distanti dal centro della sfera; ed i circoli, che nella sfera sono vgualmente distanti dal centro di essa sfera, sono frà di loro vguali.

Nella sfera ABCD, il di cui centro E, siano gli vguali circoli AB, CD. Dico che i circoli AB, CD, sono vgualmente distanti dal centro E. Cadano dal centro E à i piani de' cir-

coli

coli AB, CD, [a] le perpendicolari EF, EG, e per l'antecedente Corollario, i punti F, & G, sono i centri de' circoli AB, CD; da i centri G, ed F, alle circonferenze de' circoli AB, CD, si tirino le rette GC, FB. Essendo i circoli AB, CD, per ipotesi, frà di loro vguali, i loro semidiametri FB, GC sono frà di loro vguali; si tirino le rette EB, EC, le quali, per la definitione della sfera, sono frà di loro vguali; e perche le rette EG, EF, sono perpendicolari à i piani AB, CD, perciò gli angoli EGC, EFB [b] sono retti. Nel triangolo rettangolo EGC il quadrato di EC [c] è vguale à i quadrati de i due lati EG, GC; e similmente nel triangolo EFB, angolo retto in F, il quadrato di EB [d] è vguale à i quadrati de i due lati EF, FB: ma il quadrato di EC è vguale al quadrato di EB, i due quadrai de i lati EG, GC, saranno vguali à i due quadrati de i lati EF, FB; se ne leuino i quadrati delle vguali GC, FB, resta il quadrato di EG vguale al quadrato di EF, e la retta EG sarà vguale alla retta EF. Hor essendo le perpendicolari EG, EF frà di loro vguali, i circoli AB, CD distano vgualmente dal centro E della sfera, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 11. del 11.

b 3. definit. del 11.

c 47. del 1.

d 47. del 1.

Di nuouo siano i circoli AB, CD vgualmente distanti dal centro E. Dico che sono frà di loro vguali. Sia fatta la medesima costruttione di prima, e si dimostri che i quadrati delle due EG, GC sono vguali à i quadrati delle due EF, FB, che leuatone i quadrati delle vguali perpendicolari EG, EF, resta il quadrato di GC vguale al quadrato di FB, e la retta GC sarà vguale alla retta FB. Hor essendo i semidiametri GC, FB frà di loro vguali, i circoli AC, DC sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

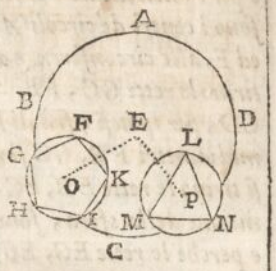
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Il Dodecaedro all'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera.

Nella sfera ABCD, il di cui centro E, sia iscritto il Dodecaedro, e di esso vno de i pentagoni sia FGHIK; e similmente nella medesima sfera sia iscritto l'Icosaedro, del quale vno de i triangoli sia LMN. Dico

che

che il Dodecaedro, la di cui baſe è il pentagono FGHIK, all'Icoſaedro, la di cui baſe è il triangolo LMN, è come il lato del Cubo al lato dell'Icoſaedro, ò iſcritti nella sfera ABCD, ò pure in altra sfera. S'intendano continuati i piani del pentagono FGHIK, e del triangolo LMN, le ſettioni fatte nella sfera ABCD, per il primo degli antecedenti Lemma, ſaranno i circoli FGHIK, LMN; e perche il pentagono del Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icoſaedro [a] ſi iſcriuono in vn medeſimo circolo, perciò i circoli, ne'quali ſono iſcritti il pentagono FGHIK, ed il triangolo LMN, ſono frà di loro vguali; e per il ſecondo degli antecedenti Lemma, gli vguali circoli FGHIK, LMN, diſtano vgualmente dal centro E della sfera. Se dunque dal centro E della sfera ſono tirate le rette EP, EO, [b] perpendicolari à gli vguali circoli FGHIK, LMN, quelle ſono frà di loro vguali, e per il Corollario al primo Lemma, i punti P, O ſono i centri de'circoli FGHIK, LMN. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che tutte le rette tirate dal centro E della sfera, perpendicolari à gli altri pentagoni del Dodecaedro, ed à gli altri triangoli dell'Icoſaedro, ſono frà di loro vguali, e cadono ne i centri di quei pentagoni, e triangoli. Se dunque da tutti gli angoli del Dodecaedro, s'intendano tirate linee rette al centro E della sfera, ſarà diuiſo tutto il Dodecaedro in 12 piramidi di vguali baſi, ed vguali altezze, ed in conſeguenza vguali frà di loro. E ſimilmente, ſe da tutti gli angoli dell'Icoſaedro al centro E della sfera, s'intendano tirate linee rette, ſarà diuiſo l'Icoſaedro in venti piramidi di vguali baſi, & vguali altezze, è perciò frà di loro vguali. E perche l'altezza della piramide del Dodecaedro è dimoſtrata vguale all'altezza della Piramide dell'Icoſaedro, ſtante che EP è vguale ad EO, ſarà la piramide del Dodecaedro alla piramide dell'Icoſaedro [c] come la baſe FGHIK alla baſe LMN, e Dodecuplicati gli antecedenti, ſaranno le dodeci piramidi del Dodecaedro, cioè tutto il Dodecaedro, alla piramide EMNL dell'Icoſaedro, come i dodici pentagoni del Dodecaedro, cioè tutta la ſuperficie del Dodecaedro, al triangolo LMN: e, ventuplicati i conſeguenti, ſarà tutto il Dodecaedro alle venti piramidi dell' Icoſaedro, cioè à tutto l'Icoſaedro, come la ſuperficie del Dodecaedro à i venti triangoli LMN dell' Icoſaedro, cioè à tutta la ſuperficie dell' Icoſaedro: ma la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie dell' Icoſaedro, per la 4. propoſitione di queſto, è come il lato del Cubo al lato dell' Icoſaedro iſcritti l' vno, e l' altro in qualunque altra sfera; il Dodecaedro dunque all' Icoſaedro, iſcritti nella medeſima sfera è come il lato del Cubo al lato dell' Icoſaedro, iſcritti in qualunque altra sfera, ch' era da dimoſtrarſi.



[a] 2. del 14.

[b] 11. del 12.

[c] 5. & 6. del 12.

COROL.

COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato, è manifeſto, che il Dodecaedro all' Icoſaedro, iſcritto nella medeſima ſfera, è come la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie del Icoſaedro.

Fine del decimoquarto Elemento.

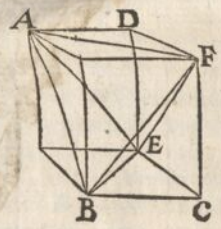


EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOQVINTO.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Nel dato Cubo iſcriuere il Tetraedro.

SIA il dato Cubo ABCD, nel quale ſi habbia ad iſcriuere il Tetraedo. Da vno degli angoli del dato Cubo, come dall'angolo A, ne i tre piani AB, AE, AF, che lo coſtituiſcono, ſi tirino le diagonali AB, AE, AF, e per gli eſtremi F, E, B, di queſte diagonali ſi tirino à gli altri tre piani le diagonali FE, EB, BF. Perche i piani, che che contengono il Cubo ABCD, ſono quadrati vguali frà loro, tutti i diametri AE, AF, AB, FE, EB, FB ſono frà di loro vguali, ſtante che il quadrato di ogn'vna delle dette diagonali è il doppio del quadrato del lato del Cubo. Hor eſſendo tutte le dette diagonali frà di loro vguali, i quattro triangoli ABF, ABE, AEF, FEB, ſono equilateri, ed vguali frà loro, per la qual coſa il ſolido contenuto da queſti quattro triangoli ſarà Tetraedro; e perche tutti gli angoli del coſtrutto Tetraedro ſono collocati negli angoli del Cubo, perciò il coſtrutto Tetraedro è iſcritto nel Cubo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



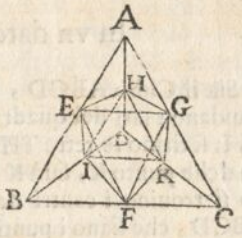
PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

Nella data Piramide iſcriuere l'Ottaedro.

Sia la Piramide, ò Tetraedo ABCD, nel quale s'habbia ad iſcriuere l'Ottaedro. Si diuidano tutti i lati della propoſta piramide [a] in due parti vguali ne i punti E,F,G,H,I,K, e ſi tirino le dodici rette EH, HG, GE, GK,KI,IE,IF,FK,KH,HI,EF,FG, le quali coſtituiſcono otto triangoli,

cioè

cioè quattro ſopra al piano EIKG, e gli altri quattro ſono ſotto al medeſimo piano EIKG, quelli poſti ſopra al piano EIKG ſono i notati FIE, FEG, FGK, FIK, i quali concorrendo nel punto F, coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice F, e la baſe il piano EIKG; quelli poi poſti ſotto al piano EIKG ſono i notati HEG, HEI, HIK, HKG, i quali concorrono nel medeſimo punto H, e coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice H, e la baſe è il piano EIKG. Dico che il ſolido contenuto da queſti otto triangoli è l'Ottaedro iſcritto nella data Piramide. Perche tutti i lati della Piramide ſono diuiſi in due parti vguali, ſaranno i lati AG, AH, del triangolo AGH, vguali à i lati AE, AH del triangolo AEH, l'angolo GAH è vguale all'angolo EAH, ſtante che ſono angoli de i triangoli equilateri, perciò la baſe HG [b] ſarà vguale alla baſe HE. Similmente ne i triangoli AEG, AEH, i due lati EA, AG ſono vguali à i due lati AE, AH, l'angolo EAG è vguale all'angolo EAH, perciò la baſe EG [c] ſarà vguale alla baſe EH; ma EH è dimoſtrata vguale ad HG, i tre lati dunque EH, HG, GE ſono frà di loro vguali, ed il triangolo EHG è triangolo equilatero. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli otto triangoli ſopra nominati ſono equilateri. E perche queſti triangoli, preſi à due à due, hanno vn lato commune, come la retta EG è lato del triangolo EHG, ed è lato del triangolo EFG, ed il ſimile s'intende degli altri, perciò *tutti gli* antedetti otto triangoli ſono frà di loro vguali, e per la definitione 27. *dell'*11, *il ſolido* contenuto da quegli otto triangoli è Ottaedro; e perche *tutti gli angoli del detto* Ottaedro toccano i lati del Tetraedro, perciò è iſcritto nel *propoſto* Tetraedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



[b] 4. del 1.

[c] 4. del 1.

SCOLIO.

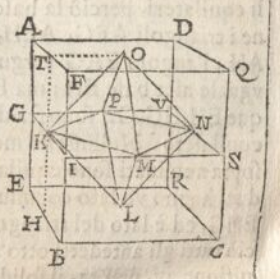
Perche i tre piani EIKG, GHIF, KHEF per il primo Coroll. alla 14. *propoſ. del* 13, *ſono quadrati vguali, che ſcambieuolmente ſi ſegano ad angoli retti, ciaſcuno de' quali diuide la piramide ABCD in due parti vguali, ſtante che ogn'vno diuide la piramide ABCD in modo, che da vna parte laſcia vn priſma, ed vna piramide, e dell'altra laſcia l'altro priſma, e l'altra piramide; come per eſempio, il quadrato EFKH laſcia da vna parte la piramide AEGH, ed il priſma EHGCFK, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HEBFKI. Similmente il quadrato HIFG laſcia da vna parte la piramide AGHE, ed il priſma EHGFBI, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HGCFIK, ed il quadrato EIKG laſcia da vna parte la piramide GFCK, ed il priſma EGFKIB, e dall'altra parte laſcia la piramide AEHG, ed il priſma EHGKID, per il che le piramidi ſono frà di loro vguali, ed i priſmi ſono frà di loro vguali, ed il tutto ſi può ancora dimoſtrare, come ſi fece nella* 3. *propoſ. del* 12; *d'onde è manifeſto*,

che se sarà iscritto l'Ottaedro nel Tetraedro, i tre vguali quadrati, che scambieuolmente si segano ad angoli retti, ed ogn'vno sega l'Ottaedro in due parti vguali, ogn'vno di essi sega ancora la piramide in due parti vguali.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

In vn dato Cubo iscriuere l'Ottaedro.

Sia il Cubo ABCD, nel quale s'habbia ad iscriuere l'Ottaedro. Si
a 10. del 1. diuidano i lati del quadrato AEBF [a] in due parti vguali ne i punti T, G, H, I; si tirino le rette TH, GI, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto K, sarà K il centro del quadrato AEBF. Nell'istesso modo si trouino i centri degli altri quadrati, che contengono il Cubo ABCD, che siano i punti M,N,P,L,O; si tirino le rette KM, MN, NP, PK; poi dal punto L si tirino le rette LK, LM, LN, LP, e dal punto O si tirino le rette OK, OM, ON, OP; e saranno descritti otto triangoli, cioè quattro sopra il piano KMNP, e quattro altri di sotto; i quattro sopra il piano KMNP, che costituiscono vna piramide, il di cui vertice O, e la base è il piano KMNP, sono i notati OKM, OMN, ONP, OPK, gli altri quattro di sotto, che costituiscono la piramide, il di cui vertice L, e la base il piano KMNP, sono i notati LKM,LMN,LNP,LPK. Dico che il solido contenuto da questi otto triangoli è Ottaedro. Perche FI è vguale, e parallela ad SQ, sarà IS [b] vguale, *e parallela ad FQ*. Nell'istesso modo si dimostrerà, che IG è *vguale, e parallela* ad AF, e perciò l'angolo SIG [c] sarà *vguale all'angolo QFA*: ma l'angolo QFA è retto, sarà l'angolo SIG retto. *In oltre* perche AQ è quadrato, sarà QF vguale ad FA: ma QF è dimostrata vguale ad SI, e la retta AF vguale ad IG, sarà dunque SI vguale ad IG, e la metà MI vguale ad IK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli angoli IGV,GVS,ISV,OTK sono retti, e perciò il quadrilatero ISVG è quadrato, e la metà de' lati GK,KI,IM,MS,SN,NV,VP,PG sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutte le rette tirate da i centri de' quadrati nelle metà de i lati di essi quadrati sono frà di loro vguali, ed ogn'vna è vguale alla metà del lato del quadrato, ed in conseguenza i lati OT, TK, IK, IM &c. sono frà di loro vguali. Nel triangolo IMK, perche l'angolo MIK è retto, ed i lati IK, IM, sono frà di loro vguali, perciò ogn'vno degli angoli IMK,IKM, [d] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'vno degli angoli SMN, SNM, VNP, VPN, GPK, GKP, è la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli KMN,MNP, NPK, PKM [e] sono retti; ed essendo i lati KI,IM, vguali à i lati PG, GK, e gli angoli MIK, PGK, retti, sarà la base PK, [f] vguale alla base KM; per la qual cosa il quadrilatero KMNP è quadrato. Nell'istesso modo si proverà, che i quadrilateri LMOP,



b 35. del 1.
c 10. del 11.
d 32. del 1.
e 13. del 1.
f 4. del 1.

OKLN ſono quadrati. Si conſiderino i triangoli OKM, OKP. Perche i due lati OK, KM, ſono vguali à i due lati OK, KP, e la baſe OM è vguale alla baſe OP, ſtante che ſono lati del quadrato LMOP, ſarà l'angolo OKM g vguale all'angolo OKP, e tutto il triangolo OKM h vguale al triangolo OKP. Finalmente perche i lati OT, TK, del triangolo OTK, ſono vguali à i lati KI, IM del triangolo KIM, e gli angoli OTK, KIM ſono retti, ſarà la baſe OK K vguale à KM, ed ogni lato del quadrato OKLN ſarà vguale à ciaſcun lato del quadrato KMNP. E nel medeſimo modo ſi proverà, che ogni lato del quadrato OKLN è vguale à ciaſcun lato del quadrato LMOP, per la qual coſa tutti gli otto triangoli OKM, OMN, ONP, OPK, LKM, LMN, LNP, LPK, ſono equilateri, ed vguali, e per la definit. 17. dell'11, il ſolido contenuto da i detti otto triangoli è Ottaedro, il quale toccando, per coſtruttione, con tutti i ſuoi angoli i quadrati, che contengono il Cubo ne i centri O, K, L, M, N, P, ſarà, per la definitione dell'11, iſcritto nel Cubo ABCD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

g 8. del 1, h 4. del 1.

K 4. del 1.

LEMMA.

La retta linea, che tirata da vn'angolo del triangolo equilatero al centro del medeſimo triangolo, e continuata concorre col lato oppoſto, ſarà perpendicolare à quel lato; diuide quel lato, e l'angolo del triangolo in due parti vguali, e tutta è tripla della parte interpoſta frà il centro, ed il lato, al quale cade perpendicolare.



Sia il triangolo equilatero ABC, il di cui centro D, e dall'angolo A al centro D ſia tirata la retta AD, la quale continuata concorra col lato BC in qualche punto E. Dico che la retta AE è perpendicolare al lato BC; che diuide BC, e diuide l'angolo BAC in due parti vguali; e che tutta AE è tripla alla retta ED, la quale dal centro D cade perpendicolare al lato BC. Intorno al triangolo ABC a *ſia circoſcritto il circolo ABC, il di cui centro ſarà il punto D; ſi tirino le rette DC, DB. Perche il triangolo ABC è equilatero, ſarà l'arco AC* b *vguale all'arco AB, e l'angolo ADC* c *ſarà vguale all'angolo ADB, per la qual coſa i ſupplementi, cioè gli angoli CDE, BDE,* d *ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i due triangoli DEC, DEB, de' quali i due lati ED, DC ſono vguali à i due lati ED, DB, l'angolo EDC è vguale all'angolo EDB, ſarà la baſe EC* e *vguale alla baſe EB, e gli angoli DEC, DEB ſaranno frà di loro vguali, cioè retti, e ſarà la retta AE, come ancora DE, perpendicolare al lato BC. Ne i triangoli AEC, AEB, eſſendo l'angolo ACE vguale all'angolo ABE, e gli angoli in E retti, ſarà il rimanente angolo EAC* f *vguale al reſtante angolo EAB. Si conſiderino poi i triangoli ADB, BDC. Perche i due lati AD, DB ſono vguali à i due*

a 5. del 4.

b 28. del 3. c 27 del 3. d 13. del 1.

e 4. del 6;

f 32. del 1.

g 8. del 1. h 4. del 1. *lati BD, DC, e la baſe AB è vguale alla baſe BC, ſarà l'angolo ADB g vguale all'angolo BDC, ed il triangolo ADB h ſarà vguale al triangolo BDC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo ADB è vguale al triangolo ADC, per il che i tre triangoli ADB, BDC, ADC ſono frà di loro vguali, e tutto il triangolo ABC ſarà il triplo del triangolo DBC. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle due AE, BC* K 41. del 1. *è il doppio del triangolo ABC, ed il rettangolo contenuto dalle due DE, BC* l 41. del 1. *è il doppio del triangolo DBC, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB vguale al triangolo ABC; ed il rettangolo contenuto dalle due DE, EB vguale al triangolo DBC; e perciò il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al triangolo ABC, ſarà come il rettangolo contenuto dalle due DE, EB al triangolo DBC: e permutando, il rettangolo contenuto dalle due AE, EB* m 16. del 5. *al rettangolo contenuto dalle due DE, EB, ſarà come il triangolo ABC al triangolo DBC; preſe AE, ED come baſi di due rettangoli, la di cui altezza commune ſia BE, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto dalle due DE, EB,* n 1. del 6. *n come la baſe AE alla baſe DE; e perche il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto dalle due DE, EB, per quel che ſi è dimoſtrato, è come il triangolo ABC al triangolo DBC,* o 11. del 5. *ſarà il triangolo ABC al triangolo DBC o come la retta AE alla retta DE: ma il triangolo ABC fù dimoſtrato eſſere il triplo del triangolo DBC, la retta dunque AE ſarà il triplo della retta DE, ch'era da dimoſtrarſi.*



PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IV.

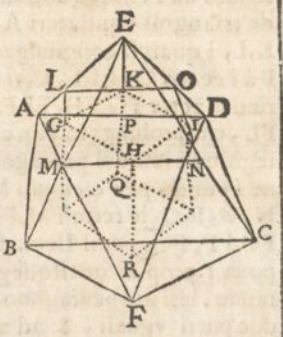
Nel dato Ottaedro iſcriuere il Cubo.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, nel quale s'habbia da iſcriuere il Cubo. Perche l'Ottaedro è diuiſo dal quadrato in due Piramidi, ogn'vna delle quali è contenuta da quattro triangoli equilateri, ed hà per baſe il detto quadrato, ſia quel quadrato, per eſempio, il notato ABCD, ſopra il quale ſia poſta la Piramide, il di cui vertice E, e la baſe il detto quadrato ABCD, ed i quattro triangoli ſiano i notati EAB, EBC, ECD, EAD; l'altra Piramide vguale à queſta reſti ſotto al quadrato ABCD, la quale hà per vertice F, e per baſe il medeſimo quadrato ABCD; e ritornando alla prima Piramide ſi trouino i centri de' triangoli EAB, EBC, ECD, EAD, a che ſiano i punti, G, H, I, K, e ſi tirino le rette KG, GH, HI, IK; per li punti K, G, H, I, ſi facciano paſſare le rette LM, MN, NO, OL, b cioè ML parallela ad AB, MN parallela à BC, NO parallela à CD; ed LO parallela ad AD; ſaranno i triangoli LME, EMN, NEO, OEL, c ſimili à i triangoli equilateri EAB, EBC, ECD, EAD, e perciò i triangoli LME, EMN, NEO, OEL ſono equilateri: e perche ogni due de i detti triangoli hanno vn lato commune; per eſempio EM è lato commune de i due triangoli ELM, EMN; la retta EN è lato commune de i due EMN, ENO, e la retta EO è lato com-

a 5. del 4. b 31. del 1. c Corol. alla 4. del 6.

mune

mune de i due ENO,EOL; per la qual cosa i triangoli ELM,EMN,ENO, EOL sono frà di loro vguali. Dal punto E al centro K del triangolo equilatero EAD si tiri la retta EK,e si prolunghi in P; per l'antecedente Lemma, EP sarà tripla alla retta KP, e perciò EK sarà il doppio di KP: ma EK à KP [d] è come EL ad LA, ed ancora come EO ad OD, sarà EL il doppio di AL,e la retta EO il doppio di OD. Nell'istesso modo si dimostrerà che EM è il doppio di MB, e che EN è il doppio di NC; ed essendo le rette EA,EB,EC,ED, diuise nella medesima proportione, le rette ML, MN,NO, OL concorreranno ne i punti delle diuisioni L,M, N,O: e perche i triangoli equilateri ELM, EMN,ENO, EOL furono dimostrati frà loro vguali, perciò i lati LM,MN,NO,OL sono frà di loro vguali. In oltre, perche la retta LO è parallela ad AD, e la retta LM è parallela ad AB, sarà l'angolo MLO [e] vguale all'angolo BAD: ma l'angolo BAD è retto, stante che il quadrilatero ABCD, per il 1. Coroll. alla 14. propos. del 13, è quadrato, in conseguenza l'angolo OLM sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli LON, ONM, NML sono retti, e perciò il quadrilatero LMNO è quadrato. Si considerino i due triangoli EKL, EKO. Perche i due lati EK, EL, sono vguali à i due lati EK, EO, e l'angolo KEL, per l'antecedente Lemma, è vguale all'angolo KEO, sarà la base LK [f] vguale alla base KO; dal che la retta LO è diuisa in due parti vguali nel pũto K. Col medesimo modo d'argumẽtare si dimostrerà, che le rette ML,MN,NO sono diuise in due parti vguali ne i punti,G,H,I; per la qual cosa le rette LG,GM,MH,HN,NI,IO,OK,KL, essẽdo metà de i lati del quadrato LMNO, sono frà di loro vguali; e perche gli angoli KLG, GMH,HNI, IOK sono retti, perciò le rette KG,GH,HI, IK [g] sono frà di loro vguali. Di più perche i lati LK, LG sono frà di loro vguali, e l'angolo KLG è retto, ogn'vno de gli angoli LKG,LGK, [h] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà che ogn'vno degli angoli OKI, OIK, NIH,NHI,MHG,MGH, è la meta d'vn angolo retto, e perciò gli angoli GKI,KIH, IHG, HGK [K] sono retti; per la qual cosa il quadrilatero KGHI è quadrato. Finalmente perche l'Ottaedro, per il 3. Coroll. alla 14. prop. del 13, si diuide in sei vguali piramidi quadrangolari, che due prese in qualunque modo compongono l'Ottaedro, e nella figura antecedente vna di quelle piramidi è la notata EABCD, la di cui base è il quadrato ABCD, ed il vertice E, nella quale si è iscritto il quadrato LMNO, se in ciascuna delle altre cinque piramidi si farà la medesima costruttione, saranno iscritti gli altri cinque quadrati, ogn'vno vguale al quadrato LMNO, i quali tutti haueranno gli angoli ne i centri de i triangoli, che contengono l'Ottaedro, e per la defin. 31. del 11, sarà iscritto il Cubo KGRI nell'Ottaedro, come si è proposto fare, e dimostrare.



d 2. del 6.

e 10. del 11.

f 4. del 1.

g 4. del 6.

h 32. del 1.

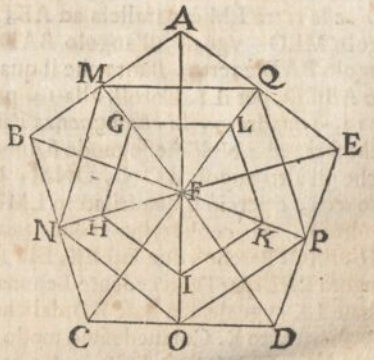
K 13. del 1.

PRO-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Iſcriuere il Dodecaedro nel dato Icoſaedro.

Sia ABCDE vno de i dodeci pentagoni, che nell'Icoſaedro ſono baſi delle dodici piramidi, come fù ſpiegato nel terzo Corollario della 16. prop. di queſto, e ſopra la baſe ABCDE s'intenda eretta vna di quelle 12. piramidi dell'Icoſaedro, *il di cui vertice ſia F*, e l'angolo ſolido F ſia contenuto da i cinque angoli piani AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ed i centri de' triangoli equilateri AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ſiano i punti, G, H, I, K, L, i quali ſi congiungano con le rette, GH, HI, IK, KL, LG. Dal vertice F à i centri G, H, I, K, L, ſi tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL, e ſi prolunghino ſin che ſeghino i lati del pentagono ne i punti, per eſempio M, N, O, P, Q, le rette FM, FN, FO, FP, FQ, per il Lem. dopo la 1. prop. di queſto, ſegaranno i lati del pentagono in due parti vguali, & ad angoli retti in M, N, O, P, Q; ſi tirino le rette MN, NO, OP, PQ, QM. Perche le rette AQ, AM, ſono vguali alle due BM, BN, e gli angoli

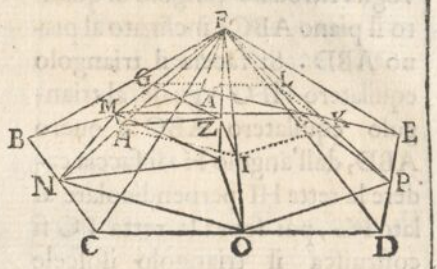


[a] 4. del 1. QAM, MBN, ſono frà di loro vguali, *perciò la baſe QM* [a] ſarà vguale alla baſe MN. Nell'iſteſſo *modo ſi prouerà, che le* rette QP, PO, ON ſono frà *loro vguali, e che ogn'vna è vguale* ad MQ ouero MN; per la qual coſa il *pentagono MNOPQ* ſarà equilatero. Similmente perche le perpendicolari FQ, FM, FN, FO, FP, ſono frà di loro vguali (ſtante che ſono le perpendicolari de gli vguali triãgoli equilateri, che ſono baſi dell'Icoſaedro) e le rette QM, MN, NO, OP, PQ, ſono ſtate dimoſtrate vguali, gli angoli

[b] 8. del 1. QFM, MFN, NFO, OFP, PFQ, [b] ſaranno frà di loro vguali. E perche i punti G, H, I, K, L, ſono centri de gli vguali triangoli equilateri, le rette FG, FH, FI, FK, FL ſaranno frà di loro vguali: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, contengono angoli vguali, perciò le rette GH, HI, IK, KL, LG ſono frà di loro vguali, ed il pentagono GHIKL, è equilatero. Di nuouo eſſendo i lati AQ, AM, BM, BN, CN, CO, &c. frà di loro vguali, e gli angoli in A, B, C, frà di loro vguali, ſaranno gli angoli AQM, AMQ, BMN, BNM, CNO &c. frà di loro vguali, e perciò i due angoli AMQ, BMN ſono vguali à i due angoli BNM, CNO, e per la 13. del 1, il rimanente angolo QMN ſarà vguale al reſtante angolo MNO. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vno degli angoli MNO, NOP, OPQ, PQM, è vguale all'angolo QMN, ed in conſeguenza ſono frà di loro vguali: dal che il pentagono MNOPQ, ch'è poſto nel piano ABCDE, ſarà equiangolo, e

perche

perche ſopra ſi è dimoſtrato il pentagono MNOPQ eſſere equilatero; ſarà perciò il pentagono MNOPQ equilatero, ed equiangolo. Di più perche le perpendicolari FM,FN,FO,FP, FQ, paſſano per li centri de' triangoli equilateri, per il Lem. dopo la 2. propoſitione di queſto ſono i tripli delle rette GM, HN, IO, KP, LQ; ſarà FG il doppio di GM, e la retta FH ſarà il doppio di HN: Per la qual coſa FG à GM [c] ſarà come FH, ad ad HN; e per la 2. del 6, la retta HG è parallela ad NM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le altre rette HI, IK, KL, LG, ſono parallele à i lati NO,OP,PQ,QM. Hor eſſendo le due LG,GH parallele alle due QM,MN, ſarà l'angolo LGH [d] vguale all'angolo QMN, e per l'iſteſſa ragione gli angoli, GHI,HIK,IKL, ſono vguàli à gli angoli MNO,NOP,OPQ, ed in conſeguenza gli angoli LGH,GHI,HIK,IKL, KLG, ſono frà loro vguali. Finalmente perche le rette GH,HI ſono parallele alle rette MN, NO, il piano, che paſſa per le rette GH,HI, [e] ſarà equidiſtãte al piano MNO. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il piano, che paſſa per le rette HI, IK, e parallelo al piano NOP, e perche la retta HI è nel piano GHI, ed ancora nel piano HIK, li piani GHI, KIH, ſecondo la detta poſitura, formano vn medeſimo piano. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il pentagono *GHIKL è in vn medeſimo piano*; e per quel che ſi è dimoſtrato, il pentagono *GHIKL è equilatero*, ed equiangolo. Se poi nelle altre vndici piramidi dell'Icoſaedro *ſi farà la medeſima coſtruttione*, congiungendo con rette linee i centri de' *triangoli equilateri*, *ſaranno coſtrutti* dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli, i *quali coſtituiranno il Dodecaedro* iſcritto nel propoſto Icoſaedro, come fù propoſto fare, e *dimoſtrare*.



c 15. del 5.

d 10. del 11.

e 15. del 11.

INVENTIONE

Dell'angolo della ſcambieuole inclinatione di due baſi di qualunque corpo regolare,

DI ISIDORO MAESTRO D'HYPSICLE.

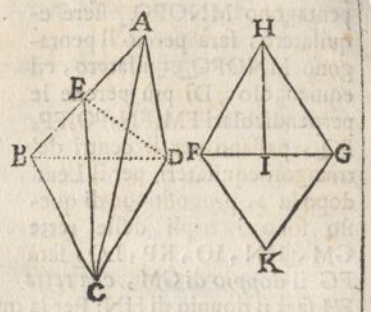
I.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Tetraedro.

Sia il Tetraedro ABCD contenuto da i quattro triangoli equilateri ABC,ACD,ADB, BCD, e ſia A il vertice, e la baſe ſia BCD, e ſi

voglia

voglia ritrouare l'angolo di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD. Si faccia il triangolo equilatero HFG vguale al triangolo equilatero ABC, ouero ABD, dall'angolo H [a] si faccia cadere la retta HI perpendicolare al lato FG, poi sopra la retta FG si costruisca il triangolo isoscele KGF in modo, che ciascun lato KG, KF, sia vguale ad IH. Dico che l'angolo FKG sarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD. Si diuida il lato AB [b] in due parti vguali in E, e si tirino le rette CE,DE. Perche i due lati BE,EC sono vguali à i due lati CE,EA, e la base AC è vguale alla base BC, stante che sono lati del triangolo equilatero ABC, sarà l'angolo CEB [c] vguale all'angolo CEA, e perciò gli angoli CEB, CEA [d] sono retti, e la retta CE è perpendicolare ad AB. Per l'istessa ragione la retta DE è perpendicolare ad AB. Di nuouo perche BC è vguale ad AB, sarà BC il doppio di BE, ed il quadrato di BC [e] sarà il quadruplo del quadrato di BE: ma il quadrato di BC [f] è vguale à i quadrati de i lati CE, EB, *i quadrati* de i lati di CE, EB, saranno il quadruplo del quadrato *di EB: dal* che il quadrato di CE sarà il triplo del *quadrato di EB, cioè* il quadrato di EB sarà la terza parte *del quadrato di* EC. Di nuouo perche *il quadrato di CE è min*ore del quadrato di CB per quanto è il quadrato di EB, sarà dunque il quadrato di CE minore del quadrato di CB per quanto è vn terzo del medesimo quadrato di CE. Nell'istesso modo si dimostrerà che il quadrato di DE è minore del quadrato di CB per quanto è la terza parte del medesimo quadrato di DE; dal che i quadrati delle due CE,ED, insieme giunti, sono maggiori del quadrato di BC; ma BC è vguale al lato CD, i quadrati delle due CE,ED, saranno maggiori del quadrato di CD; per la qual cosa l'angolo CED [g] sarà acuto, e perche le rette CE, ED sono perpendicolari alla retta AB, ch'è commune settione de' piani ABC,ABD, sarà l'angolo CED l'inclinatione, che fà il piano ABC al piano ABD. Finalmente perche i triangoli equilateri ABC, ABD, HFG sono frà loro vguali, le perpendicolari CE, DE, HI sono frà di loro vguali; fù fatto ciascun lato KG, KF vguale ad HI, saranno i due lati KG, KF, vguali à i due lati CE, ED; la base CD è vguale alla



a 12. del 1.
b 10. del 1.
c 8. del 1.
d 10. defin. del 1.
e Scol. alla 4. del 2.
f 47. del 1.
g 13. del 2.

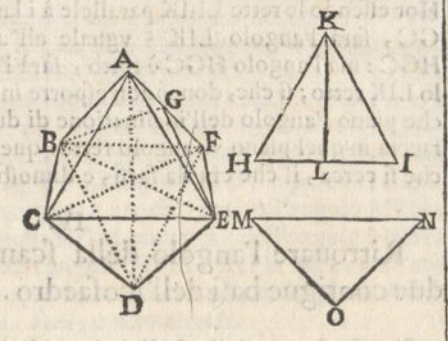
base

baſe FG; ſtante che i triangoli BCD, HFG ſono equilateri, ed vguali, l'angolo dunque FKG [h] ſarà vguale all'angolo CED, e perciò l'angolo GKF ſarà acuto, e ſarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. h 8. del 1.

II.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi dell'Ottaedro.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, la di cui diagonale ſia BE, e ſia eſpoſto il triangolo equilatero KHI vguale ad vno de' triangoli equilateri, che contiene il propoſto Ottaedro, per eſempio, ſia vguale al triangolo equilatero AEF, ouero AFB, dall'angolo K ſi faccia cadere la retta KL [k] perpendicolare al lato HI: ſi eſponga poi la retta MN vguale alla diagonale BE, e ſopra la retta MN ſi deſcriua il triangolo iſoſcele ONM [l] in modo, che ciaſcuno de' lati ON, OM ſia vguale alla perpendicolare KL. Dico che l'angolo *MON è vguale* alla inclinatione *del piano AEF al* piano AFB. Si diuida AF *in due parti vguali* in G, ſi tirino le rette EG, BG, e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'*antecedente*, *che le rette* EG, BG ſono perpendicolari alla retta AF, per la qual coſa l'angolo *BGE ſarà la* quantità dell'inclinatione, che fà il piano AEF al piano AFB. Perche i triangoli equilateri KHI, ABF, AEF ſono frà di loro vguali, le loro perpendicolari KL, EG, BG, ſono frà di loro vguali, ma ciaſcun lato ON, OM è vguale, per coſtruttione, alla perpendicolare KL, ſaranno i due lati ON, OM vguali à i due lati GB, GE; la baſe MN è vguale alla baſe BE; ſarà l'angolo MON [m] vguale all'angolo BGE, e perciò l'angolo MON ſarà la quantità dell'inclinatione, che hà il piano AEF al piano ABF. Dico finalmente che l'angolo MON è ottuſo. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF [n] è vguale à i quadrati de' lati EG, GF, e perciò il quadrato di EF è maggiore del quadrato di EG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrato di BF è maggiore del quadrato di BG: ma nel quadrato BCEF il quadrato di EB è vguale à i due quadrati di EF, FB, ſarà il quadrato di EB maggiore de i quadrat i delle rette EG, GB; dal che l'angolo EGB, cioè MON, è ottuſo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



k 12. del 1.

l 22. del 1.

m 8. del 1.

n 47. del 1.

III.

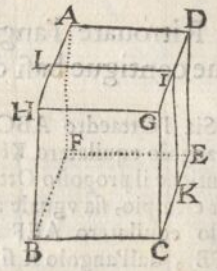
Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Cubo.

Sia il Cubo ABCD, e ſi voglia ritrouare l'inclinatione, che fà il piano CD al piano HD. Si prenda nella retta GD qualunque punto I, e dal punto I nel piano CD ſi tiri la retta IK [a] ad angoli retti con GD. Similmente dal punto I nel piano GA ſi tiri la retta IL ad angoli retti colla retta GD; ſarà l'angolo LIK l'inclinatione del piano CD al piano HD. Dico che l'angolo LIK è retto. Perche gli angoli LIG, HGI ſono retti, ſarà HG [b] parallela ad IL. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che IK è parallela à CG. Hor eſſendo le rette LI, IK parallele à i lati HG, GC, ſarà l'angolo LIK [c] vguale all'angolo HGC: ma l'angolo HGC è retto, ſarà l'angolo LIK retto; ſi che, douendoſi eſporre in qualche piano l'angolo dell'inclinatione di due contigue baſi del Cubo, ſi faccia in quel piano vn angolo retto, quello rappreſentarà l'inclinatione, che ſi cerca, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 12. del 11.

b 28. del 1.

c 10. del 11.

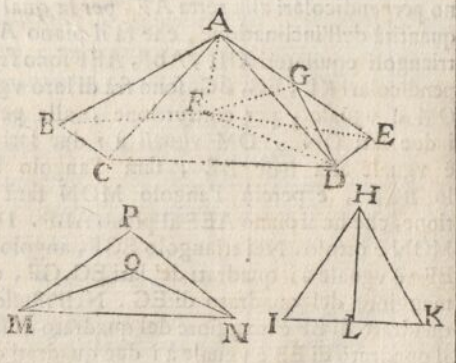


IV.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi dell'Icoſaedro.

Sia eſpoſta vna delle dodici *piramidi dell'Icoſaedro*, che ſia ABCDEF, la di cui baſe pentagonale *ſia BCDEF, ed il* vertice A, e ſi voglia ritrouare *l'inclinatione del piano AED al piano AEF*. Si diuida il lato AE [a] in due parti vguali in G, e da gli angoli D, ed F, al punto G ſi tirino le rette DG, FG, e ſi moſtri, come ſi fece nel Tetraedo, che ne i triangoli equilateri ADE, AFE, le rette DG, FG ſono perpendicolari alla commune ſettione AE, dal che l'angolo DGF ſarà l'inclinatione del piano ADE al piano AEF. Si eſponga il triangolo equilatero HIK vguale al triangolo equilatero ADE, ouero AEF, e dall'angolo H cada la retta HL perpendicolare al lato IK. Perche i triangoli equilateri ADE, AEF, HIK, ſono frà di loro vguali, *le* per-

a 10. del 1.



pendi-

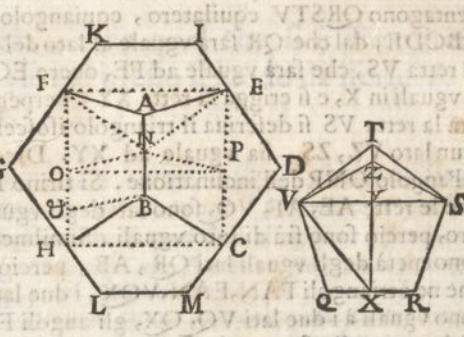
pendicolari HL, DG, FG sono frà di loro vguali. Si tiri la retta FD, che sottende l'angolo FED del pentagono, e si faccia la retta MN vguale ad FD; sopra la retta MN si costruisca il triangolo OMN isoscele [b] in modo, che ciascun lato OM, ON sia vguale alla perpendicolare HL; saranno i due lati MO, ON vguali à i due lati DG, GF; la base MN è fatta vguale alla base FD, sarà l'angolo MON [c] vguale all'angolo FGD: ma l'angolo FGD è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ADE al piano AEF, l'angolo dunque MON sarà l'inclinatione del piano AED al piano AEF. Dico finalmente che l'angolo MON, ouero FGD, è ottuso. Perche il pentagono FBCDE, per ipotesi, è equilatero, il lato ED sarà vguale al lato EF. Si costituisca sopra la base MN il triangolo isoscele PMN [d] in modo, che ciascun lato PM, PN sia vguale ad ED, ouero EF, e si consideri il triangolo DGE, angolo retto in G. Perche il quadrato di DE, [e] è vguale à i quadrati de i due lati DG, GE, sarà il quadrato di ED maggiore del quadrato di GD, ed il lato ED sarà maggiore del lato DG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il lato FE è maggiore del lato FG, dal che i due lati DE, EF sono maggiori de i due lati DG, GF: ma i due lati DG, GF sono vguali à i due NO, OM, perciò i due lati DE, EF, cioè i due NP, PM, sono maggiori de i due lati NO, OM, e per la 21. del 1, l'angolo MON è maggiore dell'angolo NPM. In oltre perche i lati NP, PM, sono vguali à i due lati DE, EF, e la base NM è vguale alla base DF, l'angolo NPM [f] sarà vguale all'angolo DEF; e perche l'angolo DEF (come angolo del pentagono è ottuso) perciò l'angolo MPN, sarà ottuso; fù dimostrato l'angolo NOM maggiore dell'angolo NPM, sarà l'angolo NOM più ottuso dell'angolo NPM. Per la qual cosa l'angolo NOM, ouero DGF, che rappresenta l'inclinatione del piano ADE al piano *AEF*, è ottuso, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

b 22. del 1.
c 8. del 1.
d 22. del 1.
e 47. del 1.
f 8. del 1.

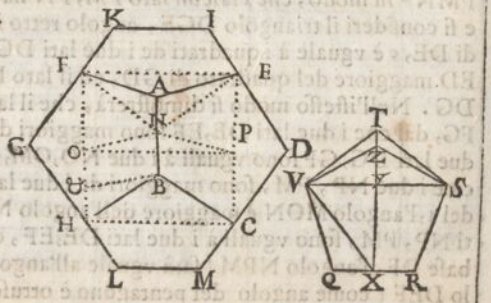
V.

Ritrouare l'angolo della scambieuole inclinatione di due contigue basi del Dodecaedro.

Siano esposte quattro basi del Dodecaedro, come sono i notati quattro pentagoni ABCDE, FGHBA, AEIKF, CBHLM, in modo, che i due ABCDE, FGHBA concorrano, secondo il commune lato AB, e gli altri due AEIKF, BHLMC habbiano l'angolo, negli estremi A, & B del lato commune AB; si tirino le rette FE, FH, HC, CE, le quali, perche sottendono gli angoli EAF, FGH, HBC, CDE, degli



vguali pentagoni, che ſono baſi del Dodecaedro, perciò ſono frà di loro vguali. In oltre perche i lati DE, DC, GF, GH, ſono frà di loro vguali, e gli angoli in D, & G ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo
a 4. del 1. DEC [a] vguale all'angolo GFH, che detratti dagli vguali angoli DEA, GFA, reſta l'angolo HFA vguale all'angolo CEA: ma gli angoli AEF,
b 5. del 1. AFE [b] ſono frà di loro vguali (ſtante che le rette AE, AF ſono lati de i pentagoni vguali) tutto l'angolo dũque CEF ſarà vguale à tutto l'angolo HFE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo FEC è vguale all'angolo HCE, e che l'angolo EFH è vguale all'angolo CHF: per la qual coſa i quattro angoli del quadrilatero FHCE ſono frà di loro vguali. E perche quattro angoli d'vn quadrilatero, per lo Scolio alla 32. del 1, ſono vguali à quattro angoli retti; eſſendo i quattro angoli del quadrilatero FHCE, fra di loro vguali, ogn'vno di quelli ſarà vn angolo retto, ed il quadrilatero FHCE ſarà quadrato. Si diuida AB
c 10. del 1. [c] in due parti vguali in N, e dal punto N ne i piani de'
d 11. del 1. pentagoni ABCDE, AFGHB, ſi tirino le rette NP, NO, [d] *ad angoli* retti col lato AB, Perche le rette EC, FH, che *ſottendono gli angoli* de' pentagoni, per lo Scolio alla *propoſitione 8. del 13, ſono* parallele al lato AB, eſſendo gli *angoli PNA, ONA, per coſtruttione*, retti; ſaranno *gli angoli NPE, NOF retti*. *E* perche le rette PN, ON ſono ne' piani de' *pentagoni ABCDE*, AFGHB, e fanno angoli retti colla commune ſettione AB, perciò l'angolo ONP ſarà la quantità dell'inclinatione, che il piano ABCDE fà al piano AFGHB. Si tiri la retta OP, e ſi eſponga il pentagono QRSTV equilatero, equiangolo, ed vguale al pentagono ABCDE; dal che QR ſarà vguale al lato del Dodecaedro eſpoſto; ſi tiri
f 10. del 1. la retta VS, che ſarà vguale ad FE, ouero EC; ſi diuida QR
g 11. del 1. [f] in due parti vguali in X, e ſi erigga la retta XY [g] perpendicolare alla retta QR; ſopra la retta VS ſi deſcriua il triangolo iſoſcele ZVS
h 22. del 1. [h] in modo, che ciaſcun lato VZ, ZS, ſia vguale ad XY. Dico che l'angolo VZS è vguale all'angolo ONP dell'inclinatione. Si tirino le rette NE, NF, VX. Perche le rette AE, AF, VQ, ſono lati degli vguali pentagoni del Dodecaedro, perciò ſono frà di loro vguali. Similmente perche le rette AN, QX ſono metà degli vguali lati QR, AB, perciò ſono frà di loro vguali, ſi che ne i triangoli FAN, EAN, VQX, i due lati FA, AN, ouero EA, AN, ſono vguali à i due lati VQ, QX, gli angoli FAN, EAN, VQX, ſono frà
K 4. del 1. di loro vguali, ſaranno le baſi FN, EN, VX [K] frà di loro vguali, e gli angoli FNA, ENA, VXQ ſono frà di loro vguali, che detratti dagli an-



goli

goli retti ANO, ANP, QXY, restano gli angoli FNO, ENP, VXY frà di loro vguali. Si considerino i triãgoli FON, EPN, XYV. Perche gli angoli NOF, NPE, VYX, sono retti, e gli angoli FNO, ENP, VXY, per quel che si è dimostrato, sono frà loro vguali, i due angoli FNO, FON, ouero ENP, EPN, sono vguali à i due angoli VYX, VXY; i lati NF, NE, VX sono stati dimostrati vguali, saranno i due lati NO, OF, l ouero NP, PE, vguali à i due lati XY, YV; cioè il lato OF, ouero PE, vguale ad VY, ed il lato ON, ouero NP, vguale ad XY: ma per costruttione ciascun lato VZ, ZS è vguale ad XY, saranno i due lati VZ, ZS, vguali alle due rette ON, NP. Hor essendo EP vguale, e parallela ad FO, sarà FE m vguale, e parallela ad OP, fù dimostrata la retta FE vguale ad VS, sarà OP vguale alla retta VS: per la qual cosa l'angolo VZS n è vguale all'angolo dell'inclinatione ONP. Dico finalmente, che l'angolo VZS, ouero ONP, è ottuso. Dal punto B o si tiri la retta B&, parallela ad NO. Perche NB è parallela ad O&, il quadrilatero O&BN sarà parallelogrammo, dal che il lato B& p sarà vguale ad ON. Oltre à ciò perche le rette B&, ON sono parallele, sarà l'angolo B&H q esterno vguale all'angolo NO& interno, ed opposto: ma l'angolo NO& è retto, in conseguenza l'angolo B&H sarà retto. E perche i due angoli BH&, B&H r sono minori di due retti, perciò l'angolo B&H sarà maggiore dell'angolo BH&, e la retta BH s sarà maggiore di B&: ma B& è vguale ad ON, ouero NP, sarà la retta BH, ouero BC, maggiore di ON, ouero NP: ma le rette HB, BC, TV, TS, come lati de pentagoni vguali, ed equilateri, sono frà di loro vguali; e le rette ON, NP furono dimostrate vguali alle rette VZ, ZS; le rette dunque VT, TS saranno maggiori delle rette VZ, ZS, e per la 21. propositione del 1, l'angolo VZS è maggiore dell'angolo VTS: ma l'angolo *VTS* del pentagono, per lo Scolio alla 32. del 1, è maggiore del retto, perciò l'angolo VZS, ouero ONP, sarà molto maggiore d'vn' angolo retto. Per la qual cosa l'angolo dell'inclinatione di due contigue basi del Dodecaedro è ottuso, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

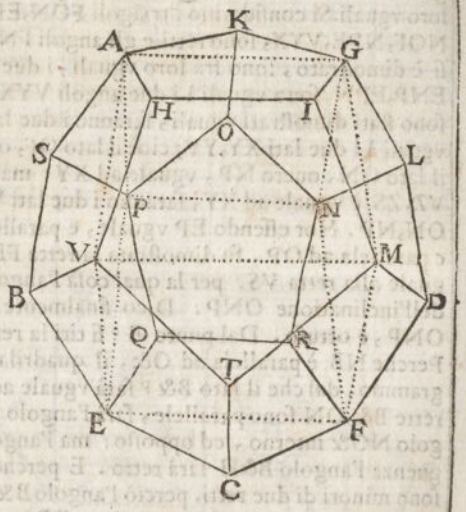
l 26. del 1.
m 33. del 1.
n 8. del 1.
o 31. del 1.
p 34. del 1.
q 29. del 1.
r 17. del 1.
s 19. del 1.

COROLLARIO I.

Dalle cose antedette, e da quel che si è dimostrato nella 17. propos. del 13, è manifesto il modo da iscriuere il Cubo nel Dodecaedro.

Sia per esempio e sposto il Dodecaedro ABCD, nel quale si habbia ad iscriuere il Cubo. Perche nella costruttione del Dodecaedro, seruendoci de' quadrati, che contengono il Cubo, in ciascun lato di quel Cubo si descriue il pentagono del Dodecaedro in modo, che ogni lato del Cubo sottende l'angolo del pentagono del Dodecaedro; se dunque nel Dodecaedro proposto per ogni pentagono si tirerà vna retta, che sottenda vn angolo di quel pentagono, sarà iscritto il cubo nel Dodecaedro; come per esempio. Nel pentagono AHIGK è tirata la retta AG, che sottende l'angolo AKG del detto pentagono; nel pentagono

GIMDL è tirata la retta GM, che ſottẽde l'ãgolo GIM; nel pentagono KGLNO è tirata la retta GN, che ſottende l'angolo GLN; nel pentagono OPQRN è tirata la retta PN, che ſottende l'angolo PON; nel pentagono SPOKA è tirata la retta AP, che ſottende l'angolo ASP; nel pentagono LNRFD è tirata la retta NF, che ſottende l'angolo NRF; e nel pentagono DMTCF è tirata la retta MF, che ſottende l'angolo MDF; ſimilmente nel pentagono FRQEC è tirata la retta EF, che ſottende l'angolo FCE; di più nel pentagono HVTMI è tirata la retta VM, che ſottende l'angolo VTM; nel pentagono EQPSB è tirata la retta EP, che ſottende l'angolo EQP; nel pentagono CTVBE è tirata la retta EV, che ſottende l'angolo EBV; e finalmente nel pentagono BVHAS è tirata la retta VA, che ſottende l'angolo VHA; e queſti dodici lati, che contengono i ſei quadrati APNG, GNFM, AGMV, APEV, PEFN, VEFM, formano il Cubo AEFG iſcritto nel propoſto Dodecaedro.



COROLLARIO II.

Quindi è manifeſto come nel dato Dodecaedro ſi iſcriue il Tetraedro, e l'Ottaedro.

Poiche ſe nel Dodecaedro ſi iſcriua prima il Cubo, e nel Cubo ſi iſcriua il Tetraedro, ouero l'Ottaedro, ſarà iſcritto il Tetraedro, e l'Ottaedro nel Dodecaedro.

COROLLARIO III.

Appare ancora il modo da iſcriuere il Cubo nell'Icoſaedro.

Il che ſi fà con iſcriuere prima il Dodecaedro nell' Icoſaedro, come fù inſegnato nella 5. prop. di queſto, e poi nel Dodecaedro ſi iſcriua il Cubo, come ſi è detto nel 1. Coroll, e ſarà iſcritto il Cubo nell'Icoſaedro.

CO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [807] - 790

COROLLARIO III.

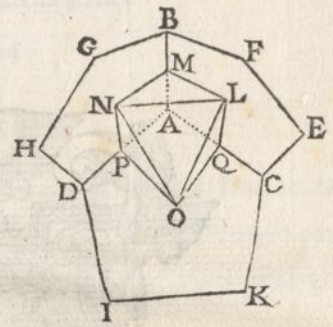
Si può ancora colla medesim' arte iscriuere il Tetraedro nell'Icosaedro.

Il che si farà coll'iscriuere prima il Cubo nell'Icosaedro, e nel Cubo iscriuere il Tetraedro, e sarà iscritto il Tetraedro nell'Icosaedro.

COROLLARIO V.

Dalle cose dette si caua ancora il modo da iscriuere l'Icosaedro nel Dodecaedro.

Sia esposto l'angolo solido A contenuto dalli tre angoli BAC, BAD, DAC, de i tre pentagoni BACEF, BADHG, DACKI, che sono basi del Dodecaedro, e da i centri O, L, N, di quei tre pentagoni à i lati intorno all'angolo A si facciano cadere rette perpendicolari, cioè LQ [a] perpendicolare ad AC, la retta LM perpendicolare ad AB, le rette NM, NP perpendicolari à i lati AD, AB, e le rette OQ, OP perpendicolari à i lati AC, AD; si tirino le rette LN, NO, OL. Perche le rette OQ, QL, sono perpendicolari alla commune settione AC, l'angolo LQO sarà l'inclinatione del piano ACEFB al piano DACKI; e per simile ragione l'angolo LMN è l'inclinatione del piano BACEF al piano DABGH; e l'angolo NPO è l'inclinatione del piano DABGH al piano DACKI; e perche il Dodecaedro è contenuto da dodeci pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, gli angoli delle inclinationi sono frà di loro vguali, e perciò gli angoli OQL, LMN, NPO, sono frà di loro vguali. Similmente essendo i tre esposti pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, le perpendicolari OQ, LQ, LM, MN, NP, PO, sono frà di loro vguali. Hor ne i triangoli LQO, LMN, NPO, essendo i lati LQ, QO, LM, MN, NP, PO, frà di loro vguali, e gl'angoli OQL, LMN, NPO, frà di loro vguali saranno le basi LN, NO, OL, [b] frà di loro vguali; dal che il triangolo LNO sarà equilatero. Se quanto si è fatto intorno all'angolo solido A, si farà ancora intorno à gli altri vndici angoli solidi del Dodecaedro, sarà iscritto l'Icosaedro nel dodecaedro, come fù proposto fare, e dimostrare.



a 12. del 1.

b 4. del 1.

AN-

ANNOTATIONE.

A queſti quindici Elementi Franceſco Fluſſa Candalla aggiunſe il decimoſeſto, nel quale compara ſcambieuolmente i corpi regolari iſcritti, à quelli ne' quali ſono iſcritti, e fà ancora varie comparationi de i lati de' medeſimi corpi frà loro; e perche il mio iſtituto è ſtato di ſpiegare qui ſolamente li quindici Elementi eſpoſti da Euclide come più neceſſarij; perciò ſi è tralaſciato tutto il di più aggiunto da altri Autori, e ſolo ſi è cercato reſtituire con chiara ſpiegatione quel che ne hà ſcritto il medeſimo Euclide, come ſtimiamo già adempito.

Fine del Decimoquinto, ed vltimo Elemento.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [809] - 792

Errori occorsi nella Stampa che si sono auuertiti.

pag.	Linea	Errori	Correttione
36	3	minore la	minore della
36	15	AB	DB
36	25	DC	DE
41	29	GH	GM
49	26	ADC	ABC
	27		
92	5	AC	AB
94	6	CB, è	CB col quadrato di CA, è
105	39	la quale si	la quale se non sega la circonferenza, si
116	21	IAD	HAE
120	37	Problema	Theorema
131	38	punto I	punto A
134	3	AB	CD
156	20	F,G,H,I.	F,G,H,E.
171	32	CO	AO
176	26	di proportione	di medesima proportione
177	8	noto	noto, e nel 3.lem. dopo la 18. prop.del 6.lib.
178	19	plicatione mag.	plicatione, e preso il multiplice della minore è con multiplicatione mag.
185	9	EG è la	EG deue essere la
217	17	cõponendo sarà AC à CB come DF ad FE ma	ela quantità
218	23	quarta; sarà	quarta, e se G è minore, ò eguale à K ancora I è minore di M; sarà
222	15	di A	di E
227	9	Problema	Theorema
247	47	DAC	DAB
252	28	nale	nale
264	24	E	F
264	25	F	E
267	30	*il quarto*	il quinto
269	28	in *H*, *vguale*	in *H*, sarà la multiplicatione di D nel prodotto di G in H, vguale
275	30 33	goli	goli, *ed hanno i lati intorno alli angoli vguali proportionali*
275	34	rettiline o B	rettilineo B, ed hanno i lati intorno *alli* angoli vguali proportionali
275	35	per la qualcosa	ed hanno
284	33	angolo; poi	angolo, vguale al rettilineo A; poi
294	4	EFC	EFG
295	16	CNE	CNI
298	3	ad AC	à DC
303	31	AD,DC	AD,BC
328	13	frà vno di	frà il minimo di
341	21	AC	AG
362	3	quadrati	quadrati quadrati
366	34	E2	E32
371	4	i due C	i due K
371	5	F	G
371	11	C ad E	C ad F
371	37	vn solo numero	vn numero
388	5	composto, il	Composto A, il
398	14	la retta BA	il numero BA
398	15	5a	50
429	12	sarà AG maggiore di FD, e sarà molto	sarà AG non minore di FD, e perciò sarà
446	4	sarà E	sarà il quadrato di E
452	36	le duc	le due

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [810] - -
PUBLIC DOMAIN

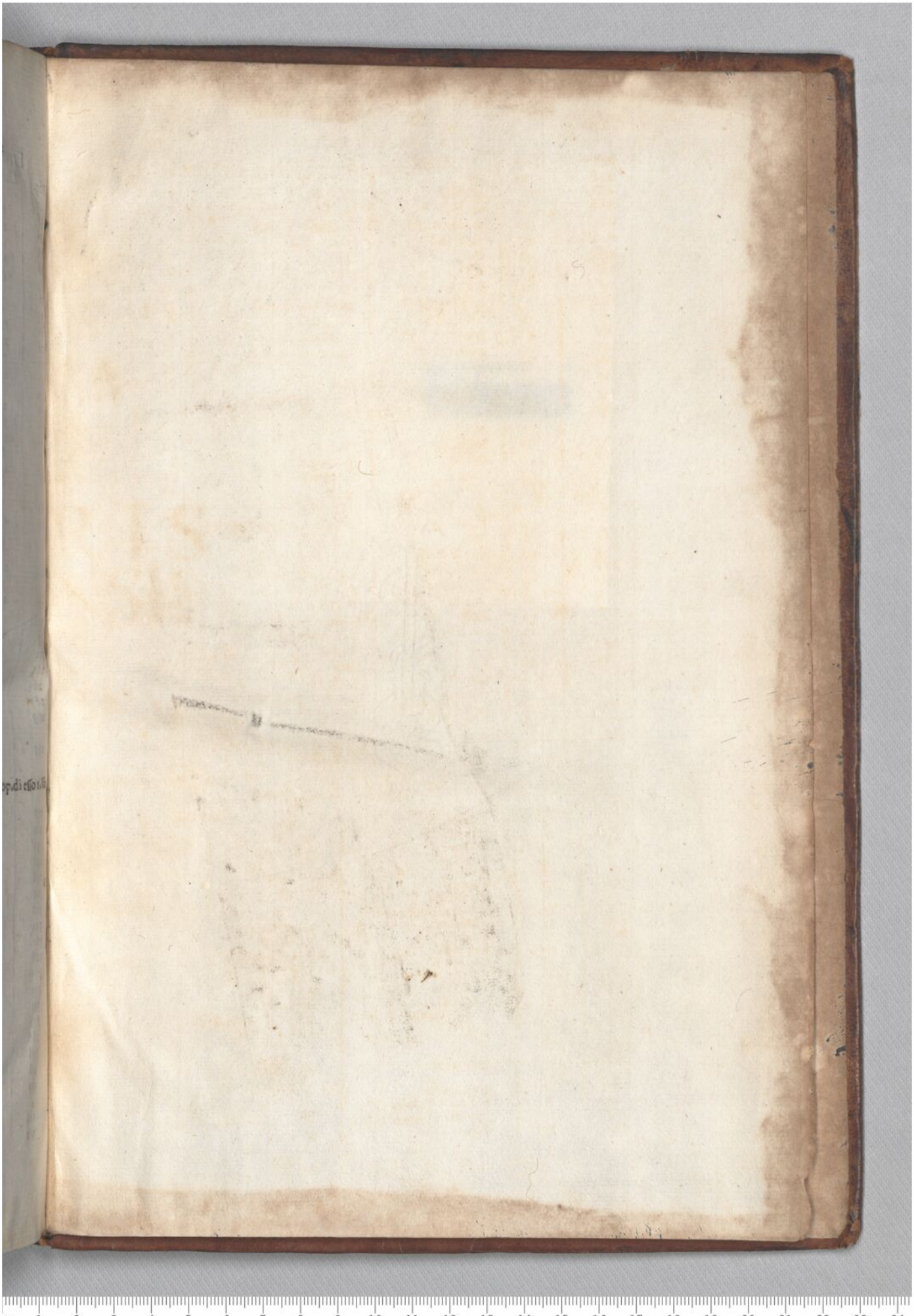
pag.	Linea	Errori	Correttione
459	34	tio B	tio A
481	13	di HD	di HB
481	33	di HB	di AB
483	4	quadrati AB	quadrati di AB
487	16	sarà DC	sarà BC.
500	10	del	al
505	41	CD	CB
506	27	DC	BC
507	1) 4	quadrati AC	qnadrati di AC
507	39	AC, CD	AC, CB
507	41	quadrati AD	quadrati di AD
509	29	quadrati AC	quadrati di AC
510	17	D	C
518	25	FG	FH
521	7	maggior nome AE	minor nome ED
527	8	sono commensura- bili sola	sono incommensurabili
527	9	mente in	in.
529	22	medio	Rationale
607	15	linea E	linea EF
614	24	AFI	AIF
636	22	FG	FC
647	13	NM,a in	NM vguale alla base BK, in
653	6	MN	GM
655	26	due angoli	due vguali angoli
655	35	gli angoli	gli vguali angoli
667	7	le portioni	le metà delle portioni
678	32	in vno	in vna
678	33	altro	altra
683	23	Parallelepipepi	parallelepipedi
695	28	ad FP	ad MP
705	21	LO	MO
712	16	Coroll.	Scolio
713	34	commensuraali	commensurabili
759	23	non siano	siano
762	40	DEA	DGA
764	42	GHC	GHI
769	7	lato EBD	lato è BD

Il Corollario dopo la 37. prop. del 1. lib. deue considerarsi posto dopo la 38. prop. di esso 1. lib.

Errori corsi nelle Citattioni marginali.

Pag.	Linea	Errori	Correttioni
35	14	e 3 post.	e 1 post.
65	20	c 15 del 1.	c 13 del 1.
68	24	b 27 prop.	b 29 prop.
69	4	a 25 Defin.	a 35 defin.
75	17	d 3 post.	d 2 post.
76	8	a 4 prop.	a 34 prop.
85	3	d 3 assioma	†
86	19	n scol. antecedente	†
106	33	a 46 post.	a 1 post.
107	21	b 3 del 1.	b 3 del 3
107	41	b 15 def. 2.	b 15 defin. del 1.
132	13	b 23 del 3.	b 23 del 1.
143	26	f 16 del 3.	f 36 del 3
149	16	d 32 del 1.	d 13 del 1.
150	3	d 25 del 1.	d 23 del 1.
151	30	g Corollario alla 6. del 1.	g Coroll. alla 16 del 3.
153	7	f 35 del 1.	f 35 def. del 1.
154	31	b 2 del 1.	b 26 del 3.
157	12	b 7 del 3.	b 7. del 4.
207	11	b 13 del 7.	b 13 del 5.
253	1		c 31 del 3.
287	1	K 31 del 6.	K 36 del 1.
377	30	flemma 7 dopo la 18. del 7	flem. 8. dopo la 18 del 6.
378	39	h lemma 7 dopo la 18. del 7	h lem. 8 dopo la 18 del 6.
645	29	c 34 dell'11.	c 24 dell'11.

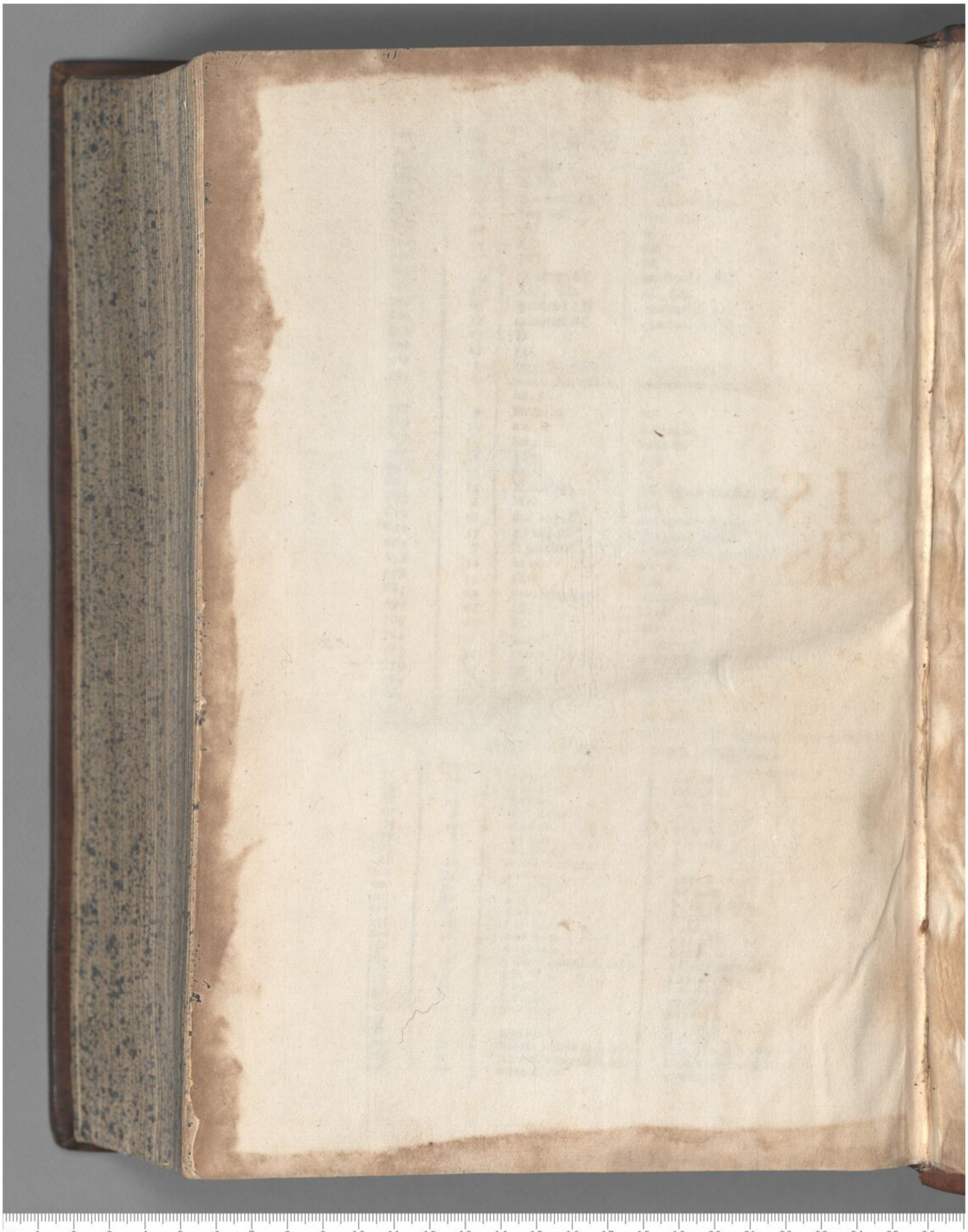
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 115, [811] - -



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [812] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [813] - -

GWLB Hannover 35
036 829 080

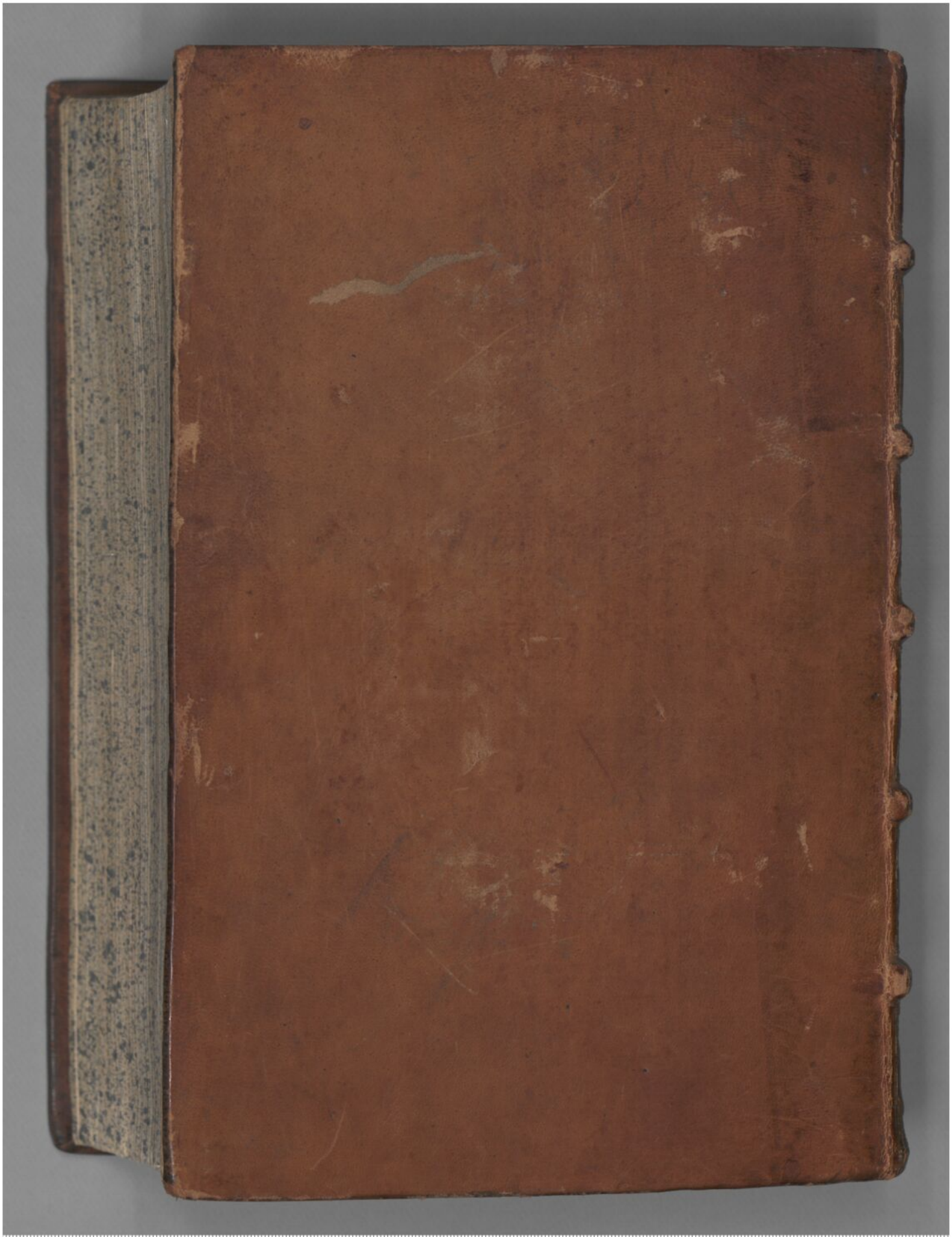
Niedersächsische Landesbibliothek Hannover

IV, 6A 2° 271

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [814] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 115, [815] - -