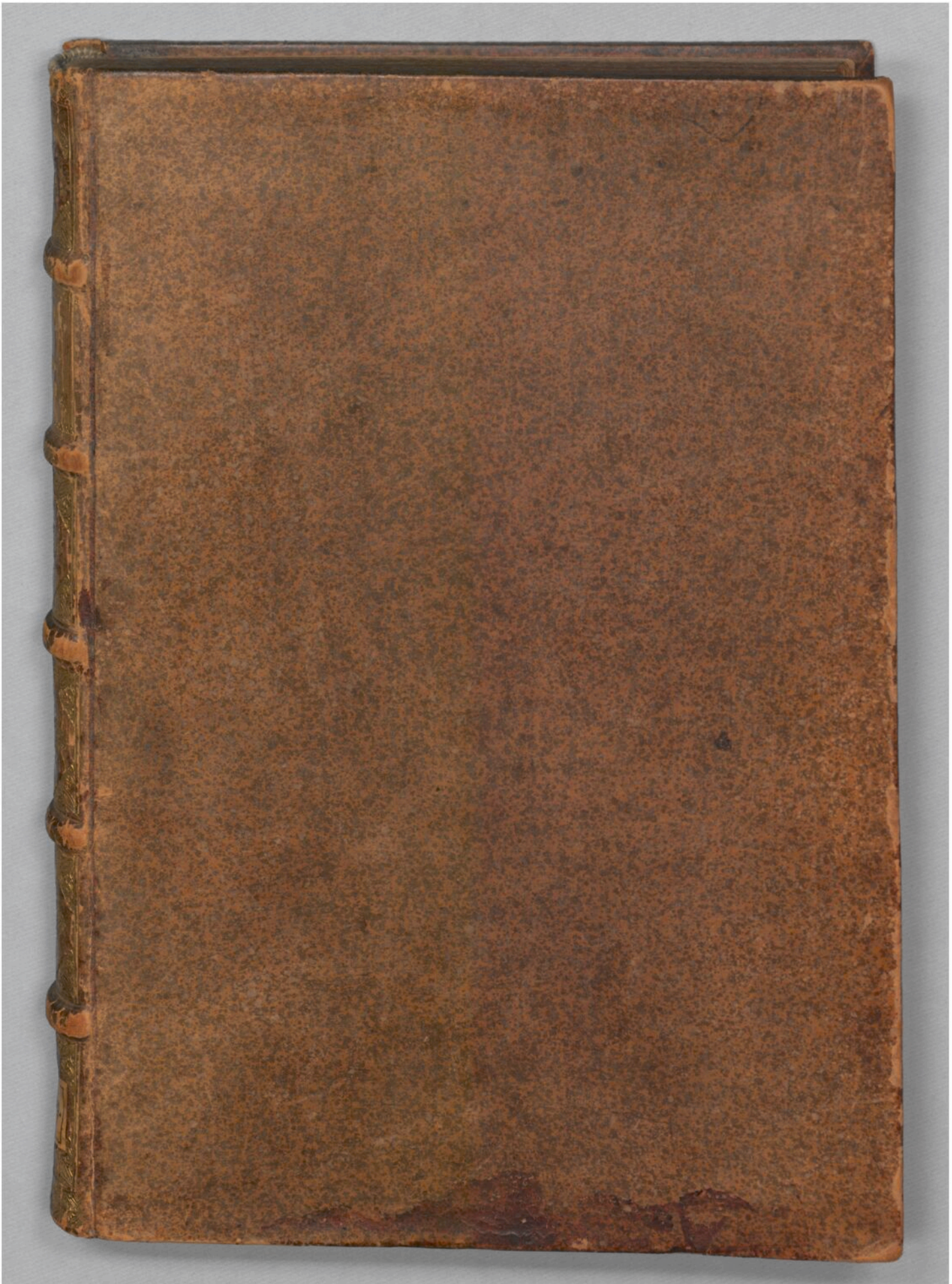


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [1] - -

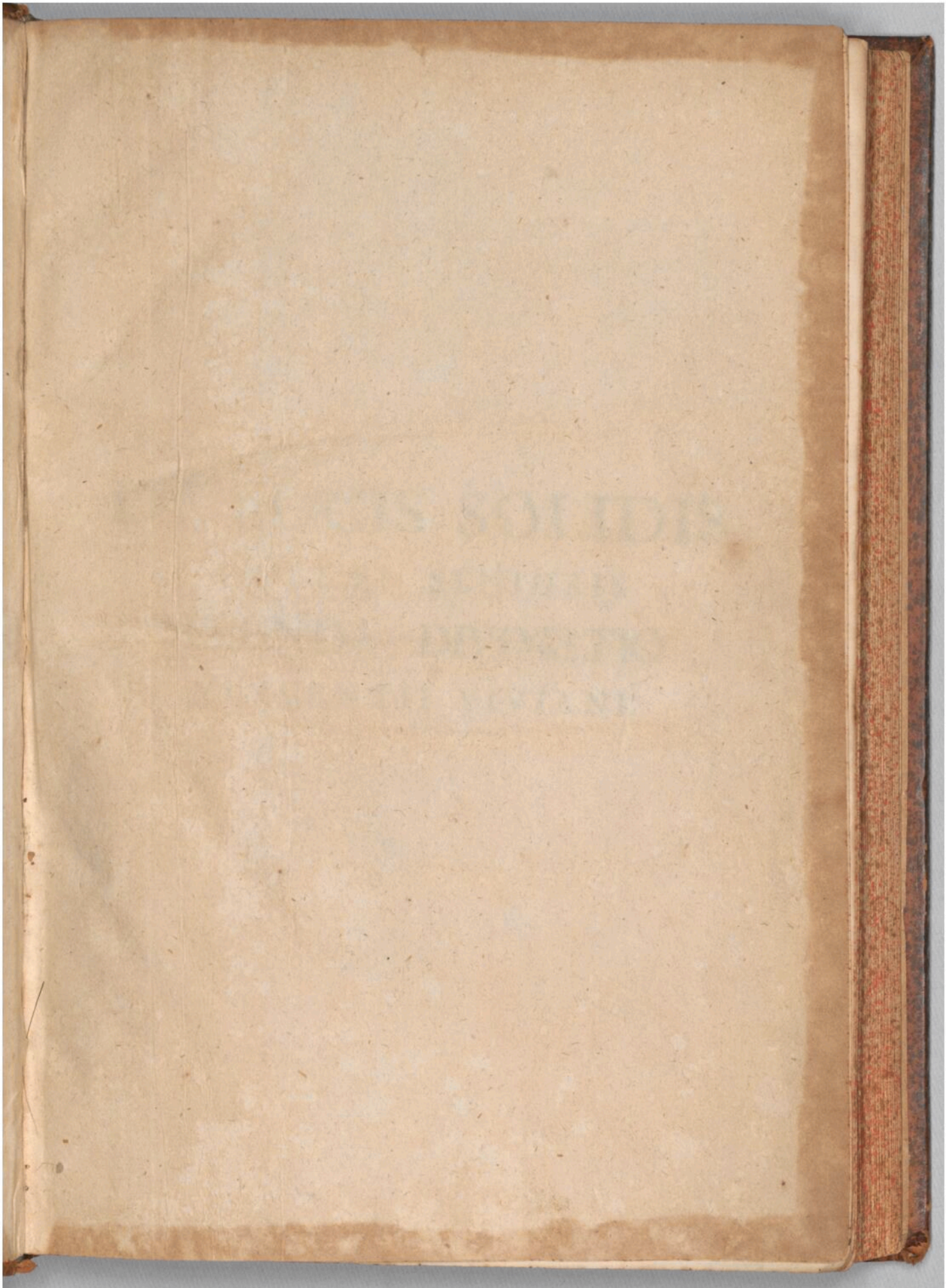
PUBLIC DOMAIN

Leibn. Marg.
151

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [2] - -

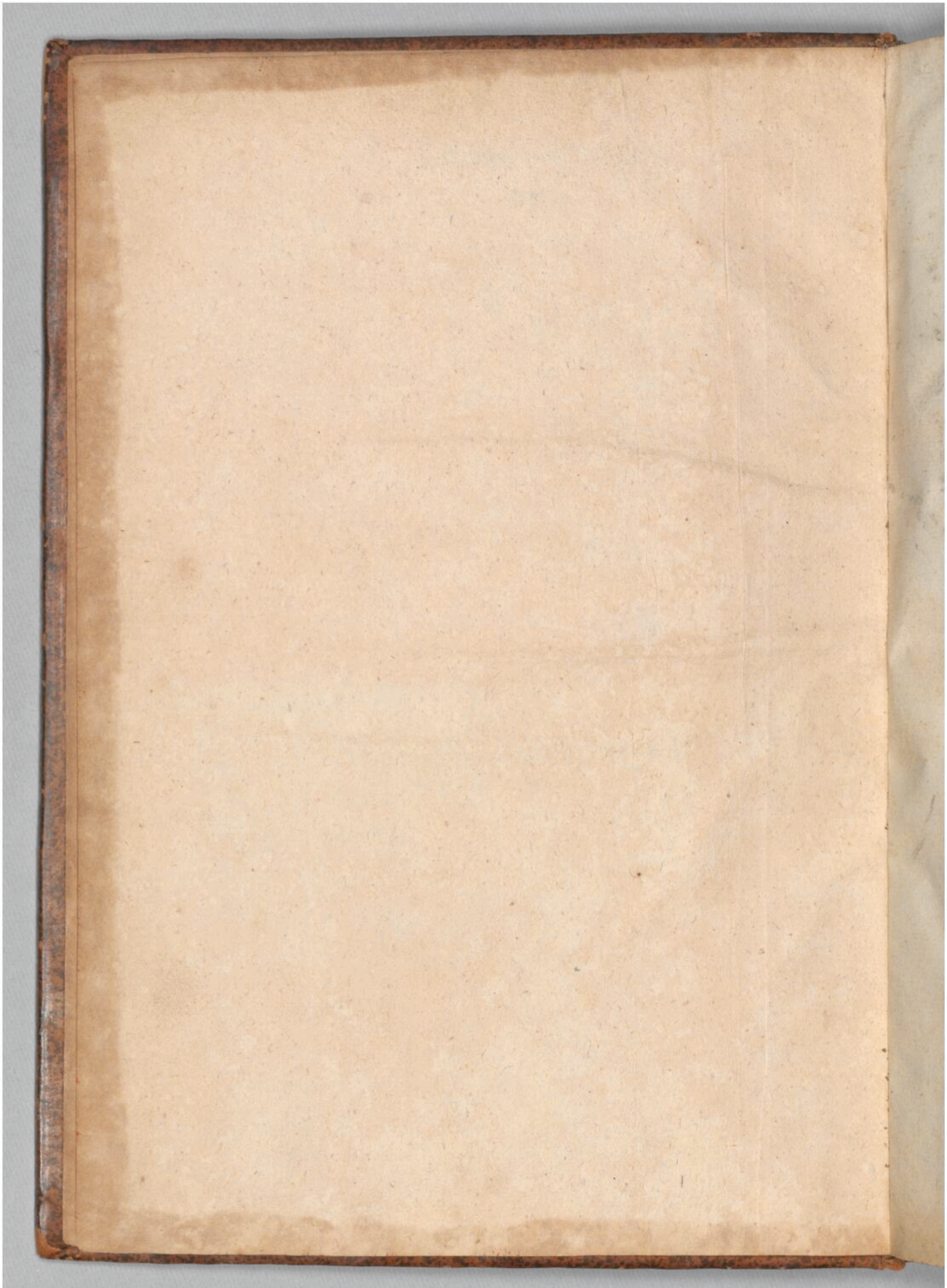
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [3] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [4] - -

PUBLIC DOMAIN

362

DE LOCIS SOLIDIS

ARISTÆI SENIORIS

SECUNDA DIVINATIO

VINCENTII VIVIANI.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [5] - -
PUBLIC DOMAIN

Mihi ſemper in deliciis fuit

Scrutari vetera, & ex his ea
Quæ Scriptores Græciæ prodiderunt, eruĕre.

Cic. Tuſc. Quæſt. Lib. I.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [6] - -
PUBLIC DOMAIN

DE

LOCIS SOLIDIS

SECUNDA DIVINATIO GEOMETRICA

IN QUINQUE LIBROS INIURIA TEMPORUM AMISSOS

ARISTÆI SENIORIS GEOMETRÆ

AUTORE VINCENTIO VIVIANI

MAGNI GALILÆI NOVISSIMO DISCIPULO

REGIÆ CELSITUD. COSMI III. M.D.ETRURIÆ

MATHEMATICO PRIMARIO

A LUDOVICO MAGNO

INTER OCTO EXTEROS REGIÆ ACADEM. SCIENTIAR. SOCIOS ADSCRIPTO
ET REGALIS SOCIETATIS LONDINI SODALI

OPUS CONICUM

Continens Elementa Tractatuum ejusdem Viviani, quibus tunc ipse multa, maxima, & abdita in Matheſi Theoremata demonſtrare cogitaverat

Elaboratum Anno 1646. Impreſſum Florentiæ ab Hippolyto Naveſi Anno 1673. Addendis auctum, & in lucem prolatum Anno 1701. At, ſi extabit umquam ab Autore completum, uti eſt in animo, ſolus DEUS ſcit.

FLORENTIÆ, Typis REGIÆ CELSITUDINIS
Apud Petrum Antonium Brigonci.

SUPERIORUM PERMISSU.

Illmo et incomparabili Viro D. G. G. Leibnitio a Conſiliis Intimis Serenissimi Electoris Hannoverani obsequiosa humillimus Auctor D.D.D.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [7] - -
PUBLIC DOMAIN

DE

LOCIS SOLIDIS

SECUNDA DIVINATIO GEOMETRICA

IN QUINQUE LIBROS INTEGRA TEMPORUM INJURIA

ARISTÆI SENIORIS GEOMETRÆ

AUCTORE VINCENTIO VIVIANI

MAGNI GALILÆI NOVISSIMO DISCIPULO

REGIÆ CELSITUDINIS COSMI III. M.D.ETRURIÆ

MATHEMATICO PRIMARIO

A LUDOVICO MAGNO

INTER OCTO EXTEROS REGIÆ ACADEMIÆ SCIENTIARUM SOCIOS ADSCRIPTO

ET REGIÆ SOCIETATIS LONDINI SODALI

OPUS CONICUM

FLORENTIÆ, Typis Regiæ Celsitudinis
Apud Petrum Antonium Brigonci.

SUPERIORUM PERMISSU.

LUDOVICO MAGNO

GALLIARUM ET NAVARRÆ
REGI CHRISTIANISSIMO
CATHOLICÆ ROMANÆ ECCLESIÆ
FIDELISSIMO PRIMOGENITO
INTESTINÆ HÆRESEOS EXTERMINATORI CONSTANTISSIMO
AMICORUM REGUM REGNORUMQUE
PRO ORTHODOXA FIDE
GENIO TUTELARI
MILITARIS DISCIPLINÆ BELLICÆQUE ARTIS
PROVIDENTISSIMO INSTAURATORI
TERRA MARIQUE POTENTISSIMO
BELLI ET PACIS ARBITRO
IN UTROQUE SIBI ÆQUE IMPERANTI
INIURIIS INGRUENTIUM UNDECUMQ; STRENUISSIMORUM HOSTIUM
PROPULSATIS
INSIDIIS ET CONATIBUS ELUSIS
MAXIMIS COPIIS DISPERSIS PROFLIGATIS INTERNECIONE DELETIS
INACCESSIS ARCIBUS EVERSIS
EXPUGNATIS MUNITISSIMIS URBIBUS
BELLICOSISSIMIS GENTIBUS GALLICO AC FULMINEO IMPETU
IN DITIONEM REDACTIS
FATALI ET INELUCTABILI DEBELLATORI
AC TRIUMPHATORI SEMPER INVICTO

✠ 3

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [9] - -

BIBLIOTHECA
REGIA
HANNOVERANA

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [10] - -

PUBLIC DOMAIN

POST CLARISSIMAS VICTORIAS EXIMIA VIRTUTE PARTAS
AD BELLICAM GLORIAM BENEFICENTIÆ LAUDE CUMULANDAM
ET CHRISTIANISSIMI MAGNIQ; COGNOMEN IMPLENDUM

POSTHABITIS
OPIBUS TITULIS PROVINCIIS REGNIS NATIONIBUS
DE QUIBUS GLORIOSE TRIUMPHAVERAT
ÆRUMNOSO ET ANTEA QUIDEM DIUTINO BELLO MOERENTI
NUNC PLAUDENTI ORBI CHRISTIANO
PACE ULTRO RESTITUTA

CLEMENTI PIO LIBERALI MAGNANIMO

CONSOLATORI

TUM APERTO TUM CLAUSO ANCIPITIS JANI TEMPLO
NOBILISSIMARUM ARTIUM ET DISCIPLINARUM

SPLENDIDISSIMO PATRONO

LITERATORUM FAUTORI ATQUE ALTORI

MUNIFICENTISSIMO

INCOMPARABILI
A CONDITO ÆVO HEROI
UNIVERSO TERRARUM ORBI
IN ADMIRATIONEM

A DEO DATO

NUMINI SUO BENEFICENTISSIMO

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [11] - -
PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [12] - -
PUBLIC DOMAIN

OB TOT TANTORUMQUE IN SE COLLATORUM MUNERUM

REGIAM MAGNIFICENTIAM

QUIBUS AMPLAS ÆDES A SE INSCRIPTAS

ADEO DATAS

COMPARAVIT INSTAURAVIT ORNAVIT

AD PERPETUUM ALIQUOD

GRATI ANIMI ET OBSEQUII SUI MONIMENTUM

POSTERIS RELINQUENDUM

HANC ALTERAM DIVINATIONEM

IN

ARISTÆI SENIORIS GEOMETRÆ LIBROS QUINQUE

DE LOCIS SOLIDIS

INIURIA TEMPORUM AMISSOS

ADDICTISSIMUS

SACRÆ MAIESTATI DEVOTUS

ET AB IPSO

LUDOVICO MAGNO

INTER OCTO EXTEROS

REGIÆ ACADEMIÆ SCIENTIARUM SOCIOS

ADSCRIPTUS

VOLUMINIS HUIUS ANTIQUUS PARENS

DAT, DEDICAT CONSECRAT

VINCENTIUS VIVIANI

ANNUM AGENS OCTOGESIMUM

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [13] - -

PUBLIC DOMAIN

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [14] - -

PUBLIC DOMAIN

VINCENTIUS VIVIANI

INGENUO ET AMICO GEOMETRÆ

S A L U T E M.

ANtequam aggrediar ad explicanda ea, quæ olim adoleſcens de Locis Solidis Ariſtæi commentabar, & quantum conjectura conſequi poteram, à graviſsimo Auctore ſcripta fuiſſe judicabam; pauca præfari placet, tum de Ariſtæo, tum de me ipſo, meaque ratione ſcribendi.

Satis conſtat duos fuiſſe Mathematicos nomine Ariſtæos, eoſque floruiſſe ante Pappum Alexandrinum, qui vixit ætate Theodoſii Senioris. Pappus enim in Libris Mathematicarum collectionum meminit Ariſtæi Senioris, quod huic cognomen addidit, ut demonſtraret alium fuiſſe Ariſtæum Juniorem.

Ille, cujus memoriam penè obrutam tenebris vetuſtatis excitare, & admiranda inventa temporum injuria prorſus obliterata reſtituere, atque inſtaurare tentavimus, eſt Ariſtæus Senior vetuſtiſ-

ſtiſsimus Geometra Græcus. De hoc luculentiſſimo Scriptore non multa ſunt à Veteribus memoriæ prodita. De ejus ortu, genere, parentibus, patria, ætate, diſciplina, dictis, geſtis, præceptoribus, amicis, diſcipulis, morte, altum ubique ſilentium. Solus fere Pappus Alexandrinus de Mathematicis diſciplinis optimè meritus, ejus memoriam ad nos propagavit. Cæteros, qui aut ipſum laudarunt, & illuſtrarunt, aut ejus doctrinam, & inventa memoriæ prodiderunt, præteritorum temporum calamitas oblivione delevit. Ille in ſuis Mathematicis collectionibus tanti Viri famam poſteritati commendavit.

Ac primum libro tertio poſt quartam Propoſitionem pag. 4. ex verſione Federici Commandini Urbinatis edita Piſauri Anno 1588. explicat tria Problematum genera, plana, ſolida, & linearia, ut ſibi viam ſternat ad celebre illud problema de Duplicatione Aræ Deliacæ, quod Veteres, Deliacum dixere. Ibi poſt Heronem, ac Philonem, qui ejus problematis conſtructionem mechanicis inſtrumentis exequebantur, Apollonii, noſtrique Ariſtæi mentionem facit his verbis.

Hi enim aſſerentes problema ſolidum eſſe, ipſius conſtructionem inſtrumentis tantùm perfecerunt congruenter Apollonio Pergæo, qui & reſolutionem ejus fecit per Coni ſectiones; alii per Locos ſolidos Ariſtæi; nullus autem per ea, quæ propriè plana appellantur.

Hinc poſſumus intelligere, Ariſtæum de locis ſolidis ſcripſiſſe. Quid ſint Loci Solidi explicat

idem

idem Pappus in Prohemio Libri Septimi ad Hermodorum filium pag. 162.

Loci ſolidi quicumque, ſunt Conorum ſectiones Parabolæ, vel Ellipſes, vel Hyperbolæ.

Rurſus idem Pappus in Prohemio Libri Septimi pag. 157.

Locus, qui vocatur ἀναλυόμενος, *hoc eſt reſolutus* (dixerim reſolutorium) *ò Hermodore fili, ut ſummatim dicam, propria quædam eſt materia poſt communium Elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in Geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipſis proponuntur, atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa eſt. Scripſerunt autem hac de re tum Euclides, qui Elementa tradidit: tum Apollonius Pergæus: tum Ariſtæus Senior. Quæ quidem per reſolutionem, & compoſitionem procedit.* Sciendum autem eſt, Euclidem duos Libros ſcripſiſſe *de Locis ad ſuperficiem:* totidem Apollonium *de Locis Planis:* Ariſtæum autem *de Locis Solidis.* Atque hos Libros indicat Pappus ſuperioribus verbis, ut intelliget is, qui perpenderit ea, quæ deinceps ſubjiciuntur.

Idem Pappus paulò infra. *Ariſtæi* τόπων στερεῶν *hoc eſt Locorum Solidorum quinque.* Complexus eſt igitur quinque Libris Ariſtæus ea, quæ de Locis Solidis tradiderat.

Præter hæc, pag. 163. de inclinationibus propè finem de Ariſtæo ſubdit.

Solida autem vocant problemata non quæ in ſolidis figuris proponantur; ſed quæ cùm non poſſint oſtendi per plana, per Conicas Lineas oſtendantur. Quare

✠ †

de

de his prius ſcribere neceſſarium eſt. Erant igitur Conicorum Elementorum primùm Ariſtæi Senioris Libri quinque, veluti iis, qui hæc percipere poſſunt, cum brevitate conſcripti. Ac deinceps ſermonem inſtituens de Conicis Apollonii ſubjicit; *Euclidis Libros quatuor Conicorum cùm Apollonius expleviſſet, ac quatuor alios adjunxiſſet, octo Conicorum Libros confecit. Ariſtæus autem, qui ſcribit ea, quæ ad hoc uſque tempus tradita ſunt, Solidorum Locorum Libros quinque Conicis cohærentes vocavit.* Hoc eſt cohærentes ſuis Conicis Elementis, quæ in Libros quinque diſpartita paulò ſuprà Pappus commemoravit. Neque enim de Elementis Conicis Apollonii hæc intelligi poſſunt, quum ante Apollonium, immò ante ipſum Euclidem floruerit Ariſtæus, quem duobus ſæculis Apollonium præceſſiſſe Chronologis placet. Id nos luculentiſſimis ejuſdem Pappi teſtimoniis demonſtravimus. Ante Apollonium Coni ſectiones nomen mutuabātur à Cono, in quo generabantur: Apollonius autem nomina, quibus utimur, invexit. Hæc ubi monuit Pappus loco modò laudato, ſubdit: *Si enim ſecans planum ducatur uni laterum Coni æquidiſtans, una tantùm ex tribus lineis efficitur, ſemper eadem, quam Ariſtæus illius Coni ſectionem appellavit.* Ariſtæus rectanguli Coni ſectionem nuncupavit, fuit enim ante Apollonium, à quo primùm Parabola eſt nominata. Euclidi quoque ætate anteceſſiſſe demonſtrat paulò infrà, ubi Euclidem ipſum defendit his verbis; *Quem autem dicit* (Apollonius) *in tertio Libro* (extant hæc in Epiſtola ad Eudemum præpoſita Libro Primo Conicorum

Apol-

Apollonii) *locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit per ea tantum Conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt: ut etiam ipse testatur, dicens fieri non posse, ut locus perficeretur absque iis, quæ ipse scribere coactus sit. Euclides autem secutus Aristæum Scriptorem luculentum in iis, quæ de Conicis tradiderat, neque antevertens, neque volens eorum tractationem destruere, quum mitissimus esset, & benignus erga omnes, præsertim eos, qui Mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere, & amplificare possent, ut par est, & nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans, velut hic, quantum ostendi potuit de Loco per ejus Conica* (Aristæi videlicet) *memoriæ prodidit, non addens perfectum illud, absolutumque esse: tunc enim necessariò reprehendi posset.*

Constat igitur nostrum Aristæum, aut superiorem fuisse, aut coævum Euclidis; tantáque excelluisse doctrina, ut Euclides Mathematicus incomparabilis ejus vestigiis insistere, ejusque scripta sibi proponere ad imitandum, ac venerari non dedignaretur.

Meminit etiam cujusdam Aristæi Geometræ Campanus Novariensis, qui floruit Anno salutis 1030. in sua ex Arabico in Latinum versione, Commentarioque Theonis in Elementa Euclidis ad primam propositionem Libri decimiquarti, his verbis. *Nunc ergo explicandum est, quod ait Aristæus in Libro intitulato: Expositio scientiæ quinque*

corporum, necnon & Apollonius in Dono ſecundo in proportionalitate figuræ duodecim baſium ad figuram viginti baſium. Et in exordio propoſitionis decimæ ejuſdem Libri. *Hoc eſt, quod ſuperiùs poſt demonſtrationem primam hujus auctoritate Ariſtæi, & Apollonii commemoravimus*.

Cui ex Ariſtæis, Seniori ne, an Juniori tribuenda ſit expoſitio hæc de quinque corporibus regularibus affirmare non auſim. Verumtamen quũ à Campano ſemper Ariſtæus ante Apollonium nominetur, conjecturam facere licet, eum ætate præcurriſſe, & ante Apollonium ſcripſiſſe de quinque corporibus regularibus.

Ex hactenus narratis, accuratèq; perpenſis, inter lucubrationes vetuſtiſſimi hujus græci Geometræ recenſendi videntur.

Primò. Libri quinque de Conicis Elementis pro iis, qui hæc percipere poſſent, cum brevitate conſcripti, inſtar Compendii Doctrinæ Conicorum.

Secundò. Alii quinque Libri de Locis Solidis per reſolutionem, & compoſitionem procedentes; res in univerſa Matheſi longè maximi, graviſſimique momenti, & ad penetranda quædam abdita Geometriæ arcana utiliſſima.

Tertiò. Fortaſſe Hiſtoria rerum Geometricarum, & eorum, quæ à ſuperioribus Mathematicis exculta fuerant. Traditum enim eſt à Pappo Ariſtæũ ſcripſiſſe *ea, quæ ad hoc uſq; tempus tradita ſunt*.

Quartò. Scientia de quinque corporibus regularibus.

Hæc

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [20] - 2v
PUBLIC DOMAIN

Hæc ſunt, quæ de Ariſtæo Seniore licuit perveſtigare, ut clariſſimi Geometræ memoriam pluſquam viginti ſæculorum curſu, & ſuperiorum temporum caligine intermortuam revocarēmus. Nunc ad me venio.

Quum admodum adoleſcens varia excogitaſſem, ac ſeparatim chartulis commendaſſem, ut quintum Apollonii Librum, qui tunc à Geometris injuria temporum inter amiſſos habebatur, reſtituerem, ſatiſque collegiſſem ad Opus illud inſtaurandum, ſubiit animum cura Ariſtæi quoque Libros de *Locis Solidis* ab hominum oblivione vindicandi. Movebant me Pappi teſtimonia, quibus clariſsimi Geometræ doctrinam, famamque celebraverat: incitabat argumenti ſplendor: urgebat utilitas abditarum rerum in lucem proferendarum. Itaque Anno 1646. operi manum adjeci, & hanc Divinationem *ſcribendam ſuſcepi*, eamque Ariſtæi exemplo in quinque Libros partiri conſtitui. Creſcebat in dies materia, mihique hoc ipſum opus urgenti ſubſidio erant, facemque præferebant, quæ jam de Maximis, & Minimis in Apollonium conſcripſeram; quæ multò poſt edita ſunt Anno 1659. quæque pariter eodem fato, quo omnes alii fœtus ingenioli mei, jacerent adhuc in tenebris, niſi Sereniſſimi Ferdinandi Secundi magnificentia, & ſingularis amor in literas ad illa edenda me perpuliſſet. Quum luculentam demonſtrationum ſylvam collegiſſem, eaque ſepoſita, mentem aliò convertiſſem, ut quidquid à publicis negotiis dabatur otii in Geometricis rationibus excutiendis, impenderem; an-

no 1664. LUDOVICI MAGNI eximia liberalitate incitatus ad hoc Opus perficiendum animum revocavi. Etenim, ut grati animi erga Regem munificentissimum extaret aliquod monumentum, constitueram ipsi dedicare quæ multis lucubrationibus fueram de Locis Solidis commentatus. Hæc molienti fortuna intercessit, objectâque insuperabili publicarum curarum mole, omnes conatus meos eluſit. Tandem anno 1673. quum aura paulò benignior adſpiraſſet, hos libellos typis mandare cœpi. Vix tres Libros impreſſeram, cum, publica re acriùs urgente, de inſtituto curſu deflectendum fuit, atque operis proſequendi cura omnis abjicienda. Occupavit animum publicorum operum ſolicitudo, *ac velut unda ſupervenit undam*, ſemper negotium negotio ſucceſſit. Numquam otium; numquam quies; numquam vacuus, & ſolutus curis animus. Aſſiduæ itinerum peragrationes, & fluminum, agrorumque luſtrationes: adverſa valetudo: afflictæ vires animum quantumvis obſtinatum ab inſtituto dimoverunt. Tot laboribus, atque ærumnis circumſeptus (quas fortaſſe aliàs exponam tibi uberiùs, & accuratiùs) numquam genio meo indulgere deſtiti: ſemper geometrica mente pertractare; ſemper aliquid commentari: &, ſi non quantum cupiebam aſſidua meditatione, furtim tamen, & per intervalla, ac ſpiramenta temporum abdita, ac retruſa Geometriæ arcana rimari. Itaque tam multa ſunt à me inventa, atque excogitata in mathematicis diſciplinis, ut ſuperfluat materia, & obruat copia jam ſenio confectum.

Præ-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [22] - 3v
PUBLIC DOMAIN

Præterquamquòd enim nulla umquam tam gravis animum invaſit occupatio, aut moleſtia perculit, ut à meditando prorſus avelleret; primo ſtudiorum meorum quinquennio, ab anno ætatis meæ decimoſexto, uſque ad vigeſimum ſecundum animo nullis curis, aut negotiis irretito, amplam, ac luculentam ſupellectilem omnigenæ Matheſeos mihi comparaveram: multaque Veterum Geometrarum inventa, tum ingenii exercendi gratia, tum animi oblectandi, é tenebris eruere, & priſtinæ luci, quantum potis eſſem, reſtituere deſtinaveram. Multa collegeram, ut Conica Elementa ejuſdem Ariſtæi in lucem revocarem, præmiſſa ſolummodò Conicarum ſectionum in plano expeditè deſcribendarum generatione, non autem, ut ſolet, Conum ſecando. Prætereà tres aliæ Divinationes lucubrandas ſuſceperam, omnemque ferè materiam congeſſeram. Alia penè innumerabilia, tum prima illa ætate, tum reliquæ vitæ decurſu à me ſunt inchoata, quorum non pauca abſolvi jam, atque perfeci: multorum curam, & commentationem jamdiu abjeci, deſperãs me umquam à publicis negociis tantum otii habiturum, ut poſſim illis extremam manum imponere. Neque me fefellit opinio; nam etſi in maximis occupationibus numquam intermiſerim ſtudia Geometriæ, tamen ab eo tempore, quo primam Divinationem edidi, præter duo Opuſcula Mathematica (in quibus, invita Minerva, cogente verò invidia hominum in otio occupatorum, exhibui enodationes quorumdam Problematum ab exteris Mathematicis propoſitorum)

rum) unicus tantùm fœtus meus, iſque vetuſtiſſimus in lucem prodire potuit novem ab hinc annis. Scis, quem dicam: nempè illum, in quo Formatio, & Quadratura Geometrica ſuperficierum curvarum, tam antiqui Romani Fornicis Scaphiformis, quàm novæ meæ Teſtudinis Florentinæ demonſtranda proponitur, ſtructuraque, & menſuratio regularium fornicum Architectorum. Nunc ad octogeſimum annum provectus, & ampliſſimis honoribus rurſus à LUDOVICO MAGNO cumulatus, diuturni ſilentii finem facio, & quæ potentiſſimo Regi olim addixeram, tandem ſub ejuſdem auſpiciis in lucem profero. Et quum alios duos Libros, quos adjicere deſtinaveram, conſcribere nec ætas jam effæta, nec occupationes meæ, quibus etiam nunc implicor, nec invaletudo, quę in dies fit gravior, patiantur; ſolummodò tres Libri, cujuſmodi olim fuerant impreſsi, nunc prodeunt.

Liceat autem his quoque lucubrationibus meis Divinationis nomen imponere. Non quod ego Vatis, ac Divini nomen inſolentiſsimum mihi arrogem, ſed tamen, ſi cui laus hæc convenit, is certè eſt, qui res geometricas ab antiquis Auctoribus detectas, perſcrutatur, & perveſtigat, quæ oblivio diuturna delevit. Nam, ſi divinat ille, qui animo futura preſentiens vera prædicit; aut retegit præterita, quæ ab omnibus ignorantur, ac vera eſſe demonſtrat: divinat certè Geometra, qui ea, quæ ab infinito tempore ſemper vera fuerunt, & nunc vera ſunt, ſed occulta, & in omne ævum vera futu-

tura ſunt, pervidet, ac pandit Homerico calchanti ſimilis,

Qui nôrat quæ ſunt, & erunt, quæque ante fuere.

Quamobrem etſi aliquando eum conjectura fefellerit, & aberraverit à mente Scriptoris, cujus exquirit inventa, tamen quum ea, quæ in omni æternitate futura ſunt vera, præmonſtret, quæque in profundo demerſa, atque occultata jacuiſſent, proferat, videtur quodammodò divinare. Utinam verò ego falſus animi ſim haruſpex

Vanus, & à ſera poſteritate ferar.

Hoc enim nonniſi magno cum rei literariæ bono poteſt evenire. Utinam, ut ego vanitatis arguar, emergant é tenebris aliqnando ipſius Ariſtæi Libri, ut prodierunt olim ex ornatiſſima Regiæ Celſitud. Sereniss. Magni Ducis noſtri Bibliotheca poſteriores Libri Conicorum Apollonii Pergæi, poſt editam primam illam Divinationem meam in quintum ejuſdem Apollonii Librum anno 1659. Atque ut ex doctorum hominum judiciis licet exiſtimare, honori ne, an dedecori mihi fuerit Apollonii Libros inventos fuiſſe, ſic idem judicium de Ariſtæi Libris aliquando fieri poſſit à doctis. Sed utcumq; futurum ſit, his fruere, & plura expecta, ſi Deus dabit aliquid otii, ac vitæ. Nam ut illa prima Divinatio huic ſecundæ viam munivit, ita hæc facem præferet multis aliis meis inventis tum Geometricis, tum Mechanicis, quibus Mathematicæ diſciplinæ non modicè poſſunt amplificari.

Quod ſi quid fortè ſolidæ doctrinæ per hæc Solida aſſequi dabitur, id præcipuè te debere ſcito, ſplen-

ſplendidiſſimo hujus ſęculi ornamento SERENISSIMO ETRURIÆ PRINCIPI, qui ſæpè, ac diù, ad aliquid novi in Matheſi publicè edendum, non tantùm animos fecit, ſed me fauſto juſſu excitavit. Acceſſerunt imperio SERENISS. PRINCIPIS aſſiduę adhortationes, & numquam intermiſſæ efflagitationes, tum exterarum Nationum, tum Italiæ, tum etiam Florentiſſimæ Patriæ hujus Procerum. Et ne in ſingulis enumerandis tædio te afficiam, utque ſilentio prætéream, vita *jam functos* olim mihi amiciſſimos, de Geometria optimè meritos, Eminentiſſ. Cardinalem Riccium; Renatum Franciſcum *Sluſium*; Abbates Stephanos Gradium, ac de Angelis; Chriſtianum Hugenium, alioſque plurimos; ſummi eſt mihi decoris inter exteros adhuc viventes longioris ætatis ordine recenſere.

Primò. Lucidiſſimum Angliæ ſydus Clariſſ. Joannem Walliſium Oxonii Geometriam profitentẽ, noviſque analyſeos artibus uberrimè locupletantem, cujus inſitã ingenuitatem, gratumq; animum erga Scriptores Italos, qui res Philoſophicas, Geometricas, & Mechanicas fœcundiſſimo præterito ſæculo illuſtrarunt, ſatis ſit tibi arguere ex his verbis ex quadam humaniſſima ejus Epiſtola ad me data excerptis, dum de Magno Galilęo præceptore meo, meique amantiſſimo, ſic loquitur.

Quem ego ſemper magni exiſtimavi, & etiam nunc veneror, ut cui debemus, non modò Cavalerium, Torricellium, ... alioſque magnos Viros, ſed & totam, quam dicimus novam Philoſophiam; & quo prælucente, cæteri ſuas accenderunt faces.

Se-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [26] - -
PUBLIC DOMAIN

Secundò. Ingeniorum Phœnicem,& quoniã meâ quidem ſententiâ (niſi diſcipulum decipit amor) glorioſiùs dici nequit inter Philoſophos, & Mathematicos, Galileum alterum ; ad abdita Phiſices, Mechanices, Geometriæ, ſubtilioriſque analyſeos Problemata quæque enodanda, promptiſſimum, ac feliciſſimum OEdipum ; Illuſtriſſimum ſcilicet Godephridium Gulielmum Leibnitium Sereniſſimi Elect. Hannover Conſiliarium intimum, cujus propè Divinis inventis, plurimùm ſe profeciſſe palam fateri audio inter perſpicaciſſimos Europæ Lynceos Illuſtriſſimum Marchionem de Hoſpitali amicum optimum, Bernullios Fratres, alioſque multos, Theoricas haſce Methodos mirificè promoventes.

Tertiò. Clariſſ. Davidem Gregorium Medicinæ Doctorem, Aſtronomiæ profeſſorem Savilianum, cujus benigna propenſio ad inedita mea, (omni prorſus exiſtimatione orbata) aliquo ſaltem nomine decoranda adeò ſe prodit, ut horum omnium impreſſionem Regię Londinenſis Societatis expenſis, ac hujus ornatiſſimis Typis per Clariſſimum Doctorem Schenard mihimet humaniſſimè offerre nuperrimè dignatus ſit.

Inter Noſtrates verò, ac de meis itidem laboribus anxiè ſollicitos, præter nobiliſſimos Patricios Aloyſium de Riccio, & Joannem Baptiſtam Nelli in mathematicis ſtudiis apprimè verſatos, & veræ amicitiæ typos; alios recenſeo eruditiſſimos Viros ſumma probitate præclaros vel Cardinalitia, vel Pontificia Domo conſpicuos, ſolidiores ſcientias

pro-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [27] - -
PUBLIC DOMAIN

profitentes, & ſtudia Matheſeos, ſtudioſoſque foventes, ac provehentes: nempe

Illuſtriſſ. Paulum Falconieri à Cubiculis SUMMI PONTIF. CLEMENTIS XI. notiſſimum fama per Orbem, Equeſtris Ordinis decus.

Illuſtriſſ. Comitem à Conſiliis Status Regiæ Celſitudinis SERENISS. COSMI III. M.D. Etruriæ, Laurentium Magalotti, quem olim longè parciùs, quàm par erat, commendavimus.

Illuſtriſſ. demum, ac Reverendiſſ. Præſulem Alexandrum Aldobrandini, meritiſſimum Divæ Mariæ Majoris in Urbe Canonicum, & Vicelegatum Ferrariæ, ad ſumma natum, Mœcenatemque meum liberaliſſimum.

Et Illuſtriſſ. ac Reverendiſſ. Abbatem Alamannum Salviati, qui in literas amore, propenſaque in literatos homines benignitate, Majores ſuos æmulatur: nam qua beneficientia præſtantiſſimus, omnique ævo memorandus Philippus Salviati, clariſſimum Geometriæ, Aſtronomiæ, Philoſophiæ lumen Galilæum amplexus eſt, eadem ipſe proſequitur me noviſsimum diſcipulum, obſervat, ac diligit. Atque hi duo, præ cęteris, meos labores in ſitu, ac tenebris non patiuntur obſoleſcere. Horum itaque omnium cumulatis beneficiis perpetuò me devinctum ingenuè profiteor, palam jacto, ſuperbè glorior. Vale.

Florentiæ è meis Ædibus A DEO DATIS
Kal. Auguſti 1701.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [28] - -
PUBLIC DOMAIN

V. D. I.

VINCENTII VIVIANI DIVINATIO IN ARISTAEI SENIORIS *LIBROS V. DEPERDITOS* DE LOCIS SOLIDIS, ET ELEMENTORVM *AD ABDITA, VARIAQVE IN MATHESI INVENTA*

LIBER PRIMVS

IN V. PARTES DISSECTVS,

In quo de Locis Ordinationum Conicarum Limitibus pertractatur.

DEFINITIONES.

I.



Mnis recta linea, quæ ab vno quocunque puncto in axe Coni-sectionis, aut Circuli, vel intra, vel extra, vel in ipso vertice sumpto vsque ad Sectionis peripheriam ducitur, & quam olim Radium nuncupaueram, in præsens Ramus *dicatur, mutuata voce a Magno Geometra ex prima, ac nupera editione posteriorum Conicorum, quibus [ex Arabicis M. SS. pretiose MEDICEORVM Bibliothecæ] SERENISS. COSMVS III, Inclyto quidem, ac præfulgentis virtutis PRINCEPS, nunc ETRVRIÆ MAGNVS DVX VI. vniuersam Literaturæ Rempublicam liberaliter donatam voluit.*

II.

Punctum, è quo Rami educuntur, & quod iamdudum punctum radians dicebamus, breuius, cum ipso pariter Apollonio, vocetur Origo, *videlicet, Ramorum.*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [29] - -
PUBLIC DOMAIN

III.

Normalis ſuper Coni-ſectionem *dicatur omnis recta linea, quæ a quolibet Sectionis puncto ad normam erigitur ſuper rectam contingentem ad idem punctum Sectionem ipſam, & ab aliquo axium terminatur.*

IV.

Normalis ſuper Ramum ex vertice *dicatur recta, quæ ſuper eundem Ramum perpendiculariter ducitur a puncto, in quo Ramus conuenit cum Sectione, & ab axe itidem terminatur.*

V.

Altitudo, *aut* Rami, *aut* Normalis, *aut* Tangentis *Coni-ſectionem vocetur ſegmentum axis inter ordinatas ad ipſum per terminos, vel Ramorum, vel Normalium, vel Tangentium ductas.*

VI.

Si cuilibet vel Ramorum, vel Normalium, vel Tangentium Coni-ſectionem ſuper propriam ordinatim ductam ad aliquem axium per punctum, in quo, ſumpta linea ex prædictis, cum Sectione conuenit, concipiatur ab ipſo axe Sectionem verſus ſumi recta linea æqualis: huiuſmodi linearum ordinata applicatio, dicatur Ordinatio conica, *vel* Ramorum, *vel* Normalium, *vel* Tangentium, *prout propoſita inſtitutio requiret,*

VII.

Lineæ, ad quas terminant prædicti Rami, vel Normales, vel Tangentes ita ordinatæ, vocentur Loci, *ſeu* Limites conicarum ordinationum.

VIII.

Triangulum circumſcriptum Coni-ſectioni, *vel* Circulo *nuncupetur id, quod ab aliqua ex ordinatim ductis ad axem Sectionis, atque a tangentibus a terminis ordinatæ comprehenditur, cuius vocetur*

IX.

Baſis, *ipſa ordinata.*

X.

Vertex, *occurſus tangentium cum axe.*

XI.

Axis, *ſegmentum axis Sectionis inter baſim, & verticem.*

XII.

Tangens lateralis, *quodlibet ex reliquis lateribus eiuſdem trianguli circumſcripti.*

XIII.

Tangens verticalis, *quæ Coni-ſectionem, vel Circulum contingit per verticem, atque a lateralibus tangentibus terminatur.*

PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [30] - 2
PUBLIC DOMAIN

DE LOCIS SOLIDIS
LIBRI PRIMI PARS PRIMA.

PROPOSITIO I.

IN quacunque Coni-sectione. Semiordinata ad axem ex foco semirecto lateri æqualis est.

SIT quæcunque Coni-sectio ABC, cuius axis BD, vertex B, latus rectum BE, transuersum BF, ac focus D, ex quo sit semiordinata DA. Dico hanc esse dimidium recti BE.

In Parabola enim primæ figuræ, quadratum AD æquale est [a] rectangulo DBE, ergo BD ad DA est vt DA ad BE, & quadratum AD ad BE vt linea BD ad BE, sed est BD subquadrupla [b] ipsius BE (quum punctum D ponatur focus) ergo & quadratum AD subquadruplum est quadrati BE; siue semiordinata AD ex foco dimidium est ipsius recti lateris BE.

a 11. & 49. primi Con.

b Ex Schol. pr. 26 lib. 2. nostr. Diuinat. in Apoll.



In Hyperbola vero, ac Ellipsi, rectangulum FDB ad quadratum DA est vt [c] transuersum FB ad rectum BE, vel vt rectangulum FBE ad quadratum BE, ergo permutando vt rectangulum FDB ad FBE, ita erit quadratum DA ad quadratum BE, sed rectangulum FDB est quarta pars [d] rectanguli FBE (quum D ponatur focus) ergo & quadratum DA quarta pars est quadrati BE, siue semiordinata DA ex foco æqualis dimidio recti BE. Quod erat &c.

c 12. 13. & 50. primi Conic.

d ex 45. tertij Conic.

COROLL. I.

HInc est quod AC ordinata ex cuiuscumque Sectionis foco ipsi recto lateri BE suæ Sectionis est æqualis. Nam, & AD est dimidium totius AC.

COROLL. II.

COnſtat quoque in Parabola ſemiordinatam DA ex foco duplam eſſe proprij axis ſegmenti DB. Tres enim BE, DA, DB ſunt in eadem continua ratione dupla, vt oſtenſum eſt.

SCHOLIVM.

EX ſuperiori notandum pro ſequentibus occurit, in quacunque Coni-ſectione, dum ſemiordinata AD in focum incidit (quum ipſa demonſtrata ſit æqualis dimidio ſui recti) quamlibet aliam ſemiordinatam GH ſupra AD, quæ minor eſt ipſa AD, minorem eſſe eodem recti dimidio. Et quamlibet IK infra AD (in Ellipſi tamen non infra centrum N applicata) quæ maior eſt eàdem AD, maiorem eſſe prædicto recti dimidio.

Inſuper, in Parabola tantùm, quamcunque GH ſupra AD eſſe pluſquàm duplam ſegmenti HB, & quamcunque IK infra AD, minùs quam duplam ſegmenti KB.

Iuncta enim BA ordinatas GH, IK ſecante in L, M: quum ſit AD dupla DB erit LH dupla HB, & MK dupla KB; ac propterea GH, quæ maior eſt ipſa LH, ſuperat duplum ipſius HB; IK verò, quæ minor eſt ipſa MK, deficit a duplo ipſius KB.

PROPOSITIO II.

IN Ellipſibus, & in Hyperbolis concentricis ſimul adſcriptis, quarum eadem ſit ſecunda diameter tranſuerſis coniugata, omnia ad hanc per idem coniugatæ punctum ordinatarum paria, ſunt inter ſe in eadem ratione tranſuerſarum diametrorum, quibus ordinatæ æquidiſtant.

SInt, in prima figura, Ellipſes concentricæ ABCD; AFCG, vel in ſecunda Hyperbolæ concentricæ LB, HF, & in vtràque ſit centrum E, diametri tranſuerſæ BD, FG, quibus eadem ſit coniugata, vel ſecunda diameter AC, quam productam (ſi opus fuerit in ſecunda figura) ſecet in I quæcunque ad AC ordinatim ducta ILH. Dico, in vtràque figura, ſemiordinatam HI ad IL eſſe vt ſemidiameter tranſuerſa FE ad ſemitranſuerſam EB.

In prima enim tàm quadratum HI ad FE, quàm quadratum LI ad BE eſt vt [a] rectangulum AIC ad AEC, quare quadratum HI ad FE erit vt quadratum LI ad BE, & permutando quadratum HI ad IL vt quadratum FE ad EB; ideoque, & latus HI ad IL vt latus FE ad EB. Quod in prima erat &c.

[a] 21. primi Conic.

In

In ſecunda verò ex L, H, ordinentur LM, HN. Iam, quadratum EB ad quadratum EA eſt vt ſemitranſuerſum EB ad ſemirectum Hyperbolæ LB (quum ſemidiameter coniugata EA, ſit media proportionalis inter ſemilatera) vel vt rectangulum a DMB ad quadratum ML, vel ad quadratum NH, & quadratum EA ad quadratum EF, in Hyperbola HF, eſt (ob eaſdem rationes) vt quadratum NH ad rectangulum GNF, ergo ex æquali quadratum EB ad EF eſt vt rectangulum DMB ad rectangulum GNF, & permutando quadratum EB ad rectangulum DMB eſt vt quadratum EF ad rectangulum GNF, & componendo quadratum EB cum rectangulo DMB, ſiue totum quadratum EM (nam eſt DB ſecta bifariam in E, eique in directum adiecta eſt BM) ad quadratum EF, cum rectangulo GNF, hoc eſt ad totum quadratum EN (quum itidem GF ſecta ſit bifariam in E, atque ipſi in directum addita ſit FN) eſt vt pars, ſiue vt rectangulum DMB, ad partem, ſiue ad rectangulum GNF, & vt reliquum ad reliquum, ſiue vt quadratum EB ad EF. **Oſtenſum eſt igitur** quadratum EM ad EN, vel quadratum IL ad IH, vt quadratum EB ad EF, ac propterea, & latus ad latus, ſiue ſemiordinata IL, ad ſemiordinatam IH, vt latus ad latus, ſiue vt ſemitranſuerſa diameter EB ad ſemitranſuerſam EF, vel vt tranſuerſa DB ad tranſuerſam GF. Quod erat &c.



a ibidem.

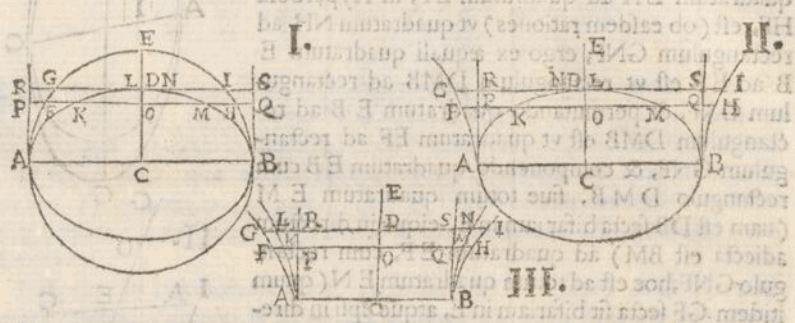
PROPOSITIO III.

SI Ellipſis cum Ellipſi, vel Circulo, aut Ellipſis, vel Circulus cum oppoſitis Sectionibus, vel oppoſitæ cum oppoſitis fuerint concentricæ, & per eoſdem vertices eiuſdem tranſuerſæ diametri ſimul adſcriptæ, rectangula ſub ordinatarum partibus integrantibus à Sectionibus comprehenſis, ſunt inter ſe vt quadrata ſegmentorum communis diametri priori coniugatæ, ad quam ordinatæ applicantur, inter ordinatas, & centrum interceptorum.

CIrca eandem tranſuerſam diametrum AB, cum eodem centro C, & per eoſdem vertices A, B, ſint Circulus, & Ellipſis, vel duæ Ellipſes, vt in prima figura; ſiue ſit Circulus, aut Ellipſis cum oppoſitis Sectionibus, vt in ſecunda; vel ſint duo oppoſitarum Sectionum paria, vt in tertia, inter ſe ſimul adſcripta, ſitque omnium communis diameter CE priori AB coniugata, quæ ſectionem AKMB, in prima, & ſecunda, ſecet in D; in tertia

tia verò ſumatur in ipſa CE quodcunque punctum D, & in ſingulis quodlibet aliud punctum O inter D, C; ac per D, O, applicentur ordinatim ad CD rectæ RS, PQ (quarum RS in prima, & ſecunda Sectionem AKMB continget a ad D) quæ Sectionibus occurrant in G, L, N, I, & in F, K, M, H. Dico, in omnibus, rectangulum GLI ad rectangulum FKH eſſe vt quadratum DC ad CO.

a 17. primi Conic.



A communibus Sectionum verticibus A, B, ducantur ipſi CD æquidiſtantes, quæ ordinatas ſecent in P, R, & in Q, S.

b ibidem.

Iam, conſtat has, eaſdem Sectiones contingere b ad A, B.

c ex 16. tertij & 21 primi Conic.

Erit ergo rectangulum RGS ad PFQ, aut GRI ad FPH, vt c quadratum contingentis RA ad quadratum contingentis AP. Itidem rectangulum RLS ad PKQ, aut LRN ad KPN eſſe vt d idem quadratum RA ad idem AP: quare (in prima, & tertia figura, ſubtrahendo, & in ſecunda, colligendo) rectangulum GLI ad FKH erit pariter vt quadratum RA ad AP, vel vt quadratum DC, ad CO. Quod erat demonſtrandum.

d ibidem.

PROPOSITIO IV.

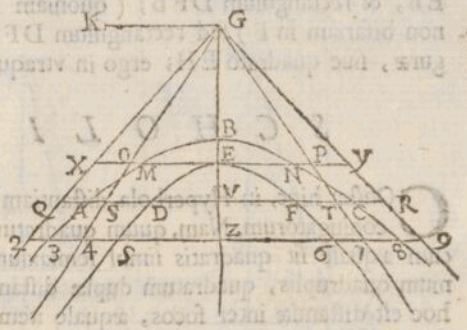
IN Hyperbolis concentricis per diuerſos vertices ſimul adſcriptis, & quarum eadem ſit ſecunda diameter tranſuerſis coniugata, rectangula, ſub ordinatarum partibus integrantibus à Sectionibus comprehenſis, ſunt inter ſe vt quadrata ſegmentorum communis diametri (ad quam ordinatæ applicantur) inter ipſas ordinatas, & earum centrum interceptorum.

SInt Hyperbolæ ABC, DEF per diuerſos vertices B, E, ſimul adſcriptæ, & quarum commune centrum ſit G, communiſque ſecunda ſemidiameter GK ſemitranſuerſis GB, GE coniugata; ſintque ordinatæ quotcunque AC, 38 ad diametrum GZ, quam ſecent in V, Z, Sectiones verò in A, D, F, C, & in 3, 5, 6. 8. Dico rectangulum ADC ad rectangulum 358 eſſe vt quadratum GV ad GZ.

Ex

Ex centro G ducantur Sectionum Asymptoti GQ, GR, & GS, GT, atque ex vertice E sit contingens MN, quæ Asymptotis GQ, GR occurrat in X, Y, & Hyperbolæ ABC, in M, N; ordinatæ verò Asymptotos secent in Q, S, T, R, & in 2, 4, 7, 9.

Iam, constat a tam rectangulum XMY, quàm OEP æquale esse quartæ parti figuræ suæ Hyperbolæ, hoc est eidem quadrato communis semidiametri coniugatæ GK; quare rectangulum XMY æquale est rectangulo OEP, his igitur addito, vel dempto, prout requiritur, communi rectangulo OMP, fiet rectangulum XOY æquale rectangulo MEN; cádemque ratione ostenditur rectangulum QSR æquale rectangulo ADC, & rectangulum 249 æquale rectangulo 358; Sed rectangula XOY, QSR, 249 (quum ex proportionalibus lateribus sint constituta) inter se sunt vt quadrata XO, QS, 24, vel vt quadrata GE, GV, GZ; ergo & rectangula MEN, ADC, 358 sunt inter se vt ipsa quadrata GE, GV, GZ. Quod erat demonstrandum.



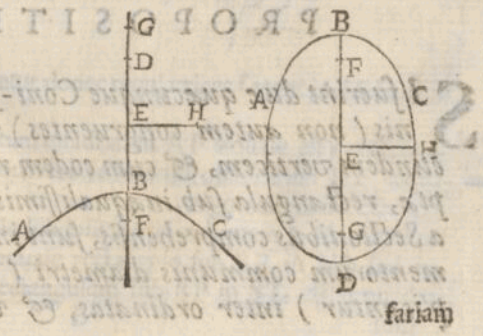
a ex 2, & 10 secundi Conic.

PROPOSITIO V.

IN Hyperbola. Distantia inter centrum, & focum, potest quadrata semiaxium coniugatorum. In Ellipsi verò. Distantia inter centrum, & focum potest differentiam inter quadrata semiaxium coniugatorum.

SIT tam Hyperbolæ, quàm Ellipsis ABC, centrum E, axis transversus BD, semiaxis coniugatus EH, foci verò G, F. Dico primùm, in Hyperbola, quadratum distantiæ EF inter centrum, & focum, quadratis simul BE, EH æquale esse.

Nam, quum G, F, sint foci, erit rectangulum GBF æquale[b] quartæ parti figuræ, nempe æquale quadrato EH, & addito communi quadrato EB, erit rectangulum GBF cum quadrato EB, hoc est vnicum quadratum EF (est enim GF sectabifariam in E, & non bi-



b ex 45. tertij Conic.

fariam

fariam in B) æquale quadratis ſimul EH, EB, nempe ſemiaxium coniugatorum. Quod erat primò &c.

In Ellipſi verò. Dico quadratum interualli E F eſſe differentiam quadratorum EB, EF. Nam, quadratum EF eſt differentia inter quadratum EB, & rectangulum DFB; (quoniam BD ſecta eſt bifariam in E, & non bifariam in F) ſed rectangulum DFB æquale eſt a quartæ parti figuræ, ſiue quadrato EH; ergo in vtraque figura patet propoſitum.

a ex 45. tertij Conic.

SCHOLIVM. I.

COnſtat hinc, in Hyperbola, diſtantiam inter focos poſſe quadrata axium coniugatorum. Nam, quum quadratum diſtantiæ inter centrum, & focum æquale ſit quadratis ſimul ſemiaxium coniugatorum, ſumptis omnium quadruplis, quadratum duplæ diſtantiæ inter centrum, & focum, hoc eſt diſtantiæ inter focos, æquale item erit quadratis ſimul ex duplis ſemiaxium, nempe ex ijſdem axibus.

Et in Ellipſi, diſtantiam inter focos poſſe differentiam quadratorum axium coniugatorum; quoniam tam quadratum diſtantiæ inter focos, quàm quadrata axium, quadrupla ſunt quadratorum, diſtantiæ nempe inter centrum, & focum, & ſemiaxium, ſingula ſingulis, eò quod latera illorum omnium, laterum omnium horum ſint dupla; ſed ſubquadruplum æquatur differentiæ inter ſubquadrupla, ergo & quadruplum, differentiæ inter quadrupla æquale erit.

SCHOLIVM. II.

ELicitur præterea ex ſuperiori Scholio, in omnibus oppoſitis Sectionibus, quarum foci ſint ijdem, vel in quibus diſtantiæ inter focos ſint æquales, aggregata potentiarum propriorum axium coniugatorum æqualia eſſe inter ſe. Quodlibet enim horum aggregatorum demonſtratum æquale eſt quadrato diſtantiæ inter proprios focos.

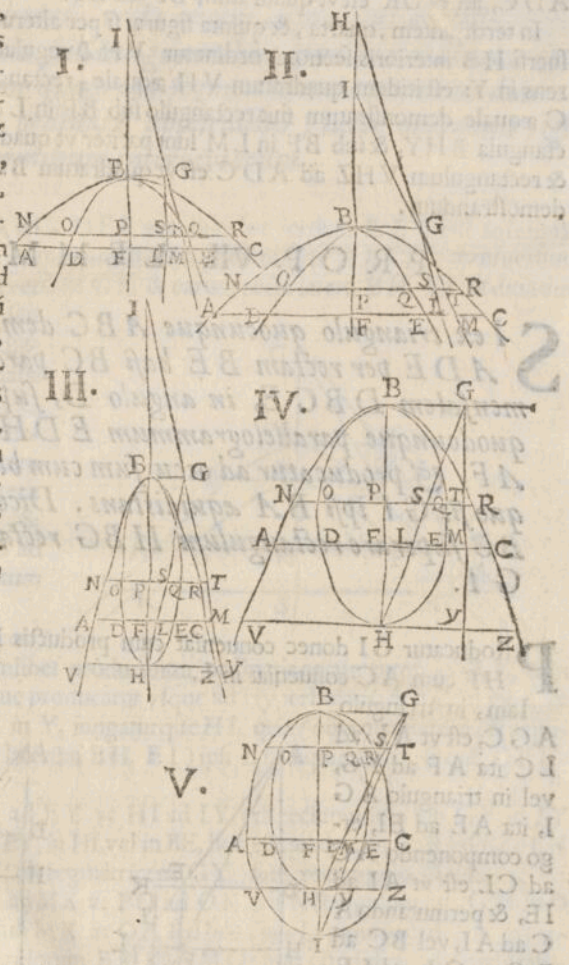
Et in omnibus Ellipſibus, quarum foci ſint ijdem, vel in quibus diſtantiæ inter focos ſint æquales, differentias quoque quadratorum axium coniugatorum æquales eſſe inter ſe: cum quæuis ipſorum differentia æqualis ſit quadrato diſtantiæ inter proprios focos &c.

PROPOSITIO VI.

SI fuerint duæ quæcunque Coni-ſectiones eiuſdem nominis (non autem congruentes) vel diuerſi nominis per eundem verticem, & cum eodem recto latere ſimul adſcriptæ, rectangula ſub integrantibus partibus ordinatarum a Sectionibus comprehenſis, ſunt inter ſe vt quadrata ſegmentorum communis diametri (ad quam ordinatæ applicantur) inter ordinatas, & verticem interceptorum.

Sint

SInt Coni-sectiones A B C, D B E, vel Parabola cum Hyperbola, in primæ figura; vel ambo Hyperbolæ, vt in secunda; vel Hyperbola, & Ellipsis, aut Circulus, vt in tertia; vel Parabola, & Ellipsis, aut Circulus, vt in quarta; vel tandem Circulus, & Ellipsis, aut Ellipsis, & Circulus, vt in quinta, & quales per figuras 9; 10, 11, 12, 21, 23, 25, 27, 29, Diagrammatis ad propositionem decimam nonam nostri primi libri de maximis, & minimis depiximus, vtraque per eundem verticem B simul adscripta, & cum eodem recto latere B G ad communem diametrũ B F ordinatim posito, & sit exterioris Sectionis transuersum latus B I, interioris verò sit H B. Dico, si ad communem diametrum B F H ordinentur quotcunque rectæ A C, N R &c. quæ Sectiones secent in A, D, E, C, & in N, O, Q, R, diametrum verò in F, P; rectangulum A D C, ad N O R esse vt quadratum B F ad B P.



Per terminum G cõmunis recti lateris B G cõcipiantur, prout in figuris prædicti Diagrãmatis, Sectionum regulatrices, nempe I G M exterioris, & H G L interioris; atque ordinatæ producantur donec regulatrices secent in M, L, & in T, S.

Iam, in exteriori Sectione, totum quadratum A F æquale est a rectangulo sub B F in totam F M; in interiori verò, demptum quadratum D F æquale est rectangulo sub eadem B F in demptam F, L, ergo reliquum rectangulum A D C æquale est rectangulo sub ipsa B F in reliquam L M. Similiter ostenditur rectangulum N O R æquale rectangulo sub B P in S T; sed rectangulum sub B F in L M ad rectangulum sub B P in S T, est vt quadra-

a 11. 12. 13. primi Conic.

tum BF ad quadratum BP (quoniam rectangulum ſub BF in LM ad ſub BP in ST habet rationem compoſitam ex BF ad BP, & ex LM ad ST, vel ex LG ad GS, vel ex eàdem ratione BF ad BP, ex qua duplici ratione componitur quoque ratio quadrati BF ad quadratum BP) ergo & rectangulum ADC, ad NOR eſt vt quadratum BF ad BP.

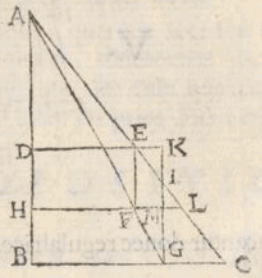
In tertia autem, quarta, & quinta figura, ſi per alterum terminum H tranſuerſi HB interioris ſectionis ordinetur VHZ regulatrici exterioris occurrens in Y: eſt itidem quadratum VH æquale a rectangulo BHY; ſed AD C æquale demonſtratum fuit rectangulo ſub BF in LM, & huiuſmodi rectangula BHY, & ſub BF in LM ſunt pariter vt quadrata BH, BF, ergo, & rectangulum VHZ ad ADC eſt vt quadratum BH ad BF. Quod erat demoſtrandum.

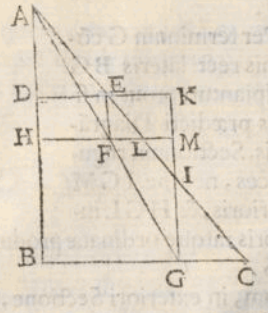
a 11. 12. 13. primi Conic.

PROP. VII. LEMMA I.

Si ex triangulo quocunque ABC dematur triangulum ADE per rectam BE baſi BC parallelam, & intra menſalem DBCE, in angulo D, ſuper latus DE ſit quodcunque parallelogrammum EDHF, iungaturque AF, & producatur ad occurſum cum baſi BC in G, ex quo ſit GI ipſi BA æquidiſtans. Dico rectangulum DBC ſuperare rectangulum HBG rectangulo ſub BC in GI.

PRoducatur GI donec conueniat cum productis HF, DE in M, K, & HF cum AC conueniat in L.





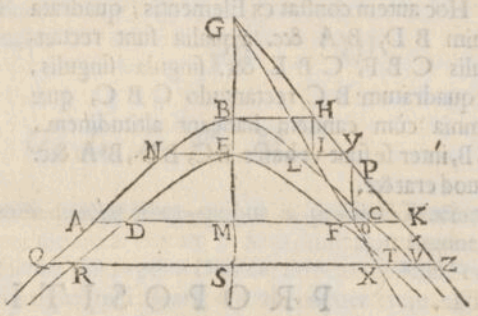
Iam, in triangulo AGC, eſt vt AL ad LC ita AF ad FG, vel in triangulo AGI, ita AE ad EI, ergo componendo AC ad CL eſt vt AI ad IE, & permutando AC ad AI, vel BC ad BG vt CL ad IE, vel vt GM ad IK; rectãgulum igitur ſub extremis BC, IK æquatur rectangulo ſub medijs BG, GM, vel BH, ſed rectangulum ſub BC in totam GK æquale eſt rectangulo ſub eadem BC in BD (cum GK, BD ſint æquales) & rectangulum ſub ipſa BC in partem IK æquale nuper oſtenſum eſt rectangulo ſub GB in BH; ergo rectangulum ſub eadem BC in reliquam GI æquale eſt differentiæ rectangulorum DBC, HBG. Quod erat demonſtrandum,

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI fuerint duæ Hyperbolæ per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, quarum tranſuerſa latera eundem ſupremum terminum habeant, recta autem latera ſint æqualia inter ſe. Rectangula ſub integrantibus partibus ordinatarum ſunt inter ſe vt quadrata ſegmentorum communis diametri (ad quam ordinatæ applicantur) inter ordinatas, & prædictum terminum interceptorum.

SInt Hyperbolæ ABC, DEF per diuerſos vertices B, E ſimul adſcriptæ ad communem diametrum BEM, & exterioris ABC, ſit tranſuerſum latus GB, interioris verò ſit GE, & earum recta latera BH, EI ordinatim applicata, æqualia ſint inter ſe. Dico, ſi ad diametrum EM ordinatæ ſint quotcunque AC, QV Hyperbolas, & diametrum ſecantes altera in A, D, F, C, M, altera verò in Q, R, T, V, S; rectangulum ADC ad QRV eſſe vt quadratum GM ad GS.



Iungãtur regulatrices, GH, GI, & quantumlibet producantur ordinatis occurrentes in O, K, & in X, Z; IE verò vtrinque producatur vſque ad Hyperbolam ABC in N, L, & ad regulatricem GH in Y, iungaturque HI, quæ (ob æqualitatem, & æquidiſtantiam rectorum laterum BH, EI) ipſi BE æquidiſtabit, ſitque OP eidem BE parallela.

Iam, quum ſit GE ad EY vt HI ad IY, erit rectangulum ſub GE in IY æquale rectãgulo ſub EY, in HI, vel in BE, hoc eſt quadrato ſemiordinatę EN in Hyperbola ABC (ob regulatricem GY) ſiue rectangulo NEL.

Item quum ſit GM ad MK vt PO ad OK erit rectangulum ſub GM in OK æquale rectangulo ſub MK in OP, ſed hoc, per Lemma præcedens, æquatur differentiæ rectangulorum BMK, EMO, hoc eſt differentiæ quadratorum ſemiordinatarum AM, DM ipſis rectangulis æqualium, vtrumque vtrique (ob regulatrices GK, GO) quæ quadratorum differentia eſt rectangulum ADC, ergo & rectangulum ſub GM in OK æquale eſt rectangulo ADC; eàdemque ratione oſtendetur rectangulum ſub GS in XZ æquale rectangulo QRV: rectangula igitur NEL, ADC, QRV ſunt inter ſe vt ipſis æqualia rectangula ſub GE in IY, ſub GM in OK, ſub GS in XZ; ſed latera GE, GM, GS proportionalia ſunt lateribus IY, OK, XZ, ideoque ex *ijs* rectangula ſunt in ratione laterum duplicata, hoc eſt vt quadrata

drata G E, G M, G S; ergo & rectangula N E Y, A D C, Q R V sunt vt ipsa quadrata G E, G M, G S. Quod erat demostrandum.

PROPOSITIO IX.

IN Circulo. Quadrata ramorum ab origine in axis vertice sunt inter se vt segmenta axis inter ordinatas ex terminis ramorum, & ipsum verticem intercepta.

ESto Circuli A B C axis B C, vertex B, qui ramorum B C, B D, B A ponatur origo, & ex eorum terminis A, D sint ad axem semiordinatæ A E, D F. Dico quadrata ramorum B C, B D, B A esse inter se vt segmenta axis B C, B F, B E.



Hoc autem constat ex Elementis; quadrata enim B D, B A &c. æqualia sunt rectangulis C B F, C B E &c. singula singulis, & quadratum B C rectangulo C B C, quæ omnia cùm eandem habeant altitudinem C B, inter se sunt vt bases B C, B D, B A &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO X.

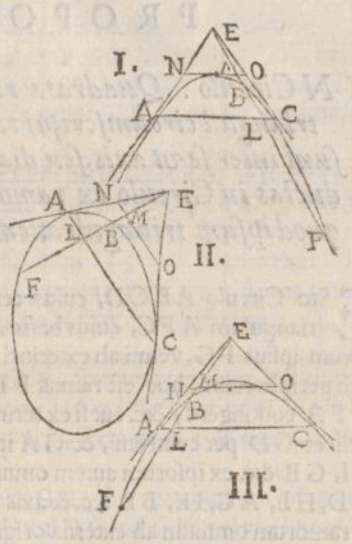
SI Coni-sectionem, vel Circulum, A B C ex eodem puncto E duæ rectæ lineæ E A, E C contingant ad A, C, & ex ipso tangentium occursu E sit alia quæcunque recta Coni-sectionem, aut Circulum secans in punctis B, F, rectam verò A C tactuum puncta iungentem secet in L; constat iam, ex 37 tertij Conicorum, secantem E F diuisam esse in B, L in ratione harmonica ita vt F E ad E B sit vt F L ad L B. Dico amplius, quod si segmentum huiusmodi secantis inter tangentium occursum E, & tactus iungentem A C interceptum, nempe, E L media harmonica bisecetur in M, tres M F, M L, M B esse inter se in eàdem continua ratione geometrica, & in ea in qua est F E, ad E B, vel F L ad L B.

Item dico F L ad L B esse vt E M, ad M B.

Quum

QVum enim sit F E ad E B vt F L ad L B, erit permutando E F, ad F L vt E B ad B L, & componendo E F cum F L, hoc est E L cum duplo L F ad F L, vt E L ad L B, & sumptis antecedentium terminorum dimidijs, M L cum L F, hoc est vnica M F ad F L, vt M L ad L B, & per conuersionem rationis F M ad M L, vt L M ad M B, & vt differentia F L ad differentiam L B, & vt tota secans F E ad E B extra sectionem. Quod erat primò &c.

Et cum sit L M, ad M B vt F L ad L B, erit quoque E M, (ipsi L M æqualis) ad M B, vt F L ad L B. Quod vltimò erat, &c.



SCHOLIVM.

Hæc autem omnia, quantùm spectat ad ea, quibus in præsenti Tractatu sunt vsui, sat erat ostendisse circa vnicam rectam diuisam in ratione harmonica, & prout a nobis factum fuit in edita Diuinat: de Max: & Min: Sed cùm Sectionibus Conicis quibuslibet ipsa aptari posse animaduerterem, alijsque nostris opitulentur, eadem hoc loco sic demonstrare opus fuit.

Ex hac verò constat, quod si in triangulo circumscripto A E C agatur N O basi A C parallela, quæ alterum laterum tangentium, vel quancunque ductarum ex E vsque ad A C, secet bifariam, & bifariam quoque secabit omnes inter A C, N O interceptas, ac tendentes ad E: cùmque demonstratum sit tres M F, M L, M B esse in continua ratione geometrica, patet quod rectangulum sub segmentis cuiuscunque ipsarum Coni-sectionem secantium inter ipsam N O & Sectionem interceptis, hoc est sub F M, M B æquale erit quadrato segmenti M L inter ipsas æquidistantes A C, N O.

Et quoniam patet ex Conicis Elementis punctum bisecans diametrum Coni-sectionis ex E ductam vsque ad tactus iungentem A C, in Parabola, cadere in ipsum Sectionis verticem, in Ellipsi verò, vel Circulo cadere extra, in Hyperbola autem intra, patet quoque rectam N O, quæ prædictorum exhibet spatiorum æqualitatem, contingere Parabolam ad diametri verticem, in Ellipsi verò, vel Circulo totam extra cadere, in Hyperbola totam intra. Quod hùc pro sequentibus haud inutiliter adnotasse constabit.

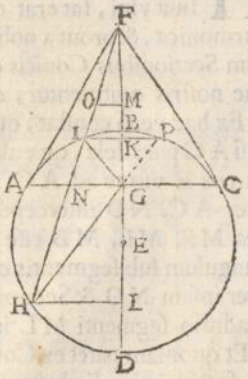
RRO

PROPOSITIO XI.

IN Circulo. Quadrata ramorum a quouis termino axis trianguli circumscripti tanquam ab origine ductorum, sunt inter se vt axis, seu diametri segmenta inter ordinatim ductas in Circulo ex ramorum terminis, & punctum, quod ipsum trianguli axem bifariam secat.

ESto Circulo ABCD, cuius centrum E, circumscriptum quodcunque triangulum AFC, cuius basis AC, & axis FG atque ex altero terminorum ipsius FG, veluti ab exteriori F, ducantur quotcunque rami ad Circuli peripheriam, hoc est ramus FBD per centrum, FIH extra centrum, & FA contingens, &c. aut si ex termino interiori G ipsi rami ducti sint, videlicet GD per centrum, & GA ipsi BD perpendicularis, alijque GH, GI, GB &c. ex ipsorum autem omnium terminis ordinentur ad FD rectæ DD, HL, AG, IK, BB &c. & axis FG bisecetur in M. Dico tám quadrata ramorum omnium ab externa origine FD, FH, FA, FI, FB, &c. quám quadrata omnium ab interna GD, GH, GA, GI, GB &c. esse inter se vt sunt diametri segmenta MD, ML, MG, MK, MB &c, quæ inter prædictas ordinatas, & punctum bisectionis M interijciuntur. Et primò id ostendatur de ramis ex origine externa F prodeuntibus.

Agatur ex M basi AC parallela MO, quæ FN bifariam secabit in O.



Iam, quadratum FD ad quadratum tangentis FA, vel ad rectangulum sibi æquale DFB est vt linea DF prima proportionalium ad tertiam FB post duas DF, FA, sed DF secta est [a] in G, B in ratione harmonica, & media harmonica FG bifariam in M, quare linea DF, ad FB, siue quadratum FD, ad quadratum FA, est vt [b] linea MD ad MG.

[a] 37. tertij Conic.
[b] 10. huius

Item, quadratum tangentis FA, vel ad sibi æquale rectangulum HFI est vt linea HF, harmonicè secta [c] in N, I, ad FI, vel vt [d] HO ad ON (cùm media FN sit bifariam secta in O) vel vt LM, ad MG.

[c] 37. tertij Conic.
[d] 10. huius

Præterea, quadratum tangentis FA, siue rectangulum sibi æquale HFI ad quadratum rami FI est vt linea HF, harmonicè quoque secta [e] in N, I, ad FI, vel vt [f] NO ad OI (cùm media NF sit bifariam secta in O,) vel vt GM, ad MK.

[e] 37. tertij Conic.
[f] 10. huius

Insuper, quadratum tangentis FA, siue rectangulum sibi æquale DFB ad quadratum rami FB est vt linea DF, harmonicè [g] secta in GB, ad FB, vel vt [h] GM, ad MB, (cum sit media GF bifariam secta in M) Quadrata

[g] 37. tertij Conic.
[h] 10. huius

igitur

igitur ramorum FD, FH, FA, FI, FB &c. sunt vt lineæ MD, ML, MG, MK, MB &c. quod erat primò &c.

Pro ramis verò ab interiori origine G ductis, sic argumentabitur.

Quadratum rami GD ad quadratum rami perpendicularis GA, vel ad sibi æquale rectangulum DGB est vt [a] linea DG ad GB, vel vt [b] linea DM ad MG, quoniam DF est harmonicè secta in G, B & media harmonica FG bifariam in M.

[a] 37. tertij Conic.
[b] 10. huius

Ampliùs, quadratum GH ad quadratum perpendicularis GA, vel ad sibi æquale rectangulum DGB, vel ad huic æquale rectangulum HGP (dum HG producatur ad P) est vt linea HG ad GP, (quam ipsi GI æqualem esse infra ostendemus, adeoque iunctam IP ad diametrum BD perpendicularem, seu ipsi HL parallelam) vel vt HN, ad NI, vel vt HO ad ON (cum sit HF harmonicè [c] secta in NO & FN bifariam in O,) vel vt [d] LM ad MG.

[c] 37. tertij Conic.
[d] 10. huius

Item, quadratum perpendicularis GA, siue rectangulum ipsi æquale HGP ad quadratum rami GI est vt linea HG ad GP, vel vt HN ad NI, vel vt NO ad OI (cum sit FH harmonicè [e] secta in N, I & media FN bifariam in O) vel vt [f] GM ad MK.

[e] 37. tertij Conic.
[f] 10 huius

Tandem, quadratum perpendicularis GA, siue rectangulum ipsi æquale DGB ad quadratum rami GB est vt linea DG ad GB, vel vt [g] linea GM, ad MB. quoniam FD secta est harmonicè [h] in B, G, & FG bifariam in M.

[g] 10. huius
[h] 37. tertij Conic.

Quadrata ergo ramorum GD, GH, GA, GI, GB sunt in ratione linearum MD, ML, MG, MK, MB. Quod erat vltimó &c.

Esse autem GP cum ipsa HG in directum productam æqualem ipsi GI, atque iunctam IP ipsi BD perpendicularem sic ostenditur.

Nam cum sit HL ad IK, vt HF ad FI, vel vt HN ad NI, vel vt LG ad GK, triangula rectangula HLG, IKG erunt inter se æquiangula, ideoque angulus HGL, siue ipsi æqualis ad verticem PGK, æqualis angulo IGK: Cumque rectæ GP, GI æquè distent in Circulo a minima GB, ipsæ inter se æquales erunt, ideoque triangulum IGP est æquicrure, cuius basis IP a recta GK angulum IGP bisecante, ad rectos angulos diuidetur; ac itaque IP ipsis AG, HL æquidistat. Quod supererat demonstrandum.

MONITVM.

Hæc de Circulo, prout etiam de Coni-sectionibus, tum in hoc primo libro, tum in proximo sequenti breuiùs quidem, vnà cum pluribus eorum, quæ sigillatim probantur, generatim absolui possent, diuersaque methodo demostrari; sed sic exigit doctrina, ad quam præsens opus dirigitur.

PROP-

PROPOSITIO XII.

SI Coni-sectionem, vel Circulum duæ rectæ lineæ contingant ab extremitatibus axis (qui in Ellipsi sit axis maior) quibus tertia lateraliter sectionem contingens occurrat, atque a sectionum centro ducta sit ad axem ordinata, aliaque a contactu: si hæc ceciderit in sectionis focum, segmenta axis ab eàdem abscissa, segmentis verticalium tangentium sibi contiguis à laterali terminatis æqualia erunt; & quæ ordinatur ex centro vsque ad lateralem semiaxi pariter æqualis erit.

Si verò ordinata per lateralis contactum ceciderit inter focum, & verticem sibi proximum, segmenta axis sibi contiguis verticalibus tangentibus minora erunt: sed ordinata ex centro vsque ad lateralem maior semiaxe.

Si autem per contactum ordinata ceciderit inter focum, & centrum sectionis, prædicta axis segmenta prædictis verticalibus maiora erunt; at ordinata ex centro ad lateralem vsque minor erit semiaxe.

At si, in Ellipsi, propositus axis fuerit minor, quæ ad ipsum ex centro ordinatur vsque ad lateralem maior est semiaxe minori, quæ verò ordinatur ex lateralis contactu abscindit segmenta axis, quæ sibi contiguis verticalibus contingentibus minora sunt.

ESto A B C, vel Parabola, vt in prima figura; vel Circulus, vt in secunda; vel Ellipsis circa maiorem axem, vt in tertia; vel Hyperbola, vt in quarta; vel tandem Ellipsis circa minorem axem, vt in quinta, & quarum axis sit B G, vertex B, centrum O, & semiaxis coniugatus O M, cui æquidistent B E, G H ab extremitatibus axis ductæ, quæ sectionem verticaliter contingant [a] & sit alia quæcunque lateraliter sectionem contingens ad A, verticalibus occurrens in E, H; recta autem A D, quæ ex contactu A ordinatur transeat primò, in Parabola, per sectionis focum. Dico verticalem tangentem B E segmento axis sibi contiguo B D æqualem esse.

a 17. primi Conic.

1. Quoniam enim A D est semiordinata ex foco, erit ipsa A D recti lateris dimidium, [b] dupla [c] autem segmenti D B, cuius dupla est quoque recta F D. ob [d] tangentem A F, ergo A D, D F sunt æquales, ideoque & E B, B F, siue E B, B D æquales erunt.

b 1. huius
c 2. Coroll. 1. huius.
d ex 33. primi Conic.

2. Si verò ordinata A D concipiatur inter focum, & verticem Parabolæ,

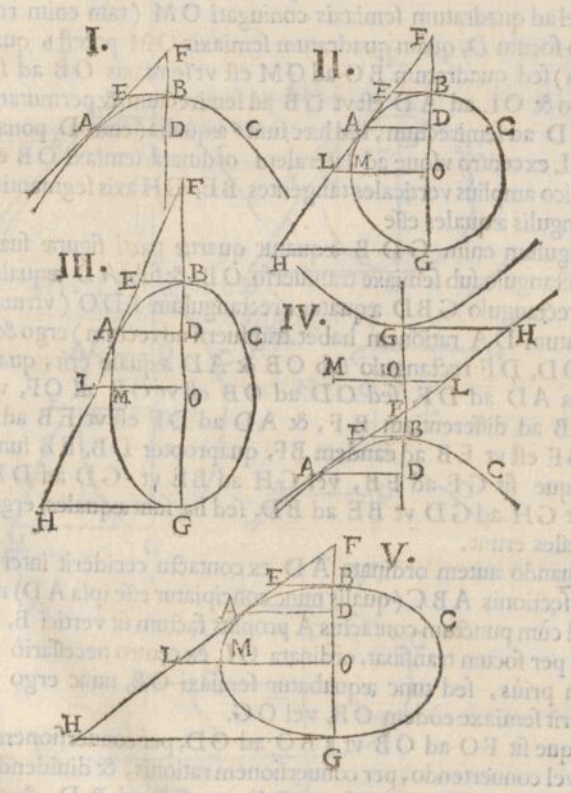
læ: Dico verticalem B E ſegmento axis B D maiorem eſſe.

Cùm ſit enim A D ad E B, vt D F, ad F B, nempe dupla, ob tangentem A F, ſitque eadem A D plus quàm [a] dupla ſegmenti D B, erit verticalis E B maior omnino ſegmento axis B D. [a] Scol. 1. huius.

3. At ſi A D ſit ordinata infra focum: Dico verticalem B E minorem eſſe ſegmento B D.

Nam ſic erit A D maior [b] quàm dupla ſegmenti D B, ſed ipſa A D dupla eſt verticalis tangentis E B, cùm ſit & D F dupla F B, quare E B minor eſt B D. [b] ibidem.

Quod in Parabola oſtendere propoſitum fuit.



4. In Circulo autem ſecundæ figuræ, ſi ordinata A D ceciderit in focum, qui idem eſt ac centrum O, tunc A D, & L O ſimul congruent, ac tangens E H axi B G æquidiſtabit, ipſæque tangentes verticales B E, G H, atque etiam O L, ſegmentis O B, O G, ſiue ſemiaxibus æquales erunt, vt per ſe ſatis conſtat,

5. Si verò ordinata A D fuerit extra focum, ſiue extra centrum; tunc cùm O L applicata ex centro maior ſit O M, erit quoque maior ſemiaxe O B.

6. Cùmque, ob Circulum, verticalis tangens E B æqualis ſit laterali E A,

at EA maior axis segmento BD (nam est AE ad DB, vt AF, ad FD) erit quoque BE maior ipso BD; & ob eandem rationem verticalis tangens GH maior segmento axis GD. Quod erat in Circulo demonstrandum.

7. In Ellipsi verò, & in Hyperbola tertiæ, & quartæ figuræ ponatur priùs AD cadere in focum: Dico primum OL ex centro æqualem esse semiaxi OB.

Nam cum AF sectionem contingat ad A, axemque secet in F, erit vt FO, ad OD, ita [a] quadratum mediæ proportionalis BO ad quadratum OD, & per conuersionem rationis in Ellipsi, vel diuidendo in Hyperbola, erit OF ad FD, siue OL ad AD vt quadratum idem BO ad rectangulum GDB, vel ad quadratum semiaxis coniugati OM (tam enim rectangulum GDB, ob focum D, quàm quadratum semiaxis OM potest [b] quartam figuræ partem) sed quadratum BO ad OM est vt semiaxis OB ad semirectum latus, ergo & OL ad AD est vt OB ad semirectum, & permutando OL ad OB vt AD ad semirectum, sed hæc sunt [c] æqualia (cum D ponatur focus) ergo & OL ex centro vsque ad lateralem ordinata semiaxi OB est æqualis.

[a] ex 37. primi Conic.
[b] ex Conicis.
[c] 1. huius.

8. Dico amplius verticales tangentes BE, GH axis segmentis DB, DG singulæ singulis æquales esse.

Rectangulum enim GDB æquatur quartæ parti figuræ suæ sectionis, nempe rectangulo sub semiaxe transuerso OB, & sub AD æquali [d] semirecto, sed rectaugulo GBD æquatur [e] rectangulum FDO (vtrunque enim ad quadratum DA rationem habet transuersi ad rectum) ergo & rectangulum sub OD, DF rectangulo sub OB & AD æquale erit; quare vt OD ad OB ita AD ad DF, sed OD ad OB est vt OB ad OF, vel vt differentia DB ad differentiam BF, & AD ad DF est vt EB ad BF, ergo DB ad BF est vt EB ad eandem BF, quapropter DB, EB sunt æquales.

[d] ibidem.
[e] ex 37. primi Conic.

Quumque sit GF ad FB, vel GH ad BE vt [f] GD ad DB, permutando erit GH ad GD vt BE ad BD, sed hæ sunt æquales, ergo, & GH, GD æquales erunt.

[f] 36. primi Conic.

9. Quando autem ordinata AD ex contactu ceciderit inter focum, & verticem sectionis ABC (qualis nunc concipiatur esse ipsa AD) manifestum est, quod cùm punctum contactus A propius factum sit vertici B, quàm dum ipsa AD per focum transibat, ordinata OL ex centro necessariò maior euadet quàm priùs, sed tunc æquabatur semiaxi OB, nunc ergo OL maior quidem erit semiaxe eòdem OB, vel OG.

Quumque sit FO ad OB vt [g] BO ad OD, per conuersionem rationis in Ellipsi, vel conuertendo, per conuersionem rationis, & diuidendo in Hyperbola, erit OF ad FB, vel OL ad BE, vt OB ad BD, & permutando OL ad OB vt BE ad BD, sed OL maior est OB, vti nuper demonstrauimus, ergo & verticalis tangens BE maior erit sibi contiguo axis segmento BD.

[g] ex 37. primi Conic.

Et quoniam in vtraque pariter figura, est GF ad FB, vel GH ad BE vt [h] GD ad DB, permutando GH ad GD erit vt BE ad BD, sed BE maior est BD, vt supra ostendimus, ergo & verticalis contingens GH maior est segmento axis sibi contiguo GD.

[h] 36. primi Conic.

10. At si ponatur ordinata AD cadere inter focum, & centrum eorun-

dem

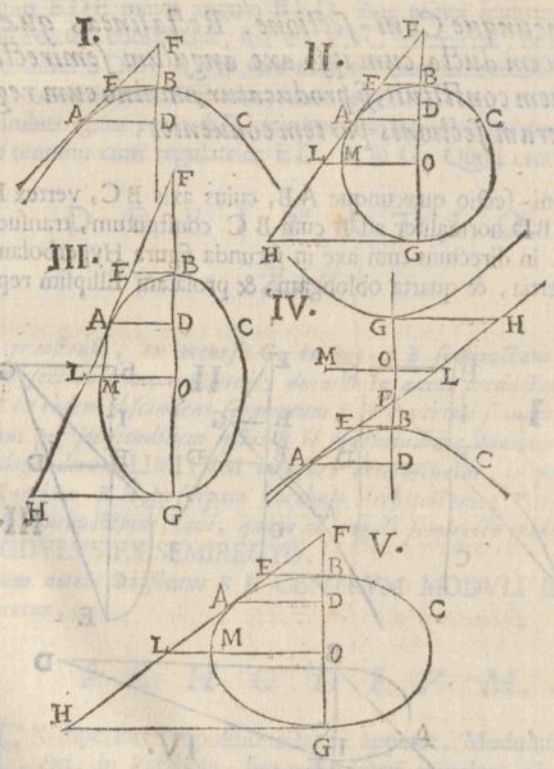
dem Sectionum, iam satis apparet quod OL ex centro (quæ dum AD per focum ibat, æqualis erat semiaxi OB, vel OG) fit modò minor quàm prius erat, hoc est minor eodem semiaxe.

Et quia FO ad OB est vt [a] BO ad OD, per conuersionem rationis in Ellipsi, vel conuertendo, per conuersionem rationis, & diuidendo in Hyperbola, erit OF ad FB, vel OL ad BE, vt OB ad BD, & permutando OL ad OB vt BE ad BD, sed OL minor est OB, vt modò conclusum fuit, ergo, & verticalis tangens BE minor est contiguo axis segmento BD.

[a] 37. primi Conic.

Præterea quia GF ad FB, vel GH ad BE est vt [b] GD ad DB, erit

[b] 36. primi Conic.



permutando GH ad GD vt BE ad BD, sed BE minor ostensa est nunc ipsa BD, ergo, & verticalis tangens GH minor est contiguo segmento axis GD. Quod in Ellipsi oblonga, atque in Hyperbola supererat demonstrandum.

11. Postremò in Ellipsi prolata quintæ figuræ, cùm sit OL maior OM, & OM maior OB (est enim OB semiaxis minor) eò magis OL ordinata ex centro vsque ad lateralem tangentem FH maior erit semiaxe minori OB; vel OG.

12. Quia verò FO ad OB est vt [a] BO, ad OD, per conuersionem rationis OF ad FB, vel OL ad EB erit vt OB ad BD, & permutando OL ad OB vt BE ad BD, sed OL maior est OB, vt superiùs ostendimus, ergo & verticalis tangens BE maior est contiguo sibi segmento axis BD.

a 37. primi Conic.

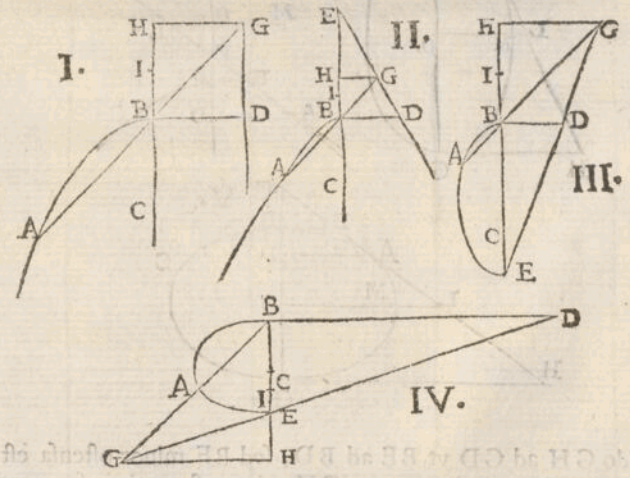
Insuper cùm sit GF ad FB, vel GH ad BE vt [b] GD ad DB, erit permutando GH ad GD vt BE ad BD, sed BE nuper ostensa est maior BD, ergo & GH verticalis tangens maior est sibi contiguo segmento axis GD. Quod erat vltimò demonstrandum.

b 36. primi Conic.

PROPOSITIO XIII.

IN quacunque Coni-sectione. Recta linea, quæ per axis verticem ducta cum ipso axe angulum semirectum intra sectionem constituit, si producatur, omnino cum regulatrice ad alteram sectionis partem conueniet.

ESto Coni-sectio quæcunque AB, cuius axis BC, vertex B, latus rectum BD normaliter ad B cum BC constitutum, transuersum verò latus sit BE in directum cum axe in secunda figura Hyperbolam exhibente; & in tertia, & quarta oblongam, & prolatam Ellipsim representanti-



bus sit transuersus axis BE, & in omnibus sit regulatrix EDG, ad partem verò sectionis cum axe BC fiat ad B semirectus angulus CBA. Dico rectam AB extra sectionem productam cum regulatrice ED omnino conuenire.

In Parabola enim primæ figuræ, quoniam regulatrix DE, axi BC equidistat, & AB alteram parallelarum BC secat in B, producta, & reliquæ occurret,

In

In Hyperbola verò id clariùs conſtat, cùm producta AB ſecet omnino rectum angulum EBD, eò quod ABC, & ipſi ad verticem EBG ſit ſemirectus; quare vlteriùs producta occurret neceſſariò baſi ED.

In Ellipſi autem oblonga. Quoniam tranſuerſum EB maius eſt recto BD erit angulus EDB maior BED, ſed duo ſimul EDB, BED æquantur recto, ergo EDB ſemirecto maior eſt, ſed ABE æquatur ſemirecto, recto verò æquatur EBD, ergo tres ſimul EDB, DBE, EBA, hoc eſt duo ſimul EDB, ABD duobus rectis maiores ſunt; quare, & qui ijs ſunt deinceps, nempe BDG, GBD ſimul ſumpti duobus rectis minores ſunt, ac ideò AB cum ED conuenit extra ſectionem.

In prolata demum. Quoniam tranſuerſum BE minus eſt recto BD, erit angulus BDE minor angulo BED, ſiue minor ſemirecto, cum ipſi duo ſimul rectum conſtituant, ſed eſt ABC ſemirectus, & CBD rectus, ergo duo ſimul BDE, ABD ſunt minores duobus rectis; ideoque BA producta conuenit cum DE extra ſectionem.

In omnibus igitur recta AB, ſemirectum faciens angulum cum axe BC conuenit omnino cum regulatrice ED, vt in G: Quod erat &c.

DEFINITIO.

XIV.

HIS præoſtenſis, ex occurſu G, in quo AB ſemirectum angulum cum BC ſectionis axe conſtituit, ducatur in axem productum perpendicularis GH ex eòdem abſcindens ſegmentum BH a vertice ſumptum. Et quia in ſequentibus per longitudinem ipſius BH magnitudines quædam exhibentur, atque indagandorum LIMITVM *menſura determinatur, in poſterum prædictam diſtantiam BH, vſurpato vocabulo Architectonico Vitruuiano,* MODVLVM *nuncupabimus, qui, quum ab angulo ſemirecto ortum ducat, dicatur* MODVLVS EX SEMIRECTO.

Punctum autem I biſecans BH CENTRVM MODVLI EX SEMIRECTO *vocetur.*

SCHOLIVM.

1. EX ſuperiori Propoſitione facilè apparet, Modulum ex ſemirecto, in Parabola, ſuo recto lateri æqualem eſſe; quoniam parallelogrammum HD ſit quadratum, ex conſtructione, adeoque Modulus HB æqualis eſt recto lateri BD.

2. In Hyperbola verò, Modulum ſemper minorem eſſe vtroque ipſius laterum. Nam quum HG, HB ſint æquales, ſitque HG minor BD (in triangulo EBD) erit & Modulus HB minor recto latere BD: ſed eſt quoque minor axe tranſuerſo EB, quum ille huius ſit pars: quare, & Semimodulus minor eſt ſemiaxe tranſuerſo.

3. In Ellipſi autem oblonga, Modulus maior ſemper eſt recto latere ſuæ

ſuæ Sectionis; quoniam in triangulo EHG eſt HG maior BD, ergo & Modulus HB, ipſi HG æqualis, còdem recto BD maior eſt.

Sed idem Modulus aliquando axi tranſuerſo æqualis eſt, aliquando minor, aliquando maior. Si enim rectum latus BD fuerit dimidium axis tranſuerſi BE, etiam HG, vel HB, ipſi HG æqualis, erit dimidium totius HE (in triangulo GHE ob æquidiſtantes HG, BD) nempe Modulus HB æqualis axi tranſuerſo BE. Si verò ſit BD minus dimidio BE ob eaſdem rationes, HB erit minor dimidio HE, ſiue HB minor BE. Si tandem fuerit BD dimidio ipſius BE maior, & HB erit maior dimidio totius HE, ſiue HB maior BE.

4. In Ellipſi denique prolata prædictus Modulus ex ſemirecto, aut æqualis, aut minor, aut maior eſſe poteſt recto latere ſuæ Sectionis. Nam, quum ſit DB ad BE vt GH, vel vt BH ipſi GH æqualis ad HE; ſi fuerit rectum DB duplum axis tranſuerſi BE, erit etiam BH dupla HE, ideoque eadem BH dupla reliquæ BE; quare Modulus BH recto BD æqualis. Si verò rectum BD fuerit plus quàm duplum axis tranſuerſi BE, ob eaſdem rationes erit BH plus quàm dupla HE, nempe HB minus quàm dupla reliquæ BE, cuius ponitur BD plus quàm dupla, ergo Modulus BH minor eſt recto latere BD. Si autem rectum BD ſit minus duplo axis BE, & BH erit minor quàm dupla HE, nempe BH plus quàm dupla BE; quare Modulus BH maior eſt recto BD.

Tandem ipſe Modulus BH ſemper maior eſt axe tranſuerſo BE ſuæ Sectionis; quoniam totum ſua parte maius eſt, adeoque ſemimodulus maior ſemiaxe tranſuerſo.

H

PROPOSITIO XIV.

IN quacunque Coni-ſectione; Quadrata ramorum ab origine in vertice, ſunt inter ſe vt rectangula ſegmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex ſemirecto interceptorum.

SIT quæcunque Coni-ſectio AB, cuius axis BC, vertex B, rectum latus BD axi erectum, atque in tribus vltimis figuris, videlicet Ellipſis oblongæ, prolatæ, & Hyperbolæ, ſit axis tranſuerſus BK, & in omnibus ſit regulatrix KD, per rectam verò AB (quæ ad ſectionis partem cum axe BC ſemirectum angulum faciat) compleatur figura Modulum exhibens BG, & præter BA ſit quilibet alius ramus BH, & ex eorum terminis ſint ſemiordinatæ HI, AC. Dico quadrata ramorum BA, BH eſſe inter ſe vt rectangula GCB, GIB.

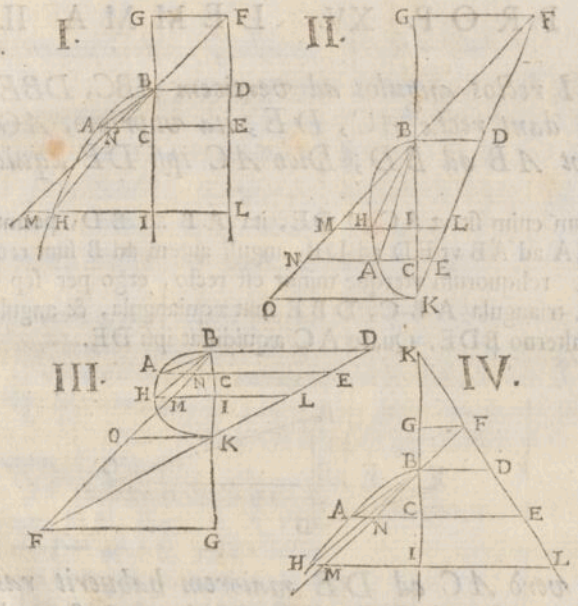
Producantur ordinatæ vſque ad regulatricem in E, L, & HI conueniat cum AB in M.

Iam, quum ex conſtructione angulus ABC ſit ſemirectus, & ad C rectus, erit & ad A ſemirectus, ideoque latera AC, CB, & MI, IB

ſunt

ſunt æqualia; ſed in ſingulis figuris quadratum ſemiordinatæ AC æquale eſt [a] rectangulo BCE, eſtque NC æqualis BC, ergo quadratum AC æquatur rectangulo NCE, quibus additis æqualibus quadratis CB, CN, erunt duo ſimul quadrata AC, CB, vel vnicum rami BA æquale rectangulo NCE cum quadrato CN, hoc eſt æquale vnico rectangulo ENC. Eàdem ratione oſtenditur quadratum rami BH æquale rectangulo LMI: quapropter quadratum rami BA ad quadratum rami BH eſt, ob æqualitatem, vt rectangulum ENC ad rectangulum LMI; ſed horum ratio componitur ex ratione EN ad LM, ſiue FE ad FL, ſiue GC

[a] 11, 12, 13. primi Conic.



ad GI (ob parallelas CF, GE, IL) & ex ratione NC ad MI, vel BC ad BI; & ex his componitur quoque ratio rectanguli GCB ad rectangulum GIB, ergo quadratum rami BA ad quadratum rami BH eſt vt rectangulum GCB ad rectangulum GIB.

In ſecunda verò, & tertia Ellipſium figura, ſi ex termino K axis tranſuerſi BK ordinetur KO, erit ipſius quadratum ad rectangulum LMI in ratione compoſita ex ratione KO ad LM, ſiue KF ad FL, ſiue KG ad GI, & ex ratione KO ad MI, ſiue KB ad BI; ſed ex his quoque componitur ratio rectanguli GKB ad rectangulum GIB, ergo quadratum ipſius KO, ſiue rami ſibi æqualis BK ad rectangulum LMI, ſiue ad ſibi æquale oſtenſum quadratum rami BH, eſt vt rectangulum GKB ad rectangulum GIB. Quod ſupererat demonſtrandum.

COROLL.

COROLL.

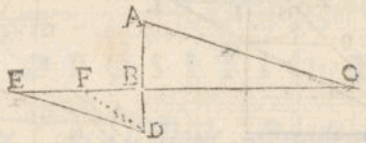
COlligitur hinc, in qualibet Coni-ſectione, quadratum cuiuſcunque rami à vertice ducti æquale ſemper eſſe rectangulo ſub compoſita ex iuæ ordinatæ ſegmento inter axem, & regulatricem, cum ſegmento abſciſſi axis, in hoc idem ſegmentum.

Oſtenſum enim eſt quadratum rami BH æquale rectangulo ſub LM (quæ conſtat ex LI inter axem, & regulatricem, & ex IM, ſiue ex IB ſegmento axis ipſi IM æquali, ob angulos ſemirectos ad M, B) in MI, ſiue in idem IB.

PROP. XV. LEMMA II.

1. *SI rectos angulos ad verticem ABC, DBE ſubtendant rectæ AC, DE, ita vt primò, AC ad DE ſit vt AB ad BD; Dico AC ipſi DE æquidiſtare.*

QVum enim ſit vt AC ad DE, ita AB ad BD, permutando erit CA ad AB vt ED ad DB, anguli autem ad B ſunt recti, ac ideo reliquorum vterque minor eſt recto, ergo per ſeptimam ſexti Element. triangula ABC, DBE ſunt æquiangula, & angulus BAC æqualis alterno BDE. Quare AC æquidiſtat ipſi DE.



2. *Si verò AC ad DE maiorem habuerit rationem, quàm AB ad BD. Oſtendendum eſt ſecundò productam DE conuenire cum producta CA ad partes E, A.*

SI enim negatur hoc, vel DE ipſi CA æquidiſtabit, vel ipſæ ſimul conuenient ad partes contrarias D, C. Non primum. Quia AC ad DE eſſet vt AB ad BD, quod eſt contra Hypotheſim.

Non ſecundum. Quia DF, ducta ex D ipſi AC parallela, neceſſariò caderet intra angulum EDB, atque ita AC ad DF rationem haberet eam, quam AB ad BD, ſed ratio AC ad DE ponitur maior ratione AB ad BD, ergo & AC ad DE maiorem haberet rationem quàm ad DF: quare DE minor eſſet DF, quod eſt falſum, quum ſit maior (opponitur enim DE obtuſo angulo DFE, DF verò acuto DEF) ergo producta DE conuenit neceſſariò cum CA ad partes E, A.

3 Si

3. Si tandem AC ad DE minorem habuerit rationem, quàm AB ad BD. Demonſtrandum remanet ED, EC conuenire ſimul ad partes D, C,

SI enim inter ſe æquidiſtarent, eſſet AC ad DE vt AB ad BD. Et ſi ad contrarias partes conuenirent, iiſdem rationibus, ac ſupra, haberet AC ad DE maiorem rationem quàm AB ad BD, vtrunque contra Hypotheſim. Ergo omnino patent propoſita.

PROPOSITIO XVI.

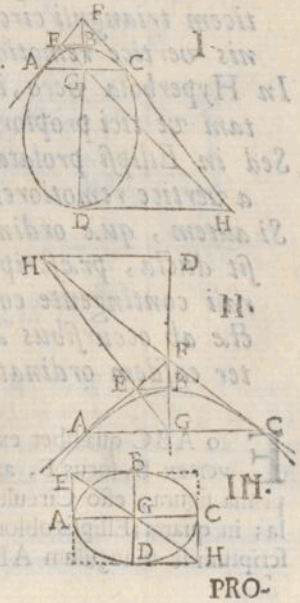
IN quacunque Coni-ſectione centrum habente. Recta linea iungens occurſum, in quo aliqua ex ordinatim ductis diametrum ſecat, & occurſum verticalis contingentis cum altera lateralium a terminis ordinatæ ductarum, ſi producatur, cum reliqua lateralium, & cum reliqua verticalium tangentium ab altero tranſuerſi lateris termino ducta, in vno, eodemq: puncto conueniet.

ESto ABC vel Ellipſis, vel Circulus, vel Hyperbola, cuius tranuerſa diameter BD, ad quam ſit ordinata AC diametrum ſecans in G, ſintque ex terminis A, C contingentes AF, CF, & ex tranſuerſæ terminis B, D; ſint verticales tangentes BE, DH lateralibus AF, CF occurrentes in E, H. Dico, ſi iungatur EG, & producatur, hanc neceſſariò ad punctum H peruenire.

Nam cum AF ſectionem contingat, & diametrum ſecet in F, ſitque ex A ordinata AGC, erit DF ad FB, vel DH ad EB, vt[a] DG ad GB, & permutando HD ad DG vt EB ad BG, & anguli ad D, B ſunt æquales, ob parallelas DH, BE, ergo & anguli DGH, BGE ſunt æquales; ſed DGB eſt vnica recta linea, ergo & EGH vnica eſt recta: Diagonalis ergo EG producta conuenit cum laterali tangente FC in eodem puncto H, in quo conuenit reliqua verticalis contingens DH.

Si autem, in quarta figura, ordinata AC per centrum tranſierit, conſtat in Ellipſi, vel Circulo tum laterales, tum verticales tangentes eſſe inter ſe parallelas, eaſque rectangulum EH Sectioni circumſcribere, ac propterea iunctam EG per centrum, cadere neceſſariò in punctum H.

[a] 36. primi Conic.



PROPOSITIO XVII.

IN quacunque Coni - sectione, vel Circulo. Si basis trianguli circumscripti inter focum, & sibi proximum axis verticem ceciderit, & in Ellipsi prolata inter centrum, & verticem, per quem, in singulis sectionibus, sit verticalis contingens alteri lateralium occurrens, quæ, a puncto dimidiæ basis trianguli applicetur subtendens rectum angulum ab ipsa verticali, & sectionis axe constitutum: hæc in Circulo reliquæ lateralium tangentium æquidistabit.

In Parabola verò, in Hyperbola, & Ellipsi oblonga eidem tangenti occurret ad partes sectioni contrarias.

Sed in Hyperbola occurret inter verticales tangentes sectionum oppositarum.

In prolata autem ad partes centri, vltra tamen verticalem tangentem priori oppositam.

Et si ab occursibus prædictæ subtensæ cum lateralibus contingentibus ad productum axem ducantur ordinatæ, punctum bisecans segmentum ab his abscissum, cadet in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi oblonga inter verticem trianguli circumscripti, & ordinatam a Sectionis vertice remotiorem.

In Hyperbola verò, inter Sectionis centrum, & ordinatam vertici propiorem.

Sed in Ellipsi prolata inter eius centrum, & ordinatam a vertice remotiorem.

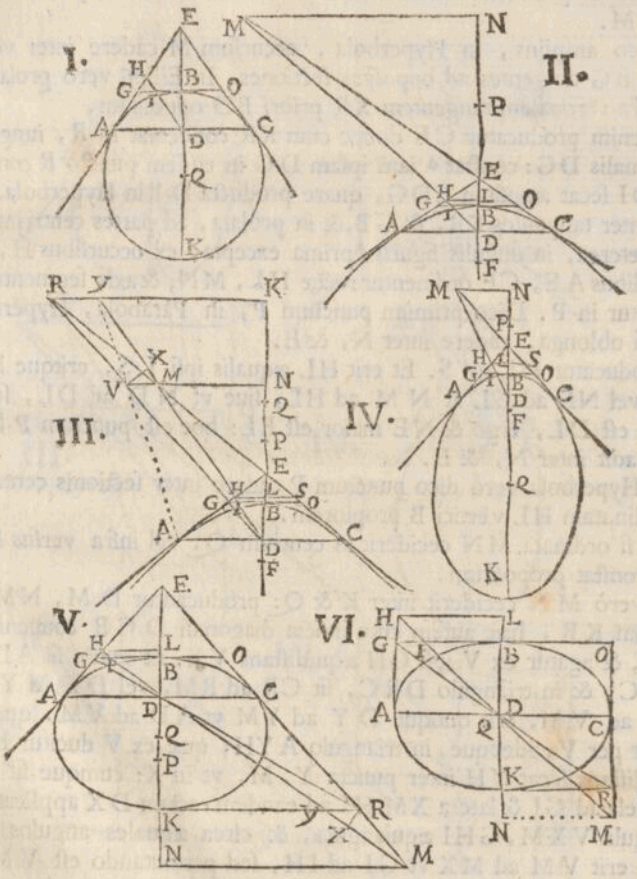
Si autem, quæ ordinatur in prolata Ellipsi, per centrum sit ducta, præscripta subtensa cum vtràque item latera li contingente conueniet, & ordinatim ad axem ductæ ab occursibus æqualia axis segmenta abscindent inter easdem ordinatas, & centrum sectionis.

Esto ABC quælibet ex prædictis Coni - sectionibus, cuius axis BK, vertex B, focus F, axis transuersus KB, centrum Q: hoc est in prima figura, esto Circulus; in secunda, Parabola; in tertia, Hyperbola; in quarta; Ellipsis oblonga; in quinta Prolata, atque singulis circumscriptum sit triangulum AEC, cuius axis ED, basis ADC inter focum

F &

F & verticem B, ſitque ex B verticalis contingens B G lateralem E A ſecans in G. Iam conſtat ipſam B G vtique maiorem [a] eſſe ſibi contiguo axis ſegmento B D: Si igitur ipſa B G aptetur ex D in angulo recto D G B in D I, hæc neceſſariò terminabit inter G, B, & producta lateralem A E ſecabit inter G & E, vt in H. Dico primùm, in Circulo, ipſam D H reliquæ laterali C E æquidiſtare. Producatur E B ad O.

[a] 12. huius



Et quoniam ex eòdem puncto G rectæ G A, G B Circulum tangunt, ipſæ interſe æquales erunt: habebit ergo E G ad G A, vel E B ad B D eandem rationem ac E G ad G B, ſed eſt E O æqualis E G, & D I æqualis G B, ex conſtructione, ergo E B ad B D eſt vt E O ad D I: ergo E O ipſi D I æquidiſtat. [b]

[b] 15. huius ad 11. 1.

In Parabola verò, Hyperbola, & Ellipſi oblonga. Dico ſubtenſam D I cum laterali tangente C E conuenire ad partes ſectioni contrarias.

a 87. primi nostræ Diuin. de Max. & Min.

Nam lateralis tangens G A maior est a verticali GB; quare E G ad GA, vel E B ad B D est in minori ratione quàm E G ad G B, vel (his cum æqualibus permutatis) quàm E O ad D I: ergo D I H producta conuenit b cum C E ad partes E sectioni contrarias, vt in M.

b 15. huius ad n. 2.

c 87. primi nostræ Diuin. de Max. & Min.

In Ellipsi autem prolata; lateralis tangens G A, minor est c verticali BG; quare E G ad GA, vel E B ad B D maiorem habet rationem quàm E G ad G B, vel (his cum æqualibus permutatis) quàm E O ad D I: ergo H I D producta conuenit cum E C infra D C ad partes centri Q, vt in M.

Dico amplius, in Hyperbola, occursum M cadere inter verticales K R, B G tangentes ad oppositas sectiones. In Ellipsi verò prolata cadere infra verticalem tangentem K R priori B D oppositam.

Si enim producatur C E donec cum K R conueniat in R, iungaturque diagonalis D G: constat d iam ipsam D G in eodem puncto R conuenire, sed D I secat angulum E D G, quare producta D I, in Hyperbola, secabit E R inter tangentes K R, & G B, & in prolata, ad partes centri infra K R.

d 16. huius

Præterea, in singulis figuris, prima excepta, ex occursibus H, M cum lateralibus A E, C E ordinentur rectæ H L, M N, & axis segmentum L N bisecetur in P. Dico primùm punctum P, in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi oblonga, cadere inter N, & E.

Producatur H L ad S. Et erit H L æqualis ipsi L S, eritque N M ad L S, vel N E ad E L vt N M ad H L, siue vt N D ad D L, sed N D maior est D L, ergo & N E maior est E L: hoc est punctum P bisecans N L cadit inter N, & E.

In Hyperbola verò dico punctum P cadere inter sectionis centrum Q, & ordinatam H L vertici B propiorem.

At si ordinata M N ceciderit in centrum Q, vel infra versus E: iam satis constat propositum.

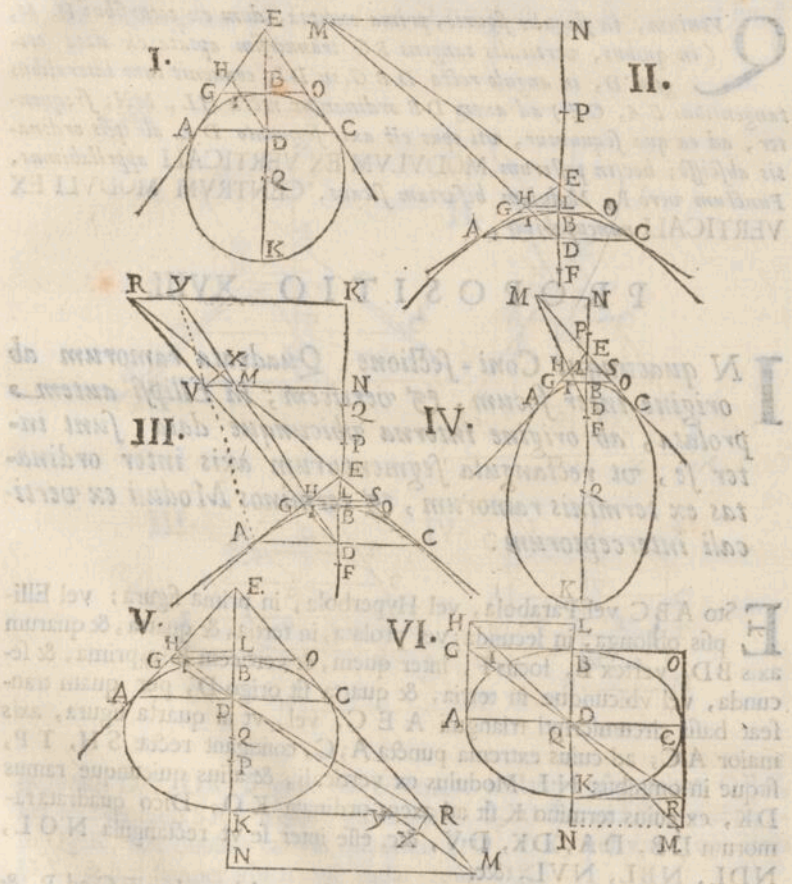
Si verò M N ceciderit inter K & Q: producantur D M, N M donec illa cum K R, hæc autem cum iuncta diagonali D G R conueniant in Y, V, & agatur ex V ipsi G H æquidistans V X. Et quum sit A D æqualis D C, & in triangulo D R C, sit C R ad R M, vel D Y ad Y M, vt D C ad V M, erit quoque D Y ad Y M vt A D ad V M: quare A Y transit per V, ideoque, in triangulo A Y H, quæ ex V ducitur basi A H æquidistans secat Y H inter puncta Y, M, vt in X: cumque sit & V M parallela ad G I & latera X M, H I ad eandem rectam D X applicata, erunt triangula V X M, G H I æquiangula, & circa æquales angulos V M X, G I H erit V M ad M X vt G I ad I H, sed permutando est V M maior G I (in triangulo V D M) ergo & M X maior I H, & eò magis M Y maior H I: quare (ob parallelas R K, M N, H L, G B) erit & K N maior L B; sed K Q ponitur æqualis Q B, ergo reliqua N Q minor est reliqua Q L; ideoque punctum P bisecans totam N L cadit infra Hyperbolæ centrum Q versus ordinatam H L vertici B propiorem.

Insuper in prolata Ellipsi: dico punctum P bisecans segmentum N L cadere inter Sectionis centrum Q, & ordinatam N M vertici B remotiorem.

Ex

Ex occurſu R, in quo lateralis E C conuenit cum tangente verticali KR, agatur R X ipſi G H parallela, quæ I D M ſecet in X, atque I M ſecet K R in V.

Et quoniam G I æquidiſtat ipſi R V, & G H ipſi R H, in triangulis I G H, V R X, in quibus & latera I H, V X ſunt in eadem recta linea, erit R V ad V X vt G I ad I H, ſed permutando eſt R V maior G I, quoniam & R D maior eſt D G, ergo & V X maior eſt I H, & eò magis



V M maior I H, adeoque & N K maior B L, & eſt K Q æqualis K B, ergo compoſita N Q maior eſt compoſita Q L: ſiue punctum P biſecans N L cadit inter Ellipſis centrum Q, & ordinatam M N vertici B remotiorem.

Tandem, in ſexta figura, ſi ordinata A C per centrum D prolatæ tranſierit: facilè patet, ex ipſa conſtructione, ſubtenſam D I, ſi producatur,

tur, secare laterales tangentes A G, C R extra verticales B G, K R in H, M, & ordinatis H L, M N, segmenta D L, D M æqualia esse, adeoque punctum bisecans L N cadere in Ellipsis centrum Q.

DEFINITIO.

XV.

Quoniam, in singulis figuris, prima excepta, dum ex occursibus H, M, (in quibus, verticalis tangens B G tranuersim aptata ex data origine D, in angulo recto D B G, in D I, conuenit cum lateralibus tangentibus E A, C E) ad axem D B ordinantur rectæ H L, M N, frequenter, ad ea quæ sequuntur, vti opus est axis segmento D L ab ipsis ordinatis abscisso; hoc in posterum MODVLVM EX VERTICALI *appellabimus. Punctum verò R, Modulum bifariam secans,* CENTRVM MODVLI EX VERTICALI *nuncupabitur.*

PROPOSITIO XVIII.

IN quacunque Coni-sectione. Quadrata ramorum ab origine inter focum, & verticem; in Ellipsi autem prolata, ab origine interna vbicunque data, sunt inter se, vt rectangula segmentorum axis inter ordinatas ex terminis ramorum, & terminos Moduli ex verticali interceptorum.

ESto A B C vel Parabola, vel Hyperbola, in prima figura; vel Ellipsis oblonga, in secunda; vel prolata, in tertia, & quarta, & quarum axis B D, vertex B, focus F, inter quem, & verticem B in prima, & secunda, vel vbicunque in tertia, & quarta sit origo D, per quam transeat basis circumscripti trianguli A E C, vel, vt in quarta figura, axis maior A C; ad cuius extrema puncta A, C, contigant rectæ S H, T P, sitque in omnibus N L Modulus ex verticali, & alius quicunque ramus D K, ex cuius termino K sit ad axem ordinata K O. Dico quadrata ramorum D B, D A, D K, D V, &c. esse inter se vt rectangula N O L, N D L, N B L, N V L, &c.

Producatur verticalis contingens G P vsque ad lateralem E C ad P, & ex K ordinetur S T laterales secans in S, T, sectionem verò in Q, & axem in O.

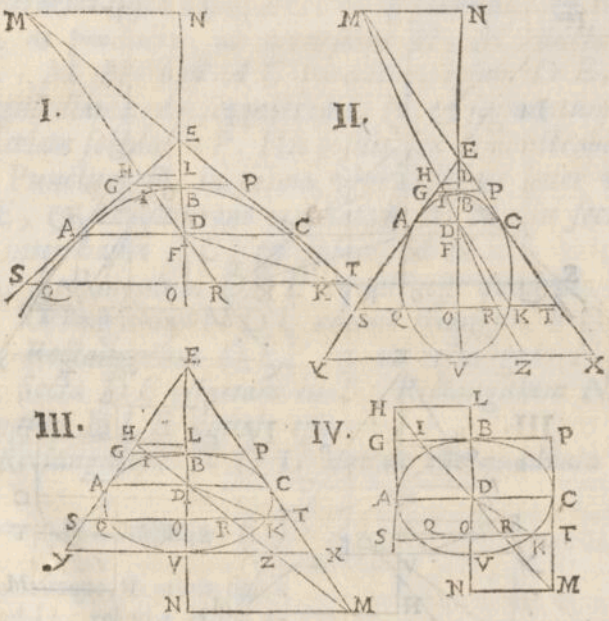
Et quoniam verticalis B G æquatur transuersim coaptatæ D I, erit quadratum B G, siue rectangulum G I P cum quadrato I B æquale quadrato B I, siue duobus simul D B, B I, & dempto communi quadrato B I, supererit rectangulum G I P æquale quadrato rami D B.

Item

Item rectangulum A D C æquale eſt quadrato rami D A.

Præterea, (producta M I D donec ordinatæ S T occurrat in R) quia rectæ G B, G A Sectionem contingunt ad B, A, eſtque S T alteri ipſarum, vtpu a ipſi G B æquidiſtans reliquam tangentem, & Sectionem ſecans in S, Q, K, erit quadratum G B ad G A vt [a] rectangulum Q S K ad quadratum A S, & permutando quadratum G B ad rectangulum Q S K, vel ad S Q T (quum S Q, K T ſint æquales) vel ad S K T, erit vt quadratum G A ad A S, vel vt quadratum I D ad D R, ſed antecedentia ſunt æqualia, quadratum nempe G B quadrato I D, ergo, & conſequentia, ſiue rectangulum S K T quadrato D R æquale erit, ſiue duobus ſimul

[a] 16. tertij Conic.



quadratis D O, O R, ſi igitur his commune addatur rectangulum Q R K, fiet rectangulum S R T æquale quadratis D O, O R, vnà cum rectangulo Q R K, ſiue duobus tantùm quadratis D O, O K, vel vnico quadrato D K, & hoc ſemper vbicunque cadat ramus D K.

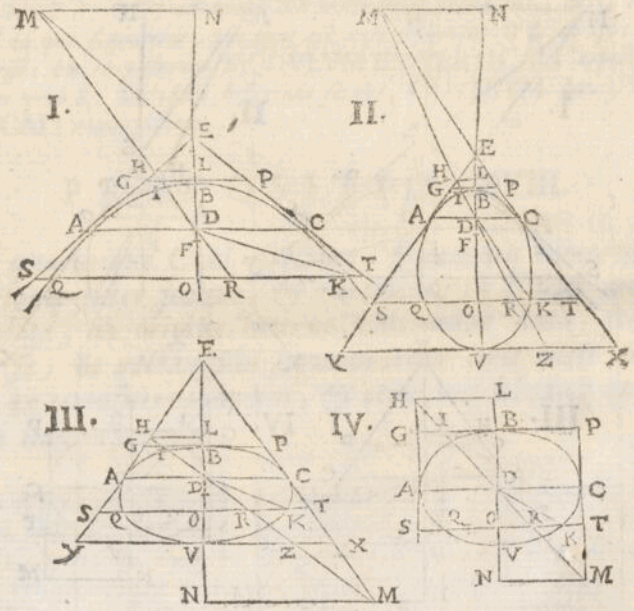
Ampliùs, ratio rectanguli N O L ad N D L componitur ex ratione N O ad N D, ſeu M R ad M D, ſeu rectæ R T ad D C, & ex ratione rectæ O L ad D L, ſiue rectæ R H ad D H, ſiue rectæ R S ad D A; ſed ex his quoque componitur ratio rectanguli S R T ad rectangulum A D C; ergo rectangulum N O L ad N D L eſt vt rectangulum S R T ad A D C, vel (his cum æqualibus permutatis) vt quadratum rami D K ad quadratum rami D A.

Simi-

Similiter ratio rectanguli NDL ad NBL componitur ex ratione ND ad DL, siue MD ad DH, siue CD ad PI, & ex ratione DL ad BL, siue DH ad IH, siue DA ad IG, ex quibus conflatur ratio rectanguli CDA ad PIG; ergo rectangulum NDL ad NBL est vt CDA ad PIG, vel (his cum æqualibus permutatis) vt quadratum rami DA ad quadratum rami DB.

Vt sunt igitur rectangula NOL, NDL, NBL, ita sunt quadrata ramorum DK, DA, DB.

Idem de quadrato rami DV, quod est reliquum axis segmentum in secunda, & tertia figura demonstrabitur sic.



Ducatur altera verticalis contingens YVX, cui occurrat DR in Z. Et quoniam est VE ad EB vt a VD ad DB (ob tangentem AE, & ordinatam AD) erit quadratum VE ad EB, vel YV ad GB vt quadratum VD ad DB, vel ZD ad DI, & permutando quadratum YV ad ZD vt quadratum GB ad DI, sed hæc sunt æqualia, ergo, & quadratum YV, siue rectangulum YVX æquale est quadrato ZD, vel duobus quadratis ZV, VD, & communi dempto VZ, remanet rectangulum YZX æquale quadrato rami BV; sed & rectangulum GIP æquale est quadrato BD, vt supra ostensum fuit, ergo quadratum rami DV ad quadratum rami DB est vt rectangulum YZX, ad GIP, vel vt

a 36. primi Conic.

NVL

NVL ad NBL, cùm vtraque rectangulorum ratio ex æqualibus rationibus componatur. Quapropter omnino patet propositum.

PROP. XIX. LEMMA III.

SI AC basis trianguli AEC secta sit bifariam in puncto D, a quo sit ducta DH alterum ex lateribus, veluti AE, secans in H, ita tamen vt reliquo lateri non æquidistet, sed producta cum ipso quoque conueniat in M, vel ad partes verticis E, vt in prima figura; vel ad contrarias infra basim AC, vt in secunda; & iuncta DE, ac producta, ab occursibus H, M ductæ sint HL, MN basi AC parallelæ, ipsam DE, seu trianguli diametrum secantes in L, N, & segmentum LN sit bifariam sectum in P. His positis, sex demonstrabimus.

Primò. Punctum P, in prima figura, cadere inter verticem E, & remotiorem ordinatam MN; in secunda verò inter basim AC, & ipsam MN.

Secundò. Rectangulum DPE æquale esse quadrato PL.

Tertiò. Rectangulum NDL æquale triangulo PDE.

Quartò. Rectangulum DEP æquale rectangulo NEL.

Quintò. Secta DE bifariam in B: Rectangulum NLB, rectangulo DLE æquale esse.

Sextò. Rectangulum NDL æquale esse quadrato BE.

PRoducatur HL vsque ad EC in I.

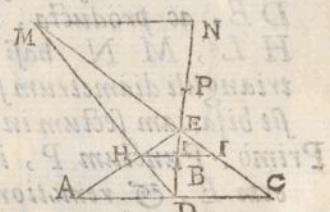
1. Quum itaque, in prima figura sit MN ad IL, vel ad LH ipsi æqualem, vt NE ad EL, sitque MN maior HL, erit etiam NE maior EL. Punctum ergo P bisecans NL cadit inter N, & E.

In secunda verò: quum sit NE ad EL vt NM, ad LI, vel ad HL ipsi æqualem, vel vt ND ad DL, sitque NE maior EL, erit quoque ND maior DL; quare punctum P bisecans NL cadit inter N, & D. Quod erat primò, &c.



2. Quum inter rectas DHM, DEN, CEM sint rectæ AC, HI, MN, inter se parallelæ, erit DC ad HI vt CM ad MI, vel vt DN ad NL, & sumptis consequentium terminorum subduplis, erit DC ad LI dimidium HI, siue DE ad EL, vt DN ad NP dimidium NL, & diuidendo DL ad LE vt DP ad PN, & permutando, conuertendo, & per conuersionem rationis in prima figura, & in secunda permutando, componendo, & conuertendo, erit DP ad PL vt LP ad PE: rectangulum ergo sub extremis DP, PE æquatur quadrato mediæ PL. Quod secundò, &c.

3. Et quoniam est DE ad EL vt DN ad NP, vt nuper ostendimus, erit per conuersionem rationis ED ad DL, vt ND ad DP: ergo rectangulum sub extremis ED, DP æquatur rectangulo sub medijs LD, DN. Quod tertiò, &c.



4. Præterea quum sit DE ad EL vt DN ad NP, permutando erit DE ad DN vt EL ad NP, vel ad PL, & conuertendo ND ad DE vt PL, ad LE, & diuidendo, in prima figura; componendo autem, in secunda, NE ad ED erit vt PE ad EL, ideoque rectangulum NEL sub extremis æquatur rectangulo DEP sub medijs. Quod quartò, &c.



5. Insuper quum secundo loco demonstratum sit DP ad PL esse vt PL ad PE, vel vt differentia DL ad differentiam LE, quumque sit PN æqualis PL, erit NP ad PE vt DL ad LE, & componendo NE ad EP vt DE ad EL, & per conuersionem rationis, EN ad NP vt ED ad DL, & EN ad duplum ipsius NP, siue ad NL, vt dimidium ipsius ED, siue vt BD ad DL, & conuertendo LN ad NE, vt LD ad DB, & per conuersionem rationis, in prima figura, sed conuertendo per conuersionem rationis, & diuidendo, in secunda, NL ad LE vt DL ad LB, rectangulum ergo NLB sub extremis æquatur rectangulo DLE sub medijs. Quod quintò, &c.

6. Tandem si æqualibus rectangulis NLB, DLE commune addatur quadratum BL, erit rectangulum NLB cum quadrato LB, siue vnicum rectangulum NPL, æquale rectangulo DLE cum quadrato BL, siue vnico quadrato BE, vel BD. Quod sextò, & vltimò supererat demonstrandum.

PRO-

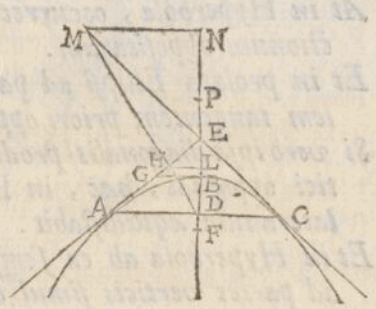
PROPOSITIO XX.

IN Parabola. Semibasis trianguli circunscripti, quæ sit inter verticem, & focum, potest rectangulum sub axe trianguli in segmentum axis inter basim, & centrum Moduli comprehensum.

Prædictum autem segmentum semirecto Parabolæ æquale est.

ESto Parabola A B C, cuius axis B D, vertex B, & focus C, inter quem, & verticem sit basis A C trianguli circunscripti A E C, & sit N L Modulus ex verticali B G transuersim applicata ex D in angulo D B G, &c. eiusque centrum sit P. Dico primùm quadratum semiordinatæ A D, rectangulo P D E æquale esse. Insuper segmentum D P eidem æquari semirecto,

Quadratum enim rami D B ad quadratum rami D A est vt [a] rectangulum N B L ad N D L, sed antecedentia, nempe quadratum rami D B, quod est dimidium totius D E (ob Parabolæ tangentem A E) & rectangulum N B L sunt [b] æqualia, ergo & consequentia, siue quadratum rami D A rectangulo N D L æquale erit, sed huic æquatur [c] rectangulum P D E, ergo & quadratum D A æquale est rectangulo P D E. Quod primò, &c.



a 14. primi huius.

b 18. huius ad num. 6.

c ibidem. ad num. 3.

Insuper quadratum D A, ob Parabolam, æquale est [d] rectangulo sub D B in rectum latus, ergo, & rectangulum P D E æquale est eidem rectangulo, quare D B ad D E est vt D P ad rectum latus, sed D B semissis est totius D E, ergo & D P, segmentum axis a centro Moduli vsque ad basim trianguli circumscripti, dimidio recti lateris æquale erit. Quod, &c.

d 49. primi Conic.

PROPOSITIO XXI.

IN quacunque Coni-sectione, vel Circulo. Si laterales contingentes cuiuslibet trianguli Sectioni circunscripti in directum cum eius semibasibus vtrinque extendantur, atque extensarum termini cum trianguli vertice rectis iungantur; diagonalis, quæ iungit punctum medium basis eiusdem trianguli, & occursum verticalis tangentis cum vna lateralium, si producatur, sibi proximæ iungentium occurret, sed in Circulo reliquæ iungentium æquidistabit.

In Parabola verò, & Hyperbola, atque Ellipsi oblonga, ipsi reliquæ iungentium occurret ad partes Sectioni contrarias.

At in Hyperbola, occurret inter verticales tangentes Sectionum oppositarum.

Et in prolata Ellipsi ad partes centri, ac vltra verticalem tangentem priori oppositam.

Si verò ipsa diagonalis producatur ad partes Sectionis vertici oppositas, hæc, in Parabola, reliquæ tangentium lateralium æquidistabit.

Et in Hyperbola ab ea semper magis remouebitur (nam ad partes verticis simul occurrent).

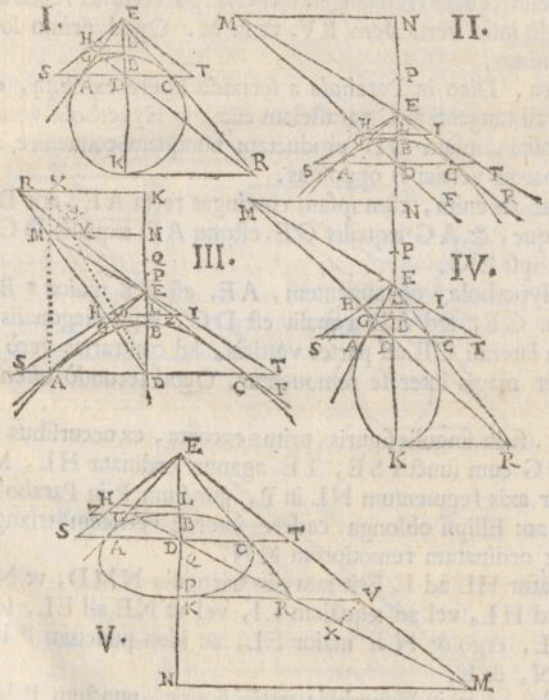
Si tandem ab occursibus eiusdem diagonalis cum vtràque iunctarum ducantur ad productum axem ordinatæ, punctum bisecans segmentum ab ipsis abscissum cadit (in Parabola, in Hyperbola, & Ellipsi oblonga) inter verticem Trianguli circunscripti, & ordinatam a Sectionis vertice remotiorem.

Sed, in Hyperbola, inter centrum Sectionis, & ordinatam vertici propiorem.

Et in Ellipsi prolata, inter Sectionis centrum, & ordinatam vertici remotiorem.

Esto

ESto ABC quæcunque ex præfatis Sectionibus, cuius axis BDK, vertex B, & circunſcriptum triangulum quodcunque AEC, cuius latera EA, EC lateraliter Sectionem contingentia, extendantur in directum cum ſemibaſibus DA, DC in DS, DT, & iungantur rectæ ES, ET, & per B ſit verticalis tangens BG, lateralem EA ſecans in G, iungaturque diagonalis DG, quæ producta ſecabit omnino iunctam ES vt in H. Dico primùm in Circulo, hanc DH alteri iunctæ ET æquidiſtare.



Tangentes enim GA, GB ſunt æquales (*ob Circulum*) ergo EG ad GA eſt vt EG ad GB, vel vt EA ad AD, vel vt SD ipſi EA æqualis ad DA, vel vt TD, æqualis ipſi SD, ad DA, quare DGH iunctæ ET æquidiſtat.

In Parabola verò, Hyperbola, & Ellipſi oblonga, ſecundæ, tertiæ, & quartæ figuræ, lateralis tangens GA maior eſt [a] verticali GB, quare EG ad GA minorem habet rationem, quàm eadem EG ad GB vel quàm EA ad AD, vel quàm SD ad DA, vel quàm TD ad DA: quare TE, DGH conueniunt ſimul in M ad partes Sectioni contrarias.

[a] 87. lib. primi noſtræ Diuin. Max. & Min.

Sed, in Hyperbola (ducta ex K vertice Sectionis oppoſitæ verticali tangente

gente KR) si lateralis contingens CE producatur donec cum KR conueniat in R, etiam diagonalis DG producta conuenit in R, & TE, CR
a 16. huius secant se mutuò in E, ergo occursus M [a] rectarum DGH, TE cadit inter BG, KR verticales tangentes Sectionum oppositarum.

In Ellipsi autem prolata quintæ figuræ, lateralis tangens GA minor est
b. 87. lib. 1. de max. & min. [b] verticali GB, quare EG ad GA maiorem habet rationem quàm eadem EG ad GB, vel quàm EA ad AD, vel quàm SD ad DA, vel quàm TD ad DA, ideoque ET, HGD conueniunt simul ad partes centri Q: sed HGD producta transit per R, [c] in quo contingens verticalis
c Coroll. prop. 16. huius. KR conuenit cum laterali tangente EC; ergo occursus rectarum HGDR, ETV cadit infra verticalem KV, vt in M. Quod primo loco supererat demostrandum.

Præterea. Dico in Parabola a secunda figura exhibita, diagonalem DG laterali tangenti EC parallelam esse, in Hyperbola verò a tertia figura exposita, ipsam GD productam nunquam conuenire cum laterali EC ad partes vertici B oppositas.

d 23. primi Conic. In Parabola enim, cùm ipsam contingat recta AE, erit DB æqualis [d] BE, ideoque, & AG æqualis GE, estque AD æqualis DC, ergo GD æquidistat ipsi EC.

e Coroll. prop. 82. primi noltræ Diuinat. de Max. & Min. At in Hyperbola, ob tangentem, AE, est DB maior [e] BE, ergo & AG maior GE, sed AD æqualis est DC, ergo diagonalis DG conuenit cum laterali CE ad partes verticis, ad contrarias verò, infra AC, hæ semper magis inter se remouentur. Quod secundò ostendere proponebamus.

Insuper, si in singulis figuris, prima excepta, ex occursibus H, M diagonalis DG cum iunctis SE, TE agantur ordinatæ HL, MN. Dico, si bisecetur axis segmentum NL in P, punctum P in Parabola, aut Hyperbola, aut Ellipsi oblonga cadere inter E verticem trianguli circumscripti, & ordinatam remotiorem MN.

Producatur HL ad I. Erit iam, in triangulo NMD, vt ND ad DL, ita MN ad HL, vel ad æqualem LI, vel vt NE ad EL, sed ND maior est DL, ergo & NE maior EL, ac ideo punctum P bisecans NL est inter N, & E.

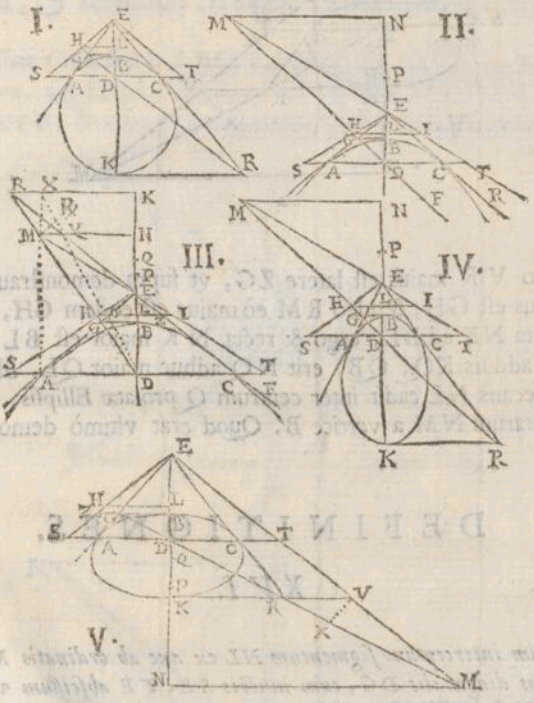
Ampliùs, dico in Hyperbola tertiæ figuræ, punctum P bisecans NL cadere necessariò inter centrum Q datæ Hyperbolæ, & ordinatam HL vertici B propiorem.

Nam si dicatur ordinatam reliquam MN cadere in centrum Q, vel infra, inter Q, & E; manifestè patet propositum. At si MN ceciderit inter K, & Q, ordinata HL secet laterales tangentes AE, CE in O, Z, & ordinata MN lateralem productam CER in Y.

Iam, cùm tam triangula ad verticem MNE, ILE, quàm triangula YNM, ZLE sint interse similia, erit tota MN ad totam LI, vel ad HL, hoc est MD ad DH, in triangulo MDN, vt ablata YN ad ablatam LZ, vel ad LO, ergo & vt reliqua MY ad reliquam HO: si igitur est MD ad DH vt MY ad HO, iuncta DO secans GB in V, si producatur, incidet in Y, & vlteriùs producta secabit RK in X.

Et

Et quoniam in triangulo CRD est CR ad RY, vel DX ad XY vt CD, vel DA ad YM, si iungatur AM & producatur, ipsa cum DY conueniet in X; quare in triangulo AXO, quæ ex M ducitur basi AO æquidistans secat omnino latus OX inter Y, X vt in ℞. Cùm itaque latera triangulorum M℞Y, GOV inter se æquidistent, ipsa triangula similia erunt; ac ideo vt MY ad GV, ita ℞Y ad OV, sed est MY maius latere GV, ergo etiam ℞Y maius est OV, & XY eò maius ipso OV, ac propterea & recta KN maior recta LB, sed tota KQ æquatur



toti QB, (quoniam Q est centrum Hyperbolæ ABC, cuius transuersus axis ponitur KB) ergo reliqua NQ minor est reliquâ QL: quare punctum P bisecans NL cadit inter Q centrum Hyperbolæ, & ordinatam HL vertici B propiorem.

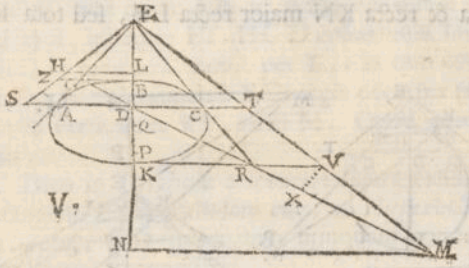
In prolata demum Ellipsi, dico punctum P cadere inter ordinatam MN, & centrum Q.

Producantur ET, EC, donec verticali tangenti KR conueniant in V,R, & ex V agatur VX ipsi ES parallela, & BG producatur ad Z, pariterque GD, quæ ibit [a] per occursum R.

[a] Coroll. prop. 16. huius.

Et quia VK ad KR est vt TD ad DC, vel (his cum æqualibus permutatis

mutatis,) vt SD ad DA, vel vt ZB ad BG, permutando erit VK, ad ZB vt KR ad BG, vel vt KD ad DB, eſtque KD maior DB, ergo KR maior BG, atque item KV maior BZ, ideoque reliqua RV maior reliquà GZ: ſed triangula VRX, ZGH ſunt æquiangula (ob parallelas VR, ZG, & VX, ZH) ergo circa æquales angulos VRX, ZGH erunt latera proportionalia, hoc eſt VR ad RX vt ZG ad GH, ſed



permutando VR maius eſt latere ZG, vt ſupra demonſtrauimus, ergo & RX maius eſt GH, & ideo RM eò maius eſt eodem GH, ſed vt RM ad GH, ita NK ad BL, ergo & recta NK maior eſt BL, quibus æqualibus, additis KQ, QB, erit NQ adhuc maior QL, ideoque punctum P biſecans NL cadit inter centrum Q prolatæ Ellipſis, & remotiorem ordinatarum NM a vertice B. Quod erat vltimò demonſtrandum.

DEFINITIONES.

XVI.

INposterum interceptum ſegmentum NL ex axe ab ordinatis MN, HL ex occurſibus diagonalis DG, cum iunctis SE, TE abſciſſum vocetur MODVLVS EX LATERALI, *ſubintellige ortus, cùm hoc ipſum ſegmentum NL ex ipſa laterali EA, vt in ſuperiori conſtructione explicauimus, ortum ducat.*

Punctum verò P biſecans Modulum NL dicatur CENTRVM MODVLI EX LATERALI.

XVII.

Triangulum verò SET, TRIANGVLVM CIRCVMAVCTVM *nuncupetur.*

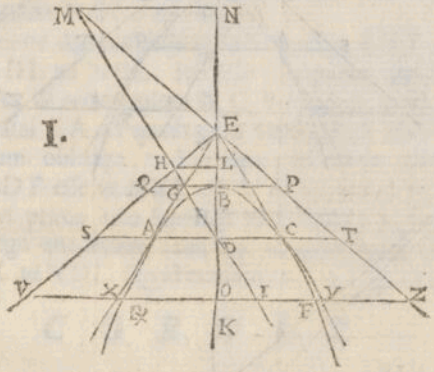
PRO-

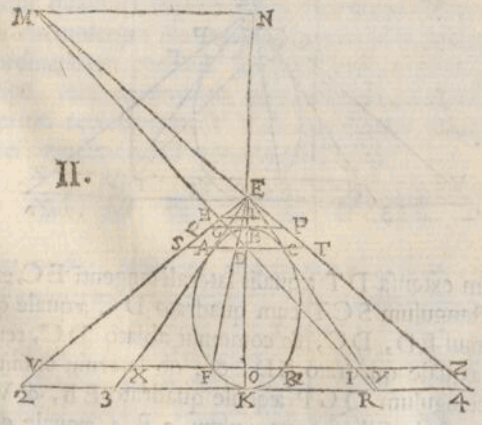
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [68] - 40
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXII.

IN quacunque Coni-sectione. Quadrata ramorum ab origine externa vbicunque data, quæ tamen in Hyperbola sit inter centrum, & verticem, sunt inter se, vt rectangula segmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex lateali interceptorum.

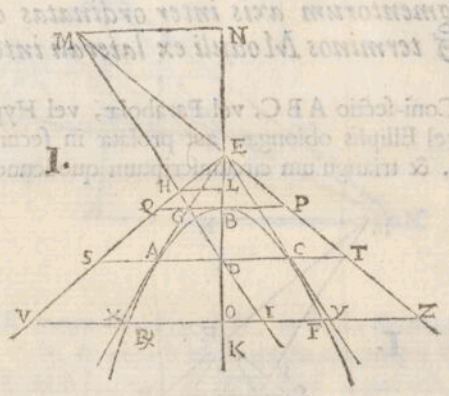
SIT quælibet Coni-sectio ABC, vel Parabolæ, vel Hyperbolæ in prima figura, vel Ellipsis oblongæ, aut prolatæ in secunda, cuius axis BDK, vertex B, & triangulum circumscriptum quodcunque AEC, a

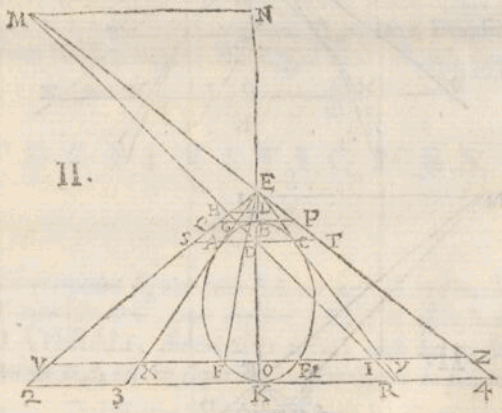




cuius vertice E (quod in Hyperbola cadit a omnino inter centrum, & a ex Conicis verticem) tanquam ab origine sint ad Sectionem ducti quotcunque rami EF, EA, EB. Dico si (constructione peracta simili ac in præcedenti)

inueniatur Modulus NL ex laterali tangente AE ortus, &c. vt apparet in figuris, & ex ramorum terminis ducantur ordinatæ, &c. quæ productæ secent diametrum in O, D, B, &c. iuncta verò latera ES, ET circumacti trianguli SET in V, Z, & in Q, P, &c. atque productam diagonalem GD in I, & Sectionem tandem in F, ℞. Dico inquam quadrata ramorum EF, EA, EB, &c. esse inter se vt rectangula NOL, NDL, NBL, &c.





Cùm sit enim extensa DT æqualis laterali tangenti EC, erit quadratum DT, siue rectangulum SCT cum quadrato DC æquale quadrato EC, siue duobus simul ED, DC, & communi ablato DC, remanet rectangulum SCT æquale quadrato ED, & (ob laterum omnium proportionalitatem) rectangulum QGP æquale quadrato EB, & VYZ æquale quadrato EO, & in Ellipsi rectangulum 2R4 æquale quadrato EK. Quod memento.

Et quoniam quadratum tangentis BG ad rectangulum ℞XF, vel ad rectangulum X℞Y est vt [a] quadratum GA ad AX, vel vt quadratum BD ad

a 16. tertij, Conic.

BD ad DO, vel vt prædictum quadratum BG ad quadratum OI (in similibus triangulis ad verticem GDB, IDO) erit rectangulum XBY æquale quadrato OI, quibus addito, vel dempto communi rectangulo FIB erit rectangulum XIY æquale quadrato OB, vel quadrato OF. Hisq; denuo æqualibus additis, nempe rectangulo VYZ & quadrato EO, (quæ superiùs æqualia demonstrauimus) erunt duo simul XIY, & VYZ nempe vnicum rectangulum VIZ æquale duobus simul quadratis OF, EO, siue vnico quadrato rami EF. Simili modo inter singula ramorum quadrata, & huiusmodi rectangula æqualitas ostendetur; Sed ratio rectangulorum VIZ, SDT componitur ex ratione rectæ VI ad SD, vel IH ad HD, vel OL ad LD, & ex ratione IZ, ad DT, vel IM, ad MD, vel ON, ad ND, atque ex his rationibus OL ad LD, & ON ad ND componitur quoque ratio rectangulorum NOL ad NDL, ergo rectangulum VIZ, vel sibi æquale quadratum rami EF ad rectangulum SDT, vel ad sibi æquale quadratum SD, vel ad quadratum rami tangentis EA est vt rectangulum NOL, ad NDL.

Item eàdem ratione demonstrabitur rectangulum SDT ad QGP esse vt rectangulum NDL ad NBL, sed SDT æquatur quadrato SD, siue quadrato rami EA, & rectangulum QGP æquatur quadrato rami EB, ergo quadratum rami EA ad quadratum rami EB est vt NDL ad NBL.

In Ellipsi tandem oblonga, vel prolata pari modo ostenditur rectangulum 2R4 ad SDT esse vt NKL ad NDL, sed 234 æquatur quadrato rami EK (vt primo loco superiùs monuimus) & SDT quadrato SD, vel EA, ergo quadratum rami EK ad quadratum rami EA est vt rectangulum NKL ad NDL. Quod tandem erat in singulis demostrandum.

COROLL.

HInc sequitur quadrata segmentorum axis Coni-sectionis a vertice trianguli circumscripti sumptorum æqualia esse rectangulis, singula singulis sub ordinatarum partibus inæqualissimis a lateribus trianguli, tum circumscripti, tum circumaucti comprehensis. Ostensum est enim primò in superiori rectangulum VYZ æquale esse quadrato segmenti axis EO, & rectangulum SAT quadrato ED, &c.

MONITVM.

ALia quoque ex hoc, veluti ex aliquibus præcedentium, atque ex plurimis consequentium Theorematum, vtilia admodum in Geometricis, tanquam Corollaria, elici poterant; ex præsenti videlicet, rectangulum XBY æquale quadrato OI. Rectangulum XIY æquale quadrato OB, ac rectangulum VIZ æquale quadrato EF; hisque similia, & qualia in primo, & secundo libro editæ Diuinat: in quintum Apollonij, pluribus in locis, de potestatibus linearum obiter explicauimus in ipsis Problematum, & Theorematum demonstrationibus, verumtamem cum non omnes ex huiusmodi proprietatibus ea respiciant, quæ huc pertractanda suscepimus, illas tantùm indicandas elegimus, quæ ad institutum faciant.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [71] - 43
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXIII.

IN Parabola. Semibasis trianguli circumscripti potest rectangulum sub axe trianguli in segmentum eiusdem inter sui verticem, & centrum Moduli ex laterali comprehensum.

Segmentum autem huiusmodi, semirecto Parabolæ æquale est.

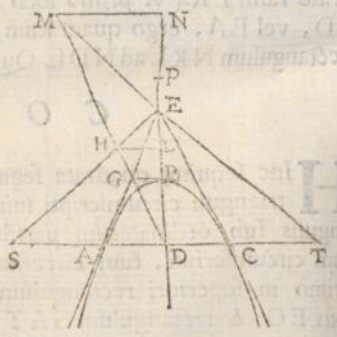
ESto Parabola ABC, cuius axis BD, vertex B, & triangulum circumscriptum quodcunque AEC, sitque NL Modulus ex laterali tangente EA extensa in DS &c. prout in præcedenti explicatum fuit, & Moduli centrum sit P. Dico primùm quadratum semiordinatæ AD, quæ est semibasis circumscripti trianguli AEC, rectangulo DEP æquale esse.

a 21. huius

Nam quadratum rami EB ad quadratum rami EA est vt[a] rectangulum NBL ad NDL, sed antecedentia, hoc est quadratum ipsius EB (quæ dimidium est totius ED, ob AE tangentem Parabolam) & rectangulum NBL sunt[b] æqualia, ergo & consequentia, hoc est quadratum EA, siue duo simul ED, DA æqualia erunt rectangulo NDL, siue rectangulo[c] PDE, vel æqualia rectangulo PED cum quadrato ED; ex his itaque communi ablato quadrato ED, remanet quadratum DA æquale rectangulo sub DE, EP.

b 20. huius ad num. 6.

c 20. huius ad num. 6.



Dico ampliùs segmentum EP inter verticem circumscripti trianguli, & centrum Moduli ex laterali, semirecto Parabolæ æquale esse.

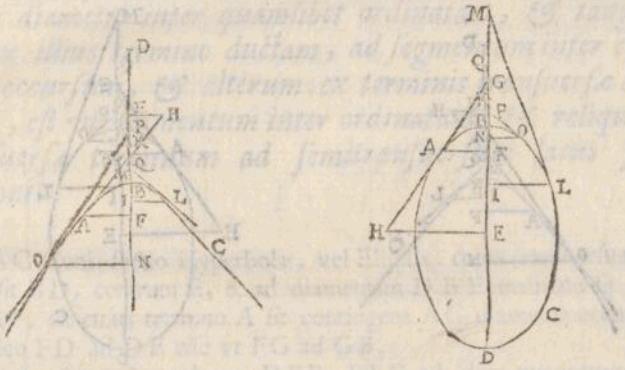
Quadratum enim DA æquatur rectangulo sub DB in rectum latus, sed idem quadratum DA æquale nuper ostensum est rectangulo sub dupla DB, hoc est sub DE in EP, ergo sub DP in rectum latus æquale erit ei, quod sub DE in EP, sed est DB dimidium DE, ergo & EP est recti dimidium. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

IN Hyperbola, & Ellipsi. Segmentum maioris axis inter centrum, & tangentem a termino ordinatæ ex foco ductam, ad segmentum eiusdem inter tangentem, & focum, est vt transuersum Sectionis latus ad rectum.

ESto Hyperbola, vel Ellipsis ABC, cuius centrum E, axis BD, focus F, semiordinata ex foco FA, & tangens ad A sit HA, quæ producta axi occurrat in G. Dico EG ad GF esse vt transuersum Sectionis ABC ad suum rectum.



Ordinetur ex centro E recta EH tangenti occurrens in H. Et quoniam AF semiordinata ex foco æqualis est [a] semirecto suæ Sectionis, & EH ordinata ex centro æqualis est [b] semitransuerso EB; & vt EH ad AF, ita est EG ad GF (in triangulo HGE,) ergo EG ad GF est vt semitransuersum ad semirectum, vel vt transuersum DB ad rectum Sectionis latus. Quod erat, &c.

a 1. huius.
b 12. huius ad num. 7.

SCHOLIVM.

IIsdem positis, ac demonstratis ostendendæ occurrunt conclusiones, quæ sequuntur.

1. Quum sit EG ad GF vt transuersum ad rectum, erit, in Ellipsi, diuidendo, EF ad FG, vt differentia laterum ad rectum.

2. In Hyperbola verò, componendo, erit EF ad FG vt summa laterum ad rectum.

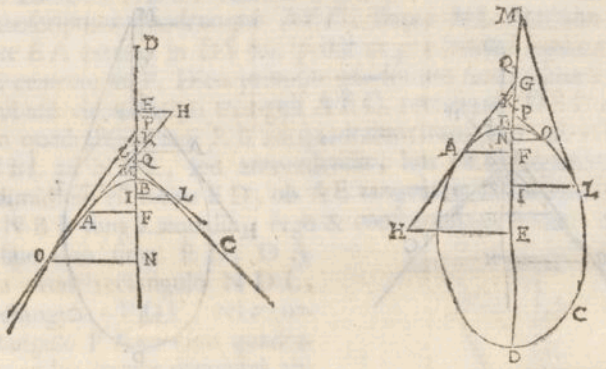
3. In Ellipsi itaque, si sumpto puncto I inter centrum, & focum, fiat vt differentia laterum ad rectum, nempe vt EF ad FG, ita EI, quæ minor est EF, ad aliam IK, hæc quoque minor erit FG, & composita

posita EK minor composita EG: quare si ex I ordinetur IL, ducaturque tangens LM, axi occurrens in M, (cum vtrunque rectangulorum MEI, GEF æquale sit [a] quadrato semidiametri EB) erit ME ad EG vt FE ad EI, sed est FE maior EI, ex constructione, ergo & ME maior EG, sed EG ostensa est maior EK, ergo ME eò maior est ipsa EK.

[a] 37. primi Conic.

4. Si verò in eàdem Ellipsi sumptum punctum sit N, inter verticem, & focum, & fiat vt differentia laterum ad rectum, siue vt EF ad FG ita EN, quæ maior est EF, ad aliam NQ, hæc quoque maior erit FG, & composita EQ maior composita EG. Si igitur ex N ordinetur NO, agaturque tangens OP: (cum vtrunque rectangulorum GEF, PEN, æquale sit [b] quadrato semidiametri EB) erit GE ad EP vt NE ad EF, sed NE maior est EF, ex constructione, ergo & GE maior EP, adeoque EQ, quæ maior est EG, eò maior est ipsa EP.

[b] ibidem.



5. In Hyperbola autem, si sumpto puncto I inter centrum, & focum, fiat vt summa laterum ad rectum, siue vt EF ad FG, ita EI, quæ minor est EF ad aliam IK, hæc minor erit ipsa FG, & reliqua EK minor reliquà EG. Si ergo ex I ordinetur IL, & agatur tangens LM (cum vtrunque rectangulorum MEI, GEF æquale sit [c] quadrato radij EB) erit ME ad EG vt EF ad EI, sed FE maior est EI, ex constructione, ergo & ME maior EG, & eò maior ipsa EK, quæ minor ostensa est eàdem EG.

[c] ibidem.

6. At si in eàdem Hyperbola, sumpto puncto N infra focum, fiat vt summa laterum ad rectum, vel vt EF ad FG, ita EN, quæ maior est EF, ad aliam NQ, hæc quoq; maior erit ipsa FG, & reliqua EQ maior etiam reliquà EG. Hinc si ex N ordinetur NO, ducaturque tangens OP (cum vtrunque rectangulorum GEF, BEN æquale sit [d] quadrato semidiametri EB) erit GE ad EP vt NE ad EF, sed NE maior est ipsa EF, ex constructione, ergo & tota GE maior est EP, adeoque EQ, quæ maior est EG, eò maior est eàdem EP.

[d] ibidem.

7. Præterea, in prima Ellipsis figura: quoniam EG ad GF est vt transuersum ad rectum, vt in Propositione superiori ostensum fuit, erit, per conuersionem rationis, EG ad EF, vel quadratum semiaxis EB ad qua-

quadratum E F distantiæ inter centrum, & focum, vt transuersum latus ad differentiam laterum, quoniam tres EF, EB, EG sunt [a] in eàdem continua ratione. [a] ibidem.

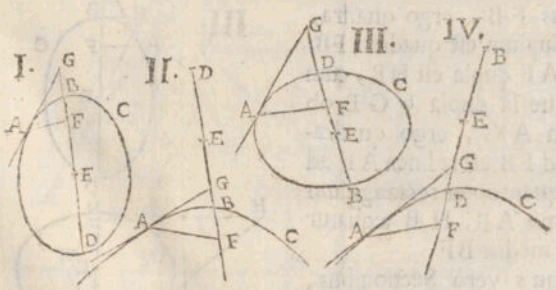
8. In altera denique, Hyperbolæ: cum E G ad GF sit vt transuersum ad rectum, erit E G ad E F vt transuersum ad summam laterum, sed vt EG ad EF ita est quadratum EB ad quadratum EF (quum EG, EB, E F sint [b] in eàdem ratione) ergo quadratum semiaxis E B ad quadratum E F distantiæ inter centrum, & focum est vt transuersum ad summam laterum. [b] ibidem.

PROPOSITIO XXV.

IN quacunque Coni-sectione centrum habente. Segmentum diametri inter quamlibet ordinatam, & tangentem ex illius termino ductam, ad segmentum inter eandem occursum, & alterum ex terminis transuersæ diametri, est vt segmentum inter ordinatam, & reliquum transuersæ terminum ad semitransuersum latus suæ Sectionis.

ESto AC Coni-sectio Hyperbolæ, vel Ellipsis, cuius transuersum latus sit BD, centrum E, & ad diametrum D B F ordinata sit quæcunque AF, ex cuius termino A sit contingens A G diametro occurrens in G. Dico FD ad DE esse vt FG ad GB.

Vtrunque enim rectangulorum DFB, EFG ad idem quadratum AF



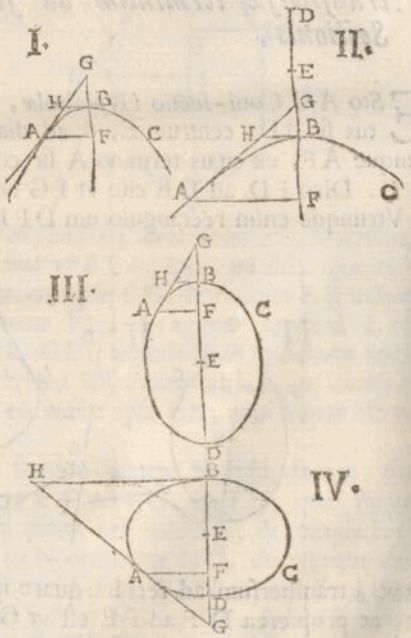
est vt [c] transuersum ad rectum: quare ipsa rectangula inter se sunt æqualia, ac propterea D F ad F E est vt GF ad F B, & per conuersionem rationis in prima, & secunda figura; componendo verò, per conuersionem rationis, & conuertendo in tertia; at conuertendo, diuidendo, & conuertendo iterum, in quarta, erit FD ad DE vt F G ad GB. Quod erat, &c. [c] ex 21 & 37. primi Conic.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

IN quacunque Coni-sectione. Segmentum diametri a vertice sumptum, quod semirecto Sectionis lateri sit æquale, potest rectangulum sub semiordinata ex diametri segmento in semiuerticalem tangentem, vsque ad lateralem, ductam ex termino semiordinatæ. Oportet autem in Ellipsi prolata, quod ipsius semirectum latus minus sit suo transuerso.

ESto A B C Coni-sectio Parabolæ, vt in prima figura; vel Hyperbolæ vt in secunda; vel Ellipsis oblongæ vt in tertia; vel Prolatæ vt in quarta (quæ tamen talis sit vt ipsius transuersum latus maius sit suo semirecto) quarum diameter transuersa sit B D, centrum E, vertex B, sitque in omnibus segmentum B F æquale semirecto lateri suæ Sectionis, ac per F sit semiordinata F A, & verticalis tangens B H, laterali tangenti A G occurrens in H. Dico quadratum B F rectangulo sub A F, H B æquale esse.



Producatur A H diametro occurrens in G.

a 11. primi Conic. Iam, in Parabola, quadratum A F æquale est a rectangulo sub F B in rectum latus, siue in duplum ipsius F B, ergo quadratum A F duplum est quadrati F B,

b 33. primi Conic. sed linea A F dupla est H B, cùm F G quoque sit dupla b G B, ob tangentem A G, ergo quadratum A F ad F B est vt linea A F ad ad H B: quapropter rectangulum sub extremis A F, H B æquatur quadrato mediæ B F.

c 12. 13. primi Conic. In reliquis verò Sectionibus, quadratum A F ad rectangulum D F B est vt c semirectum B F (ex constructione) ad semitransuersum B E, & rectangulum D F B ad quadratum B F est vt linea D F ad F B, ergo ex æquali in ratione perturbata, quadratum A F ad F B est vt linea D F ad

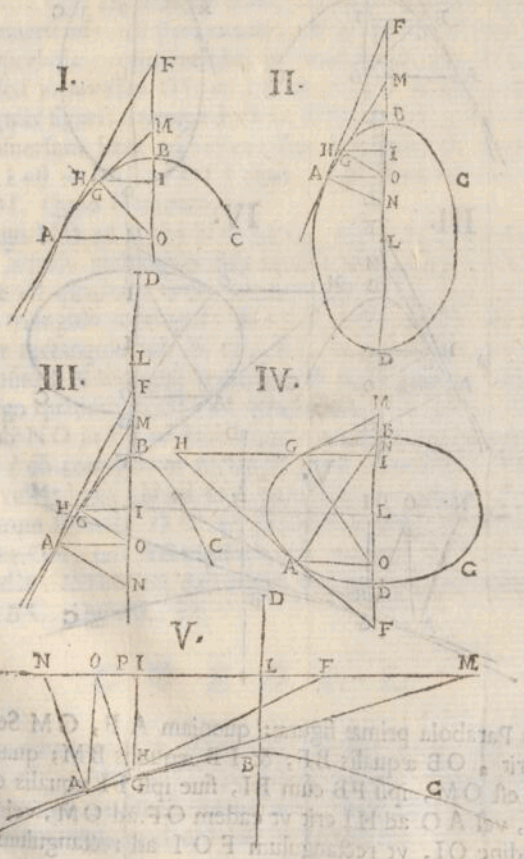
d 25 huius B E, vel ad D E, sed D F ad D E est vt d F G ad G B, ergo quadratum A F ad F B est vt linea F G ad G B, vel vt linea A F ad H B: rectangulum ergo sub A F, H B æquatur quadrato segmenti B F semirecto æqualis. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

IN quacunque Coni - sectione. Normalis quælibet super ipsam Sectionem ab ea, & a quouis axium terminata, potest rectangulum sub semiordinata ex occursu normalis cum axe in semiordinatam per occursum eiusdem cum Sectione, & inter axem, & tangentem ductam ex termino prædictæ ordinatæ ex occursu, comprehensam.

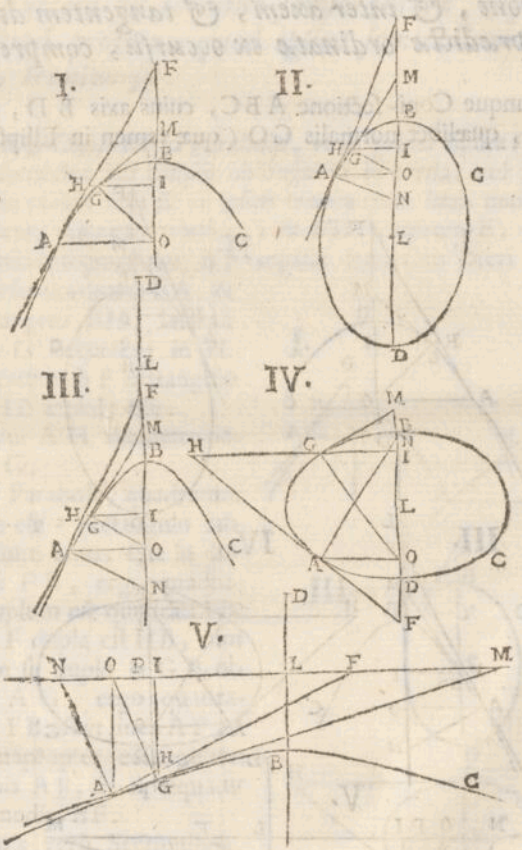
SIT in quacunque Coni-sectione ABC, cuius axis BD, vertex B, centrum L, quælibet normalis GO (quæ tamen in Ellipsi prolata



sit aliqua earum, quarum occursus O cum minori axe BD intra Ellipsim cadat, pro cuius determinatione consulas ea, quæ circa maximas, &

minimas lineas demonſtrauimus in prolata Ellipſi in edita Diuinat: in V. Apoll:) atque ex ipſius normalis occurſu O, cum axe tranſuerſo D B, vel cum axe ſibi coniugato, vt in quinta figura, ſit ſemiordinata O A, & ad A Sectionem contingat A F prædicto axi occurrens in F, per G verò ſit alia ordinata H I. Dico quadratum normalis G O, rectangulo ſub O A in I H inter axem, & tangentem A F interceptam æquale eſſe.

Ducatur ex G, in omnibus Sectionibus, contingens G M axi, in quo eſt origo O rami O G, occurrens in M.



Iam, in Parabola primæ figuræ: quoniam A F, G M Sectionem contingunt, erit [a] O B æqualis B F, & I B æqualis B M; quare O B cum B M, hoc eſt O M, ipſi F B cum B I, ſiue ipſi F I æqualis erit, ideoque O F ad F I, vel A O ad H I erit vt eadem O F ad O M, vel ſumpta communi altitudine O I, vt rectangulum F O I ad rectangulum M O I, ſed F O I æquatur quadrato ſemiordinatæ O A (quadratum enim O A æquatur [b] rectangulo ſub O B in rectum latus, vel ſub dupla ipſius O B, quæ

[a] 33. primi Conic.

[b] 11. primi Conic.

eſt

est FO, in dimidium recti, quod est [a] OI) ergo AO ad HI erit vt quadratum eiusdem AO ad rectangulum NOI, vel ad sibi æquale quadratum OG (ob triangulorum MOG, GOI similitudinem) Quum itaque quadratum primæ AO ad quadratum secundæ OG sit vt prima AO ad tertiam HI, erit rectangulum sub extremis AO, HI æquale quadrato mediæ, seu minimi rami, vel normalis OG. Quod erat in Parabola demonstrandum.

[a] ex 20. sec. nostri de Max. & Min.

In reliquis verò figuris ducatur ex A super tangentem AF normalis AN, axi, in quo est origo O, occurrens in N.

Et cum ob tangentes AL, GM, & ordinatas ex contactibus AO, GI, sit vtrunque rectangulorum MLI, FLO æquale [b] quadrato semiaxis transuersi LB, vel in quinta figura quadrato semiaxis coniugati LP, ipsa rectangula MLI, FLO inter se æqualia erunt, quare ML ad LO est vt FL ad LI, & in secunda figura oblongæ Ellipsis diuidendo, & permutando; in tertia verò Hyperbolæ conuertendo, per conuersionem rationis, & iterum conuertendo, & permutando; & in quarta Ellipsis prolatæ, & in quinta Hyperbolæ, componendo, & permutando erit MO ad FI vt OL ad LI; sed in omnibus OL ad LI est vt NO ad OI (vtraque enim ratio, in singulis figuris, nempe LO ad ON, & LI ad IO est ea quam habet [c] transuersum latus ad rectum suæ Sectionis, ac ideo permutando OL ad LI est vt NO ad OI) ergo, & MO ad FI erit in omnibus vt NO ad OI. Quod memento.

[b] 37. 38. primi Conic.

[c] ex 22. & 23. de Max. & Min.

Cùm sit ergo NO ad FI vt NO ad OI, erit rectangulum sub extremis MO, OI æquale rectangulo sub medijs NO, FI, sed rectangulum MOI æquale est quadrato OG (cùm OG sit media proportionalis inter NO, OI in triangulo rectangulo MGO, &c.) ergo, & quadratum OG æquatur rectangulo sub NO, FI, at quadratum perpendicularis OA super basim FN trianguli rectanguli FAN æquatur rectangulo sub NO, OF, ergo quadratum OG ad quadratum OA est vt illi æquale rectangulum sub NO in FI ad huic æquale rectangulum sub eàdem NO in OF, hoc est (ob communem rectangulorum altitudinem NO) vt linea FI ad FO, vel vt linea IH ad OA parallelas in triangulo FOA. Cùm igitur quadratum secundæ OG ad quadratum tertiæ OA sit vt prima IH ad tertiam OA, erit rectangulum sub extremis IH, OA æquale quadrato mediæ, seu minimi dati rami, vel normalis OG super datam Sectionem ABC. Quod L. D.

COROLL.

QVod superiùs speciatim monuimus, nempe MO ad FI (in singulis figuris) esse vt NO ad OI, id ipsum, tanquam Corollarium pro sequentibus in simili normalium, seu minimorum ramorum, ac tangentium dispositione haud erit inutile meminisse.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [79] - 51
PUBLIC DOMAIN

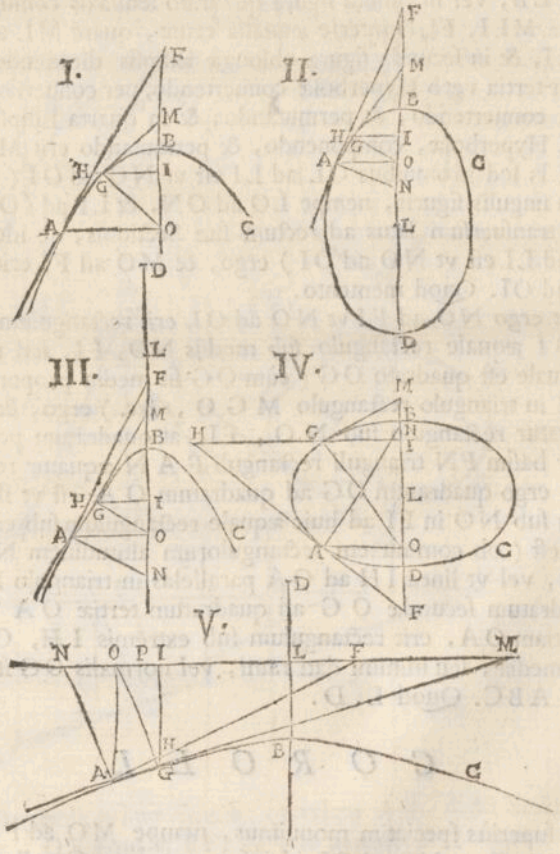
SCHOLIVM.

SI itaque nota fuerit ratio inter NO, & OI in ſingulis figuris, (prima excepta) nota quoque erit monita ratio inter MO, & FI.

1. Dico igitur in ſecunda, & quarta Ellipſium figura, normalium, ſeu minimorum ramorum NA, OG contiguas altitudines NO, OI eſſe inter ſe vt eſt differentia laterum Ellipſis ad ſuum tranſuerſum.

Cùm ſit enim, in Ellipſi oblonga, tam LI ad IO, quàm LO ad ON vt [a] tranſuerſum ad rectum, erit per conuerſionem rationis tam IL ad

[a] 22. & 23. ſec. de Max. & Min.



LO quàm OL ad LN vt tranſuerſum ad differentiam inter ipſa latera. Cùm ſint ergo tres LI, LO, LN in eàdem ratione tranſuerſi ad differentiam, & ipſarum proportionales differentiæ IO, ON in eàdem erunt ratione tranſuerſi ad differentiam, & conuertendo NO ad OI erit vt differentia laterum ad tranſuerſum.

In

In Ellipſi autem prolata. Quum ſit pariter LO ad ON vt LI ad IO (vtraque enim ratio eſt a tranſuerſi ad rectum) conuertendo NO ad OL erit vt OI ad IL, & vtraque in ratione recti ad tranſuerſum; & permutando NO ad OI erit vt OL ad LI; ſed OL ad LI eſt vt differentia laterum ad tranſuerſum (nam componendo OI ad IL oſtendimus modò eſſe vt rectum ad tranſuerſum) ergo, & NO ad OI eſt vt differentia laterum ad tranſuerſum. a ibidem.

2. Ampliùs in tertia Hyperbolæ, Dico NO ad OI eſſe vt ſumma laterum ad tranſuerſum.

Eſt enim tam NO ad OL, quàm OI ad IL vt b rectum Hyperbolæ ad tranſuerſum, ergo componendo tam NL ad LO, quàm OL ad LI, & quàm differentia harum trium proportionalium, nempe NO ad OI erit vt ſumma laterum ad tranſuerſum. b ex 22. ſec. de Max. & Min.

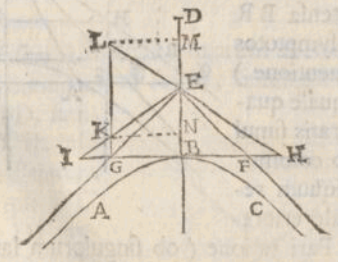
3. Denique in quinta. Dico NO ad OI eſſe vt ſumma laterum ad rectum.

Cùm enim tam NO ad OL, quàm OI ad IL ſit vt c tranſuerſum Hyperbolæ ad ſuum rectum, componendo tam NL ad LO, quàm OL ad LI, & quàm differentiæ harum trium proportionalium, ſiue NO ad OI erit vt ſumma laterum ad rectum. c ibidem.

DEFINITIONES.

XVIII.

SI Hyperbolam ABC, cuius axis tranſuerſus DB, centrum E, per verticem B ſit contingens, quæ Aſymptotos EF, EG ſecet in F, G, ſintque ex vtràque parte ſumptæ GH, GI lateribus EF, EG æquales, atque ex G ſit ducta GKL axi DB parallela; conſtat hanc neceſſario ſecare vtranque iunctarum EI, EH, quoniam HE ſecans alteram parallelarum BE, pro-



ducta ſecat, & reliquam GR, vt in L, ſecans priùs IE vt in K. Si itaque ex K, L ordinentur ad axem rectæ KN, LM, ſegmentum ex eo abſciſſum MN, (quod in ſequenti minus eſſe tranſuerſo axe DB, atque a centro E bifariam ſectum demonſtrabitur) dicatur MODVLVS EX ASYMPTOTO, *cuius centrum eſt idem punctum E.*

XIX.

Triangulum verò EFG, ab Aſymptotis, & verticali tangente conſtitutum, TRIANGVLVM ASYMPTOTALE.

XX.

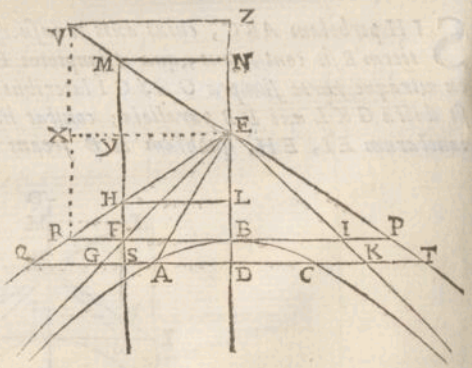
XX.

Triangulum denique HEI eiuſdem altitudinis EB cum triangulo Aſymptotali, & cuius ſemibaſes BH, BI æquales ſunt lateribus EF, EI, vtraque vtrique, dicatur ASYMPTOTALE CIRCVMAVCTVM.

PROPOSITIO XXVIII.

IN Hyperbola. Quadrata ramorum ab origine in centro ſunt inter ſe vt rectangula ſegmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex Aſymptoto interceptorum. Centrum verò Moduli cum centro datæ Hyperbolæ congruit,

SIT Hyperbola ABC, cuius axis BD, vertex B, centrum E, axis tranſuerſus BZ, triangulum Aſymptotale FEI, & circumauctum Aſymptotale REP, Modulus verò ex Aſymptotis EF, EI ſit LN, & præter minimum ramum EB ex centro ſit ad Hyperbolam ABC alius quicunque ramus EA. Dico quadrata ramorum EA, EB, &c. eſſe inter ſe vt rectangula NDL, NBL.



Ducatur ex A ordinata ad axem, quæ iunctas ER, EB ac productas ſecet in Q, T; Aſymptotos in G, K; Sectionem in C, axem in D, & FHM determinantem Modulum in S.

Iam, quum ſit extenſa BR æqualis ſegmento Aſymptotos EF (ex Moduli inuentione) erit quadratum BR æquale quadrato EF, ſiue quadratis ſimul EB, BF, & dempto communi quadrato BF reliquum rectangulum RFP æquale erit reliquo quadrato EB. Pari ratione (ob ſingulorum laterum proportionalitatem) demonſtrabitur rectangulum QGT æquale quadrato ED.

[a] 10. ſecundi Conic.

Inſuper rectangulum GAK æquatur [a] quadrato FB; ſi his igitur addatur, vel ab ipſis ſubtrahatur, prout opus fuerit, rectangulum ASK, erit rectangulum GSK æquale quadrato ſemiordinatæ AD; ſed rectangulum QGT æquale nuper oſtenſum eſt quadrato ED, ergo rectangulum QGT cum rectangulo GSK, ſiue vnicum QST æquale eſt duobus ſimul quadratis AD, DE, vel vnico quadrato rami EA.

Et quoniam ratio rectangulorum QST, RFP componitur ex ratione

QS

QS ad RF, siue SH ad HF (in triangulo QHS) siue DL ad LB, & ex ratione ST ad FP, vel SM ad MF (in triangulo S M T) vel ex ratione DN ad NL, ex his verò rationibus componitur & ratio rectanguli NDL ad NBL, ergo rectangulum QST ad RFP, siue (ob æqualitatem) quadratum rami EA ad quadratum rami EB, est vt rectanlum NDL ad rectangulum NBL. Quod erat primò, &c.

Præterea: ductis per F, R axi DE parallelis, quæ productam PE fecent in V, M, & rectam ex E ipsi RP æquidistantem in X, Y; erit in triangulo RPV, vt RB ad BP, ita VE ad EP, vel ita VX ad XR, vel ita MY ad YH, vel ita NE ad EL, sed est RB æqualis BP, ergo & NE æqualis est EL: punctum ergo E, datæ Hyperbolæ centrum, est quoque centrum Moduli NL ex Asymptoto, sed EL minor est EB, ergo, & EN minor EZ, adeoque totus Modulus NL minor axe transuerso ZB datæ Hyperbolæ. Quod vltimò ostendendum erat.

PROPOSITIO XXIX.

IN Sectionibus oppositis. Si vnam oppositarum, duæ rectæ lineæ contigentes in vnum conueniant, & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in altera Sectione opposita, ducatur linea vni contingentium æquidistans, quæ, & Sectionem, & alteram contingentium secet: erunt quadrata segmentorum huius contigentis inter contactum, & æquidistantes sumptorum, vt rectangulum contentum a segmentis lineæ æquidistanter ductæ inter Sectionem, & contingentem interiectis ad quadratum contingentis sibi parallelæ.

SInt Sectiones oppositæ AB, FD, quarum alteram AB duæ rectæ lineæ AC, BC contingant ad A, B, simulque conueniant in C; & in oppositam Sectione FD, sumpto quolibet puncto D, ab ipso ducatur DF alteri prædictarum tangentium, veluti ipsi BC æquidistans, quæque DF producta cum reliqua tangente AC conueniat in E (conueniet enim proculdubiò cum AC, atque extra Sectionem FD, quoniam AC, secans vnam parallelarum BC, secabit, & reliquam FD, & eadem AC vni oppositarum Sectionum AB occurrens ad tactum A, producta nunquam cum altera Sectione FD conuenit,



a 33. secundi Conic.

nit, sed tota cadit a extra FD) His positis. Dico rectangulum FED ad quadratum BC esse vt quadratum tangentis AE ad quadratum tangentis AC.

Ducantur per A, B Sectionum diametri AHG, BLK, quæ productæ occurrant ipsi FE in G, K; per D verò agatur DNM tangenti ALE æquidistans.

Iam, per primam secundi Conicorum, constat triangulum LBC triangulo ACH, & per sextam eiusdem, triangulum AEG mensali, siue quadrilatero EDNL æquale esse.

Et quoniam quadratum EK ad quadratum KD, est vt triangulum EKL ad sibi simile DKN, erit permutando totum quadratum EK ad totum triangulum EKL vt pars ad partem, siue vt quadratum KD ad triangulum DKN, ergo & reliquum ad reliquum siue rectangulum FED (quod est reliquum quadrati EK super KD, cùm sit FD secta bifariam in K a diametro BK, eique sit adiecta in directum DE) ad quadrilaterum EDNL, siue ad sibi æquale triangulum AEG, vt totum ad totum, siue vt quadratum EK ad triangulum EKL, vel (ob triangulorum EKL, CBL, similitudinem, & proportionalitatem similium figurarum super homologa latera) vt quadratum CB ad triangulum CBL, vel ad sibi æquale triangulum ACH; & permutando rectangulum FED ad quadratum CB, vt triangulum AEG ad triangulum ACH, vel vt quadratum tangentis AE ad quadratum tangentis AC. Quod ostendere propositum fuit in supplementum quoque Propositionis 16. tertij Conicorum.



PROPOSITIO XXX.

IN Oppositis Sectionibus. Si vnam oppositarum duæ rectæ lineæ contingant, & vsque ad occursum productæ versus alteram Sectionem quantunlibet protrahantur, quas, easdemque oppositas secent rectæ lineæ tactuum puncta iungenti æquidistantes; rectangula sub harum integrantibus partibus a Sectionibus, & tangentibus comprehensis, sunt inter se vt quadrata segmentorum vnius ex tangentibus inter ipsas æquidistantes, & punctum contactus interiectorum.

Repe-

REpetita præcedenti figura; ex contactu A ad diametrum KBP ordinetur APΙ (quæ tangenti BC, ipſique parallelæ OE æquidiſtabit) iungaturque IL, (quæ itidem Sectionem continget ad I, per primum Conicorum, & producta ad O nunquam cum Sectione FD conueniet; ex 33. ſec. eorundem) ac producatur DF ipſis IL, AL occurrens in O, E, ſitque tandem quælibet alia ordinatim ducta RX Sectionem AB, tangentes, & diametrum ſecans in S, V; in R, X, & in T. Dico rectangulum ODE ad RSX eſſe vt quadratum ſegmenti AE ex tangente ACE ad quadratum ſegmenti AR ex eâdem ACE.



Nam cùm ſit AP ad KE vt PL ad LK, *vel vt PI ad* KO, ſitque permutando AP æqualis PI, erit quoque EK æqualis KO, ſed eſt DK æqualis KF (cùm BK ſit diameter) ergo & reliqua DE æqualis reliquæ FO; rectangulum igitur ODE, æquale eſt rectangulo FED: ſed rectangulum FED ad quadratum tangentis BC eſt vt [a] quadratum EA ad quadratum AC; quadratum verò BC ad rectangulum VRS, ſiue ad RSX eſt vt [b] quadratum AC ad quadratum AR, ergo, ex æquali, rectangulum ODE, ſiue FED ad rectangulum RSX eſt vt quadratum EA ad quadratum AR. Quod erat demonſtrandum.

[a] 29. huius.

[b] 16. tertij Conic.

SCHOLIVM.

SI verò in Sectione FD fuerit alia quæcunque ordinatim ducta, eam ſecans in Y, & contingentes IL, AL in Q, Z; itidem ex demonſtratis oſtenditur rectangulum ODE ad QYZ eſſe vt quadratum tangentis AE ad AZ.

Habet enim rectangulum ODE ad RSX rationem quadrati AE ad AR, vt in ſuperiori concluſimus, & RSX ad QYZ eſt, ob eandem rationem, vt quadratum AR ad AZ, ex æquo igitur rectangulum ODE ad QYZ eſt vt quadratum AE ad AZ.

Præterea: ſi concipiatur ex vertice 3. diametri BN ducta contingens 34, erit etiam quadratum 34 ad quadratum BO, vt quadratum A4 ad AC; & ad rectangulum RSX vt quadratum A4 ad AR, & ad ODE vt quadratum A4 ad AE.

Nam ob tangentem AL, eſt 3L ad LB, vel 34 ad BC vt [c] 3P ad PB, vel vt A4 ad AC, ergo & quadratum 34 ad BC erit vt quadratum A4 ad AC. Sed BC quadratum ad rectangulum RSX eſt vt quadratum CA ad AR, ergo ex æquali quadratum 34 ad RSX eſt vt quadratum A4 ad AR. Rectangulum verò RSX ad ODE eſt vt quadratum AR ad AE, ergo iterum ex æquali quadratum 34 ad rectangulum ODE eſt vt quadratum A4 ad AE.

[c] 36. primi Conic.

PROPOSITIO XXXI.

IN Sectionibus Oppositis. Si vnius Hyperbolæ regulatrix ad alteram partem intra oppositam Sectionem producatur, in qua sit quæcunque semiordinata regulatricem secans; ipsius quadratum æquale est rectangulo sub sui segmento inter regulatricem ac diametrum interposito, & segmentum diametri inter ipsam semiordinatam, & Hyperbolam, cuius data est regulatrix.



SInt oppositæ Sectiones A B C, D E F, quarum communis transuersa diameter E B, & ipsius A B C sit vertex B, rectum latus B G ad B contingenter positum, & regulatrix E G, quæ ad partem oppositæ D E F producatur donec conueniat in I cum qualibet in ipsa semiordinata D K, quæ diametro occurrat in K. Dico quadratum ipsius D K rectangulo B K I æquale esse.

Ducatur ex vertice E contingens E H, & æqualis fiat ipsi B G, iungaturque B H, & producatur donec protractam D K secet in L. Erit ergo B H L regulatrix Sectionis D E F: quare quadratum D K rectangulo E K L æquale est [a] Et quoniam B K ad K L est vt B E ad E H, vel vt E B ad B G, vel vt E K ad K I, erit rectangulum sub medijs E K L, siue quadratum semiordinatæ D K, æquale rectangulo sub extremis B K I. Quod erat, &c.

[a] 12. primi Conic.

PROPOSITIO XXXII.

IN Sectionibus Oppositis. Quadrata ramorum ad vnam Sectionum ab origine in vertice reliquæ oppositarum, sunt inter se vt rectangula segmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex semirecto eiusdem Oppositæ interceptorum.

SInt oppositæ Sectiones A B C, D E F, quarum axis transuersus E B, sitque A B C rectum latus B G contingenter applicatum ad B, & E G regulatrix; B L verò sit ipsius A B C Modulus ex semirecto, inuentus per semirectum angulum E B I, vt in Prop. 13. & Defin. 14. huius; & ex B ad aliam oppositam D E F sit quicunque ramus A F, è cuius termino F sit ad diametrum B E K ordinata F K. Dico quadratum rami B E ad quadratum rami

B F

BF esse vt rectangulum BEL ad rectangulum BKL.

Producantur BI, GE, quibus occurrat producta FK in M, N, & ex E sit contingens, siue ipsi KM parallela EH.



Iam, cùm sit BL æqualis LI (ob semirectos angulos ad B, I in triangulo BLI) erit, & BE æqualis EH, & BK æqualis KM.

Et quoniam quadratum semiordinatæ KF æquale est [a] rectangulo sub BK, KN & est BK æqualis KM, ergo quadratum KF æquale est rectangulo MKN, quibus si vtrinque æqualia quadrata addantur KB, KM, erunt quadrata FK, KB, siue vnicum BF æquale rectangulo NKM cum quadrato KM, siue vnico rectangulo NMK.

[a] 31. huius.

Insuper quadratum EH ad rectangulum NMK habet rationem compositam ex ratione EH ad NM, siue ex IE ad IN, siue ex LE ad LK, & ex ratione EH ad KM, siue ex ratione BE ad BK, ex quibus componitur ratio rectanguli BEL ad rectangulum BKL, ergo quadratum EH ad rectangulum NMK est vt rectangulum BEL ad MKL, sed quadratum EH æquale est quadrato BE, & rectangulum NMK æquale est quadrato BF, vt superiùs demonstrauimus, ergo quadratum BE ad quadratum BF, est vt rectangulum BEL ad BKL. Quod erat, &c.

COROLL.

APparet hinc quadratum rami cuiuscunque BF æquale esse rectangulo sub NM, MK, vel sub NK cum KB in KB.

PROPOSITIO XXXIII.

IN Sectionibus oppositis. Quadrata ramorum ad vnam Hyperbolarum ab origine inter focum, & verticem reliquæ ex oppositis ductorum, sunt inter se vt rectangula segmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex verticali eiusdem oppositæ interceptorum.

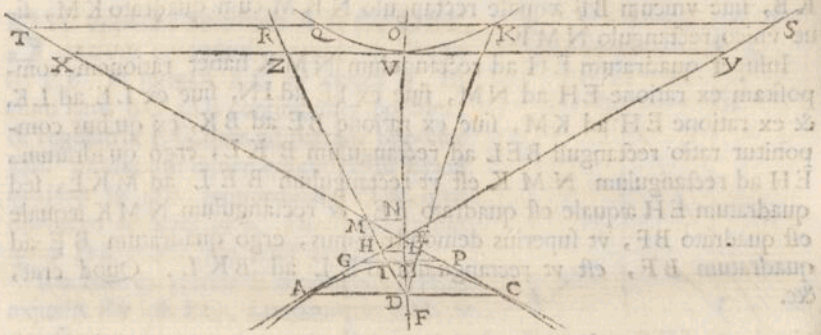
SInt Sectiones oppositæ ABC, QVK, quarum axis transuersus VB, focus verò alterius ipsarum, nempe ABC, sit F, inter quem, & verticem B sit sumpta ramorum origo D, ac per D ordinata ad axem AC, super eam sit triangulum circumscriptum ABC, & iuxta explicata in

Propositione xvij. ac Definitione xv. huius, reperto Modulo LN ex verticali BG transuersim aptata in DI, &c. ab origine D, præter ramum minimum DV, ducatur ad oppositam Sectionem QVK alius quilibet ramus DK, & per K ad axem VO ordinetur KO. Dico quadratum DV ad quadratum DK esse vt rectangulum LVN ad LON.

Producatur GB ad P, atque ex V Hyperbolam QVK contingat recta, quæ productas laterales tangentes AE, CE secet in Y, X, ac diagonalem DI in Z, ex K verò ordinetur TS ijsdem productis occurrens in S, T, R, axi in O, & Sectioni in Q.

Iam quadratum AG ad quadratum AS, vel quadratum DI ad DR est vt [a] rectangulum GBP, siue vt quadratum GB ad rectangulum TKS, sed permutando est quadratum DI æquale quadrato GB (ex Moduli inuentione) ergo & quadratum DR, siue duo simul DO, OR,

a 30. huius,



æqualia sunt rectangulo TKS, vel TQS. His igitur addito, vel dempto, prout requiritur, communi rectangulo QRK, fiet quadratum DO cum quadrato OQ, vel cum OK, siue vnicum DK æquale rectangulo TRS.

Insuper, totum quadratum BP, vel GB ad totum XV est (ob similia triangula PBE, XVE,) vt quadratum BE ad EV, vel (ob tangentem Hyperbolam AE) vt [b] quadratum DB ad DV, vel vt quadratum IB pars quadrati GB, ad quadratum ZV partem quadrati XV, ergo reliquum, siue rectangulum GIP ad reliquum, siue ad rectangulum XZY est vt pars ad partem, siue vt quadratum IB ad ZV, vel vt quadratum DB ad DV, sed permutando rectangulum GIP æquale est quadrato DB (nam totum GB quadratum æquale est quadrato DI, ex Moduli inuentione, vel duobus DB, BI, demptoque communi quadrato IB, remanet rectangulum GIP æquale quadrato DB) ergo, & rectangulum XZY quadrato DV æquale erit: superiùs autem ostensum fuit quadratum DK æquale rectangulo TRS; ergo quadratum DV ad DK est vt rectangulum XZY ad TRS; sed horum ratio componitur ex ratione XZ ad TR, vel MZ ad MR, vel NV ad NO, & ex ratione ZY ad RS, vel HZ ad HR, siue LV ad LO, atque ex his rationibus NV ad NO, & LV ad LO componitur quoque ratio rectanguli LVN ad LON, ergo quadratum DV ad DK est vt rectangulum LVN ad LON, Quod erat, &c.

b 36. primi Conic.

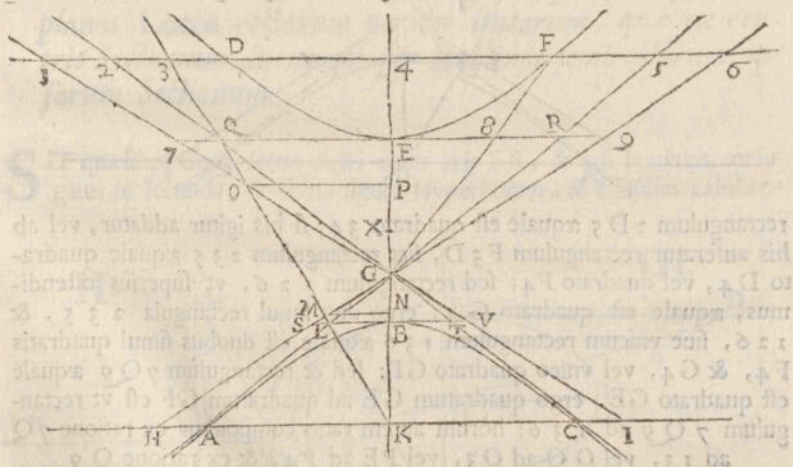
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [88] - 60
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXXIV.

IN Sectionibus Oppositis. Quadrata ramorum ad vnam Hyperbolarum ab origine inter centrum, & verticem reliquæ ex oppositis ductorum, sunt inter se vt rectangula segmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & terminos Moduli ex laterali eiusdem oppositæ interceptorum.

SInt oppositæ Sectiones ABC, DEF, quarum axis transuersus BE, centrum X, inter quem, & verticem B Hyperbolæ ABC sumpta sit origo G, qua facta vertice circumscripti trianguli AGC, & circumaucti HGI, atque (ex declaratis in Propositione xxj. ac Definitione xvj. huius) ducta contingente verticali SBV laterales GA, GC secante in L, T, & diagonali KLMO latera GH, GI secante in M, O, per quæ puncta, ductis MN, OP ipsi LB æquidistantibus, inueniatur sic Modulus



NP ex laterali nuncupatus, qui cadit inter E, B: ab origine verò G, præter minimum ramum GE ad oppositam Hyperbolam DEF sit quicunque alius ramus GF, & per F sit ad axem ordinata F4. Dico quadratum rami GE ad quadratum rami GF esse vt rectangulum NEP ad rectangulum N4P.

Per verticem E oppositæ DEF, sit contingens ER, quæ vtrinque producta lateribus IG, CG, AG, HG protractis occurrat in 7, Q, R, 9, ramo verò GF in 8, atque ordinata F4 prædictas secet in punctis 1, 2, 5, 6, Hyperbolam verò in D.

Iam, constat [a] diagonalem KL cum verticali tangente RE conuenire in eodem puncto Q, in quo conuenit lateralis tangens CG,

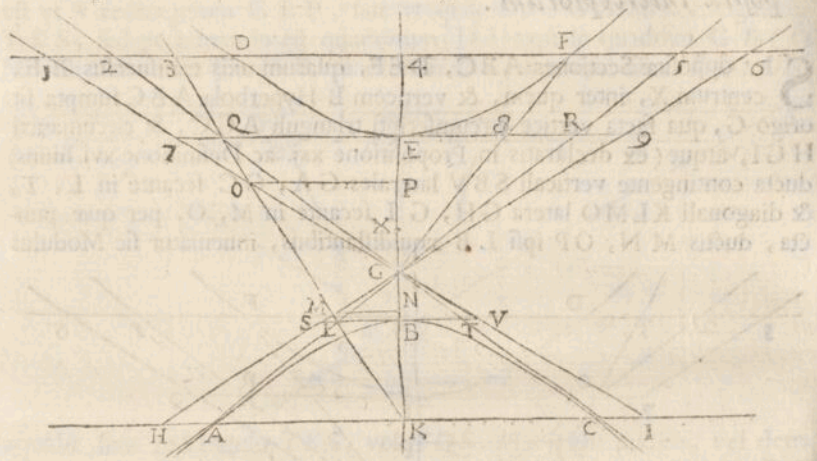
[a] 16. huius.

Et

a Coroll. 22. huius, Et quoniam rectangulum S T V æquale eſt a quadrato ſegmenti axis G B, erit quoque rectangulum 7 Q 9 æquale quadrato G E (latera enim tam rectangulorum, quàm quadratorum ſunt proportionalia) eademque ratione rectangulum 1 2 6 æquale quadrato G 4.

Inſuper in oppoſitis Sectionibus (è quibus alteram A B C duæ rectæ A G, C G contingunt ad A, C, ſimulque conueniunt in G, alteram verò D E F tangit Q R, ac ſecat D F, vtraque ipſi A C tactus iungenti parallela, & lateralibus contingentibus occurrens in Q, R, & in 3, 5;) eſt rectan-

b 30. huius, gulum 2 D 5 ad quadratum L B vt b quadratum 5 A ad quadratum A L, vel vt quadratum 4 K ad K B, vel vt quadratum 3 4 ad idem L B, ergo



rectangulum 2 D 5 æquale eſt quadrato 3 4: ſi his igitur addatur, vel ab his auferatur rectangulum F 3 D, fiet rectangulum 2 3 5 æquale quadrato D 4, vel quadrato F 4; ſed rectangulum 1 2 6, vt ſuperiùs oſtendimus, æquale eſt quadrato G 4, ergo duo ſimul rectangula 2 3 5, & 1 2 6, ſiue vnicum rectangulum 1 3 6 æquale eſt duobus ſimul quadratis F 4, & G 4, vel vnico quadrato G F: ſed & rectangulum 7 Q 9 æquale eſt quadrato G E. ergo quadratum G E ad quadratum G F eſt vt rectangulum 7 Q 9 ad 1 3 6: horum autem ratio componitur ex ratione 7 Q ad 1 3, vel O Q ad O 3, vel P E ad P 4, & ex ratione Q 9 ad 3 6, vel M Q ad M 3, vel N E ad N 4, rationes autem P E ad P 4, & N E ad N 4 componunt quoque rationem rectanguli N E P ad N 4 P, ergo quadratum G E ad quadratum G F eſt vt rectangulum N E P ad N 4 P. Quod oſtendere propoſitum fuit.

DE

DE LOCIS SOLIDIS

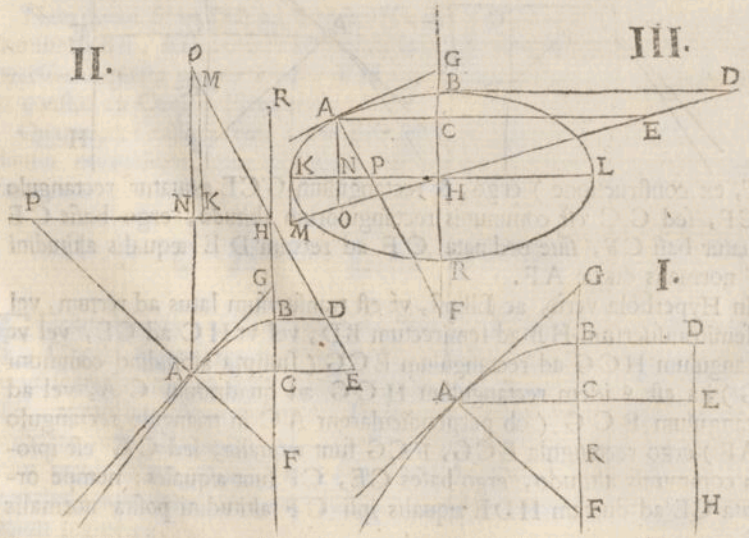
LIBRI PRIMI PARS SECVNDA.

PROPOSITIO XXXV.

IN Parabola, Limes *Ordinationis altitudinum normalium ſuper Sectionem ductarum eſt ad* Locum *planum rectæ lineæ axi parallelæ, ductæ per terminum ſemirecti lateris verticaliter ordinati.*

In reliquis verò Coni-ſectionibus, Circulo non excepto. Limites *Ordinationum altitudinum earundem normalium, tam inter Sectionem, & axem tranſuerſum, quàm inter Sectionem, & axem coniugatum ſumptis, ſunt ad planos* Locos *rectarum pariter linearum, quæ ex centris Sectionum ducuntur per terminos ſemirectorum ipſarum Sectionum.*

SIT quælibet Coni-ſectio AB, cuius axis BR, & ipſi ſemiaxis coniugatus in ſecunda, & tertia figura Hyperbolam, & Ellipſim exhiben-



tibus, ſit HK, & vertex B, ad quem contingat ſemirectum Sectionis latus BD, per cuius terminum D, in prima figura Parabolam repreſentante

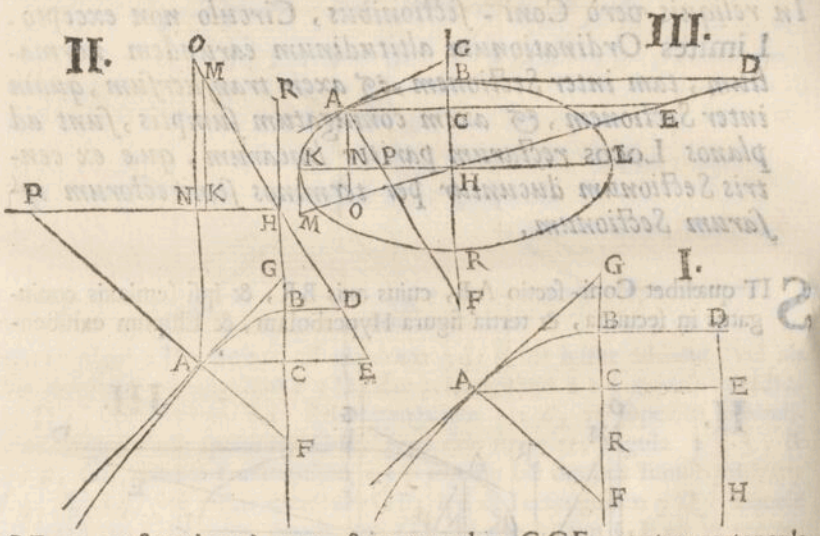
tante, ſit ducta DE ipſi BR parallela, & in ſecunda, & tertia iuncta ſit DH per eundem terminum D ſemirecti, & H centrum Sectionis ducta, quæ vtcunque producatur ad E, M. Dico in ſingulis, rectam HDE eſſe *Limitem* propoſitarum Ordinationum: hoc eſt (ducta ſuper Sectionem qualibet normali AF, & per A ordinata AC, ac producta vſque ad rectam DH) ipſam FC, quæ eſt altitudo eiuſdem normalis FA, interceptæ CE æqualem eſſe.

a 11. & 49. primi Conic.

Ducatur ex A Sectionem contingens AG axi occurrens in G.

Iam, in Parabola, quadratum AC æquale eſt [a] rectangulo ſub CB in duplum ſemirecti BD, vel in duplum oppoſitæ CE ipſi BD æqualis in parallelogrammo BE, vel rectangulo ſub duplo CB, nempe [b] ſub GC in CE, ſed idem quadratum AC æquale eſt rectangulo GCF, (nam eſt AF normalis ſuper AG, ex hypotheſi, & AC normalis ſuper

b 35. primi Conic.



GF, ex conſtructione) ergo, & rectangulum GCE æquatur rectangulo GCF, ſed GC eſt communis rectangulorum altitudo, ergo baſis CE æquatur baſi CF, ſiue ordinata CE ad rectam DE æqualis altitudini CF normalis ductæ AF.

In Hyperbola verò, ac Ellipſi, vt eſt tranſuerſum latus ad rectum, vel vt ſemitranſuerſum HB ad ſemirectum BD, vel vt HC ad CE, vel vt rectangulum HCG ad rectangulum ECG (ſumpta altitudine communi CG) ita eſt [c] idem rectangulum HCG ad quadratum CA, vel ad rectangulum FCG (ob perpendicularem AC in triangulo rectangulo GAF) ergo rectangula ECG, FCG ſunt æqualia, ſed CG eſt ipſorum communis altitudo, ergo baſes CE, CF ſunt æquales; nempe ordinata CE ad ductam HDE æqualis ipſi CF altitudini poſitæ normalis AF.

c 37. primi Conic.

Præterea producatur normalis FA, donec axem coniugatum ſecet in

P.

P, eritque PA normalis a puncto P ſuper Sectionem B A; ductaque ex A ordinata AN ad coniugatum LK, & producta vſque ad occurſum cum protracta DH in O, erit PN altitudo normalis PA, quam dico ordinatæ NO æqualem eſſe.

Nam quum CF, CE æquales ſint oſtenſæ, erit HC ad CF, vel PA ad AF, vel PN ad NH, vt HC ad CE, vel, in ſimilibus triangulis HCE, ONH, vt ON ad eandem NH, ideoque PN, NO interſe ſunt æquales. Quod tandem erat demonſtrandum. Quodque verificatur etiam in Circulo.

ALITER PARS PRIOR.

IN Parabola altitudo CF æqualis eſt ſemirecto lateri BD per Coroll. noſtræ prop. 90. lib. prim. de *Max. & Min.* cui æquatur quoque CE in parallelogrammo CD, ergo CF, CE ſunt æquales.

In Hyperbola autem, ac in Ellipſi, HC ad CF eſt, per Coroll. tertium eiuſdem noſtræ propoſitionis vt tranſuerſum Sectionis ad rectum, vel vt ſemitranſuerſum HB ad ſemirectum BD, vel vt eadem HC ad CE: ergo CF, CE ſunt æquales. Quod, &c.

SCHOLIVM I.

FAcilè hinc eruitur rectam EDO per centrum H Sectionum ductam, eſſe eam ipſam rectam, quæ ducitur per idem centrum, & per punctum M terminum ſemirecti lateris, qui ad ſemiaxem coniugatum HK ordinatim applicatur ex vertice K.

Nam quum ſit vt DB ad BH ita HK ad KM, ſitque DB ſemirectum tranſuerſi BR, BH verò ſemitranſuerſum, & HK ſemiaxis coniugatus, neceſſariò quarta proportionalis KM erit ſemirectum eiuſdem coniugati, vt conſtat ex Conicis Elementis.

Quapropter eadem recta linea EDHO eſt *Limes* Ordinationis altitudinum normalium, tam ad axem tranſuerſum, quàm ad coniugatum factæ.

SCHOLIVM II.

ELicitur quoque in Coni-ſectione centrum habente, vel etiam in Circulo, altitudines normalium ſuper Sectionem ductarum eſſe inter ſe vt ſegmenta axium inter proprias ordinatas, & centrum Sectionis ductas, atque homologè ſumptas. Huius enim ratio eſt quoniam omnes ordinatæ inter Sectionum axes, & *Limitem* DHM Ordinationis altitudinum prædictarum normalium (quæ ipſis normalibus demonſtratæ ſunt æquales) ſunt inter ſe (ob triangulorum ſimilitudinem) vt prædicta axium ſegmenta.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [93] - 65
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXXVI.

IN Angulo rectilineo, cuius alterum laterum fiat axis. Limes *Ordinationis normalium ſuper latus reliquum eſt ad* Locum *planum rectæ lineæ a vertice ductæ extra angulum, cuius aliqua ordinatarum æqualis ſit ſuæ normali in angulo dato.*

SIT angulus rectilineus quicunque A B C, cuius latus B C concipiatur axis, cui occurrant normales ductæ ſuper latus reliquum B A, quarum vna ſit A D; atque ex A ſit ordinata C A E, ſumaturque C E ipſi A D æqualis, & iungatur recta B E. Dico hanc eſſe *Limitem* propoſitum.

Cùm enim obliqua *AD* ſuper *BD* maior ſit perpendiculari A C, erit quoque E C, ipſi AD æqualis, maior ipſa A C, hoc eſt punctum E cadet extra angulum A B C, adeoque, & recta C E.

Si verò ex quocunque alio puncto lateris B A, vt ab F, erigatur F G normalis ſuper B A, & ordinetur per F recta H I; quoniam A D, F G ſunt normales ſuper eandem rectam, inter ſe æquidiſtabunt, quare vt A D ad F G, ita erit AB ad BF, vel ita EC ad IH (ob æquidiſtantes C E, HI) ſed permutando eſt AD, vt ponitur, æqualis ipſi CE, ergo, & F G ipſi HI æqualis, & ſic de ſingulis Quare B E eſt *Limes* propoſitus. Quod, &c.



Non me latet vnico Theor. eademq; ratione ac ſupra oſtendi poſſe Limites *omnium ſimul Ordinationum hoc I. Lib. exhibitos cadere extra Sectiones datas, attamen pro ſingulis propriam demonſtrationem ad inſtitutum tradere opus fuit.*

PROPOSITIO XXXVII.

IN Circulo. Limes *Ordinationis normalium ſuper peripheriam ductarum eſt ad* Locum *planum rectæ lineæ ipſam peripheriam contingentis, atque axi parallelæ.*

ESto Circulus A B C, cuius centrum E, axis B D, cui ſit A G æquidiſtans ducta per A, terminum ſemidiametri E A ipſi E B perpendicularis. Dico hanc A G eſſe *Limitem* propoſitum.

Nil enim clariùs hoc: nam quæcunque normalis ſuper peripheriam, quarum vna ſit F E, incidit in centrum E, & æqualis eſt radio A E, ſiue ſuæ ordinatæ G H. Quare A G eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod, &c.



PROPO-

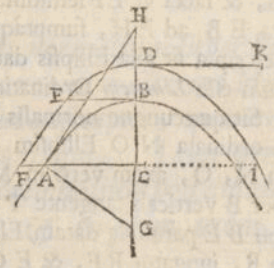
PROPOSITIO XXXVIII.

IN Parabola. Limes *Ordinationis normalium ſuper Sectionem ductarum, eſt ad* Locum *concauum alterius Parabolæ ſibi congruentis, ac ſimul adſcriptæ, & cuius focus ſit in vertice ipſius datæ.*

SIT data Parabola AB, cuius vertex B, axis BC, ipſique in directum poſita ſit BD æqualis quartæ parti recti lateris datæ Parabolæ, cui per verticem D adſcripta ſit alia DEF datæ congruens, & cuius focus erit punctum B (nam ponitur BD pars quarta ſui recti). Dico huius concauum eſſe *Limitem* Ordinationis propoſitæ: hoc eſt ſi fuerit quæcunque normalis AG, & per A ſit ordinata CF, hanc ipſi AG æqualem eſſe.

Ex A, B ducantur contingentes Parabolam AH, BE.

Iam, in Parabola DEF ſemiordinata BE ex foco æquatur [a] ſemirecto lateri, & ob tangentem AH axi occurrentem in H, eſt HC dupla [b] CB, ſed GC quoque altitudo normalis AG, cùm eidem ſemirecto ſit æqualis, dupla eſt ipſius BD (quæ poſita fuit quarta pars recti) ergo tota HG dupla eſt totius DC: quare vt ſubduplum ad ſubduplum, ita duplum ad duplum, nempe vt DB ad DC, vel vt quadratum [c] BE ad CF in Parabola DEF, ita erit linea GC ad GH, vel ita quadratum GC ad quadratum GA, *in ſerie trium proportionalium* GC, GA, GH; Et permutando quadratum BE ad quadratum GC, vt quadratum CF ad GA, vel linea BE ad GC, vt linea CF ad GA, ſed antecedentes ſunt æquales (vtraque enim æquatur eidem ſemirecto) ergo & conſequentes, nempe ſemiordinata CF normali AG æqualis erit, & ſic de ſingulis normalibus, atque ordinatis, &c. quare concauum Parabolæ DEF eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat, &c.



a 1. huius.

b 35. primi Conic.

c 11. primi Conic.

ALITER.

PRoducatur FC ad I, ſitque rectum latus DK.

Iam quadratum totius FC æquatur [d] rectangulo CDK, & quadratum partis AC rectangulo [e] ſub CB, DK, ergo reliquum rectangulum FAI reliquo rectangulo BDK æquale eſt, ſiue quadrato [f] BE, ſiue quadrato ſibi æqualis rectæ CG, quæ pariter æquatur ſemirecto per noſtram 90. lib. prim. de Max. & Min. & addito communi quadrato AC, erit rectangulum FAI cum quadrato AC, ſiue vnicum quadratum FC dimidiæ

d 11. primi Conic.
e ibidem.
f ibidem.

totius FI, æquale duobus ſimul quadratis GC, CA, vel vnico GA; quare & latus lateri, ſiue ſemiordinata CF æqualis normalis GA. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

IN Ellipſi oblonga. Limes *Ordinationis normalium ſuper Sectionem ductarum eſt ad* Locum *concauum alterius Ellipſis datæ concentricæ, ac ſimul adſcriptæ; quarum idem ſit ſecundus, vel minor axis tranſuerſo, vel maiori coniugatus:* Limitis *verò axis maior, ſiue tranſuerſus, ſit linea tertia proportionalis poſt diſtantiam inter focos datæ Ellipſis, & eiuſdem maiorem axem.*

SIT oblonga Ellipſis data LRB, cuius axis maior, ac tranſuerſus BD, minor, atque ei coniugatus AC, centrum E, foci verò F, G, & facta vt EF ſemidiſtantia inter focos ad EB ſemiaxem maiorem, ita EB ad EH, ſumptaque EI ipſi EH æquali, circa axes AC, HI deſcripta ſit alia Ellipſis datæ concentrica AHCI. Dico huius concauum eſſe *Limitem* Ordinationis propoſitæ.



Sit quæcunque normalis LK, & per L ordinata NO Ellipſim AHC ſecans in N, O, axem verò in M: ductaque per B verticali tangente PBQ, & PS ipſi BE parallela datam Ellipſim ſecante in R, iungatur RF, & EQ, quæ ordinatam ſecet in T,

Iam (ob Ellipſes concentricas, & circa eandem coniugatam diametrum AC ſimul adſcriptas) eſt PS ad SR vt [a] HE ad EB, vel (ex Hypotheſi) vt BE ad EF, ſed permutando eſt PS æqualis ipſi BE in parallelogrammo PE, ergo & RS ipſi FE, & reliqua PR reliquæ BF æqualis erit, ſed ipſi quoque æquidiſtat, ergo & RF, PB ſunt æquales, ſed RF ſemiordinata per focum æquatur [b] ſemirecto Ellipſis datæ ABC, ergo & PB, vel BQ eidem ſemirecto æqualis eſt.

[a] 2. huius.

[b] 1. huius.

Et quoniam Ellipſes ABC, AHC ſunt concentricæ, & ſimul adſcriptæ, circa eandem coniugatam diametrum AC, & rectæ PQ, NO ſunt in ipſis ordinatæ, erit rectangulum PBQ ad NLO, vt [c] quadratum BE ad EM, vel in triangulo BEQ, vt quadratum BQ, ad MT, vel ad quadratum MK, quæ eſt altitudo normalis

[c] 3. huius.

malis L K, quæque ordinatæ M T æqualis oſtenſa [a] fuit; ſed permutando rectangulum P B Q æquatur quadrato B Q, ergo & rectangulum N L O quadrato K M æquale erit: his igitur communi addito quadrato M L, erit rectangulum N L O cum quadrato M L, ſiue vnicum quadratum N M, æquale duobus ſimul K M, M L, ſiue vnico K L: quare & ſemiordinata M K in deſcripta Ellipſi A H C normali L K ſuper datam A B C æqualis eſt. Et ſic de ſingulis normalibus, & ſemiordinatis, &c. quapropter deſcripta Ellipſis A H C I eſt *Limes* Ordinationis propoſitæ. Quod erat, &c.

[a] 35. huius.

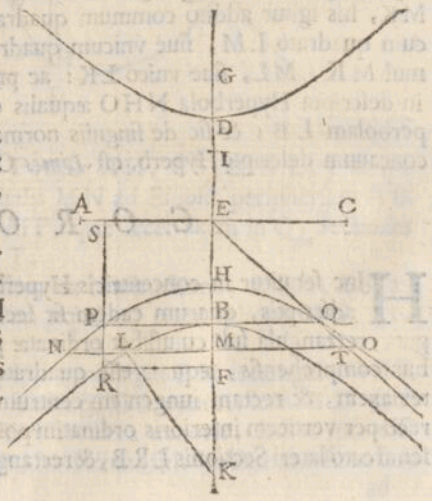
C O R O L L.

HInc apparet in Semiellipſi oblonga A B C *Limitem* Ordinationis ſuarum normalium eſſe ad concauum Menſalis alterius oblongæ Ellipſis, & concentricæ A P Q C, cuius minor baſis P Q æquatur recto lateri datæ Ellipſis, maior verò axi minori A C Ellipſis datæ æqualis eſt.

PROPOSITIO XXXX.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis normalium ſuper Sectionem ductarum eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ, datæ concentricæ, ac ſimul adſcriptæ, quarum idem eſt ſecundus axis tranſuerſo coniugatus;* Loci *verò axis tranſuerſus æquatur tertiæ proportionalium poſt diſtantiam inter focos datæ Hyperbolæ, & eiuſdem axem tranſuerſum.*

ESto data Hyperbola R L B, cuius axis tranſuerſus ſit B D, axis verò coniugatus A C, centrum E, ac foci F, G, & ſumpta E H tertia proportionali poſt E F ſemidiſtantiam inter focos, & E B ſemiaxem tranſuerſum, & facta E I æquali ipſi E H, cum eodem centro E, eodemque coniugato axe A C, cumque tranſuerſo latere I H, per verticem H adſcribatur datæ Hyperbolæ R L B alia Hyperbola N H O. Dico huius concauum eſſe *Limitem* Ordinationis propoſitæ.



Sit normalis quæcunque L K, & per L ſit ordinata N O exter-

nam

nam Hyperbolam secans in N, O, axem verò in M, ac ducta per verticem B contingente PQ, & PS ipsi BE parallela, quæ producta datam Hyperbolam secet in R, iungatur RF, & EQ, quæ producta ordinatam LO secet in T.

Erit itaque (ob concentricas Hyperbolas, & cum eàdem diametro
a 2. huius. coniugata simul adscriptas) vt PS ad SR, ita a HE ad EB, vel, ex constructione, ita BE ad EF, sed permutando in parallelogrammo PE, est PS æqualis ipsi BE, ergo & RS ipsi FE, & reliqua PR reliquæ BF æqualis erit, sed simul æquidistant, ergo RF, PB sunt æquales,
b 1. huius. sed RF per focum semiapplicata æquatur b semirecto lateri datæ Hyperbolæ, quare & BP, siue BQ eidem semirecto lateri æqualis erit.



Præterea, quum Hyperbolæ NH, LB sint concentricæ, ac simul adscriptæ, sitque ipsarum communis diameter coniugata AC, & PQ, NO sint ad EM ordinatim ductæ, erit rectangulum PBQ
c 4. huius. ad NLO vt c quadratum EB ad EM, vel in triangulo MET, vt quadratum BQ ad MT, sed quoniam est BQ æqualis semirecto datæ Hyperbolæ LB, vt superiùs demonstratum fuit, & EQT iungit huius terminum Q, ac centrum E, erit ordinata MT æ-
d 35. huius qualis d ipsi MK altitudini normalis LK: quare & rectangulum PBQ ad NLO erit vt quadratum BQ ad quadratum MK, sed permutando est rectangulum PBQ æquale quadrato BQ, ergo & rectangulum NLO, æquale est quadrato MK, his igitur addito communi quadrato LM, fiet rectangulum NLO cum quadrato LM, siue vnicum quadratum NM æquale quadratis simul MK, ML, siue vnico LK: ac propterea, & semiordinata MN, in descripta Hyperbola NHO æqualis est normali LK super datam Hyperbolam LB; & sic de singulis normalibus, & semiordinatis. Quare concauum descriptę Hyperb. est *Limes* Ordinat. propositæ. Quod erat, &c.

COROLL.

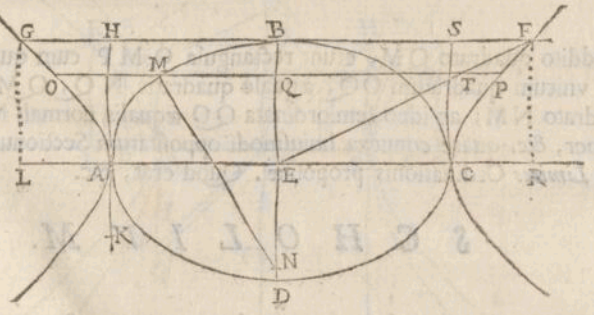
HInc sequitur in concentricis Hyperbolis per diuersos vertices simul adscriptis, quarum eadem sit secunda diameter transuersis coniugata, rectangula sub cuiuslibet ordinatæ partibus integrantibus a Sectionibus comprehensis, æqua[illegible] esse quadrato segmenti ordinatæ eiusdem inter axem, & rectam iungentem centrum Sectionum, ac terminum semirecti per verticem interioris ordinatim positi. Ostensa enim est BQ æqualis semirecto lateri Sectionis LRB, & rectangulum NLO æquale quadrato MT.

PROPO-

PROPOSITIO XXXXI.

IN Ellipſi prolata. Limites *Ordinationum normalium ſuper Sectionem ductarum ſunt ad* Locos *conuexos oppoſitarum Sectionum ſibi concentricarum, ac ſimul adſcriptarum, quarum axis tranſuerſus idem eſt ac maior axis Ellipſis datæ, quique ad rectum latus oppoſitarum eſt vt differentia inter quadratum recti lateris minoris axis, & quadratum maioris, ad quadratum axis minoris.*

ESto Ellipſis prolata *ABC*, cuius centrum E, axis maior A C, minor B D, & huius ſemirectum latus B F contingenter poſitum ad B, cui æqualis ſit producta in directum B G, & vt differentia inter quadratum ſemirecti B F, & quadratum ſemiaxis maioris E A ad quadratum ſemiaxis minoris E B, ita ſit ſemiaxis maior E A ad aliam A K, & centro E cum ſemiaxe tranſuerſo E A, & ſemirecto A K per vertices A, C deſcriptæ ſint oppoſitæ Sectiones A O, C P. Dico harum conuexa eſſe *Limites* Ordinationis propoſitæ.



Ducantur ex A, C, & ex G, F rectæ A H, C S, & G L, F R ipſi B E parallelæ, & ſit quælibet normalis M N ad Ellipſis peripheriam A B, atque ex occurſu M ordinetur O M P, quæ ſecet axem in Q, Sectiones verò in O, P, & iunctam E F in T.

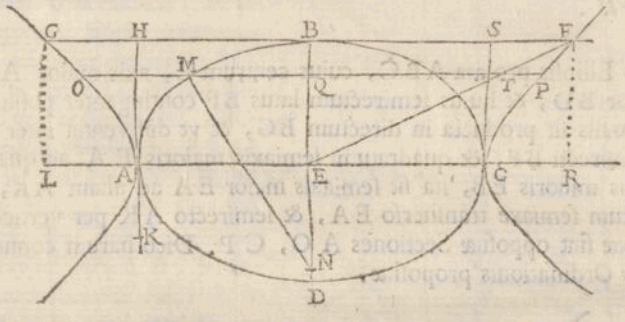
Iam, quum B G, B F ſint æquales, ex conſtructione, & B H, B S (æqualibus E A, E C oppoſitæ) itidem æquales, erunt reliquæ H G, S F, vel A L, C R inter ſe æquales.

Et quoniam quadratum G B ſuperat quadratum B H rectangulo G H F, erit id differentia inter quadratum ſemirecti G B minoris axis B D datæ Ellipſis, & quadratum B H, ſiue E A ſemiaxis maioris, ſed vt ipſa differentia G H F ad quadratum E B, ita factum fuit ſemitranſuerſum E A

ad

ad ſemirectum A K oppoſitarum A O, C P, & vt ſemitranſuerſum E A
a 21. primi Conic. ad ſemirectum A K, ita eſt a rectangulum C L A, vel L A R ad quadratum ſemiordinatæ ex L in Hyperbola A O, ergo rectangulum G H F ad quadratum E B eſt vt rectangulum L A R ad quadratum ſemiordinatæ ex L, ſed permutando rectangulum G H F, L A R ſunt æqualia, ergo & quadratum E B quadrato ſemiordinatæ ex L, ſiue ipſa E B ipſi ſemiordinatæ æqualis erit. Quare huiuſmodi Hyperbola A O neceſſariò tranſit per G; pariterque C P tranſit per F,

b 3. huius. Præterea rectangulum G B F ad O M P eſt vt b quadratum B E ad E Q, vel vt quadratum B F ad Q T, ſed permutando eſt rectangulum G B F æquale quadrato B F, ergo, & rectangulum O M P æquale eſt quadrato
c 35. huius. Q T, ſiue quadrato c Q N altitudinis normalis M N: his itaque commu-



ni addito quadrato Q M, erunt rectangula O M P cum quadrato M Q, ſiue vnicum quadratum O Q, æquale quadratis N Q, Q M, ſiue vnico quadrato N M; ac ideo ſemiordinata Q O æqualis normali N M; Et hoc ſemper, &c. quare conuexa huiuſmodi oppoſitarum Sectionum A O, C P ſunt *Limites* Ordinationis propoſitæ. Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

HInc, niſi rectum latus inueniendorum *Limitum* ſtatuendum ſit, ſatis erit cum centro E per vertices A, C, tranuerſi axis A C, & per puncta G, F, terminos ſemirectorum laterum B G, B F datæ Ellipſis oppoſitas Sectiones deſcribere A G, C F; nam ipſæ eædem erunt, ac illæ ſuperiori methodo inuentæ; & demonſtratio ab allata parùm differet.

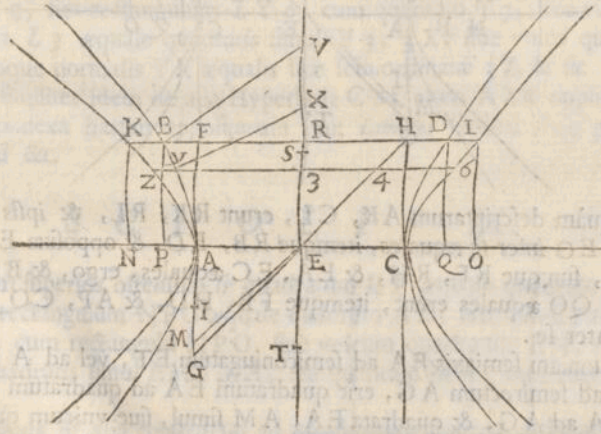
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [100] - 72
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXXXII.

IN Sectionibus oppositis. Limes *Ordinationis normalium a Sectionibus vsque ad coniugatum axem ductarum, est ad* Locum *conuexum aliarum Sectionum oppositarum concentricè, & cum eodem axe transuerso simul adscriptarum, & quarum rectum latus est tertia proportionalium post summam laterum, & rectum eorundem.*

SInt oppositæ Sectiones datæ AB, CD, quarum centrum E, vertices A, C, semiaxes transuersi EA, EC, semirectaque latera AF, AG ad A contingenter applicata, & ES, ET, semiaxes prioribus coniugati: & fiat vt summa semilaterum EA, AG ad semirectum AG, ita semirectum idem AG oppositarum ad AI, & centro E cum eodem semitransuerso axe EA, semirectoque AI descriptæ sint oppositæ Sectio-



nes AK, CL (quæ omnino intra datas cadent, cùm ipsarum centrum, & transuersa diameter eadem sit ac datarum, rectum verò latus sit minus ex constructione) dico harum conuexa esse *Limites* Ordinationis propositæ.

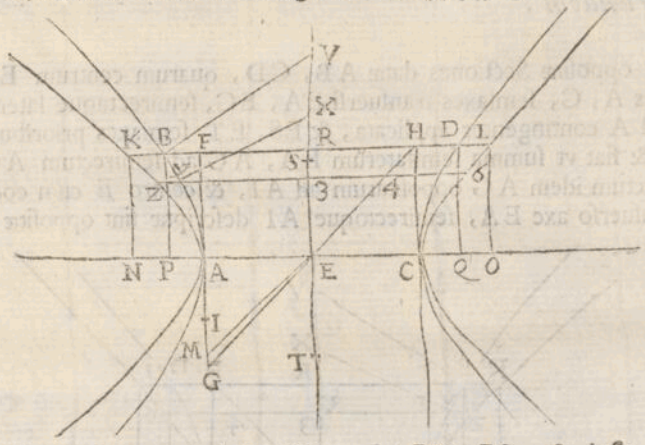
Ducatur ex F ipsi AC parallela FR Sectionibus occurrens in K, B, D, L, axi coniugato in R, cui sit CH æquidistans, & secans FL in H; iungatur GE, EH, quæ vnam rectam constituent: quoniam in triangulis GAE, ERH, anguli ad A, R, sunt recti, & latus AG lateri RE, & AE ipsi RH similiter æqualis, quapropter angulus AEG æquatur angulo RHE, & addito communi angulo HEA fiunt duo simul anguli AEG, HEA, æquales duobus simul RHE, HEA, nempe æquales duobus rectis, quum ipsi sint parallelarum interni. Sumatur insuper

AM æqualis ſemiaxi coniugato ET datarum Sectionum AB, CD, & iungatur EM, atque ex K, B, D, L, agantur ipſi RE parallelæ KN, BP, DQ, LO.

Iam, quia in parallelogrammo AB rectæ AF, PB ſunt æquales, & eſt AF æqualis ſemirecto Sectionis AB, ex conſtructione, etiam ſemiordinata PB in Sectione eidem ſemirecto æqualis erit; quare punctum P ipſius datæ Hyperbolæ AB erit [a] focus: ideoque diſtantia EP poteſt [b] quadrata ſemiaxium coniugatorum EA, AM datarum Sectionum, ideoque, dempto communi quadrato AE, remanet rectangulum PAQ æquale quadrato AM.

[a] ex conuerſ. primæ huius.
[b] 5. huius.

Inſuper, cùm ſit ER axis coniugatus tam oppoſitarum datarum AB,



CD, quàm deſcriptarum AK, CL, erunt RK, RL, & ipſis oppoſitæ EN, EO inter ſe æquales, itemque RB, RD, & oppoſitæ EP, EQ æquales, ſuntque RF, RH, & EA, EC æquales, ergo, & BK, DL, & PN, QO æquales erunt, itemque FB, HD, & AP, CQ æquales erunt inter ſe.

Et quoniam ſemiaxis EA ad ſemiconiugatum ET, vel ad AM eſt vt AM ad ſemirectum AG, erit quadratum EA ad quadratum AM, vt linea EA ad AG, & quadrata EA, AM ſimul, ſiue vnicum quadratum EM ad quadratum AM, vt lineæ EA, AG ſimul ad lineam AG, vel, ex conſtructione, vt linea GA ad AI, & conuertendo quadratum AM ad ME, vt linea AI ad AG.

[c] ex primo Conic.

Præterea rectangulum CPA ad quadratum PB (in Sectione AB) vel ad quadratum NK eſt vt [d] ſemitranſuerſum EA ad ſemirectum AG, & quadratum NK ad rectangulum CNA eſt vt [e] ſemirectum IA ad ſemitranſuerſum AE (in Sectione AK) ergo ex æquali in ratione perturbata rectangulum CAP ad CNA, vel rectangulum PAQ ad NAO eſt vt ſemirectum IA ad ſemirectum AG, vel vt quadratum AM ad quadratum ME, ſed permutando rectangulum PAQ æquale eſt quadrato AM, vt ſuperiùs oſtenſum fuit, ergo & rectangulum NAO quadrato ME æquale eſt, ſiue quadrato EP (vtrunque enim quadratorum EM,

[d] 21. primi Conic.
[e] ibidem.

EP

EP potest a quadrata semiaxium coniugatorum EA, AM) ab his igitur dempto communi rectangulo PAQ remanet rectangulum NPO, siue KBL æquale rectangulo AEC, siue rectangulo FRH, hoc est quadrato RH: sed recta linea GEH est b *Limes* Ordinationis altitudinum normalium inter Sectiones AB, CD, & axem coniugatum ER (quoniam AG est semirectum ipsarum, & E est centrum) quare si normalis a puncto B super Sectionem AB ducta fuerit BV, ipsius altitudo RV suæ ordinatæ RH æqualis erit; c quadratum ergo HR, siue rectangulum KBL ipsi nuper æquale ostensum, æquale erit quadrato RV, quibus communi addito quadrato BR, erunt rectangulum KBL, & quadratum BR, siue vnicum quadratum KR æquale quadratis simul BR, RV, siue vnico BV: quare normalis BV suæ semiordinatæ RK æqualis est.

a 5. huius,

b 35. huius

c ibidem.

Sit tandem quæcunque alia normalis YX, & per Y sit ordinata Z6 Hyperbolam AK, CL secans in Z, 6 axem ER in 3, & *Limitem* GEH altitudinum normalium in 4, erit ergo rectangulum KBL, ad ZY6 vt d quadratum RE ad E3, vel vt qnadratum RH, ad 34, sed permutando rectangulum KBL æquale est quadrato RH, vt supra demonstratum fuit, ergo & rectangulum ZY6 quadrato 34 æquale erit, seu quadrato e 3X altitudinis normalis XY, si his itaque addatur commune quadratum Y3, fiet rectangulum ZY6 cum quadrato Y3, siue vnicum quadratum Z3 æquale quadratis simul Y3, 3X, siue vnico quadrato YX, ideoque normalis YX æqualis suæ semiordinatæ 3Z, & sic de singulis: ac similiter idem de alia Hyperbola C6L alteri AZK opposita &c. Quare conuexa harum oppositarum sunt *Limites* Ordinationis propositæ. Quod &c.

d 3. huius.

e 35. huius.

SCHOLIVM.

QVum superiùs ostensum sit quadratum EP æquale quadrato EM, & rectangulum NPO æquale quadrato AE, erit quadratum EP, cum rectangulo NPO, siue vnicum quadratum EN, vel RK æquale quadratis simul EM, MA, seu quadrato MA, cum duplo quadrati EA.

Hinc obuia fit alia constructio ad quæsitorum *Limitum* descriptionem. Nam si per B (in quo semiordinata per focum P conuenit cum Hyperbola AB) ordinetur RBK ad axem coniugatum ER, sumaturque RK potens quadratum semiaxis coniugati AM cum duplo quadrati semiaxis transuersi EA, & cum centro E per verticem A, ac per punctum K describatur Hyperbola AK, ipsa erit *Limes* quæsitus, & demonstratio paulò diuersa a superiori. RK verò facilè venabitur sumendo nempe RV æquali ipsi RH, vel ipsi AE, iungendoque BV. Nam BV quæ est normalis ex B super Hyperbolam AB, ipsi RK æqualis est. RK igitur potest quadratum distantiæ inter centrum, & focum vna cum quadrato semiaxis transuersi datæ Hyperbolæ.

DE LOCIS SOLIDIS

LIBRI PRIMI PARS TERTIA.

PROPOSITIO XXXXIII.

IN quacunque Coni-sectione, vel Circulo, vel etiam in Oppositis, Limes *Ordinationis altitudinum normalium super ramos ex vertice ductos erectarum est ad* Locum *planum, seu ad rectam lineam Sectionis regulatricem.*

SIT Coni-sectio quæcunque, vel Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus, vt in tertia figura; vel oppositæ Sectiones vt in quarta, quarum vertex B, axis B C, rectum latus B E, & regulatrix D E G quantumlibet producta, atque ex vertice B ducto quocunque ramo B A vsque ad Sectionem propriam, vel vsque ad oppositam, vt in quarta, super ipsum erigatur normalis A F ipsi D C occurrens in F, & per A sit ordinata A C, quæ producta regulatricem secet in G. Dico C F, quæ est altitudo normalis A F, ipsi C G æqualem esse.



Rectangulum enim B C F (ob angulum rectum B A F, & perpendicularem A C super B F,) æquale est quadrato A C, sed rectangulum quoque B C G eidem quadrato A C æquale est, ob regulatricem D E G, ergo rectangulum B C F æquatur rectangulo B C G, sed est B C communis eorum altitudo, ergo & C F æquatur C G. Quod erat, demonstrandum.

2 ex 11. 12. & 13 primi Conic. & per 31. huius.

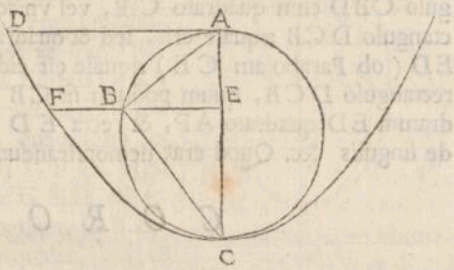
PRO-

PROPOSITIO XXXXIV.

IN Circulo Limes *Ordinationis normalium ſuper ramos ex vertice ductos erectarum eſt ad* Locum *concauum Parabolæ per oppoſitum verticem ſibi circumſcriptæ, cuius rectum latus æquatur eiuſdem Circuli diametro.*

ESto Circulus ABC, cuius diameter AC, quæ fiat rectum latus Parabolæ CD, cuius ſit vertex C, axis CA. Hæc itaque erit Circulo circumſcripta: [a] ducto verò quocunque ramo AB ipſi erigatur normalis BC (quæ ob Circulum incidet quidem in punctum C) Dico hanc BC ordinatæ per B in Parabola, hoc eſt rectæ EF æqualem eſſe.

a ex 10. noſtri primi lib. de Max. & Min.



Nam, ob Parabolam, eſt quadratum EF æquale rectangulo ſub EC in rectum latus, nempe in CA, ex conſtructione, cui rectangulo æquatur quoque, ob Circulum, quadratum normalis BC ſuper ramum AB ex A Circuli vertice ductæ; ergo BC, EF ſunt æquales; Et ſic de ſingulis huiuſmodi normalibus, & ſemiordinatis. Concauum ergo Parabolæ CFD eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXXV.

IN Parabola. Limes *Ordinationis normalium ſuper ramos ex vertice ductos erectarum eſt ad* Locum *concauum alterius Parabolæ congruentis, & ſibi ſimul adſcriptæ, cuius vertex diſtat a vertice datæ per ipſum rectum latus.*

SIT data Parabola AB, cuius vertex B, & rectum latus BC cum axe BD in directum poſitum, per verticem verò C ſit adſcripta datæ BA alia congruens Parabola CE, cuius propterea latus rectum ſit idem

idem B C; ductoque in data B A ex vertice B quocunque ramo B A, cui ex A sit normalis A F. Dico Semiordinatam per A, seu D E, in Parabola C E, normali A F æqualem esse.

Ob rectum enim angulum B A F, & perpendicularem A D super D F, est rectangulum F D B æquale quadrato A D, cui, ob Parabolam, æquatur [a] quoque rectangulum C B D, ergo rectangulum F D B rectangulo C B D æquale est, quare ob communem ipsorum altitudinem B D erit recta F D æqualis C B, & quadratum F D quadrato C B æquale; quadratum autem A D æquale est rectangulo D B C, ergo duo simul quadrata F D, D A, siue vnicum quadratum A F duobus simul, hoc est rectangulo C B D cum quadrato C B, vel vnico rectangulo D C B æquale erit, sed & quadratum E D (ob Parabolam C E) æquale est eidem rectangulo D C B, quum positum sit C B eius rectum latus: Quare quadratum E D quadrato A F, & recta E D rectæ A F æqualis est, & sic de singulis &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 11. primi Conic.



COROLL.

COnstat ex hac, in Parabola, semper altitudinem normalis super ramum ex vertice ductum recto lateri datæ Parabolæ æquale esse. Ostensum est enim axis segmentum D F, quod est altitudo normalis A F super ramum B A, æquale recto lateri B C.

PROPOSITIO XXXVI.

IN Ellipsi oblonga, Limes *Ordinationis normalium super ramos ex vertice ductos erectarum est ad* Locum *concauum alterius Ellipsis oblongæ per oppositum verticem sibi circumscriptæ, cuius rectum latus datæ recto sit æquale, transuersum verò sit tertia proportionalis post differentiam laterum datæ Ellipsis, & transuersum eiusdem.*

SIT Ellipsis oblonga A B, cuius vertex B, transuersus axis maior B D, & rectum latus B E ad B contingenter applicatum, sumaturque D G tertia proportionalis post differentiam inter latera D B, B E, & latus D B, & circa axem transuersum D G, cum recto latere ipsi B E æquali descripta sit Ellipsis G H D. Dico hanc esse *Limitem* Ordinationis propositæ;

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [106] - 78
PUBLIC DOMAIN

ſitæ; hoc eſt, ducto ex vertice B quolibet ramo BA, ipſique erecta normali AK, & per A ordinata AC vſque ad Ellipſim GHD producta in I: ipſam CA normali AK æqualem eſſe.

Iungatur regulatrix DE, quæ producta cum GL, a puncto G ipſi BE æquidiſtanter ducta, conueniat in L, & IC, EB protrahantur ad F, M, H, & ſumatur BO æqualis recto lateri BE,

Quum ſit enim, ex Hypotheſi, differentia inter DB, BE, vel inter DB, BO, hoc eſt DO, ad DB (ex conſtructione) vt DB ad DG, erit conuertendo, & per conuerſionem rationis DB ad BO, ſeu ad BE, vel DG ad GL vt eadem DG ad GB: quare GL, GB ſunt æquales,

Et quoniam quadratum BE ad rectangulum GBD, habet rationem compoſitam ex ratione lineæ BE ad BG, ſiue ad GL, ipſi BG æqualem modò oſtenſam, & ex ratione eiuſdem BE ad BD, ſiue GL ad GD, & ratio BE ad GD componitur ex *iiſdem* rationibus, ergo quadratum BE ad rectangulum GBD eſt vt linea BE ad GD, ſed BE eſt rectum latus Ellipſis GHD, GD verò eius tranſuerſum, ex conſtructione, & rectum ad tranſuerſum eſt vt [a] quadratum ſemiordinatæ BH ad rectangulum GBD, ergo quadratum BE ad rectangulum GBD eſt vt quadratum BH ad idem rectangulum GBD, quadrata igitur BE, BH ſunt æqualia, hoc eſt deſcripta Ellipſis GHD tranſit quoque per E terminum recti lateris datæ.



[a] 21. primi Conic.

Inſuper, quoniam Ellipſes DHG, DAB ſunt per eundem verticem D ſimul adſcriptæ cum eodem recto latere BE, erit rectangulum HBE ad IAM vt [b] quadratum BD ad DC, vel vt quadratum BE ad CF, ſed permutando rectangulum HBE æquatur quadrato BE, ergo & rectangulum IAM quadrato CF eſt æquale; ſed latus CF æquatur [c] ipſi CK altitudini normalis AK ſuper ramum BA, ergo & rectangulum IAM quadrato CK æquale eſt, & communi addito quadrato AC, rectangulum IAM cum quadrato AC, ſiue vnicum quadratum IC duobus ſimul quadratis AC, CK, vel vnico quadrato AK æquale erit, ac ideo ſemiordinata CI in deſcripta Ellipſi GID æqualis ipſi normali AK ſuper ramum BA ex vertice B datæ Ellipſis ductum, & ſic de ſingulis, &c.

[b] 6. huius,

[c] 43. huius.

Quare concauum Ellipſis GHD eſt *Limes* Ordinationis propoſitæ.

Quod erat, &c.

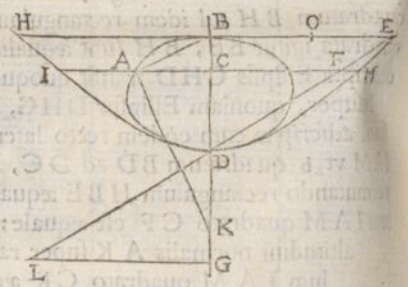
PRO-

PROPOSITIO XXXXVII.

IN Ellipſi prolata. Limes *Ordinationis normalium ſuper ramos ex vertice ductos erectarum, eſt ad* Locum *concauum Hyperbolæ per oppoſitum verticem ſibi circumſcriptæ, cuius rectum latus recto Ellipſis datæ eſt æquale, tranſuerſum verò eſt tertia proportionalis poſt differentiam laterum datæ Ellipſis & eiuſdem tranſuerſum latus.*

SIT Ellipſis prolata A B, cuius vertex B, tranſuerſus axis minor B D, & rectum B E ad B contingenter ordinatum; ſitque D G ipſi B D in directum, ac tertia proportionalis poſt differentiam laterum B E, B D, & latus B D, & cum tranſuerſo axe G D, per verticem D, & cum recto latere æquali ipſi B E deſcripta ſit Hyperbola D I H. Dico hanc eſſe *Limitem* Ordinationis propoſitæ; videlicet, ducto per verticem B ad Ellipſim quolibet ramo B A, ipſique erecta normali A K, & per A ordinata in Hyperbola recta C I hanc ipſi A K æqualem eſſe.

Iungatur regulatrix E D, quæ producta, cum G L a puncto G ipſi B E æquidiſtanter ducta, conueniat in L, & I C, E B producantur ad F, M, H, ſumaturque B O ipſi B D æqualis.



Et quùm ſit, ex ſuppoſitione, differentia inter E B, B D, ſiue inter E B, B O, nempe E O, ad B D, ſiue ad O B ita B D ad D G, erit componendo E B ad B O, vel ad B D, vt B G ad G D, & conuertendo D B ad B E, vel D G ad G L vt eadem D G ad G B, ergo G L, G B ſunt æquales.

Præterea quadratum B E ad rectangulum D B G habet rationem compoſitam ex ratione B E ad B G, ſiue ad G L, & ex ratione B E ad B D, ſiue G L ad G D, & ratio B E ad G D, ex jiſdem rationibus B E ad G L, & G L, ad G D compoſita eſt, ergo quadratum B E ad rectangulum D B G eſt vt linea B E ad G D, hoc eſt vt poſitum rectum latus Hyperbolæ D H ad latus tranſuerſum eiuſdem (ex Hypotheſi) vel vt [a] quadratum ſemiordinatæ H B ad rectangulum D B G; quadratum ergo B E ad rectangulum D B G eſt vt quadratum B H ad idem rectangulum D B G; ideoque ſunt æqualia quadrata B E, B H, ac propterea deſcripta Hyperbola H D neceſſariò tranſit per E terminum recti lateris B E datæ Ellipſis.

[a] 21. primi Conic.

Ampliùs, quum Sectiones H D E, B A D ſint per eundem verticem D ſi-

D ſimul adſcriptæ, & cum eodem recto latere B E, eaſque ſecent ordinatim ductæ H E, I M, erit rectangulum H B E ad rectangulum I A M vt [a] quadratum B D, ad D C, vel vt quadratum B E ad C F: ſed permutando rectangulum H B E æquatur quadrato B E, ergo & rectangulum I A M æquale eſt quadrato C F; ſed latus C F æquale eſt [b] ipſi C K altitudini normalis A K ſuper ramum B A, ergo & rectangulum I A M quadrato C K eſt æquale, & communi addito C A, rectangulum I A M cum quadrato C A, vel vnicum quadratum C I duobus ſimul quadratis K C, C A, vel vnico A K æquale erit: ac ideo ſemiordinata C I in deſcripta Hyperbola æqualis ipſi normali A K, & ſic de ſingulis &c. quare concauum Hyperbolæ H D E eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 6. huius.

[b] 43. huius.

PROPOSITIO XXXXVIII.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis normalium ſuper ramos ex vertice in ipſa ductos erectarum, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ ſibi ſimul adſcriptæ, cuius idem ſit ſupremus terminus tranſuerſi lateris, rectumque datæ recto ſit æquale, tranſuerſum verò ſit tertia proportionalis poſt ſummam laterum datæ Hyperbolæ, & eiuſdem tranſuerſum latus.*

ESto Hyperbola A B, cuius axis B C, vertex B, tranſuerſum latus B D, rectum B E ipſi B D perpendiculariter applicatum; B D verò ſic ſecetur in G vt rectum E B cum tranſuerſo B D ad ipſum B D ſit vt B D ad D G, & per verticem G cum tranſuerſo D G, rectoque latere ipſi B E æquali, deſcribatur Hyperbola G H I circa eundem axem G B. Dico hanc eſſe *Limitem* propoſitum. Hoc eſt ſi ex B ſit ramus quicunque B A, cui ſit normalis A K, hanc ſemiordinatæ C I per A æqualem eſſe.

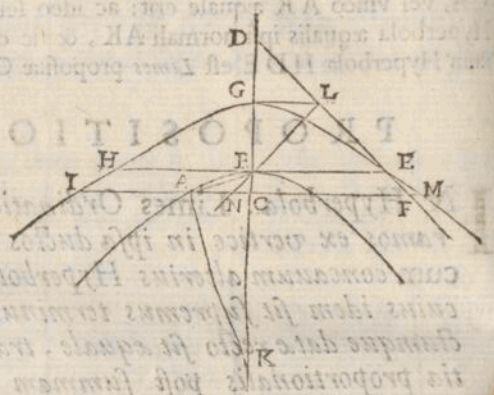


Agatur ex G ipſi B E æquidiſtans G L, quæ iunctæ regulatrici D E occurrat in L, ipſaque E B producatur ad H vſque ad Hyperbolam G H.

Iam, quoniam E B cum B D ad B D eſt vt B D ad D G, erit diuidendo E B ad B D, vel L G ad G D vt B G ad eandem G D: quare L G, B G ſunt æquales.

Et quoniam ratio quadrati BE ad rectangulum DBG componitur ex ratione lineæ EB ad BG, siue ad GL, & ex ratione BE ad BD, siue GL ad GD; ratio autem BE ad GD ex ijsdem componitur rationibus, ergo ratio quadrati BE ad rectangulum DBG eadem est ac lineæ BE, ad GD; sed BE est rectum Hyperbolæ GH, & GD est ipsius transuersum, ex constructione, ergo quadratum BE ad rectangulum DBG est

a 21. primi Conic. vt rectum EB ad transuersum GD, vel vt [a] quadratum BH ad idem rectangulum DBG. Quadrata igitur BE, BH sunt æqualia. Ideoque descripta Hyperbola HG transit necessariò per E, quæ producta occurrat ordinatæ IC in M, ipsaque IC regulatricem secet in F.



Insuper, quoniam Hyperbolæ HGE, AB sunt per diuersos vertices G, B simul adscriptæ, idemque est earum supremus terminus D transuersorum laterum DG, DB, atque ipsarum recta latera ponuntur æqualia, erit re-

b 8. huius. ctangulum HBE ad IAM vt [b] quadratum DB ad DC, vel vt quadratum BE ad CF, sed permutando rectangulum HBE æquatur quadrato BE, ergo & rectangulum IAM quadrato CF æquale erit, seu quadrato CK (quæ quum sit altitudo normalis AK super ramum BA

c 43. huius. ductæ, æqualis est [c] ipsi CF vsque ad regulatricem DF ordinatæ) his igitur communi addito quadrato CA, erit rectangulum IAM cum quadrato AC, vel vnicum quadratum IC æquale duobus simul CA, CK, vel vnico AK: ideoque semiordinata CI æqualis normali AK; Et sic de singulis. Quare concauum Hyperbolæ GI est *Limes* propositus. Quod erat &c.

ALITER.

OMisso octauo Theoremate huius, ac per consequens Lemmate ipsius, breuiùs demonstrabitur semiordinata IC æqualis normali AK.

Iungatur LB, quæ producta secet CI in N.

Iam, quum primo loco superiùs ostensum sit LG æqualem esse ipsi GB, erit & CN æqualis CB.

Et quoniam ratio rectanguli NFC ad quadratum BE componitur ex ratione lineæ CF ad BE, siue lineæ CD ad DB, & ex ratione lineæ NF ad BE, vel NL ad LB, seu CG ad GB, & ex his componitur quoque ratio rectanguli DCG ad DBG, siue (ob Hyperbolam) ratio quadrati IC ad quadratum HB, ergo rectangulum NFC ad quadratum BE est vt quadratum IC ad quadratum HB, sed consequentia quadrata HB,

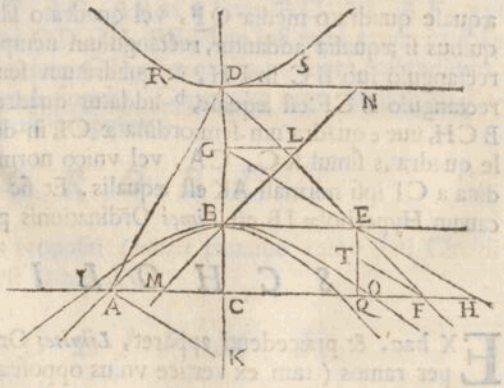
HB, BE æqualia ſunt (ob oſtenſam laterum æqualitatem) ergo & antecedentia, hoc eſt rectangulum NFC quadrato IC æquale erit; rectangulum verò NFC æquatur rectangulo BKC (quum tam BC, CN quàm CK, CF [a] & quàm ideo BK, NF ſint æquales) ſiue quadrato mediæ proportionalis AK inter BK, KC (in triangulo rectangulo BAK, in quo AC ſuper BK eſt perpendicularis) ergo & quadratum AK æquale eſt quadrato IC: ideoque normalis AK ſemiordinatæ IC eſt æqualis, & ſic de ſingulis &c. Quare concauum Hyperb. CI eſt *Limes* propoſitus. [a] 43. huius.

MONITVM.

RAtione huic ſimili, aliaque breuiori methodo oſtendi poſſent, plurima præcedentium, & conſequentium Theorematum, nullo multorum auxilio, quæ in prima parte Libri huius demonſtrantur; ſed quum hæc noſtris alijs Geometricis opem ferant, hanc ideo viam, licet longiorem, ad amœnam vtique eruditionem nos ducentem, eligere ſtatuimus. Quod ſecunda hac vice maximè intereſt animaduertiſſe.

PROPOSITIO XXXXIX.

IN Oppoſitis Sectionibus. Limes *Ordinationis normalium ſuper ramos ex vnius vertice ad Sectionem Oppoſitam ductos erectarum, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ per verticem ipſius oppoſitæ circumſcriptæ, & cuius idem eſt rectum latus, tranſuerſum verò eſt tertia proportionalium poſt ſummam laterum datæ Hyperbolæ & tranſuerſum eiuſdem.*



SInt Sectiones oppoſitæ AB, RD, quarum axis tranſuerſus DB, rectum latus BE ordinatim applicatum ad B, & fiat vt ſumma laterum DB, BE ad DB, ita DB ad BG, & per verticem B cum tranſuerſo GB, rectoque BE deſcribatur Hyperbola IB; quæ cadet extra AB, quum GEH regulatrix ipſius IB, infra tangentem BE tota cadat extra regulatricem DEF alterius AB (ex prop. 19. prim. Lib. de Max. & Min.). His poſitis: Dico ſi ex vertice D, datæ oppoſitarum,

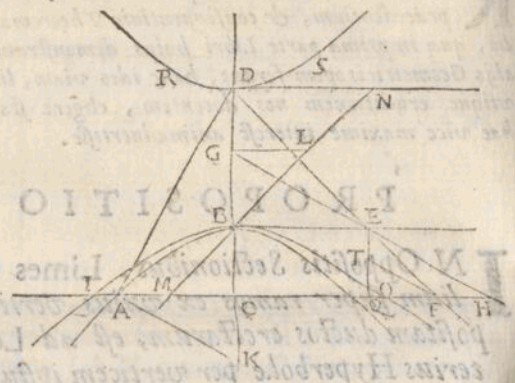
ductus sit ad AB quicunq; ramus DA, ipsique sit erecta normalis AK, hanc semiordinatę CI æqualem esse, ac itaq; Hyperb. IB esse *Limitem* propositum.

Producatur IC, quæ regulatricibus occurrat in F, H, atque ex vertice D sit DN recto lateri BE æqualis, & parallela, iungaturque NB, quæ producta cum IC conueniat in M, atque ex G agatur GL ipsis DN, BE æquidistans, ex E verò sit EQ parallela ipsi BC, ordinatam ICO secans in Q, & ex F sit FT ipsi EH parallela, quæ EQ secet in T.

Iam, quum ex constructione sit EB, siue ND cum DB ad DB, vt DB ad BG, diuidendo erit ND ad DB, vel LG ad GB, vt DG ad eandem GB. Ergo GL, GD sunt æquales.

Et quoniam KC est altitudo normalis AK super ramum DA ex vertice Sectionis Oppositæ DR ductum, atque est NBM regulatrix Sectionis DR, erit altitudo KC æqualis [a] ipsi CM.

a 43. huius.



Insuper, quoniam BC ad CM est vt BD ad DN, vel vt DB ad BE ipsi DN æqualem, vel vt EQ ad QF (ob triangulorum similitudinem) sunt que antecedentes BC, EQ oppositæ in parallelogrammo BQ æquales, ergo & consequentes CM, QF æquales erunt; sed vt QF ad FH, ita est QT ad TE, & BG ad GD (ob similitudinem tam triangulorum TQF, GBE, quàm triangulorum EQF, DBE) & est GD ipsi GL æqualis, ergo & QF ad FH est vt BG ad GL, vel vt BD ad BN, vel vt DB ad BE, vel vt EQ ad QF. Si igitur est EQ ad QF vt QF ad FH erit rectangulum sub extremis EQ, FH, siue sub BC, FH æquale quadrato mediæ QF, vel quadrato sibi æqualis CM, vel CK, quibus si æqualia addantur, rectangulum nempe sub BC in CF addatur rectangulo sub BC in FH, & quadratum semiordinatæ CA, quod ipsi rectangulo BCF est æquale, [b] addatur quadrato KC, fiet rectangulum BCH, siue quadratum semiordinatæ CI, in descripta Hyperb. BI, æquale quadratis simul KC, CA, vel vnico normalis AK; ideoque semiordinata CI ipsi normali AK est æqualis. Et sic de singulis &c. Quare concauum Hyperbolæ IB est *Limes* Ordinationis propositæ. Quod erat &c.

b 21. primi Conic.

c ibidem.

SCHOLIVM.

EX hac, & præcedenti apparet, *Limites* Ordinationum normalium super ramos (tam ex vertice vnius oppositarum Sectionum, quàm ex vertice alterius) ductos, esse ad concaua aliarum Sectionum oppositarum, quarum rectum latus est idem, ac datarum, transuersum verò est eadem tertia proportionalis post summam laterum datarum, & earum transuersum.

DE

DE LOCIS SOLIDIS

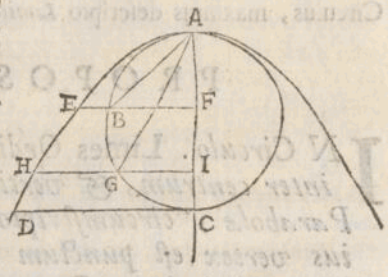
LIBRI PRIMI PARS QVARTA

PROPOSITIO L.

IN Circulo. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, est ad* Locum *concauum Parabolæ per eundem verticem sibi circumscriptæ, & cuius rectum latus æquatur Circuli diametro*.

ESto Circulus A B C, cuius vna diametrorum sit A C, & vertex A, in quo ponatur ramorum origo, & per verticem A, circa axem A C, cum recto ipsi A C æquali describatur Parabola D E A. Dico hanc esse *Limitem* propositum.

Ordinetur ex C in Parabola recta C D. Erit igitur rectangulum sub C A in rectum latus, nempe in ipsam C A recto lateri æqualem, ex Hypothesi, hoc est ipsum quadratum C A æquale quadrato semiapplicatæ C D, & ideo ramus A C æqualis semiordinatæ C D.



Sint præterea alij quotcunque rami A B, A G &c. & ex B, G ordinentur E F, H I.

Erunt ergo quadrata A C, A G, A B vt [a] lineæ A C, A I, A F, vel ob Parabolam, vt [b] quadrata C D, I H, F E, siue ipsi rami erunt vt ipsæ ordinatæ; sed primus A C primæ C D est æqualis, vt supra ostendimus, ergo & reliqui reliquis, singuli singulis. Concauum ergo huiusmodi Parabolæ est *Limes* Ordinationis propositæ.

[a] 9. huius.
[b] 20. primi Conic.

COROLL.

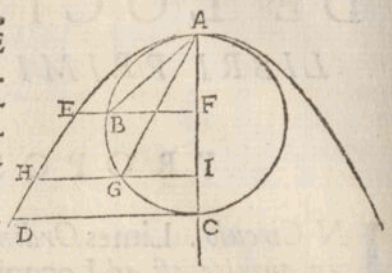
PAtet hic rectum latus propositi *Limitis* maximo ramo dati Circuli æquale esse: Is enim est ramus A C.

SCHOLIVM I.

QVod hic *Limes* cadat totus extra Circulum, eumque in originis tantùm puncto contingat; constat ex nostra xx. primi de Max. & Min.

Nam

Nam A G æquatur recto lateri Parabolæ D A G. Sed idem patet ex præsenti figura; Est enim A B, quæ recto angulo A F B opponitur, semper maior latere F B, ergo & F E ipsi A B æqualis, maior est eadem F B. Quare punctum E cadit extra Circulum; & sic de singulis punctis semiordinatarum, ideoque totus *Limes* cadit extra.



Quod, in posterum, simili ratione demostratum intelligatur de reliquis Ordinationum Limitibus, *seu ad ramos, seu ad alias quascunque rectas lineas, quæ non sint breuiores semiordinatarum spectantibus.*

SCHOLIVM II.

QVum radius Circuli A B C æqualis sit semirecto lateri descripti *Limitis*, erit ex prop. xx. primi nostri de Max. & Min. *Limes* D A minima Parabolarum dato Circulo circumscriptibilium, & datus Circulus, maximus descripto *Limiti* inscriptibilium.

PROPOSITIO LI.

IN Circulo. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter centrum, & verticem, est ad* Locum *concauum Parabolæ, circumscripto triangulo inscriptæ, cuius vertex est punctum bisecans axem trianguli sibi circumscripti: rectum verò latus æquatur differentiæ inter ramum maximum, & minimum: vel duplo differentiæ inter radium, & ramum minimum: vel duplo distantiæ inter centrum, & originem.*

ESto Circulus A B C D, cuius diameter B D, centrum E, inter quod, & verticem B sit in radio E B data ramorum origo O, per quam sit ordinata A C, ac supra ipsam triangulum A G C portioni circumscriptum, & cuius axis G O sit bifariam sectus in H, & per verticem H, circa axem H O sit descripta Parabola I H L, cuius rectum latus æquale sit differentiæ inter maximum ramum O D, & minimum O B, quæ vt patet æqualis est duplo distantiæ E O inter centrum Circuli, & originem (nam D E, E B sunt æquales) quæque est differentia inter radium E B, & minimum ramum O B. Dico hanc Parabolam dato Circulo esse circumscriptam, & esse *Limitem* propositum.

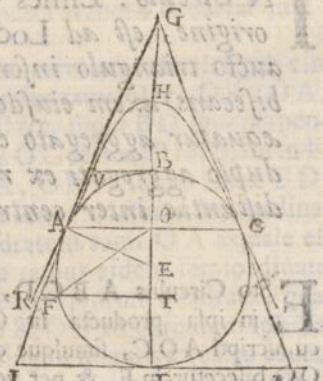
Iung-

Iungatur radius A E; & quoniam angulus a tangente G A, & radio A E constitutus rectus est, atque A O basi G E est perpendicularis, erit quadratum AO æquale rectangulo sub GO in OE, vel sub dimidio ipsius GO, hoc est sub HO in duplum OE, vel, ex constructione, in rectum latus Parabolæ IHL: sed quadratum etiam semiordinatæ ex O in Parabola eidem rectangulo est [a] æquale, ergo eadem AO est ipsa semiordinata: quare Parabola IHL necessariò transit per A, ac similiter per C. Quumque GH, HO sint æquales, rectæ GA, GC Parabolam contingent in A, C, sed in ipsis quoque punctis contingunt & Circulum, ergo in jisdem tantùm A, C, Parabola Circulum tangit [b] & in reliquis tota cadit extra, adeoque ipsi Circulo est circumscripta.

[a] 11. primi Conic.

[b] 61. primi de Max. & Min.

Ampliùs, ex diametri terminis B, D, agantur tangentes verticales, quæ Parabolam secent altera in V, altera in I, L, & sit quicunque alius ramus OF, & per F ordinata, quæ Parabolæ occurrat in R, diametro verò in T.



Et quoniam ab origine O, termino interiori axis trianguli circumscripti, ad Circuli peripheriam ducti sunt rami OD, OF, OA, OB &c. atque ab horum terminis D, F, A, B super BD demissæ sunt perpendiculares DD, FT, AO, BB &c. atque axis BO sectus est bifariam in H, quadrata ipsorum OD, OF, OA, OB &c. erunt inter se vt sunt [c] lineæ HD, HT, HO, HB &c. vel in Parabola IAHCL, vt sunt [d] quadrata semiordinatarum DI, TR, OA, BV &c. sed quadratum rami OA ad Circulum æquatur quadrato semiordinatæ OA in Parabola, quum ipsorum latera eadem sint ac recta OA, vt supra ostendimus, ergo & reliquorum quadrata quadratis reliquarum singula singulis æqualia erunt; hoc est ipsi rami OD, OF, OA, OB ad Circulum ipsis semiordinatis DI, TR, OA, BV, in Parabola singuli singulis sunt æquales. Concauum ergo huiusmodi Parabolæ est *Limes* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[c] 11. huius.

[d] 20 primi Conic.

COROLL. I.

HInc constat eandem habere rationem distantiam inter vertices *Limitis*, & Circuli ad distantiam inter originem, & verticem *Limitis*, quam habet Circuli ramus minimus ad maximum, est enim BH ad HO vt [e] BO ad OD.

[e] 10. huius

Co-

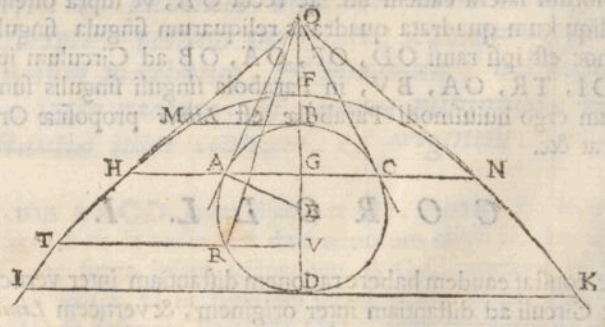
COROLL. II.

PAtet quoque huiuſmodi *Limites* eò ampliores eſſe, quò vertici propiores fuerint ſumptæ origines. Nam ſic ipſorum recta latera maiora ſunt, quum æqualia eſſe debeant differentijs inter eiuſdem diametri ſegmenta ſemper magis inæqualia.

PROPOSITIO LII.

IN Circulo. Limes *Ordinationis ramorum ab externa origine, eſt ad* Locum *concauum Parabolæ circumaucto triangulo inſcriptæ, cuius vertex eſt punctum, biſecans axem eiuſdem trianguli, rectum verò latus æquatur aggregato ex maximo, & minimo ramo; vel duplo aggregati ex radio, & ramo minimo, vel duplo diſtantiæ inter centrum, & originem.*

ESto Circulus A B C D, cuius centrum E, diameter D B, & origo in ipſa producta ſit O, quæ fiat vertex trianguli Circulo circumſcripti A O C, ſimulque circumaucti trianguli H O N, quorum axis O G biſecetur in F, & per verticem F circa axem F B D deſcribatur Parabola I F K, cuius rectum latus æquale ſit aggregato ex maximo ramo O D, & minimo O B, quod, vt conſtat, æquale eſt duplo mediæ arithmeticæ O E inter centrum Circuli, & originem, hoc eſt æquale duplo aggregati ex radio E B, & minimo ramo O B. Dico hanc ipſam Parabolam circumaucto triangulo H O N eſſe inſcriptam, atque eſſe *Limitem* propoſitum.



Iungatur radius A E. Et cùm angulus O A E rectus ſit, & A G ſuper O E baſim

baſim perpendicularis, erit quadratum OA æquale rectangulo ſub GO in OE, vel ſub dimidio ipſius GO in duplum OE, hoc eſt ſub FG in rectum latus (quod æquale poſitum fuit duplo OE) ſed & quadratum ſemiordinatæ GH in Parabola æquale eſt [a] eidem rectangulo, ergo quadratum OA æquatur quadrato ſemiordinatæ GH in Parabola, ac propterea ramus contingens OA ad Circulum æqualis ſemiordinatæ GH in Parabola I FK: & pari ratione ramus OC æqualis ſemiordinatæ GN: ſed OF, FG ſunt æquales, ex conſtructione, ergo rectæ OH, ON Parabolam contingunt [b] ad H, N, ipſaque Parabola circumaucto triangulo HON eſt inſcripta.

[a] 11. primi Conic.

[b] 33. primi Conic.

Præterea, ex terminis diametri B, D, ducantur verticales tangentes, quæ Parabolam ſecent altera in M, altera in I, K, & ſit alius quicumque ramus OR, & ex R ordinata, quæ Parabolæ occurrat in T, diametro autem in V.

Quoniam igitur ab origine O externo termino axis trianguli circumſcripti ducti ſunt ad Circuli peripheriam rami OD, OR, OA, OB &c. & ex horum terminis D, R, A, B &c. ſuper BD ſunt perpendiculares DD, RV, AG, BB &c. & axis OG ſectus eſt bifariam in F, erunt quadrata ramorum OD, OR, OA, OB vt ſunt [c] lineæ FD, FV, FG, FB, vel, in Parabola I FK, vt ſunt [d] quadrata ſemiordinatarum DI, VT, GH, BM &c. ſed quadratum rami OA æquale eſt quadrato ſemiordinatæ GH (nam ipſe ramus eidem ſemiordinatæ æqualis eſt, vt ſupra oſtendimus) ergo & reliquorum quadrata, quadratis reliquarum, ſiue ipſi rami OD, OR, OB ad Circulum ipſis ſemiordinatis DI, VT, BM in Parabola ſinguli ſingulis æquales erunt: & idcirco concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[c] 11. huius.

[d] 20. primi Conic.

COROLL. I.

MAnifeſtum eſt hinc rationem diſtantiæ inter verticem *Limitis*, & Circuli ad diſtantiam inter originem, & verticem *Limitis*, hoc eſt FB ad FO eandem eſſe, ac rami minimi ad maximum, nempe OB ad OD: ratio enim BF ad FO eadem eſt [e] ac BF ad FG, vel ac BG ad GD, vel ac BO ad OD.

[e] 10. huius.

COROLL. II.

QVum horum *Limitum* recta latera æqualia ſint aggregatis ex maximo & minimo ramorum, patet ipſos eò ampliores fieri, quò remotior fuerit a Circuli vertice externa origo data.

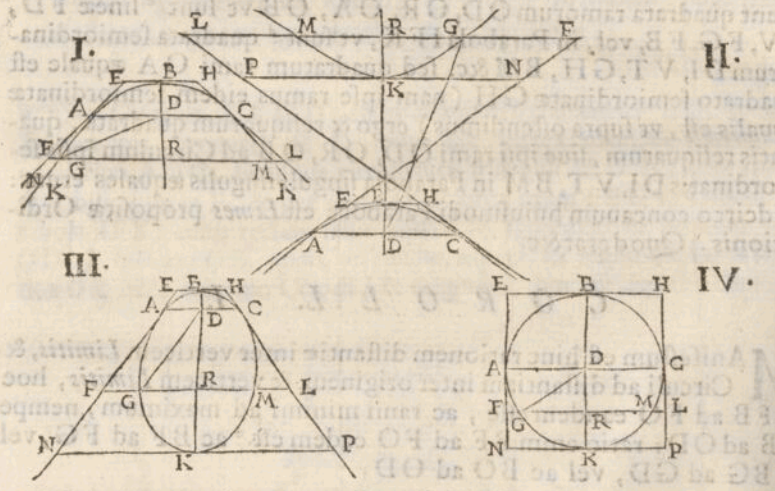
PROPOSITIO LIII.

IN quacumque Coni-sectione, vel etiam oppoſita, ac Circulo non excluſo. Limites *Ordinationis ramorum ab origine unum ex focis occupante, ſunt ad* Locos *planos rectarum linearum, lateraliter contingentium ſectionem ad extremitatem rectæ per eumdem focum ordinatæ.*

ESto Coni-ſectio A B C, vel Parabola, vel Hyperbola à prima figura exhibita; vel oppoſita ſectio M K G à ſecunda; vel Ellipſis oblonga à tertia; vel demum circulus à quarta. Sitque, in omnibus, axis portio B D, vertex B, & alter ex focis punctum D, quod in circulo eſt ipſum centrum. Per hunc itaque focum D, in his ſingulis figuris, tranſeat ordinata ad axē recta A D C, ad cuius extrema puncta, A, C, propriam curvam contingant rectæ A E, C H quantumlibet utrinq; produ-

a ex 24. 25. primi Con.

ctæ ad N, P, quæ in 2. fig. axi in eodem puncto [a] occurrent.



Dico, has contingentes rectas eſſe *Limites* Ordinationis propoſitæ.

Hoc eſt (quod ſi ex foco D agatur ad curvam propriæ ſectionis, vel ad oppoſitam, quicumque ramus D G, & per G ducatur ad axem B D R K ordinata G R, ac producatur uſquedum, cum tangente cōveniat in F, & cum axe in R) ipſum ramum D G, huic ordinatæ R F ab axe, & tangente contentæ, æqualem eſſe.

Ducantur verticales contingentes E B H, N K P, occurrentes lateralibus tangentibus in E, H; N, P; & ordinata F G R producatur, donec curvam ad alteram partem ſecet in M, & alteram lateralem tangentem, in L.

Iam, quum ſit A D æqualis ipſi D C, erit N K æqualis K P, & F R

æqualis

æqualis RL, atque GR æqualis RM, ergo FG, ML sunt æquales.

Et quum AD sit semiordinata ex foco D, ac BE, KN verticaliter Sectionem contingant ad extremitates axis BK, & FAN lateraliter, erit ramus DB æqualis [a] semiuerticali tangenti BE, & ramus DK æqualis semiuerticali KN. a 12. huius.

Quumque AE, BE Sectionem contingant, alterique ipsarum BE sit parallela FGM, erit quadratum BE ad EA vt [b] rectangulum MFG, siue LGF (nam FG, ML sunt æquales) ad quadratum FA, & permutando quadratum BE ad rectangulum LGF, vt quadratum EA ad AF, vel vt quadratum BD ad DR, & iterum permutando quadratum BE ad BD vt rectangulum LGF ad quadratum DR, sed antecedentia quadrata, BE, BD sunt æqualia (quum sint [c] ab æqualibus) ergo & rectangulum LGF quadrato DR æquale erit; his igitur addito quadrato communi GR, rectangulum LGF cum quadrato GR, siue vnicum quadratum RF, duobus simul quadratis DR, RG, siue vnico quadrato DG æquale erit, ac ideo semiordinata RF ramo DG æqualis: & sic de singulis ramis, alijsque ad alteram partem ductis, deque eorum semiordinatis. b 16. tertij Conic. c 12. huius.

In Circulo autem euidentiùs, ac faciliùs idem apparet. Quum enim Circulus nil aliud sit quàm Ellipsis prolatarum minima, & oblongarum maxima circa eundem axem descriptarum, & quarum foci eò inter se propiores fiunt, quò ampliores fuerint oblongæ Ellipses, & quò arctiores prolatæ, manifestum est in hac figurarum metamorphosi, Ellipticæ, nempe in Circularem, binos focos in vnum simul coire, hoc est in ipsum *Circuli centrum*, quod fit ramorum origo; ita enim radij sunt ad instar ramorum, *vel normalium ad Circuli peripheriam*, quæ, si iuxta definitionis legem hinc inde ab axe, vel diametro ordinentur, patet ipsorum *Limites* esse [d] rectas contingentes Circulum a terminis ordinatæ per centrum, atque inter se, & axi æquidistantes. Ordinatio igitur ramorum ab origine ex foco D cuiuscunque Coni-sectionis, vel etiam Oppositæ, aut Circuli habet *Limites* rectas contingentes EAF, HCL. Quod erat demonstrandum. d 35. huius.

COROLL.

COnstat ex hac euidenter in quacunque Coni-sectione, quadrata ramorum ab origine in foco esse inter se, vt quadrata segmentorum axis inter ordinatas ex ramorum terminis, & verticem trianguli Sectioni circumscripti, cuius basis per focum transeat. Nam quadrata semiordinatarum KN, RF, DA, BE &c. quæ ipsis ramis DK, DG, DA, DB sunt æquales, sunt inter se vt quadrata IK, IR, ID, IB &c. ob æquidistantes KN, RF, DA, BE in triangulo NIK.

PROPOSITIO LIV.

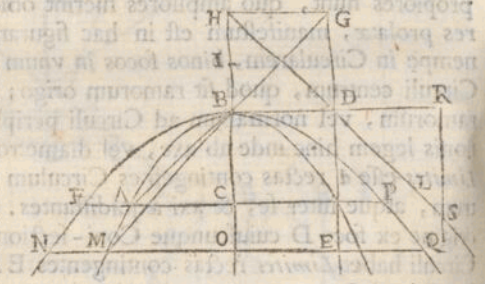
IN Parabola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, eſt ad* Locum *concauum Hyperbolæ æquilateræ per eundem verticem ſibi circumſcriptæ, cuius latera æquantur Modulo ex angulo ſemirecto, nempe recto lateri datæ Parabolæ.*

SIT Parabola A B, cuius axis B C, vertex B, rectum latus B D, ac regulatrix E D G, ſitque B H Modulus a ſemirecto angulo exhibitus. Dico, ſi per verticem B, cum axe tranſuerſo HB, rectoque latere B D deſcribatur circa axem B C Hyperbola B F (quæ erit æquilatera, quum B D, B H ſint æqualia) hanc eſſe Parabolæ circumſcriptam, atque eſſe *Limitem* propoſitum.

Compleatur figura Modulum exhibens B H per rectam A B G cum axe B C ſemirectum angulum conſtituentem, & regulatrici occurrentem in G &c. Sectioni verò in A, iungaturque H D L regulatrix Hyperbolæ B F, & H G.

Iam. Quum infra communem Sectionum contingentem B D, Hyperbolæ regulatrix D L ſemper magis recedat a regulatrice Parabolæ D E ipſa Hyperbola datæ Parabolæ erit [a] circumſcripta.

[a] 19. primi noſtræ Diuinat. in Apoll.



Et quum ob angulos ſemirectos ad A, B, in triangulo A B C, ſit A C æqualis C B, erit quoque B H æqualis H G, ſiue recto lateri B D, ſed quadratum A C æquale eſt [b] rectangulo C B D, ergo A C æqualis eſt vnicuique ipſarum C B, B D, H B. Tam igitur quadratum B A, quàm rectangulum H C B duplum eſt quadrati B C, ſed huic æquale eſt, ob Hyperbolam æquilateram, quadratum C F, ergo quadrata B A, C F ſunt æqualia; ideoque ramus B A ad Parabolam ſemiordinatæ C F in Hyperbola æqualis eſt.

[b] 11 primi Conic.

Sit alius quicunque ramus B M, & per M ordinetur M O Hyperbolam ſecans in N, axem in O.

Erit ergo quadratum B A ad quadratum B M vt [c] rectangulum H C B ad H O B, vel, ob Hyperbolam, vt quadratum C F ad quadratum O N, & permutando latus B A ad C F vt latus B M ad O N, ſed B A æquale demonſtratum eſt ipſi C F, ergo, & B M ipſi O N æqualis erit, & ſic de ſingulis ramis, atque ſemiordinatis &c. Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[c] 13. huius.

Aliter

ALITER.

PRoducatur Hyperbola F B ad alteram axis partem ordinatas secans in P, Q.

Et quum quadratum B A duplum sit quadrati A C, sitque quadratum C F ipsi B A æquale, vt primo loco demonstratum fuit, erit etiam quadratum F C duplum quadrati C A, & diuidendo rectangulum F A P æquale erit quadrato A C, seu quadrato B C: sed rectangulum F A P ad N M Q est vt [a] quadratum B C ad B O, & permutando rectangulum F A P æquale est quadrato B C, ergo & rectangulum N M Q quadrato B O æquale erit, quibus communi addito quadrato M O, erit quadratum O N æquale quadratis simul B O, O M, siue vnico B M, hoc est semiordinata O N æqualis ramo B M &c.

[a] 6. huius.

ALITER.

POsitis ijsdem, nempe quod B H sit æqualis recto lateri datæ Parabolæ A B, ac simul sit transuersum latus descriptæ Hyperbolæ æquilateræ B F, breuiùs ostenditur ramum quemcunque B M ad Parabolam suæ semiordinatæ O N in Hyperbola æqualem esse.

Nam quadratum B M æquale est quadrato B O vna cum quadrato O M semiordinatæ in Parabola A B, vel [b] vna cum rectangulo O B H (nam est O B Parabolæ rectum latus) sed quadratum O B cum rectangulo O B H æquale est rectangulo H O B, ergo & quadratum B M rectangulo H O B æquale est, vel quadrato [c] semiordinatæ O N, ob Hyperbolam æquilateram, quare & latus lateri, hoc est ramus B M semiordinatæ O N æqualis erit; & similiter de reliquis &c. Quod erat &c.

[b] 11 primi Conic.

[c] 21. primi Conic.

COROLL.

HInc centrum *Limitis*, quod est I punctum bisecans H B, distat ab origine per semirectum datæ Parabolæ.

SCHOLIVM

NOtandum est, Parabolam esse maximam suo *Limiti* inscriptibilium. Nam, in qualibet Parabola, cuius rectum latus maius sit ipso B D, quale est B R, regulatrix R S omnino secat D L regulatricem *Limitis* infra communem contingentem B D R: quare, & Sectiones secant se mutuò, vt constat ex xix. primi nostræ Diuinationis in V. Apollonij.

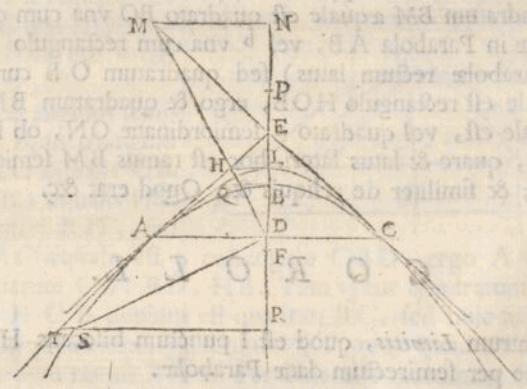
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [121] - 93
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LV.

IN Parabola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter focum, & verticem, eſt ad* Locum *concauum Hyperbolæ æquilateræ ſibi circumſcriptæ, cuius axis tranſuerſus æquatur Modulo ex verticali, vertex verò eſt terminus inferior Moduli. Centrum autem diſtat ab origine per ſemirectum Parabolæ, & ab huius vertice per differentiam inter ipſum ſemirectum, & ramum minimum, Hyperbolæ verò ſemiaxis tranſuerſus poteſt rectangulum ſub ſemirecto in differentiam inter ipſum, & duplum minimi rami.*

ESto Parabola A B C, cuius axis B D, vertex B, focus F, quos inter cadat A C baſis trianguli circumſcripti A E C, ſitque N L Modulus ex verticali, inuentus iuxta definitionem xv. huius, & cuius centrum P &c. Dico, ſi per verticem L, circa axem L D deſcripta ſit Hyperbola æquilatera L Q T, cuius axis tranſuerſus ſit Modulus N L, vel cuius centrum ſit P; ipſam datæ Parabolæ eſſe circumſcriptam, & eius concauum eſſe *Limitem* Ordinationis propoſitæ.



a tertia ſec. noſtræ Diuinat.

Ducatur ex D alius quicunque ramus D S, præter D B, qui eſt a minimus, & præter D A per contactum ordinatum, atque ex B, S ordinentur B Q, R T, vſque ad Hyperbolam productæ in Q, T.

b 20. huius, c 19. huius ad num. 3.

Et quoniam N L ponitur Modulus ex verticali datæ Parabolæ A B C, & P Moduli centrum, erit quadratum ſemiordinatæ D A, in Parabola, æquale b rectangulo P D E, ſed hoc æquatur c rectangulo N D L, ergo quadratum quoque D A prædicto rectangulo N D L æquale eſt: at in Hyperbola T L Q, cùm ea ſit æquilatera, eſt rectangulum NDL æqua-

le

se a quadrato semiordinatæ ex D, ergo idem quadratum semiordinatæ DA, in Parabola, quadrato semiordinatæ ex eodem puncto D in Hyperbola æquale erit: Et similiter ad aliam partem DC; Quapropter Hyperbola TLQ transit omnino per A, C: sed rectangulum DPE æquale est b quadrato semitransuersi PL; rectæ igitur AE, CE Hyperbolam contingunt c ad A, C; ac contingunt quoque Parabolam in ijsdem punctis A, C, per constructionem, suntque huiusmodi Sectiones per diuersos vertices L, B, simul adscriptæ, ergo Hyperbola TLQ Parabolæ ABC est circumscripta, & in punctis tantùm A, C, se mutuò contingunt d & rami DA, DC ad Parabolam ijdem sunt, ac semiordinatæ in Hyperbola.

a 21. primi Conic.

b 19. huius ad num. 2.

c Conuers. 37. primi Conic.

d 61. primi nostræ Diuinat. in Apoll.

Ampliùs, quum origo D sit inter focum, & verticem, atque ex ramorum terminis ad axem ductæ sint perpendiculares, sitque NL Modulus ex verticali datæ Parabolæ, erunt quadrata ramorum DA, DB, DS ad Parabolam vt sunt e rectangula NDL, NBL, NRL, vel vt f quadrata DA, BQ, RT ad Hyperbolam; sed quadratum rami DA in Parabola æquale est quadrato eiusdem DA in Hyperbola, ergo & reliqua DB, DS ad Parabolam æquantur reliquis semiordinatarum BQ, RT in Hyperbola, ideoque & rami DB, DS semiordinatis BQ, RT æquales, singuli singulis. Quare concauum Hyperbolæ TALC est *Limes* propositæ Ordinationis.

e 18 huius.

f 21. primi Conic.

Tandem, centrum *Limitis* P distat ab origine D per PD, quam æqualem ostendimus g semirecto Parabolæ & ab huius vertice B per internallum PB, quod est differentia inter semirectum DP, & ramum minimum DB; *Limitis* verò transuersum PL potest rectangulum sub DP, semirecto Parabolæ, in PE, quæ est differentia inter eundem semirectum DP, & DE duplam minimi rami DB. Quod omnino ostendere propositum fuit.

g 20. huius.

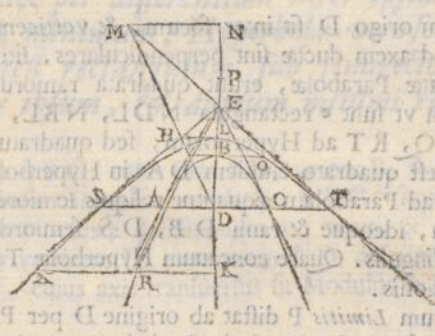
PROPOSITIO LVI.

IN Parabola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine externa, est ad* Locum *concauum Hyperbolæ æquilateræ circumaucto triangulo inscriptæ, cuius axis transuersus æquatur Modulo ex laterali, vertex verò est terminus inferior Moduli. Centrum autem Hyperbolæ, quod est quoque centrum Moduli, distat ab origine per semirectum Parabolæ, & ab huius vertice per aggregatum ex eodem semirecto, & ramo minimo; & Hyperbolæ semiaxis transuersus potest rectangulum sub semirecto Parabolæ in aggregatum ex ipso, & ramo minimo.*

Esto

ESto Parabola ABC, cuius axis BD, vertex B, triangulum circumscriptum AEC, & circumauctum SET, inuentusque Modulus ex laterali sit NL iuxta definitionem xvj. huius, cuius centrum P &c. Dico si per verticem L, circa axem LD descripta sit Hyperbola æquilatera XLO, cuius axis transuersus sit Modulus NL, ipsam circumaucto triangulo esse inscriptam, & huius concauum esse *Limitem* Ordinationis ramorum ab externa origine D ad datam Parabolam ABC ductorum.

Agatur ex E alius quicunque ramus ER præter minimum EB, & contingentem EA, sintque ex B, R, ordinatæ BO, XK, vsque ad Hyperbolam in O, X, productæ.



Quoniam igitur NL ponitur Modulus ex laterali EA datæ Parabolæ ABC, & P illius centrum, erit quadratum semiordinatæ DA semibasis trianguli circumscripti æquale [a] rectangulo DEP, & si his addatur commune quadratum DE, quadrata simul AD, DE, siue vnicum EA, vel huic æquale DS, rectangulo DEP cum quadrato DE, hoc est vnico rectangulo PDE, siue rectangulo ipsi æquali [b] NDL æquale erit, sed huic æquatur [c] etiam quadratum semiordinatæ ex D in Hyperbola æquilatera XLO, ergo & quadratum EA quadrato eiusdem semiordinatæ ex D erit æquale, ideoque Hyperbola transit omnino per S, pariterque ad aliam partem per T; sed rectangulum DEP æquale est [d] quadrato semiaxis transuersi PL, ergo rectæ ES, ET Hyperbolam contingunt [e] ad S, T; ac propterea Hyperbola XLO circumaucto triangulo SET est inscripta, & rami tangentes EA, EC æquales sunt semiordinatis DS, DT in Hyperbola.

[a] 23. huius.
[b] 19. huius ad num 3.
[c] 21. primi Conic.
[d] 19. huius ad num. 2.
[e] 37. primi Conic.

Insuper, quadrata ramorum EA, EB, ER ad Parabolam sunt inter se vt [f] rectangula NDL, NBL, NKL, vel (ob Hyperbolam) vt [g] quadrata DS, BO, KX semiordinatarum in ipsa Hyperbola, sed quadratum vnius rami EA æquale est quadrato semiordinatæ DS, in Hyperbola, ergo & reliqui rami EB, ER ad Parabolam reliquis semiordinatis BO, KX, in Hyperbola, singuli singulis æquales erunt &c. Quare concauum huiusmodi Hyperbolæ XBLT est *Limes* propositæ Ordinationis.

[f] 22. huius.
[g] 21. primi Conic.

Tandem, centrum P huius *Limitis* constat distare ab origine E per semirectum [h] datæ Parabolæ, & ab huius vertice B per PB (quæ æqua-

[h] 23. huius.

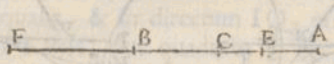
tur

tur aggregato ex semirecto PE, & ramo minimo EB) atque Hyperbolæ semiaxem transuersum PL posse rectangulum sub DP, æquale prædicto aggregato, in idem Parabolæ semirectum PE. Quæ omnia ostendere proponebamus.

PROPOSITIO LVII. LEMMA IV.

SI inter AB, BC sit media geometrica BE, cui sit æqualis, & in directum BF. Dico rectangulum FAE rectangulo BAC æquale esse.

QVum sit enim tota AB ad totam BE, vt pars BE ad partem BC erit tota AB ad totam BE, vel ad BF ipsi æqualem positam, vt



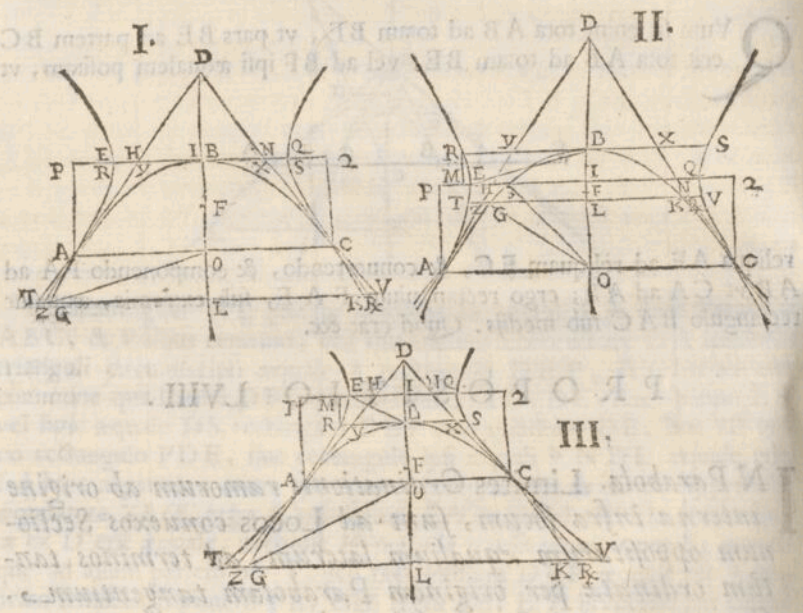
reliqua AE ad reliquam EC, & conuertendo, & componendo FA ad AB vt CA ad AE; ergo rectangulum FAE, sub extremis, æquatur rectangulo BAC sub medijs. Quod erat &c.

PROPOSITIO LVIII.

IN Parabola. Limites *Ordinationis ramorum ab origine interna infra focum, sunt ad* Locos *conuexos Sectionum oppositarum æqualium laterum, ad terminos tantùm ordinatæ per originem Parabolam tangentium. Centrum verò ipsarum distat ab origine verticem versus per semirectum Parabolæ. Semiaxis autem transuersus potest rectangulum sub axis segmentis inter centrum ipsarum, & terminos axis trianguli circumscripti comprehensis.*

ESto Parabola ABC, cuius axis BO, vertex B, focus F, infra quem sit origo ramorum O, quæ, vel distet a vertice B per interuallum OB semirecto Parabolæ æquale, duplum nempe distantiæ FB, quæ est quarta pars recti, vt in prima figura; vel per interuallum OB ipso semirecto maius, vt in secunda, vel per minus, vt in tertia; & in omnibus super ordinatam AC per originem sit triangulum circumscriptum ADC,

cuius axis DO; ab origine autem O ſumatur ſuper axem O D ad partem verticis D recta OI æqualis ſemirecto, quæ in prima figura incidet in Parabolæ verticem B, in ſecunda intra, in tertia verò extra Sectionem cadet (ex Hypotheſi) : in omnibus verò per I ſit ordinata E Q, ſuper quam ex I ſumantur vtrinque IE, I Q, vtraque potens rectangulum ſub OI, ID ſegmentis axis trianguli circumſcripti, (quas IE, IQ, in prima, & ſecunda figura, æquales eſſe minimo ramo ducibili ex O ad Parabolam inferiùs demonſtrabitur) & centro I, cum ſemiaxibus tranſuerſis IE, IQ, deſcriptæ concipiantur Sectiones oppoſitæ æquilateræ E T, QV. Dico has in punctis tantùm A, C, Parabolam contingere, ipſarumque conuexa eſſe *Limites* propoſitos.



Iam, primò, in tertia figura, quùm ſemiordinata O A infra focum F ſit minor a quàm dupla ſegmenti axis O B, & axis O D duplus ſit eiuſdem O B, ob tangentem A D, erit A O minor ipſa O D, ſed quadratum A O æquatur b rectangulo ſub O B in rectum latus, nempe in duplam O I, hoc eſt rectangulo ſub dupla O B, hoc eſt ſub O D in ipſam O I (quod pari modo oſtenditur in reliquis figuris) ergo A O media proportionalis eſt inter O D, O I; ideoque I O ad O A eſt vt O A ad O D, ſed O A minor eſt O D, vt nuper oſtendimus, ergo O I eò minor erit ipſa O D, ſed O B poſita eſt minor O I, ergo punctum I in hac tertia figura neceſſariò cadit inter B Parabolæ verticem, & D verticem trianguli circumſcripti; in prima verò, vt monitum fuit, cadit in ipſum B, & in ſecunda infra B, ita vt in ſingulis ordinata ex I ſecet omnino latera-

a Schol. Prop. 1. huius.

b 11. primi Conic.

rales

rales tangentes AD, CD in H, N; quæ producta secet AP, C2, ad axem BO æquidistanter ductas in P, 2.

Et quum, in singulis figuris, sit, vt supra adnotauimus, quadratum AO æquale rectangulo sub DO axe trianguli circumscripti in semirectum latus OI, erit DO ad OA, vel DI ad IH, vt AO ad OI, ac ideo rectangulum sub DI, IO æquatur rectangulo sub AO, IH, vel sub PI, IH, sed illi sub DI, IO æquatur quadratum sumptæ mediæ IE, quare EI media est quoque proportionalis inter PI, IH, ideoque punctum E cadit inter P, & H: pariterque punctum Q inter N, & 2, cadere demonstrabitur.

Insuper, quoniam duo simul rectangula IPH, PIH æqualia sunt quadrato IP, siue quadrato AO, siue rectangulo DOI (ipsi æquali demonstrato) siue rectangulo DIO cum quadrato IO, & rectangulum PIH æquale ostensum fuit rectangulo DIO, ergo reliquum rectangulum IPH reliquo quadrato IO æquale est, siue quadrato PA. Quum verò IE sit ostensa media proportionalis geometrica inter PI, IH, ipsique IE sit, ex constructione, æqualis, & in directum IQ, erit rectangulum QPE æquale [a] rectangulo IPH, siue quadrato PA, hoc est rectangulum QPE ad quadratum PA habebit rationem æqualitatis, quam habet quoque idem rectangulum QPE ad quadratum semiordinatę ex P in Hyperbola æquilatera ET, ergo PA æqualis est ipsi semiordinatę ex P: quare descripta Hyperbola ET transit omnino per A terminum ordinatæ in Parabola per datam originem O: pariterque huic opposita Hyperbola SQV transit per alterum terminum C ordinatæ eiusdem; sed rectangulum PIH æquatur quadrato semiaxis transuersi IE, vt iam demonstratum fuit, ergo recta AHD Hyperbolam contingit [b] ad A, sed ipsa AD contingit quoque ad A Parabolam ABC, ex Hypothesi, Hyperbola verò tota est ad vnam partem tangentis AD, Parabola autem tota ad alteram, ergo huiusmodi Sectiones in terminis tantùm A, C, ordinatę per originem se mutuò contingunt conuexo.

[a] Lemma præcedens.

[b] Conuers. 37. primi Conic.

Et quum, in prima figura, semirectum OI incidat, ex Hypothesi, in verticem B, sitque IE sumpta media proportionalis inter OI, ID erit quoque media inter OB, BD, sed hæ sunt æquales (ob tangentem AD) ergo, & BE vtrique ipsarum OB, BD æqualis erit, hoc est minimus ramus OB, ad Parabolam, æqualis semiordinatę BE vsque ad Sectionem oppositam AE.

In secunda verò, & tertia, ex vertice B agatur contingens Parabolam, quæ oppositas secet in R, S, laterales verò tangentes in Y, X. Et quoniam rectangulum OID æquatur quadrato mediæ IE perpendiculariter positæ super OD, punctum I erit ad Circuli peripheriam, cuius diameter OD; sed OB, BD sunt æquales, ergo iuncta BE alteri ipsarum, nempe OB æqualis erit.

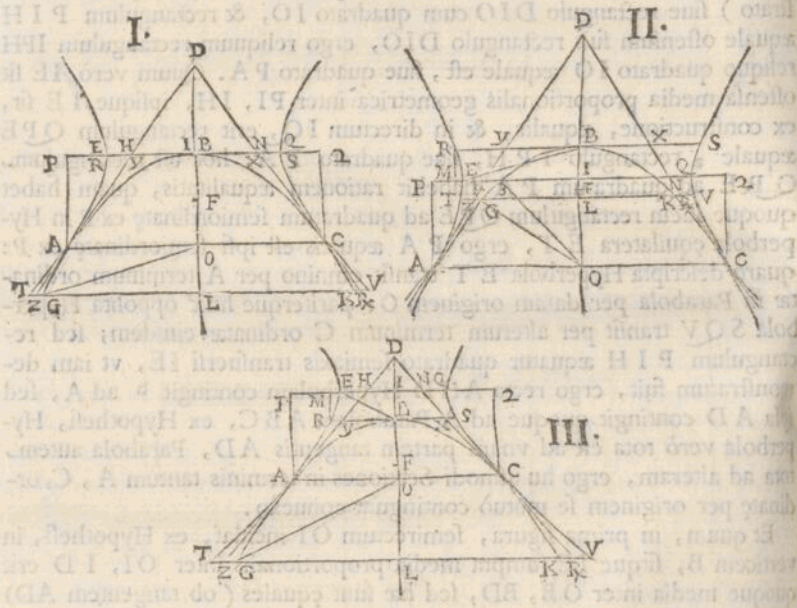
Præterea ad axem EP Hyperbolæ AE ordinetur ex R recta RM. Erit ergo, ob Hyperbolam æquilateram, rectangulum QME æquale quadrato MR siue quadrato IB, & communi addito quadrato IE, rectangulum QME cum quadrato EI, vel vnicum quadratum IM, vel

quadratum BR, duobus simul quadratis EI, IB, vel vnico quadrato BE, vel quadrato rectæ BO (quam ipsi BE æqualem nuper demonstrauimus) æquale erit, ergo, & ramus verticalis OB ad Parabolam æqualis est semiordinatæ BR vsque ad Hyperbolam AE.

Sit tandem quicunque alius ramus OG ex origine O in singulis figuris, & per G ordinetur recta, quæ laterales tangentes secet in Z, ℞, & oppositas Sectiones in T, V, Parabolam in G, K, & axem in L.

Et quoniam in omnibus figuris rectæ AD, CD, oppositas contingunt ad A, C, atque recta AC iungit contactus, cui æquidistant rectæ RS, TV, quæ Sectiones, & contingentes secant, erit rectangulum SYR ad VZT, vt [a] quadratum tangentis YA ad quadratum tangentis AZ.

a ex 20. tertij Conic.



Porrò, quia AY, BY, contingunt Parabolam ad A, B, atque alteri ipsarum, vt puta ipsi DY, ducta est æquidistans Z℞ Parabolam secans in G, K, & tangentes in Z, ℞, erit quadratum BY, siue rectangulum XBY ad rectangulum KZG, vel ad rectangulum ℞GZ vt [b] idem quadratum YA ad idem quadratum AZ.

b ex 16. tertij Conic.

Quum itaque tam rectangulum SYR, ad VZT, quàm rectangulum XBY ad ℞GZ sit vt quadratum YA ad AZ, erunt duo simul antecedentia, nempe rectangulum SYR cum rectangulo XBY, nempe vnicum rectangulum SBR, siue quadratum BR, ad duo simul consequentia, nempe ad rectangulum VZT cum rectangulo ℞GZ, nempe ad vnicum rectangulum VGT, vt quadratum YA ad quadratum AZ, vel vt quadratum BO ad quadratum OL; sed antecedentia BR, BO sunt æqualia,

vt in

vt in omnibus figuris ſuperiùs concluſum fuit, ergo & rectangulum VGT quadrato LO æquale erit, ſi his igitur commune addatur quadratum LG, erit rectangulum VGT cum quadrato LG, vel vnicum quadratum LT æquale quadratis ſimul OL, IG, ſiue vnico OG: quare OG ramus ad Parabolam æquatur ſemiordinatæ LT vſque ad Hyperbolam AE, & ſic de ſingulis ramis, & ſemiordinatis ad vtranque partem axis OB. Quare conuexa huiuſmodi oppoſitarum Sectionum, ſunt *Limites* Ordinationis propoſitæ. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

EX his hæc neceſſariò ſunt animaduertenda.

1. Primò diſtantiam centri *Limitum* a vertice datæ Parabolæ æqualem eſſe differentiæ inter ipſius ſemirectum latus, & ramum verticalem.

Nam IB, quæ eſt diſtantia a centro *Limitum* I ad verticem B datæ Parabolæ, eſt differentia inter OI ſemirectum, & ramum verticalem OB.

2. Secundò, quando data origo diſtat a vertice Parabolæ per interuallum non minus ſuo ſemirecto; tunc ſemiaxis tranſuerſus *Limitum* minimo ramo ex origine ad Parabolam ducto æqualis eſt.

In prima enim figura, in qua ſemirectum OI incidit in verticem B, ipſa OI eſt [a] ramus minimus, quę ſemiordinatæ BR, vel ſemiaxi BE æqualis demonſtrata fuit.

[a] 3. ſecundi noſtræ Diuinat. in Apoll.

In ſecunda verò, (iuncta O3 ab origine vſque ad interſectionem ſemiaxis IE inuenti *Limitis* cum Sectione Parabolæ AB). Quum OI altitudo rami O3 ſit æqualis ſemirecto Parabolę, ex conſtructione, erit O3 minimus [b] ramus ex origine O, ſed ramus O3 æqualis eſt ordinatę IE, vſque ad *Limitem* (ex demonſtratis in ſuperiori) cuius ipſa IE ſit ſemiaxis tranſuerſus: quare patet &c.

[b] ex 20. ſec. ibidem.

3. Tertiò, quoniam, in Parabola, axis OD trianguli circumſcripti ADC eò maior eſt, quò magis origo O diſtat a vertice B, & ſegmentum OI, in ſingulis figuris, ſemper idem eſt, nempe æquale ſemirecto lateri, ſemperque minus eodem axe OD; reliquum ſegmentum DI eò maius erit, quò magis diſtabit origo O a vertice B.

Rectangulum ITAQUE OID, ſiue quadratum medię IE, hoc eſt ipſa IE ſemiaxis tranſuerſus *Limitum* eò maior erit, quò magis data origo a datę Parabolę vertice remouetur, adeoque ipſorum *Limitum*, ſeu Sectionum oppoſitarum EA, QC, latera ſemper magis augentur: nam ipſę Sectiones ponuntur æqualium laterum.

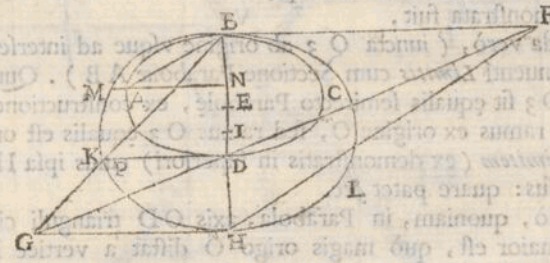
PRO-

PROPOSITIO LIX.

IN Ellipſi prolata. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, eſt ad* Locum *concauum alterius Ellipſis, per eundem verticem ſibi circumſcriptæ, cuius axis tranſuerſus æquatur Modulo ex angulo ſemirecto, & centrum* Limitis *cum centro Moduli congruit. Rectum verò latus eſt idem, ac datæ Ellipſis, & ad hoc habet tranſuerſum* Limitis *eam rationem, quàm tranſuerſum Ellipſis datæ ad differentiam ſuorum laterum.*

SIT prolata Ellipſis ABC, cuius centrum E, axis minor BD, vertex B, rectum latus BF, regulatrix DF, & Modulus ex angulo ſemirecto ſit BH, qui maior eſt [a] tranſuerſo BD, & cuius centrum I. Dico, ſi per verticem B, circa axem BDH, cum axe tranſuerſo BH, rectoque latere BF deſcribatur Ellipſis KBL, hanc datæ Ellipſi ABC eſſe circumſcriptam, & ipſius concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

[a] Schol. Prop. 13 huius.



Compleatur figura Modulum determinans, atque ex vertice D ſit ordinata, quæ deſcriptam Ellipſim ſecet in K, & iunctam BG ſemirectum angulum conſtituentem cum BD, in P, ſitque alius quicunque ramus BA, & per A ordinata MN, ſitque Ellipſis KBL regulatrix HF,

Quum itaque ſit BH maior BD, regulatrix FH tota cadet infra regulatricem FD, ideoque deſcripta KBL tota cadet extra [b] datam Ellipſim ABC, ſiue ipſi erit circumſcripta.

[b] ex 19 pr. noſtræ Diuinat. in Apoll.

Et quum, ob angulum ſemirectum GBH, & rectos BDP, DHG, ſit DP æqualis DB, & HG æqualis HB, ſitque, ob Ellipſim KBL, HB ad BF vt [c] rectangulum HDB ad quadratum ſemiordinatæ DK, erit quoque HG ad BF, vel HD ad DB, vel rectangulum HDB ad quadratum DB, vel ad DP, vt idem rectangulum HDB ad quadratum DK, ac propterea quadrata DB, DP, DK, inter ſe ſunt æqualia, ideoque minimus ramus BD ad Ellipſim datam æqualis ſemiordinatæ DK in deſcripta KBL.

[c] 21 primi Conic.

[d] 14. huius

Inſuper, quadrata ramorum BD, BA ſunt inter ſe vt [d] rectangula HDB,

HDB, HNB, vel ob Ellipſim KBL vt [a] quadrata DK, MN, quare & latera erunt vt latera, ſed permutando ramus BD æquatur ſemiordinatæ DK, ergo & ramus BA ſemiordinatæ NM æqualis erit, & ſic de ſingulis, tum ramis, tum ſemiordinatis &c. Quapropter concauum huiuſmodi Ellipſis KBL eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 21. primi Conic.

Demum, quum DH ad HB ſit vt GD ad GF, vel vt DP ad BF, vel vt DB, ipſi DP æqualis, ad BF, hoc eſt vt tranſuerſum datæ Ellipſis ad ſuum rectum, erit diuiſim HD ad DB, vel HG ad BF, vel HB ad BF, hoc eſt tranſuerſum deſcripti *Limitis* ad ſuum rectum, vt DB ad differentiam inter DB, BF, hoc eſt vt tranſuerſum datæ Ellipſis prolatæ ad differentiam ſuorum laterum. Quod erat vltimò demonſtrandum.

SCHOLIVM I.

QVum ſuperiùs demonſtratum ſit DH ad HB eſſe vt DB ad BF, ſiue vt tranſuerſum ad rectum datæ Ellipſis, erit differentia inter DH, & HB, ſiue BD ad HB, vel, ſumptis harum ſubduplis, erit EB ad BI, ſeu diſtantia inter centrum datæ Ellipſis, & originem ad diſtantiam inter originem, & centrum *Limitis*, vt differentia laterum DB, BF ad rectum BF: quare BI diſtantia centri *Limitis* a vertice datæ Ellipſis, hoc eſt ab origine ramorum, eſt quarta proportionalium poſt tres notas lineas, differentiam nempe inter latera DB, BF; latus BF; & ſemitranſuerſum BE datæ Ellipſis.

SCHOLIVM II.

HInc, & ex xx. primi noſtræ Diuinat. in Apoll. conſtat inuentum *Limitem* KBL eſſe minimam Ellipſium datæ circumſcriptibilium cum eodem tranſuerſo latere BH, datamque Ellipſim eſſe maximam inuentæ inſcriptibilium, circa eundem axem tranſuerſum BD.

SCHOLIVM III.

ANimaduertendum eſt inſuper inuentum *Limitem* KBL aliquando eſſe Ellipſim prolatam, aliquando oblongam, aliquando etiam Circulum, pro ratione ſcilicet, quam habent latera DB, BF datæ Ellipſis prolatæ.

Si enim rectum latus BF fuerit plus quàm duplum tranſuerſi BD, primum accidet; ſi autem BF minus fuerit quàm duplum BD, ſecundum; ſi tandem BF fuerit præcisè duplum BD, tertium continget: quæ omnia facili negotio ex vltimò demonſtratis eliciuntur.

SCHO-

SCHOLIVM IV.

DEnique patet Modulum B H expeditiùs conſequi dum (applicata DL ipſi DB æquali) iuncta FL producatur vſque ad occurſum cum BD in H: punctum enim H terminat Modulum BH priori methodo inuentum &c. & huius demonſtratio eſt per ſe ſatis obuia.

PROPOSITIO LX.

IN Ellipſi prolata. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in centro, eſt ad* Locum *concauum alterius Ellipſis ſibi concentricæ, & circumſcriptæ, cuius axis coniugatus congruit cum axe maiore, ſeu coniugato datæ Ellipſis, axis verò tranſuerſus æquatur Modulo ex verticali, & ad rectum ſuum eſt vt axis tranſuerſus datæ Ellipſis ad huius laterum differentiam. At ſemiaxis tranſuerſus* Limitis, *ſeu ſemimodulus poteſt aggregatum quadratorum ex quadrato ſemiaxis minoris datæ Ellipſis, & ex quadrato tertio loco proportionali poſt differentiam quadratorum ſemiaxium, & quadratum eiuſdem ſemiaxis minoris Ellipſis datæ.*

SIT Ellipſis prolata A B C D, cuius centrum E, axis tranſuerſus, ac minor B D, rectum latus B F, & axis coniugatus, ac maior A C, ſitque L N Modulus ex verticali B G, cuius centrum idem erit [a] ac Ellipſis centrum E: ſumptaque B O ipſi B D (quæ minor eſt recto B F) æquali, fiat vt B O ad O F, ſiue vt tranſuerſus axis datæ Ellipſis ad laterum differentiam, ita Modulus L N ad aliam L Q, & circa tranſuerſum axem L N; cum recto L Q deſcribatur Ellipſis L R N, quæ concentrica erit datæ A B C. Dico hanc datæ eſſe circumſcriptam, eamque in punctis tantùm A, C, contingere, atque eſſe *Limitem* propoſitum.

[a] ex 17 huius, & Defin. 15.

Etenim quum ſit B D, vel B O, ipſi æqualis, ad B F, ſiue tranſuerſum ad rectum vt [b] quadratum B D ad quadratum A C, vel ſumptis ſubquadruplis, vt quadratum B E ad E A, vel ad B G, vel ad E I ipſi B G æqualem (ob inuentionem Moduli L N) vel ad duo ſimul quadrata E B, B I, erit diuiſim B O ad O F vt quadratum E B ad B I, vel vt quadratum E L ad L H, vel vt rectangulum N E L ad quadratum L H, vel ad quadratum E A; ſed B O ad O F eſt vt N L ad L Q, ex conſtructione, vel vt [c] prædictum rectangulum N E L ad quadratum ſemiordinatæ ex E in Ellipſi L R N, ergo quadratum ſemiordinatæ E A in data Ellipſi A B C æquale eſt quadrato ſemiordinatæ ex E in deſcripta R L N: quare hæc neceſſa-

[b] ex Primo Conic.

[c] 21. primi Conic.

rio

riò tranſit per A; ac ſimiliter demonſtrabitur tranſire per C. Et quum hæ ſint circa eundem axem AC, erit altera alteri circumſcripta.

Et quoniam LN eſt inuentus Modulus pro Ellipſi ABC, erit quadratum rami EA ad quadratum rami EB, vt[a] rectangulum NEL ad NBL, ſed & quadratum eiuſdem ordinatæ EA in inuenta Ellipſi ALC ad quadratum ordinatæ BR in eadem Ellipſi eſt vt[b] rectangulum NEL ad NBL, ergo quadratum EA ad EB, eſt vt idem EA ad BR, ideoque EB æquale ipſi BR, hoc eſt minimus ramus EB ad Ellipſim datam æqualis ſemiordinatæ BR in inuenta.

a 18. huius.

b 21. primi Conic.

Similiter ſi concipiatur alius quicunque ramus ES, & per S ordinata VT; eſt quadratum EA ad ES vt[c] rectangulum NEL ad NVL, vel vt[d] quadratum idem EA ad VT in Ellipſi NAL; quadrata igitur ES, VT ſunt æqualia, ſiue ramus ES ad Ellipſim datam æqualis ſemiordinatæ VT in inuenta; & hoc ſemper de ſingulis ramis &c. Quapropter concauum Ellipſis NALC eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis.

c 18. huius.

d 21. primi Conic.

Demum, circumſcribatur Ellipſi ALCN rectangulum HM, ducaturque diameter HM per centrum E, & latus MX verticalem tangentem GB ſecet in P.

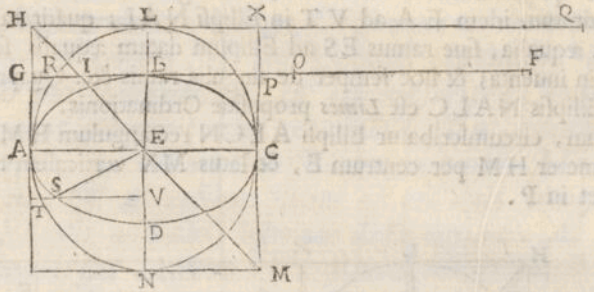


Et quum, ex inuentione Moduli LN, ſit quadratum EI, vel duo EB, BI æqualia quadrato BG, dempto communi BI, remanet quadratum EB æquale rectangulo PIG: ſed ratio quadrati IB ad BE componitur ex ratione lineæ IB ad BE, vel IP ad PM, vel IP ad BN, & ex ratione lineæ eiuſdem IB ad BE, vel IG ad GH, vel IG ad BL, & ex his rationibus IP ad BN, & IG ad BL conficitur ratio rectanguli PIG, ſiue quadrati BE ad rectangulum NBL, ergo quadratum BI (quod eſt differentia inter quadrata GB, BE, vel inter quadrata EA, EB ſemiaxium datæ Ellipſis) ad quadratum ſemiaxis minoris EB eſt vt quadratum EB eiuſdem ſemiaxis ad rectangulum NBL, quod eſt differentia inter quadratum ſemitranſuerſi EL inuenti *Limitis*, & quadratum ſemiaxis minoris EB datæ Ellipſis. Quadratum ergo ſemitranſuerſi EL in inuento *Limite* poteſt ſummam quadratorum, nempe ſemiaxis minoris datæ Ellipſis, & ſpatium tertio loco proportionale poſt differentiam quadratorum ſemiaxium datæ, & quadratum minoris ſemiaxis eiuſdem datæ Ellipſis. Quod erat vltimò &c.

SCHOLIVM.

EX conſtructis, & demonſtratis apparet huiuſmodi *Limitem* nonnunquam Ellipſim prolatam, nonnunquam oblongam, nonnunquam, verò Circulum eſſe.

Si enim data Ellipſis prolatæ minor axis tranſuerſus D B, vel B O, minor fuerit quàm ſubduplus ſuo recto B F, erit B O minor O F, quumque factum ſit vt B O ad O F, ita tranſuerſus N L inuenti *Limitis* ad rectum L Q, erit quoque L N minor L Q, & A L C N Ellipſis prolata.



Si verò B D, vel B O fuerit maior ſubduplo ipſius B F, tunc B O maior erit O F, & N L maior L Q, & ſic Ellipſis A L C N erit oblonga.

Si tandem B D vel B O fuerit ſubdupla B F, tunc erit B O æqualis O F, & ob id tranſuerſus axis N L æqualis recto lateri L Q, & per conſequens *Limes* A L C N Circulus erit.

PROPOSITIO LXI.

IN Ellipſi prolata. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter centrum, & verticem, eſt ad* Locum *concauum alterius Ellipſis ſibi circumſcriptæ, cuius centrum idem ſit ac Modulus ex verticali, & axis tranſuerſus idem ac Modulus, qui ad ſuum rectum latus eſt vt tranſuerſus Ellipſis datæ ad differentiam laterum eiuſdem.*

SIT Ellipſis prolata A B C, cuius axis tranſuerſus ſit minor axis B K, rectum latus B Z, vertex B, centrum O, & inter B, & O ſit data origo D, per quam tranſeat ordinata A C baſis trianguli circumſcripti A E C, ſitque inuentus Modulus N L ex verticali B G tranſuerſim aptata ex D, vt requiritur in Definit. xv. huius &c. & ſit Moduli centrum P, quod cadit

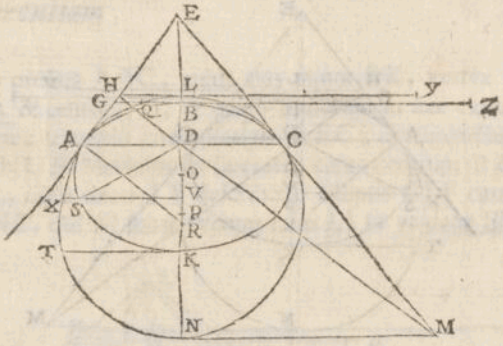
dit infra a centrum O ad partes K: per verticem autem L describatur Ellipsis LQM, cuius axis transuersus sit ipse Modulus LN, qui ad suum rectum LY sit vt transuersus BK datæ Ellipsis ad differentiam eiusdem laterum B K, BZ. Dico Ellipsim hanc esse datæ circumscriptam, eiusque concauum esse *Limitem* propositum.

a ex 17. huius.

Ducatur ex A super tangentem AE perpendicularis AR.

Et quoniam in Coni-sectione centrum habente, distantia inter centrum Sectionis, & centrum Moduli ex Verticali, ad distantiam inter centrum Moduli, & basim trianguli circumscripti est vt transuersum Sectionis latus ad suum rectum, erit OP ad PD vt transuersum KB ad BZ, vel vt b OD ad DR. Quum igitur tam OD ad DR, quàm OP ad PD sit vt transuersum ad rectum, erit diuisim tam DO ad OR, quàm PO ad OD vt transuersum ad laterum differentiam, & antecedentes simul proportionum termini, ad consequentes simul terminos earundem, nempe DO cum OP, siue PD ad RO cum OD, siue ad DR, erit vt vnus antecedens ad suum consequentem, hoc est vt PO ad OD, siue

b ex 23. sec. nostræ Diuinat. in Apoll.



vt transuersum ad differentiam, vel, ex constructione vt, NL ad LY, sed PD ad DR, sumpta communi altitudine DE, est vt rectangulum EDP ad rectangulum EDR, vel (his cum æqualibus permutatis) vt c rectangulum NDL ad quadratum ordinatæ DA in Ellipsi ABC (nam ipsa DA in triangulo rectangulo EAR perpendiculariter cadit super basim ER) & vt NL ad LY, ita est d ob Ellipsim TQL, rectangulum idem NDL ad quadratum ordinatæ ex D in eadem Ellipsi TQL: quare vtraque harum Ellipsium transit per A; eademque ratione, & per C: sed rectangulum DPE æquale est e quadrato semidiametri PL, ergo EA, EC contingunt f Ellipsim TALC ad puncta A, C, sed in ijsdem quoque contingunt Ellipsim datam ABC, ex constructione, ergo huiusmodi Ellipses se mutuò contingunt g in ijsdem tantùm punctis A, C, ac propterea TALC ipsi datæ ABC est circumscripta.

c 19. huius ad num. 3.

d 21. primi Conic.

e 19. huius ad num. 2.

f ex conuerso 37. primi Conic.

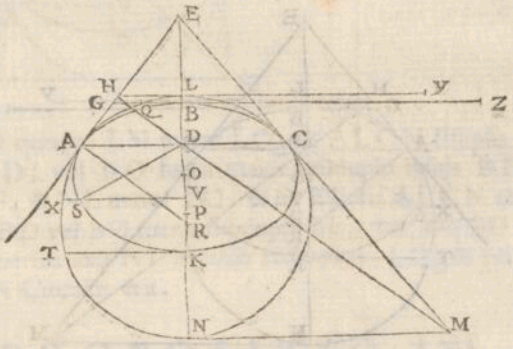
g 61. primi nostri de Max. & Min.

Ellipsis itaque TLC secet tangentem verticalem BG in Q; sitque alius quicunque ramus DG, & per S sit ordinata VX, per K verò sit verticalis tangens KT.

Quum igitur ex terminis ramorum D K, D S, D A, D B &c. ductæ
a 18. huius. sint ordinatæ ſuper axem B K, atque N L ſit Modulus ex verticali, erunt
quadrata ramorum D K, D S, D A, D B &c. vt ſunt a rectangula
b 21. primi Conic. N K L, N Y L, N D L, N B L, vel ob Ellipſim T A L C vt b ſunt quadrata ſemiordinatarum K T, Y X, D A, B Q, ſed quadratum rami D A æquale eſt quadrato ſibi congruentis ſemiordinatæ D A, ergo & reliqua reliquis æqualia erunt, hoc eſt ipſi rami ipſis ſemiordinatis, & ſic de ſingulis &c. Quare concauum deſcriptæ Ellipſis N A B C eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

SCHOLIVM I.

EX his facilè apparet huiuſmodi *Limitem* tum oblongam, tum prolatam Ellipſim, ac tum Circulum euadere. Quum enim ſemper ſit N L ad L Y vt K B ad differentiam laterum K B, B Z (ex conſtructione) ſi K B, quæ minor eſt B Z, fuerit ipſa maior quàm ſubdupla, erit *Limes* N A L C Ellipſis oblonga; ſi verò minor quàm ſubdupla, erit prolata; at ſi tantùm ſubdupla, tunc *Limes* Circulus erit, vt in præcedentibus oſtenſum fuit.



SCHOLIVM II.

EX demonſtratis præterea, haud difficile eſt colligere.

1. Primò, quod P centrum *Limitis* diſtat a data origine B per quartam proportionalium, poſt tres datas, nempe differentiam laterum datæ Ellipſis, latus rectum eiuſdem, & diſtantiam O D, quæ eſt inter centrum Ellipſis datæ, & originem. Quum ſit enim O P ad P D, vt tranſuerſum ad rectum Ellipſis datæ, patet O D ad D P eſſe vt differentia eorundem laterum ad idem rectum.

2. Secundò, quod idem P centrum *Limitis* diſtat a vertice B datæ Ellipſis

Ellipſis per interuallum OB æquale aggregato ex quarta inuenta OD, & ex DB ramo minimo ex origine ducto.

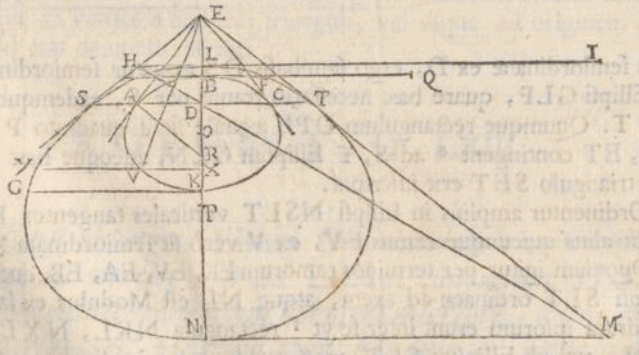
3. Tertiò, LP ſemiaxem *Limitis* poſſe rectangulum ſub ſegmento axis inter centrum *Limitis*, & baſim trianguli circumſcripti, & inter idem centrum, & verticem trianguli eiuſdem: rectangulum enim ſub D P, P E æquatur [a] quadrato ſemidiametri tranſuerſæ P L.

a 37. primi Conic.

PROPOSITIO LXII.

IN Ellipſi prolata. Limes *Ordinationis ramorum ab origine externa, eſt ad* Locum *concauum alterius Ellipſis circumaucto triangulo inſcriptæ, cuius axis tranſuerſus, & centrum cum Modulo ex laterali, eiuſque centro congruit, idemque tranſuerſus ad ſuum rectum latus eſt vt axis tranſuerſus Ellipſis datæ ad ipſius laterum differentiam.*

ESto Ellipſis prolata A B C, cuius axis minor B K, vertex B, rectum latus B Q, & centrum O, & origo ramorum in axe extra ſumpta ſit E, quæ ſit vertex trianguli circumſcripti A E C; circumauctum verò ſit S E T, atque N L ſit Modulus ex laterali, cuius centrum P &c. Dico ſi per verticem L, circa axem L K deſcribatur Ellipſis G L F cum axe tranſuerſo Moduli N L, qui ad ſuum rectum latus L I ſit vt datæ Ellipſis tranſ-



uerſus axis B K ad differentiam laterum eiuſdem, ipſam Ellipſim G L F circumaucto triangulo S E T inſcriptam eſſe, eiuſque concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

Super tangentem A E ſit normalis A R.

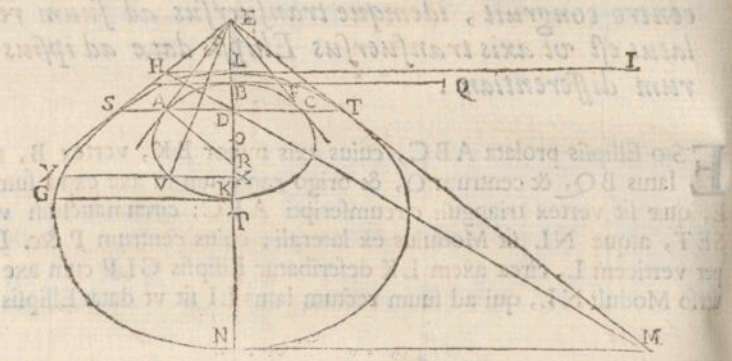
Et quoniam in Coni-ſectione centrum habente, diſtantia inter centrum Sectionis, & centrum Moduli ex laterali ad diſtantiam inter centrum

trum Moduli, & verticem trianguli circumſcripti eſt vt tranſuerſum Sectionis latus ad ſuum rectum, erit OP ad PE vt tranſuerſum latus BK ad rectum BQ, vel vt [a] OD ad DR. Quum igitur tam OD ad DR, quàm OP ad PE ſit vt prædictum latus tranſuerſum ad ſuum rectum, erit conuertendo, per conuerſionem rationis, & diuidendo tam PO ad OE, quàm DO ad OR vt idem tranſuerſum ad laterum differentiam, & permutando, componendo, & iterum permutando PD ad ER vt DO ad OR, vel vt idem tranſuerſum ad eandem laterum differentiam, vel ex Hypotheſi, vt NL tranſuerſum deſcriptæ Ellipſis ad ſuum rectum LI; ſed PD ad ER, ſumpta DE communi altitudine, eſt vt rectangulum PDE, vel vt rectangulum ipſi æquale [b] NDL ad rectangulum RED, vel ad quadratum EA (in triangulo rectangulo RAE) vel ad quadratum ſemibaſis DS ipſi EA æqualis, ex ſuppoſitione, in circumaucto SET; & NL ad LI, ob Ellipſim GLF, eſt vt idem [c] rectangulum NDL ad quadra-

[a] ex 23. ſec. noſtræ Diuinat. in Apoll.

[b] 19. huius. ad num. 3.

[c] 21. primi Conic.



tum ſemiordinatæ ex D, ergo ſemibaſis DS æquatur ſemiordinatæ ex D in Ellipſi GLF, quare hæc neceſſariò tranſit per S, eademque ratione per T. Quumque rectangulum DPE æquale ſit [d] quadrato PL, rectæ ES, ET contingent [e] ad S, T Ellipſim GLN, adeoque hæc circumaucto triangulo SET erit inſcripta.

[d] 19. huius. ad num 2.

[e] ex conuerſo 37. primi Conic.

Ordinentur ampliùs in Ellipſi NSLT verticales tangentes KG, BF, & ſit alius quicunque ramus EV, ex V verò ſit ſemiordinata XY.

Quoniam igitur per terminos ramorum EK, EV, EA, EB, ductæ ſunt in Ellipſi SLT ordinatæ ad axem, atque NL eſt Modulus ex laterali &c. quadrata ipſorum erunt inter ſe vt [f] rectangula NKL, NXL, NDL, NBL, vel ob Ellipſim SLT, vt [g] quadrata ſemiordinatarum KG, XY, DS, BF, ſed horum homologa quadrata EA, DS ſunt æqualia, ob datam ipſorum laterum æqualitatem, ergo & reliqua reliquis homologè ſumpta, adeoque ipſorum latera, nempe ipſi rami, ipſis ſemiordinatis ſinguli ſingulis æquales erunt. Concauum ergo huiuſmodi deſcriptæ Ellipſis eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod &c.

[f] 22. huius.

[g] 21. primi Conic.

SCHO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [138] - 110
PUBLIC DOMAIN

SCHOLIVM I.

HVc quoque animaduertendum est huiusmodi *Limitem*, aut oblongæ, aut prolatæ Ellipsis Sectionem, aut Circuli peripheriam designare, velut in proximis tribus præcedentibus Propositionibus perspicuè satis ostensum fuit.

SCHOLIVM II.

1. EX demonstratis in hac itidem apparet, quod quum sit OP ad PE, vt transuersum datæ Ellipsis ad rectum, differentia EO ad EP erit vt differentia laterum ad rectum: adeoque P centrum *Limitis* GLF distat ab origine ramorum E per EP quartam proportionalium post tres notas magnitudines, videlicet post laterum datæ Ellipsis differentiam, latus rectum eiusdem, & distantiam OE inter centrum ipsius Ellipsis, & originem.

2. Item, quod idem punctum P centrum *Limitis* distat a vertice B datæ Ellipsis per interuallum PB, quod est differentia inter PE quartam proportionalium nuper inuentam, & EB ramorum minimum.

3. Postremò, quum quadratum PL æquale sit [a] rectangulo DPE, ipse PL semiaxis *Limitis* poterit rectangulum sub axis segmentis a centro Moduli, vel *Limitis* vsque ad basim trianguli circumscripti, & ab eodem centro vsque ad verticem eiusdem trianguli, vel vsque ad originem datam. Quod erat demonstrandum,

[a] 37. primi Conic.

PROPOSITIO LXIII.

IN Ellipsi oblonga. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, est ad* Locum *concauum Hyperbolæ per eundem verticem sibi circumscriptæ, cuius axis transuersus, & centrum cum Modulo ex angulo semirecto, cumque eius centro congruit, rectum verò latus idem est ac rectum Ellipsis, ad quod habet transuersum Hyperbolæ rationem eam, quam transuersum Ellipsis ad differentiam suorum laterum.*

Sit

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [139] - 111
PUBLIC DOMAIN

SIT Ellipſis oblonga ABC, cuius centrum E, axis maior BD, vertex B, rectum latus BF, regulatrix DF, ſitque BH Modulus ex angulo ſemirecto, & cuius centrum ſit I. Dico ſi per verticem B, circa axem BD, cum axe tranſuerſo HB, rectoque latere BF deſcribatur Hyperbola KBL, hanc eſſe Ellipſi ABC circumſcriptam, & ipſius concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

Compleatur figura Modulum exhibens, & ex vertice D ſit ordinata DL Hyperbolam in K, & rectam GBP, ſemirectum angulum efficientem PBD, ſecans in P, & ſit quicunque ramus BA, & per A ordinetur MN, iungaturque HFO regulatrix Hyperbolæ KBL.

Iam, quum harum Sectionum regulatrices FO, FD, ſe mutuò ſecantes in F infra ordinatam tangentem BF inter ſe magis ſemper recedant, erit [a] Hyperbola datæ Ellipſi circumſcripta.

[a] ex 19 pr. noſtræ Diuinat. in Apol.

Inſuper, quoniam (ob ſemirectos angulos PBD, GBH, & rectos ad D, H, in triangulis BDP, BHG) eſt DP æqualis ipſi DB, & GH ipſi HB, & (ob Hyperbolam) eſt HB ad BF vt rectangulum [b] HDB ad quadratum ſemiordinatæ DK, erit quoque HG ad BF, vel HD ad DB, vel rectangulum HDB ad quadratum DB vt idem rectangulum ad quadratum DK; quadrata igitur DB, DK ſunt æqualia, hoc eſt maximus ramus BD ad Ellipſim æqualis ſemiordinatæ DK in Hyperbola.

[b] 21. primi Conic.



Præterea quadrata ramorum BD, BA ſunt inter ſe vt [c] rectangula HDB, HNB, vel (ob Hyperbolam) vt [d] quadrata DK, NM, ergo & quadratorum latera erunt vt latera &c. ſed permutando ramus BD æqualis eſt ſemiordinatæ DK, ergo & ramus BA ſemiordinatæ NM æqualis erit, & ſic de ſingulis tum ramis, tum ſemiordinatis: quare concauum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[c] 14 huius.

[d] 21. primi Conic.

SCHO-

SCHOLIVM I.

1. QVoniam, ob æquidiſtantes D P, H G, eſt D H ad H B vt P G ad G B, vel vt P D, ſiue D B ad B F, hoc eſt vt tranſuerſum Ellipſis ad rectum, diuidendo erit D B ad B H, vel, ſumptis horum ſubduplis, E B ad B I vt differentia laterum Ellipſis ad rectum, quare B I diſtantia centri *Limitis* ab origine eſt quarta proportionalium, ſi fiat vt differentia laterum datæ Ellipſis ad rectum, ita diſtantia inter centrum Ellipſis, & originem ad aliam.

2. Ampliùs, quum demonſtratum ſit eſſe D H ad H B vt Ellipſis tranſuerſum ad rectum, per conuerſionem rationis erit H D ad D B, vel H G, ad B F, vel H B tranſuerſum *Limitis* Hyperbolici ad ſuum rectum B F vt tranſuerſum datæ Ellipſis ad differentiam laterum eiuſdem. Quod vltimò oſtendere propoſitum fuit.

SCHOLIVM II.

1. NOtandum eſt præterea inuentum *Limitem* K B L eſſe minimam Hyperbolarum datæ Ellipſi circumſcriptibilium, & cum eodem tranſuerſo H B; eandemque Ellipſim eſſe maximam Hyperbolæ inſcriptibilium circa eundem axem tranſuerſum B D: quæ omnia conſtant ex xx. *lib: primi noſtræ Diuinat: in Apoll. de Max. & Min.*

2. Cæterùm Modulus B H, ſeu tranſuerſum latus *Limitis* expeditiùs inueniri poterit omiſſa regulatrice D F G, atque ordinata G H, ſi ſumpta D L ad partem recti lateris B F ipſi D B æquali, iungatur L F, & producatur, donec conueniat cum axe producto D B ad H. Nam ſegmentum B H extra Ellipſim abſciſſum idem erit ac Modulus B H alia methodo inuentus, vt facilè oſtendere in promptu eſt.

PROPOSITIO LXIV.

IN Ellipſi oblonga. Limites *Ordinationis ramorum, ab origine in centro, ſunt ad* Locos *conuexos Sectionum oppoſitarum ad terminos tantùm minoris axis Ellipſim tangentium, & quarum centrum, atque axis tranſuerſus congruit cum centro, & axe minori Ellipſis, quique ad rectum latus oppoſitarum eſt vt differentia laterum datæ Ellipſis ad ſuum tranſuerſum.*

SIT Ellipsis oblonga A B C D, cuius centrum E, axis maior B D minor A C, rectum latus B ℞ (quod minus erit transuerso B D, quum data Ellipsis sit oblonga) & vt differentia inter latera D B, B ℞ ad transuersum D B, ita sit A C ad aliam A G contingenter positam ad A, cumque centro A, per vertices A, C, cum axe transuerso A C describantur Sectiones oppositæ A T, C Q, quarum rectum latus sit A G. Dico has in punctis tantùm A, C, datam Ellipsim contingere, & ipsarum conuexa esse *Limites* propositæ Ordinationis.

Quod ipsæ Ellipsim contingant ad A, C, ex eo constat quod eadem recta A G (ex A communi vertice vtrarunque Sectionum A B, A T, ducta) æquidistat rectis in iisdem Sectionibus ordinatis, ideoque vtranque Sectionem contingit ad A: quare, quum ipsæ Sectiones sint ad contrarias partes rectæ A G, in vno tantùm puncto A se mutuò contingent, pariterque I C Q in puncto tantùm C contingit Ellipsim.



Et quum sit E B maior E A, sumpta E F ipsi E B æquali, erit E F maior E A. Compleatur quadratum B L T E, aliaque tria E P, E I, E H, vnum tantùm L I constituentia.

Iam, quum sit A C bifariam secta in E, ipsique adiecta A F in directum, erit rectangulum C F A cum quadrato A E æquale quadrato F E, siue quadrato E B, sed quadratum E B ad E A est vt transuersus axis D B ad rectum latus B ℞, ergo & quadratum F E ad E A erit vt transuersum ad rectum, & differentia quadrati F E super E A ad F E, siue rectangulum C F A ad quadratum F E, siue ad F L erit vt differentia prædictorum laterum ad transuersum, vel, ex constructione, vt C A ad A G, vel vt [a] idem rectangulum C F A ad quadratum semiordinatæ ex F in Hyperbola, quare latus quadrati F L æquale est semiordinatæ ex F in eadem Hyperbola, ideoque ipsa transit omnino per L angulum quadrati L I: & similiter per reliquos angulos H, P, I, huiusmodi Hyperbolas transire demonstrabitur &c. sed est E B æqualis B L, ergo maximus ramus E B ad peripheriam Elliptici quadran-

[a] 21. primi Conic.

tis

tis ABD æqualis eſt ſemiordinatæ BL, prout ramus ED ſemiordinatæ DH &c.

Eſto præterea alius quicunque ramus ER, & ordinata per R ſit TQ, quæ Hyperbolas ſecet in T, Q, axem verò in V.

Et quoniam rectangulum LBP ad TRQ eſt vt [a] quadratum BE ad EV, & permutando rectangulum LBP, ſiue quadratum LB æquale oſtenſum eſt quadrato BE, ergo & rectangulum TRQ quadrato EV æquale erit, quibus communi addito quadrato VR, fit rectangulum TRQ cum quadrato VR, hoc eſt quadratum TV æquale quadratis ſimul EV, VR, ſiue vnico rami ER, ideoque & ſemiordinata VT ad Hyperbolam AL æqualis ipſi ramo ER ad Ellipſim: & ſic de ſingulis tum ramis, tum ſemiordinatis ad vtranque partem Ellipſis, ac oppoſitarum Sectionum. Quare conuexa huiuſmodi Sectionum oppoſitarum ſunt *Limites* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 3. huius;

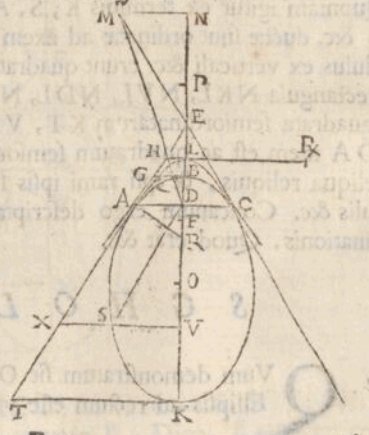
SCHOLIVM.

EX conſtructione patet huiuſmodi *Limitum*, ſeu oppoſitarum Sectionum tranſuerſum latus AC ſemper minus eſſe ſuo recto latere AG; nam & differentia Ellipſis laterum DB, B℞ ſemper eſt minor ipſo tranſuerſo DB.

PROPOSITIO LXV.

IN Ellipſi oblonga. Limes *Ordinationis ramorun ab origine inter focum, & verticem, eſt ad* Locum *concauum Hyperbolæ ſibi circumſcriptæ, cuius centrum idem eſt ac Moduli ex verticali, atque is eſt Hyperbolæ tranſuerſus axis, qui ad ſuum rectum latus eſt vt axis tranſuerſus Ellipſis ad ipſius laterum differentiam.*

SIT Ellipſis oblonga ABC, cuius centrum O, axis maior BK, vertex B, focus F, inter quos ſit origo D, per quam tranſeat ordinata AC baſis trianguli circumſcripti AEC, ſitque LN Modulus ex verticali BG diagonaliter aptata in DI &c. ſitque P eius centrum. Dico, ſi per L terminum propiorem Moduli, cum centro P, circa axem KL deſcribatur Hyperbola TQL,



cuius axis transuersus sit Modulus NL, qui ad suum rectum LR sit vt transuersus datæ Ellipsis ad differentiam laterum eiusdem; ipsam Hyperbolam esse Ellipsi circumscriptam, eiusque concauum esse *Limitem* propositum.

Ducatur ex A super tangentem lateralem AE perpendicularis AR.

a 23. secun. nostræ Diuinat. in Apoll.

Erit igitur OD ad DR vt [a] Ellipsis transuersum latus ad rectum, sed est quoque OP ad PD vt idem transuersum ad rectum, ergo cum tam OP ad PD, quàm OD ad DR sit vt transuersum ad rectum, erit per conuersionem rationis tam PO ad OD, quàm DO ad OR, & quàm PD ad DR vt transuersum idem ad laterum differentiam, vel, ex constructione, vt NL ad LR, sed PD ad DR, sumpta communi altitudine

b 19. huius ad num. 3.

DE, est vt rectangulum PDE, vel NDL ipsi æquale [b] ad rectangulum RDE, vel ad quadratum semiordinatæ DA perpendicularis super basim ER in triangulo rectangulo EAR, & vt NL ad LR ita est, ob Hyperbolam, rectangulum idem NDL ad quadratum semiordinatæ ex D in eadem Hyperbola, ergo vtraque harum Sectionum transit per A; & ob easdem rationes per C. Sed rectangulum DPE æquale est

c 19. huius ad num. 2.

[c] quadrato PL, ergo rectæ EA, EC

d ex conuerso 37. primi Conic.

contingunt [d] Hyperbolam ad A, C, sed ipsæ contingunt quoque Ellipsim ad eadem puncta A, C, ex constructione, ergo huiusmodi Sectiones in ipsis tantùm punctis A, C, se mutuò contingunt [e] ideoque Hyperbo-



e 61. primi nostræ Diuinat. in Apoll.

la TALC est datæ Ellipsi circumscripta. Secet itaque verticalem tangentem BG in Q, sitque altera verticalis KT vsque ad Hyperbolam, & alius quicunque ramus DS, ac per S ordinetur VX.

Quoniam igitur ex terminis K, S, A, B, ramorum DK, DS, DA, DB &c. ductæ sunt ordinatæ ad axem BK datæ Ellipsis, NL verò est Modulus ex verticali &c. erunt quadrata ramorum DK, DS, DB, DA, vt

f 18. huius, g 21 primi Conic.

[f] rectangula NKL, NVL, NDL, NBL, vel, ob Hyperbolam TALC, vt [g] quadrata semiordinatarum KT, VX, DA, BQ, sed quadratum rami DA idem est ac quadratum semiordinatæ DA sibi homologæ, ergo & reliqua reliquis, & ipsi rami ipsis semiordinatis æquales erunt singuli singulis &c. Concauum ergo descriptæ Hyperbolæ est *Limes* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

SCHOLIVM

1. QVum demonstratum sit OD ad DR, hoc est transuersum Ellipsis ad rectum esse vt OP ad PD, diuidendo erit OR ad

ad RD, siue differentia laterum ad rectum vt OD ad DP, quare PD distantia centri *Limitis* ab origine est quarta proportionalium, si fiat vt differentia laterum Ellipsis ad rectum latus, ita distantia inter centrum Ellipsis, & originem ad aliam.

2. Quumque PB sit differentia inter DP, DB, erit PB, distantia inter centrum *Limitis*, & verticem Ellipsis, æqualis differentiæ inter prædictam quartam inuentam PD, & ramum minimum DB.

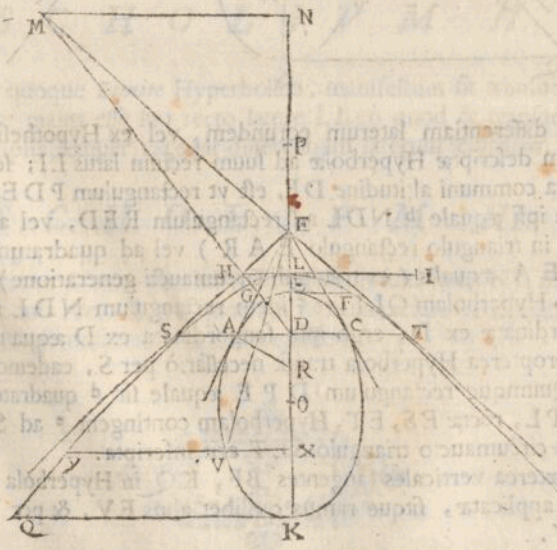
3. Insuper, quum rectangulum DPE æquale sit quadrato PL; semiaxis transuersus PL inuenti *Limitis* poterit rectangulum sub PD a centro *Limitis* ad basim, in PE ab eodem vsque ad verticem trianguli circumscripti.

4. Postremò ex inuentione *Limitis* constat ipsius transuersum latus NL maius semper esse suo recto LR, quoniam, & transuersum BK datæ Ellipsis maius semper est differentia laterum eiusdem.

PROPOSITIO LXVI.

IN Ellipsi oblonga. Limes Ordinationis ramorum ab origine externa, est ad Locum concauum Hyperbolæ circumaucto triangulo inscriptæ, cuius axis transuersus congruit cum Modulo ex laterali, & ad suum rectum latus est vt transuersum Ellipsis datæ ad laterum differentiam.

ESto ABC Ellipsis oblonga, cuius axis maior BK, centrum O, vertex B, & origo ramorum vbicunque extra sumpta in axe sit E, quæ



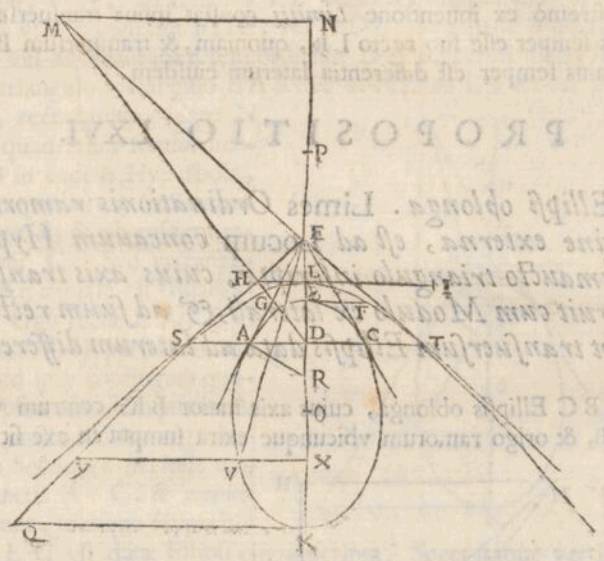
sit vertex trianguli circumscripti AEC, ac circumaucti SET, NL verò sit Modulus ex laterali &c. cuius centrum P. Dico, si per verticem L, circa

circa axem LK describatur Hyperbola QLF cum axe transuerso Moduli NL, qui ad suum rectum LI sit vt Ellipsis transuersus KB ad differentiam laterum eiusdem, ipsam QLF triangulo circumaucto SET inscriptam esse, eiusque concauum esse *Limitem* propositum.

Erigatur ex A super lateralem tangentem AE normalis AR.

a ex 23. sec. nostræ de Max. & Min.

Nam erit OD ad DR, vt [a] transuersum KB ad suum rectum: sed est quoque OP ad PE vt idem transuersum ad idem rectum, ergo per conuersionem rationis tam tota OP ad totam OE, quàm pars DO ad partem OR, & quàm reliqua PD ad reliquam ER est vt idem trans-



uersum ad differentiam laterum eorundem, vel ex Hypothesi, vt NL transuersum descriptæ Hyperbolæ ad suum rectum latus LI; sed PD ad ER, sumpta communi altitudine DE, est vt rectangulum PDE, vel vt rectangulum ipsi æquale [b] NDL ad rectangulum RED, vel ad quadratum EA (in triangulo rectangulo EAR) vel ad quadratum semibasis DS ipsi EA æqualis (ex trianguli circumaucti generatione) & NL ad LI est, ob Hyperbolam QLF, vt [c] idem rectangulum NDL ad quadratum semiordinatæ ex D, ergo ipsa semiordinata ex D æquatur semibasi DS, ac propterea Hyperbola transit necessariò per S, eademque ratione per T. Quumque rectangulum DPE æquale sit [d] quadrato semiaxis transuersi PL, rectæ ES, ET, Hyperbolam contingent [e] ad S, T, adeoque ipsa circumaucto triangulo SET erit inscripta.

b 19 huius ad num. 3.

c 21 primi Conic.

d 19. huius ad num. 2.

e ex conuerso 37. primi Conic.

Sint præterea verticales tangentes BF, KQ in Hyperbola ad axem ordinatim applicatæ, sitque ramus quilibet alius EV, & per V semiordinata XY.

Et quoniam ex terminis ramorum EK, EV, EA, EB, ductæ sunt in Hyper-

Hyperbola ſemiordinatæ ad axem, & NL eſt modulus ex laterali &c. quadrata ipſorum EK, EV, EA, EB, erunt inter ſe vt [a] rectangula NKL, NXL, NDL, NBL, vel, ob Hyperbolam, vt [b] quadrata ſemiordinatarum KQ, XY, DS, BF; ſed horum homologa quadrata EA, DS ſunt æqualia, ob poſitam laterum æqualitatem, ergo & reliqua reliquis homologè ſumpta: adeoque eorum latera, nempe ipſi rami ipſis ſemiordinatis æquales erunt &c. Concauum igitur huiuſmodi deſcriptæ Hyperbolæ eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 22. huius.

[b] 21. primi Conic.

SCHOLIVM I.

1. QVum itaque OP ad PE ſit vt Ellipſis tranſuerſum ad rectum, diuidendo erit OE ad EP vt differentia laterum ad rectum. Quare P centrum *Limitis* diſtat ab origine ramorum E per EP quartam proportionalium poſt tres notas lineas, ſeu poſt differentiam laterum, latus rectum, & diſtantiam OE inter centrum datæ Ellipſis, & originem.

2. Præterea, idem P centrum *Limitis* diſtat a vertice B datæ Ellipſis per PB, quæ conſtat ex PE quarta prædictarum proportionalium, & ex EB ramorum minimo.

3. Tandem, quum PL poſſit rectangulum DPE, ſemiaxis *Limitis* poterit rectangulum ſub ſegmentis axis a centro Moduli, vel *Limitis* ad baſim trianguli circumſcripti, & ab eodem centro ad verticem eiuſdem, vel ad originem datam.

SCHOLIVM II.

DE hoc quoque *Limite* Hyperbolico, manifeſtum fit tranſuerſum NL ſemper maius eſſe ſuo recto latere LI, eò quod & tranſuerſum KB oblongæ Ellipſis ſemper excedat differentiam laterum eiuſdem.

SCHOLIVM III.

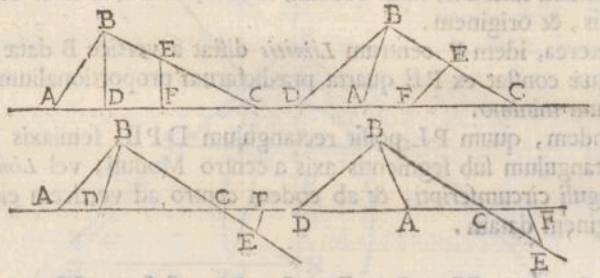
EX inuentione *Limitis* conſtat ipſius tranſuerſum latus NL maius ſemper eſſe ſuo recto LR, quoniam & tranſuerſum BK datæ Ellipſis maius ſemper eſt differentia laterum eiuſdem.

PRO-

PROP. LXVII. LEMMA V.

SI, dato triangulo ABC, ex angulo B ſit recta BD ad baſim vſque AC media proportionalis inter baſis ſegmenta CD, DA, & ducta ſit quælibet EF ipſi BD æquidiſtans, eandem baſim in F, & alterum laterum, vtputa BC, ſecans in E. Dico rectangulum ſub extremis ſegmentis CF, AD rectangulo ſub æquidiſtantibus BA, EF æquale eſſe.

EST enim, ob parallelas BA, EF, vt CF ad FE ita CD ad DB, vel ita BD ad DA, ex Hypotheſi, ergo rectangulum ſub extremis



CF, AD æquatur rectangulo ſub medijs EF, BD. Quod erat demonſtrandum.

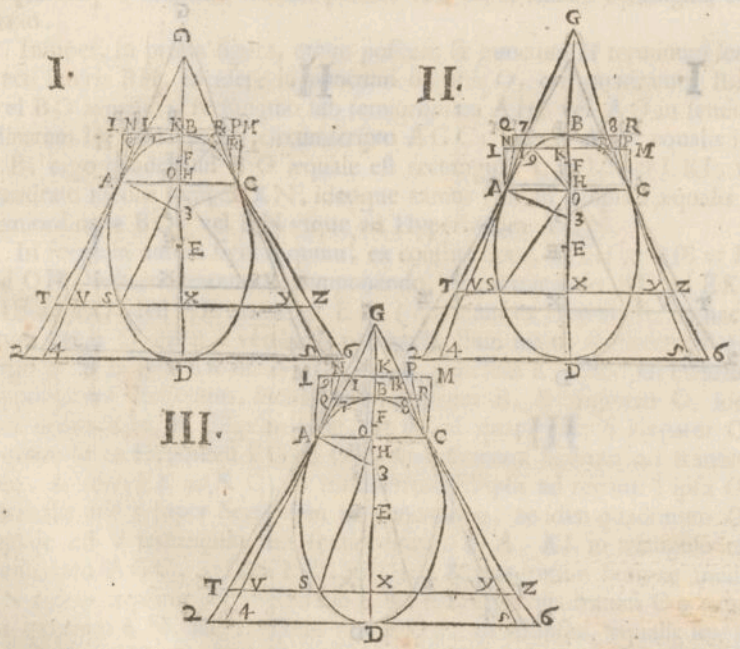
PROPOSITIO LXVIII.

IN Ellipſi oblonga. Limites *Ordinationis ramorum ab origine inter centrum, & focum, ſunt a* Locos *conuexos oppoſitarum Sectionum, quarum centrum diſtat ab origine per quartam proportionalium, ſi fiat vt differentia inter latera datæ Ellipſis ad rectum latus, ita diſtantia inter centrum Ellipſis, & originem ad aliam. Axis verò tranſuerſus* Limitum *poteſt rectangulum ſub ordinata ex origine in ordinatam ex inuento centro in triangulo circumſcripto, iſque ad ſuum rectum latus eam habet rationem, quam differentia laterum datæ Ellipſis ad eiuſdem tranſuerſum latus.*

Sit

SIT Ellipſis oblonga A B C D, cuius axis maior B D, vertex B, dimidium recti lateris B H, centrum E, focus F, & origo ramorum O inter focum, & centrum, quæ vel diſtet a vertice B per ipſum ſemirectum latus B H, vt in prima figura; vel per interuallum maius ipſo B H, vt in ſecunda; vel tandem per minus, vt in tertia: Et in omnibus per originem O ſit ordinata A C, ſuper quam ſit triangulum A G C Ellipſi circumſcriptum, & fiat vt differentia laterum Ellipſis ad rectum latus, hoc eſt vt E H ad H B (eſt enim E B ſemitranſuerſum latus, & B H ſemirectum) ita E O diſtantia inter centrum Ellipſis, & originem ad aliam O K; tunc enim O K minor erit [a] ipſa E G & punctum K (in prima figura incidet in ipſum verticem B; in ſecunda inter B, & originem O; in tertia verò inter B, & G verticem trianguli circumſcripti.

[a] Schol. 24. huius ad num. 3.



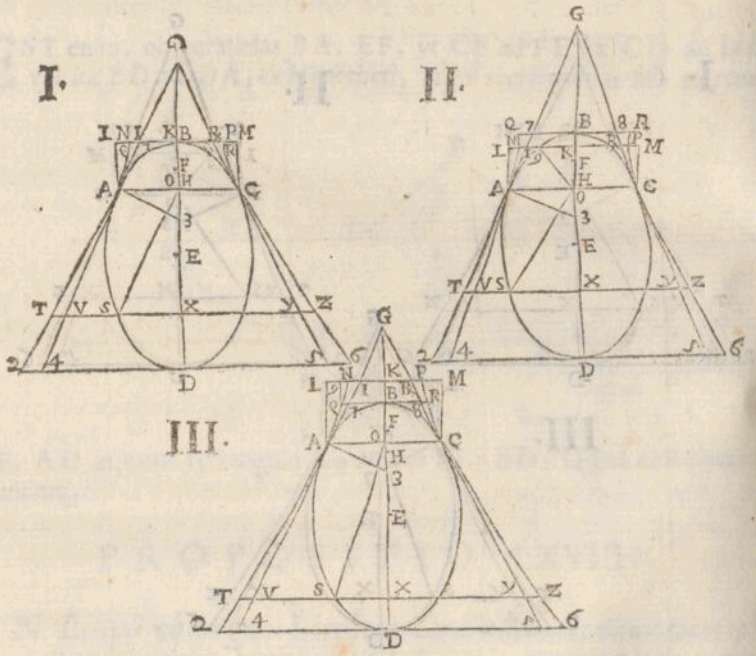
Præterea in ſingulis per K ordinetur L M laterales tangentes ſecans in I, R, & A L, C M parallelas ipſi O K in L, M (ipſæ enim K L, K M ipſis O A, O C, & inter ſe æquales erunt, prout etiam K I, K R inter ſe ſunt æquales) Sumantur item inter L K, K I, & inter M K, K R mediæ proportionales K N, K P, quæ pariter æquales erunt, & tunc tota N P poterit rectangulum ſub L M in I R, ſiue ſub A C ordinata ex origine O in I R ordinatam ex inuento puncto K in triangulo circumſcripto; quo puncto K facto centro, ſi per vertices M, P, concipiantur deſcriptæ Sectiones N Q, P R verticalem tangentem ad B ſecantes in Q, R, & ad

quarum rectum latus habeat tranſuerſum P N eam rationem quam prædicta E O ad E K, ſiue quam differentia laterum Ellipſis ad ſuum tranſuerſum (nam quum ſit, ex Hypotheſi, E O ad O K vt differentia laterum ad rectum, erit E O ad E O cum O K, ſiue ad E K vt differentia ad tranſuerſum) Dico harum Hyperbolarum conuexa eſſe *Limites* Ordinationis ramorum ex data origine O inter centrum, & focum Ellipſis datæ.

Ducatur verticalis tangens ad B laterales ſecans in 7, 8, atque in ſingulis pariter figuris erigatur ex A tangenti A G normalis A 3.

a 23. ſecun. noſtræ Diuinat. in Apoll.

Erit itaque E O ad O 3 vt a tranſuerſum latus Ellipſis ad rectum, ſed cùm ſit E O ad E K vt differentia laterum ad tranſuerſum (vti nuper oſtendimus) erit quoque conuertendo, & componendo E K ad K O, vt idem



tranſuerſum ad rectum: quare E O ad O 3 eſt vt E K ad K O, & permutando E O ad E K, ſeu vt differentia laterum ad tranſuerſum, ita erit 3 O ad O K, vel ſumpta communi altitudine O G, ita erit rectangulum 3 O G ad rectangulum K O G, vel vt quadratum A O (quod eſt æquale rectangulo 3 O G in triangulo rectangulo 3 A G) ad rectangulum idem K O G; ſed ratio quadrati A O ad rectangulum K O G componitur ex ratione lineæ A O ad O G, ſeu I L ad L A (in ſimilibus triangulis A O G, I L A) & ex ratione A O ad O K, ſeu K L ad L A, ob æqualitatem, quæ rationes conficiunt rationem rectanguli K L I ad quadratum L A; differentia igitur laterum Ellipſis ad tranſuerſum eſt vt rectangulum K L I ad quadratum L A; ſed quum ſit N K media geometrica inter L K, K I, & K P æqualis mediæ K N, rectangulum P L N æquale eſt b rectangulo K L I,

b 67. huius.

KLI, ergo & rectangulum PLN ad quadratum LA erit vt eadem laterum differentia ad tranſuerſum Ellipſis, ſed ratio hæc eadem eſt, ex Hypotheſi, ac ratio tranſuerſi lateris PN Sectionum oppoſitarum NQ, PR ad earum latus rectum; quum igitur rectangulum PLN ad quadratum LA ſit vt tranſuerſum ad rectum ipſarum Sectionum, hæ neceſſariò tranſibunt per puncta A, C. Et quum rectangula LKI, MKR æqualia ſint quadratis mediarum KN, KP, rectæ GA, GC ipſas Sectiones contingent [a] ad A, C; ſed eædem rectæ contingunt quoque ad A, C, Ellipſim datam, ex conſtructione, atque altera oppoſitarum eſt ad vnam, Ellipſis verò ad alteram partem rectæ GA vtranque Sectionem contingentis, & hoc pariter de alia Sectione oppoſita; ergo ipſæ Sectiones oppoſitæ, dataque Ellipſis in ijſdem tantùm punctis A, C, ſe mutuò contingunt conuexo.

[a] ex conuerſo 37. primi Conic.

Inſuper, in prima figura, quum poſitum ſit punctum H terminum ſemirecti lateris BH, incidere in punctum originis O, erit quadratum BH, vel BO æquale [b] rectangulo ſub ſemiordinata AH, vel AO in ſemiordinatam IK in triangulo circumſcripto AGC; ſed eſt AO æqualis ipſi LB, ergo quadratum BO æquale eſt rectangulo LBI, vel LKI, vel quadrato mediæ ſumptæ KN, ideoque ramus OB ad Ellipſim æqualis eſt ſemiordinatæ BQ, vel KN vſque ad Hyperbolam AQN.

[b] 26. huius.

In ſecunda autem figura, quum, ex conſtructione, ſit EH ad HB vt EO ad OK, erit conuertendo, componendo, & permutando BE ad EK vt HE ad EO, ſed HE maior eſt EO (quoniam ex Hypotheſi, in hac figura origo O diſtat a vertice B per interuallum maius ſemirecto BH) ergo & BE ipſa EK maior erit: quare punctum K, quod eſt centrum oppoſitarum Sectionum, incidit inter verticem B, & originem O, ideoque ordinata ex K Ellipſim ſecat, vt in 9: quapropter ſi iungatur O9 (quum ſit ex Hypotheſi EO ad OK, vt differentia laterum ad tranſuerſum, ac ideo EK ad KO, vt tranſuerſum Ellipſis ad rectum) ipſa O9 normalis erit [c] ſuper Sectionem ad punctum 9, ac ideo quadratum O9 æquale eſt [d] rectangulo ſub ſemiordinatis OA, KI in triangulo circumſcripto AGC, vel ſub LK, KI; ſed & quadratum ſumptæ mediæ KN eidem æquatur rectangulo ſub LK, KI, ergo quadratum O9 æquatur quadrato KN, ſiue minimus ramus O9, ad Ellipſim, æqualis ſuæ ſemiordinatæ KN vſque ad Hyperbolam QNA, ſiue æqualis ipſius Hyperbolæ ſemiaxi.

[c] ex 23. lib. 2. noſtræ Diuinat. in Apoll.
[d] 27. huius

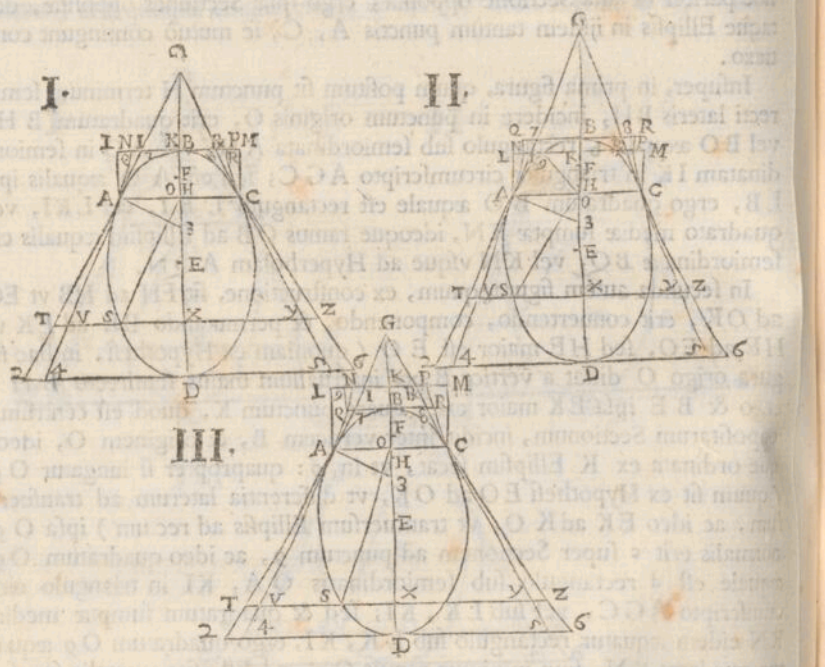
Et quoniam quadratum O9, ſiue duo ſimul quadrata OK, K9 æqualia ſunt quadrato KN, dempto communi quadrato K9 remanet quadratum OK æquale rectangulo P9N; ſed rectangulum P9N ad RBQ eſt vt quadratum OK ad OB (nam pars rectanguli P9N ad partem rectanguli RBQ, hoc eſt rectangulum PIN ad R7Q eſt vt [e] quadratum tangentis AI ad quadratum tangentis A7, & reliqua ad reliquam, hoc eſt rectangulum R9I ad 8B7 eſt vt [f] idem quadratum AI ad A7, vel vt quadratum OK ad OB) & antecedentia, nempe rectangulum P9N, & quadratum OK ſunt æqualia, ergo & conſequentia, ſcilicet rectangulum RBQ, hoc eſt quadratum BQ, & quadratum OB æqualia

[e] ex 20. tertij Conic.
[f] ibidem.

erunt; ſiue ramus O B ad Ellipſim ex origine per verticem ductus, æqualis eſt ſemiordinatæ B Q vſque ad Hyperbolam.

In tertia demum figura, quum poſitum ſit E O ad O K eſſe vt E H ad H B, erit conuertendo, componendo, & iterum conuertendo E O ad E K vt E H ad E B, ſed permutando eſt E O maior E H, ergo E K maior eſt E B, ſed eadem E K, primo loco, oſtenſa eſt minor E G, quare punctum K eſt inter B, & G.

Et quia E B ad B H eſt vt E O ad O 3 (vtraque enim ratio eſt eadem quam tranſuerſi lateris ad rectum Ellipſis datæ, ex conſtructione, & ex noſtris de Max. & Min.) per conuerſionem rationis & permutando erit B E



ad E O, vt H E ad E 3, ſed eſt D E maior E O, ergo & H E maior E 3, quare punctum H incidit inter O, 3,

Et quum ſit E O ad E K vt E H ad E B (vtraque enim ratio eſt vt differentia laterum ad tranſuerſum) permutando E O ad E H erit vt E K ad E B, & per conuerſionem rationis E O ad O H vt E K ad K B, & permutando erit vt E O ad E K, vel vt differentia laterum ad tranſuerſum, ita H O ad B K.

Item quum ſit E 3 ad E O vt E O ad E K (vtraque enim ratio eſt differentiæ laterum ad tranſuerſum) & ipſarum E 3, E O, E K differentiæ, nempe 3 O, O K erunt in eadem ratione differentiæ laterum ad tranſuerſum, ſue 3 O ad O K erit vt H O ad B K; rectangulum ergo ſub extremis 3 O, B K æquatur rectangulo ſub medijs K O, O H. Quod Memento.

Ampliùs

Ampliùs, ex puncto Hyperbolæ Q ordinetur ad axem recta Q9.

Et quum ſuperiùs demonſtratum ſit HO ad BK eſſe vt differentia laterum Ellipſis ad tranſuerſum eiuſdem, vel, ex conſtructione, vt axis tranſuerſus PN oppoſitarum Sectionum ad ipſarum rectum, vel vt rectangulum P9N ad quadratum Q9, quumque ſit HO ad BK vt rectangulum ſub HO, BK ad quadratum BK, erit rectangulum P9N ad quadratum Q9 vt rectangulum ſub HO, BK ad quadratum BK: ſed conſequentia, nempe quadratum Q9 æquatur quadrato BK, ergo & antecedentia, ſiue rectangulum P9N æquatur rectangulo ſub HO, BK. Quod ſerua.

Et quoniam HB ad BE eſt vt 3O ad OE (nam vtraque ratio eſt recti ad tranſuerſum) & BE ad BG eſt vt [a] OE ad OB ob tangentem AG, erit ex æquali HB ad BG vt 3O ad OB, rectangulum igitur ſub HB, BO, vel rectangulum HOB cum quadrato OB æquale eſt rectangulo ſub 3O, BG, vel duobus ſimul ſub 3O, BK, & ſub 3O, KG; ſed rectangulum ſub 3O, BK æquatur rectangulo HOK, vt paulò ante demonſtrauimus, ergo rectangulum HOB cum quadrato OB æquatur duobus rectangulis, altero HOK, altero verò ſub 3O, KG; ſed rectangulum HOK æquale eſt duobus, nempe HOB, & ſub HO, BK, ergo idem rectangulum HOB cum quadrato OB æquale eſt tribus rectangulis, nempe HOB, ſub HO, BK, & ſub 3O, KG; dempto igitur communi rectangulo HOB, remanet quadratum OB æquale duobus ſimul rectangulis ſub HO, BK, & ſub 3O, KG; ſed rectangulum ſub HO, BK oſtenſum poſtremò fuit æquale rectangulo P9N, ergo idem quadratum OB æquale eſt duobus ſimul rectangulis P9N, & ſub 3O, KG; ſed rectangulum ſub 3O, KG æquatur [b] rectangulo ſub AO, IK, vel rectangulo ſub LK, KI, vel quadrato mediæ KN; quare idem quadratum OB æquatur rectangulo P9N, vnà cum quadrato KN, ſiue vnico quadrato K9, ſiue quadrato BQ, ideoque ramus OB ad Ellipſim, ab origine per verticem ductus, æqualis eſt ſemiordinatæ BQ vſque ad oppoſitam Sectionem NQA.

[a] ex conuerſo 37. primi Conic.

[b] 67. huius

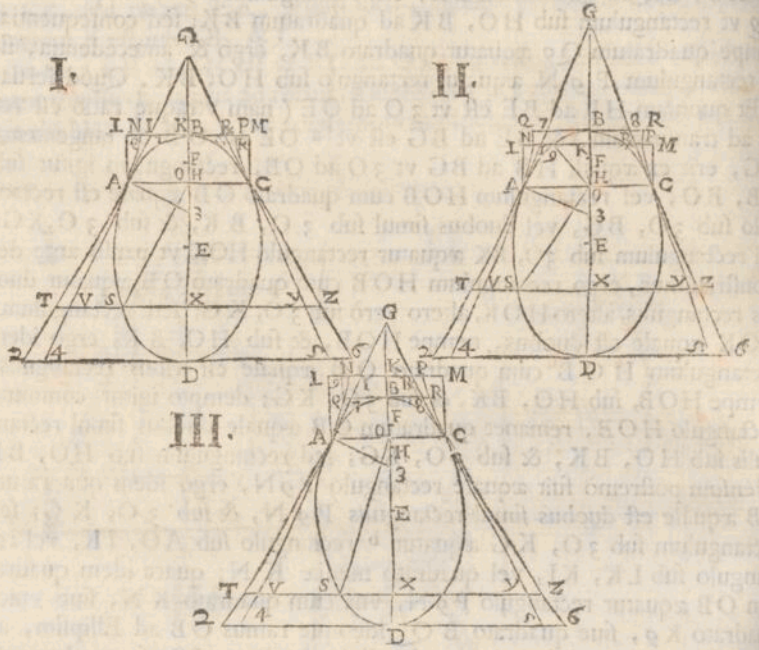
His itaque demonſtratis in ſingulis figuris, producantur huiuſmodi oppoſitæ Sectiones, donec conueniant cum verticali tangente ad D in punctis 2, 6, itemque productæ laterales tangentes GA, GC, verticalem AC ſecent in 4, 5.

Et quia rectangulum R7Q ad 642 eſt vt [c] quadratum tangentis 7A ad quadratum tangentis A4; & rectangulum 8B7 ad 5D4 eſt vt idem quadratum 7A ad A4, erit compoſitè rectangulum B7Q cum rectangulo 8B7, ſiue quadratum BQ ad rectangulum 642 cum rectangulo 5D4, ſiue ad vnicum quadratum D2, vt idem quadratum 74 ad A4, vel vt quadratum BO ad OD, ſed permutando quadratum BQ æquale nuper oſtenſum eſt quadrato BO, ergo & quadratum D2 quadrato DO æquale erit; ac ideo maximus ramus OD, ad Ellipſim, æqualis ſemiordinatæ D2, ad Hyperbolam.

[c] 16. tertij Conic.

Sit poſtremò in omnibus figuris medius quicunque ramus OS, & per S ordinetur recta laterales tangentes ſecans in T, Z, Sectiones in V, Y, & axem in X: eàdem ratione ac ſupra demonſtrabitur rectangulum 6D2 ad

ad rectangu'um ZST esse vt quadratum A 4 ad quadratum A V, vel vt quadratum D O ad O X, sed rectangulum 6 D 2, siue quadratum D 2 æquale ostensum est quadrato D O, ergo & rectangulum ZST æquale est quadrato OX; his itaque communi addito quadrato S X, erit rectangulum ZST cum quadrato XS, siue quadratum XT æquale duobus si-



mul quadratis OX, XS, siue vnico quadrato OS; ramus igitur OS ad Ellipsim æquatur semiordinatæ X T ad descriptam Hyperbolam Q A 2. Sed hæc omnia ad alteram partem axis BD simili modo demonstrantur. Quare conuexa huiusmodi Sectionum oppositarum sunt *Limites* Ordinationis propositæ. Quod L. D. O. M.

PROPOSITIO LXIX.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, est ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ per eundem verticem sibi circumscriptæ, cuius axis transuersus æquatur Modulo ex angulo semirecto, & centrum cum centro Moduli congruit; rectum verò latus idem est ac datæ Hyperbolæ, & ad ipsum habet* Limitis *transuersum eam rationem, quam transuersum datæ ad summam suorum laterum.*

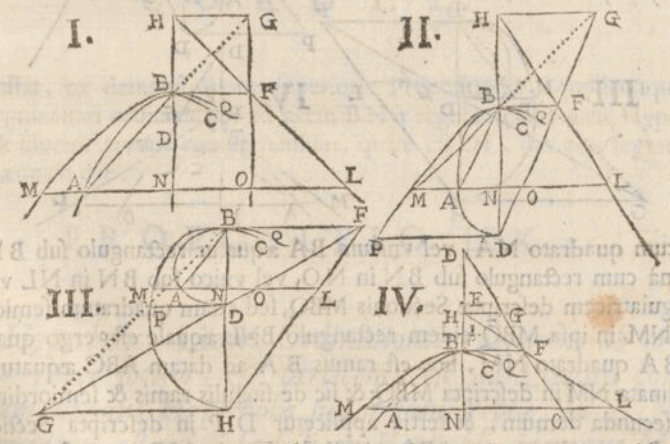
Esto

ESto Hyperbola A B C, vt in quarta figura cuius axis B N, vertex B, transuersus axis D B, centrum E, rectum latus B F, & regulatrix &c.

Sed hùc prætermissis argumentis ijs, quibus hactenus vsi fuimus in demonstrationibus Prop. 54. 59. & 63. huius, lubet idem pro singulis simul Coni-sectionibus alia via, ac ratione ostendere per sequentem vnicam Prop.

IN *quacunque Coni-sectione.* Limes *Ordinationis ramorum ab origine in vertice, est, in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi oblonga, ad* Locum *concauum Sectionis Hyperbolæ; sed in Ellipsi prolata ad* Locum *concauum alterius Ellipsis, quorum* Locorum *axis transuersus æquatur Modulo ex semirecto, centrum cum centro congruit; & rectum latus idem est ac datæ Sectionis.*

ESto quæcunque Coni-sectio A B C, vel Parabola, vt in 1. figura, vel Ellipsis oblonga, vt in 2. vel prolata vt in 3. vel Hyperbola vt in 4



quarum sit axis B D N, vertex B, rectum latus B F præ more eidem axi. perpendiculare; atque in secunda, tertia, & quarta, sit B D suæ Sectionis axis transuersus, in omnibus verò sit regulatrix D G F O, & B H sit Modulus inuentus per angulum semirectum H B G &c. in vltima verò esto E centrum datæ Hyperbolæ, & I centrum Moduli. Dico si per B, circa axem B N, cum transuerso B H, eodemque recto B F datæ Sectionis describatur in 1. 2. & 4. figura Hyperbola M B Q, & in tertia Ellipsis M B Q, has descriptas Sectiones datis esse circumscriptas, atque esse *Limites* propositos.

Ducatur in singulis regulatrix H F L descriptæ Coni-sectionis. Et quoniam regulatrices H F, G F se secant in F, & infra tangentem B F ipsa F L regula-

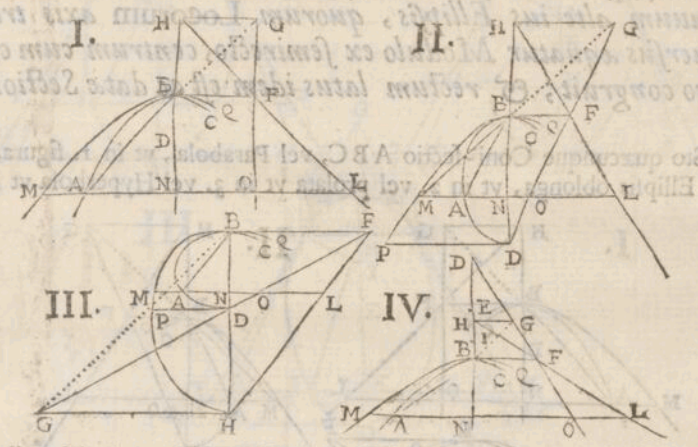
regulatrix descriptæ Sectionis cadit tota extra FO regulatricem datæ, & ab ea semper magis recedit, erit sectio MBQ tota [a] extra datam ABC; & ob id huic circumscripta.

[a] 19. lib. 1. nostræ Diuinat. in Apoll.

Sit modò ex vertice B in data Sectione ductus quicunque ramus BA, & per A sit ordinata axem secans in N, descriptam Sectionem in M, regulatrices verò in O, L.

Iam, quum sit HB ad BN vt HF ad FL, vel vt HG ad OL, erit permutando HB ad HG vt BN ad OL, sed antecedentes HB, HG sunt æquales, ob angulos semirectos ad B, G, in triangulo BHG, ergo, & consequens BN consequenti OL æqualis erit; quadratum igitur BN æquatur rectangulo sub BN, OL, sed etiam quadratum semiordinatæ AN in Sectione data ABC æquale est [b] rectangulo sub BN in NO, ergo quadratum

[b] 11.12.13. primi Conic.



BN cum quadrato NA, vel vnicum BA æquatur rectangulo sub BN in OL vnà cum rectangulo sub BN in NO, vel vnico sub BN in NL vsque ad regulatricem descriptæ *Sectionis* MBQ, sed etiam quadratum semiordinatæ NM in ipsa MBQ eidem rectangulo BNL æquale est [c] ergo quadratum BA quadrato NM, hoc est ramus BA ad datam ABC æquatur semiordinatæ NM in descripta MBQ: & sic de singulis ramis & semiordinatis.

[c] ibidem;

In secunda demum, & tertia applicetur DP in descripta Sectione MBQ. Iam quadratum rami BA ad quadratum rami BD, vt [d] est rectangulum HNB ad HDB, vel vt [e] quadratum semiordinatæ NM ad quadratum semiordinatæ DB, sed permutando quadratum BA æquatur quadrato NM, ergo quadratum BD quadrato DP siue ramus BD ramo DP æqualis erit, & sic de singulis &c. Quare concauum descriptæ Sectionis MBQ est *Limes* propositus. Quod pro singulis Coni-sectionibus demonstrandum erat.

[d] 14. huius.
[e] 21. primi Conic.

Notandum erit in sequenti Coroll. id, quod pro sola Hyperbola colligitur, colligi quoque, ex superiùs ostensis, pro reliquis etiam Coni-sectionibus, adeò vt loco - Hyperbolæ - legendum sit ibi - Coni - sectionis.

Sed reliquum huius Prop. in Hyperbola quartæ figuræ ostenditur sic.

Tandem

Tandem est D H ad H G vt D B ad B F, vel vt transuersum datæ Hyperbolæ ad suum rectum, ergo, & D H ad H B ipsi H G æqualem, erit vt idem transuersum ad rectum, quare componendo, per conuersionem rationis, & conuertendo D H ad D B, vel H G ad B F, vel H B ad B F, nempe transuersum *Limitis* ad suum rectum erit vt transuersum datæ ad summam eiusdem transuersi cum recto. Quod erat vltimo demonstrandum.

SCHOLIVM

QVum nuper demonstratum sit D H ad H B esse vt transuersum datæ ad rectum, componendo D B ad B H erit vt summa laterum ad rectum; & sumptis illarum subduplis, erit E B ad B I, nempe distantia inter centrum datæ Hyperbolæ, & originem ad distantiam inter originem, & centrum *Limitis* vt summa laterum datæ ad suum rectum.

COROLL.

COnstat, ex demonstratione superioris Propositionis, quodcunque segmentum ordinatarum ad axem B N a regulatricibus datæ Hyperbolæ, & inuenti *Limitis* comprehensum, quale est O L, suo axis segmento B N æquale esse.

PROPOSITIO LXX.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter focum, & verticem, est ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ sibi circumscriptæ, cuius centrum idem est ac Moduli ex Verticali, idemque Modulus est axis transuersus circumscriptæ Hyperbolæ, qui ad suum rectum latus est vt transuersum datæ Hyperbolæ ad summam huius laterum.*

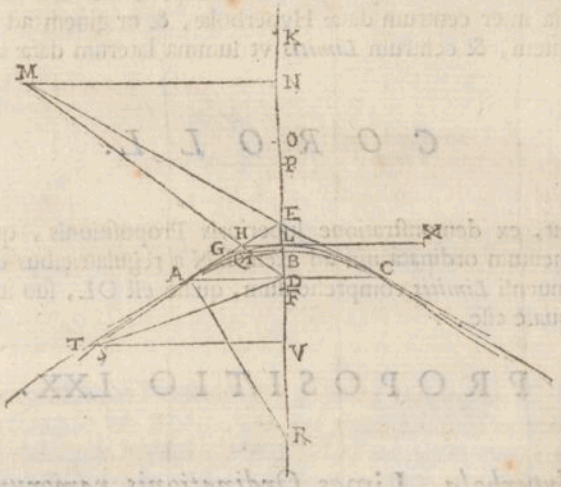
ESto data Hyperbola A B C, cuius axis transuersus K B, centrum O, vertex B, focus F, inter quos sit origo D, per quam sit ordinata A C basis circumscripti trianguli A E C, sitque N L Modulus ex verticali B G diagonaliter aptata in D I &c. Dico, si per L terminum propiorem Moduli, & cum centro P, circa axem L D F describatur Hyper-

bola TQL, cuius axis tranſuerſus ſit ipſe Modulus NL habens ad ſuum rectum latus LX eandem rationem, quam tranſuerſum KB datæ Hyperbolæ ad ſummam ipſius laterum, hanc Hyperbolam TQL datæ eſſe circumſcriptam, eiuſque concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

Ex contactu A ſuper lateralem tangentem AE ducatur normalis AR.

a ex 22. lib. 2. Diuinat. in Apoll.

Erit igitur OD ad DR vt [a] tranſuerſum datæ Hyperbolæ ad rectum, ſed eſt quoque OP ad PD vt idem tranſuerſum ad idem rectum, ergo OD ad DR eſt vt OP ad PD, & vtraque ratio eſt ea, quam tranſuerſi datæ Hyperbolæ ad rectum; quare conuertendo tam RD ad DO, quàm DP ad PO erit vt rectum datæ ad tranſuerſum, & componendo tam RO ad OD, quàm DO ad OP, & quàm ipſarum differentiæ, nempe RD ad DP erit vt rectum datæ cum tranſuerſo ad tranſuerſum, hoc eſt vt ſumma laterum ad tranſuerſum, & conuertendo PD ad DR vt tranſuerſum datæ ad ſummam laterum, ſiue, ex Hypotheſi, vt NL tranſuerſum



Hyperbolæ TQL ad LX rectum eiuſdem; ſed PD ad DR, ſumpta communi altitudine DE, eſt vt rectangulum PDE, vel vt rectangulum ipſi æquale [b] NDL ad rectangulum RDE, vel ad quadratum perpendicularis AD ſuper ER (in triangulo rectangulo EAR) quæ eſt ſemiordinata in data Hyperbola, & NL ad LX, tranſuerſum nempe ad rectum deſcriptæ TQL, eſt vt [c] idem rectangulum NDL ad quadratum ſemiordinatæ ex D in deſcripta TQL, ergo quadratum DA ſemiordinatæ in data ABC æquatur quadrato ſemiordinatæ ex eodem puncto D in deſcripta TQL; quare vtraque harum Sectionum tranſit per A, pariterque per C.

b 19 huius ad num. 3.

c 21 primi Conic.

Et quoniam rectangulum DPE æquale eſt [d] quadrato PL, rectæ EA, EC deſcriptam Hyperbolam contingent [e] ad A, C: Sed eædem contingunt quoque datam ABC in iiſdem punctis A, C, ex Hypotheſi, ergo huiuſmodi Sectiones ſe mutuò contingunt [f] in ipſis tantùm punctis A, C; ideoque Hyperbola TALC, datæ ABC eſt circumſcripta.

d 19. huius ad num. 2.

e ex conuerſo 17. primi Conic.

f 61. lib. 1. Diuinat. in Apoll.

Secet

Secet itaque descripta Hyperbola verticalem tangentem BG in Q, sitque alius quicunque ramus DS, & per S ordinata TV.

Et quoniam ex terminis ramorum DS, DA, DB, ad axem datæ Hyperbolæ ductæ sunt ordinatæ SV, AD, BB, & NL est Modulus &c. quadrata ramorum DS, DA, DB erunt inter se vt [a] rectangula NVL, NDL, NBL, vel ob Hyperbolam TALC vt [b] quadrata semiordinatarum VT, DA, BQ, sed quadratum rami DA æquatur, imò idem est ac quadratum semiordinatæ DA sibi homologæ, ergo & reliqua reliquis, singula singulis, & latera lateribus, neupe ramus DS semiordinatæ VT, & ramus DB semiordinatæ BQ æqualis erit, & sic de omnibus. Quare concauum huiusmodi descriptæ Hyperbolæ est *Limes* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 18. huius.
[b] 21. primi Conic.

SCHOLIVM I.

1. OStensum fuit vt OD ad DR, nempe vt transuersum ad rectum datæ Hyperbolæ, ita esse OP ad PD, componendo igitur erit vt OR ad RD, vel vt summa laterum ad rectum, ita OD ad DP, quare DP interuallum a centro *Limitis* vsque ad originem est quarta proportionalium si fiat vt summa laterum ad rectum datæ Hyperbolæ, ita distantia inter centrum eiusdem Hyperbolæ, & originem ad aliam.

2. Et quoniam PB est differentia inter DP, DB, erit PB, distantia inter centrum *Limitis* & verticem datæ Hyperbolæ, æqualis differentiæ inter prædictam quartam inuentam PD, & ramum minimum DB.

3. Et quum rectangulum DPE demonstratum æquale sit quadrato PL, semiaxis transuersus PL inuenti *Limitis* poterit rectangulum sub segmentis axis PD, nempe a centro *Limitis* vsque ad originem, siue ad basim trianguli circumscripti, in PE ab eodem centro vsque ad eiusdem trianguli verticem.

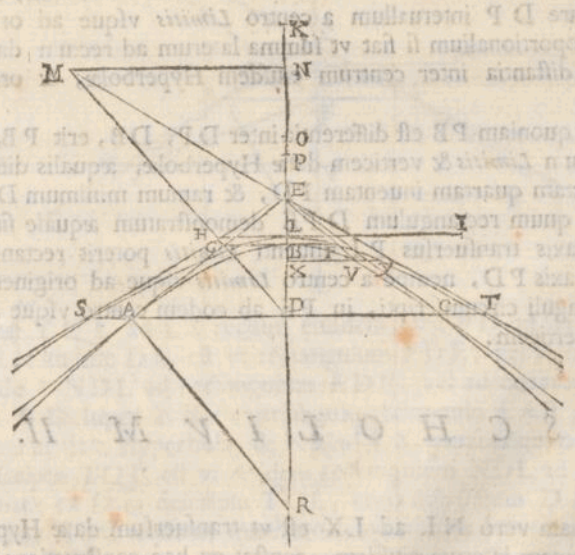
SCHOLIVM II.

QVoniam verò NL ad LX est vt transuersum datæ Hyperbolæ ad summam laterum eiusdem, constat ex hac constructione inuentum *Limitem* ALC, cuius NL est transuersum latus, & LX rectum, quandoque esse Hyperbolam æquilateram, quandoque verò inæqualium laterum in ratione, aut maioris, aut minoris inæqualitatis, prout exigit prædicta ratio transuersi datæ ad summam ipsius laterum.

PROPOSITIO LXXI.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter centrum, & verticem, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ circumaucto triangulo inſcriptæ, cuius axis tranſuerſus, & centrum cum Modulo ex laterali, eiuſque centro congruit, iſque ad ſuum rectum latus eſt vt tranſuerſum datæ Hyperbolæ ad ſummam ſui ipſius laterum.*

SIT ABC data Hyperbola, cuius axis tranſuerſus KB, & origo ramorum ſit E inter centrum O, & verticem B, quæ ſit vertex trianguli circumſcripti AEC, & circumaucti SET, NL verò ſit Modulus ex laterali &c. cuius centrum P &c. Dico ſi per verticem L, circa axem LBD deſcribatur Hyperbola LFY cum axe tranſuerſo Moduli NL, qui ad ſuum rectum latus LI ſit vt tranſuerſus axis KB datæ Hyperbolæ ad



ſummam laterum eiuſdem, ipſam Hyperbolam LFY triangulo circumaucto SET eſſe inſcriptam, eiuſque concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

Super contigentem AE, erigatur normalis AR. Tunc enim erit OD ad DR vt a tranſuerſum ad rectum datæ Hyperbolæ ABC, vel vt OP ad PE, (vtraque enim ratio eſt tranſuerſi ad rectum) quare tam etiam OD ad OD cum DR, ſiue OR, quàm OP ad OP cum PE, ſiue ad

a ex 22. lib. ſecundi Diuinat. in Apol.

OE

OE erit in ratione transuersi ad summam laterum; quum sit ergo tota OD ad totam OR vt pars OP ad partem OE, erit reliqua PD ad reliquam ER vt tota ad totam, & vt pars ad partem, nempe vt transuersum datæ Hyperbolæ ad latera summam, siue, ex Hypothesi, vt NL transuersum descriptæ Hyperbolæ LFY ad suum rectum LI; sed PD ad ER, sumpta communi altitudine DE, est vt rectangulum PDE, siue vt rectangulum ipsi æquale [a] NDL ad rectangulum sub RE, ED, siue ad quadratum mediæ proportionalis EA in triangulo rectangulo EAR facto per AD in triangula sibi, ac inter se similia, vel ad quadratum semibasis DS, ipsi EA æqualis (ex Moduli inuentione) & NL ad LI est (ob Hyperbolam LFY) vt [b] idem rectangulum NDL ad quadratum semiordinatæ ex D in eadem Hyperbola, ergo ipsa semiordinata ex D æquatur semibasi DS, ac ideo Hyperpola LFY necessariò transit per S; eadem pariter ratione ostendetur transire per T. Et quum rectangulum BPE æquale sit [c] quadrato semiaxis PL, rectæ SE, TE Hyperbolam SLT contingent [d] ad S, T. Quare hæc triangulo circumaucto SET est inscripta.

[a] 19. huius ad num. 3.

[b] 21. primi Conic.

[c] 19. huius ad num. 2.

[d] ex conuersio 37. primi Conic.

Insuper, sit in Hyperbola SLT a puncto axis B ordinata BF, & ex origine E alius quicunque ramus EV ad datam ABC, & per V ordinetur XY.

Iam, quadrata ramorum EV, EA, EB sunt vt [e] rectangula NXL, NDL, NBL, vel ob Hyperbolam SLT vt [f] quadrata semiordinatarum XY, DS, BF, sed horum quadratorum homologa EA, DS sunt æqualia, ob positam æqualitatem rectarum EA, DS, ergo & reliqua reliquis homologè sumpta, adeoque & ipsorum latera, nempe ipsi rami ipsis semiordinatis, singuli singulis, hoc est ramus EV semiordinatæ XY, & ramus minimus EB, semiordinatæ BF æqualis erit &c. Concauum ergo huiusmodi descriptæ Hyperbolæ est *Limes* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[e] 22. huius.

[f] 21. primi Conic.

SCHOLIVM I.

1. EX ostensis, OP ad PE est vt transuersum latus datæ Hyperbolæ ad suum rectum, componendo igitur OE ad EP est vt summa eorundem laterum ad rectum: quare PE distantia a centro *Limitis* vsque ad originem est quarta proportionalium, si fiat vt summa laterum datæ Hyperbolæ ad suum rectum, ita distantia inter centrum eiusdem, & originem ad aliam.

2. Quumque PB constet ex PE, EB, erit PB, distantia inter centrum *Limitis* & verticem datæ Hyperbolæ, æqualis aggregato ex quarta inuenta PE, & ramo minimo EB.

3. Et quoniam quadratum PL ostensum est æquale rectangulo sub DP, PE, ipse PL semiaxis *Limitis* poterit rectangulum sub distantia sui centri a basi trianguli circumscripti, in distantiam eiusdem centri, ab origine, vel a vertice ipsius trianguli.

SCHO-

SCHOLIVM II.

INsuper, si NL transuersum *Limitis* ad suum rectum latus est vt transuersum datæ Hyperbolæ ad summam sui ipsius laterum, constat, vt in præcedenti, *Limitis* latera, vel æqualitatis, vel inæqualitatis rationem adeptura, prout requirit ratio inter latera datæ Hyperbolæ.

PROPOSITIO LXXII.

IN Hyperbola. Limites *Ordinationis ramorum ab origine infra focum interiorem, sunt ad* Locos *conuexos oppositarum Sectionum, quarum centrum distat ab origine per quartam proportionalium si fiat vt summa laterum datæ Hyperbolæ ad suum rectum, ita distantia inter centrum datæ ad aliam. Axis verò transuersus* Limitis *potest rectangulum sub ordinata ex origine in ordinatam ex inuento centro in triangulo circumscripto; isque transuersus ad suum rectum latus est vt summa laterum datæ Hyperbolæ ad transuersum eiusdem.*

ESto Hyperbola A B C, cuius vertex B, axis transuersus D B, centrum E, focus F, dimidium recti lateris B H, & origo ramorum sit O infra focum, quæ vel distet a vertice B per interuallum æquale prædicto semirecto B H, vt in prima figura; vel per maius, vt in secunda; vel tandem per minus, vt in tertia: per originem autem O sit ordinata A C, super quam maneat triangulum Hyperbolæ circumscriptum A G C, & in omnibus fiat vt summa laterum datæ Hyperbolæ ad suum rectum latus, vel vt summa semilaterum ad semirectum, nempe vt E H (composita ex semitransuerso E B, ac semirecto B H) ad H B (quæ ipso semirecto æqualis ponitur) ita E O distantia inter centrum datæ Hyperbolæ, & originem ad aliam O K (tunc enim punctum K incidet [a] inter verticem G, & O ad basim trianguli circumscripti, sed, in prima figura, in ipsum punctum B; in secunda verò, inter B, & O; & in tertia inter B, & G, prout in hac suis locis demonstrabitur) per punctum autem K ordinetur L M laterales tangentes secans in I ℞, atque A L, C M parallelas ipsi O K in L, M; nam sic B L, B M ipsis O A, O C, & inter se æquales erunt; pariterque K I, K ℞ æquales.

[a] Schol. 24. huius ad num. 6.

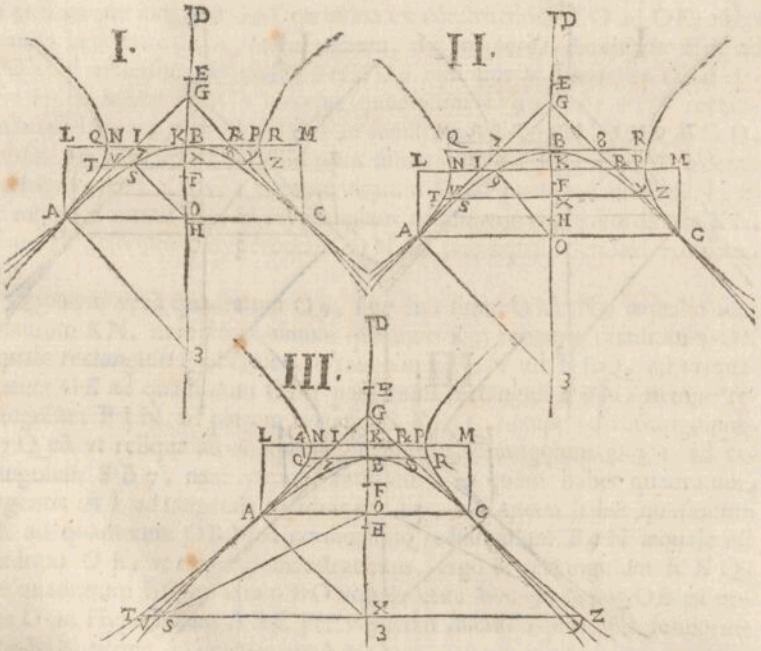
Amplius, inter L K, K I, atque inter M K, K T sumantur mediæ proportionales K N, K P, quæ item inter se æquales erunt, totaque N P poterit rectangulum sub L M in I ℞, siue sub A C ordinata ex origine, hoc est sub basi trianguli circumscripti A G C in I ℞ ordinatam ex inuento

pun-

puncto K in eodem triangulo circumſcripto. Hoc itaque puncto K facto centro, ſi per vertices N, P, concipiantur Sectiones oppoſitæ NQ, PR, quæ tangentem verticalem LM ſecent in Q, R, & quæ tales ſint vt ipſarum tranſuerſum latus PN ad rectum eam habeat rationem, quam prædicta diſtantia EO ad EK, ſiue quam ſumma laterum datæ Hyperbolæ ad tranſuerſum (eſt enim, ex Hypotheſi EO, ad OK vt ſumma laterum ad rectum, quocirca per conuerſionem rationis EO ad EK eſt vt eadem ſumma ad tranſuerſum.) Dico harum conuexa eſſe *Limites* propoſitos.

Iam, in ſingulis figuris, tangens verticalis ad B laterales ſecet in 7, 8, ac ſupra ipſarum alteram, nempe AG, erigatur perpendicularis A3.

Erit itaque EO ad O3 vt [a] tranſuerſum datæ Hyperbolæ ad rectum; [a] ex 22. lib. ſecundi Diuinat. in Apoll.



ſed quum ſit (ex Hypotheſi) EO ad OK vt ſumma laterum ad rectum, eſt quoque diuidendo EK ad KO vt tranſuerſum ad rectum, quare EO ad O3 eſt vt EK ad KO, & permutando EO ad EK vt O3 ad OK, ſed EO ad OK (vt paulò ſuperiùs oſtendimus) eſt vt ſumma laterum ad tranſuerſum, ergo & 3O ad OK eſt vt ſumma ad tranſuerſum; Sed 3O ad OK (ſumpta communi altitudine OG) eſt vt rectangulum 3OG ad rectangulum KOG, vel vt quadratum AO, quod ipſi rectangulo 3OG eſt æquale, ad idem KOG; quadratum igitur AO ad rectangulum KOG eſt vt ſumma laterum ad tranſuerſum: ratio verò quadrati AO ad rectangulum KOG componitur ex ratione AO ad OG, ſiue IL ad LA (in ſimilibus triangulis AOG, ILA) & ex ratione AO ad OK, ſiue KL

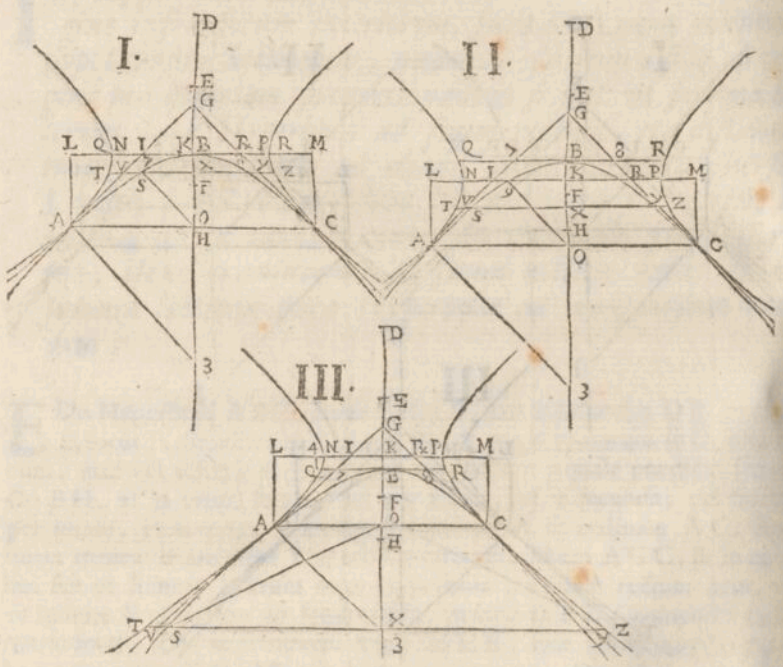
ad

ad LA, atque ex his componitur quoque ratio rectanguli KLI ad quadratum LA, ac propterea vt quadratum AO ad rectangulum KOG, ita eſt rectangulum KLI ad quadratum LA, ergo & vt ſumma laterum ad tranſuerſum, ita eſt rectangulum KLI ad quadratum LA,

Et quum ſit NK ſumpta media geometrica inter LK, KI, ſitque KP æqualis mediæ NK, rectangulum PLN æquatur [a] rectangulo KLI, ergo & rectangulum PLN ad quadratum LA erit vt eadem ſumma laterum ad tranſuerſum datæ Hyperbolæ; ſed ratio hæc (ex conſtructione) eſt ea quam habet NP tranſuerſus axis oppoſitarum Sectionum NQ, PR ad ipſarum rectum latus, ergo rectangulum PLN ad quadratum LA eſt vt tranſuerſum PN ad ſuum rectum, & idcirco Hyperbola QN tranſit [b]

[a] 19. huius ad num. 3.

[b] ex 21. primi Conic.



neceſſariò per A. Similiter oſtendetur Hyperbolam RP tranſire per C; Et quoniam rectangula LKI, MKR æqualia ſunt quadratis KN, KP, rectæ GA, GC oppoſitas contingent [c] ad A, C; ſed eædem rectæ contingunt quoque ad A, C, datam Hyperbolam, eſtque altera oppoſitarum QNA ad vnam, data verò Hyperbola ad aliam partem eiuſdem rectæ GA vtranque Sectionem contingentis; & ſic de reliqua oppoſita RPC; ergo ipſæ oppoſitæ Sectiones, dataque ABC in ijſdem tantùm punctis A, C ſe mutuò contingunt conuexo,

[c] ex conuerſo 37. primi Conic.

Præterea (in prima figura) quum poſitum ſit punctum H terminum ſemirecti lateris BH cadere in punctum originis O, in quod cadit quoque punctum K (per ea, quæ in hac primo loco monuimus) erit quadratum BH,

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [164] - 136
PUBLIC DOMAIN

BH, vel BO, æquale [a] rectangulo ſub ſemiordinata AH, vel AO in ſemiordinatam IK in ſemitriangulo circumſcripto AGO, ſed eſt AO æqualis ipſi LB, ergo idem quadratum BO æquatur rectangulo LbI, vel LKI, vel quadrato ſumptæ mediæ KN, ideoque ramus OB ad Hyperbolam ABC æqualis eſt ſemiordinatæ BN, vel KN vſque ad Hyperbolam AQN.

a 26. huius.

In ſecunda autem figura, quum ſit, ex conſtructione, EO ad OK vt EH ad HB, per conuerſionem rationis erit OE ad EK, vt HE ad EB, ſed permutando eſt OE maior HE (quum in hac ponatur originem O eſſe intra ſemirectum BH) ergo & EK maior erit EB, quare punctum K centrum oppoſitarum incidit inter verticem B datæ Hyperbolæ, & originem O, ac ideo quæ ordinatur ex K datam Hyperbolam ſecat, vt in 9: ſi itaque iungatur O9 (quoniam ex conſtructione EO ad OK, eſt vt ſumma laterum datæ ad ſuum rectum, ac propterea diuidendo EK ad KO vt tranſuerſum ad rectum) erit O9 minimus [b] ramus ex O ad datam Hyperbolam ABC; ideoque quadratum O9 æquale erit [c] rectangulo ſub ſemiordinatis OA, KI in ſemitriangulo circumſcripto AGO, vel ſub LK, KI, ſed & quadratum ſumptæ mediæ KN æquatur eidem rectangulo ſub LK, KI, ergo quadratum O9 æquatur quadrato KN, ſiue minimus ramus O9 ad Hyperbolam datam æqualis ſemiordinatæ KN, vſque ad deſcriptam Hyperbolam QNA, ſiue æqualis ſemiaxi eiuſdem QNA.

b ex 22. ſec. noſtræ Diuinat. in Apoll.
c 27. huius.

Quoniam verò quadratum O9, ſiue duo ſimul OK, K9 æqualia ſunt quadrato KN, dempto communi quadrato K9, remanet quadratum OK æquale rectangulo P9N, ſed rectangulum P9N ad RBQ, eſt vt quadratum OK ad quadratum OB (pars enim rectanguli P9N, nempe rectangulum PIN ad partem rectanguli RBQ, nempe ad rectangulum R7Q eſt vt reliqua ad reliquam, nempe vt rectangulum 891 ad rectangulum 8B7, nam vtraque ratio eſt [d] ea quam habet quadratum tangentis AI ad tangentis quadratum A7, vel quam habet quadratum OK ad quadratum OB) ſed permutando rectangulum P9N æquale eſt quadrato OK, vt nuper demonſtrauimus, ergo & rectangulum RBQ, ſiue quadratum BQ quadrato BO æquale erit; hoc eſt ramus OB ex origine O ad Hyperbolam ABC per verticem ductus æqualis eſt ſemiordinatæ BQ, vſque ad deſcriptam ANQ.

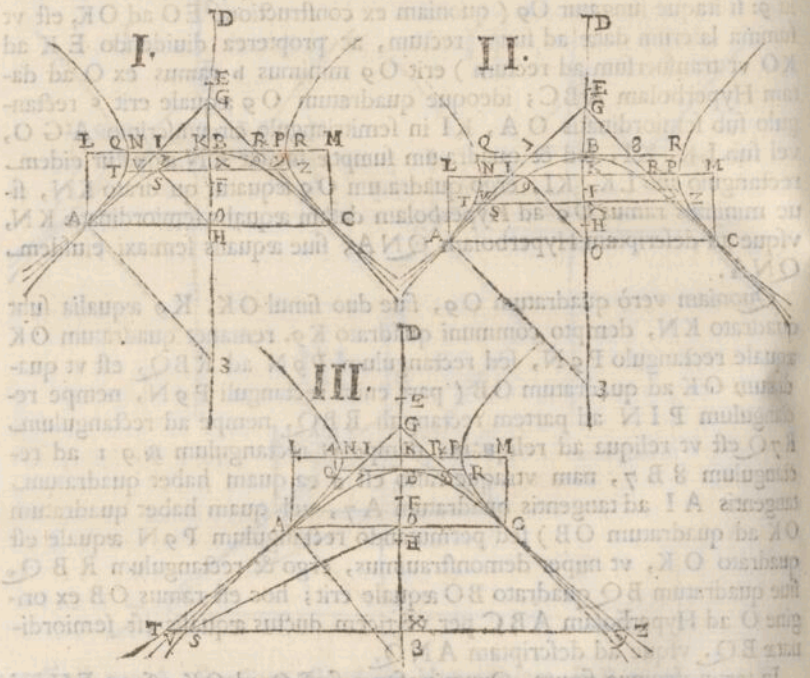
d ex 16. & 20. tertij Conic.

In tertia denique figura, Quum poſitum ſit EO ad OK eſſe vt EH ad HB, per conuerſionem rationis erit OE ad EK vt HE ad EB, ſed permutando eſt OE minor EH, (quum hîc ponatur originem O eſſe inter B, & H) ergo & EK minor eſt ipſa EB, quare punctum K, quod eſt inter G, & O cadit inter G, & B.

Et quum ſit EB ad BH vt EO ad O3 (nam vtraque ratio eſt ea, quam tranſuerſi lateris ad rectum datæ Hyperbolæ, tum ex conſtructione, tum ex xxij. prop. lib. ij. Diuinat. in Apoll.) erit conuertendo, & componendo, & iterum conuertendo EB ad EH vt EO ad E3, ſed permutando eſt EB minor ipſa EO, ergo & EH minor eſt ipſa E3: punctum ergo H incidit inter O, & 3.

Insuper, quum sit EO ad OK, ex constructione, vt EH ad HB, nempe vt summa laterum ad rectum datæ Hyperbolæ, erit, per conuersionem rationis OE ad EK vt HE ad EB, & permutando OE ad EH vt KE ad EB, & conuertendo HE ad EO vt BE ad EK, & diuidendo HO ad OE vt BK ad KE, & permutando HO ad BK vt OE ad EK, sed OE ad EK est vt summa laterum ad transuersum (quum, per conuersionem rationis sit OE ad OK vt summa laterum ad rectum, ex constructione) ergo & HO ad BK erit vt summa laterum ad transuersum.

Ampliùs, quum sit 3E ad EO vt OE ad EK (vtraque enim ratio est ea quam summæ laterum ad transuersum) & differentiæ ipsarum continuè proportionalium E3, EO, EK, siue 3O, OK, erunt in ea-



dem ratione totarum, nempe vt summa laterum ad transuersum; sed hanc quoque rationem habet HO ad BK, vt vltimò superiùs ostendimus; ergo 3O ad OK est vt HO ad BK; ac propterea rectangulum sub extremis 3O, BK æquatur rectangulo sub medijs KO, OH. Quod serua.

Vlteriùs, ex puncto Q Hyperbolæ AQN ordinetur ad ipsius axem NL recta Q4.

Et quum superiùs demonstratum sit HO ad BK esse vt summa laterum Sectionis datæ ABC ad transuersum, vel (ex constructione) vt transuersus axis PN oppositarum Sectionum ad ipsarum rectum latus, vel vt rectangulum P4N ad quadratum semiordinatæ Q4, quumque sit HO ad BK, vt rectangulum sub KO, BK ad quadratum BK erit rectangu-

á 21. primi Conic.

lum

ſum P4N ad quadratum Q4, vt rectangulum ſub HO, BK ad quadratum BK; ſed conſequentia, nempe quadratum Q4 æquale eſt quadrato BK, ergo & antecedentia, ſiue rectangulum P4N, rectangulo ſub HO, BK æquale erit. Quod memento.

Et quoniam HB ad BE eſt vt 3O ad OE (vtraque enim ratio eſt ea quam recti ad tranſuerſum) & BE ad BG eſt vt OE ad OB (nam ob tangentem AG, ac centrum E, eſt BE ad EG, vt [a] OE ad EB, & per conuerſionem rationis BE ad BG vt OE ad OB) ex æquali erit HB ad BG vt 3O ad OB; rectangulum ergo ſub extremis HB, BO, vel rectangulum HOB cum quadrato OB æquatur rectangulo ſub mediis 3O, BG, vel duobus ſimul ſub 3O, BK, & ſub 3O, KG; ſed rectangulum ſub 3O, BK æquale oſtenſum fuit ſuperiùs rectangulo HOK, ergo rectangulum HOB cum quadrato OB æquatur rectangulis ſimul HOK, & ſub 3O, KG, ſed rectangulum HOK æquatur duobus ſimul, nempe HOB, & ſub HO, BK, ergo idem HOB cum quadrato OB æquale eſt tribus ſimul ſub HO, OB, ſub HO, BK, & ſub 3O, KG, dempto igitur ex his communi rectangulo HOB, remanet quadratum OB æquale duobus ſimul ſub HO, BK, & ſub 3O, KG; ſed rectangulum ſub HO, BK, demonſtratum fuit vltimò æquale rectangulo P4N, ergo quadratum idem OB æquale eſt duobus ſimul rectangulis P4N, & ſub 3O, KG, rectangulum verò ſub 3O, KG æquale eſt [b] rectangulo ſub AO, IK, vel ſub LK, KI, vel quadrato mediæ KN: quare idem quadratum OB æquatur rectangulo P4N vnà cum quadrato KN, ſiue vnico quadrato K4, ſiue quadrato BQ: adeoque ramus OB ad datam Hyperbolam æqualis eſt ordinatæ BQ, vſque ad deſcriptam oppoſitam Sectionem NQA.

[a] ex 37. primi Conic.

[b] 67. huius.

Hucuſque omnibus præoſtenſis, concipiatur in ſingulis figuris alius quicunque ramus OS ad Hyperbolam datam, & ex S ordinata TZ oppoſitas Sectiones ſecans in T, Z, tangentes laterales in V, Y, & axem in X: demonſtrabimus enim *iiſdem penitùs argumentis, quibus vſi fuimus* ſuper ſecundam figuram, rectangulum RBQ ad ZST eſſe vt quadratum BO ad quadratum OX, ſed rectangulum RBQ, ſiue quadratum BQ oſtenſum eſt in ſingulis figuris æquale quadrato BO, ergo & rectangulum ZST quadrato OX æquale erit; his itaque addito communi quadrato XS, erit rectangulum ZST cum quadrato XS, ſiue vnicum quadratum XT, æquale duobus ſimul quadratis OX, XS, ſiue vnico quadrato OS: ac propterea ramus OS ad Hyperbolam datam æqualis ſemiordinatæ XT vſque ad deſcriptam QAT, & ſic de ſingulis ramis & ſemiordinatis ad vtranque partem ductis: quare conuexa huiuſmodi oppoſitarum Sectionum ſunt

Limites

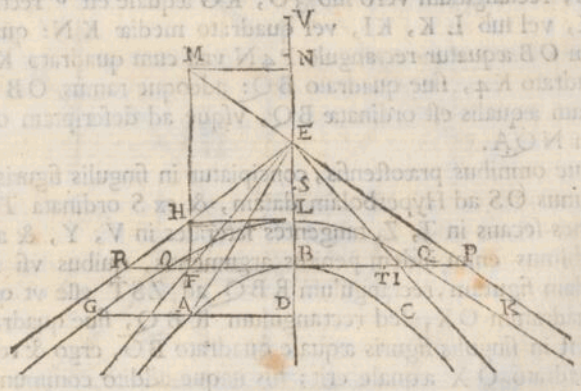
Ordinationis propoſitæ

Q.L.D.O.M.

PROPOSITIO LXXIII.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine in centro, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ ſibi concentricæ, cuius axis tranſuerſus ſit Modulus ex Aſymptoto, qui ad ſuum rectum latus eſt vt latus tranſuerſum datæ Hyperbolæ ad ſummam laterum eiuſdem.*

ESto Hyperbola A B C, cuius vertex B, axis tranſuerſus V B, centrum E, in quo ſit data ramorum origo, Aſymptoti verò ſint E F, E I, verticalis tangens B I, triangulum autem F E I Aſymptotale nuncupatum, & R E P circumaſymptotale, ac tandem N L, Modulus ex Aſymptoto, inuentus per F H M axi D E parallelam &c. prout in definit. xviij. xix. xx. Dico ſi per verticem L circa axem L B D deſcribatur Hyperbola G L K datæ concentrica, cuius axis tranſuerſus ſit Modulus N L, quique



ad ſuum rectum latus ſit vt datæ tranſuerſus axis ad ipſius laterum ſummam, huius Hyperbolæ concauum eſſe *Limitem* propoſitum.

Producatur deſcripta Hyperbola G L K, quæ verticali contingenti occurrat O, Q, atque huic ex L æquidiſtet L H.

Iam, quum ſit E F Aſymptotos datæ A B C, & E B ſemidiameter tranſuerſa, B F verò ad verticem contingens, erit vt [2] tranſuerſum ad rectum, ita quadratum E B ad quadratum B F, & componendo per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt tranſuerſum ad ſummam laterum, ita quadratum E B ad ſummam quadratorum E B, B F, vel ad quadratum E F, vel ad quadratum ſibi æqualis extenſæ B R (ex Moduli inuentione) hoc eſt ita quadratum E L ad L H; ſed eſt quoque vt tranſuerſum latus ad ſummam laterum datæ Hyperbolæ, ita ſemitranſuerſus E L deſcriptæ Hyperbolæ

[2] ex prima 2. Conic.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [168] - 140
PUBLIC DOMAIN

bolæ GLK ad ſuum ſemirectum, ex conſtructione, ergo quadratum EL ad LH eſt vt ipſe ſemitranſuerſus EL ad ſuum ſemirectum; nempe LH eſt media geometrica inter prædicta ſemilatera Hyperbolæ GLK, hoc eſt poteſt quartam ſuæ figuræ partem, ſed LH ipſam contingit ad L, ergo iuncta EHR eſt [a] Aſymptotos deſcriptæ GLK. Similiter EP eſt altera eiuſdem Aſymptotos: erit ergo quadratum LH, ſiue quadratum ſibi æqualis rectæ BF (ex Moduli inuentione) æquale rectangulo ROP, quibus communi addito, vel dempto rectangulo OFQ, erit rectangulum RFP æquale quadrato BO, ſed rectangulum RFP æquale eſt quadrato EB (quum totum quadratum RB æquale ſit quadrato EF, ſiue duobus EB, BF, quibus commune eſt quadratum BF) ergo & quadratum BO ipſi EB æquale erit, ideoque ramus minimus EB ad datam Hyperbolam ABC æqualis ſemiordinatæ BO, vſque ad deſcriptam GLK.

[a] 10. ſecundi Conic.

Sit præterea quilibet alius ramus EA, & per A ordinata DG deſcriptam ſecans in G, axem verò in D.

Habebit ergo quadratum rami EB ad quadratum EA rationem rectanguli [b] NDL ad rectangulum NBL, vel ob Hyperbolam GLK vt [c] quadratum DG ad quadratum BO, ſed permutando quadratum EB æquatur quadrato BO, vt nuper demonſtrauimus, ergo & quadratum EA quadrato DG, ſiue ramus EA ad datam Hyperbolam ABC ſemiordinatæ DG in deſcripta GLK æqualis eſt. Quod erat &c.

[b] 28. huius. [c] 21. primi Conic.

COROLL.

Elicitur hinc latera ER, EP trianguli *circumaſymptotalis* REP eſſe Aſymptotos inuenti *Limitis* Hyperbolici.

Et quoniam vtraque ipſarum tangentium BF, LH poteſt quartam partem ſuæ figuræ, atque ipſæ BF, LH inter ſe ſunt æquales, conſtat tàm datæ Hyperbolæ, quàm inuenti *Limitis* ſemiaxes coniugatos æquales eſſe.

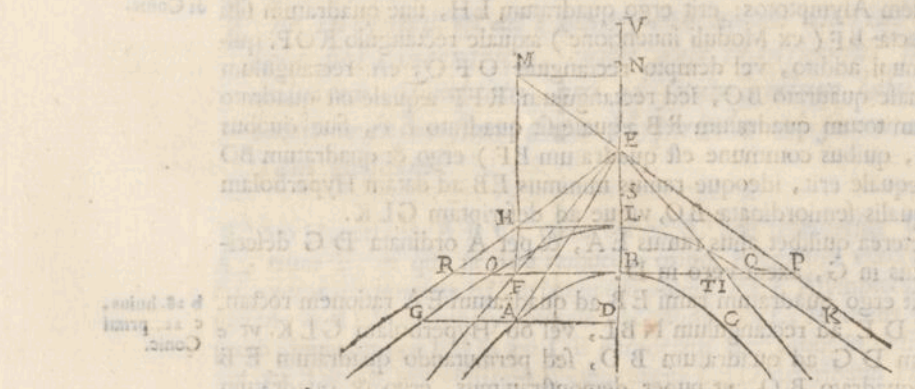
SCHOLIVM

Notandum eſt inſuper ſemitranſuerſum *Limitis* huiuſmodi poſſe rectangulum ſub ſemiaxe tranſuerſo EB datæ Hyperbolæ in quartam proportionalium ES, ſi fiat vt ſumma ſemilaterum datæ ad ſemirectum, ita ſemiaxis tranſuerſus ad aliam.

Sumpta enim ES tertia proportionali poſt EB, EL, ac BT æquali ſemirecto datę Hyperbolæ, ABC, erit BF media proportionalis, inter ſemilatera EB, BT; quare vt ſemilatus tranſuerſum EB ad ſemirectum BT, ita erit quadratum EB ad BT, & componendo, vt duo ſimul ſemilatera EB, BT ad ſemirectum BT, ita duo ſimul quadrata EB, BF, hoc eſt ita quadratum EF, vel ita quadratum RB ad quadratum BF, hoc eſt ad quadratum HL, ſiue ita quadratum BE ad EL, vel ad rectangulum BES, ſiue ita ſemiaxis BE ad ES; quare ES eſt quarta proportionalium

poſt

poſt ſummam ſemilaterum EB, BT, ſemirectum BT, & ſemitranſuerſum axem BE; atque EL ſemiaxis tranſuerſus *Limitis* poterit rectangulum ſub datæ Hyperbolæ ſemiaxe tranſuerſo EB, in prædictam quartam inuentam ES; eò quod EL ſit media inter BE, ES, ex conſtructione.



2. Apparet quoque ſemirectum latus inuenti *Limitis* æquale eſſe quartæ proportionalium poſt ſemitranſuerſum ipſius *Limitis*, ſemitranſuerſum datæ, & ſemirectum eiuſdem; quoniam rectangula ſub ſemilateribus vtriuſque Hyperbolæ æqualibus quadratis æqualia ſunt, nempe quadratis æqualium ſemiaxium coniugatorum, LH, BF &c.

PROPOSITIO LXXIV.

IN *Hyperbola*. Limites *Ordinationis ramorum ab origine vltra focum exteriorem, ſunt ad* Locos *conuexos illarum earundem oppoſitarum Sectionum, quæ ſunt* Limites *Ordinationis ramorum ab eadem origine ad aliam Hyperbolam datæ oppoſitam ducibilium.*

SIT data Hyperbola ABC, cuius vertex B, axis tranſuerſus BI, interior focus E, exterior F, vltra quem in producta BIF ſit data origo O. Dico, ſi deſcripta concipiatur per verticem I, circa axem IO altera Hyperbola GIH, quæ ſit datæ oppoſita, & cuius interior focus erit F, exterior C, ac iuxta ea, quæ conſtruximus in Prop. xxxxij. huius, ſint deſcripti *Limites* GTP, HVS Sectionum oppoſitarum & tangentium Hyperbolam GIH ad terminos G, H, ordinatæ per O, ad quarum conuexa peruenit Ordinatio ramorum ex origine O infra focum F ad Sectionem GIH ductorum: Dico inquam ipſos *Limites* GTP, HVS eſſe quoque *Limites* ramorum ex eadem origine O ad datam Hyperbolam ABC.

Iam conſtat, quod quum Sectiones oppoſitæ GT, HA oppoſitas ABC, GIH contingant ad G, H, in nullo alio puncto ſibi ipſis occurrent. [a] Ducan-

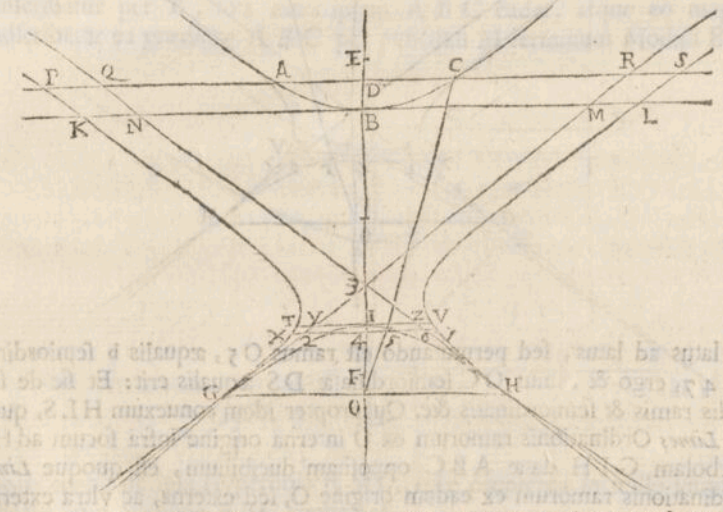
a per vltimam 4. Conic.

Ducantur ex G, H, laterales tangentes GR, HQ, quarum vtraque vtranque ſe contingentium Sectionum in ipſis punctis G, H, continget, vt in prædicta xxxxij. huius oſtenſum fuit, ipſæque in eodem axis puncto 3, ſimul conuenient, quæ vlteriùs productæ cum nulla ampliùs harum quatuor oppoſitarum concurrent [a] ſed inter eaſdem BC, VS, & BA, TP tranſibunt. Sint præterea verticales tangentes ad puncta I, B, quæ laterales ſecent in Y, Z, & in N, M, *Limites* verò in T, V, & in K, L.

[a] ex 22. ſec. Conic.

Quoniam igitur inter oppoſitas Sectiones GK, HL, quas contingunt ad G, H, rectæ GR, HQ, ductæ ſunt TV, KL ipſi GH tactus iungenti æquidiſtantes, quæ Sectiones, & contingentes ſecant, erit rectangulum TZV ad KML vt [b] quadratum tangentis HZ ad quadratum tangentis HN, vel vt quadratum OI ad OB (ob parallelas OH, IZ, NB) vel vt quadratum I3 ad B3 (nam ob tangentem HM, eſt OI ad

[b] ex 20. tertij Conic.



OB vt [c] I3 ad 3B) vel vt quadratum IY ad BM, vel vt quadratum IZ ad BM, quare duo ſimul, nempe rectangulum TZV cum quadrato IZ ad duo ſimul, nempe ad rectangulum KML cum quadrato BM, hoc eſt quadratum IV ad quadratum BL ipſis compoſitis æqualia, erit vt quadratum OI ad OB, ſed permutando quadratum OI æquale eſt quadrato IV, quoniam ramus OI æqualis demonſtratus fuit, in eadem quadrageſima ſecunda huius, ſemiordinatæ IV, ergo & quadratum OB quadrato BL, ſiue minimus ramus OB ad Hyperbolam datam ABC æqualis ſemiordinatæ BL ad deſcriptum *Limitem* HVL.

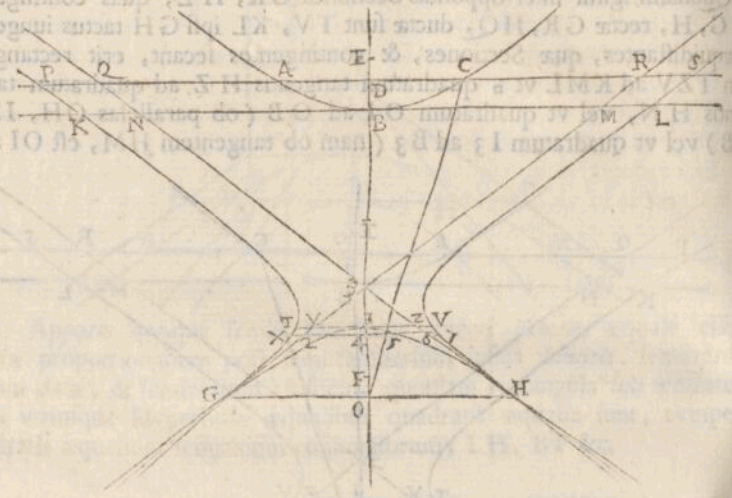
[c] 36. primi Conic.

Sit tandem quicunque alius ramus OC datæ ABC occurrens in C, & huic oppoſitæ Sectioni GIH in 5, & ordinatæ ſint ad axem OD per C, 5, rectæ, quæ Sectiones GK, HL, & tangentes ſecent G3, H3, in punctis vt videre eſt in figura.

Erit ergo (per ſuperiùs allatas rationes) rectangulum X67 ad RPS vt [d] quadratum H6 ad quadratum HQ (vel ob parallelas GH, PS,

[d] ex 20. tertij Conic.

PS, X7) vt quadratum O5 ad quadratum OC: similiter rectangulum
a 30. huius. 256 ad rectangulum QCR est vt a quadratum H6 ad quadratum HQ, vel vt idem O5, ad idem OC, ergo duo simul ad duo simul, hoc est vnicum X57 ad vnicum PCS erit vt idem quadratum O5 ad quadratum OC; sed quadratum O5 ad OC est vt quadratum 45 ad DC, ergo iterum duo simul ad duo simul, nempe quadratum 47 ad quadratum DS vt idem quadratum O5 ad idem OC, quare & latus ad latus, erit



b 72. huius, vt latus ad latus, sed permutando est ramus O5, æqualis b semiordinatæ 47, ergo & ramus OC semiordinatæ DS æqualis erit: Et sic de singulis ramis & semiordinatis &c. Quapropter idem conuexum HLS, quod est *Limes* Ordinationis ramorum ex O interna origine infra focum ad Hyperbolam GIH datæ ABC oppositam ducibilium, est quoque *Limes* Ordinationis ramorum ex eadem origine O, sed externa, ac vltra exteriorem focum F datæ Hyperbolæ ABC. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXXV.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine externa in extremitate axis transuersi est ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ, & oppositæ ei, quæ sit* Limes *Ordinationis ramorum ab eadem origine ad aliam Hyperbolam datæ oppositam ducibilium.*

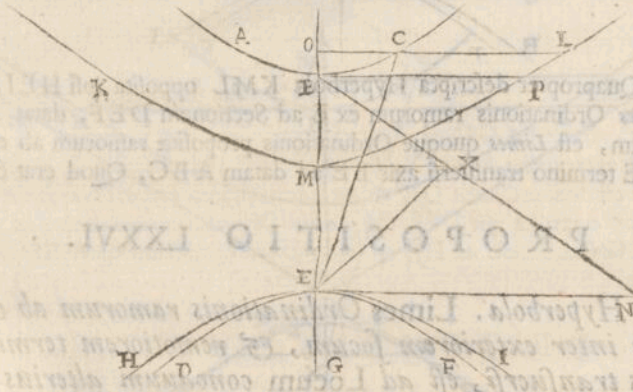
SIT data Hyperbola ABC, cuius vertex B, axis transuersus BE, & origo data sit E in ipsa axis extremitate remotiore. Dico si per E, tanquam per verticem, circa axem EG concipiatur descripta Hyperbola DEF-

opposita

oppoſita datæ ABC, cuius rectum latus ſit EN, regulatrix verò BN, & per eundem verticem E ſit ipſi DEF circumſcripta alia Hyperbola HEI, quæ ſit *Limes* Ordinationis ramorum ex origine verticis E ad Hyperbolam DEF ducibilium, nempe cuius rectum latus ſit idem EN, axis verò tranſuerſus ſit Modulus EM inuentus per angulum ſemirectum BEX, (vt xv. definitio primi huius requirit, demonſtratque Prop. lxix. huius,) & per M ipſi Hyperbolæ HEI ſit oppoſita alia KML. Dico inquam hanc eſſe *Limitem* Ordinationis ramorum ex origine E ad datam ABC ducibilium.

Iam, quum Hyperbola HEI, hoc eſt *Limes* Ordinationis ramorum ex vertice E ad Hyperbolam DEF ſit [a] huic circumſcriptus, hoc eſt totus extra ipſam cadat, & alia Hyperbola eidem HI congruens (qualis eſt KML) ſi datæ ABC (quæ pariter congruens eſt ipſi oppoſitæ DEF) adſcribatur per B, tota extra ipſam ABC cadet, atque eò magis ſi adſcribatur ea prædictæ ABC per punctum M terminum Moduli EM,

[a] 69. huius.



prout euenit de ipſa Hyperbola KML, quæ propterea in nullo vnquam puncto cum Sectione ABC conueniet.

Sint præterea per B, M, Sectiones contingentes BP, MX, & ramus quicunque EC, ac per C ſit ordinata OL Sectionem KML ſecans in L, axem verò in O.

Iam, tranſuerſum ME ad rectum EN, tam *Limitis* HEI, quàm ſibi oppoſitæ Sectionis KML, eſt vt [b] rectangulum EBM ad quadratum BP, ſed ME ad EN eſt vt MX, ipſi ME æqualis (ob angulos ſemirectos MEX, MXE) ad EN, vel in triangulo BEN vt BM ad BE, vel vt idem rectangulum EBM ad quadratum BE, ergo rectangulum EBM ad quadratum BP eſt vt rectangulum idem EBM ad quadratum BE; quare quadratum BP æquale eſt quadrato EB, ſiue latus lateri; hoc eſt minimus ramus EB ad datam Hyperbolam ABC, æqualis ſemiordinatæ BP vſque ad deſcriptam KML.

[b] 21. primi Conic.

Denique, quadratum rami EB ad quadratum rami EC eſt vt [c] rectangulum EBM ad rectangulum EOM (eò quod ſit EM tam Modulus Sectionis DEF, quàm ſibi oppoſitæ ac datæ ABC) vel vt quadratum

[c] 32. huius;

a 21. primi Conic. ſemiordinatæ B P ad [a] quadratum ſemiordinatæ O L (in Hyperbola KML, cuius tranſuerſa diameter eſt E M) ſed permutando, quadratum EB æquale eſt quadrato B P, ergo & quadratum E C quadrato O L, æquale erit, ſiue ramus E C æqualis ſemiordinatæ O L: & ſic de ſingu-



lis &c. Quapropter deſcripta Hyperbola KML oppoſita ipſi HEI, quæ eſt *Limes* Ordinationis ramorum ex E ad Sectionem DEF, datæ ABC oppoſitam, eſt *Limes* quoque Ordinationis propoſitæ ramorum ab eodem puncto E termino tranſuerſi axis BE ad datam ABC. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXXVI.

IN Hyperbola. Limes *Ordinationis ramorum ab origine inter exteriorem focum, & remotiorem terminum axis tranſuerſi, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ oppoſitæ ei, quæ ſit* Limes *Ordinationis ramorum ab eadem origine ad aliam Hyperbolam datæ oppoſitam ducibilium.*

SIT data Hyperbola ABC, cuius vertex B, axis tranſuerſus BE, interior focus V, exterior X, inter quem, & terminum E ipſius axis tranſuerſi BE, qui vertex eſt Hyperbolæ 2 D E F 3 datæ ABC oppoſitæ, ſit data origo G, per quam tranſeat ordinata DF baſis trianguli circumſcripti DKF, & ad cuius terminos D, F, deſcriptus ſit *Locus* Ordinationis ramorum ex origine G ad ipſam DEF ducibilium, qui per Prop. lxx. huius, erit Hyperbola ODTFP ipſi DEF circumſcripta, altera alteram contingens ad puncta D, F, ad quæ, eædem rectæ lineæ DK, FK in eodem axis puncto K ſe mutuò ſecantes, vtrãque prædictarum Hyperbolarum contingent.

Præterea ex Prop. xvij. & ex definit. xv. huius reperiatur TI Modulus ex verticali Hyperbolæ DEF, qui erit [b] axis tranſuerſus *Limitis* DTF

b 70. huius.

Ordina-

Ordinationis ramorum ex origine G, eritque minor [a] interuallo T B: per I verò circa axem IB describatur Hyperbola HIL opposita ipsi *Limiti* DTF; nam sic ipsa HIL datæ ABC erit adscripta; quumque DTF vna ex duabus oppositis, alteram ex alijs oppositis DEF contingat in duobus punctis D, F, reliquæ HIL, ABC, prædictis oppositæ, nunquam simul conuenient; nam, si Sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis, in alio puncto sibi ipsis non occurrent [b].

[a] ex 17. huius.

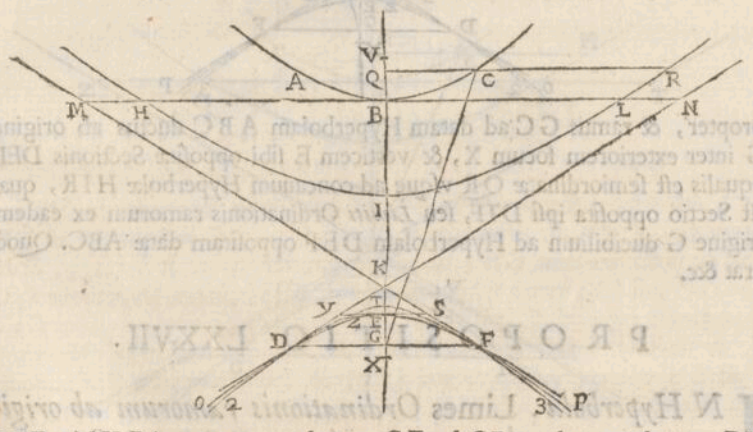
[b] per vltimam 4. Conic.

His præmonitis: Dico concauum huius Hyperbolæ HIL esse *Limitem* Ordinationis ramorum ex data origine externa G ad datam Hyperbolam ABC ducibilium.

Productis enim contingentibus DK, FK, ipsis occurrant verticales tangentes ad B, E, in M, N, & in Y, S, oppositas verò HIL, DTF secent in H, L, & in Z.

Quoniam igitur DK Hyperbolam DEF contingit ad D secans diametrum transuersam in K, estque ex D ordinata DG, erit vt GE ad GB, ita [c] EK ad KB, vel ita YE ad BN (*in similibus triangulis ad verticem*

[c] 36. primi Conic.



YKE, NKB) quare vt quadratum GE ad GB, vel vt quadratum DY ad DN, ita totum quadratum YE ad totum quadratum BN, sed etiam vt quadratum DY ad quadratum DN ita est [d] pars quadrati YE ad partem quadrati BN, nempe ita rectangulum YZS ad rectangulum MLN, ergo, vt idem quadratum DY ad DN, vel vt quadratum GE ad GB, ita erit reliquum ad reliquum, nempe quadratum ZE ad BL, sed permutando quadratum GE æquale est [e] quadrato ZE (quum Hyperbola DTF ponatur *Limes* Ordinationis ramorum ex G ad Hyperbolam DEF) ergo & quadratum GB quadrato BL æquale erit; siue ramus minimus GB ad datam Hyperbolam ABC æqualis semiordinatæ BL vsque ad concauum descripti *Limitis* HIL.

[d] 30. huius.

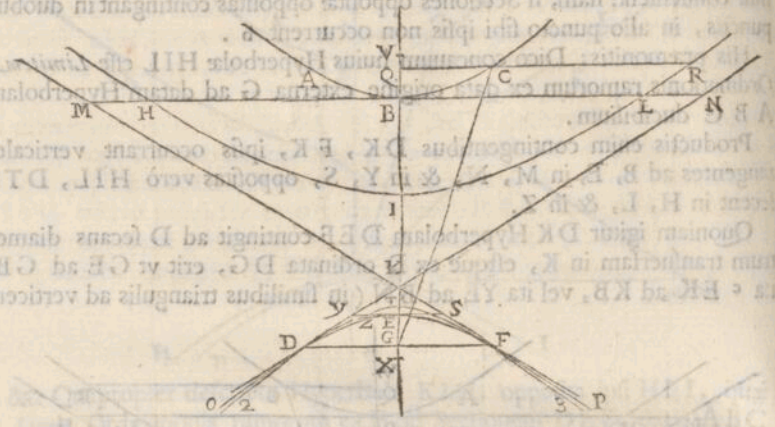
[e] 70. huius.

Insuper sit alius quilibet ramus GC, & per C sit semiordinata QR *Limitem* secans in R, axem in Q.

Et quoniam TI est Modulus ex verticali Hyperbolæ DEF, rami verò GB, GC ducti sunt ex origine G inter focum, & verticem ipsius DEF

ad ſibi oppoſitam A B C, quadratum rami G B ad quadratum rami G C, erit a vt rectangulum T B I ad rectangulum T Q I, vel vt b quadratum ſemiordinatæ B L ad quadratum ſemiordinatæ Q R in Hyperbola H I L, ideoque, & latus G B ad latus G C vt latus B L ad latus Q R, ſed permutando ramus G B æqualis nuper oſtenſus eſt ſemiordinatæ B L, quapropter, & ramus G C ad datam Hyperbolam A B C ductus ab origine G inter exteriorem focum X, & verticem E ſibi oppoſitæ Sectionis D E F æqualis eſt ſemiordinatæ Q R vſque ad concauum Hyperbolæ H I R, quæ eſt Sectio oppoſita ipſi D T F, ſeu *Limiti* Ordinationis ramorum ex eadem origine G ducibilium ad Hyperbolam D E F oppoſitam datæ A B C. Quod erat &c.

a 33. huius.
b 21. primi Conic.



PROPOSITIO LXXVII.

IN Hyperbola, Limes *Ordinationis ramorum ab origine externa vltra centrum, atque inter ipſum, & verticem ſibi oppoſitæ Sectionis data, eſt ad* Locum *concauum alterius Hyperbolæ oppoſitæ ei, quæ ſit* Limes *Ordinationis ramorum ab eadem origine ad aliam Hyperbolam datæ oppoſitam ducibilium.*

SIT data Hyperbola A B C, cuius vertex B, axis tranſuerſus B E, centrum X, inter quod, & verticem E Sectionis D E F datæ A B C oppoſitæ, ſit data ramorum origo G. Dico, ſi ramorum ad Hyperbolam D E F ducibilium ex origine externa G inter centrum, & verticem ſumpta, inueniatur *Limes* Ordinationis, hoc eſt Hyperbola I L M, cuius Modulus ex laterali ſit L R, vti factum fuit in Prop. lxxj. huius, ipſi verò I L M ſit oppoſita Sectio Q R K: Dico, inquam, hanc Q R K eſſe *Limitem* Ordinationis ramorum ab origine G ad datam A B C ducibilium.

Iam

Iam; constat transuersum axem LR (quum is sit Modulus ex lateralí, qualis inuentus fuit in Prop. xxj. huius) totum cadere [a] inter puncta E, B. Et quum Hyperbolæ ILM, vel huic oppositæ QRK, transuersus axis LR ad suum rectum sit vt [b] transuersus BE ad ipsum transuersum cum recto Sectionis DEF, vel datæ ABC, habebit axis transuersus Sectionis QRK ad suum rectum latus minorem rationem, quam transuersus Sectionis ABC ad rectum suum: quare si QRK, non variata adscriptione cum ABC, sic moueri concipiatur vt eius vertex cum huius vertice congruat, illa quidem erit huic ABC circumscripta (vt elicitur ex prop. xix. lib. primi nostræ diuinat. in Apoll.) atque ipsæ in vnico puncto B se mutuò contingent, adeoque Sectio QRK si iterum in priorem locum transferatur, in nullo vnquam puncto cum data ABC conueniet.

[a] 21. huius.

[b] ex prop. 71. huius.

Sint præterea ex origine G rectæ contingentes Sectiones GI, GM, & GD, GF, quæ, ex Prop. lxxj. huius, dabunt contactuum puncta I, D, F, M, in eadem recta IM ad axem HL ordinata; ipsæ verò tangentes exteriores IG, MG ad partes oppositarum producantur, quæ, quum



oppositæ Sectioni QRK non occurrant [c], eò minùs occurrent Sectioni ABC ab ipsa QRK comprehensæ.

[c] ex 33. sec. Conic.

Ducatur demum quicunque ramus GC, & per C ordinetur recta NK Hyperbolam QR secans in K, axem in N, & ex E, B, sint verticales contingentes, quarum altera OV laterales IG, MG secet in O, V, & Sectionem ILM in P, altera verò ZT easdem laterales productas secet in Z, T, Sectionem tandem QRK in S.

Iam sic. Totum quadratum OE ad totum BT est vt quadratum EG ad GB (ob proportionalitatem laterum similium triangulorum OEG, TBG) & pars, siue rectangulum OPV, ad partem, siue ad rectangulum ZST, est vt [d] quadratum tangentis IO ad quadratum tangentis IT, vel vt quadratum HE ad quadratum HB (ob parallelas IH, OE, BT,) vel vt idem quadratum EG ad idem GB, nam (ob contingentem DG est HE ad HB vt [e] EG ad GB) ergo & reliquum quadratum PE ad reliquum BS est vt idem quadratum EG ad idem GB, adeoque, & latus

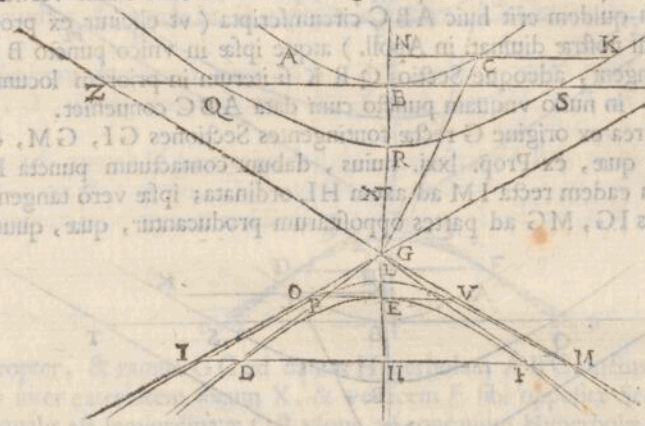
[d] 30. huius.

[e] 36. primi Conic.

tus PE ad BS, eſt vt latus EG ad GB, ſed permutando latus PE æquale eſt lateri GE (quoniam ILM ponitur *Limes* Ordinationis ramorum ex origine externa G ad Hyperbolam DEF) ergo, & ſemiordinata BS æqualis erit ramo minimo GB ad datam Hyperbolam ABC.

Præterea, quoniam LR eſt Modulus ex laterali Hyperbolæ DEF, rami autem GB, GC, ducti ſunt ex origine G inter centrum, & verticem eiuſdem DEF ad ſibi oppoſitam ABC, erit quadratum rami GB ad quadratum rami GC vt a rectangulum LBR ad rectangulum LNR, vel

a 34. huius.



b 21. primi Conic. vt b quadratum ſemiordinatæ BS ad quadratum ſemiordinatæ NK in Hyperbola QRK, ac propterea & latus GB ad GC vt latus BS ad NK, ſed permutando latus GB æquale oſtenſum fuit lateri BS, ergo, & latus GC ipſi NK: quare ſemiordinata NK ad concauum Hyperbolæ QRK æqualis eſt ramo GC ad datam ABC ducto ex origine data G; & ſic de ſingulis ramis, & ſemiordinatis &c. ideoque concauum Hyperbolæ QRS oppoſitæ prædicto *Limiti* ILM eſt *Limes* propoſitæ Ordinationis, Quod erat &c.

PROPOSITIO LXXVIII.

IN Oppoſitis Sectionibus. Limites *coniugatæ Ordinationis ramorum ab origine in centro, ſunt ad* Locos *conuexos aliarum oppoſitarum, datis per ipſarum vertices inſcriptarum, ita vt idem ſit omnium tranſuerſum latus, quod ad rectum* Limitum *ſit in ratione ſummæ laterum ductarum ad earundem latus rectum.*

SInt oppoſitæ Sectiones ABC, DEF, quarum axis tranſuerſus EB, rectum latus BY, & axis priori coniugatus ſit HP, & centrum G, quod ſit origo ramorum ad datas Sectiones ducibilium &c. Dico ſi per

verti-

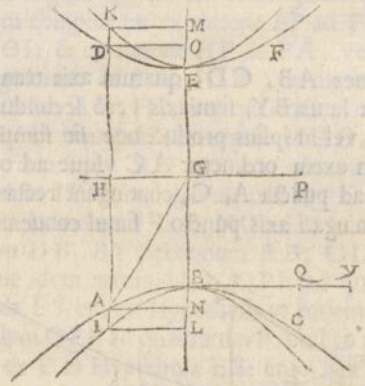
vertices B, E, seu cum eodem axe transuerso BE descriptæ sint aliæ oppositæ Sectiones BI, EK, ad quarum rectum latus BQ rationem habeat transuersum EB, eam, quam habet summa laterum EB, BY ad rectum BY, ipsas BI, EK, esse *Limites* propositos.

Ducatur ex origine G quicunque ramus GA ad datam ABC, & per G fit ad axem coniugatum HP ordinata AH, quæ ad vtranque partem producta occurrat Sectionibus in punctis I, D, K, per quæ, & ex A applicentur ad axem vtrinque productum EB rectæ IL, DO, KM, AN.

Erunt itaque tam totæ HI, HK, quàm partes HA, HD, & quam reliquæ AI, DK inter se æquales (quum HP sit harum Sectionum communis diameter coniugata) pariterque his oppositæ super axem ML æquales erunt.

Iam : rectangulum ELB ad quadratum LI, est vt a transuersum EB ad BQ, vel, ex constructione, vt EB cum BY ad BY, & quadratum

a 21. primi Conic.



LI, siue AN ad ENB est vt b BY ad BE, ergo, ex æquali, ELB ad ENB, siue MBL ad OBN est vt EB cum BY ad BE; ideoque & MBL ad differentiam inter MBL & OBM, siue ad MNL, siue ad KAI, erit vt EB cum BY ad differentiam inter OB cum LY & EB, hoc est ad BY, sed est quoque EB cum BY ad BY vt rectangulum ELB, vel MBL ad quadratum LI, ex nuper demonstratis, ergo quum idem rectangulum MBL tam ad KAI, quàm ad quadratum LI eandem habeat rationem, erit rectangulum KAI æquale quadrato IL, siue HG, & communi addito quadrato HA erit rectangulum KAI cum quadrato HA, siue vnicum quadratum HI æquale quadratis HG, HA, vel vnico GA, ideoque ramus GA æqualis semiordinatæ HI: Et sic de singulis ramis, atque semiordinatis etiam ad aliam partem Sectionis DEF. Quare huiusmodi Sectiones oppositæ BI, EK sunt *Limites* propositæ Ordinationis. Quod erat demonstrandum.

b ibidem.

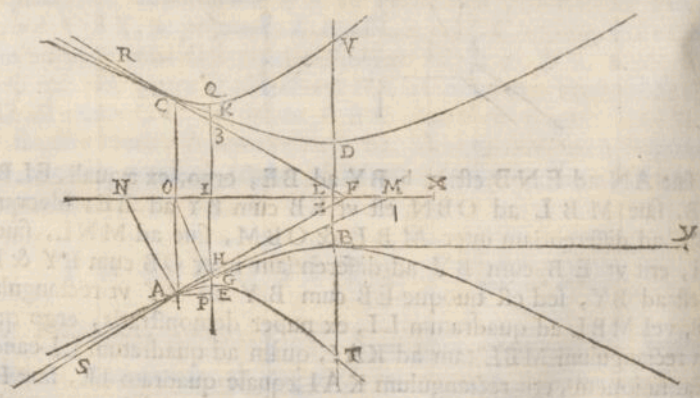
PRO-

PROPOSITIO LXXIX.

IN Oppositis Sectionibus. Limites *Ordinationis ramorum ab origine in axe coniugato extra centrum sumpta, sunt ad* Locos *conuexos aliarum Sectionum oppositarum datis inscriptarum, & ad terminos tantùm ordinatæ per originem se tangentium, harumque centrum distat ab origine per altitudinem rami minimi; semiaxis verò transuersus ipsi minimo ramo æqualis est, & ad suum semirectum eam habet rationem quàm summa laterum datarum Sectionum ad earundem rectum latus.*

SInt oppositæ Sectiones AB, CD, quarum axis transuersus sit DB, centrum L, rectum latus BY, semiaxis verò secundus ipsi BD coniugatus sit LX, in quo, vel in ipsius productione sit sumpta vbilibet origo O, per quam ad ipsum axem ordinetur AC vsque ad oppositas Sectiones AB, CD, & quas ad puncta A, C, contingant rectæ AF, CF, quæ in vno, eodemque coniugati axis puncto F simul conuenient; a ex origi-

a ex conuers. 38. sec. Conic.



ne autem O sit ad Sectionem AB ductus minimus ramus OG, qui ex Prop. xxij. lib. sec. nostræ Diuinat. in Apoll. habebitur si distantia OL inter originem, & centrum sic diuidatur in I, vt OI ad IL sit vt transuersum DB ad rectum BY; siquè, (ordinata IG) iungatur OG. Dico, si ipsi OG (quæ maior est semiordinata IG) ab ordinata per I (quæ contingentes AF, CF, secet in H, 3) æquales hinc inde sumantur IE, IQ, & cum centro I (quod distat ab origine O per IO altitudinem rami minimi OG) cum semiaxibus IE, IQ, per vertices E, Q, describantur

Sectio-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [180] - 152
PUBLIC DOMAIN

Sectiones oppositæ ES, QR; has contingere datas ad puncta A, C, atque ipsis esse inscriptas, earundemque conuexa esse *Limites* propositos.

Ex puncto G, in Hyperbola AB, sit contingens GM coniugato axi OL occurrens in M, atque ex A super tangentem AF sit perpendicularis AN, & ex contactu A ducatur AP ipsi OL parallela, quæ ordinatæ IE occurrat in P. Constat punctum P cadere vltra productam IE, quum huic æqualis sit OG, quæ, ex Hypothesi, minor est OA, vel IP, eò quod sit minima.

Iam, quum OG sit ramus minimus ex origine O, & AFC triangulum oppositis Sectionibus circumscriptum super AC ex origine ordinatam, sitque in eo semiordinata IH ex rami sublimitate, erit quadratum OG, vel IE æquale [a] rectangulo sub OA in IH, vel rectangulo sub PI in IH, ideoque IE est media proportionalis inter PI, IH, atque ipsi mediæ IE addita est in directum, & æqualis IQ, ergo rectangulum IPH æquatur [b] rectangulo QPE, sed rectangulum IPH ad quadratum PA habet rationem compositam ex ratione IP ad PA, vel ex ratione æqualium OA ad OI, & ex ratione HP ad PA, vel HI ad IF (ob similitudinem triangulorum HPA, HIF) ex his autem rationibus conflatur ratio rectanguli sub AO, HI, vel quadrati [c] rami minimi OG, vel rectanguli MOI (in triangulo rectangulo MGO,) ad rectangulum FIO, vel conficitur ratio lineæ MO ad FI, (ob communem altitudinem OI) ergo rectangulum IPH, vel ipsi æquale QPE ad quadratum PA est vt linea MO ad FI, vel vt [d] linea NO ad OI, sed NO ad OI est vt [e] summa laterum DB, BY Sectionum AB, CD, ad ipsarum rectum latus BY, atque idem rectangulum QPE ad quadratum semiordinatæ ex P in Hyperbola ES est, ex Hypothesi, vt eadem summa ad idem rectum, ergo rectangulum QPE ad quadratum PA est vt idem QPE ad quadratum semiordinatæ ex P in Hyperbola ES: ergo hæc necessariò transit per A.

a 27. huius.

b 19. huius ad num. 3.

c 27. huius.

d ex Coroll. 27. huius. e ex Schol. 27. huius ad num. 3.

Et quia rectangulum PIH, vt superiùs ostendimus, æquatur quadrato IE, recta AHF Hyperbolam quoque SAE continget [f] ad A.

f ex conuerso 37. primi Conic.

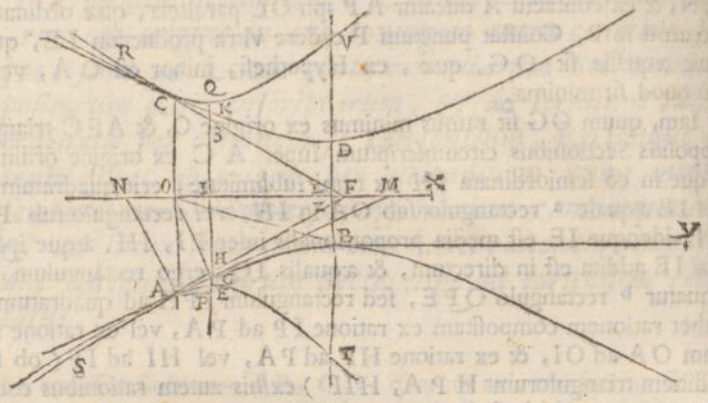
Sit præterea alius quicunque ramus ex origine O ad Hyperbolam AB, præter ad puncta A, G, ductus, qualis est OB, & per B sit ordinata TV datas Sectiones secans in B, D, descriptas verò in T, V, & coniugato axi in L.

Et quoniam ramus OG æquatur ordinatæ IE, ex constructione, erit quadratum OG, siue duo simul OI, IG æqualia quadrato IE, siue rectangulo QGE cum quadrato IG, dempto igitur communi quadrato IG, erit quadratum OI æquale rectangulo QGE.

Insuper quoniam rectæ AF, CF vtrunque Sectionum oppositarum par tangunt ad eadem puncta A, C, vt superiùs ostensum fuit, ipsaque contactuum puncta iungit recta AC, cui æquidistant QE, VT, tangentes AF, CF quantùm sit opus productas in H, Z, & Sectiones ipsas secantes in Q, K, G, E, & in V, D, B, T, erit quadratum tangentis AH ad quadratum tangentis AZ, vel quadratum OI ad OL vt [g] totum rectangulum QHE ad totum VZT (in Sectionibus AT, CV) & vt pars ad partem, nempe vt rectangulum KHG ad rectangulum DZB (in Sectionibus AB, CD) & vt reliqua ad reliquam, hoc est vt rectangulum

g 20. tertij Conic.

QGE ad VBT, ſed permutando, quadratum OI æquale eſt rectangulo QGE, vt paulò ſuperiùs oſtendimus, ergo, & quadratum OL rectangulo VBT æquale eſt, & his addito communi quadrato LB, erunt



quadrata OL, LB, ſiue vnicum OB æquale rectangulo VBT cum quadrato LB, ſiue vnico quadrato LT, ideoque ramus OB ad Hyperbolam AB æqualis ſemiordinatæ LT inter oppoſitas AT, CV; atque eſt ramus OB maior ſemper ſua amplitudine LB, (eòquod OB recto angulo ſit oppoſita, LB verò acuto) ergo & LT maior eſt LB, hoc eſt punctum T cadit intra datam Hyperbolam AB, & ſic de ſingulis ramis, & ſemiordinatis: Quare huiuſmodi oppoſitarum Sectionum conuexa AT, CV totæ ſunt intra datas AB, CV ad vtranque partem occurſuum ipſarum nempe ad A, C, in quibus ſe tantùm contingunt, ſuntque SAT, RCV *Limites* propoſitæ Ordinationis. Quod demonſtrandum erat.

COROLL.

COlligitur hinc, quod ſi duo Oppoſitarum Sectionum paria in eadem coniugata diametro centra habentia, & quarum diametri tranſuerſæ inter ſe æquidiſtent, fuerint ſimul adſcripta, ita vt par vnum cadat totum intra reliquum in duobus tantùm punctis ipſum contingens, quale in ſuperiori figura eſt par oppoſitarum SAE, RQV, tangens par oppoſitarum AB, CD, in punctis tantùm A, C, atque ipſa contactuum puncta recta linea iungantur, cui æquidiſtanter ordinatæ ſint quotcunque rectæ vtrunque oppoſitarum par ſecantes, rectangula ſub inæqualiſſimis harum ordinatarum partibus integrantibus, ſunt inter ſe vt quadrata ſegmentorum communis diametri coniugatæ inter ipſas ordinatas, & ordinatam per contactus interceptorum. In prædictis enim oppoſitarum Sectionum paribus demonſtratum eſt rectangulum QGE, ad VBT eſſe vt quadratum OI ad OL.

MONI-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [182] - 154
PUBLIC DOMAIN

MONITVM.

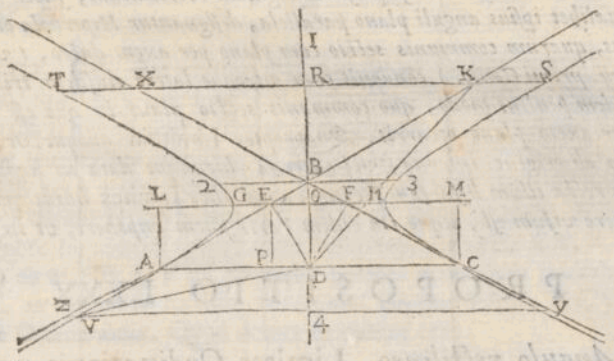
HVcusque absolutam exhibuimus doctrinam de LOCIS SOLIDIS, *quò ad Ordinationem ramorum ab origine interna, vel externa vbicunque data in axe tam Circuli, quàm Parabolæ, vel in axe transuerso, aut coniugato Ellipsis, vel Hyperbolæ, siue etiam oppositarum Sectionum. Verùm enimuerò, quoniam (vt in sexagesima octaua propositione Libri ij. primæ nostræ Diuinat. in Apollonium opportunè monuimus) Angulus rectilineus quicunque haberi potest tanquam Hyperbola omnium similium, & concentricarum angustissima, seu tanquam prima, ac minima earum, quibus communis sit Angulus Asymptotalis, & cuius semiaxis transuersus abit in punctum, in ipsum, nempe verticem anguli eiusdem; hunc itaque angulum hùc quoque, veluti Conicam Sectionem considerabimus, & quidem haud inconsultò, quæcunque enim Sectio Coni, basim habentis, per verticem ducta, triangulum exhibet in ipso Cono; in Coni verò superficie angulum rectilineum, super quam, per plana quælibet ipsius anguli plano parallela, designantur Hyperbolæ omnes inter se similes, quarum communis sectio cum plano per axem ducto, (vt requiritur in xij. primi Conic.) conuenit cum vtroque latere eiusdem trianguli per axem eodem penitus modo, quo communis sectio plani in quo est angulus, eidem per axem plano occurrit. Quapropter* Limitem *quoque Ordinationis ramorum ab origine interna, vel externa vbicunque data in anguli axe, nempe in recta illum bifariam secante, apud alios* Limites *huius quartæ Partis apponere visum est, atque ita eidem Parti finem imponere, vt in sequenti.*

PROPOSITIO LXXX.

IN Angulo rectilineo. Limites *Ordinationis ramorum ab origine interna, vel externa ductorum, sunt ad conuexa earundem Sectionum oppositarum inæqualium laterum, & anguli latera tangentium ad terminos ordinatæ per originem, a qua ipsarum centrum distat per altitudinem rami minimi, semiaxis verò transuersus ipsi minimo ramo æqualis est, atque ad suum semirectum latus est vt semiordinata ex origine ad amplitudinem rami minimi.*

SIT Angulus rectilineus ABC, cuius axis BD vtcunque productus, sitque data priùs intra angulum origo quæcunque D, a qua ducti sint minimi rami, seu perpendiculares DE, DF super latera BA, BC, qui, vt constat, inter se æquales erunt; per D verò sit ordinata ADC, iungaturque EF, quæ ipsi AC æquidistabit; nam in triangulis EDO, FDO anguli ad D sunt æquales, (eò quod & anguli ad B in triangulis rectan-

gulis DEB, DFB, ab axe BD constituti, sint æquales, & vnà cum reliquis ad D rectum compleant) quos circum & latera sunt æqualia, ergo & reliqui anguli ad O, in quo EF axem secat, inter se æquales erunt, nempe recti; & idcirco, quum vtraque ipsarum EF, AC sit ad axem BD perpendicularis, hæ inter se æquidistabunt. Producantur præterea OE, OF, è quibus sumantur OG, OH ipsis ramis minimis DE, DF æquales, & cum centro O (quod distat ab origine D per DO altitudinem minimi rami DE) per vertices G, H, circa axem LM descriptæ sint Sectiones oppositæ ZGT, YHS, quarum axis transuersus GH ad suum rectum latus sit vt DA semiordinata ex origine ad OE amplitudinem minimi rami DE. Dico has necessariò transire per puncta A, C, atque in his tantùm dati anguli latera contingere, ipsarumque conuexa esse *Limites* ramorum, non tantùm ad latera BA, BC ex data origine D ducibilium, quàm ad eadem vltra B producta angulum KBX ad verticem dato constituentia.



Ex A, C, demittantur super LM perpendiculares AL, CM, quibus, ac propterea & axi BD æquidistet EP.

Et quoniam semiordinatæ DA, DC sunt æquales, etiam OL, OM æquales erunt, suntque, & OG, OH æquales, ex constructione, atque item OE, OF, ergo, & LG, HM, & GE, FH inter se æquales erunt. Sed in triangulo rectangulo AED est rectangulum ADP æquale quadrato DE, ergo & LOE æquale erit quadrato rectæ OG, ipsi DE æqualis: est autem OH æqualis mediæ proportionali OG, ergo rectangulum HLG æquatur [a] rectangulo OLE, siue rectangulo DAP, sed HLG ad quadratum semiordinatæ ex L in Hyperbola ZGT est vt [b] transuersum ad rectum, vel ex Hypothesi, vt DA ad OE, vel ad DP, hoc est (sumpta communi altitudine AP) vt idem rectangulum DAP, ad DPA, siue ad quadratum PE mediæ proportionalis inter DP, PA, ergo quadratum semiordinatæ ex L in Hyperbola æquatur quadrato PE, siue quadrato AL, ideoque semiordinata ex L eadem est ac ipsa AL: quare Hyperbola ZGT transit omnino per A, similiterque Sectio ei oppositæ SHY

[a] 57. huius.
[b] 21. primi Conic.

SHY transit per C. Et quum rectangula sub LO, OE, & sub his æqualibus MO, OF quadratis æqualium OG, OH æqualia sint, vt supra demonstrauimus, rectæ AE, CF Hyperbolas contingent a in punctis A, C.

a ex conuerso 37. primi Conic.

Amplius, sit quicunque alius ramus DV ad latus BA ductus, & alius quilibet DK ad idem latus AB productum, & ex V, B, K, sint ordinatæ ZY, 23, TS.

Quum itaque sit quadratum OG æquale quadrato DE, vel duobus DO, OE; dempto communi OE, erit rectangulum HEG æquale quadrato DO.

Insuper, quum rectæ ABK, CBX oppositas Sectiones contingant ad A, C, simulque conueniant in B, hasque, & Hyperbolas secent rectæ GH, ZY, 23, TS ipsi AC tactus iungenti parallelæ, erunt inter se rectangula HEG, YVZ, 3B2, SKT vt sunt b quadrata segmentorum tangentis, hoc est vt quadrata AE, AV, AB, AK, vel vt quadrata his proportionalia DO, D4, DB, DR, sed rectangulum HEG, æquale nuper ostensum fuit quadrato DO, ergo, & rectangulum YVZ quadrato D4, & rectangulum 3B2 quadrato DB, & rectangulum SKT quadrato DR æquale erit: Si primis igitur commune addatur quadratum V4, tertijs verò commune quadratum KR, erunt ibi rectangulum YVZ, cum quadrato V4, siue vnicum quadratum Z4 æquale quadrato D4 cum quadrato 4V, siue vnico quadrato DV; hìc verò rectangulum SKT cum quadrato KR, siue vnicum quadratum SR, vel RT æquale quadrato DR cum quadrato RK, siue vnico quadrato DK: ac demum quadratum DB rectangulo 3B2, siue quadrato B2 æquale: quapropter tam rami DV, DA, DE, DB ducti ad latus AB dati anguli rectilinei, quàm ramus DK, alijque sic ducti ad productum latus BK in angulo ad verticem KBX, æquales sint suis semiordinatis 4Z, DA, OG, B2, RT vsque ad conuexum Hyperbolæ ZGT. Et sic de singulis ramis, atque semiordinatis ad aliam Hyperbolam oppositam YHS. Quare &c. Quod interim circa Ordinationes tantùm ramorum nouæ cuidam doctrinæ destinatas supererat demonstrandum.

b 20. tertij Conic.

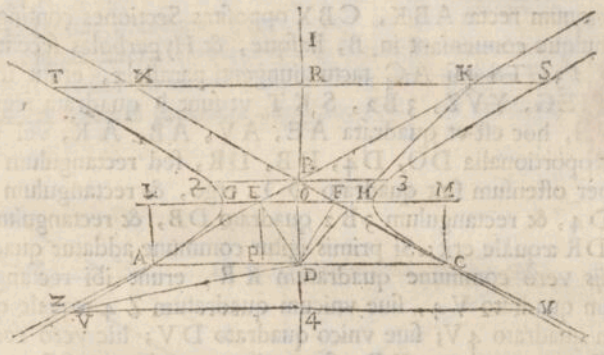
SCHOLIVM.

1. EDucendum se præbet ex dictis, centrum O distare a vertice B dati anguli per differentiam inter ramum verticalem, & altitudinem rami minimi. Distat enim per OB, quæ est differentia inter verticalem ramum DB, & DO altitudinem minimi rami DE.

2. Præterea semiaxem *Limitum* OG posse rectangulum sub semiordinatis ex origine, & ex termino rami minimi. Ostensum est enim quadratum OG æquale rectangulo LOE, vel sub AD ex origine, & sub EO ex termino minimi rami ordinata, quod æquatur quoque rectangulo sub ramo verticali DB, & sub minimi altitudine DO: nam ob similitudinem triangulorum BDA, EOD latus BD ad DA est vt EO ad OD,

ideoque rectangulum BDO æquale rectangulo sub DA, EO, seu quadrato semiaxis OG.

3. Quum item demonstratum sit, *Limites* Ordinationis ramorum ex interna origine D dati anguli ABC ad ipsius latera, quamuis producta, vltra verticem B ducibilium, esse ad oppositas Sectiones AG, CH, quales diximus, ex hoc manifestè patet, & reliquum superioris Propositionis, nempe quales sint *Limites* Ordinationis ramorum ab origine externa dati anguli, si concipiatur hìc datum angulum esse KBX ad verticem reliqui ABC, quæ omnia per se satis constant.



4. Tandem apparet, quod, quum axis transuersus huiusmodi *Limitum* ad suum rectum latus sit vt AD ad EO, vel ad DP, sitque AD ad DP vt quadratum AD ad DE, transuersum ad rectum est vt quadratum AD semiordinatæ ex origine ad quadratum minimi rami DE, sed hæc ratio in eodem angulo rectilineo semper est eadem cum ratione quadrati AB ad BD, vbicunque origo data sit, vt per se patet; ergo omnes huiusmodi *Limites* ad eundem angulum spectantes sunt similes inter se, ipsorumque latera transuersa ad recta sunt in ratione maioris semper inæqualitatis, nempe in ratione quadrati lateris AB ab ordinata ex origine abscissi ad quadratum sui rami verticalis DB.

Hæc interim circa huiusmodi ramorum Ordinationes in hac quarta Parte demonstrasse sufficiat, post cuius Epilogum, sequitur in Quinta veluti quoddam specimen eorum, quæ fusiùs vbi vsus postulauerit, ad aliud tempus relinquimus explicanda.

EPI-

EPILOGVS QVARTÆ PARTIS.

INuentis Locis *singulis, ad quos rami ex quacunque origine in axe cuiuslibet Coni-sectionis, vel intra, vel extra, vel in ipso vertice data, ducti, & aptè ordinatim positi perueniunt, haud inutile erit, ad noua potissimùm, quæ breui, Deo dante, edituri sumus, hæc, quæ sequuntur, veluti Corollaria ex hucusque editis animaduertisse.*

Colligendum itaque est primò, ex Prop. l. li. & lij. huius primi libri. In Circulo: Locos *omnes inuentos tanquam* Limites *Ordinationis ramorum ab origine in axe vbicunque intra, vel in vertice, vel extra data, esse ad concaua Parabolarum, nempe similium Coni-sectionum: nam Parabolæ omnes inter se similes sunt, vt constat ex Conicis Elementis.*

Secundò ex Prop. liij. huius. In quacunque Coni-sectione focum habente, ac Circulo non excluso: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ex origine in ipso foco interiori, vel exteriori, vel etiam in Circuli centro, esse planos* Locos, *rectas nempe lineas Sectionem tangentes ad terminos rectæ per focum ordinatæ, adeoque ipsos* Locos, *similes quoque inter se nuncupari posse.*

Tertiò ex Prop. liv. lv. & lvi. In Parabola: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine supra focum vbicunque ad verticis partem, vel intra, vel in ipso vertice, vel extra sumpta, esse ad concaua similium Hyperbolarum: Nam omnes Hyperbolæ æquilateræ, quales pro ipsis* Locis *adinuenimus, sunt similes inter se.*

Quartò ex Prop. lvij. In Parabola: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine infra focum ad partes vertici contrarias, esse ad conuexa similium itidem Hyperbolarum, ac simul oppositarum, eò quod omnes sint pariter semper æquilateræ.*

Quintò, ex Prop. lix. lx. lxi. & lxij. In Ellipsi Prolata: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine in minori axe, vel intra, quamuis in centro, vel in vertice, vel extra vbicunque data, esse ad concaua similium Ellipsium. Ibi enim ostensum fuit horum* Locorum *transuersos axes ad sua recta latera semper esse in ratione minoris axis, seu transuersi datæ Ellipsis ad differentiam inter latera eiusdem.*

Insuper, ex earum Corollarijs, huiusmodi similes Ellipses aliquando esse oblongas, aliquando prolatas, aliquando verò Circulos, prout requirit prædicta ratio inter minorem axem datæ Ellipsis, & differentiam laterum eiusdem.

Sextò ex Prop. lxij. lxv. & lxvi. In Ellipsi oblonga: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine in maiori axe supra focum, verticem versus, vel intra, vel in vertice, vel extra vbicunque data esse ad concaua similium Hyperbolarum inæqualium laterum, in ratione tamen maioris inæqualitatis. Ibi enim demonstratum est horum* Locorum, *seu Hyperbolarum axes transuersos ad sua recta latera semper esse in ratione maioris axis transuersi datæ Ellipsis ad differentiam inter eiusdem latera.*

Septimò ex Prop. lxiv. & lxvij. In eadem Ellipsi oblonga: Locos *omnes*

pro

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [187] - 159
PUBLIC DOMAIN

pro Ordinatione ramorum ab origine in maiori axe infra focum, vel etiam in centro vbicunque data, esse ad conuexa similium Hyperbolarum, ac simul oppositarum, sed inæqualium laterum in ratione minoris inæqualitatis. In his namque conclusum fuit huiusmodi Hyperbolarum axes transuersos ad recta latera, semper esse in ratione differentiæ laterum datæ Ellipsis ad maiorem axem transuersum.

Octauò ex Prop. lxix. lxx. lxxi. lxxij. & lxxv. lxxvi. & lxxvij. In Hyperbola: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine inter focos, interiorem nempe, & exteriorem excluſiuè, in axe vbicunque data, esse ad concaua similium Hyperbolarum, inæqualium laterum, in ratione tamen minoris inæqualitatis. Quoniam in ijs visum est huiusmodi* Locorum *transuersos axes ad sua recta latera semper esse in ratione transuersi axis datæ Hyperbolæ ad summam laterum eiusdem.*

Nonò ex Prop. lxxij. & lxxiv. In eadem Hyperbola: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ab origine in axe vbicunque data infra interiorem, vel vltra exteriorem focum, esse ad conuexa earundem pariter similium Hyperbolarum simul oppositarum, & inæqualium laterum, in ratione tamen maioris inæqualitatis. Ostensum est enim horum* Locorum *axes transuersos ad sua recta latera semper esse in ratione summæ laterum datæ Hyperbolæ ad transuersum latus eiusdem.*

Decimò ex Prop. lxxviij. & lxxix. In Oppositis Sectionibus: Locos *omnes pro Ordinatione ramorum ad axem coniugatum, nempe ab origine, vel in centro vel in ipso axe coniugato vbicunque data, esse ad conuexa aliarum Hyperbolarum simul oppositarum, omnium inter se similium, & in ratione maioris inæqualitatis: nam ex ijs elicitur huiusmodi* Locorum *axes transuersos ad recta latera semper esse vt summa laterum datarum Sectionum ad ipsarum rectum latus.*

Vndecimò, ac vltimò ex Prop. lxxx. atque ipsius Scholio ad num. 4. In Angulo rectilineo: Locos *omnes Ordinationis ramorum ab origine interna, vel externa vbilibet in axe data, esse ad conuexa oppositarum Sectionum, omnium itidem inter se similium; semper autem in ratione maioris inæqualitatis, quæ ea est quam habet quadratum cuiusque lateris dati anguli ab ordinata per originem abscissi, ad quadratum axis inter originem, ac verticem eiusdem anguli.*

Dum hæc ita iam impressa compilando recolimus, noua se se offert Methodus ad omnia aliter, ac paucis demonstranda: nihilominus calcatæ viæ, neque nos, neque alios, ni fallimur, pœnitebit.

Cæterùm peculiari animaduersione dignum videtur in Coni-sectionibus circa axes, focos in se habentes, dum origo ramorum infra focum sumpta ad ipsum magis accedit, prædictorum Locorum, *seu* Limitum *conuexa semper magis, ac magis deprimi, donec peruenta origine in ipso foco, illas in rectas omnino lineas se se extendant; vlteriùs autem mota origine, hanc rectitudinem illicò in cauitatem conuerti, semperque magis, ac magis augeri, quò magis origo in Circulo, seu in Parabola, aut in Ellipsi oblonga a Sectionis vertice distiterit: in Hyperbola verò, quò magis sui ipsius centro propior fiat.*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [188] - 160
PUBLIC DOMAIN

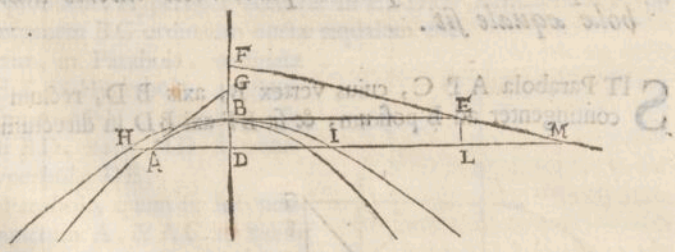
DE LOCIS SOLIDIS

LIBRI PRIMI PARS QVINTA

PROPOSITIO LXXXI.

IN Parabola. Limes *Ordinationis tangentium a Sectione, & axe comprehensarum, est ad* Locum *concauum Hyperbolæ per eundem verticem sibi circumscriptæ, & cuius idem sit rectum latus, transuersum verò sit recti subquadruplum.*

SIT Parabola ABC, cuius vertex B, axis BD, latus rectum BE contingenter positum ad B, & cuius subquadruplum sit BF in directum cum DB. Dico si per verticem B circa eundem axem BD descripta sit Hyperbola HBI, cuius transuersum latus sit FB, rectum verò sit idem BE; huius concauum esse *Limitem* Ordinationis propositæ: hoc est ducta quacunque AG Parabolam contingente vsque ad axem, & per contactum A ordinata ADC, semiordinatam DI in Hyperbola tangenti AG æqualem esse.



Iungatur Hyperbolæ regulatrix FE, & producatur donec cum producta DI conueniat in L, sitque EM regulatrix Parabolæ AB.

Iam, quum regulatrix FEL descriptæ Hyperbolæ infra tangentem BE semper magis recedat a regulatrice Parabolæ EM erit [a] Hyperbola datæ Parabolæ circumscripta.

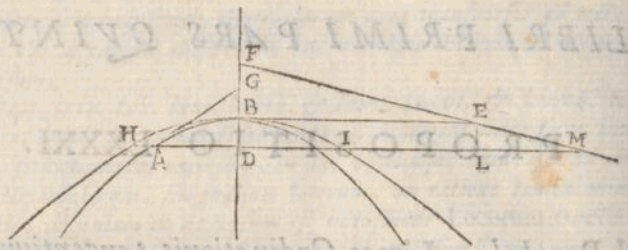
[a] ex 19. primi nostræ Diuinat. in Apoll.

Ampliùs, quum ob similitudinem triangulorum LME, EBF sit LM ad ME, vt EB ad BF, sitque EB quadrupla BF ex Hypothesi, erit & LM quadrupla ME, siue ipsius DB, sed est GD dupla eiusdem DB ob [b] tangentem AG, ergo ML dupla est ipsius GD, rectangulum ergo sub

[b] 35. primi Conic.

sub ML, DB æquatur quadrato D G; at rectangulum sub L D, D B æquatur [a] quadrato A D, ob Parabolam, ergo duo simul rectangula sub ML, DB, & sub LD, DB, sive vnicum rectangulum MD B, sive qua-

[a] 11. primi Conic.

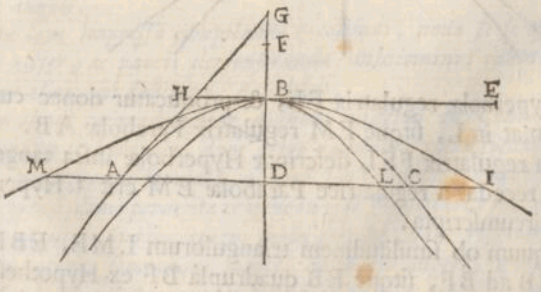


dratum semiordinatæ DI, in Hyperbola, æquale est duobus simul quadratis G D, D A, sive vnico tangentis A G; ideoque semiordinata D I, in Hyperbola, æqualis tangenti A G; Et sic de singulis, &c. Quare concauum Hyperbolæ H B I est *Limes* Ordinationis propositæ. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXXXII.

IN Parabola, Limes *Ordinationis tangentium inter Sectionem, & contingentem verticalem comprehensarum, est ad* Locum *concauum Hyperbolæ æquilateræ per eundem verticem simul adscriptæ, & cuius quodcunque laterum quartæ parti recti lateris datæ Parabolæ æquale sit.*

SIT Parabola A B C, cuius vertex B, axis B D, rectum latus B E contingenter ad B positum, & sit B F axi B D in directum & æqua-



lis quartæ parti ipsius B E, & per verticem B descripta sit Hyperbola B I, cuius latera æqualia sint ipsi B F. Dico huius concauum esse *Limitem* propositum.

Nam

Nam ducta quacunque laterali tangente AH verticalem EF secante in H, axem verò in G, & per A applicata ADI secante Hyperbolam DL in L. Dico DL ipsi AH æqualem esse.

Per verticem B datæ Parabolæ adscribatur Hyperbola BI, quæ sit *Limes* Ordinationis contingentium Parabolam, quarum vna est AG; erit ergo a BE huius rectum latus, & FB transuersum, quum sit subquadruplum ipsius BE; ergo & rectangulum FDB, siue quadratum DL in Hyperbola æquilatera, erit subquadruplum quadrati DI, hoc est linea DL dimidium erit ipsius DI, sed etiam AH dimidium est totius AG, totæ verò DI, AG sunt æquales, ergo & dimidiæ ipsarum, nempe DL, AH æquales erunt. Quapropter concauum huiusmodi Hyperbolæ BL est *Limes* Parabolam tangentium, quarum vna est AH. Quod erat &c.

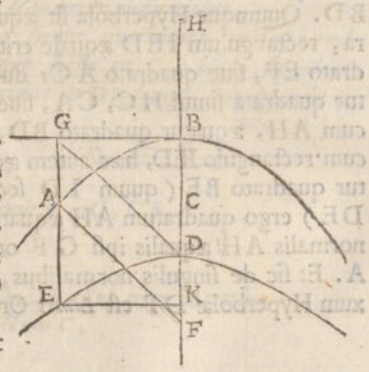
a ex 81. huius.

PROPOSITIO LXXXIII.

IN Parabola. Limes *Ordinationis normalium super Sectionem ductarum, & ad tangentem ex vertice ordinatarum, est ad* Locum *conuexum Hyperbolæ in vertice Parabolæ centrum habentis, & æqualium laterum, vtrunque recto Parabolæ æquale.*

SIT Parabola AB, cuius axis BC, vertex B, & semirectum latus BD, factoque centro B per verticem D sit circa eundem axem BDK Hyperbola æquilatera DE, & a quocunque Parabolæ puncto A ducta normali AF super Sectionem AB, & per A recta GAE axi BC parallela, quæ producta, Hyperbolæ occurrat in E. Dico normalem AF ipsi GE ad tangentem BG ordinatim ductæ æqualem esse.

Applicetur, in Parabola, ordinata AC, & EK in Hyperbola, iungatur GD, & sumatur BH in directum, & æqualis ipsi BD, ita vt HD sit transuersum Hyperbolæ DE.



Iam, in Parabola, quum sit AF normalis ad punctum A, & AC ad axem ordinata, erit CF æqualis b ipsi BD recti lateris dimidio: estque AC æqualis GB, ergo in triangulis rectangulis ACF, GBD subtensæ AF, GD æquales erunt.

b Prop. 90. libri primi Diuinat. in Apoll.

Præterea, quum Hyperbola DE sit æquilatera, erit quadratum EK, siue GB æquale rectangulo HKD, & communi addito quadrato BD, erunt quadrata simul GB, BD, siue vnicum GD, vel AF æquale rectangulo HKD cum quadrato DB, hoc est vnico quadrato BK (nam HD secta est

est bifariam in D, eique addita est in directum D K) vel quadrato GE, ac ideo latus AF lateri GE æquale erit, & sic de singulis normalibus, & ordinatis &c. Quapropter conuexum Hyperbolæ D E est *Limes* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXXXIV.

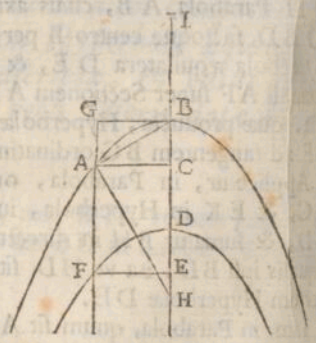
IN Parabola. Limes *Ordinationis normalium super ramos ex vertice ductos, & ad verticalem tangentem ordinatarum, est ad* Locum *conuexum Hyperbolæ in vertice Parabolæ centrum habentis, & æqualium laterum, vtrunque recto Parabolæ duplum.*

SIT Parabola A B, cuius vertex B, axis B C, rectumque latus B D ipsi in directum positum in B I, & centro B per verticem D sit adscripta Parabolæ Hyperbola D F, cuius vtrunque laterum æquale sit ipsi I D, siue duplo recti B D, ductaque per B contingente B G, & quocunque ramo B A, cui sit normalis A H. Dico, si per A sit G A parallela ad axem B C, ipsius segmentum G F inter prædictam contingentem B G, quæ est axis coniugatus Hyperbolæ D F, & ipsam Hyperbolam interceptum, normali A H æquale esse.

A punctis F, A, ducantur F E, A C ipsi G B æquidistantes.

Et quoniam A H, in Parabola, normalis est super ramum B A ex vertice ductum, & est A C ad axem ordinata, erit C H æqualis [a] recto lateri B D, ac ideo quadratum C H æquale quadrato B D. Quumque Hyperbola sit æquilatera, rectangulum I E D æquale erit quadrato E F, siue quadrato A C: duo igitur quadrata simul H C, C A, siue vnicum A H, æquatur quadrato B D, vnà cum rectangulo I E D, hæc autem æquantur quadrato B E (quum I D secta sit bifariam in B, eique adiecta sit D E) ergo quadratum A H æquatur quadrato B E, siue G F, ideoque normalis A H æqualis ipsi G F ordinatim ad tangentem B G ductæ ex A. Et sic de singulis normalibus, & huiusmodi ordinatis. Quare conuexum Hyperbolæ D F est *Limes* Ordinationis propositæ. Quod erat &c.

[a] Corollar. Prop. 45. huius.



LIBRI PRIMI

FINIS.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [192] - 164
PUBLIC DOMAIN

S. V. D. I.

VINCENTII VIVIANI DIVINATIO IN ARISTAEI SENIORIS LIBROS V. DEPERDITOS DE LOCIS SOLIDIS, ET ELEMENTORVM AD VARIA IN MATHESI INVENTA LIBER SECVNDVS,

In quo *Loci* Ordinatarum potentium *Limites* indicantur.

DEFINITIONES.

AD ea quæ in præsenti libro, & quæ inde emanant breuius explicanda, operæ pretium esse duximus aliquas in memoriam reuocare, & paucas nouas præmittere, quæ sequuntur, definitiones.

Dum data fuerit quæcunque recta terminata AB, vtcunque secta in C, eique sit addita in directum quælibet BD, semper concipienda erit sub nomine

A C B D

Datæ, *Recta AB.*
Partis, *Altera partium AC, CB.*
Partium Integrantium, *Vtraque earundem AC, CB.*
Additæ, *Ipsa BD.*
Superadditæ, *Recta AD.*
Coadditarum, *Vtraque rectarum AD, DB. Sub nomine verò*
Occursus partium integrantium, *Punctum C.*
Occursus datæ cum addita, *Punctum B.*
Occursus datæ cum superaddita, *Punctum A.*
Occursus coadditarum, *Punctum D.*
Occursus datæ cum altera integrantium BC, *Punctum B.* Et
Occursus datæ cum reliqua integrantium AC, *Punctum A.*

DE LOCIS SOLIDIS

LIBER SECVNDVS

PROPOSITIO I.

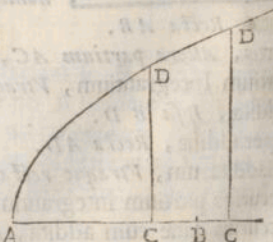
LOcus *Ordinatarum potentium rectangulum ſub partibus datæ lineæ, eſt* Locus *Planus, nempe concauum peripheriæ ſemicirculi ſuper datam deſcripti.*

HOC nihil notiùs ex Prop. xiij. Sexti Elementorum.

PROPOSITIO II.

LOcus *Ordinatarum potentium rectangulum ſub data, & parte, vel integrante, vel ſuperaddita, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum parte aſſumpta, rectum verò latus ſit ipſa data.*

SIT data linea AB, cuius pars AC, vel integrans, vel ſuperaddita, & per verticem A circa axem AB ſit Parabola AD, cuius rectum latus ſit ipſa AB. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: nimirum ordinatam CD poſſe rectangulum ſub data AB in partem AC.



Manifeſtum eſt id ex vulgata Parabolæ proprietate: Nam quadratum Ordinatæ CD æquale eſt [a] rectangulo ſub recto latere AB, in ſegmentum diametri AC; & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis.

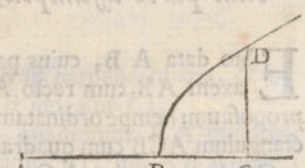
[a] 11. primi Con.e.

PRO-

PROPOSITIO III.

LOcus *Ordinatarum Potentium rectangulum ſub data, & addita, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum addita, axis ipſa addita, rectum verò latus ſit ipſa data.*

SIT A B data linea, eique addita B C, & per verticem B, circa axem B C ſit Parabola B D, cuius rectum latus ſit data A B. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ſi ordinetur C D, hanc poſſe rectangulum ſub data A B in additam B C.



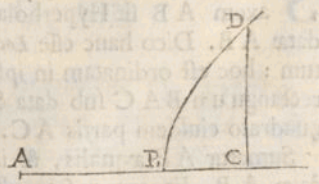
Hoc pariter conſtat ex eadem xj. primi Conicorum. Nam quadratum ordinatæ C D æquatur rectangulo ſub recto latere A B in diametri ſegmentum B C: & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis.

PROPOSITIO IV.

LOcus *Ordinatarum Potentium rectangulum ſub coadditis datæ, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, circa additam deſcriptæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum addita, axis verò tranſuerſus ſit ipſa data.*

SIT data A B, cuius partes coadditæ ſint A C, C B, & per verticem B, circa axem B C, cum axe tranſuerſo A B fiat Hyperbola æquilatera B D. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: nempe ſi ordinetur D C, hanc poſſe rectangulum A C B ſub coadditis.

Hoc itidem, vt dici ſolet, vel Cœco apparet ex prima Hyperbolæ proprietate, atque ex hac ipſa conſtructione: Nam cùm Hyperbola ſit æquilatera, rectangulum A D B æquale eſt [a] quadrato ſuæ ordinatæ D C; & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis.



[a] 12. & 22. primi Conic.

Inſignis hæc, non minùs quàm vulgata Hyperbolæ proprietas, tantæ exiſtimationis fuit apud magnorum operum Scriptorem noſtri æui luculentiſſimum,

tiſſimum, vt per eam ipſam duas ſibi (tanquam nouas lineas) comparauerit, & hanc vetuſtiorum Geometrarum Hyperbolam æquilateram in recentiorum linearum numerum bis aggregando, ſub ordine primæ ex ſuis, ac decimæ primæ, peculiari Auguſtiſſimo cognomento decreuerit in poſterum nuncupandam.

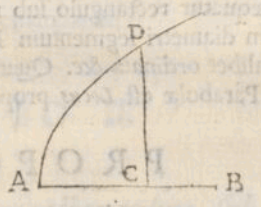
PROPOSITIO V.

LOcus Ordinatarum potentium ſummam ex rectangulo partium, cum quadrato vnius partis, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum parte aſſumpta, axis, & rectum latus ſit ipſa data.

ESto data A B, cuius pars quælibet A C, & per verticem A, circa axem A B, cum recto A B ſit Parabola A D. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: nempe ordinatam C D poſſe rectangulum A C B cum quadrato partis A C.

Quadratum enim A C cum rectangulo cum A C B æquatur rectangulo B A C, ſiue [a] quadrato C D, eò quod A B ponatur rectum Parabolæ: & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis.

[a] 11. primi Conic.

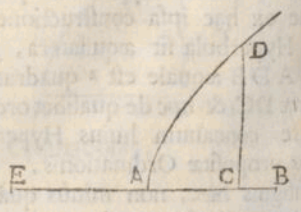


PROPOSITIO VI.

LOcus Ordinatarum potentium ſummam ex rectangulo ſub data & parte cum quadrato eiuſdem partis, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum parte aſſumpta, axis ipſa data, latera verò eidem datæ ſint æqualia.

SIT data AB, cuius pars quæcunque A C, & per verticem A, circa axem A B ſit Hyperbola A D, cuius vtrunque latus æquale ſit ipſi datæ A B. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam in ipſa C D poſſe rectangulum B A C ſub data & parte cum quadrato eiuſdem partis A C.

Sumatur A E æqualis, & in directum datæ A B. Et erit rectangulum B A C, æquale rectangulo E A C, & communi addito quadrato A C, erit rectangulum



BAC

BAC cum quadrato AC æquale rectangulo EAC cum eodem quadrato AC, hoc est vnico rectangulo ECA, siue quadrato[a] ordinatæ CD, ob Hyperbolam æquilateram: & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huiusmodi Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis.

[a] 12. & 21. primi Conic.

PROPOSITIO VII.

LOcus Ordinatarum potentium summam ex quadrato datæ, & ex rectangulo sub partibus, est Locus *planus, seu concauum peripheriæ Circuli, cuius centrum sit punctum bisecans datam, radius verò possit sesquiquartum quadrati ex data.*

SIT data AB vtcunque secta in C, cui ex B sit perpendicularis, & æqualis BI, secta autem AB bifariam in E iungatur EI.

Iam constat (quum sit BA dupla BE) quadratum BA quadruplum esse quadrati BE, adeoque & quadratum BI, ipsi AB æquale, quadruplum esse quadrati BE; quapropter duo simul IB, BE, vel, vnicum EI sesquiquartum esse quadrati IB, seu quadrati datæ AB. Dico itaque, si cum centro E, ac radio EI fiat Circulus IFG, *ipsius circunferentiam esse Limitem* propositum: hoc est si ex C ad AB ordinetur CD, hanc posse summam ex quadrato datæ AB cum rectangulo partium AC, CB.



Producatur DC ad G, & ex I agatur IF datæ AB æquidistans, DC secans in H,

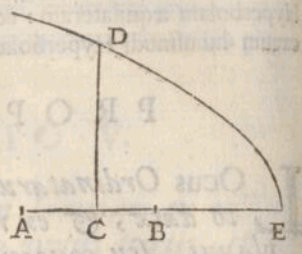
Et quum AB per centrum ducta perpendiculariter secet DG in C, erit DG secta bifariam in C, & non bifariam in H, quare quadratum CD poterit quadratum CH, seu BI, seu AB vnà cum rectangulo GHD, siue FHI, siue ACB, & hoc de qualibet ordinata &c. Quare huius Circuli peripheria, est *Locus* propositæ Ordinationis.

PROPOSITIO VIII.

LOcus Ordinatarum potentium summam ex quadrato datæ, & ex rectangulo sub data, & parte, est ad concauum Parabolæ vergens ad datam, & cuius vertex sit in termino prædictæ partis per interuallum datæ æquale, rectum verò latus ipsi datæ æquale sit.

Esto

ESto data AB, & quæcunque eius pars BC, productaque AB in E ita vt BE sit æqualis datæ AB. Dico si per verticem E, circa axem EA, cum recto æquali datæ AB describatur Parabola, hanc esse *Locum* propositum: hoc est si ex C in ea applicetur CD, hanc posse summam ex rectangulo ABC sub data, & parte, cum quadrato datæ AB.

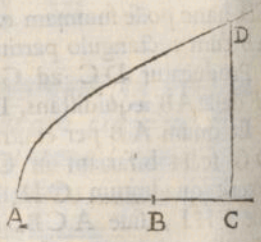


a 11. primi Conic. Quadratum enim CD æquale est [a] rectangulo sub CE in rectum latus AB, vel in EB ipsi æqualem sumptam; sed hoc CEB æquatur sub EB in BC, vel sub data AB in partem BC, vnà cum quadrato BE, vel cum quadrato datæ AB; ergo CD potest summam prædictam: & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis.

PROPOSITIO IX.

LOcus Ordinatarum Potentium summam ex rectangulo sub data, & addita cum quadrato datæ, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum superaddita, axis, & rectum latus sit ipsa data.

ESto data AB, cui sit addita quælibet BC. Dico si per verticem A circa axem AB cum recto latere ipsi AB æquali describatur Parabola AD, hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CD posse rectangulum sub data AB in additam CB, vnà cum quadrato datæ AB.



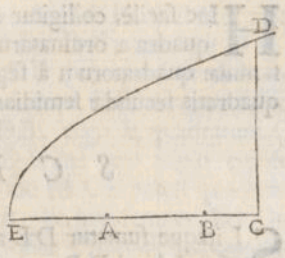
b 11. primi Conic. Facilè constat hoc, quum quadratum ordinatæ CD in Parabola æquale sit [b] rectangulo sub recto AB in segmentum axis AC, sed hoc æquatur quoque quadrato datæ AB vnà cum rectangulo ABC sub data, & addita, ergo & quadratum ordinatæ CD eidem summæ æquale est; & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huiusmodi Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis.

PROPOSITIO X.

LOcus Ordinatarum Potentium summam ex rectangulo sub data, & superaddita cum quadrato datæ, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit in data, distans ab occursu datæ cum superaddita per interuallum æquale datæ, & ad partes superadditæ contrarias; rectum verò latus ipsi datæ æquale sit.

Sit

SIT data AB, eique superaddita quælibet AC; & producta BA, ita vt AE sit æqualis AB, per verticem E, circa axem EB, cum recto æquale dato AB describatur Parabola ED. Dico hanc esse *Locum* propositum: nempe ordinatam CD posse summam ex rectangulo BAC sub data, & superaddita vna cum quadrato datæ AB.



Quadratum enim CD æquale est [a] rectangulo sub CE in rectum latus AB, vel in EA ipsi æqualem; sed rectangulum CEA æquale est rectangulo EAC, siue BAC vnà cum quadrato EA, vel cum quadrato AB, ergo CD potest spatia proposita, & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huiusmodi Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis.

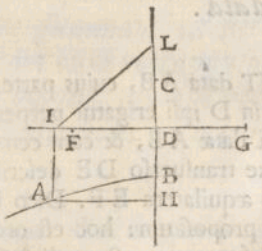
[a] 11. primi Conic.

PROPOSITIO XI.

IN Hyperbola. Quadratum ex ea, quæ ordinatur inter diametrum coniugatam, & Sectionem, ad quadratum semidiametri transuersæ, est vt summa quadratorum, alterum nempe ex segmento coniugatæ inter ordinatam, & centrum, alterum ex secunda semidiametro coniugata, ad huius semidiametri quadratum.

SIT Hyperbola AB, cuius centrum D, diameter quælibet transuersa CB, secunda verò ipsi coniugata, & quantumlibet producta sit GF, ad quam sit quæcunque ordinata IA vsque ad Hyperbolam in A. Dico quadratum IA ad quadratum DG esse vt quadrata simul ID, DG ad quadratum idem DG.

Ducatur ex A ordinata AH ad diametrum BH, quæ ipsi ID æquidistabit. Erit ergo rectangulum CHB ad quadratum AH, vt [b] transuersum latus ad rectum, vel vt quadratum transuersæ ad quadratum secundæ diametri, vel, sumptis horum subquadruplis, vt quadratum DB ad quadratum DG, & permutando rectangulum CHB ad quadratum DB erit vt quadratum AH ad DG, vel vt quadratum ID ad idem DG, & componendo rectangulum CHB cum quadrato DB, hoc est vnicum quadratum DH, vel quadratum IA ad quadratum DB erit vt quadratum ID cum quadrato DG ad idem DG. Quod erat &c.



[b] 21. primi Conic.

Co-

COROLL.

HInc facilè, colligitur (argumentando ex æqualitate) In Hyperbola, quadrata ordinatarum ad diametrum coniugatam esse inter se vt summæ quadratorum à segmentis inter centrum, & ordinatas vnà cum quadratis secundæ semidiametri coniugatæ.

SCHOLIVM.

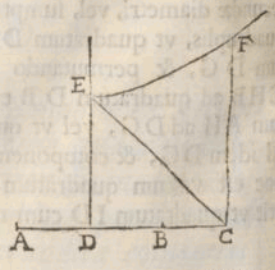
SI itaque sumatur DL æqualis ipsi DG, & iungatur IL, erit quadratum IA ad DB vt quadrata simul ID, DL, vel vt quadratum vnius IL ad quadratum LD, & latus IA ad DB, vt latus IL ad LD, & permutando IA ad IL vt DB ad DL.

Quod conuenit cum positis, & constructis ad Prop. xxxxij. libri quarti Pappi Alexandrini, adeoque & ex ostensis apparet in illius constructione, super hac tamen figura considerata, semper LD perpendiculariter ductam ex puncto emissionis L super GF, esse secundam semidiametrum, & DB infra GF productam, habentemque ad DL rationem datam AI ad IL, esse semiidiametrum transuersam Hyperbolæ BA.

PROPOSITIO XII.

LOcus *Ordinatarum potentium summam ex rectangulo sub coadditis, & ex quadrato datæ, est ad conuexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum sit punctum bisecans datam, vertex verò ab hoc distet per semiaxem transuersum potentem subsesquitertium quadrati ex data.*

SIT data AB, cuius partes coadditæ AC, BC, & secta AB bifariam in D ipsi erigatur perpendicularis DE potens subsesquitertium quadrati datæ AB, & cum centro D, ac semiaxe transuerso DE describatur Hyperbola æquilatera EF. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CF posse summam rectanguli ACB, sub coadditis, cum quadrato datæ AB.



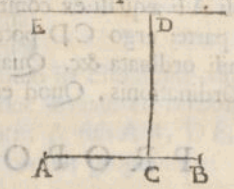
Iungatur CE: & quum Hyperbola sit æquilatera, ex constructione, erit DE æqualis secundæ semidiametri coniugatæ: & quum sit CF semiordinata ad eius coniugatam

gatam diametrum AC; erit, per præcedentem, quadratum CF ad quadratum DE vt quadratum CD cum quadrato semidiametri coniugatæ, nempe cum quadrato DE, hoc est vt vnicum quadratum CE, ad quadratum eiusdem semiconiugatæ DE, ergo quadrata CF, CE sunt æqualia: sed quadratum CE æquatur duobus CD, DE, quorum DC æquale est rectangulo ACB cum quadrato DB (eò quod sit AB secta bifariam in D, eique addita sit BC) & quadratum DE æquatur subsesquitertio quadrati AB, vel triplo quadrati DB, ergo & quadratum CF æquale est rectangulo ACB cum quadrato DB vnà cum triplo eiusdem DB, quæ conficiunt quadratum vnicæ AB; hoc est CF potest quadratum datæ AB cum rectangulo sub coadditis ACB. Et hoc semper &c. Quare concauum huius Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod &c.

PROPOSITIO XIII.

LOcus *Ordinatarum potentium summam ex rectangulis sub data & partibus, est* Locus *planus, nempe recta linea per interuallum datæ huic æquidistans.*

SIT AB data vtcunque secta in partes AC, CB, sitque ED datæ AB parallela per interuallum ipsi æquale. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CD posse summam rectangulorum ABC, BAC.

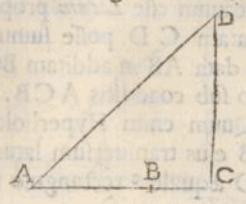


Patet hoc ex constructione, & ex secunda secundi Elementorum.

PROPOSITIO XIV.

LOcus *Ordinatarum potentium summam ex rectangulo sub superaddita in additam cum rectangulo sub data in superadditam, est* Locus *planus; nempe rectangulum semirectum cum data constituens ad occursum datæ cum superaddita.*

SIT AB data, & AC superaddita, factoque ad A angulo semirecto CAD. Dico rectam AD esse *Locum* propositum; hoc est ordinatam CD posse summam ex rectangulis ACB, CAB.

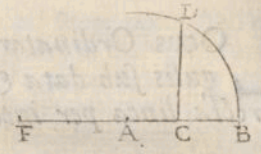


Manifestum itidem est hoc, tum quia CD æqualis est CA (ob angulos semirectos ad A, D) tum per secundam Propositionem secundi Elementorum.

PROPOSITIO XV.

LOcus *Ordinatarum potentium ſummam ex rectangulo ſub data, & altera partium cum rectangulo partium, eſt* Locus *planus, concauum nempe circumferentiæ quadrantis Circuli, cuius centrum ſit occurſus datæ cum parte reliqua, radius verò ipſa data.*

SIT data AB, cuius pars BC, reliqua AC, & centro A, cum radio AB fiat Circuli quadrans B D. Dico huius peripheriæ concauum eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt ordinatam CD poſſe ſummam ex rectangulo ABC ſub data, & parte, cum rectangulo A C B ſub partibus.

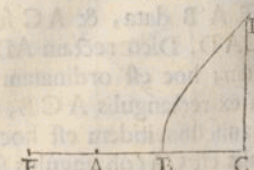


Sumatur AF æqualis, & in directum cum AB. Erit ergo, ob Circulum, quadratum ordinatæ CD æquale rectangulo ſub FC, CB, ſed hoc æquale eſt rectangulo ſub A C, CB, quod eſt ſub partibus datæ, vnà cum rectangulo ſub F A, CB, vel ſub AB, ipſi AF æquali ex conſtructione, in B C, quod eſt rectangulum ſub data & parte: ergo CD poteſt prædictam ſummam: & hoc de quacunque ſimili ordinata &c. Quare concauum huius peripheriæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVI.

LOcus *Ordinatarum potentium ſummam ex rectangulo ſub data, & addita cum rectangulo ſub coadditis, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum addita, axis ipſa addita, latera verò æqualia ſint duplo datæ.*

SIT data AB, eique addita B C, & per verticem B circa axem BC ſit deſcripta Hyperbola æquilatera B D, cuius latera æqualia ſint BE, quæ ſumpta ſit dupla datæ A B. Dico huius concauum eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam C D poſſe ſummam ex rectangulo ſub data AB in additam BC vnà cum rectangulo ſub coadditis A C B.



Quum enim Hyperbola ſit æquilatera, & E B eius tranſuerſum latus, erit quadratum CD æquale [a] rectangulo ſub E C, C B, vel duobus, altero ſub E A, vel ſub

[a] 21. primi Conic.

ſub data AB in CB, altero ſub AC in eadem CB, quod eſt ſub coadditis. Ergo CD poteſt prædictam ſummam: & hoc de qualibet ordinata &c. Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis.

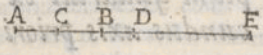
LEMMA. I. PROP. XVII.

SI data recta bifariam ſecta fuerit, eique in directum addita quæcunque: rectangulum ſub dimidia in dimidium cum addita quater ſumptum æquatur rectangulo ſub data, & addita, vnà cum rectangulo ſub data, & ſuperaddita.

SIT data AB ſecta bifariam in C, & ipſi in directum ſit addita quælibet BD. Dico quatuor ſimul rectangula ACD æqualia eſſe rectangulo ABD cum rectangulo BAD.

Sumatur DE æqualis, & in directum ipſi AD.

Iam, quum ſit tota AE dupla totius AD & pars AB dupla partis AC erit reliqua EB dupla reliquæ CD, ſed eſt quoque BA dupla AC, ergo rectangulum ſub duplis, hoc eſt ſub EB, BA quadruplum eſt rectangulo ſub dimidijs, nempe ſub DC, CA; quatuor ergo ſub AC, CD, ſeu ſub datæ dimidio in dimidium cum addita, æquantur rectangulo ſub AB, BE, ſed hoc æquale eſt rectangulis ſimul ſub AB, BD, hoc eſt ſub data, & addita, & ſub AB, DE, vel AD, hoc eſt ſub data, & ſuperaddita. Quare conſtat propoſitum.

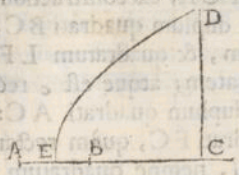


PROPOSITIO XVIII.

LOcus Ordinatarum potentium ſummam ex rectangulo ſub data, & addita cum rectangulo ſub data, & ſuperaddita, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit punctum biſecans datam, focus verò occurſus datæ cum addita.

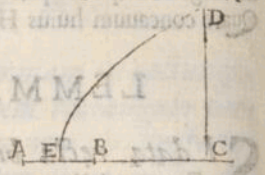
SIT data AB, eique addita quælibet BC, ſectaque AB bifariam in E per verticem E circa axem EC deſcripta ſit Parabola, cuius focus ſit B. Dico huius concauum eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CD poſſe ſummam ex rectangulo ſub data AB in additam BC cum rectangulo ſub data AB in ſuperadditam AC.

Quoniam enim B ponitur focus Parabolæ



ED, erit EB, ſiue AE ſui recti lateris ſubquadrupla [a] ergo quadratum ordinatæ CD æquatur rectangulo CEA quater ſumpto, hoc eſt (per Lemma præcedens) æquale eſt rectangulo ſub AB in BC, quod eſt ſub data, & addita, cum rectangulo ſub eadem AB in AC, quod eſt ſub data in ſuperadditam, & hoc de quacunque ſimili ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

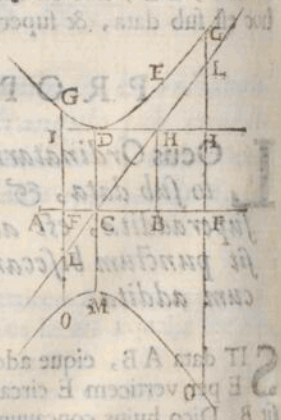
[a] ex conuerſo Prop. 26. libr. 2. Diuinat. in Apoll.



PROPOSITIO XIX.

LOcus Ordinatarum potentium ſummam quadratorum partium datæ, vel integrantium, vel coadditarum, eſt ad conuexum Hyperbolæ, cuius centrum ſit punctum biſecans datam, a quo vertex perpendiculariter diſtet per ſemiaxem tranſuerſum potentem ſubduplum quadrati ex data, quæ ſit eiuſdem Hyperbolæ ſecundus axis priori coniugatus.

SIT AB data ſecta bifariam in puncto C, per quod ſit CD ipſi AB perpendicularis, ac potens duplum quadrati AC, vel dimidium quadrati AB, & per verticem D, cum centro C & ſecundo axe AB, deſcribatur Hyperbola DE. Dico huius conuexum eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt, vbicunque ordinetur FG, vel intra, vel extra datam, ipſam FG poſſe aggregatum quadratorum AF, FB.



Ex punctis D, B, verticibus contrapoſitarum Sectionum coniugatarum, compleatur rectangulum BCDH. Conſtat iunctam CH eſſe [b] Aſymptoton vtriſque Sectionibus communem, adeoque, & Hyperbolæ DE, quæ ordinatam FG ſecet in G, & huic FG occurrat DH in I. Tandem GF producatur vſque ad Sectionem ipſi DE oppoſitam in O; nam erit FO æqualis FG.

[b] 17. ſecundi Conic.

Iam, quum ſit quadratum CD duplum quadrati CA, ex conſtructione, erit & quadratum HB duplum quadrati BC, ob laterum æqualitatem, & quadratum LF duplum quadrati FC, ob laterum proportionalitatem; atque eſt [c] rectangulum OLG æquale quadrato DC, quod eſt duplum quadrati AC: quare, quum tam quadratum FL ſit duplum quadrati FC, quàm rectangulum OLG duplum quadrati AC, erunt duo ſimul, nempe quadratum FL cum rectangulo OLG, hoc eſt vnicum quadra-

[c] 11. ſecundi Conic.

quadratum FG æquale duobus quadratis AC cum duobus CF, sed duo AC cum duobus CF æquantur quadratis simul AF, FB (quum sit AB bisariam secta in C, eique sit in directum addita BF) ergo & quadratum GF quadratis partium AF, FB, vel integrantium datam, vel coadditarum æquale est. Et hoc de quacunque simili ordinata FG. Quare conuexum Hyperbolæ D E est *Locus* propopositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XX.

LOcus Ordinatarum potentium summam ex quadrato datæ cum quadrato partis, est ad conuexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum sit occursus datæ, & partis, vertex verò ab eodem occursu perpendiculariter distet per semiaxem transuersum æqualem datæ.

SIT data AB, cuius pars BF, & super AB concipiatur quadratum ABCD, & per verticem C Hyperbola æquilatera CE, cuius centrum sit punctum B occursus datæ cum parte BF. Dico, si ex F ordinetur FH, hanc posse summam ex quadrato datæ AB cum quadrato partis BF.

Producatur CB, eique sumatur æqualis BI, & per verticem I describatur alia Hyperbola IL ipsi CE opposita, iungatur BD, & producatur HF ad M, quæ HF secet DC in N, & DB in O, & tandem producta vtrinque AD Hyperbolis occurrat in E, L, ex quibus agantur EP, LQ ipsi AB parallelæ.



Iam, ob Hyperbolam æquilateram CE, est rectangulum IPC, siue QCP, vel LDE æquale quadrato ordinatæ PE, vel quadrato DC, vel DA, sed rectangulum LDE ad MNH est vt a quadratum AB ad BF, vel vt quadratum AD ad FO, & permutando est rectangulum LDE æquale quadrato AD, vt modò ostendimus, ergo & rectangulum MNH quadrato FO æquale est, sed quadratum FN æquatur quadrato datæ AB, ob laterum æqualitatem, ergo his æqualibus vtrinque additis erit rectangulum MNH cum quadrato FN, hoc est vnicum quadratum ordinatæ FH æquale quadrato FO, vel quadrato partis sibi æqualis BF cum quadrato datæ AB: & hoc de qualibet alia simili ordinata &c. Quare conuexum huiusmodi Hyperbolæ CE est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod &c.

a prop. 3. primi huius.

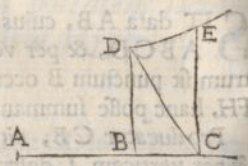
PRO-

PROPOSITIO XXI.

LOcus Ordinatarum potentium ſummam ex quadrato datæ cum quadrato additæ, eſt ad conuexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum ſit occurſus datæ cum addita, & a quo axis vertex perpendiculariter diſtet per diſtantiam æqualem datæ, quæ ſit eius ſemiaxis tranſuerſus.

SIT AB data, eique addita BC, & ex B ducta BD ſuper AC perpendiculari, & æquali ipſi datæ AB, per verticem D, cum centro B, & ſemiaxe tranſuerſo BD, fiat Hyperbola æquilatera DE. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt, ſi ex C ordinetur CE, hanc poſſe ſummam quadratorum AB, BC datæ, & additæ.

Iungatur DC. Et quoniam Hyperbola DE eſt æquilatera, & BD, BA ſunt æquales, ex conſtructione, eſtque BD ſemiaxis tranſuerſus, erit BA ſemiaxis coniugatus; atque eſt CE ordinata inter coniugatum axem, & Hyperbolam, ergo quadratum CE ad BD eſt vt [a] quadratum CB cum BA, vel cum BD, vel vt vnicum quadratum CD ad idem quadratum BA ſemiaxis coniugati, vel ad idem quadratum BD: quare quadrata CE, CD ſunt æqualia, adeoque & latera CE, CD; ſed CD poteſt quadrata DB, BC, vel AB, BC, ergo & CE eadem poterit quadrata AB, BC datæ, & additæ: & hoc de qualibet alia ſimili ordinata &c. Quamobrem conuexum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



[a] 11. huius.

COROLL.

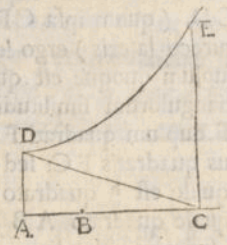
EX hac manifeſtum fit, in Hyperbola æquilatera, quemcunque ramum ex axis vertice ad axem coniugatarum Sectionum ductum æqualem eſſe ordinatæ ab eius occurſu inter eundem axem coniugatum, & datam Hyperbolam interceptum. Superiùs enim oſtenſum fuit rectam DC ductam ex vertice axis Hyperbolæ DE ad coniugatam diametrum ABC æqualem eſſe ordinatæ CE inter ipſam coniugatam, & Hyperbolam.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

LOcus *Ordinatarum potentium ſummam ex quadrato datæ cum quadrato ſuperadditæ, eſt ad conuexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum ſit occurſus datæ cum ſuperaddita, data vero ſit ſemiaxis coniugatus, adeo vt ſemiaxis tranſuerſus ſit æqualis datæ.*

SIT data AB, & ſuperaddita quælibet AC, ex A verò ſit ad AB perpendicularis, & æqualis AD, ac per verticem D cum centro A, & ſemiaxe tranſuerſo AD fiat Hyperbola æquilatera DE, cuius propterea ſemiaxis coniugatus erit AB. Dico hanc Hyperbolam eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt ſi ex C ordinetur CE, hanc poſſe ſummam ex quadrato datæ AB, cum quadrato ſuperadditæ, AC.



Iungatur DC, quæ (quum Hyperbola DE ſit æquilatera) ordinatæ CE æqualis erit [a] ſed CD poteſt quadrata DA, AC, vel AB, AC, ergo & CE poterit eadem quadrata AB, AC datæ, & ſuperadditæ; & ſic de ſingulis ſimiliter ordinatis &c. Quare conuexum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] Coroll. 21. huius.

PROPOSITIO XXIII.

LOcus *Ordinatarum potentium ſummam ex quadrato totius datæ lineæ, & ex quadratis ſimul partium, vel integrantium, vel coadditarum, eſt ad conuexum Hyperbolæ, cuius centrum ſit punctum biſecans datam, vertex verò ab eodem perpendiculariter diſtet per ſemiaxem tranſuerſum potentem ſeſquialterum quadrati ex data, & qui ſui ſemirecti ſit duplum.*

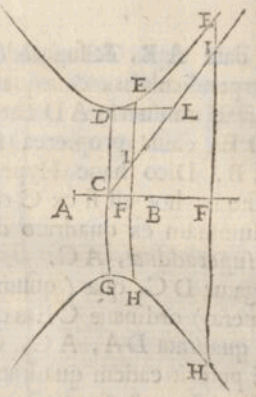
SIT data AB, cuius partes integrantes, vel coadditæ quæcunquæ AF, FB, & ſecta AB bifariam in C, erigatur ex C perpendicularis CD potens quadratum ſeſquialterum ipſius AB, & cum centro C, & ſemiaxe tranſuerſo CD deſcribatur per D Hyperbola DE, cuius rectum latus ſubdu-

ſubduplum ſit ſuo tranſuerſo. Dico Hyperbolam D E eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt, ſi ex F ordinetur F E, hanc poſſe ſummam ex quadrato datæ A B cum quadratis partium, vel integrantium, vel coadditarum A F, F B.

Producatur D C, cui æqualis ſumatur C G, & per verticem G tranſeat oppoſita Sectio G H, cui ordinata E F occurrat in H; per centrum verò C ſit C I Aſymptotos Sectionis D E, & per D ſit verticalis contingens D L cum Aſymptoto conueniens in L.

Iam, quoniam quadratum C D poteſt ſeſquialterum quadrati A B, qualium partium quadratum C D eſt 6, talium erit quadratum A B, 4, & A C, 1: ergo quadratum C D æquale eſt quadrato A B cum duobus quadratis A C.

Et quum recta D E Hyperbolam contingat ad D, & Aſymptoto occurrat in L, ipſa D L poterit [a] quartam figuræ partem, hoc eſt rectangulum ſub D C in ſemirectum; ſed huius duplum eſt quadratum C D, (quum ipſa C D poſita ſit dupla ſemirecti lateris) ergo idem quadratum C D duplum quoque eſt quadrati D L, & ob triangulorum ſimilitudinem, quadratum I F duplum quadrati F C, vel æquale duobus quadratis F C: ſed rectangulum H I E, æquale eſt [b] quadrato C D, & eſt C D æquale quadrato A B cum duobus A C, vt ſuperius oſtendimus, ergo & rectangulum H I E quadrato A B cum duobus A C æquale eſt: quadratum verò I F æquale demonſtratum fuit duobus C F, ergo rectangulum H I E cum quadrato I F, vel vnicum quadratum F E quadrato A B cum duobus AC, ac duobus C F æquale eſt; ſed duo A C cum duobus C F æquantur duobus A F, F B: ergo idem quadratum F E ijſdem quadratis datæ A B, & partium ſimul A F, F B æquale eſt: & ſic de ſingulis huiuſmodi ordinatis. Quare conuexum deſcriptæ Hyperbolæ D E eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



[a] 3. ſecundi Conic.

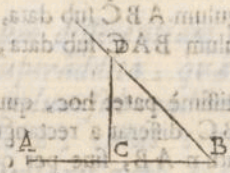
[b] 11. ſecundi Conic.

PROPOSITIO XXIV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & parte, & rectangulum ſub partibus, eſt Locus *planus, nempe recta linea ſemirectum angulum cum data conſtituens ad occurſum datæ cum parte aſſumpta.*

Sit

SIT data AB, cuius pars BC, ad quarum occursum B fiat angulus semirectus ABD. Dico rectam BD esse *Locum* propositum: hoc est si ex C ordinetur CD, hanc posse differentiam inter rectangulum sub data AB, & parte BC, & rectangulum sub partibus AC, CB.

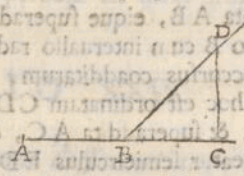


Rectangulum enim ABC differt a rectangulo ACB per quadratum BC, vel per quadratum sibi æqualis rectæ CD (ob æquales angulos semirectos ad B, D) ergo CD potest prædictam differentiam: & hoc de qualibet simili ordinata &c. Quapropter recta linea BD est *Locus*, planus propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum sub data, & addita, & rectangulum sub coadditis, est Locus *planus, nempe recta linea ex occursu datæ cum additâ angulum semirectum cum ipsa addita constituens.*

SIT data AB, & addita quælibet BC, cum qua ex B angulum semirectum efficiat recta BD. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CD posse differentiam inter rectangulum sub data AB in additam BC, & rectangulum ACB sub coadditis.

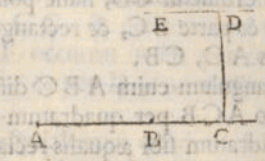


Nam rectangulum ACB differt a rectangulo ABC per quadratum CB, sive per sibi æquale quadratum CD, ob angulos semirectos ad B, D, ergo CD potest prædictam differentiam, & hoc de alia simili quacunque ordinata. Quare recta BD est planus *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXVI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam, inter rectangulum sub data, & addita, & rectangulum sub data, & superaddita, est Locus *planus, nempe recta linea datæ æquidistanter ducta per interuallum æquale datæ.*

SIT data A B, & quæcunque addita B C, & per diſtantiam ipſi A B æqualem huic æquidiſtet D E. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: nempe ordinatam C E poſſe differentiam inter rectangulum A B C ſub data, & addita, & rectangulum B A C ſub data, & ſuperaddita.



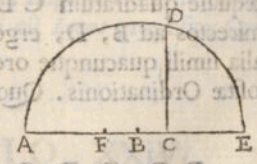
Manifeſtiſſimè patet hoc, quum rectangulum A B C differat a rectangulo B A C per quadratum A B, ſiue per quadratum ſibi æqualis interualli C E: ergo C E poteſt differentiam prædictam; idemque de ſingulis ordinatis huiuſmodi &c. Quapropter recta D E eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXVII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & ſuperaddita, quæ tamen ſit minor quam dupla datæ, & rectangulum ſub coadditis, eſt* Locus *planus, nempe concauum peripheriæ quadrantis Circuli, cuius centrum ſit occurſus datæ cum addita, radius verò ipſa data.*

SIT data A B, eique ſuperaddita A C, quæ ſit minor dupla A B, & centro B cum interuallo radij B A, fiat quadrans Circuli E D ad partem occurſus coadditarum. Dico huius peripheriam eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam C D poſſe differentiam inter rectangulum ſub data A B, & ſuperaddita A C, & rectangulum ſub coadditis A C, C B.

Compleatur ſemicirculus E D A, & ex B A ſumatur B F æqualis B C. Et quum A C ſit minor dupla A B, erit A B maior B C, & maior ipſa B F; & quum B A, B E, & B F, B C ſint æquales, & reliquæ F A, C E æquales erunt: ſed differentia inter rectangulum C A B, & rectangulum ſub A C & B F, vel rectangulum ſub A C, & C B eſt rectangulum ſub A C, A F, eſtque A F æqualis C E, ergo differentia inter rectangulum C A B, ſub data, & ſuperaddita, & rectangulum A C B ſub coadditis eſt etiam rectangulum ſub A C, C E, hoc eſt quadratum ordinatæ C D in quadrante Circuli; & hoc de qualibet ſimili ordinata: ergo concauum huius peripheriæ E D eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

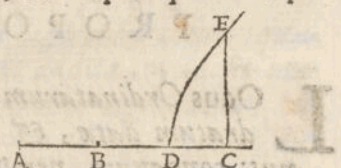


PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & ſuperaddita, quæ ſit maior quam dupla datæ, & rectangulum ſub coadditis, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum ſit occurſus datæ cum addita, ſemiaxis verò tranſuerſus æqualis datæ, & vertex in addita.*

SIT data A B, eique ſuperaddita quælibet A C maior tamen dupla A B, ita vt B C maior ſit ipſa A B, cui ſumpta æquali B D, per veritcem D, circa axem D C fiat Hyperbola æquilatera D E. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum, hoc eſt ordinatam C E poſſe differentiam inter rectangulum ſub data A B in ſuperadditam A C, & rectangulum ſub coadditis A C B.



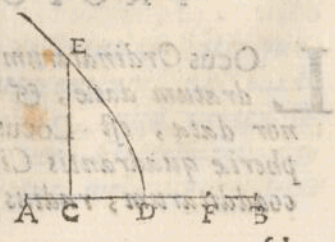
Differentia enim inter rectangulum ſub C A, C B, & rectangulum ſub C A, B D, vel ſub C A, A B eſt rectangulum ſub eadem C A in C D, quod æquale eſt [a] quadrato C E, ob Hyperbolam æquilateram, ergo C E poteſt prædictam differentiam, & hoc de alia ſimili quacunque ordinata &c. Quare concauum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 21. primi Conic.

PROPOSITIO XXIX.

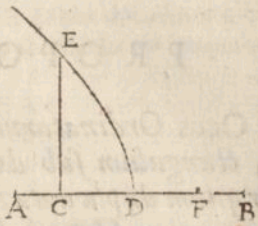
LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data in vnam partem ex duabus inæqualibus integrantibus, & rectangulum ſub eadem data in partem reliquam, eſt ad concauum Parabolæ vergens ad partem minorem, cuius vertex ſit punctum biſecans datam, rectum verò latus ſit duplum datæ.*

SIT data A B inæqualiter ſecta in C, & pars minor ſit A C, ſectaque A B bifariam in D per verticem D, circa axem D A fiat Parabola D E, cuius rectum latus duplum ſit datæ A B. Dico ipſam D E eſſe *Locum* propoſitum, hoc eſt ordinatam C E poſſe differentiam inter rectangulum ſub data A B in partem B C, & rectangulum



ſub data AB, in reliquam partem AC.

Sumatur DF æqualis DC. Et quum ſit DB æqualis DA, erit & BF æqualis AC, & ideo rectangulum ABF æquale rectangulo BAC; differentia itaque inter rectangulum ABC, & BAC eadem erit, ac inter idem rectangulum ABC, & ABF; ſed hæc eſt rectangulum ſub AB in CF, vel ſub dupla AB in dimidium CF, hoc eſt in CD, vel rectangulo ſub recto latere Parabolæ DE in DC; hoc verò æquale eſt a quadrato ordinatæ CE, ob Parabolam, ergo CE poteſt prædictam differentiam; & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



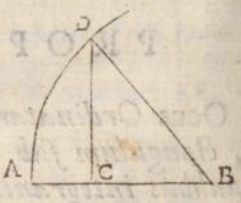
a 21. primi Conic.

PROPOSITIO XXX.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & quadratum partis, eſt Locus *planus: concauum nempe quadrantis peripheriæ Circuli, cuius centrum ſit occurſus datæ cum parte aſſumpta, radius verò ſit ipſa data.*

SIT data AB, & ſumpta pars BC, centro verò B ad interuallum BA, fiat quadrans Circuli ADE. Dico huius peripheriam eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CD poſſe differentiam inter quadratum datæ AB, & quadratum partis BC.

Iungatur BD, & ſtatim propoſitum patebit. Nam quadratum CD eſt differentia inter quadratum BD (ipſis ſimul quadratis BC, CD æquale) & quadratum BC; ergo & inter quadratum AB, æquale ipſi BD, & quadratum BC: & hoc de qualibet ſimili ordinata &c. Quare concauum huius peripheriæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

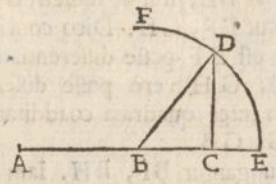


PROPOSITIO XXXI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & quadratum additæ, quæ ſit minor data, eſt Locus *planus, nempe concauum peripheriæ quadrantis Circuli, cuius centrum ſit occurſus coadditarum, radius verò ipſa data.*

Sit

SIT AB data, & addita BC minor ipſa AB, centro verò B ad interuallum BA fiat Circuli quadrans EDF. Dico huius peripheriam eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt CD poſſe differentiam inter quadrata AB, BC.

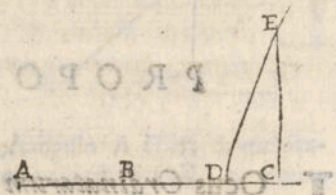


Iungatur BD, & itidem propoſitum palam fiet. Quum enim quadratum CD ſit differentia inter quadratum BD, & quadratum BC, erit quoque differentia inter AB quadratum datæ, atque ipſi BD æqualis, &] quadratum additæ BC: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Ergo concauum huius Quadrantis eſt *Locus* propoſitus. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & quadratum additæ, quæ ſit maior data, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum ſit occurſus datæ cum addita, vertex verò a centro diſtet per interuallum datæ æquale, ex addita abſciſſum, ita vt ſemiaxis tranſuerſus ſit æqualis datæ.

SIT AB data, & quæuis addita BC ipſa AB maior, ex qua ſecta BD datæ AB æquali, cum centro B, per verticem D fiat Hyperbola æquilatera DE. Dico ordinatam CE poſſe differentiam inter quadrata AB, BC.



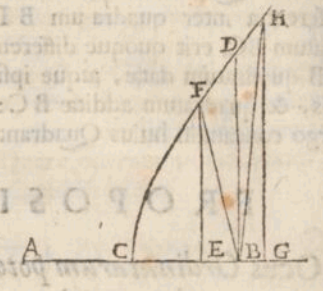
Quum ſit enim AD bifariam ſecta in B, eique ſit addita DC, erit rectangulum ACD cum quadrato BD æquale quadrato BC, rectangulum ergo ACD, ſiue ſibi æquale quadratum CE, ob Hyperbolam æquilateram, eſt differentia inter quadratum BD, ſiue inter quadratum datæ AB, & quadratum BC, nimirum additæ: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadrata partium datæ, vel integrantium, vel coadditarum, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit punctum biſecans datam, focus verò ſit terminus datæ ad partem Ordinationis ſumptus, vel cuius rectum latus duplum ſit datæ.

Sit

SIT AB data, quæ bifariam ſecetur in C, quo facto vertice, cum foco B deſcribatur Parabola CFH, & ſumpta qualibet parte vel integrante, vt BE, minor tamen BC, vel BG datæ in directum addita, ordinentur EF, GH. Dico concauum huius Parabolæ eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt EF poſſe differentiam inter quadrata partium integrantium AE, EB; GH verò poſſe differentiam inter quadrata coadditarum AG, GB.



Iungantur BF, BH. Iam per Corollarium ij. Prop. xxxvj. lib. ij. noſtræ Diuinat. in Apoll. ramus BF ex foco æquatur aggregato ex EC cum CB, ſed eſt CB ipſi AC æqualis, ex conſtructione, ergo BF æquatur ipſi AE. Eadem ratione oſtenditur BH æqualis ipſi AG, & BD æqualis AB, ſed quadratum EF eſt differentia inter quadrata BF, BE, ergo idem EF eſt quoque differentia inter quadrata integrantium AE, EB. Similiter quum quadratum GH ſit differentia inter quadrata BH, BG, idem GH erit & differentia inter quadrata coadditarum AG, GB veluti etiam quadratum BD eſt differentia inter quadratum AB, & quadratum (ſi ita loqui fas eſt) puncti B: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

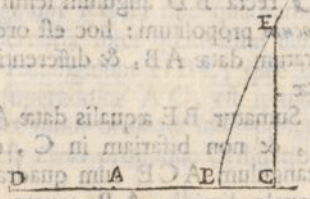
PROPOSITIO XXXIV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & quadratum ſuperadditæ, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum addita, axis ipſa addita, centrum verò ſit occurſus datæ cum ſuperaddita; ita vt ſemiaxis tranſuerſus ſit datæ æqualis.

SIT AB data, & ſuperaddita quælibet AC, & cum centro A per verticem B deſcribatur Hyperbola æquilatera BE. Dico huius concauum eſſe *Locum* propoſitum: nempe ordinatam CE poſſe differentiam inter quadratum datæ AB, & quadratum ſuperadditæ AC.

Ex

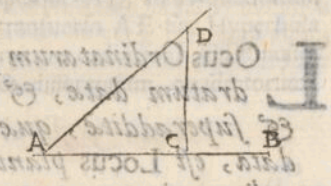
Ex producta B A ſumatur ipſi æqualis AD. Erit ergo DB ſecta bifariam in A, eſtque ipſi addita B C, rectangulum igitur DCB cum quadrato B A æquale eſt quadrato A C: quapropter rectangulum D C B, hoc eſt quadratum ordinatæ CE (ob Hyperbolam æquilateram) eſt differentia inter quadratum datæ A B, & quadratum ſuperadditæ A C: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXXV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum datæ, & partis, eſt Locus *planus, ſeu recta linea ſemirectum angulum cum data conſtituens ad occurſum datæ cum parte.*

SIT A B data, & pars quælibet A C, ad A verò ſit angulus ſemirectus B A E per rectam A E conſtitutus. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam C D poſſe differentiam inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum eiuſdem datæ A B, & partis A C.



Differentia enim inter quadratum datæ A B, & quadratum partis A C eſt rectangulum A B C cum rectangulo A C B: ſed differentia inter rectangulum A B C cum rectangulo A C B, & quadratum datæ A B eſt idem quadratum A C, vel quadratum C D, ob æquales angulos ſemirectos ad A D, ergo C D poteſt prædictam differentiam inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum datæ A B, & partis A C: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quapropter recta A E eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

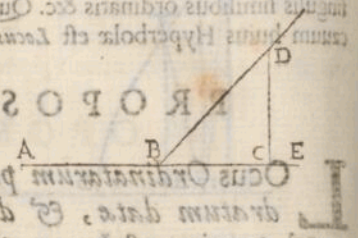
PROPOSITIO XXXVI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum datæ, & additæ eſt Locus *planus, nempe recta linea ſemirectum angulum cum addita conſtituens ad occurſum eiuſdem cum data.*

Sit

SIT data A B, & addita quæcunque B C, & cum data A B recta B D angulum ſemirectum faciat E B D. Dico ipſam B D eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam C D poſſe differentiam inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum A B, B C datæ, & additæ.

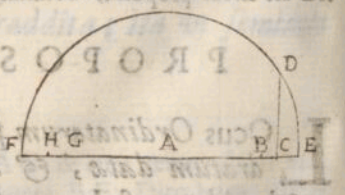
Sumatur B E æqualis datæ A B. Iam quum ſit A E ſecta bifariam in B, & non bifariam in C, erit rectangulum A C E cum quadrato B C æquale dimidię A B; quare rectangulum A C E erit differentia quadratorum A B, B C datę, & additę, quadratum verò B C erit differentia inter quadratum datę A B, & rectangulum A C E, ſed quadrato B C æquatur quadratum C D, ergo C D poteſt differentiam inter quadratum datę A B, & rectangulum A C E, quod eſt differentia quadratorum datę, & additę: & hoc de alia ſimili ordinata &c. Ergo recta B D eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXXVII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum datæ, & ſuperadditæ, quæ poſſit minus duplo quadrati ex data, eſt* Locus *planus, ſeu concauum peripheriæ Circuli, cuius centrum ſit occurſus datæ cum ſuperaddita, radius verò poſſit duplum quadrati ex data.*

SIT data A B, & ſuperaddita A C, cuius quadratum ſit minus duplo quadrati A B, & ſumpta A E potente duplum eiuſdem quadrati A B cum centro A, & radio A E deſcribatur ſemicirculus E D F. Dico concauum huius peripheriæ eſſe *Locum* propoſitum: nempe ordinatam C D poſſe differentiam inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum A B, A C.



Sumatur A G æqualis A B, & A H æqualis A C.

Et quum ex conſtructione ſit quadratum A E duplum quadrati A B, ipſorum differentia, nempe rectangulum F B E æquale erit quadrato A B;

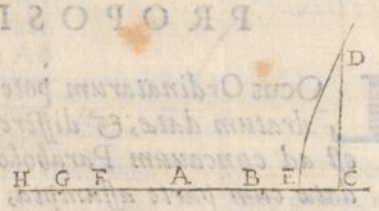
differen-

differentia verò inter quadrata A B, A C est rectangulum H B C, sed differentia inter F B E, & H B C est rectangulum F C E, siue quadratum ordinatæ C D in semicirculo, ergo & differentia inter quadratum datæ A B, rectangulo F B E æqualis ostensa, & rectangulum H B C, quæ est differentia inter quadratum datæ A B, & superadditæ A C, est ipsum quadratum ordinatæ C D, & hoc de qualibet simili ordinata inter puncta B, E. Quare concauum huius peripheriæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVIII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum datæ, & superadditæ, quæ possit maius duplo quadrati ex data, est ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum sit occursus datæ cum superaddita, semiaxis verò transuersus possit duplum quadrati ex data, axis autem sit ad productionem superadditæ.*

SIT data A B, & superaddita quælibet A C, quæ tamen possit pluſquam duplum quadrati ipsius A B, sumptaque A E, cuius quadratum duplum sit A B, cum centro A, & semiaxe transuerso A E fiat Hyperbola E D. Dico hanc esse *Locum* propositum: nimirum ordinatam C D posse differentiam inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum A B, A C.



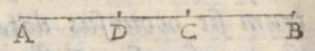
Producatur B A, super quam sumantur A F, A G, A H, ipsis A B, A E, A C, æquales, singulæ singulis.

Iam rectangulum H E C est differentia inter rectangulum H B C, & G B E, sed H B C est differentia inter quadratum superadditæ A C, & quadratum datæ A B, & rectangulum G B E æquatur quadrato eiusdem datæ A B (quoniam positum est quadratum A E duplum quadrati A B) ergo rectangulum H E C est differentia inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum datæ, & superadditæ; sed H E C æquale est rectangulo G C E (quum G H, E C sint æquales, ex constructione) & rectangulum G C E æquatur quadrato C D (quum G E sit axis transuersus descriptæ Hyperbolæ æquilateræ) ergo & quadratum C D est differentia inter quadratum datæ A B, & differentiam quadratorum eiusdem datæ, & superadditæ A C: & hoc de qualibet simili ordinata vltra punctum E &c. Quare concauum huius Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

LEMMA. II. PROP. XXXIX.

SI recta linea inæqualiter vtcunque secta fuerit, quadratum totius, duobus simul rectangulis sub tota, & minori parte, vnà cum differentia inter quadrata partium æquale est.

SIT data AB vtcunque secta inæqualiter in C, ita vt BC sit pars minor. Dico quadratum AB duplo rectanguli ABC, cum differentia inter quadrata partium AC, CB æquale esse. Ex AC sumatur AD æqualis CB.

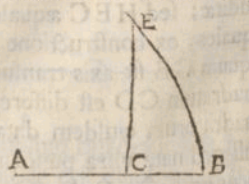


Iam quadratum AB constat ex duplo rectanguli ACB, & ex quadratis BC, CA, sed quadratum CA constat ex quadrato AD, & ex sui ipsius differentia super ipsum quadratum AD, vel super quadratum CB, ergo quadratum AB constat, vel æquale est duobus rectangulis ACB vnà cum duobus quadratis BC, AD, & cum prædicta *differentia*, sed duo rectangula ACB cum duobus quadratis BC, AD conficiunt duo rectangula ABC (quum sit BC æqualis AD ex constructione) ergo idem quadratum AB æquatur duobus rectangulis ABC vnà cum differentia quadratorum AC, CB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXX.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & differentiam quadratorum partium, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum parte assumpta, axis ipsa data, rectum verò latus datæ sit duplum.*

SIT data AB vtcunque inæqualiter secta in C, ita vt CB sit pars minor, & per verticem B circa axem BA describatur Parabola, cuius sem rectum latus sit data AB. Dico eam esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CE posse differentiam inter quadratum datæ AB, & differentiam quadratorum partium AC, CB.



Nam (per lemma præcedens) quadratum datæ AB æquatur duplo rectanguli ABC vná cum differentia inter quadrata

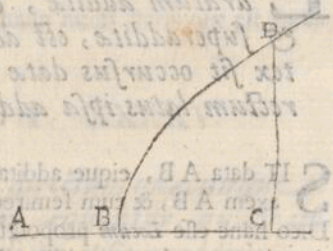
drata partium AC, CB, ergo duplum rectangula ABC est differentia inter quadratum AB, & differentiam quadratorum AC, CB, sed duplum rectanguli ABC æquatur [a] quadrato ordinatæ CE (quum positum sit AB esse dimidium recti lateris Parabolæ BE) ergo & huius CE quadratum æquatur differentiæ inter quadratum datæ AB, & differentiam quadratorum partium AC, CB: & hoc de singulis similibus ordinatis &c. Quare concauum huius Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 11. primi Conic.

PROPOSITIO XXXXI.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum, datæ & differentiam quadratorum coadditarum, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum addita, axis ipsa addita, rectum verò latus sit duplum datæ.*

SIT AB data, & quæcunque addita BC, ac per verticem B, circa axem BC, rectoque latere duplo AB describatur Parabola BD. Dico hanc esse *Locum* propositum: nempe ordinatam CD posse differentiam inter quadratum datæ AB, & differentiam quadratorum coadditarum AC, CB.



Ob Parabolam enim, & semirectum latus AB, est quadratum ordinatæ CD æquale [b] rectangulo sub duplo AB in BC, vel duobus rectangulis ABC, sed duo ABC constituunt differentiam inter quadratum AB, & idem quadratum AB cum duobus ABC; hoc autem AB cum duobus ABC est differentia inter quadrata AC, CB coadditarum, ergo & quadratum CD æquatur eidem differentiæ inter quadratum B, A &quadrata coadditarum AC, CB: & hoc de qualibet simili ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[b] 11. primi Conic.

PROPOSITIO XXXXII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum partis, & summam quadratorum datæ, & partis reliquæ, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum reliqua, axis ipsa data, & rectum latus sit duplum eiusdem datæ.*

SIT data AB, cuius pars AC, & facto vertice B circa axem BA cum recto latere duplo ipsius BA fiat Parabola BE. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam CE posse differentiam inter quadratum partis AC, & summam quadratorum AB, BC, totius, & partis reliquæ.

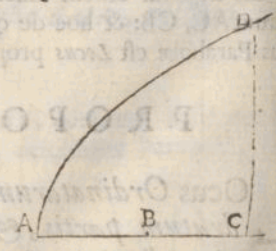


Differentia enim inter quadratum AB, & quadratum AC æquatur duobus rectangulis ACB cum quadrato CB, ergo differentia inter idem quadratum AB cum quadrato BC, & idem quadratum AC æquabiurt duobus rectangulis ACB cum duobus quadratis CB, quæ omnia simul conficiunt duo rectangula ABC; sed duo ABC æquantur quadrato ordinatæ CD (quum Parabolæ BE sit AB recti lateris dimidium) ergo quadratum CD est differentia inter quadratum AC, & summam quadratorum AB, BC: & hoc de qualibet simili ordinata &c. Quare concauum *huius* Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXXIII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum additæ, & summam quadratorum datæ, & superadditæ, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum superaddita, axis, & semirectum latus ipsa addita.*

SIT data AB, eique addita quælibet BC, & per A verticem, circa axem AB, & cum semirecto eiusdem AB describatur Parabola AD. Dico hanc esse *Locum* propositum: nempe ordinatam CD posse differentiam inter quadratum additæ BC, & summam quadratorum AB, AC.



Differentia enim quadrati AC super CB æquatur duobus rectangulis ABC cum quadrato AB, ergo differentia inter summam quadratorum AC, AB, & idem quadratum CB æquatur duobus rectangulis ABC cum duobus quadratis AB, quæ omnia simul constituunt duo rectangula CAB, sed hæc æquantur quadrato CD, eò quod AB sit semirectum Parabolæ, ergo quadratum CD est differentia inter quadratum additæ CB, & summam quadratorum AB, AC datæ, & superadditæ: & hoc de qualibet simili ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

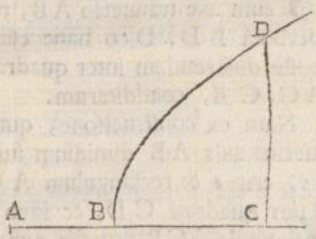
PRO-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [220] - 28
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO XXXXIV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum superadditæ, & summam quadratorum datæ, & additæ, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum addita, axis ipsa addita, & semirectum latus æquale datæ.

ESto A B data, & A C quælibet superaddita, per verticem verò B, circa axem B C, cum semirecto A B sit descripta Parabola B D. Dico hanc esse *Locum* propositum, siue ordinatam C D posse differentiam inter quadratum superadditæ A C, & summam quadratorum A B, B C datæ, & additæ.



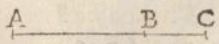
Nam differentia inter quadratum A C, & summam quadratorum A B, B C æqualis est duplo rectanguli A B C, cui æquatur quadratum ordinatæ C D, eò quod A B ponatur semirectum Parabolæ, ergo C D potest prædictam differentiam: & hoc de qualibet simili ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

LEMMA. III. PROP. XXXXV.

SI datæ rectæ addita fuerit in directum quæcunque. Quadrata simul coadditarum æquantur quadrato datæ, vnà cum duplo rectanguli ex ipsis coadditis.

SIT data A B, & addita quælibet B C. Dico duo simul quadrata coadditarum A C, C B, quadrato A B datæ, cum duplo rectanguli A C B coadditarum æqualia esse.

Nam, quum recta A C sit vtcunque secta in B, erit quadratum A C æquale duobus simul quadratis A B, B C cum duplo rectanguli A B C, his ergo communi addito quadrato C B, erunt duo simul quadrata A C, C B, æqualia quadrato A B cum duobus quadratis B C, & cum duobus rectangulis A B C, sed duo B C cum duobus A B C æquantur duobus A C B, ergo & duo simul quadrata eadem



dem AC, CB quadrato AB cum duobus rectangulis ACB æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

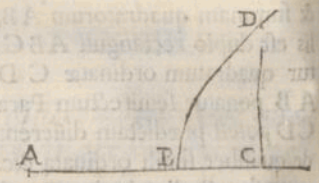
PROPOSITIO XXXXVI.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & summam quadratorum coadditarum, est ad concauum Hyperbolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum addita, axis addita, sed axis transuersus sit æqualis datæ, qui sui recti lateris sit duplum.*

SIT data AB, & coadditæ quæcunque AC, CB, & per verticem B cum axe tranuerso AB, rectoque latere huius duplo describatur Hyperbola BD. Dico hanc esse *Locum* propositum, siue ordinatam CD posse differentiam inter quadratum datæ AB, & aggregatum quadratorum AC, CB, coadditarum.

Nam ex constructione, quum sit transuersus axis AB dimidium sui recti lateris, erit a & rectangulum ACB dimidium quadrati CD, & ideo duo simul rectangula ACB æqualia quadrato CD, sed duo ACB constituunt differentiam inter quadratum datæ AB, & aggregatum quadratorum AC, CB, per Lemma præcedens, ergo & quadratum CD prædictæ differentiæ æquale est: & hoc de simili quacunque ordinata &c. Quare concauum huius Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

a 21. primi Conic.



PROPOSITIO XXXXVII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & summam quadratorum partium integrantium, est ad concauum semiellipsis prolatæ super datam tanquam circa minorem axem descriptæ, & cuius axis maior possit duplum quadrati eiusdem datæ, seu minoris axis.*

SIT data AB, super quam, veluti circa minorem axem, descripta sit semiellipsis ADB, cuius semiaxis maior CD possit duplum semiaxis minoris AC. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est quancunque ordinatam EF posse differentiam inter quadratum datæ AB, & summam quadratorum partium integrantium AE, EB.

Nam,

Quoniam enim quadratum CD duplum eſt quadrati CA (ex conſtructione) vel rectanguli ACB, idem quadratum CD duobus rectangulis ACB æquale erit. Et quum quadratum CD ad EF ſit [a] vt rectangulum ACB ad AEB, vel vt duo ſimul ACB ad duo ſimul AEB, ſitque permutando quadratum CD æquale oſtenſum duobus rectangulis ACB, erit & quadratum EF æquale duobus ſimul AEB, ſed differentia inter quadratum datæ AB, & quadrata ſimul partium AC, CB æquatur duplo rectanguli ACB, ergo ipſa differentia, & quadrato CD æqualis erit. Similiter differentia inter quadratum AB, & quadrata ſimul partium AE, EB æquatur duplo rectanguli AEB, ergo eadem differentia, & quadrato EF æqualis erit. Quare ordinatæ CD, EF, & aliæ huiuſmodi poſſunt prædictas differentias; ac propterea concauum deſcriptæ Ellipſis eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

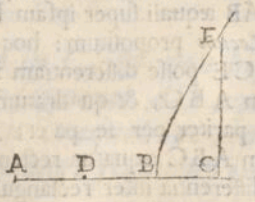


[a] 21. primi Conic.

PROPOSITIO XXXXVIII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & ſummam quadratorum additæ, & ſuperadditæ, eſt ad concauum Hyperbolæ, cuius centrum ſit punctum biſecans datam, axis addita, & vertex occurſus datæ cum addita, ſemiaxis tranſuerſus dimidium datæ, ſemirectum verò ipſa data.

SIT data AB, & ſuperaddita quælibet AC, adeoque addita BC; & ſecta AB bifariam in D, cum centro D, ſemiaxe tranſuerſo DB, ſemirecto verò æquali ipſi AB fiat Hyperbola BE. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: Nimirum ordinatam CE poſſe differentiam inter quadratum datæ AB, & ſummam quadratorum AC, CB ſuperadditæ, & additæ. Nam quadratum AC cum quadrato CB æquatur duobus rectangulis ACB cum quadrato AB, per 7. ſec. Elem. ergo differentia inter quadratum AB, & duo ſimul quadrata AC, CB æquatur duobus ſimul rectangulis ACB, ſed duo ACB æqualia ſunt quadrato CE (quum poſitus ſit tranſuerſus axis AB ſubduplus ſuo recto, ac propterea rectangulum ACB dimidium quadrati CE) ergo & quadratum CE æquiualet prædictæ differentiæ inter quadratum datæ AB, & quadrata ſimul additæ, & ſuperadditæ BC, AC: & hoc de quacunque alia ſimili ordinata &c.



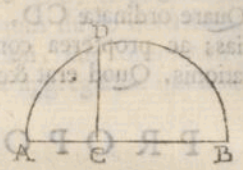
Quare

Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXXIX.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & parte, & quadratum partis eiuſdem, eſt* Locus *planus, nempe concauum peripheriæ ſemicirculi ſuper datam deſcripti.*

SIT data AB vtcunqne ſecta in C, ſuper quam fiat ſemicirculus ADB. Dico huius peripheriam eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CD poſſe differentiam inter rectangulum ſub data AB in partem, exempli gratia, BC, & quadratum eiuſdem partis BC.

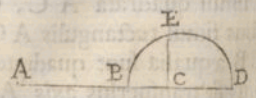


Manifeſtè enim id conſtat, quum rectangulum ABC differat a quadrato BC per rectangulum ACB, ſiue per quadratum ordinatæ CD in ſemicirculo. Quare CD poteſt prædictam differentiam: & hoc ſemper &c. Quare concauum huius ſemicirculi eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO L.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data in additam ipſa data minorem, & quadratum additæ, eſt* Locus *planus, nempe concauum peripheriæ ſemicirculi, ſuper rectam æqualem datæ, eique in directum poſitæ, deſcripti.*

SIT data AB, & addita BC, minor tamen AB, ſumptaque BD ipſi AB æquali ſuper ipſam BD fiat ſemicirculus. Dico huius peripheriam eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CE poſſe differentiam inter rectangulum ABC, & quadratum BC.



Id pariter per ſe patet; nam rectangulum ABC æquatur rectangulo DBC, ſed differentia inter rectangulum DBC, & quadratum BC eſt rectangulum BCD, ſiue quadratum ordinatæ CE in ſemicirculo; ergo & differentia inter rectangulum ABC, & quadratum BC

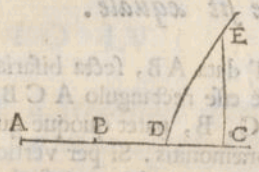
æqualis

æqualis est quadrato ordinatæ CE: & hoc semper &c. Quare concauum huius peripheriæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum sub data, & addita, quæ sit maior data, & quadratum additæ, est ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex sit in addita, & distet ab occursu datæ cum addita per rectam æqualem datæ, & cuius latera ipsi datæ sint æqualia.

SIT AB data, & quælibet addita ipsa maior sit BC, a qua, dempta BD ipsi datæ AB æquali, per verticem D, circa axem DC describatur Hyperbola æquilatera DE, cuius vtrunque latus sit æquale ipsi DB, vel datæ AB. Dico ipsam Hyperbolam esse *Locum* propositum: nimirum ordinatam CE posse differentiam inter rectangulum ABC sub data, & addita, & quadratum additæ BC.



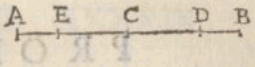
Quum etenim sit AB æqualis BD, & quæcunque DC ipsi adiecta, erit rectangulum ABC æquale rectangulo CBD, sed differentia inter rectangulum CBD, & quadratum BC est rectangulum BCD, siue, ob Hyperbolam æquilateram, est quadratum ordinatæ CE, ergo & differentia inter rectangulum ABC datæ, & additæ, & quadratum idem BC, nempe additæ, erit idem quadratum CE: & hoc semper &c. Quare concauum huius Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

LEMMA IV. PROP. LII.

SI recta AB secta fuerit bifariam in C, & non bifariam in D. Quadratum maioris segmenti AD æquatur rectangulo ADB sub segmentis inæqualibus, vnà cum duplo rectanguli ADC sub maiori segmento interpositum CD.

SVmatur CE æqualis CD, & erit reliqua AE æqualis DB. Iam quadratum AD æquatur rectangulis sub AD, DC, & sub AD,

AC, sed rectangulum sub AD, AC æquale est rectangulis sub AD, EC, & sub AD, AE, quorum primum, nempe rectangulum sub AD, EC æquatur rectangulo sub AD, DC (quum CE, CD sint æquales) alterum verò, nempe sub AD, AE æquatur rectangulo sub AD, DB (cum item AE, DB sint æquales) ergo quadratum AD æquale est duplo rectanguli sub AD, DC vnà cum rectangulo ADB. Quod erat demonstrandum.



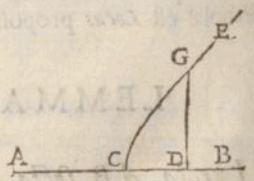
PROPOSITIO LIII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum sub inæqualibus partibus integrantibus datæ, & quadratum maioris segmenti, est ad concauum Hyperbolæ, cuius vertex sit punctum bisecans datam, axis verò transuersus sit dimidium datæ, quod supereſt ex maiori segmento, rectum verò latus ipsi datæ sit æquale.

SIT data AB, secta bifariam in C. Iam patet quadratum AC æquale esse rectangulo ACB, at si eadem data inæqualiter secetur in D inter C, B, patet quoque quadratum AD maius esse rectangulo ADB. His præmonitis. Si per verticem C, circa axem CB, cum axe transuerso AC, & recto latere ipsi datæ AB æquali fiat Hyperbola CE. Dico hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam DG posse differentiam inter quadratum maioris segmenti AD, & rectangulum sub segmentis inæqualibus ADB.

Quoniam enim rectangulum ADC ad quadratum DG est vt [a] transuersus axis AC ad rectum latus AB, vel in ratione subdupla, erit rectangulum ADC dimidium quadrati DG, siue duo simul rectangula ADC æqualia quadrato DG, sed duo ADC, per Lemma præcedens, æquantur differentiæ inter quadratum AD, & rectangulum ADB (quia AB secta est bifariam in C, & non bifariam in D) ergo & quadratum ordinatæ DG prædictæ differentiæ æquale est: & hoc de qualibet simili ordinata ad CB. Quare concauum huiusmodi Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c,

[a] 21. primi Conic.

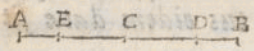


Lemma

LEMMA V. PROP. LIV.

SI recta AB secta sit bifariam in C, & non bifariam in D, rectangulum sub inæqualibus segmentis ADB æquatur quadrato minoris segmenti DB, vnà cum duplo rectanguli BDC ex eodem minori segmento in reliquum CD ex dimidio datæ.

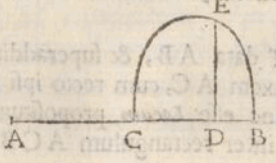
SVmatur CE æqualis CD, & erit reliqua EA æqualis DB. Iam, rectangulum EDB cum quadrato DB æquale est rectangulo EBD, vel rectangulo ADB, sed EDB æquale est duplo rectanguli CDB (quum sit ED dupla CD) ergo rectangulum ADB æquatur duplo rectanguli CDB cum quadrato DB. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO LV.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum sub inæqualibus partibus integrantibus datæ, & quadratum minoris segmenti, est ad concauum semiellipsis prolatæ, cuius minor axis sit dimidium datæ, in qua est segmentum minus, & qui sui recti lateris sit dimidium.

SIT data AB secta bifariam in C, & non bifariam vtcunque in D. Patet, quum sit AD maior DB, rectangulum ADB maius esse quadrato DB. His positis: Si circa CB dimidium datæ, tanquam circa minorem axem, describatur Ellipsis prolata CEB, cuius ipse minor axis CB sui recti lateris sit dimidium, æqualis nempe datæ AB. Dico huius peripheriam esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam DE posse differentiam inter rectangulum ADB, & quadratum DB.



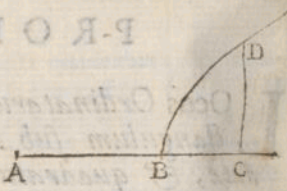
Est enim, ob Ellipsim, rectangulum CDB ad quadratum DE, vt axis transuersus CB ad suum rectum BA, vel vt vnum ad duo, ergo re-

ctangulum CDB dimidium eſt quadrati DE, adeoque duo CDB æquantur quadrato DE, ſed duo CDB æquantur differentiæ inter rectangulum ADB, & quadratum DB (per Lemma præcedens) ergo & quadratum DE ipſi differentiæ æquale eſt: & hoc de qualibet ſimili ordinata &c. Quare concauum huiuſmodi Ellipſis eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LVI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub coadditis, & quadratum additæ, eſt ad concauum Parabolæ vergens ad additam, & cuius vertex ſit occurſus datæ cum addita, rectum verò latus eidem datæ ſit æquale.

SIT data AB, & quæcunque addita BC, & per verticem B circa axem BC cum recto latere datæ AB æquale deſcribatur Parabola BD. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CD poſſe differentiam inter rectangulum coadditarum ACB, & quadratum additæ BC.



Nam differentia inter rectangulum ACB, & quadratum BC eſt rectangulum ABC, quod, ob Parabolam, æquale eſt quadrato ordinatæ CD (quum ponatur AB rectum latus) ergo CD poteſt prædictam differentiam: & hoc de qualibet ſimili ordinata &c. Quare concauum huius Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LVII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub coadditis, & quadratum ſuperadditæ, eſt ad concauum Parabolæ vergens ad ſuperadditam, cuius vertex ſit occurſus datæ cum eadem ſuperaddita, rectum verò latus ipſi datæ ſit æquale.

SIT data AB, & ſuperaddita quælibet AC, & per verticem A, circa axem AC, cum recto ipſi AB æquale deſcribatur Parabola AD. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CD poſſe differentiam inter rectangulum ACB ſub coadditis, & quadratum ſuperadditæ CA.

Differen-

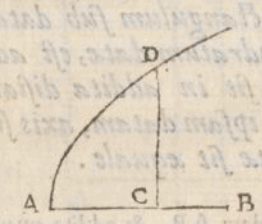
Differentia enim inter rectangulum ACB, & quadratum AC eſt rectangulum CAB, ſed huic æquatur quadratum ordinatæ CD in Parabola, eò quod AB ponatur eius rectum latus, ergo CD poteſt prædictam differentiam: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.



PROPOSITIO LVIII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & parte, & quadratum datæ, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum parte reliqua, rectum verò ſit ipſa data.

SIT data AB, cuius pars quælibet BC, & puncto A occurſu datæ cum parte reliqua AC, facto vertice, circa axem AB cum recto latere ipſi AB æquale deſcribatur Parabola AED. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CE poſſe differentiam inter rectangulum ABC ſub data, & parte, & quadratum datæ AB.



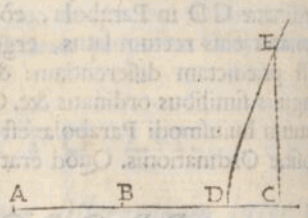
Differentia enim inter rectangulum ABC, & quadratum AB eſt rectangulum BAC, ſed huic æquale eſt quadratum ordinatæ CE, in Parabola (quum poſitum ſit AB rectum latus) ergo & quadratum CE eſt differentia propoſita: & ſic de ſingulis ſimiliter ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LIX.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & addita, ipſa data maiore, & quadratum datæ, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit in addita, diſtans ab occurſu datæ cum addita per diſtantiam æqualem datæ, axis verò ſit reliquum ſegmentum additæ, & rectum latus eidem datæ ſit æquale.

Sit

SIT data AB, & addita quælibet BC ipſa AB maior, ſumptaque BD æquali ipſi AB, per verticem D, circa axem DC, cum recto latere ipſi AB, vel BD æquale deſcribatur Parabola DE. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: nempe ordinatam CE poſſe differentiam inter rectangulum ABC datæ, & additæ, & quadratum datæ AB.

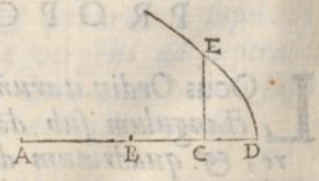


Nam, quum ſit AB æqualis BD, erit rectangulum ABC æquale rectangulo CBD, ſed differentia inter rectangulum CBD, & quadratum BD eſt rectangulum CDB, ſiue quadratum ordinatæ CE, cò quod BD poſitum ſit rectum latus, & quadratum BD æquatur quadrato AB, ergo & differentia inter rectangulum ABC, & quadratum AB erit idem quadratum ordinatæ CE: & hoc de ſingulis ſimiliter ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO LX.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data, & addita ipſa data minore, & quadratum datæ, eſt ad còncauum Parabolæ, cuius vertex ſit in addita diſtans ab huius occurſu cum data per ipſam datam, axis ſit addita, rectum verò latus eidem datæ ſit æquale.*

SIT data AB, & addita quælibet BC ipſa AB minore, & ſumpta BD eidem AB æquali, per verticem D, circa axem DB, cum recto latere æquali datæ AB ſiat Parabola DE. Dico huius concauum eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam CE poſſe differentiam inter rectangulum ABC, & quadratum AB.



Nam quadratum CE (ob Parabolam) æquale eſt rectangulo ſub recto AB, vel BD in DC, ſed hoc eſt differentia inter quadratum BD, & rectangulum DBC, quadratum verò BD æquale eſt quadrato AB, & rectangulum DBC æquatur rectangulo ABC, ergo & quadratum CE differentiæ inter quadratum datæ AB, & rectangulum ABC ex data, & addita æquale eſt: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huiuſmodi Parabolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PRO-

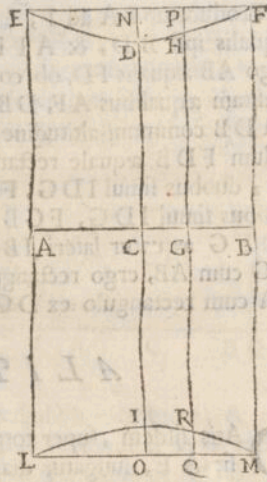
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [230] - 38
PUBLIC DOMAIN

PROPOSITIO LXI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & rectangulum partium, est ad connexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum sit punctum bisecans datam, semiaxis verò transuersus possit triplum quadrati ex datæ dimidio.

SIT data AB secta bifariam in C, per quod sit CD perpendicularis, quæ possit triplum quadrati AC, vel CB, & cum centro C, per verticem D sit descripta Hyperbola æquilatera EDF. Dico hanc esse *Locum* propositum: Nimirum ordinatam quamlibet GH posse differentiam inter quadratum AB, & rectangulum AGB.

Sumatur CI ipsi CD æqualis, & in directum, ac per I fiat Hyperbolæ LIM oppositæ ipsi EDF, & super AB fiant quadrata AF, AM, quorum lateribus EF, LM occurrant productæ CD, GH in N, O, P, Q, Hyperbolis verò in H, R.



2 ex 22. lib. 3. Con.c.

Et quoniam quadratum NC quadruplum est quadrati AC (eò quod sit CN dupla AC) & quadratum CD triplum est eiusdem AC, ex constructione, ergo reliquum rectangulum ODN, vel IND æquale est quadrato AC, vel quadrato NE, sed idem IND æquale est quadrato semiordinatæ ex N in Hyperbola æquilatera EDF, ergo quadratum NE quadrato eiusdem semiordinatæ ex N æquale est, nempe Hyperbola transit per E angulum quadrati. Itidemque demonstrabitur huiusmodi oppositas Sectiones transire per reliquos angulos F, L, M: sed rectangulum IND ad RPH, vel ODN ad QHP est vt rectangulum ENF ad EPF, vel vt rectangulum ACB, siue quadratum AC ad rectangulum AGB, atque est permutando rectangulum ODN ostensum æquale quadrato AC, ergo & rectangulum QHP rectangulo AGB æquale est: sed quadratum GH est differentia inter quadratum GP, & rectangulum QHP, & est quadratum AB æquale quadrato GP, & rectangulum AGB æquale rectangulo QHP, ergo idem quadratum GH erit quoque differentia inter quadratum datæ AB, & rectangulum sub partibus AGB; veluti etiam quadratum CD est differentia inter quadratum CN, vel AB, & rectangu-

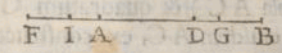
ctangulum ODN, vel ACB. Latera igitur CD, GH possunt prædictas differentias: & hoc de singulis similibus ordinatis &c. Quare connexum huiusmodi Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

LEMMA. VI. PROP. LXII.

SI recta linea secta fuerit vtcunque, & alterum ex segmentis similiter vtcunque: Differentia inter rectangulum sub tota, & segmento diuiso, & rectangulum sub aggregato ex indiuiso segmento cum interposito in interpositum, æquatur rectangulo sub tota, cum eodem interposito in extremam partem diuisi segmenti.

SIT data AB vtcunque secta in D, & DB alterum segmentorum vtcunque in G. Dico differentiam inter rectangulum ABD, & rectangulum AGD esse rectangulum sub AB cum GD in GB.

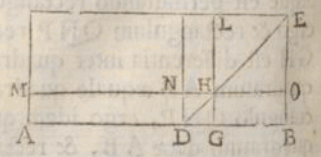
Producatur BA ad F, sumaturque AF æqualis ipsi BD, & AI ipsi DG. Erit ergo AB æqualis FD, ob communem AD additam æqualibus AF, DB: quare, sumpta DB communi altitudine, erit rectangulum FDB æquale rectangulo ABD; sed rectangulum FDB æquale est [a] duobus simul IDG, FGB, ergo & rectangulum ABD æquale est duobus simul IDG, FGB nempe AGD cum rectangulo FGB; sed latus FG æquatur lateri IB, hoc verò constat ex IA cum AB, vel ex DG cum AB, ergo rectangulum idem ABD æquale est rectangulo AGD vnà cum rectangulo ex DG cum AB in GB. Quod erat demonstrandum.



[a] Lemma 3. Pap. in lib. 2. Conic.

ALITER IDEM.

DAtis ijsdem, super totam datam AB fiat rectangulum ABD, quod sit AE, iungatur diameter DE, & compleatur figura. Erit ergo DE quadratum, & EH, DH circa diametrum quadrata, quare differentia inter rectangulum AE, & AH erit eadem ac inter rectangulum ABD, & rectangulum AGD, sed differentia inter rectangula AE, AH est rectangulum ME cum rectangulo HB, vel cum æquali supplemento NL, & rectangula ME, NL si-



mul

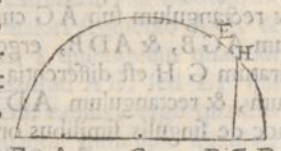
mul conficiunt rectangulum sub MO cum NH in OE, vel in OH, vel sub æqualibus A B cum D G in BG, ergo differentia inter rectangula HE, AH, siue inter rectangula ABD, & AGD est idem rectangulum sub AB cum DG in BG: hoc est rectangulum ABD sub data, & secto segmento, æquatur rectangulo AGD sub aggregato insecti cum interposito, in interpositum, vnà cum rectangulo sub data AB cum interposito DG in extremam partem BG diuisi segmenti BD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIII.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & rectangulum coadditarum, quod sit minus quadrato datæ, est* Locus *planus, nempe concauum peripheriæ Circuli, cuius centrum sit punctum bisecans datam, radius verò possit sesquiquartum quadrati eiusdem datæ.*

SIT data AB secta bifariam in C, quo facto centro, ad interuallum radij C D potentis sesquiquartum quadrati A B, fiat semicirculus DEF. Dico huius peripheriam esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam quamcunque GH inter puncta B, D, posse differentiam inter quadratum datæ AB, & rectangulum coadditarum AGB, quod minus esse quadrato AB sic ostenditur.

Quoniam enim, ex constructione, quadratum CD ad AB est vt 5 ad 4, & quadratum AB ad BC est vt 4 ad 1 (eò quod sit AB secta bifariam in C) quadratum CD ad CB erit vt quinque ad vnum, estque CB æqualis CA, ergo recta AD secta est [a] in B secundùm extremam, & mediam rationem, ac ideo rectangulum ADB æquale est quadrato datæ AB.



[a] per conuers. primæ propos. lib. 13. Elem.

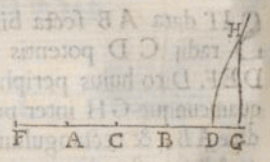
Insuper, quum recta AD secta sit in B secundùm extremam, & mediam rationem, & alterum ex eius segmentis BD sit diuisum in G vtcunque, erit differentia inter rectangulum ADB, & rectangulum AGB [b] ipsum rectangulum sub AD cum BG in GD, sed AD æquatur ipsi FB (quum sint CF, CD, & CA, CB, & reliquæ AF, BD æquales, & AB communis) & rectangulum ADB æquale est quadrato AB, vt superiùs demonstrauimus, ergo differentia inter quadratum AB, & rectangulum AGB est rectangulum sub FB cum BG, nempe sub FG in GD, cui æquatur quadratum mediæ proportionalis GH in semicirculo FED. Ordinata igitur GH potest prædictam differentiam: & hoc de singulis similibus ordinatis &c. Quapropter concauum huius plani *Loci* DE est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[b] per Lem. Præcedens.

PROPOSITIO LXIV.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter quadratum datæ, & rectangulum coadditarum, quod ſit maius quadrato datæ, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex ſit occurſus illarum coadditarum, quarum rectangulum æquale ſit quadrato datæ, centrum verò ſit punctum biſecans datam.*

SIT data A B ſecta bifariam in C, & producta ſic ſecetur in D, vt rectangulum A D B æquale ſit quadrato datæ A B; & iterum vltra D vtcunque in G. Conſtat rectangulum A G B, quum excedat rectangulum A D B, excedere quoque quadratum A B. Præterea, per verticem D, cum centro C deſcribatur Hyperbola æquilatera D H. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum: hoc eſt ordinatam G H poſſe differentiam inter quadratum datæ A B, & rectangulum coadditarum A G B.



Producatur C A, ſumaturque A F æqualis B D: erit ergo & C F æqualis C D, nempe D F erit axis tranſuerſus Hyperbolæ D H, quæ quum ſit æquilatera, erit rectangulum F D G æquale quadrato G H, ſed rectangulum F G D æquale eſt rectangulo ſub A G cum B D in G D (nam A G cum B D æquatur A G cum A F ipſi B D æquali, ex conſtructione) & rectangulum ſub A G cum B D in G D eſt [a] differentia inter rectangulum A G B, & A D B, ergo & rectangulum F G D, ſiue æquale ſibi quadratum G H eſt differentia inter rectangulum A G B, quod eſt coadditarum, & rectangulum A D B, vel huic æquale quadratum datæ A B: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare concauum huius Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] per Lem. 6. huius.

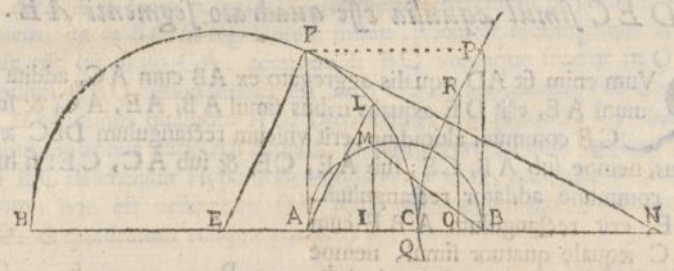
PROPOSITIO LXV.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum ſub data in ſegmentum maius minoris eorum integrantium, quæ datam diuidunt ſecundùm extremam, & mediam rationem, & quadratum reliqui ſegmenti ex data, eſt* Locus *planus, ſeu concauum Circuli peripheriæ, cuius vertex ſit ipſa diuiſio ſecundùm extremam, & mediam, radius verò æqualis ſit aggregato ex dimidio datæ cum maiori ſegmento extremorum.*

Sit

SIT data AB, quæ primò concipiatur ſecta in C, ſecundùm extremam & mediam rationem, ita vt BA ad AC, ſit vt AC ad CB. Conſtat rectangulum ABC quadrato CA æquale eſſe: quare ſi ſegmentum maius AC vtcunque ſecetur in I, rectangulum ſub tota AB in ſegmentum BI maius minore BC, maius erit rectangulo ABC, ideoque maius quadrato AC, & eò maius quadrato reliqui ſegmenti AI. Dico itaque ſi producta BA ad E ita vt ſit AE æqualis dimidio BA, & centro E cum interuallo radij EC deſcribatur ſemicirculus CFH, cuius peripheriæ occurrat in F recta AF ex A ſuper diametrum CH perpendiculariter ducta, atque ex I ordinetur IL vſque ad peripheriam; hanc poſſe differentiam inter rectangulum ABI ſub data, & parte maiore minoris ſegmenti BC, & quadratum AI reliquæ ex tota.

Super AB fiat alter ſemicirculus BMA ordinatam IL ſecans in M, & iungantur BM, AL, EF, atque ad F ſit Circulum contingens FN productæ diametro occurrens in N.



Iam, quoniam AB ſecta eſt in C ſecundùm extremam, & mediam rationem, EC verò, ex conſtructione, conſtat ex maiori ſegmento AC, & ex AE dimidio totius datæ AB, ipſa EC poterit [a] quintuplum quadrati ex dimidio eiuſdem AB, nempe quintuplum quadrati AE, ſed EF ipſi EC æqualis eſt, vtraque enim eſt eiuſdem Circuli radius, ergo quadratum EF, ſiue duo ſimul quadrata FA, AE æquantur quintuplo quadrati AE: quare quadratum FA quadruplum eſt quadrati AE, hoc eſt linea FA dupla lineæ AE, cuius poſita eſt quoque dupla BA, ergo AF, AB ſunt æquales. Quoniam verò FN Circulum contingit, erit angulus EFN rectus, atque eſt FA perpendicularis ſuper EN baſim trianguli rectanguli EFN, ergo triangula EAF, FAN inter ſe ſunt ſimilia, adeoque vt EA ad AF, ita FA ad AN, ſed eſt EA dimidium AF, vt ſupra oſtendimus, ergo & FH dimidium eſt AN, ſed AB ipſi AF eſt æqualis, vt nuper demonſtrauimus, ergo AN axis ſemitrianguli Circulo CFH circumſcripti ſectus eſt bifariam in B.

[a] Prop. 1. lib. 13. El.

Quumque AF, AL ſint rami in Circulo ex origine interna inter centrum, & verticem, & AN axis prædicti trianguli ſectus ſit bifariam in B, erit quadratum AF ad AL vt [b] linea BA ad BI, vel ob ſemicirculum BMA, & normalem IM ſuper diametrum BA, vt quadratum BA ad quadratum BM, ſed permutando eſt quadratum AF æquale quadrato BA

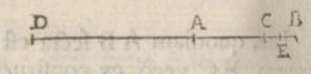
[b] 11. lib. 1. huius.

cum ipſorum latera ſint æqualia, ergo & quadratum AL, vel duo ſimul AI, IL æqualia ſunt quadrato BM, ſiue rectangulo ABI, ob ſemicirculum; rectangulum igitur ABI ſuperat quadratum AI quadrato IL: hoc eſt IL poteſt differentiam inter rectangulum ABI, & quadratum IA: & ſic de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quapropter concauum peripheriæ CLF eſt *Locus* planus propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

LEMMA. VII. PROP. LXVI.

SI recta AB ſecta fuerit in C ſecundùm extremam, & mediam rationem, ita vt AC ſit ſegmentum maius, cui in directum adÿciatur AD æqualis aggregato datæ AB cum maiori ſegmento AC, minus verò CB ſectum ſit vtcunque in E. Dico rectangula ABE, DEC ſimul æqualia eſſe quadrato ſegmenti AE.

QVum enim ſit AD æqualis aggregato ex AB cum AC, addita communi AE, erit DE æqualis tribus ſimul AB, AE, AC, & ſumpta CE communi altitudine, erit vnicum rectangulum DEC æquale tribus, nempe ſub AB, CE; ſub AE, CE, & ſub AC, CE: ſi his igitur commune addatur rectangulum ABE, erit rectangulum ABE cum DEC æquale quatuor ſimul, nempe ſub AB, BE; ſub AB, CE; ſub AE, EC; & ſub AC, CE: ſed duo ſub AB, BE, & ſub AB, CE conſtituunt rectangulum ABC, hoc eſt quadratum AC ipſi æquale, ex Hypotheſi: ergo, illis in hoc permutatis erit item rectangulum ABE cum DEC æquale quadrato AC cum rectangulis ſub AE, EC, & ſub AC, CE; ſed hæc omnia, nempe quadratum AC cum rectangulis ſub AE, EC, & ſub AC, CE æquantur quadrato vnico AE, ergo eadem ſimul rectangula ABE, DEC, quadrato AE ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

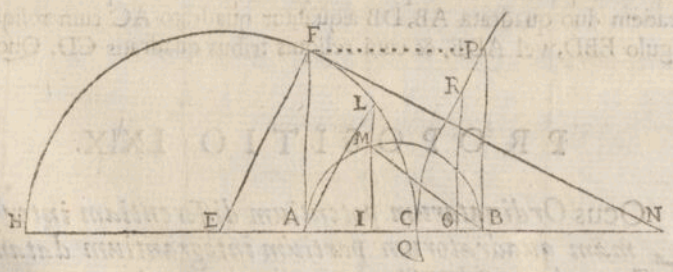


PRO-

PROPOSITIO LXVII.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter rectangulum sub data, quæ secta sit secundùm extremam, & mediam rationem, in partem, quæ minoris segmenti sit minor, & quadratum reliquæ partis ex tota, est ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius vertex sit punctum datam secans in prædicta ratione, semiaxis verò transuersus æqualis sit aggregato ex dimidio datæ cum maiori segmentorum eiusdem secundùm extremam, & mediam rationem sectæ.

SI data AB secta fuerit in C secundùm extremam & mediam rationem, ita vt BC sit segmentum minus. Constat rectangulum ABC æquale esse quadrato CA, adeoque si BC vtcunque secetur in O, rectangulum ABO, quod minus est ABC, minus quoque esse quadrato AC, & eò minus quadrato AO. Dico itaque, si in producta CA sumatur AE dimidio totius datæ AB æqualis, & cum centro E, cum semiaxe transuerso EC describatur Hyperbola æquilatera PCQ, hanc esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam OR posse differentiam inter rectangulum ABO, & quadratum reliquæ partis OA.



Producatur semiaxis CE in H vsque ad semicirculi CFH peripheriam. Et erit CH axis descriptæ Hyperbolæ PCQ.

Iam, quoniam AB secta est in C secundùm extremam, & mediam rationem, & segmenti maiori AC in directum est AH æqualis aggregato ex AE cum EH, vel cum EC, vel aggregato ex duabus AE cum AC, & duæ AE æquantur datæ AB, ex constructione, ergo AH æquatur aggregato ex data AB, & ex maiori segmento AC, segmentum verò minus BC sectum est vtcunque in O: ergo (per Lemma præcedens) rectangulum ABO cum HOC, vel cum sibi æquali quadrato semiordinatæ OR, in Hyperbola, æquale est quadrato reliqui segmenti OA: Quapropter

pter OR ordinata in Hyperbola PCQ poteſt differentiam inter rectangulum ABO, & quadratum OA: & hoc de alia ſimili quacunque ordinata &c. Quare concauum huiuſmodi Hyperbolæ eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

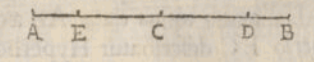
LEMMA VIII. PROP. LXVIII.

SI recta linea ſecta fuerit bifariam, & non bifariam, quadrata ſimul inæqualium partium totius æquantur quadrato ex datæ dimidio, vnà cum triplo quadrati ex interpoſito ſegmento, & cum rectangulo earundem partium inæqualium.

SIT data recta AB ſecta bifariam in C, & non bifariam in D. Dico quadrata ſimul partium inæqualium AD, DB æqualia eſſe quadrato ex AC totius dimidio, vnà cum triplo quadrati interiectæ partis CD, & cum rectangulo ADB ipſarum partium inæqualium,

Sumatur CE æqualis CD.

Quoniam enim EB ſecta eſt vtcunque in D, erunt duo quadrata partium EB, BD, vel duo ipſis æqualium AD, DB æqualia duobus rectangulis EBD cum quadrato ED, vel cum quatuor quadratis CD; ſed vnum ex rectangulis EBD cum vno ex quadrati CD æquale eſt quadrato CB, vel quadrato AC, ergo eadem duo quadrata AB, DB æquantur quadrato AC cum reliquo rectangulo EBD, vel ADB, & cum reliquis tribus quadratis CD. Quod &c.



PROPOSITIO LXIX.

LOcus *Ordinatarum potentium differentiam inter ſummam quadratorum partium integrantium datam, & rectangulum ſub ijſdem partibus, eſt ad conuexum Hyperbolæ, cuius centrum ſit punctum biſecans datam, axis verò tranſuerſus ſit eidem æqualis, ſed ſui recti lateris triplus.*

SIT AB data, quæ bifariam ſecetur in puncto C, ex quo ad ipſam AB erigatur perpendicularis CE dimidio totius AB æqualis, & cum centro C, per verticem E deſcribatur Hyperbola EF, cuius rectum latus ſubtriplum ſit ſuo tranſuerſo. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt ordinatam

dinatam quamcumque DF inter puncta C, B posse differentiam inter summam quadratorum AD, DB, & rectangulum ADB.

Ex centro C ducatur Asymptotos CG verticalem tangentem ad E secans in I, & ad alteram partem descripta opposita Sectione NL, ad eam producatur FD in L.



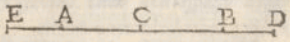
Iam, quum sit AB secta bifariam in C, & non bifariam in D, differentia quadratorum AD, DB super rectangulum ADB, erit quadratum AC cum triplo quadrati CD (per Lemma præcedens) sed quadratum AC æquatur CE (ob positam laterum æqualitatem) vel rectangulo LGF ipsi quadrato CE æquali, [a] & triplum quadrati CD est quadratum DG (nam quum positum sit semitransversum CE triplum sui semirecti, erit & quadratum CE triplum semiaxis coniugati EI, adeoque, & quadratum GD triplum quadrati DC, ob triangulorum similitudinem) ergo differentia inter quadrata simul AD, DB, & rectangulum ADB est rectangulum LGF vnà cum quadrato DG, hoc est vnicum quadratum DF: & hoc de singulis similibus ordinatis &c. Quare conuexum prædictæ Hyperbolæ est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 11. secundi Conic.

LEMMA. IX. PROP. LXX.

SI recta AB secta sit bifariam in C, eique addita in directum quædam BD. Dico quadratum AD ex data, & addita, cum quadrato additæ BD, æquale esse quadrato CD ex dimidia, & addita, vnà cum tribus quadratis AC ex eodem datæ dimidio, & cum rectangulo ADB sub data cum addita in additam.

EX producta CA sumatur AE æqualis additæ BD: quumque sit AC æqualis CB, erit tota EC æqualis CD, adeoque ED erit secta bifariam in C, & non bifariam in B; quare, per Lemma præcedentis, quadrata simul EB, BD æqualia erunt quadrato dimidiæ EC, cum tribus quadratis interpositi segmenti CB, vnà cum rectangulo EBD; sed duo EB, BD æquantur duobus AD, DB; & quadratum EC æquatur quadrato CD, & tria simul CB æquantur tribus simul AC, atque rectangulum EBD æquatur rectangulo ADB, ergo & duo quadrata AD, DB simul æqualia sunt quadrato CD, vnà cum tribus quadratis AC, & cum rectangulo ADB. Quod erat demonstrandum.

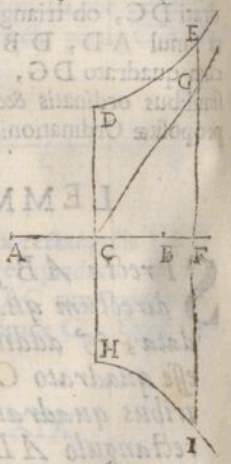


PRO-

PROPOSITIO LXXI.

LOcus Ordinatarum potentium differentiam inter ſummam quadratorum coadditarum datæ, & rectangulum ſub coadditis, eſt ad conuexum Hyperbolæ æquilateræ, cuius centrum ſit punctum biſecans datam, vertex verò ab eodem diſtet per ſemitranſuerſum axem potentem triplum quadrati ex ſemiſſe datæ.

SIT AB data linea, quæ biſecetur in puncto C, ex quo erigatur perpendicularis CD potens triplum quadrati AC, & cum centro C, & ſemiaxe tranſuerſo CD deſcribatur Hyperbola æquilatera DE. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum; hoc eſt, ſi in producta AB ſumptum ſit quodlibet punctum F pro occurſu coadditarum AF, FB, ordinatam FE poſſe differentiam inter ſummam quadratorum AF, FB, & rectangulum AFB.



Ducatur ex centro C Aſymptotos CG, quæ (quum Hyperbola ſit æquilatera) rectum angulum DCF bifariam ſecabit, adeoque in triangulo rectangulo CFG anguli ad C, G ſemirecti, nempe æquales erunt, adeoque latus CF lateri FG æquale, & quadratum quadrato. Deſcripta autem ad alteram partem alia ſectione HI ipſi DE oppoſita, & producta EF ad I, erit rectangulum IGE æquale [a] quadrato ſemidiametri tranſuerſæ CD, ergo quadratum FG vnà cum rectangulo IGE, nempe quadratum FE æquale eſt duobus ſimul quadratis CF, CD, ſed CD (ex Hypotheſi) triplum eſt quadrati CA, ergo quadratum FE æquale eſt quadrato CF cum tribus CA, ſed differentia inter quadrata AF, FB coadditarum, & rectangulum earundem AFB æqualis eſt quadrato CF cum tribus CA (per Lemma præcedens) ergo & quadratum FE eidem differentiæ inter quadrata coadditarum, & rectangulum earundem æquale erit: & hoc de ſingulis ſimilibus ordinatis &c. Quare conuexum huiuſmodi Hyperbolæ DE eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod ſit laus Deo, ac

[a] 11. ſecundi Conic.

LIBRI SECVNDI

FINIS.

V. D. I.

VINCENTII VIVIANI
DE LOCIS SOLIDIS
LIBER TERTIVS,

In quo *Loci* variarum disposition*um*
Limites assignantur.

PRæcedentes duos tantùm Libros Diuinationis *loco in-*
quinque deperditos ARISTÆI SENIORIS de Locis Soli-
dis *conscriptos, pro hac vice in lucem proferendos*
censuimus, tanquam præmittenda Elementa *ad abdi-*
tas, variasque in Mathesi contemplationes per suos di-
*stinctos Tractatus (*DEO *propitio) posthac edendos,*
nouis quibusdam aggressionibus promouendas. Vt verò
Lectoris animus (nimia fortasse molestia, ac tædio
affectus in perlegendis superioribus Elementis, *quæ obstinatè nimis in simi-*
lium rerum insquisitione versantur, & quorum vsus adhuc latet) nisi ab ele-
gantia demonstrandorum, à varietate saltem quodammodo reficiatur, præ-
senti proposito minimè destituto, ea tantummodo de Locis Solidis, *ac nonnul-*
la simul de Planis *(inter alia subseciuis temporibus a nobis per occasionem*
detecta) in binos hosce Libellos congerere placuit, quæ vel horum postremo,
vel nostris alijs lucubratiunculis aliquando peruulgandis nonnihil opitulan-
tur; ijs interea de Locis *prætermissis, quæ cùm susceptam* Elementorum
conscriptionem prosequi valeant, aliàs OMNIPOTENTIS *præsidio in medium*
afferre conabimur: nam, quod ad huius Diuinationis *attinet argumentum,*
atque insuper ad vniuersæ Matheseos (qualecunque sit) augumentum, paucula
quædam nobis, licet pusilla inuenta, adhuc remanent, dum validioribus in-
genijs maxima quidem supersunt, &, quod diu sensimus cum acutissimo Stoi-
corum,

MVLTVM ADHVC RESTAT OPERIS, MVLTVMQVE RESTA-
BIT, NEC VLLI NATO POST MILLE SÆCVLA PRÆCLVDETVR
OCCASIO ALIQVID ADHVC ADIICIENDI.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [241] - 49
PUBLIC DOMAIN

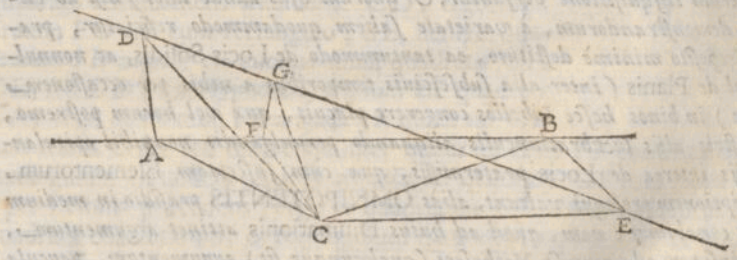
DE LOCIS SOLIDIS
LIBER TERTIVS.

PROPOSITIO I.

LOcus, quem attingunt vertices triangulorum similium, quorum baſes ab eodem dato puncto ad eandem rectam lineam extra ipſum datam pertingant, latera verò homologa ſint ſimiliter poſita, eſt Locus *Planus, videlicet ea recta linea, quæ vertices duorum tantùm quorumlibet huiuſmodi triangulorum coniungit.*

COnſtabit id ex ſui conuerſo ita expoſito, ac demonſtrato.

Ad eandem datam rectam AB, ex eodem extra dato puncto C perueniant vtcunque duæ rectæ CA, CB, quæ ſint baſes, vel latera homologa ſimilium triangulorum CDA, CEB ſimiliter poſitorum, ita nempe vt latus AD homologum ſit ipſi BE, & CD ipſi CE, vertices verò ipſorum triangulorum D, E, iungantur recta DE, atque ex C ad datam AB ducatur alia quæcunque recta CF, cum qua ad punctum C fiat an-



gulus FCG, æqualis alterutro angulorum ACD, BCE, iungaturque recta FG. Dico triangulum FCG eſſe ſimile, ſimiliterque poſitum datis.

Nam, quum triangula CDA, CEB ſint ſimilia, ex Hypotheſi, ſimiliterque poſita, erunt latera circum æquales angulos ad C, hoc ordine proportionalia, videlicet AC ad CD erit vt BC ad CE, & permutando AC ad CB vt DC ad CE, ſed anguli ACB, DCE ſunt æquales, quum ex æqualibus datis ACD, BCE, & ex communi dempto, vel addito ſint conſtituti, ergo triangula ACB, DCE inter ſe ſunt ſimilia, angulique

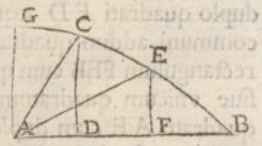
que homologis lateribus oppositi CAB, CDE æquales erunt; sed ijdem insunt quoque in triangulis CAF, CDG, in quibus, & anguli ACF, DCG sunt æquales (quum constent ex æqualibus positis ACD, FCG, & ex communi dempto, vel addito DCF) ergo & reliquus reliquo æqualis erit, adeoque triangula ACF, DCG sunt æquiangula, ac propterea AC ad CF, est vt DC ad CG, & permutando AC ad CD, vt FC ad CG, anguli verò ab ipsis comprehensi sunt æquales ex constructione, ergo triangulum ACD, adeoque & triangulum BCE, simile erit triangulo FCG; sed huius vertex G est in recta DE iungente vertices D, E, datorum triangulorum ACD, BCE: quare patet &c.

Hinc *Locus* verticum propositorum triangulorum, est recta qualem diximus. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

LOcus, ad quem conueniunt simul quotcunque linearum paria ACD, AEF, datæ lineæ terminatæ AB æqualia, quorum partes AC, AE ex eodem termino A datæ AB sint emissæ, reliquæ verò CD, EF, super eandem lineam AB normaliter inflectantur, est concauum Parabolæ GCEB, cuius focus sit A origo emissarum, semiordinata verò per focum sit ipsa data AB, quæ sit dupla axis AG.

PRo huius demonstratione adeas Scholium Propositionis vigesimæ sextæ *Libri Secundi* nostræ Diuinationis in Apollonium, in qua ostensum fuit aggregata simul ACD, AEF, æqualia esse semiordinatæ AB ex foco, ac duplo segmenti axis AG inter focum, ac verticem Parabolæ GB.



COROLL.

HInc haud difficilè constabit isoscelium triangulorum isoperimetrorum maximum esse æquilaterum. Nam triangula ACD, AEF sunt dimidia isoscelium, quorum altitudines sunt AD, AF; sed in hac semiparabola perimetri ACD, AEF sunt æquales, ergo & dupli, hoc est perimetri isoscelium æquales erunt; at in eadem, illorum maximum est semiæquilaterum, ergo inter isoscelia isoperimetra maximum est æquilaterum.

PROPOSITIO III.

LOcus, ad quem conueniunt paria linearum potentium ſimul quadrata æqualia quadrato vnius datæ lineæ, è cuius altero eodem termino parium partes ſint emiſſæ, reliquæ verò ſuper datam normaliter inflectantur, eſt concauum Ellipſis, cuius ſemiaxis maior ſit ipſa data linea, minor verò poſſit maioris ſubduplum.

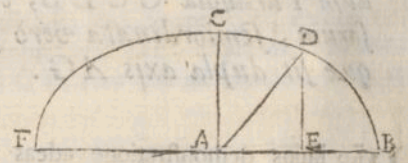
PAtebit hoc ex ſui conuerſo, ſic propoſito, ac demonſtrato.

Eſto data linea AB, cui ex termino A ſit perpendicularis AC potens ſubduplum quadrati AB, & cum ſemiaxibus AB, AC ſit deſcriptus Ellipſis quadrans BDC, ex centro verò A ſit ad peripheriam ducta quælibet AD, atque ex D perpendicularis DE. Dico par quadratorum AD, DE, vnico quadrato datæ AB æquale eſſe.

Compleatur ſemiellipſis BDCF.

Iam, rectangulum FAB, vel quadratum AB ad quadratum AC eſt vt [a] rectangulum FEB ad quadratum ED; ſed quadratum AB æquale eſt duplo quadrati AC, ex hypotheſi, ergo & rectangulum FEB duplo quadrati ED æquale eſt, & communi addito quadrato AE, erit rectangulum FEB cum quadrato AE, ſiue vnicum quadratum AB, æquale quadrato AE cum duplo quadrati ED, ſiue æquale quadrato AD cum DE, & ſic de quibuſcunque ſimilibus linearum paribus &c. Quod &c.

[a] 21. primi Conic.



Hinc *Locus*, ad quem conueniunt ſuperiora linearum paria potentia &c. eſt concauum propoſitæ Ellipſis. Quod erat &c.

COROLL.

COnſtabit quoque inter triangula rectangula, quorum aggregata quadratorum baſis, & vnius laterum ſint æqualia, maximum eſſe id, cuius baſis, qualis AD, poſſit triplum lateris, qualis DE.

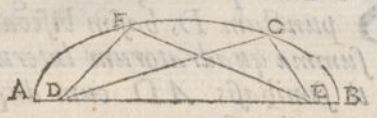
PRO-

PROPOSITIO IV.

LOcus, ad quem simul conueniunt quotcunque linearum paria DFE, DCE, datæ rectæ terminatæ AB æqualia, & ex ijsdem emissa punctis D, E, est concauum Ellipsis AFCB, cuius foci sint puncta emissionum D, E, axis verò maior sit ipsa data AB.

HVius Theoriam habes ex conuerso Propositionis lij. tertij Conicorum. Praxis verò familiarissima iam est ipsis quoque Cæmentarijs, vel etiam Fabris lignarijs, nè dicam Architectis.

Hoc autem idem est, ac si dicas, *Locum*, quem attingunt vertices Isoperimetrorum triangulorum super eadem basi constitutorum esse ad Ellipsis peripheriam, cuius foci sint basis termini, maior verò axis aggregato laterum sit æqualis,



COROLL.

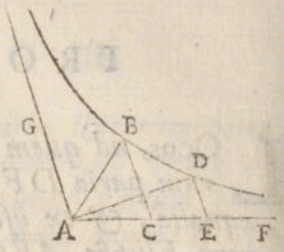
HInc triangulorum isoperimetrorum super eadem basi constitutorum maximum est æquicrure,

PROPOSITIO V.

LOcus, quem attingunt vertices B, D &c. quotcunque æqualium triangulorum ABC, ADE &c. quorum latera AB, AD, ex eodem puncto A datæ lineæ AF sint emissa, reliqua verò BC, DE, ad ipsam datam AF terminantia interse æquidistent, est ad concauum Hyperbolæ, cuius centrum sit A punctum emissionis, altera ex Asymptotis sit ipsa data AF, reliqua autem sit AG æquidistantibus lateribus BC, DE parallela.

Hoc

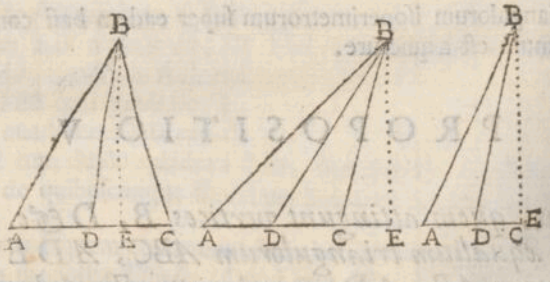
HOc pariter facilè conſtat ex conuerſo Propoſitionis xij. Secundi Conicorum. Quum enim triangula ABC, ADE ſint æqualia, habeantque æquales angulos ad C, E, externus nempe interno parallelarum, latera circa ipſos reciprocantur, nempe AC ad AE eſt vt ED ad CB; rectangulum igitur ACB æquatur rectangulo AED: Quare vertices B, D, ſunt ad Hyperbolam qualem diximus. Quod erat &c.



LEMMA. I. PROP. VI.

SI dato quocunque triangulo ABC, à vertice B ad punctum D, baſim biſecans AC, ducta ſit recta BD: ſumma quadratorum laterum AB, BC, duplo quadrati ſemibaſis AD cum duplo quadrati iungentis BD æqualis eſt.

PRO huius demonſtratione conſulas Serenum ad Propoſitionem xvj. Libri Secundi de Sectione Coni; vel potius Pappum Alexandrinum ad Propoſitionem cxxij. Libri ſeptimi ſuarum Collectionum; vel Franciſcum à Schooten ad xviij. ſuarum Geometricarum Propoſitionum.



At ſi hos modò adire te piget, ſequentem accipe, ab vnaquaque ipſorum diuerſam, à me iamdiù in gratiam proximæ ſic oſtenſam.

Si igitur triangulum ABC fuerit æquicrure, tunc anguli ad D recti, nempe æquales erunt, & propoſitum ſatis apparebit ex xxxxvij. primi Elementorum.

At ſi latera BA, BC ſint inæqualia, & anguli ad D (vt facilè conſtat ex xxiv. primi Elementorum) inæquales erunt. Sit ergo ADB obtuſus: quare BE, quæ ex vertice B ducitur ad baſim AC perpendicularis, cadet

ad

ad partem anguli acuti BDC, vel intra baſim AC, vel extra, vel in ipſum punctum C.

Quicunque tamen ſit caſus, in triangulo obtuſangulo ADB, quadratum lateris AB excedit quadrata ſimul AD, DB duplo rectanguli ADE, & in triangulo acutangulo BDC, quadratum lateris BC deficit a quadratis CD, DB (ijſdem AD, DB, æqualibus) per duplum rectanguli CDE, vel per idem duplum ADE (quum AD, CD ſint æquales) quare duo ſimul quadrata AB, BC æqualia ſunt quatuor ſimul quadratis AD, DB, CD, DB: nimirum duobus AD cum duobus DB. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

LOcus, *ad quem conueniunt quotcunque paria linearum potentium ſimul quadrata æqualia, atque ex terminis eiuſdem datæ rectæ emiſſarum, eſt* Locus *planus, nempe concauum Circuli peripheriæ.*

HOc neceſſariò ſequitur ex ſui conuerſo, ita propoſito, ac demonſtrato.

Si in ſemicirculi ABC diametro AC, intra, vel extra, ſumpta fuerint duo puncta E, F, a centro D æqualiter vtrinque diſtantia, & ad peripheriam ABC, cuius vertex B, ductæ ſint quotlibet linearum paria EB, BF; EG, GF &c. Dico horum quadrata inter ſe æqualia eſſe.



Facilè id patet ex præcedenti Lemmate. Nam iunctis radijs DB, DG, oſtenſum eſt in triangulis EBF, EGF (in quibus a puncto D baſim EF biſecante ad eorum vertices B, G, ductæ ſunt lineæ DB, DG) duo quadrata ſimul laterum EB, BF æqualia eſſe duplo quadrati ED cum duplo quadrati DB: eademque ratione duo ſimul quadrata laterum EG, GF æquari duplo eiuſdem quadrati ED cum duplo DG, ſed duo ED cum duobus DB æquantur duobus ED cum duobus DG (quum DB, DG ſint æqualia) ergo & duo EB, BF duobus EG, GF æqualia ſunt.

Hinc

Hinc *Locus* earundem potentium eſt ad concauum peripheriæ Circuli ABC, vti proponebatur. Quod erat &c.

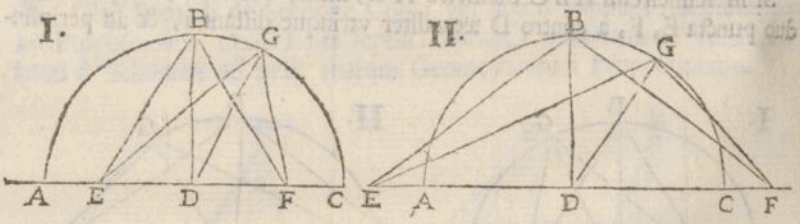
COROLL.

APparet ex hac, triangulorum ſuper eadem baſi, quorum aggregata quadratorum laterum omnium ſint æqualia, maximum eſſe æquicrure.

SCHOLIVM.

NON eſt autem prætereundum quodlibet horum quadratorum par æquale eſſe quadratis ſimul partium diametri AF, FC, vel integrantium, vt in prima figura; vel coadditarum, vt in ſecunda.

Nam in prima, in qua AC ſecta eſt bifariam in D, & non bifariam in F, quadrata ſimul inæqualium AF, FC æquantur duplo quadrati AD, ſiue duplo quadrati DG cum duobus DF, quibus omnibus, & duo EG, GF, ex dictis, ſunt æqualia, ergo & AF, FC ſimul, quadratis ſimul EG, HF, vel EB, BF ſimul, ſunt æqualia.



In ſecunda verò figura eſt AC ſecta bifariam in D, cui eſt addita in directum CF, ergo duo ſimul quadrata AF, FC, vel duo EC, CF æquantur duplo quadrati AD, vel DG cum duplo quadrati DF, quibus ſimul & quadrata EG, GF ſunt æqualia; ergo & quadrata AF, FC quadratis EG, GF, vel EB, BF æqualia ſunt. Quod erat &c.

Si tandem ſemibaſes DE, DF æquales fuerint ipſis iunctis DB, DG, vel radijs ſemicirculi DA, DC, tunc altera diametri pars in ipſam tantùm diametrum AC transformabitur, & reliqua in punctum abibit, quo in caſu manifeſtè patet quadrata ſimul EG, GF, vel EB, BF, in ſemicirculo, vnico diametri quadrato AC æqualia eſſe. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

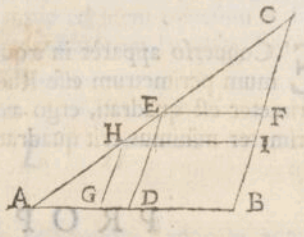
PROPOSITIO VIII.

LOcus, quem in iſoperimetris parallelogrammis æquiangulis ad communem angulum conſtitutis, attingunt ipſorum anguli communi angulo oppoſiti, eſt Locus *planus, nempe recta linea, quæ ſit baſis trianguli æquicruris, cuius æqualium laterum ſumma æqualis ſit perimetro vnius ex parallelogrammis.*

ID illico manifeſtum fit ex ſui conuerſo, vt ſequitur.

Eſto triangulum quodcunque æquicrure A B C, cui in eodem angulo B *inſcripta ſint quotlibet* parallelogramma B E, B H. Dico horum perimetros, & inter ſe, & ſummæ laterum A B, B C æquales eſſe.

Quum ſit enim B C æqualis B A, erit etiam G H æqualis G A, & D E æqualis D A: quare duo ſimul B G, G H æquantur lateri B A, pariterque duo ſimul B D, D E eidem lateri B A, & ſumptis omnium duplis, perimeter parallelogrammi B H æqualis erit duplo ipſius lateris B A, nempe æqualis duobus ſimul A B, B C: ac ſimiliter perimeter parallelogrami B E æqualis duobus ſimul iiſdem A B, B C. Quod erat &c.



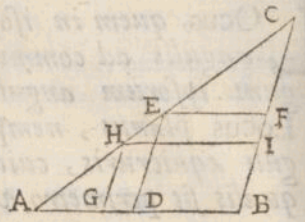
Hinc *Locus*, quem in expoſitis parallelogrammis iſoperimetris attingunt anguli communi angulo oppoſiti, eſt *Locus* planus, qualis propoſitus fuerat.

Ex hac ſtatim oſtendenda ſe præbet ſequens

PROPOSITIO IX.

ISoperimetrorum parallelogrammorum quorumlibet maximum eſt quadratum.

NAM, in eadem figura, si concipiatur in æquicruri triangulo ABC angulum E parallelogrammi BE attingere punctum bisecans basim AC, constat id esse maximum eidem triangulo inscriptibilium, quod vtique verum est etiam si triangulum ABC non fuerit æquicrure, sed vtcunque datum. Et quum in eodem triangulo æquicruri huiusmodi inscriptorum parallelogrammorum vnicum BE sit Rhombus, reliqua verò Rhomboides, patet, quod inter parallelogramma æquiangula isoperimetra maximum erit Rhombus, ac propterea inter parallelogramma rectangula isoperimetra maximum erit quadratum: sed quadratum maius est Rhombo sibi æquilatero, quum illud maiorem habeat altitudinem, & basim basi æqualem, ergo ex parallelogrammis isoperimetris maximum est quadratum.



COROLL.

E' Conuerso apparet in æqualibus parallelogrammis æquiangulis minimum perimetrum esse Rhombi; sed in æqualibus Rhombis minimus perimeter est quadrati, ergo æqualium quorumlibet parallelogrammorum perimeter minimus erit quadrati.

PROPOSITIO X.

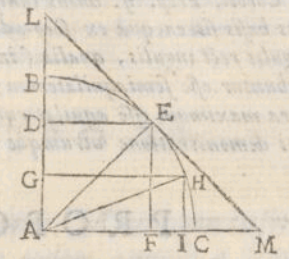
LOcus, *quem in parallelogrammis rectangulis ad communem angulum constitutis, & quorum aggregata quadratorum laterum sint æqualia attingunt eorundem anguli communi oppositi, est* Locus *planus, nempe quadrantis Circuli peripheria, cuius radius possit subduplum summæ quadratorum laterum vnius ex parallelogrammis.*

MAnifestabitur hoc ex sui conuerso vnicuique satis obuio.

Nam si Circuli quadranti ABC, cuius centrum A inscripta fuerint rectangula quotcunque AE, AH, erunt summæ quadratorum laterum eorundem inter se & duplo quadrati radi AC æquales.

Iunctis

Iunctis etenim diagonalibus, seu radijs AE, AH, quorumlibet horum quadrata bis sumpta æquantur aggregatis quadratorum laterum omnium (quum quadratum AE æquale sit duobus AF, FE, & idem AE duobus AD, DE &c.) sed ipsa quadrata AE, AH sunt æqualia, ergo & aggregata quadratorum laterum eorundem rectangulorum sunt æqualia. Quod erat &c.



Hinc *Locus*, quem attingunt anguli expositorum rectangulorum communi angulo oppositi, est *Locus* planus qualis propositus fuerat.

COROLL. I.

Elicitur ex hac *Locum*, quem attingunt anguli triangulorum rectangulorum, qualia sunt AFE, AIH; æquales bases habentium, & quorum latera AI, AF sibi mutuò congruant, atque ad idem punctum A sint composita, quorumque omnium aggregata quadratorum laterum sint æqualia, esse ad quadrantis Circuli peripheriam.

COROLL. II.

Colligitur præterea in parallelogrammis rectangulis, quorum aggregata quadratorum laterum sint æqualia, maximum esse quadratum, quale concipiatur esse ADEF, quod quadranti ABC inscriptum, maximum est singulorum inscriptibilium, quippe quod recta peripheriam contingens ad E, vt puta LM, bifariam secetur in E, & parallelogrammum ADE, hoc est quadratum AE sit rectangulorum maximum ipsi triangulo inscriptibilium, adeoque multò maius quocunque rectangulo eidem quadranti inscriptibili.

COROLL. III.

Colligitur demum in triangulis rectangulis super æquales bases, & quorum aggregata quadratorum laterum æqualia sint, videlicet AFE, AIH, maximum esse æquicrure AFE, quum eadem sit ratio inter dimidia, ac inter tota.

In Coroll. Prop. ij. huius tanquam notum assumpsimus in semiparabola (cuius basis sit ea, quæ ex foco ad axem ordinatim applicatur) maximum ex triangulis rectangulis, qualia (in figura, quæ ibi conspicitur) semiparabolæ inscribuntur esse semiæquilaterum; atque inde collegimus inter isoscelia isoperimetra maximum esse æquilaterum: sed ne illud gratis assertum videatur sequenti demonstratione vtrumque confirmabimus.

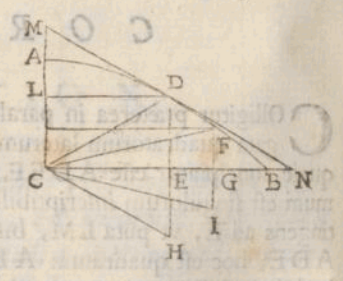
PROPOSITIO XI.

Isoscelium triangulorum isoperimetrorum maximum est æquilaterum.

SInt quotcunque triangula CDH, CFI &c. æquicrura inter se, atque isoperimetra, & quorum CDH sit æquilaterum, dico id esse omnium maximum.

Concipiantur ipsa ita simul disposita, vt anguli basibus oppositi in idem punctum C coeant, & perpendiculares CE, CG sibi mutuò congruant.

a 2. huius, Iam constat [a] *Locum*, ad quem conueniunt ipsorum triangulorum æquales semiperimetri CDE, CFG esse ad quandam Parabolam AB, cuius focus sit ipsum punctum C, semiordinata sit CB æqualis aggregato vnius ex perimetris CDE, CFG &c. axis verò CA sit dimidium ipsius CB.



Et quoniam ponitur CDH æquilaterum, erit latus CD duplum DE, & duo simul CDE tripla ipsius DE, sed eadem duo simul CDE æqualia sunt ipsi CB, ex nuper monitis, ergo CB tripla est ED, vel CL, sed eadem CB dupla est CA, ergo CA sesquialtera est ipsius CL, nempe CL dupla LA: quapropter recta MN, quæ ex D contingit Parabolam [b] abscindet ex axe AM æqualem, ipsi AL, eritque ML æqualis LC, atque ideo MD æqualis DN; & idcirco rectangulum CED inscriptum triangulo MCN erit maximum ipsi triangulo inscriptibilium, ac propterea eò ampliùs maximum rectangulorum ipsi semiparabolæ inscriptibilium, siue maius rectangulo CGF, vel alio quocunque similiter inscripto; sed ipsa rectangula CED, CGF &c. æqualia sunt ipsis datis triangulis æquicruribus, & Isoperimetris CDH, CFI; & CDH est æquilaterum, ergo æquicrurium triangulorum isoperimetrorum maximum est æquilaterum CDH; & triangulum rectangulum CED, hoc est semiæquilaterum est eidem Parabolæ inscriptibilium maximum. Quod erat &c.

b ex 33. primi Conic.

Ad

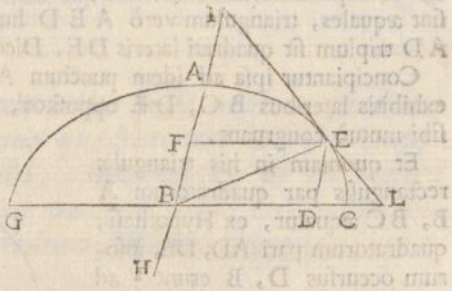
Ad dilucidandum quoque Corollarium Propositionis tertiæ huius, binæ sequentes Propositiones addere non erit incongruum, & ex abundanti idem Corollarium peculiari demonstratione comprobare.

PROPOSITIO XII.

IN Circuli & Ellipsis quadrante. Maximum inscriptorum parallelogrammorum in eodem angulo a semidiametris facto constitutorum, id est, cuius vtrunque latus possit dimidium quadratorum ex semidiametris, quibus ipsa latera adhærent.

ESTO Circuli, vel Ellipsis quadrans ABC, cuius centrum B, semidiametri verò BA, BC, qua secta in D, ita vt quadratum CB duplum sit quadrati BD, ordinataque DE ipsi AB parallela compleatur parallelogrammum BE. Dico id esse huiusmodi inscriptorum maximum.

Producantur semidiametri ad alteram partem in BG, BH, atque ex E agatur contingens IL productis diametris occurrens in I, L.



Iam, quum ex Hypothesi quadratum CB duplum sit quadrati BD erit rectangulum GDC æquale quadrato BD, sed ipsi GDC æquatur [a] rectangulum LDB ob tangentem IL, atque ex primo Conicorum ergo & rectangulum LDB quadrato BD æquale est, nempe LD, DB sunt æquales, adeoque, & LE, EI æquales, quare parallelogrammum BE est maximum inscriptibilium triangulo BIL; ac ideo eò ampliùs parallelogrammum BE erit maximum inscriptibilium quadranti Circuli, vel Ellipsis ABC. Quod erat demonstrandum.

[a] ex 21. & 37. primi Conic.

Quod autem, dum radius BC potest duplum quadrati BD, alter quoque radius AB possit duplum quadrati lateris BF, vt in superiori propositione expositum fuit, constabit ex hoc, quod quadratum AB ad DE, vel ad BF est vt rectangulum GBC, vel vt quadratum BC ad rectangulum GDC; sed quadratum BC duplum est rectanguli GDC (eò quod æquale sit quadrato BD cum rectangulo GDC, sitque insuper quadratum CB duplum BD) ergo & quadratum AB duplum erit quadrato AF.

CO-

COROLL.

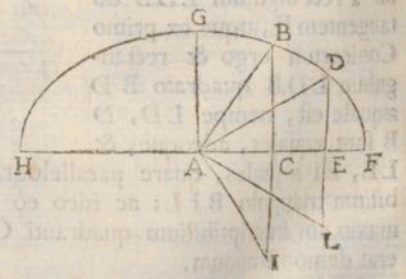
EX dictis patet, quod iuncta diagonali BE, quum sit duplum ad duplum, vt dimidium ad dimidium, erit quoque triangulum BDE maximum huiusmodi triangulorum Circuli, vel Ellipsis quadranti inscriptibilium, & quorum anguli, & latera cum centro B, & ratio BC simul cohaerent.

PROPOSITIO XIII.

TRiangulorum rectangulorum, quorum aggregata quadratorum basis, ac vnius laterum sint æqualia maximum id est, cuius basis possit triplum quadrati vnius laterum.

SINT quotcunque triangula rectangula ACB, AED &c. quorum summæ quadratorum AB, BC, & AD, DE &c. basium, & laterum sint æquales, triangulum verò AED huiusmodi sit, vt quadratum basis AD triplum sit quadrati lateris DE. Dico id omnium esse maximum.

Concipiantur ipsa ad idem punctum A simul composita per angulos exhibitis lateribus BC, DE oppositos, ita vt reliqua latera AC, AE sibi mutuò congruant.



Et quoniam in his triangulis rectangulis par quadratorum AB, BC æquatur, ex Hypothesi, quadratorum pari AD, DE, ipsorum occursus D, B erunt [a] ad *Locum* cuiusdam semiellipsis FGH cuius maioris semiaxis AF quadratum possit duplum quadrati semiaxis minoris AG.

[a] 3. huius.

Insuper, quoniam, ex suppositione, est quadratum AD triplum DE, idemque est æquale duobus AE, ED erit quadratum AE duplum ED.

Et quia rectangulum HEF ad quadratum ED est vt rectangulum HAF, vel vt quadratum AF ad quadratum AG, duplum autem est AF ipsius quadrati AG, ergo & rectangulum HEF duplum est quadrati ED, cuius nuper ostensum est duplum esse quadratum AE, ergo rectangulum HEF æquale est quadrato AE; hoc est quadratum semiaxis AF duplum quadrati lateris AE: quapropter triangulum ADE erit maximum *simili*

ratione

ratione inscriptibilium quadranti G A F, atque ideo maius quocunque alio triangulo rectangulo A C B: sed triangulum rectangulum A D E basim habet A D potentem triplum quadrati lateris D E, ex Hypothesi, ergo idem A E D maximum est huiusmodi triangulorum rectangulorum, in quibus aggregata quadratorum basis, & vnius laterum sint æqualia. Quod ostendere propositum fuerat.

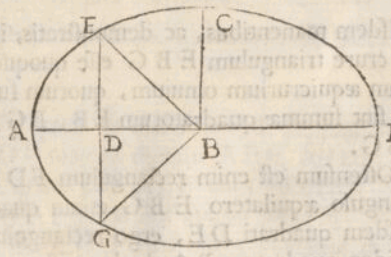
PROPOSITIO XIV.

LOcus, quem attingunt termini basium isosceliũm triangulorum, quæ ad angulos basibus oppositas sint compositæ, & quorum aggregata quadratorum laterum sint æqualia, est ad concauum Ellipsis, cuius centrum sit in ipso communi vertice angulorum, & semiaxis maior triangulorum axibus congruens possit triplum quadrati semiaxis minoris.

EX demonstratione sui conuersi ita expositi, ac demonstrati satis apparebit propositum.

IN Ellipsi, cuius semiaxis maior possit triplum quadrati semiaxis minoris, summa quadratorum laterum cuiuscunque trianguli isosceli, cuius vertex sit in centro Ellipsis, basis verò sit ad maiorem axem ordinatim ducta, æquatur duplo quadrati semiaxis maioris.

ESTO Ellipsis A E F G, cuius centrum B & semiaxis maior B A, potens triplum quadrati semiaxis minoris B C, applicataque ad B A quacunque E G, iunctisque radijs B E, B G triangulum æquicrure E B G constituentibus. Dico summam quadratorum laterum E B, B G, G E duplo quadrati B A æquale esse.



Est enim vt rectangulum F B A ad quadratum B C, ita a rectangulum F D A ad quadratum D E, sed rectangulum F B A, vel quadratum B A triplum est quadrati B C, ex Hypothesi, ergo & rectangulum F D A triplum est quadrati D E, & ad-

a 21. primi Conic.

& addito communi quadrato DB, erit rectangulum ADF cum quadrato DB, vel vnicum quadratum AB æquale tribus DE cum vno DB, hoc eſt duobus DE cum vnico EB. Eadem ratione & quadratum AB æquale oſtenditur duobus DE cum vnico GB: quare duo quadrata AB æquantur duobus ED cum duobus DG, vel vnico tantùm EG cum quadratis EB, BG. Et hoc ſemper de quolibet huiuſmodi triangulo æquicruri. Quare patet propoſitum.



Hinc liquidò conſtat *Locum* baſium æquicrurium triangulorum ſuperiùs expoſitorum eſſe ad concauum Ellipſis qualem propoſueramus. Quod &c.

COROLL.

HInc eruitur in Ellipſi, cuius axis maior poſſit triplum quadrati axis minoris, aggregata quadratorum laterum iſoſcelium triangulorum, quorum vertices ſint in centro, baſes verò ad maiorem axem ſint ordinatim ductæ, inter ſe æqualia eſſe.

Ex ſuperiori demonſtratione pendet ſequens

PROPOSITIO XV.

ÆQuicrurium triangulorum, quorum aggregata quadratorum laterum ſint æqualia, maximum eſt æquilaterum.

IIſdem manentibus, ac demonſtratis, in præcedenti figura ponatur æquicrure triangulum EBG eſſe quoque æquilaterum. Dico id eſſe maximum æquicrurium omnium, quorum ſummæ quadratorum laterum æquales ſint ſummæ quadratorum EB, BG, GE, laterum trianguli æquilateri EBG.

Oſtenſum eſt enim rectangulum FDA triplum quadrati DE, ſed in triangulo æquilatero EBG etiam quadratum altitudinis BD triplum eſt eiuſdem quadrati DE, ergo rectangulum FDA æquatur quadrato BD, ac ideo quadratum BA duplum eſt quadrati BD, quapropter triangulum

BED

BED in Ellipſis quadrante ABC erit [a] maximum, & ſumptis omnium duplis, triangulum EBG erit eorundem duplorum maximum, ſed horum omnium huic Ellipſi inſcriptibilium aggregata quadratorum laterum ſunt æqualia [b] & triangulum EBG ponitur æquilaterum, ergo æquicrurium triangulorum, quorum aggregata quadratorum laterum ſint æqualia maximum eſt æquilaterum. Quod erat &c.

[a] 12. huius.

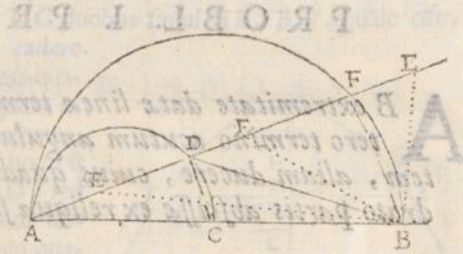
[b] Corollar. 12. huius.

PROPOSITIO XVI.

LOcus, ad quem perueniunt vertices triangulorum eandem baſem habentium, & quorum ſummæ quadratorum laterum ſint quantitates minimæ, vt in expoſitione explicabitur, eſt Locus *planus, nimirum peripheria ſemicirculi ſuper dimidium datæ deſcripti.*

COnſtabit hoc ex ſui conuerſo ita propoſito, ac demonſtrato.

Sit AB data linea ſecta bifariam in C, & ſuper alteram partium, videlicet AC, ſit ſemicirculus ADC, ex termino verò A occurſu datæ AB cum parte AC ducta ſit quæcunque recta ADE acutum angulum quemlibet cum data AB conſtituens, ac ſecans peripheriam ADC in D. Dico, ſi iungatur BD, quadrata ſimul rectarum AD, DB minimam quantitatem efficere: hoc eſt, ſi in eadem ſecante ADE, licet quantumuis producta, ſumatur quodcunque punctum E, par quadratorum AD, DB minus eſſe quadratorum pari AE, EB.



Super data AB fiat ſemicirculus AFB ductam AD ſecans in F, iunganturque BF, CD. Erunt ergo anguli ADC, AFB in ſemicirculis recti: quare DC, FB interſe æquidiſtant, ac propterea quum ſit AC æqualis CB, & AD ipſi DF æqualis erit: quare ſi ſumptum punctum E ſit in ipſa AF; quum ſit AF ſecta bifariam in D, erit rectangulum ADF maius AEF (quum ſit maximum) & duplum duplo maius, hoc eſt duo rectangula ADF maiora duobus AEF, ſed tam duo ADF cum quadratis AD, DB, quàm duo AEF cum quadratis AE, EB eidem quadrato AB ſunt æqualia (quum ſint anguli ADB, AEF obtuſi, & BF perpendicularis ad ADE) ergo duo rectangula ADF cum quadratis AD, DB æquantur duobus rectangulis AEF cum quadratis AE, EB, ſed duo rectangula ADF maiora ſunt duobus AEF,

vt ſupra oſtenſum fuit, ergo reliqua ſimul quadrata AD, DB minora ſunt reliquis AE, EB, & hoc ſemper: ergo quadratorum par AD, DB minus eſt pari quadratorum AE, EB, ſed hæc AE, EB ſimul, minora ſunt quadratis ſimul AF, FB, ſiue vnico AB, quum ab hoc deficiant per duplum rectanguli AEF, ergo & idem par quadratorum AD, DB eò minus eſt quadratorum pari AF, FB.

Si denique punctum E fuerit in producta AF extra Circulum. Iam conſtat quadrata ſimul AE, EB maiora eſſe quadratis ſimul AF, FB (quum illa à maioribus lateribus contineantur) at hæc AF, FB maiora ſunt duobus AD, DB (vt nuper demonſtrauimus) ergo quadrata AE, EB extra Circulum AFB terminantia, eò maiora ſunt quadratis laterum AD, DB ad peripheriam interiorem terminantium, & hoc ſemper, ideoque par quadratorum laterum AD, DB eſt minima quantitas quorumlibet parium quadratorum laterum occurrentium ad ductam rectam ADE. Idem pariter demonſtrabitur de quibuſcunque alijs quadratorum paribus laterum occurrentium ad quamlibet aliam rectam præter ADE &c. ergo ad huius ſemicirculi ADC peripheriam conueniunt ſimul paria linearum potentium ipſas minimas quantitates, adeoque peripheria ADC eſt *Locus* propoſitus. Quod erat &c.



Facilè hinc ſoluitur ſequens.

PROBL. I. PROP. XVII.

AB extremitate datæ lineæ terminatæ ad rectam ex altero termino acutum angulum cum data conſtituentem, aliam ducere, cuius quadratum, ſimul cum quadrato partis abſciſſæ ex reliqua ſit minima quantitas.

IN ſuperiori figura ſi fuerit data recta AB, & datus acutus angulus BAE, oporteatque ex B ad AE ducere quandam BD, cuius quadratum cum quadrato abſciſſæ DA ſit minimum quadratorum par; ſufficiet ex B ſuper AE perpendicularem demittere BF, abſciſſamque AF bifariam ſecare in D, nam punctum hoc quæſitum ſoluet: hoc eſt iuncta DB, quadrata ſimul AD, DB minimam quantitatem efficient, prout ex oſtenſis apparet,

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

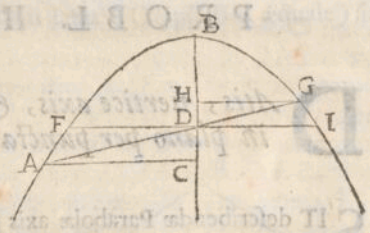
LOcus ſubtenſarum ex eodem termino datæ rectæ terminatæ vſque ad normales ordinatas ad datam lineam, ſiue ad productam ad partes ſumpti termini, & potentium ſummam duorum quadratorum, alterum ex data, alterum ex huius parte aſſumpta inter propriam ordinatam, & reliquum datæ terminum, eſt ad concauum Parabolæ, cuius axis vertex ſit hic idem terminus, rectum verò latus ſit duplum datæ.

ID quod neceſſariò conſtabit, dum ipſius conuerſum demonſtrandum proponatur vt ſequitur.

IN Parabola. Quadratum rami ducti ab origine ſumpta in termino ſemirecti lateris ab axis vertice ſuper axem extenſi, æquatur quadrato ſegmenti axis inter ordinatam per rami terminum, & verticem intercepti, vnà cum quadrato ſemirecti eiuſdem.

ESTO Parabola AB, cuius axis BC, vertex B, & ſemirectum latus BD, ſitque ex D ramus quicunque DA, vel DG, ex terminis verò A, G ſint ordinatæ ad axem AC, GH. Dico quadratum DA duobus ſimul CB, BD, & quadratum DG duobus ſimul HB, BD æquale eſſe.

Ponatur primò ramum DA cadere infra ordinatam FDI. Erit ergo quadratum ſemiordinatæ AC æquale [a] rectangulo ſub CB in latus rectum, nempe in duplum ipſius BD, hoc eſt duplo rectanguli ſub CB in BD, ſed duplum ſub CB in BD æquatur duplo ſub CD in DB cum duplo quadrati DB, ergo & quadratum AC duplo rectanguli ſub CD in DB cum duplo quadrati DB æquale eſt, & addito communi quadrato DC, erunt duo ſimul quadrata AC, CD, vel vnicum quadratum rami DA æquale duplo rectanguli CDB cum duplo quadrati DB, & cum quadrato CD, ſed duplum rectanguli CDB cum quadratis BD, DC æquatur vnico quadrato CB, ergo quadratum ra-

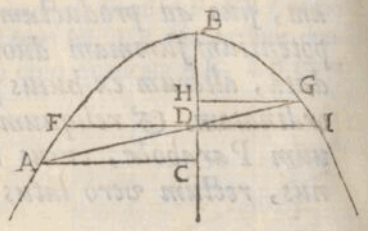


[a] 11. primi Conic.

mi DA æquale eſt quadrato ſegmenti CB abſciſſi ex axe ab ordinatim ducta AC, cum reliquo quadrato BD ſemirecti lateris. Quod primò oſtendendum erat.

Sit modò ramus DG ſupra ordinatam FI, & concipiatur GD productus ad alteram partem vſque ad Parabolam in A, & ex G, D, A, ordinentur ad axem, quæ in figura. Erit ergo recta CB ad BH a vt quadratum AC ad GH, vel vt quadratum CD ad DH (in ſimilibus triangulis ADC, GDH) quare tres CB, DB, HB ſunt in eadem ratione continua, ſicut, & ipſarum differentiæ CD, DH. Quamobrem quadratum CB ad BD eſt vt quadratum DB ad BH, & vt quadratum CD ad DH, & duo ſimul CB, BD ad duo ſimul DB, BH, vt vnum CD ad vnum DH, vel vt vnum DA ad vnum DG; ſed permutando duo ſimul CB, BD æqualia ſuperiùs demonſtrata ſunt vnico quadrato rami DA infra ordinatam FDI, ergo & duo ſimul DB, BH, quadrato rami DG ſupra eandem ordinatam ſunt æqualia. Quod ſecundò erat demonſtrandum.

a 20. primi Conic.



Inſuper & quadratum rami DF ordinatim ducti æquatur rectangulo ſub DB in DE rectum latus, ſed eſt DB dimidium DE, ergo idem quadratum DF æquatur duobus quadratis DB, hoc eſt quadrato ſegmenti axis DB cum quadrato ſemirecti DB. Quod ſupererat demonſtrandum.

Hinc *Locus* prædictarum potentium eſt ad concauum Parabolæ propoſitæ &c.

Ex hac ſe ſe offert methodus ſoluendi ſequens

PROBL. II. PROP. XIX.

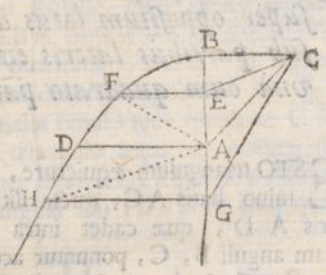
Datis, vertice axis, & ſemirecto latere, Parabolam in plano per puncta deſcribere.

SIT deſcribendæ Parabolæ axis AB, vertex B, & ſemirectum latus ſit BA, oportet ipſam Parabolam tutò, ac promptè in plano per puncta deſcribere.

Erigatur ex B ipſi BA perpendicularis, & æqualis BC, ducanturque ad axem quotcunque ordinatæ AD, EF, GH &c. & iunctis ſubtenſis CA, CE, CG &c. ex A termino ſemirecti tranſuerſim applicentur ipſæ diagonales vſque ad proprias ordinatas: nempe CG in AH, CA in AD, CE in

CE in AF, & CB in AB (nam CB incidet in punctum B, quum ipsæ CB, AB sint æquales ex constructione) & puncta H, D, F, B erunt ad *Locum* describendæ Parabolæ, hoc est cuius vertex erit B, & semirectum BA. Quod ex ipsa constructione, atque ex conuerso superioris demonstrationis & per XLVII. primi Elementorum satis constat.

At si triangulum rectangulum ABC non fuerit æquicrure, sed tamen facta simili constructione, ac in præcedenti, punctum C fiat polus subtensarum, A verò polus transuersalium: his non obstantibus. Dico transuersarum terminos esse ad *Locum* concauum Parabolæ, cuius rectum latus axis duplum sit datæ AB, vertex verò axis eiusdem sit in eadem recta AB, qui est vertex trianguli æquicruris super basim primæ subtensæ CA descripti. Quod sequentibus demonstrabitur, duobus præmissis Lemmatibus.

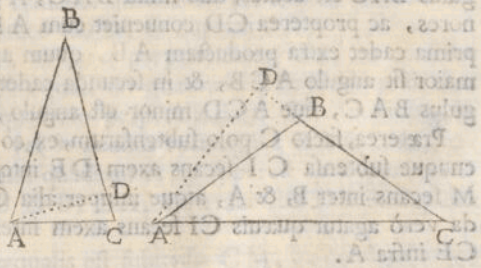


LEMMA II. PROP. XX.

IN quocunque triangulo æquicruri. Quadratum basis æquatur duplo rectanguli sub vno laterum in segmentum eiusdem inter basim, & perpendicularem super idem latus ductam ab extremitate reliqui lateris interceptum.

ESto ABC triangulum æquicrure quodcunque, cuius basis AC, & ex termino A lateris BA, super reliquum latus BC (ipsi BA, æquale) sit perpendicularis AD. Dico quadratum basis AC rectangulo sub BC in CD bis sumpto æquale esse.

Quum sit enim angulus ad C acutus, erit quadratum AB cum duplo rectanguli BCD æquale quadratis simul AC, CB, si igitur vtrinque auferantur æqualia quadrata, nempe quadrata laterum AB, CB, remanet quadratum basis AC æquale duplo rectanguli BCD. Quod erat demonstrandum.

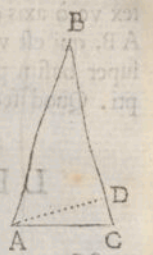


LEMMA III.

LEMMA III. PROP. XXI.

IN triangulo æquicruri, cuius angulus baſi oppoſitus ſit acutus, perpendicularis, quæ ab altero baſis termino ſuper oppoſitum latus ducitur, poteſt duplum rectanguli ſub partibus lateris eiuſdem à perpendiculari abſciſſis, vnà cum quadrato partis baſim attingens.

ESTO triangulum æquicrure, & acutangulum ABC, ex termino baſis AC, ducta ſit in latus BC perpendicularis AD, quæ cadet intra ipſum triangulum (quoniam anguli B, C, ponuntur acuti) Dico quadratum AD æquale eſſe duobus rectangulis BDC cum quadrato DC.



Nam, per præcedens Lemma, eſt quadratum AC æquale duobus rectangulis BCD, ſed hæc æquantur duobus BDC cum duobus quadratis DC, ergo & quadratum AC, hoc eſt duo ſimul AD, DC, æquantur duobus rectangulis BDC cum duobus quadratis DC; dempto igitur communi quadrato DC, remanet quadratum AD æquale duobus rectangulis BDC cum quadrato DC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

VT igitur propoſitum oſtendamus, ponatur triangulum ABC rectangulum ad B, cuius tamen latus AB in prima figura minus ſit reliquo BC, è contra verò in ſecunda ſit maius, & cum baſi AC ad punctum C conſtituatur angulus ACD ipſi BAC æqualis. Et quoniam angulus BAC eſt acutus, duo ſimul BAC, ACD erunt duobus rectis minores, ac propterea CD conueniet cum AB, vt in puncto D, quod in prima cadet extra productam AB, quum angulus BAC, ſiue ACD maior ſit angulo ACB, & in ſecunda cadet in ipſam AB, quoniam angulus BAC, ſiue ACD minor eſt angulo ACB.

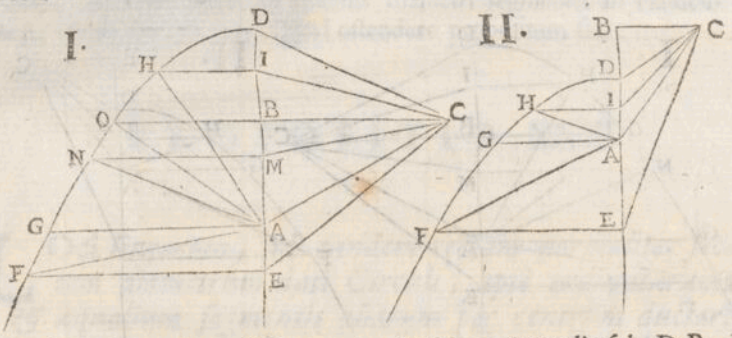
Præterea, facto C polo ſubtenſarum, ex eo ducatur in prima figura quæcunque ſubtenſa CI ſecans axem DE inter D, & B, & alia quælibet CM ſecans inter B, & A, atque inſuper alia CE ſecans infra A. In ſecunda verò agatur quæuis CI ſecans axem inter D, & A, & alia quælibet CE infra A.

Ampliùs, ſubtenſæ omnes CI, CB, CM, CE transferantur ex puncto A tanquam polo tranſuerſalium vſque ad rectas IH, BO, MN, AG, EF

EF ordinatim ductas ex terminis ſubtenſarum, ita vt ſingulæ ſingulis æquales ſint, nempe AH æqualis CI, AO ipſi CB, AN ipſi CM, AG ipſi CA & AF ipſi CE &c. Dico in vtraque figura puncta H, O, N, G, F, eſſe ad concauum Parabolæ, cuius axis vertex ſit D, qui eſt vertex trianguli æquicruris ADC; ſemirectum verò latus ſit AB latus dati trianguli rectanguli ABC.

Iam, in prima figura, tranſuerſalis AH æquatur ſubtenſæ CI, ex conſtructione, ergo & quadratum quadrato æquale eſt: quare & duo quadrata AI, IH, ſiue duo rectangula IBA cum tribus quadratis IB, BA, IH æqualia ſimul ſunt duobus ſimul quadratis CB, BI: ex his ergo dempto communi quadrato BI, remanent duo rectangula ſub IB, BA cum quadrato AB, & quadrato HI æqualia ſimul vnico quadrato CB, ſed quadratum perpendicularis CB, in triangulo æquicruri acutangulo ADC ex termino C baſis AC ductæ ſuper latus AD, æquatur [a] duobus rectangulis DBA, ergo duo pariter rectangula ſub IB, BA cum quadrato AB, & quadrato HI æquantur duobus rectangulis ſub DB, BA cum eodem quadrato AB, ſed duo ſub DB, BA æqualia ſunt duobus ſub DI, BA vnà cum duobus ſub IB, BA, ergo iterum duo rectangula ſub IB, BA, quadratum AB, & quadratum HI æquantur duobus ſub DI, BA, vnà cum duobus ſub IB, BA, & cum quadrato AB, ex quibus compoſitis ſi demantur communia ſpatia, nempe duo rectangula ſub IB, BA, & quadratum AB, remanet quadratum HI æquale duobus rectangulis ſub DI, BA, vel vnico ſub DI in duplam BA.

[a] Lemma 3. huius.



Ampliùs, tranſuerſalis OA æquatur perpendiculari CB, ex conſtructione, ergo & quadratum OA æquale eſt quadrato CB, ideoque & duo quadrata OB, BA æqualia quadrato perpendicularis CB, in triangulo æquicruri acutangulo ADC, vel [b] duobus rectangulis DBA cum quadrato BA, & dempto communi quadrato AB, ſupereſt quadratum AO æquale duobus rectangulis ſub DB, BA, vel vnico ſub DB in duplam BA.

[b] ibidem.

Inſuper tranſuerſalis AN æqualis eſt ſubtenſæ CM, ex conſtructione, ergo & quadratum AN, vel duo NM, MA æqualia ſunt quadrato CM,

vel

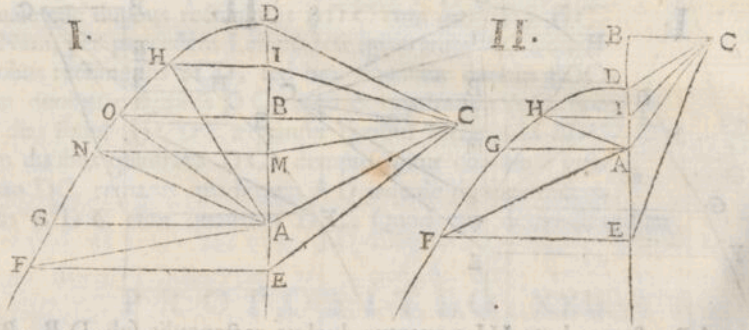
a ibidem. vel duobus MB, BC, vel quadrato MB cum duobus DBA, & cum quadrato BA ipſi CB æqualibus [a] vel eidem quadrato MB cum ijſdem duobus DBA, vnà cum duobus DMA cum quadratis BM, MA, & dempto communi quadrato AM, remanet quadratum NM æquale duobus DBA cum duobus BMA, vnà cum duobus quadratis MB, vel æquale duobus DBA cum duobus ABM, ſiue duobus tantùm ſub DM in BA, vel vnico ſub DM in duplam BA.

Præterea, in vtraque figura, ordinatim ducta AG æquatur ſubtenſæ CA; ex conſtructione, ergo & quadratum AG, quadrato CA, vel [b] duobus ſimul rectangulis ſub DA, AB, vel vnico ſub DA in duplam AB.

b Lemma 2. huius.

Denuo, in ſingulis figuris, quum tranſuerſalis AF æqualis ſit ſubtenſæ CE, ex conſtructione, erit quadratum AF, ſiue duo ſimul AE, EF quadrato CE, ſiue (in triangulo obtuſangulo CAE) duobus ſimul rectangulis EAB cum quadratis EA, AC, & dempto communi quadrato AE, erit quadratum EF æquale duplo rectanguli EAB cum quadrato AC, ſiue [c] cum duobus rectangulis DAB in triangulo æquicruri DAC;

c Lemma 2. huius.



ſed duo EAB cum duobus DAB conſtituunt duo rectangula ſub DE, AB, ob communem altitudinem AB, ergo quadratum EF, æquatur duobus rectangulis ſub DE, AB, hoc eſt vnico ſub DE in duplam AB.

Denique, in ſecunda figura, quoniam tranſuerſalis AH æquatur ſubtenſæ CI, ex conſtructione, erit quadratum AH, ſiue duo ſimul AI, IH æqualia quadrato CI, ſiue (in triangulo obtuſangulo CDI) duobus ſimul rectangulis ſub BD in DI cum quadrato ID, & quadrato DC, vel cum quadrato DA ipſi DC æquali, ob triangulum iſoſcele ADC, ex conſtructione, ſed quadratum DA æquatur duobus rectangulis ſub AI, ID cum quadratis AI, ID, ergo & duo ſimul AI, IH æquantur duobus rectangulis ſub BD, DI cum quadrato ID vnà cum duobus rectangulis ſub AI, ID, & duobus quadratis AI, ID, ex quibus dempto communi quadrato AI remanet quadratum IH æquale duobus rectangulis ſub BD, DI cum duobus ſub AI, ID, & cum duobus quadratis ID, ſed duo ſub AI, ID cum duobus quadratis ID æquantur duobus rectangulis ſub AD, DI; ergo idem quadratum IH æquale eſt duobus rectangulis ſub BD,

BD, DI vnà cum duobus sub AD, DI, siue æquale est duobus tantùm sub AB, DI (eò quod sit DI communis eorum altitudo) vel vnico rectangulo sub DI in duplam AB.

Quum igitur hactenus in vtraque figura ostensum sit quadratum semiordinatæ IH æquale rectangulo sub DI in duplam BA, & semiordinatæ BO æquale rectangulo sub BD in duplam BA, & semiordinatæ NM rectangulo sub DM in duplam ipsius BA, atque semiordinatæ AG rectangulo sub DA in duplam eiusdem BA, & tandem quadratum semiordinatæ EF æquale rectangulo sub DE in eandem duplam BA, habeantque huiusmodi rectangula eandem basim, nempe duplam BA; quadrata semiordinatarum ijsdem rectangulis æqualia, nempe quadrata IH, BO, MN, AG, EF, erunt inter se vt rectangulorum altitudines DI, DB, DM, DA, DE. Quare puncta H, O, N, G, F sunt [a] ad *Locum* Parabolæ cuius vertex est D, rectum verò latus duplum est lateris AB dati trianguli rectanguli ABC, eò quod omnia semiordinatarum quadrata æqualia sint rectangulis sub abscissis diametri segmentis in eandem rectam, seu in duplam AB. Quod ostendere propositum fuit.

[a] 20. primi Conic.

PROPOSITIO XXIII.

LOci linearum, ad eandem rectam normaliter secantem diametrum dati Circuli, aptè ordinatarum, & æqualium segmentis aliarum per centrum ductarum inter ipsam normalem, & peripheriam Circuli, tum conuexam, tum concauam interceptis, sunt ad Hyperbolas oppositas æqualium laterum, quarum semiaxis transuersus æqualis sit perpendiculari à centro Circuli super normalem demissæ.

ID enim ex sui conuerso constabit, ita exposito, ac demonstrato.

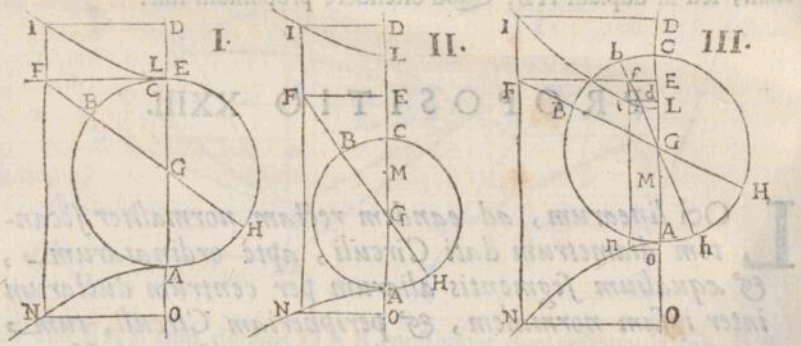
ESto Circulus ABC, cuius centrum G, per quod transeat quælibet diameter AGC, ad quam, vel ad ipsam productam, nimirum aut a sui extremitate C, vt in prima figura; vel extra Circulum, vt in secunda; vel intra, vt in tertia, ducta sit normalis EF, quæ vel Circulum continget, vel ipsum extra se totum ad vnam partem relinquet, vel secabit: segmento verò GE diametri inter centrum, & normalem, sumatur ex eadem dia-

metro ab A versus centrum G recta AL dupla, quæ bisecetur in M, ita vt vtraque ipsarum ML, MA ipsi perpendiculari GE æqualis sit; & centro M, semiaxibus verò ML, MA, fiant per vertices L, A, Sectiones oppositæ æquilateræ L I, A N, & per centrum G ducta sit quælibet diameter HB, quæ producta normali EF occurrat in F, quod in tertia figura ponatur, vel cadere extra Circulum, vel intra; atque ex F, ad vtranque partem normalis, ordinetur recta INF Sectiones oppositas secans in I, N. Dico ordinatam FI æqualem esse segmento diametri FB, & ordinatam FN, segmento FH æqualem esse.

Per I, N ordinentur ad Sectionum axem AC rectæ ID, NO, quæ ipsi EF æquidistabunt, abscindentque ex axibus æqualia segmenta LD, AO.

Iam, in prima figura, in qua puncta C, E, L in vnum cocunt, est rectangulum ADC æquale quadrato DI, ob Hyperbolam [a] æquilateram, vel quadrato sibi oppositæ CF in parallelogrammo DF, vel rectangulo HFB, ob secantem FH, & tangentem FE, sed differentiæ laterum AD, DC, & HF, FB, nempe AC, HB sunt æquales (nam sunt eiusdem

[a] 21. primi Conic.



Circuli diametri) ergo & latus CD, siue sibi oppositum FI, lateri FB æquale est: sed rectangulum HFB æquale ostensum est rectangulo ADC, vel OCD, siue rectangulo NFI, & latus FI æquale est lateri FB, vt nuper ostendimus, ergo & latus FN lateri FH æquale erit.

In reliquis verò figuris, quum sit ML æqualis ipsi GE, ex constructione, dempta communi ME in secunda; & in tertia figura addita, vel dempta communi GL, remanet in vtraque EL æqualis GM, sed in secunda LM æquatur MA, ex constructione, & EL æquatur GM, ex nuper ostensis, ergo reliqua EM, reliquæ GA, seu GC æqualis erit, & dempta communi MC, remanet EC æqualis MG, siue æqualis EL. In tertia verò figura est AM æqualis GE, ex constructione, & addita communi GM, erit radius GA, siue radius GC æqualis ipsi ME, & dempta communi GE remanet EC æqualis MG, siue æqualis LE.

Præterea, in secunda, & tertia figura est quadratum GF æquale quadratis simul GE, EF, vel (his cum æqualibus permutatis) quadratis simul ML, DI, vel quadrato ML cum rectangulo ADL ipsi quadrato DI æquale, ob Hyperbolam æquilateram, sed quadratum ML cum rectangulo

gulo ADL æquale est quadrato MD, nam est AL secta bifariam in M, & ipsi addita LD, ergo quadratum idem GF æquatur quadrato MD, siue linea GF lineæ MD; estque GB, siue GC æqualis ME (quum in secnuda figura sint EC, MG æquales, sitque ipsis communis CM; in tertia verò EC, MG sint æquales, & EG sit communis) ergo reliqua FB æqualis erit reliquæ ED, siue oppositæ FI in parallelogrammo DF.

Denique, ex superioribus primò ostensis, est ME æqualis radio CG, sed MO æquatur quoque MD (quum hæ ex æqualibus MA, ML, & æqualibus OA, LD componantur) & MD æqualis nuper ostensa est ipsi GF, ergo duæ simul antecedentes ME cum MO, nempe tota EO, siue FN æquatur duabus simul consequentibus GH, GF, hoc est vnicæ secanti FH. Quod vltimò ostendendum erat.

Hinc apparet *Locum* omnium abscissarum ex diametris dati Circuli ABC inter normalem EF, & peripheriam ABC extra Circulum interceptarum, & ad ipsam normalem ordinatarum (qualis est exterior FB ordinata in FI) esse ad Hyperbolam æquilateram LI: *Locum* verò reliquarum *interiorum* abscissarum inter normalem EF, & dati Circuli peripheriam interceptarum, atque ordinatim ad ipsam normalem applicatarum, sed ad contrarias partes (qualis est FH, in FN, & *fi* in *fn*) esse ad aliam Hyperbolam A*n*N primæ oppositam, cuius axis vertex idem sit ac vertex primæ diametri dati Circuli, vtrarumque semiaxis transuersus AM æqualis sit perpendiculari GE ex centro Circuli super normalem EF ductæ. Quod in Propositione expositum fuerat.

De *Locis Solidis* nonnulla sparsim demonstrauit Pappus Alexandrinus in suis mathematicis Collectionibus, quæ postmodum Federicus Commandinus more suo doctissimè illustrauit; quumque in ijs perlegendis pauca quædam annotauerim, eadem in hunc locum recensere, nec præter rem, nec inutile fore iudicaui.

Et primò, ex Propositione xxxiv. Libri quarti, in gratiam tripartitionis dati anguli rectilinei, sequens efformatur

PROPOSITIO XXIV.

LOcus, *quem attingunt vertices triangulorum super eàdem basi descriptorum, & quorum anguli ad alterum basis terminum dupli sint angulorum ad reliquum, est linea Hyperbolæ, cuius focus sit ad terminum basis, in quo sunt anguli reliquorum dupli, vertex verò sit in basi, per huius trientem à foco distans, & axis transuersus sit segmentum, quod supereſt ex eàdem basi,*

ID ex ſui conuerſo conſtabit ſic expoſito, ac demonſtrato.

ESto Parabola CD, cuius vertex C focus B, & axis tranſuerſus AC duplus ſit diſtantiæ CB. Dico (ſi ex A vertice Sectionis oppoſitæ, atque ex interiori foco B ad quodcunque Hyperbolæ punctum D ducantur rectæ AD, BD) in triangulo ADB ſuper baſim AB deſcripto, angulum ABD ad focum duplum eſſe anguli BAD ad verticem oppoſitæ.

Demittatur ex D ſuper AB perpendicularis DE, quæ vel incidat infra focum, vt in prima figura, vel ſupra, vt in ſecunda, ſumanturque EF, FG vtraque æqualis ipſi EB.

Iam, quum ſit AC dupla CB ex Hypotheſi, erit AB tripla BC, & productum ſub AB in BC erit vt 3; ſed hoc eſt quarta pars figuræ [a] ſeu producti ſub tranſuerſo axe AC in ſuum rectum latus (eò quod D ponatur focus Hyperbolæ) ergo figura ab AC, & recto latere producta erit vt 12; ſed AC eſt partium 2 qualium CB eſt 1, ergo rectum latus erit earundem partium 6, nempe tranſuerſus axis AC erit ſubtriplus ſui recti lateris, hoc eſt rectum latus triplum tranſuerſi AC.

[a] ex 45. tertij Conic.



Et quia AB tripla eſt BC, ex ſuppoſitione, & GB tripla BE, ex conſtructione, erit AG tripla CE, adeoque rectangulum ſub AG in AE triplum rectanguli AEC, quod eſt ſub CE in eandem AE.

Præterea, quadratum DE ad rectangulum AEC eſt vt rectum latus ad tranſuerſum, vel vt 3 ad 1 ex demonſtratis, ergo & quadratum ordinatæ DE triplum eſt [b] rectanguli AEC, cuius triplum eſt quoque rectangulum GAE, vt ſecundo loco probatum fuit, ergo quadratum DE æquatur rectangulo GAE, & addito communi quadrato EF, erunt quadrata DE, EF, vel vnicum DF æquale rectangulo GAE cum quadrato EF in prima figura, vel in ſecunda cum quadrato FG, vel vnico quadrato AF (quoniam in prima eſt GE bifariam ſecta in F, eique eſt addita in directum EA, in ſecunda verò eſt EG bifariam ſecta in F, eique addita GA) ergo FD æqualis eſt FA, ac propterea in vtraque figura angulus A æqualis angulo FDA, ſed in prima externus GFD duplus eſt anguli A, & GFD æquatur DBA, ergo & DB duplus eſt anguli BAD; in ſecunda verò quum ſit FD æqualis FA erit externus DFE, vel ipſi æqualis DBA duplus anguli BAD.

[b] 21. primi Conic.

Si

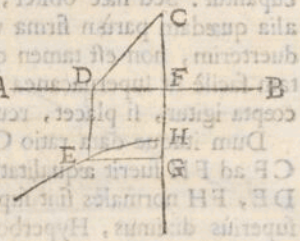
Si denique perpendicularis ex D ſuper A B inciderit in focum B, vt in tertia figura, quum demonſtratum ſit rectangulum A F C ſubtriplum quadrati D F, erit & A B C ſubtriplum quadrati D B, ſed idem A B C ſubtriplum eſt quadrati A B, quum ſit A B tripla B C, ex hypotheſi, ergo quadrata B D, D A ſunt æqualia, adeoque & latera, & anguli ad D, A, æquales, ſed reliquus B eſt rectus, ergo angulus ad A eſt ſemirectus, ſiue angulus ad B duplus anguli ad A. Quod tandem erat demonſtrandum.

Hinc eſt quod *Locus* verticum eorundem triangulorum, ſuper eàdem baſi conſtitutorum, & quorum anguli ad vnum baſis terminum dupli ſint anguli ad terminum reliquum, eſt curua Hyperbolæ qualem diximus. Quod erat &c.

AD Propoſitionem xxxxij. Libri quarti ſic circa *Locos Solidos* pergit Pappus.

„ *SIT recta AB poſitione data, atque à dato extra punctо C ipſi occurrat*
„ *recta quædam linea CD, & ipſi AB ad rectos angulos ducatur DE;*
„ *ſit autem proportio CD ad DE datæ. Dico punctum E eſſe ad Hyperbolam.*

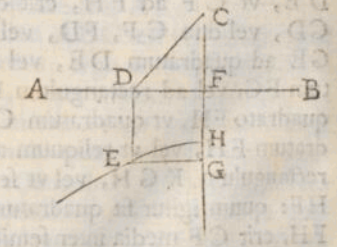
Quod ipſe Pappus per datorum doctrinam facilè oſtendit, & Commandinus eleganter illuſtrat, addens, quod (dum perpendicularis CF ad productam FH ſit vt CD ad DE, ſitque FK æqualis FH) interuallum KH eſt tranſuerſum latus Hyperbolæ HE, punctum F centrum, & FH ſemitranſuerſum latus, vel potius ſemiaxis tranſuerſus, nihil agens de ſemiaxe coniugato: ſed ex eius dictis ſtatim colligitur talem eſſe perpendiculum, CF, nempe à punctо C emiſſionis diagonalium, vſque ad rectam A B *Limitem* earundem: quoniam quum ſit C D ad D E, vt C F ad F H, erit quadratum CD, vel duo C F, F D, vel duo CF, GE ad quadratum D E, vel ad quadratum F G, vel ad rectangulum K G H cum quadrato F H, vt quadratum C F ad quadratum F H, vel vt reliquum ad reliquum, hoc eſt vt quadratum E G ad rectangulum K G H, vel vt ſemirectum latus ad ſemiaxem tranſuerſum HF: quum igitur ſit quadratum CF ad FH vt ſemirectum latus ad ipſam FH, erit C F media inter ſemilatera, adeoque ſemiaxi coniugato æqualis, vt conſtat ex Conicis Elementis: quamobrem, ſi data ratio C D ad D E fuerit æqualitatis, latera quoque Hyperbolæ H E æqualia erunt, quod pro ſequentibus animaduertiſſe opportunum erit.



Inſignis verò quidam Mathematicus, & maximi Geometricorum Librorum Author ab hac forte Pappi ſumpto argumento, hoc idem, ſed pro ſpeciali tantùm Hyperbola exemplificat in Prop. clxxxxvj. ſui de eadem tractatus,

tractatus, quam rectangulam æquilateram inuenio; sed in sequenti Prop. „ clxxxxvij. in qua problematicè proponit (*datis rectis terminatis rectum* „ *angulum constituentibus pro diametris Hyperbolæ, coniugatas Sectiones de-* „ *scribere*) insufficienter construit ad sibi propositum assequendum; manente enim illa rectarum suppositione, quod nempe, sint cuiuslibet terminatæ longitudinis inter se, per Authoris constructionem efficitur quidem vtraque Hyperbola æquilatera, sed ipsæ non semper mutuam coniugationem sortiuntur; id enim tantùm euenit cùm datæ rectæ normaliter se secantes inter se æquales fuerint: at in data rectarum inæqualitate, & ad rectos angulos intersectione, absit quod vnquam per eandem constructionem fiant simul coniugatæ. Et dato etiam quod Cl. Scriptoris mens fuerit ponere easdem lineas rectum angulum efficientes inter se æquales (cui obstat generalis propositio, & eiusdem constructio iubens ex datis rectis fieri parallelogrammum, non autem quadratum) quamuis hoc casu per eandem constructionem descriptæ Hyperbolæ euadant æquilateræ simul, & coniugatæ, falsò tamen coniugationem concludit ex æquidistantia, aut ex æqualitate ordinatim applicatarum in Hyperbolis erga datas lineas, eiusque Propositio xxxx. quam in vim suæ probationis affert, nihil penitus ad rem suam facit. Quod si his ijsdem positis Hyperbolarum coniugationem ostendere voluerat, facilè id illi erat educere, ex æqualitate laterum ipsarum Sectionum, immo ex earum congruentia, quippe quod Hyperbola æqualium laterum circa axem, vel etiam circa quamlibet diametrum, nullam vnquam habeat sibi coniugatam Sectionem, nisi aliam pariter æquilateram, vt ex Conicis palam fit. Adde, quod datæ lineæ exhibeant transuersorum semisses, non autem transuersa latera, qualia à Viro Cl. nuncupantur. Sed hæc obiter, re sic præbente, indigitasse sufficiat. Et licet alia quædam parùm firma vasto hoc in opere ad plus vltra erecto animaduerterim, non est tamen quod mirer, quum in ipsa tantæ molis structura tam facilè sit superuacanea disponere, quàm necessaria præterire. Ad incœpta igitur, si placet, reuertamur.

Dum itaque data ratio CD ad DE, vel CF ad FH fuerit æqualitatis, & ordinatæ DE, FH normales sint super AB, fit, vt superiùs diximus, Hyperbola æquilatera, rectangula; ac dum insuper data ratio sit vel maioris, vel minoris inæqualitatis, aliæ, & aliæ Hyperbolæ describuntur, quarum omnium est centrum F, semiaxis transuersus FH, & semiconiugatus FC, vt paulò ante animaduertimus. Quæritur modò, ad quem *Locum* perueniant eædem rectæ FH, DE, aliæque huiusmodi suis conuergentibus FC, DC proportionales, quando nimirum seruando inter se mutuam æquidistantiam, non tamen fuerint super AB perpendiculares, sed obliquè positæ. Atque id sequenti propositione manifestum fiet.

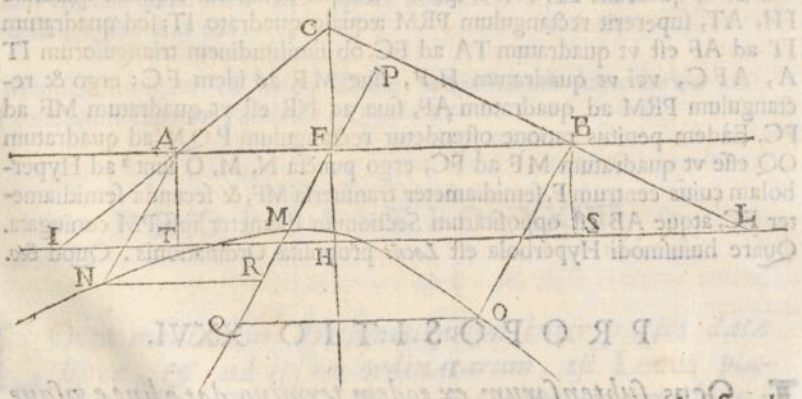


PRO-

PROPOSITIO XXV.

LOcus, ad quem perueniunt ſegmenta linearum in idem punctum, tanquam in polum, coeuntium, à duabus æquidiſtantibus rectis abſciſſa, & ad eoſdem quoſcunque obliquos angulos ordinata ad mediam æquidiſtantium, eſt conuexum Hyperbolæ, cuius centrum eſt punctum, in quo minima polarium, cum ipſa media parallelarum conuenit, & diameter coniugata eſt eadem media: at ſemidiameter tranſuerſa eſt minima ordinatarum, ſecunda verò ſemidiameter coniugata eſt polarium minima.

SInt quotcunque rectæ CAI, CFH, CBL in idem punctum C tanquam in polum coeuntes à duabus rectis inter ſe parallelis, mediaſcilicet AB, atque extrema IL abſciſſæ, & quarum CFH ſuper has perpendiculariter inſiſtat, ita vt CF ſit minima polarium ſuper mediam AB, & FH minima à parallelis abſciſſarum. Dico ſi per puncta A, F, B iuxta quoſlibet obliquos angulos ad rectam AB æquidiſtanter applicentur rectæ



AN, FM, BO &c. ſuis ſegmentis AI, FH, BL &c. æquales ſingulæ ſingulis, puncta N, M, O, eſſe ad vnam eandemque Hyperbolam, cuius centrum ſit F, ſemidiameter tranſuerſa ipſa FM æqualis minimo ſegmento FH, ipſique coniugata diameter SAB, & ſecunda ſemidiameter æqualis ſit minimæ polarium CF.

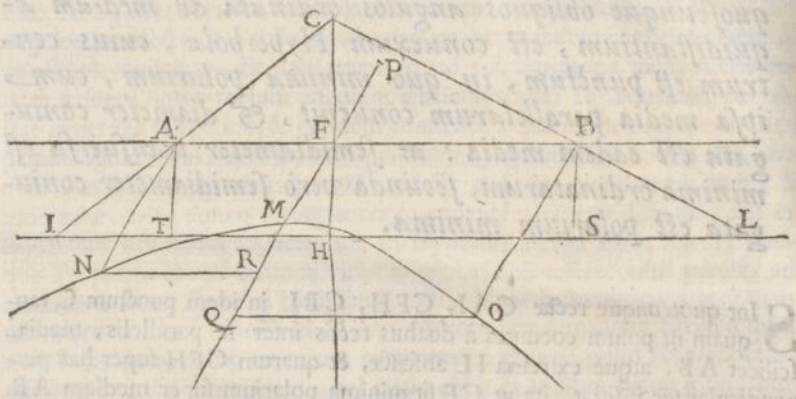
Producatur MF ad P, ita vt ſit FP æqualis ipſi FM, quæ ad alteram

partem

partem quantumlibet protrahatur, cuique rectæ NR, OQ ipsi AB æquidistantes occurrant in R, Q, atque ex A demittantur AT, BS ipsi IL perpendiculares, siue ad CH parallelæ.

Iam, quoniam ex hypothesi omnes AN, FQ, BO, inter se æquidistant, similiterque omnes AB, NR, OQ, quadrilatera ANRF, BOQF erunt parallelogramma, & idcirco opposita ipsorum latera inter se æqualia.

Et quoniam PM secta est bifariam in F, eique est addita MR in directum, erit rectangulum PRM cum quadrato MF, siue cum quadrato sibi



æqualis rectæ FH, ex constructione, æquale quadrato FR, siue quadrato oppositi lateris AN, siue quadrato sibi æqualis abscissi segmenti AI, siue duobus simul quadratis IT, TA: si igitur vtrinque demantur æqualia quadrata FH, AT, supererit rectangulum PRM æquale quadrato IT; sed quadratum IT ad AF est vt quadratum TA ad FC, ob similitudinem triangulorum IT A, AFC, vel vt quadratum HF, siue MF ad idem FC; ergo & rectangulum PRM ad quadratum AF, siue ad NR est vt quadratum MF ad FC. Eàdem penitus ratione ostendetur rectangulum PQM ad quadratum OQ esse vt quadratum MF ad FC, ergo puncta N, M, O sunt [a] ad Hyperbolam cuius centrum F, semidiameter transuersa MF, & secunda semidiameter FC, atque AB est oppositarum Sectionum diameter ipsi PM coniugata. Quare huiusmodi Hyperbola est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod &c.

[a] exa. primi Conic.

PROPOSITIO XXVI.

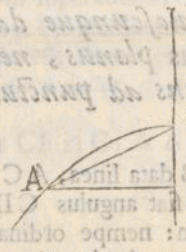
LOcus subtensarum ex eodem termino datæ lineæ vsque ad ordinatas ad additam quantumlibet productam, & quarum potentiæ cum potentijs datæ æquales sint potentijs superadditarum, est ad concauum Parabolæ, cuius vertex sit occursus datæ cum addita, semirectum verò latus sit ipsa data.

ID

ID autem necessariò sequitur ex demonstratione sui conuersi, dum proponatur vt sequitur.

IN Parabola. Quadratum rami cuiuscunque ex axis vertice ducti cum quadrato semirecti lateris, æquatur quadrato ex summa eiusdem semirecti, cum segmento axis ab ordinata per rami terminum abscisso.

SIT Parabola AB, cuius axis BC, vertex B, ac semirectum latus BD, quod ipsi BC in directum ponatur, & sit quicunque ramus BA, ex A verò ad axem ordinetur AC. Dico quadrata simul AB, BD æquari quadrato aggregati CD.



Quadratum enim AB æquatur quadratis AC, CB, sed AC æquatur [a] duplo rectanguli CBD (quum sit BD semirectum) ergo quadratum BA æquale est duobus rectangulis CBD cum quadrato CB, & addito vtrinque communi quadrato BD erunt duo simul quadrata AB, BD æqualia duplo rectanguli CBD cum quadratis CB, BD; sed hæc omnia conficiunt vnicum quadratum CD: quare duo AB, BD vnico CD sunt æqualia. Quod erat &c.

[a] 11. primi Conic.

Manifestum igitur est hinc, *Locum* propositarum subtensarum esse ad concauum expositæ Parabolæ. Quod &c.

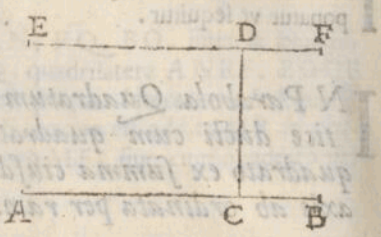
PROPOSITIO XXVII.

LOcus mediarum Arithmeticarum inter partes datæ lineæ, & ad ipsam ordinatarum, est Locus *planus, nempe recta datæ æquidistans per interuallum ipsius dimidio æquale.*

SIT AB data vtcunque secta in C, sitque EF eidem AB parallela, & ab ea distans per interuallum dimidium ipsius AB. Dico rectam EF

esse *Locum* propositum: hoc est ordinatam C D esse mediam Arithmeticam inter partes A C, C B.

Hoc non alia indiget probatione, quam quod summa extremarum AC, C B æqualis est duplo mediæ C D inter eaſdem, ex constructione, ergo, ex definitione, C D est media Arithmetica: & sic de singulis similibus ordinatis. Quare E F est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod &c.

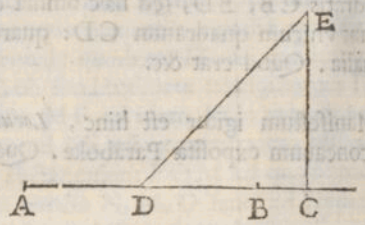


PROPOSITIO XXVIII.

LOcus mediarum Arithmeticarum inter coadditas quaſcunque datæ, & ad ipſam ordinatarum, est Locus *planus, nempe recta angulum ſemirectum conſtituens ad punctum biſecans datam ad partem eiuſdem.*

SIT AB data linea, A C verò, & C B coadditæ, ſectaque A B bifariam in D fiat angulus C D E ſemirectus. Dico rectam D E esse *Locum* propositum: nempe ordinatam C E esse mediam Arithmeticam inter coadditas A C, C B.

Patet id, quum ob angulos ſemirectos ad D, E, ſit C E æqualis C D, quæ media est Arithmetica inter coadditas A C, C B: nam prima differentia ad ſecundam, nempe A D ad D B est vt prima magnitudo ad primam, vel vt A C ad A C, ergo & C E est media Arithmetica inter eaſdem; & ſic de ſingulis ſimilibus ordinatis: quare D E est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat demonſtrandum.



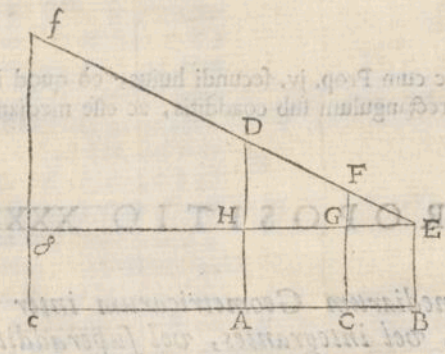
PRO-

PROPOSITIO XXIX.

LOcus mediarum Arithmeticarum inter datam lineam, & partes, vel integrantes, vel ſuperadditas ex eodem datæ termino ſumptas ad ipſam applicatarum, eſt Locus *planus, nempe recta linea iungens terminos ordinatim applicatarum ad datam ex ipſius terminis, quarum altera, ex occurſu datæ & partis erecta, ſit datæ dimidium, altera verò eidem ſit æqualis.*

SIT AB data, cuius pars BC, vel integrans, vel ſuperaddita, cui ex A, B, ſint ordinatæ AD nempe ipſi AB æqualis, & BE eiuſdem dimidium, iungaturque ED, & producatur ad D. Dico hanc eſſe *Locum* propoſitum, ſiue ordinatam CF eſſe mediam Atithmeticam inter datam AB, & partem BC integrantem, vel ſuperadditam.

Agatur ex E ipſi AB æquidiſtans EH ſecans CF in G, & AD in H.



Et quoniam DA dupla eſt ipſius EB, ex conſtructione, vel ipſius AH, erit, & DA, vel BA, vel EH dupla HD, ac ideo & EG, vel BC dupla GF, ob triangulorum ſimilitudinem EHD, EGF. Quum igitur ſit BC dupla GF, & AB dupla BE, vel CG, erit ſumma extremarum AB, BC dupla ordinatæ CF: quare CF eſt media Arithmetica inter totam AB, & partem BC, vel integrantis, vel ſuperadditæ: & ſic de ſingulis ſimilibus ordinatis. Quapropter *Locus* planus rectæ DE eſt *Locus* propoſitæ Ordinationis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXX.

LOcus *mediarum Geometricarum inter partes datæ lineæ, & ad ipſam ordinatarum, eſt* Locus *planus, nempe ſemicirculi peripheria ſuper datam deſcripti.*

IAM ſatis, ſuperque patet id, per Corollarium Prop. xiij. Sexti Elementorum, vnàque conuenit cum prima Propoſitione libri ij. huius.

PROPOSITIO XXXI.

LOcus *mediarum Geometricarum inter coadditas datæ lineæ & ad ipſam ordinatarum, eſt ad concauum Hyperbolæ æquilateræ, cuius axis vertex ſit occurſus datæ cum addita, axis ſit addita, tranſuerſus verò ſit ipſa data.*

COincidit hæc cum Prop. jv. ſecundi huius, eò quod idem ſit ordinatam poſſe rectangulum ſub coadditis, ac eſſe mediam Geometricam inter coadditas.

PROPOSITIO XXXII.

LOcus *mediarum Geometricarum inter totam, & partes, vel integrantes, vel ſuperadditas ex eodem datæ termino ſumptas ad ipſam ordinatarum, eſt ad concauum Parabolæ, cuius vertex ſit occurſus datæ cum parte aſſumpta, axis verò rectumque latus ſit ipſa data.*

COnuenit hæc quoque cum Prop. ij. libri ſecundi huius, ob rationem ſuperiùs allatam.

LEM.

LEMMA IV. PROP. XXXIII.

SI fuerit quæcunque Parabolæ portio ABC, cuius basis AC, diameter BD, triangulum verò inscriptum sit ABC, cuius alterum laterum, vt AB, vtcunque productum sit ad E, sitque ipsi BD quælibet æquidistans FE productam in E, Parabolam in H, & reliquum latus BC secans in G. Dico FH esse mediam harmonicam inter EF, FG.

PER B, H, agantur BI, HL basi AC parallelæ.

Iam, EF ad BD est vt FA ad AD, vel vt rectangulum FAD ad quadratum AD, & BD ad FH vt [a] rectangulum ADC, vel quadratum AD ad rectangulum AFC, ergo EF ad FH est vt rectangulum FAD ad AFC, vel vt linea AD ad FC, vel vt DC ad CF, vel vt BD ad FG, vel vt IF ad FG, & per conuersionem rationis FE ad EH vt FI ad IG, vel quadratum FE ad EH vt quadratum FI ad IG, vel vt quadratum CB ad BG, vel vt quadratum CD ad DF, vel ad LH, vel [b] vt linea BL ad LD, vel vt linea FI ad IH: ergo, quum sit quadratum FI ad IG vt linea FI ad IH, erunt tres FI, GI, HI in continua, eademque ratione; ideoque vt FI ad IG, ita FG ad GH; sed FI ad IG est vt FE ad EH, vt superiùs ostendimus, ergo FG ad GH est vt FE ad EH, & permutando FG ad FE vt GH ad HE; quare FH est media harmonica inter EF, FG. Quod erat &c.



[a] ex vltima quarti Pappi, vel ex aliò ab alijs ostensis.

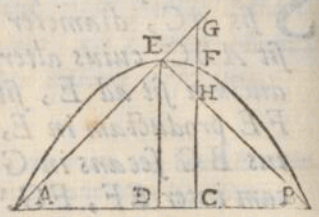
[b] 2c. primi Conic.

PROPOSITIO XXXIV.

LOcus mediarum Harmonicarum inter partes datæ lineæ, & ad ipsam ordinatarum, est ad concauum Parabolæ, cuius basis sit ipsa data, diameter verò datæ dimidio sit æqualis.

SIT

SIT data AB, cuius partes AC, CB, sectaque AB bifariam in D; & applicata vtcunque DE æqualis alterutri ipsarum AD, DB, fiat super basim AB Parabola AEB, cuius diameter sit DE. Dico huius concauum esse *Locum* propositum; hoc est ordinatam CF ipsi DE parallelam, esse mediam harmonicam inter partes AC, CB.



Iungatur AE, quæ conueniat cum CF in G, iungaturque BE secans CF in H. Iam, est [a] CF media harmonica inter GC, CH; sed quum AD sit æqualis DE, etiam AC æquatur CG, & quum BD sit æqualis BE, etiam CB æquatur CH, ergo eadem CF media est quoque harmonica inter partes AC, CB: & sic de singulis similibus ordinatis: quare concauum Parabolæ AEB est *Locus* propositæ Ordinationis. Quod erat &c.

[a] 33. huius.

His hactenus singulariter demonstratis de Medietate, Arithmetica, Geometrica, & Harmonica, quædam alia de tribus simul *ijsdem* soluenda se se offerunt, nec prorsus inutilia, nec scitu penitus iniucunda.

PROBL. III. PROP. XXXV.

INter duas rectas coadditas, tres medias inuenire in medietate Arithmetica, Geometrica, & Harmonica.

SInt datæ coadditæ AB maior, BC minor, oportet inter ipsas tres medias dictas inuenire.

Per verticem C, circa axem CB, cum transuerso diametro AC fiat quæcunque Hyperbola CD, in qua ex B ordinetur BD, à D verò ducatur contingens DE, latus versum AC secans in puncto E, quod incidet inter C, & punctum F bisecans AC, quod est centrum Hyperbolæ, à quo sit Asymptotos FG, cui ex D agatur DH parallela. Dico tres BF, BH, BE esse medias quæsitas; hoc est BF Arithmeticam, BH Geometricam, & BE Harmonicam.

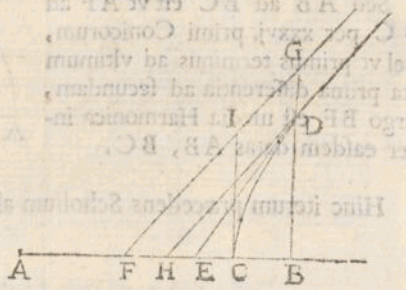
Et primò, quoniam AF æquatur FC, erit AF prima differentia inter AB, BF, ad FC secundam inter FB, BC, vt primus terminus AB ad ipsum primum, ob æqualitatem, quare, ex definitione, erit BF media Arithmetica.

Præterea producta BD ad G, atque ex C ducta verticali tangente CI, quæ ipsi BG æquidistabit: quoniam rectangulum ABC ad quadratum BD est vt [b] transuersum latus ad rectum, vel vt [c] quadratum FC ad

[b] 21. primi Conic.
[c] ex prima sec. Conic.

ad CI, ob Asympto on FI, vel vt quadratum HB ad idem BD (ob triangulorum similitudinem FCI, HBD) erit rectangulum ABC æquale quadrato BH; quare BH est media Geometrica inter datas AB, BC.

Tandem, ob tangentem Hyperbolam GE, est AE ad EC vt a AB ad BC, ergo prima differentia AE, inter AB, BE ad secundam EC inter EB, BC, est vt primus terminus AB ad tertium BC: quare, ex definitione, est BE media Harmonica inter datas AB, BC. Inuentæ sunt ergo tres quæsitæ mediæ BF, BH, BE, quæ cum datis AB, BC constituunt tres quæsitas Medietates. Quod erat faciendum.



a 36. primi Conic.

SCHOLIVM.

HInc se se obuiam fit minimè aspernanda quædam huiusmodi mediarum proprietas: hoc est tres ipsas medias inter easdem datas medietatem Geometricam efficere.

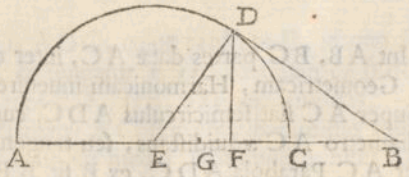
Nam per xxj. & xxxvij. primi Conicorum, tam rectangulum ABC, quàm FBE ad idem quadratum BD est in ratione transuersi ad rectum, ergo rectangulum ABC, siue quadratum ostensæ mediæ Geometricæ BH æquale est rectangulo FBE: ac propterea tres BF, BH, BE sunt in eàdem ratione Geometrica.

Sed idem Problema per *Locos* planos soluitur sic

ALITER.

DAtis ijsdem coadditis AB, BC. Oportet &c.

SVper AC differentiam datarum fiat semicirculus ADC, cuius centrum E, ex B verò ducatur contingens BD, & à contactu D demittatur perpendicularis DF. Dico tres BE, BD, BF esse medias quæsitas.



Nam AC differentia extremarum, ac Circuli diameter secta est bifariam in E, ergo BE est media Arithmetica inter AB, BC.

Ob

Ob tangentem verò BD est quadratum BD æquale rectangulo ABC, quare BD est media Geometrica inter ipsas AB, BC.

Sed AB ad BC est vt AF ad FC per xxxvj. primi Conicorum, vel vt primus terminus ad vltimum ita prima differentia ad secundam, ergo BF est media Harmonica inter easdem datas AB, BC.



Hinc iterum præcedens Scholium aliter.

SCHOLIVM. I.

IVngatur ED. Iam in triangulo rectangulo EDB est DF perpendicularis super basim BE, ergo tres EB, BD, BF sunt in eadem ratione Geometrica; sed ipsæ sunt tres inuentæ inter AB, BC, ergo mediæ trium Medietatum inter datas constituunt Geometricam Medietatem.

SCHOLIVM. II.

HInc, constructio ad idem Problema assequendum promptiùs habebitur si differentia datarum, hoc est AC, bisecetur in E, & inter datas AB, BC, sumatur media proportionalis BG, & post BE, BG tertia proportionalis BF.

PROBL. IV. PROP. XXXVI.

INter partes datæ lineæ tres medias easdem simul assignare.

SInt AB, BC partes datæ AC, inter quas tres medias Arithmeticam, Geometricam, Harmonicam inuenire oporteat.

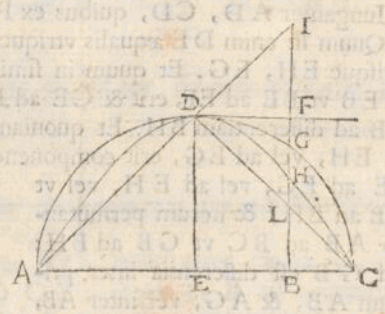
Super AC fiat semicirculus ADC, cuius centrum E, vertex D, à quo sit diametro AC æquidistans, seu tangens GF; inscriptaque semicirculo super AC Parabola ADC, ex B sit BF radio ED parallela, quæ tangentem Circulum, & Parabolam secet in F, G, H. Dico tres BF, BG, BH esse medias quæsitas inter AB, BC.

Quod

Quod B F sit media Arithmetica, liquet ex Prop. xxvij. huius: quoniam D F parallela ad A C ab ea distat per E D dimidium A C.

Quod B G in semicirculo sit media Geometrica, patet ex sexto Elementorum.

Quod verò B H sit Harmonica, constat ex Prop. xxxiij. huius. Iuncta enim D C secante B H in L est B H media Harmonica inter I B, B L, sed I B æquatur B A, quum sit D E æqualis E A, atque L B æquatur B C, quum sit D E æqualis E C, ergo & B H erit media Harmonica inter datas A B, B C.



SCHOLIVM.

DEnuò manifestum sit tres ipsas medias BF, BG, BH esse inter se in eàdem continua ratione. Nam quadratum D E ad G B, vel F B ad B G est, ob semicirculum, vt rectangulum A E C ad rectangulum A B C vtrunque vtrique æquale; sed rectangulum A E C ad A B C est, ob Parabolam, vt linea D E ad H B, vel vt F B ad B H; quare quum sit quadratum primæ F B ad quadratum secundæ B G vt prima F B ad B H, eædem B F, B G, B H erunt in continua ratione Geometrica. Quod erat &c.

Superiùs verò Problema per *Locos* planos sic

ALITER.

INter datas A B, B C, quæ simul in directum sint positæ, tres dictas medias inuenire.

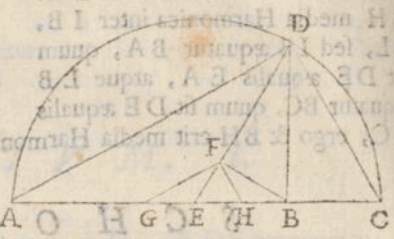
SVper totam A C, fiat semicirculus A D C, cuius centrum E, in quo sit B D ad A C perpendicularis, & iungatur E D, ad quam ex B demittatur perpendicularis B F. Dico tres E D, D B, D F esse quæsitas.

Est enim radius E D dimidium diametri A C, seu æqualis dimidio summæ extremarum A B, B C: quare E D est media Arithmetica inter datas A B, B C. B D verò est media Geometrica inter easdem, ob semicirculum.

At ipſam D F eſſe mediam Harmonicam inter eaſdem datas A B, B C, ſic demonſtrabitur.

Iungantur A D, C D, quibus ex F ſint parallelæ F G, F H.

Quum ſit enim D E æqualis vtrique E A, E C, erit quoque F E æqualis vtriſque E H, E G. Et quum in ſimilibus triangulis D E B, B E F ſit D E ad E B vt B E ad E F, erit & C E ad E B vt B E ad E H, & vt differentia C B ad differentiam B H. Et quoniam C E, vel A E ad E B eſt vt B E ad E H, vel ad E G, erit componendo, & permutando A B ad B G vt B E ad E G, vel ad E H, vel vt C B ad B H, & iterum permutando A B ad B C vt G B ad B H: ſed G B eſt differentia inter primam A B, & A G, vel inter A B, & ſecundam D F; B H verò eſt differentia inter C H, vel inter ſecundam D F, & tertiam C B, atque eſt prima differentia G B ad ſecundam B H vt primus terminus A B ad tertium B C: ergo D F eſt tandem media Harmonica inter datas A B, B C. Sunt igitur inter datas A B, B C inuentæ tres mediæ E D Arithmetica, D B Geometrica, & D F Harmonica. Quod erat &c.



Optimè igitur quidam Antiquorum aſſeruit (licet id non oſtenderit, ſed tanquam verum tantùm indicauerit) in ſemicirculo tres huiuſmodi Medietates ſimpliciter exponi poſſe; adeo vt ille, immeritò forſan, à Pappo Alexandrino ad ſecundum Problema Libri tertij ſuarum Collectionum reprehendatur. Viſum eſt enim hùc tres A B, B D, B C conſtituere Medietatem Arithmeticam, tres verò A B, B D, B C Geometricam, & tres denique A B, D F, B C Harmonicam Medietatem, ac ſimpliciter omnes inter eaſdem A B, B C: ſimpliciùs enim exhiberi nequeunt in ſemicirculo ipſæ tres Medietates quàm ope earundem trium E D, D B, D F; ſecus per ea, quæ aliter Pappus conſtruxerat, ac demonſtrauerat,

C O R O L L.

ITerum apparet tres ipſas medias inter duas eaſdem magnitudines eſſe inter ſe in eadem continua ratione Geometrica, quoniam E D ad D B eſt vt D B ad D F, ob ſimilitudinem triangulorum E D B, B D F.

Ex hac proprietate, facilè ſoluendum ſe præbet ad praxim ſequens

PROBL.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [282] - 90
PUBLIC DOMAIN

PROBL. V. PROP. XXXVII.

INter duas datas lineas mediam Harmonicam assignare.

SInt datæ rectæ AB, BC, inter quas oporteat mediam Harmonicam inuenire.

Concipiantur ipsæ in directum in AC, quam circa tanquam diametrum describatur Circulus ADCE, atque ex B ad circumferentiam vsque applicetur BD Circuli radio æqualis, producaturque ad alteram peripheriæ partem in E. Dico DE esse harmonicè mediam inter datas AB, BC.



Quum sit enim BD æqualis radio, æquabitur dimidio summæ extremarum AB, BC; quare BD erit media Arithmetica. Si verò ex B agatur BF ad AC perpendicularis, ipsa erit media Geometrica inter easdem AB, BC. Sed rectangulum DBE æquale est rectangulo ABC, vel quadrato perpendicularis BF, ergo tres BD, BF, BE erunt in eàdem continua ratione Geometrica; at DB est media Arithmetica, & BF Geometrica inter AB, BC, quare per superius Corollarium multipliciter demonstratum tertia BE erit media Harmonica inter easdem datas AB, BC. Quod erat faciendum.

COROLL.

EX hac patet, rectangulum sub extremis quibuscunque datis æquale esse rectangulo sub medijs Arithmetica, & Harmonica inter easdem: quoniam rectangulum ABC sub extremis æquale est rectangulo DBE sub medijs dictis; quapropter maior extremarum ad mediam Arithmeticam est vt media Harmonica ad minorem extremarum, eò quod in Circulo sit AB ad BD vt EB ad BC, ob æqualitatem rectangulorum ABC, DBE.

Horum omnium demonstratio suggerit & quod sequitur.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [283] - 91
PUBLIC DOMAIN

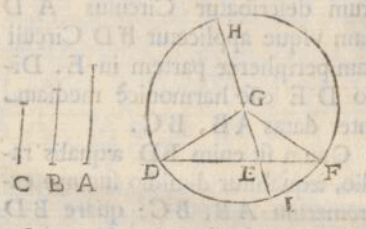
PROBL. VI. PROP. XXXVIII.

Datis tribus medijs Arithmetica, Geometrica, & Harmonica inter ignotas extremas, ipſas inuenire.

ESTO data A media Arithmetica, B Geometrica, & C Harmonica, inter extremas adhuc ignotas, & oporteat has inuenire.

Sumatur DE æqualis A, eique in directum EF æqualis C.

Et quoniam A ponitur media Arithmetica, ipſa erit maior C media Harmonica, hoc eſt DE maior EF, quare duæ DE, maiores tota DF, ſuper quam ideo deſcribi poterit triangulum æquicrure DGF, cuius vtrunque latus DG, FG æquale ſit ipſi DE; & centro G ad interuallum GD, vel GF fiat Circulus DFH, in quo iuncta GE producatur vſque ad peripheriam in H, I. Dico duas HE, EI eſſe extremas quæſitas.



Hoc verò ſatis manifeſtum eſt ex ſuperiori Corollario, vel ex conſtructione, & demonſtratione præcedentis Problematis.

SCHOLIVM.

POterunt igitur, duabus quibuſlibet è tribus medijs datis, ignotæ extremæ facilè inueniri. Inuenta enim tertia, ex datis, quæ deficit, per inuentionem vel mediæ proportionalis inter datas, vel extremæ poſt datas, habebuntur tres mediæ Arithmetica, Geometrica, & Harmonica; adeoque his datis, extremæ duarum datarum medium *Locum* occupantium reperiri poterunt, iuxta conſtructionem ſuperiorem.

Ad ſolutionem ſequentis Problematis, circa huiuſmodi Medietates præmittere oportet proximum

LEM-

LEMMA V. PROP. XXXIX.

AD dati ſemicirculi diametrum, perpendicularem ducere, ita vt rectangulum ſub ipſa in majus diametri ſegmentum quadrato ſemidiametri ſit æquale.

ESto ſemicirculus datus, cuius diameter AB, centrum E, & ſit faciendum, quod imperatum eſt.

Erigatur ex centro E ſuper diametrum AB perpendicularis EF, cui ducatur ex A æquidiſtans AG, ſeu contingens circulum ad A, ac intra aſymptotas AB, AG per punctum F deſcribatur Hyperbola FC, quæ in duobus tantùm punctis F, C ſecat [a] arcum ACB.



Dico, ductam CD, perpendicularem ipſi diametro, quæſitum ſolvere.

Hoc enim patet ob aſymptotas AB, AG: nam rectangulum AEF, ſive quadratum radii EF, æquale eſt [b] rectangulo ADC. Quod erat faciendum.

a ex Prop. 95. lib. 2. noſtræ Divin. in Apoll.

b 12. ſecundi Conic.

PROBL. VII. PROP. XXXX.

DAtam rectam ſic in duo ſegmenta dividere, vt, ſumptis inter ipſa tribus mediis, arithmetica, geometrica, & harmonica, quinque omnes ſint in eadem continua ratione geometrica.

DAta recta ſit AB, quam ſecare oporteat, ut eſt quæſitum.

Circa ipſam AB, tanquam diametrum, deſcribatur circulus ACBD, cuius centrum E, & ipſi AB in ſemicirculo ACB ducatur [c] perpendicularis FG; itaut rectangulum AFG, ſit æquale quadrato radii deſcripti circuli. Dico per punctum F quæſitum ſolvi.

c per Lemma præc.

Applicata enim ex F uſque ad arcum AC, recta FC æquali circuli radio, quæ in directum producta alteri peripheriæ parti occurrat in D; jam in ſuperioribus oſtenſum ſæpiùs eſt, tres FC, FG, FD eſſe tres medias inter AF, FB extremas partes datæ AB, eaſque tres inter ſe eſſe in quadam ratione continua geometrica.

Di-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [285] - 93
PUBLIC DOMAIN

Dico amplius, & ipſas quinque FA, FC, FG, FD, FB, eſſe in eadem ratione continua.



Factum eſt enim rectangulum AFG æquale quadrato radii EA, vel quadrato applicatæ FC; ergo tres FA, FC, FG, ſunt in quadam continua ratione geometrica; ſed etiam tres FC, FG, FD ſunt in continua ratione, uti ſuperiùs monuimus, ergo AF, ad FC, eſt, ut FG, ad FD; & permutando AF ad FG, vel FG ad FB, ob ſemicirculum AGB, eſt ut FC, ad FD; & permutando, & convertendo FC ad FG, vel FG ad FD, ut FD ad FB: ac propterea quinque omnes FA, FC, FG, FD, FB, ſunt continuæ proportionales; quas invenire propoſitum fuit.

PROBL. VIII. PROP. XXXXI.

DAtam rectam AB, ſic in duo ſegmenta dividere, vt inter ipſa, tres mediæ arithmetica, geometrica, & harmonica, ſint in eadem data ratione, quæ tamen non ſit minoris ad majorem.

SUper datam rectam AB deſcribatur ſemicirculus ACB, quem ad B tangat BE æqualis radio; & data ratio ſit, ut EB ad BF, atque ab F agatur ipſi AB parallela FG: conſtat hanc neceſſariò occurrere ſemicirculi arcui in G. Præterea ex G ſuper diametrum AB demittatur perpendicularis GH. Dico punctum H quæſitum ſolvere.



Ex puncto H diametri applicetur in ſemicirculo ACB recta HC æqualis ipſi BE, ſive radio Circuli, uſque ad arcum AG, & producatur CH, uſque ad inferiorem ſemicirculi arcum in D. Jam, ex ſuperiùs ſæpius hucuſque oſtenſis, hæ tres rectæ HC, HG, HD, conficiunt tres medias arithmeticam, geometricam, & harmonicam, inter ſegmenta iſta AH, HB, ſuntque inter ſe in una eademque continua ratione quadam geometrica; ſed HC æquatur ipſi BE, ex conſtructione, & HG ipſi BF, ob parallelogrammum FH; ergo tres hæ mediæ ſunt in ratione data rectæ EB ad BF, adeòq; data recta AB ſecta eſt in H, uti propoſitum fuit.

PRO-

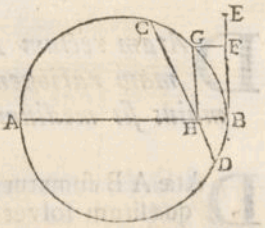
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [286] - 94
PUBLIC DOMAIN

PROBL. IX. PROP. XXXXII.

Datam rectam A B sic inæqualiter dividere, vt summa trium simul mediarum inter eius segmenta, sit æqualis ipsi datæ A B, sive sit æqualis summæ extremarum.

Flat constructio superior, & tangens B E sumpta æqualis radio semicirculi, secetur in F in ratione, quam Veteres divinam dixere; itaut E B ad B F, sit ut B F ad F E, & completa constructione, ut in præcedenti. Dico, punctum H exhibere datæ rectæ A B segmenta quæsita A H, H B.

Hoc est, summam trium mediarum H C, H G, H D, æqualem esse toti datæ A B, sive summæ extremarum A H, H B.



Nam H C, H G, H D, quum sint tres *mediæ inter* segmenta A H, H B, sunt [a] in continua ratione geometrica; sed tres quoque B E, B F, F E, sunt in continua ratione geometrica, per constructionem; B E verò æquatur ipsi H C, & B F ipsi H G; ergo reliqua F E, æquatur reliquæ H D; sed summa trium B E, B F, F E æquatur duplo eiusdem B E, sive ipsi datæ A B, vel summæ extremarum A H, H B: ergo etiam summa trium mediarum H C, H G, H D, æquatur ipsi datæ A B, sive summæ extremarum A H, H B, inter quas illæ sunt mediæ. Quod faciendum, & demonstrandum erat.

[a] ex Corollr. Propos. aliter 36. huius

COROLLARIA.

1 Hinc manifestè constat, quod si ratio harum trium mediarum inter duas extremas magnitudines (quæ semper est aliqua continua geometrica) fuerit ratio divina, necessariò quinque omnes esse in ipsa continua ratione divina.

2 Aggregatum earumdem trium duplum semper esse mediæ arithmeticæ.

3 Et quinque omnium aggregatum, esse duplum aggregati extremarum, ac duplum quoque aggregati trium mediarum.

4 Et aggregatum quinque magnitudinum in ratione divina esse quadruplum secundæ magnitudinis, quæ semper est media arithmetica inter extremas ex ipsis quinque.

MO-

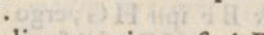
MONITVM.

OCcasione præcedentium noſtratum Propoſitionum de tribus mediatibus pertractantium, atque huius utillimi Problematis Euclidei, per quod ſecatur recta ſecundùm mediam, & extremam rationem, ſic, ut ſegmentum maius ſit medium geometricum inter minus, & totam; haud erit abs re, nec minus utile hoc loco ſequentes appoſuiſſe, quamdam cum præoſtenſis cognationem habentes, & quæ plurimis aliis cuidam novæ contemplationi inſervientes, maximè opitulantur.

PROBL. X. PROP. XXXXIII.

DAtam rectam AB dividere ſecundùm mediam, & extremam rationem arithmeticam. Vel ſic, ut ſegmentum maius ſit medium arithmeticum inter minus, & totam.

DAtæ AB ſumatur pars tertia BC, & punctum C, quæſitum ſolvet.



Qualium enim æqualium partium eſt AB, 3, & BC, 1, reliqua AC erit 2; ſed hi numeri 3, 2, 1, ſunt in continua ratione arithmetica: ergo ſegmentum majus AC eſt medium arithmeticum, inter minus CB, & totam AB; & AB ſecta eſt in C ſecundùm mediam, & extremam rationem arithmeticam. Quod erat, &c.

MONITVM.

AD ſequens Probl. XI. enucleandum requiritur uſus alterius auxiliarii, quod olim Geometriæ limine vix ſalutato, inter alia ſolvere nobis contigit, dum undecimam Propoſ. 2. Elem. ſimulque trigeſimam ſexti, univerſaliores reddere ſtudebamus.

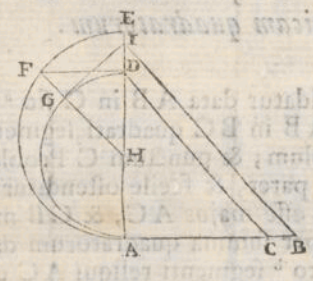
Id itaque illud eſt, quod Anno 1676. typis dedimus in quadam exercitatione ſub titulo *Oblectamenti Geometrici*, ad pag. 185. Sed ne Lector Opus hoc adire cogatur, idem auxiliarium hic iterum edere, & ſexti Lemmatis loco huius libri apponere libet, tum ad proximè ſequens Probl. tum ad alia plurima, etiam num referata, brevi fortaſſe aperienda, ſuiſque demonſtrationibus confirmanda.

LEM-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [288] - 96
PUBLIC DOMAIN

LEMMA VI. PROP. XXXXIV.

Datam AB sic dividere in C, ut rectangulum sub tota AB in sui segmentum BC, ad quadratum reliqui segmenti AC sit in quavis ratione data ED, ad DA.



Ipsæ datæ ED, DA ponantur in directum sic in EA, ut hæc EA cum data AB quemcumque constituant angulum EAB; ac super totâ EA, & partem AD describantur semicirculi AFE, AGD ad eamdem partem; atque supra diametrum AE erigatur ex puncto D in majori semicirculo perpendicularis DF; ac centrum H semicirculi minoris jungatur cum puncto F per rectam HF, quæ arcum AGD secet in G.

Et quoniam intra HE reperitur centrum majoris circuli, erit HE, quæ est omnium maxima, major ipsa HF, cui ab HE sumi poterit HI æqualis. Jungatur modò recta IB, cui ex D agatur æquidistans DC, quæ datam AB secet in C. Dico, rectangulum sub data AB in ejus segmentum BC ad quadratum reliqui AC esse in ratione data ED ad DA.

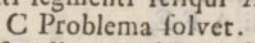
Jungatur recta IG. Jam, quoniam in triangulis FHD, IHG, duo latera FH, HD æquantur duobus IH, HG alterum alteri, & angulus ad H est communis: reliqua latera DF, GI erunt æqualia, & reliqui anguli ad D, G, æquales erunt; sed angulus ad D rectus est, ex constructione; ergo & ille ad G rectus est; adeoque tam DF, quàm IG tangit semicirculum AGD ad puncta D, G; ac ideò rectangulum AID, æquatur quadrato perpendicularis DF, vel rectangulo EDA; sed rectangulum EDA ad quadratum DA est, ut latus ED ad DA: ergo rectangulum quoque AID ipsi EDA æquale, ad idem quadratum DA est, ut linea ED ad DA. Sed rectangulum AID ad quadratum DA est, ut rectangulum ABC ad quadratum CA, ob laterum omnium proportionalitatem factam ab æquidistantibus IB, DC; ergo etiam rectangulum sub data AB in sui segmentum BC ad quadratum segmenti reliqui CA est, ut linea ED ad DA, sive in ratione data. Quod erat faciendum.

PROBL. XI. PROP. XXXXV.

DAtam rectam terminatam AB sic dividere, ut quadratum segmenti majoris, sit medium arithmeticum, inter quadratum minoris, & quadratum totius: vel secare datam AB secundùm mediam, & extremam rationem arithmeticam quadratorum.

a per Lemma præced.

DIvidatur data AB in C sic [a] ut rectangulum sub AB in BC quadrati segmenti reliqui AC sit subduplum; & punctum C Problema solvet.



Jam patet, & facilè ostenditur ex his duobus segmentis esse majus AC, & CB minus.

b 7. Lib. 2. Elem.

Insuper summa quadratorum datæ AB, & segmenti BC æquatur quadrato [b] segmenti reliqui AC cum duplo rectanguli sub AB, in BC, vel, ob constructionem, cum quadrato AC; quare eadem summa quadratorum, datæ AB, & segmenti minoris BC æquatur duplo quadrati AC segmenti majoris ejusdem datæ; ac ideò hæc tria quadrata AB, AC, CB sunt in continua ratione arithmetica 3, 2, 1, sive quadratum AC segmenti majoris est medium arithmeticum, inter quadratum AB totius, & quadratum CB segmenti minoris; sive secta est data AB in C secundum mediam, & extremam rationem arithmeticam quadratorum. Quod erat &c.

PROBL. XII. PROP. XXXXVI.

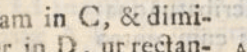
DAtam rectam terminatam AB, sic in duo segmenta inæqualia dividere, ut segmentum majus sit medium harmonicum inter datam, & segmentum minus. Quod idem est, ac secare datam secundùm mediam, & extremam rationem harmonicam.

Nempe secare datam sic, ut si ipsa sumatur pro primo termino, segmentum majus pro secundo, & segmentum minus pro tertio; primus terminus sit ad tertium [sive data recta ad segmentum minus] ut primus excessus ad secundum excessum; sive sit ut excessus, quo data recta superat majus segmentum, ad excessum, quo majus segmentum superat segmentum minus.

Da-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [290] - 98
PUBLIC DOMAIN

DAta AB secetur bifariam in C, & dimidium CB [a] sic secetur in D, ut rectangulum sub BC in sui segmentum CD, ad quadratum reliqui segmenti BD sit, ut unum ad quatuor. Dico, punctum D quæsitum solvere, hoc est segmentum majus AD esse medium harmonicum inter datam AB, & segmentum minus BD.



[a] per Prop. 44. hujus.

Ex reliquo dimidio CA datæ AB, sumatur AE æqualis DB.

Jam, quum sit, ex constructione, rectangulum sub BC in CD ad quadratum DB, ut 1, ad 4, erit rectangulum sub duplo BC in duplum CD, sive sub AB in ED, æquale quadrato ejusdem DB; ac ideò tota AB ad BD erit, ut BD ad DE; sed AE æquatur DB, ergo etiam AB ad BD est, ut AE ad ED.

Si igitur in tribus rectis AB, EB, DB, est ut data AB primus terminus ad tertium BD, ita AE primus excessus ad ED secundum; erit medius terminus EB medius harmonicus inter primum AB, & tertium BD; (ex definitione à Pappo allata) sed medius EB, ex *constructione*, æquatur ipsi AD; quare hæc ipsa quoque AD, scilicet segmentum majus datæ AB, est medium harmonicum inter datam AB, & segmentum minus BD. Secta est igitur data AB in D secundùm mediam, & extremam rationem harmonicam. Quod erat faciendum.

PROBL. XIII. PROP. XXXXVII.

DAtam rectam terminatam AB sic inæqualiter secare, ut quadratum segmenti majoris sit medium harmonicum inter quadratum totius datæ, & quadratum segmenti minoris.

Nempè sic, ut quadratum totius ad quadratum segmenti minoris sit, ut differentia inter quadrata totius, & segmenti majoris ad differentiam inter quadrata segmentorum.

Vel denique secare datam AB, secundùm mediam, & extremam rationem harmonicam quadratorum.

ID verò solvere conabimur, per novam quamdam lineam, quam Veteres Geometræ inter locos lineares ponere non contempsissent.

Super data A B deſcribatur quadratum A D C B, cui cum centro A, & radio A B inſcribatur circuli quadrans A B F D, & ſecta bifariam A B, in E, per verticem E, circa axem E B ſuper ſemiordinatam B C deſcribatur ſemiparabola E C, cujus focus [a] erit B, & quæ quadrati diametrum B D ſecet in G, & quadrantis arcum in F. In trianguli vero ſpatio B A D infra baſim B D tali deſignetur lege curva linea B O D, ut (ducta in quadrati ſpatio A B C D quavis recta H I, lateribus A D, B C parallela, & ſecante quadrantis arcum in L, ac diametrum in M) punctum O novam curvam deſcribens exhibeat partem I O, quæ poſt tres rectas I H, I L, I M ſit quarta proportionalis. Qua verò geometrica ratione aſſequantur hæc puncta O; hoc unico exemplo conſpicitur.

[a] per converſum 1.P. Primi hujus



A puncto L, in quo ducta H I parallela lateribus quadrati D A, C B ſecat arcum quadrantis, ducas L N radio A B parallelam, & jungas rectam B N; nam communis ſectio rectæ B N cum recta M I, quæ ſit punctum O, dat quartam quæſitam I O: & ſic in reliquis omnibus rectis M I, triangulum ſimile ipſi D A B conſtituentibus: propterquamquod prima H I, ad ſecundam I L, ſit ut æqualis D A ad æqualem A N, vel (ob parallelas D N A, M O I inter rectas coeuntes D B, N B, A B, in triangulis D B A, N B A) ut tertia M I ad quartam I O, cujus extremum punctum O reperirur in nova curva B O D intra triangulum B A D deſcripta, ubicumque intra ipſum ſit recta M I parallela ipſis D A, C B.

Et quoniam recta B D eſt diagonalis in quadrato A B C D, & hæc curva B O D eſt diagonalis in quadrante A B F D, ac uſum præſtat ad propoſitam mediam harmonicam inveniendam; ideò curvam hanc novam B O D nuncupare liceat diagonalem quadrantis harmonicam, quæ neceſſariò ſecat curvam partem E G ſemiparapolæ E G C in aliquo puncto O, inter E, & G; eò quòd ipſa curva ſit tota intra triangulum B A D.

Ex hac itaque communi ſectione O curvæ diagonalis harmonicæ cum curva ſemiparabolæ, demittatur ſuper datam A B perpendicularis O I, ſecans datam A B in I inter ejus medium punctum E, & extremum B. Dico, ſegmenta hæc inæqualia A I, I B datæ A B eſſe quæſita.

Producatur I O in quadrato, quæ ſecet hujus diametrum B D in M, arcum quadrantis in L, & latus D C quadrati in H.

Jam

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [292] - 100
PUBLIC DOMAIN

Jam quadratum ordinatæ LI in quadrante ABFD æquatur [a] differentiæ inter quadratum datæ AB, & quadratum segmenti AI. Quadratum verò ordinatæ IO in semiparabola EOC, cujus focus est B [b] æquatur differentiæ inter quadrata AI, IB segmentorum datæ AB: sed cùm sit (ob hanc diagonalem harmonicam BOD) HI ad IL, ut MI ad IO, & permutando HI ad IM, ut LI ad IO, erit quoque quadratum HI, ad quadratum IM, sive quadratum AD ad IM, sive quadratum totius datæ AB, ad quadratum sui segmenti minoris BI, ut quadratum LI ad quadratum IO; hoc est ut differentia inter quadrata datæ AB, & sui segmenti majoris AI, ad differentiam inter quadrata suorum segmentorum inæqualium AI, IB.

[a] per Prop. 30. lib. 2. hujus.

[b] per Prop. 33. lib. 2. hujus.

Quapropter data AB secta est in I in duo segmenta inæqualia AI majus, & IB minus, sic, ut quadratum majoris AI sit medium harmonicum, inter quadrata totius datæ AB, & segmenti minoris BI. Id quod est idem ac dicere datam AB sectam esse in I, secundum mediam, & extremam rationem harmonicam quadratorum. Quod erat faciendum.

Et hæc pro interim de tribus his Mediétatibus dicta sufficiant.

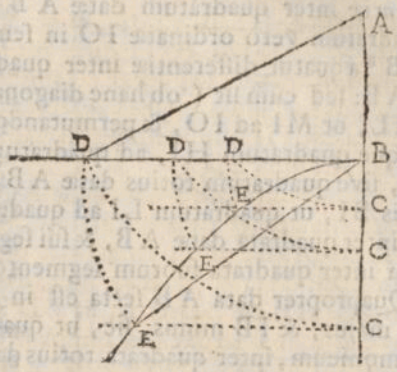
Cæterum (quum suavissimo Supremi Domini jussui, recepto hac die vigesima quarta Novembris currentis Anni 1674. parere debeam, & ut sæpè accidit, longè ab Urbe per plures fortasse annos immorari, adeòque impressioni præsentis Operis Conici hoc Libro Tertio finem ponere cogar) ne sequentes Paginæ vacent, has dumtaxat liceat mihi peculiares Artes adjicere ad Sectiones Conicas (quas ut plurimùm in ipso depiximus mechanicè per regulam, & circinum) expeditè designandas, suis tamen geometricis demonstrationibus hoc in Volumine allatis, confirmatas: Et primò (ex dato vertice, & foco) Sectionem parabolæ, quam describere oportuit in præcedenti Problemate decimo tertio.

PROBL. XIV. PROP. III.

Data recta AB pro semirecto latere describendæ Parabolæ; per verticem B, & circa productum axem BC, ipsam in plano ope circini, & regulæ, per puncta continuata describere.

Super BC excitetur per B perpendicularis BD cui æquidistanter ducantur quotcumque rectæ CE, infra ipsam BD; &, posito cuspide cruris circini in A, intervallis singulis AC, AC, fiant totidem arcus CD, CD, primam normalem BD secantes in D, D: posteà verò, posito cuspide in B, intervallis singulis

lis BD, BD, totidem fiant arcus DE, DE, usque dum secent in E, E &c. rectas CE, CE &c. primò ductas, & tangentes proprios arcus CD, CD &c. primò notatos in punctis C, C &c.



Nam singula puncta E, E &c. sunt ad quæsitam Parabolam, cujus vertex B, & semirectum latus est data AB.

Pro hujus praxeos demonstratione, in quovis ex paribus arcuum notatorum jungantur ipsorum radii AD, BE, quales in figura. Erit ergo, in triangulo ABD rectangulo ad B, quadratum AD, sive AC ipsi AD æquale, duobus simul quadratis AB, BD æquale, vel duobus AB, BE; & hoc semper: quare [a] singula puncta E, E &c. sunt ad locum Parabolæ, cujus est vertex B, & semirectum latus est data AB.

[a] per conversũ Prop. 26. hujus.

Si igitur æquabili manus ductu, puncta B, E, E, E &c. jungantur curva linea, quæsita parabola erit descripta. Quod erat, &c.

PROBL. XV. PROP. IL.

Dato vertice A, & foco C, pro quacumque Coniſectione deſcribenda, & pro Ellipſi, atque Hyperbola ſecundæ, & tertiæ figuræ, dato etiam axe trauſverſo AB in directum poſito cum AC, vel infra A, ut in 2. vel ſupra A, ut in 3. & propoſitum ſit has ipſas Coniſectiones, ope circini, & regulæ per puncta continuata deſcribere, & primo earum dimidia.

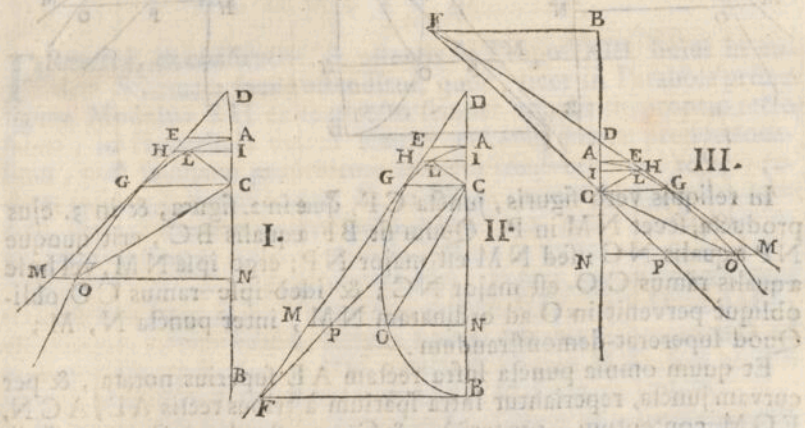
IN prima figura à datis punctis A, C, agantur ſuper AC perpendiculares AE, CG; atque ex AE ſumatur AE æqualis ipſi AC intervallo inter verticem, & focum dato; ac ſumatur CG ipſius AC, vel AE dupla, & jungatur recta EG, quæ quantumlibet producatur verſus M.

Et in 2. & 3. figura, à punctis extremis A, B dati axis tranſverſi ducantur ad eamdem partem axis in 2. figura, at ad diverſas in 3. perpendiculares AE, BF, quæ ſumantur æquales ipſis CA, CB, & jungatur recta FE, quæ quantumlibet producatur in 3. verſus M; & in utraque per focum C ducatur CG ipſis AE, BF parallela, quæ, in 2. ſecet EF, & in 3. ejus productam, in G.

Du-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [294] - 102
PUBLIC DOMAIN

Ductis denique (in unaquaque ex his tribus figuris, à quovis puncto I rectæ AC inter verticem A, & focum C sumpto, & à quovis puncto N productæ AC, infra CG notato) rectis IH, NM parallelis ipsis AE, CG, & occurrentibus cum EM in punctis H, M; atque unaquaque ex his IH, NM sumpta per circinum, si applicetur (tanquam ramus ex loci origine C) transversim in angulis rectis CIH, CNM à C in L, & à C in O usque dum id fieri possit, non tam ad sinistram quàm ad dexteram partem axis ACN; & utrinque ab axe puncta A, L, C, O per curvam lineam æquabili manus ductu jungantur, descripta erit in prima figura Parabola, in secunda Ellipsis, & in tertia Hyperbola ALGO; in quibus A est vertex, & C focus, & in secunda, ac tertia data recta AB est earum axis transversus, prout hæc omnia eliciuntur, ac demonstrantur ex converso Propos. 53. Lib. I. hujus Divinationis.



Quod verò omnes rami CL, CO, tam supra, quàm infra CG, perveniant à foco C, vel obliquè, vel saltem normaliter ad suas æquales ordinatas IH, NM: id ostendendum superest.

Nam, quum in prima figura sit CG dupla AE, sive major ipsa AE, rectæ GE, CA productæ simul conveniunt supra AE, ut in D.

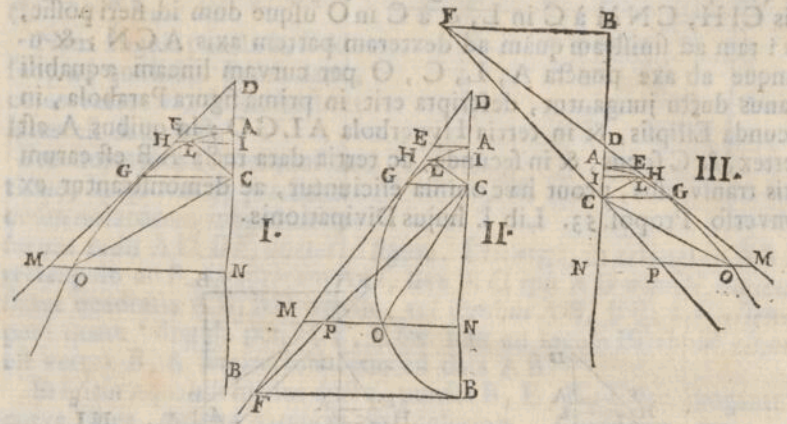
In secunda figura, quum sit BF æqualis BC, & AE æqualis AC, sitque BC major CA; erit quoque BF major AE; & ideò FE, CA simul conveniunt supra AE, ut in D.

In tertia verò figura, quum sint FB, AE ad diversas partes rectæ AB, junctæ FE necessariò rectam AB supra punctum A secabit, ut in D.

Modò in singulis figuris ordinata IH, vel ramus CL ipsi IH sumptus æqualis, est major AE, vel CA, & eò major CI; ac propterea CL pervenit obliquè ad ordinatam IH inter puncta I, H.

In-

Infra verò CG, in prima figura, quum ſit CG dupla CA, vel AE; erit CD dupla DA, & DA æqualis AC, & CG æqualis CD, & NM, vel huic æqualis ramus CO, æqualis ipſi ND; adeoq; major NC: quare ipſe ramus CO pervenit obliquè in O ad ordinatam NM inter puncta N, M.



In reliquis verò figuris, juncta CF, quæ in 2. figura, & in 3. ejus producta, ſecet NM in P. Quum ſit BF æqualis BC, erit quoque NP æqualis NC: ſed NM eſt major NP; ergo ipſa NM, vel huic æqualis ramus CO eſt major NC; & ideò ipſe ramus CO obli- obliquè pervenit in O ad ordinatam NM, inter puncta N, M; Quod ſupererat demonſtrandum.

Et quum omnia puncta infra rectam AE ſuperius notata, & per curvam juncta, reperiantur intra ſpatium à tribus rectis AE, ACN, EGM contentum, præter A, & G; conſtat has rectas neceſſariò tangere has curvas ad ipſamet puncta A, G.

Simili arte, qua Coniſectionum deſcriptiones, ac demonſtrationes eruimus hìc à quibuſdam Propoſ. Operis hujus; à pluribus quoque aliis ejuſdem Operis alias earumdem conformationes, unicuiq; vel leviter in Geometricis verſato, multiplici via mechanicè deſcribere in promptu erit.

ET HIC ESTO LIBRI TERTII FINIS, ATQ; VERITATIS DEO IMPERSCRUTABILI LAUS, HONOR.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [296] - 104
PUBLIC DOMAIN

VINCENTII VIVIANI
ADDENDA LIBRO PRIMO.

Pag. 22. post Scholium Propoſit. XIII. adde ſequens

SCHOLIUM II.

PRætereà, ex conſtructis, & oſtenſis in Propoſ. XIII. hujus in eodem Schemate facilè oſtenditur, quòd, licet in Parabola primæ figuræ Modulus BH ex ſemirecto ſemper æqualis ſit proprio recto lateri, in Hyperbola tamen ſemper æquatur quartæ proportionalium, poſt ſummam propriorum laterum tranſverſi cum recto, rectum ipſum, & tranſverſum. Et in Ellipſi, tam oblonga, quàm prolata, ſemper æquatur quartæ proportionalium, poſt differentiam inter tranſverſum, & rectum, rectum ipſum, & ipſum tranſverſum.

Nam in figura ſecunda exhibente Hyperbolam, quum ſit proprium tranſverſum latus EB ad proprium rectum BD, ut EH ad HG; eſt quoque, componendo, ſumma horum laterum EB cum BD ad rectum BD, ut EH cum HG, velut EH cum HB; ſive ut EB proprium tranſverſum ad HG, vel ad BH ſuum modulum.

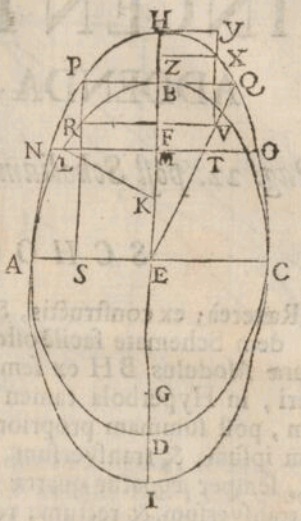
In tertia verò figura *Ellipſis oblongæ*. Quum ſit proprium tranſverſum EB ad proprium rectum BD, ut EH ad HG, erit EB minus BD, ſive differentia propriorum laterum ad proprium rectum BD, ut EH minus HG, vel minus HB, ſive ut proprium tranſverſum EB ad HG, vel ad BH ſuum modulum.

In quarta demum Ellipſis prolatæ, quum ſit DB proprium rectum latus ad BE proprium tranſverſum, ut GH ad HE, vel ut BH ad HE; erit differentia inter propria latera DB, BE ad proprium rectum BD, ut differentia inter BH, HE, ſive ut BE proprium tranſverſum ad eamdem BH ſuum modulum. Quod erat &c.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [297] - 105
PUBLIC DOMAIN

Ad Pag. 69. post Coroll. Propoſit. XXXIX. repetita hoc loco figura, quæ ibi, & ſuppleta, adde.

Prætercà; ſi quæratur ad quod punctū cadat focus ſecūdæ Ellipſis A H C I, producatur R F ſemiordinata per focū F Ellipſis datæ uſque ad occurſum cum radio E Q in V, à quo agatur recta V Y, quæ tangenti H Y occurrat in Y, & arcum H Q ſecet in X, à quo ordinetur ad H B recta X Z.



Dico, punctum Z eſſe focum quæſitum.

Quum enim ſit, ex conſtructione peracta in ipſa Propoſit. 39. H E ad E B, ut E B ad E F, ſive ut B Q ad F V, vel ad Z X; erit rectangulum ſub E H in Z X æquale rectangulo ſub E B, in B Q, ſive æquale quadrato ſemiaxis conjugati A E (quòd ſit per primò oſtenſum in eadem Propoſit. 39. recta B Q dimidium recti lateris Ellipſis A B C D) ac ideò punctum Z eſt focus alterius Ellipſis A H C I. Quod erat &c.

ADDENDA LIBRO SECUNDO.

Ad Pag. 13. poſt Propoſit. XIX.

M O N I T V M.

IN conſtructione Propoſitionis Decimæ nonæ, quamvis ordinatio ponatur ad axem conjugatum, in demonſtratione tamen verificatur quoque de ordinatione ad quamlibet diametrum, atque hæc Propoſitio inſignem quamdam aperit Hyperbolæ proprietatem, quam in ſequenti Theoremate univerſaliter exponere, & oſtendere libet, ex jam alibi in hac Divinatione demonſtratis.

PRO-

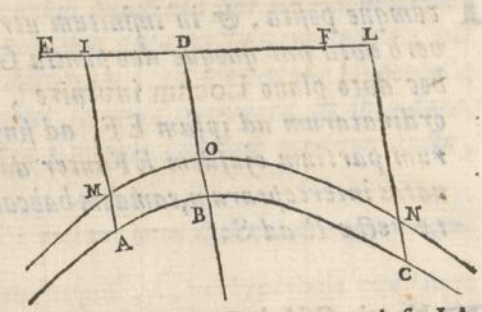
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [298] - 106
PUBLIC DOMAIN

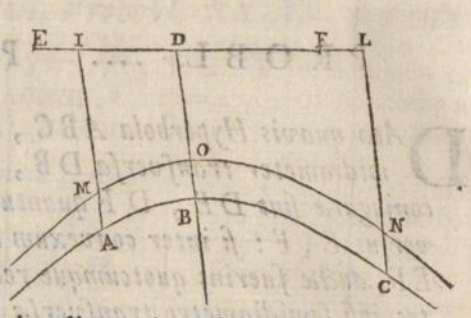
PROBL. .... PROP. ....

DAta quavis Hyperbola ABC, cujus ſit centrum D, ſemidiameter tranſverſa DB, ac ſemidiametri ſecundæ conjugatæ ſint DE, DF quantumlibet utrinque productæ verſus E, F: ſi inter convexum curvæ ABC, & rectam EF, ductæ fuerint quotcumque rectæ IA, LC æquidiſtantes ipſi ſemidiametro tranſverſæ DB. Dico, harum ordinatarum quadrata ad aggregata quadratorum partium ſecundæ diametri EF, inter hujus terminos, & ipſas ordinatas contentarum, ſemper illam eamdemque rationem habere, quam habet datæ Hyperbolæ diameter tranſverſa, cui ordinatæ æquidiſtant, ad duplum ſui recti lateris.

SI enim hujus Hyperbolæ ABC ſemidiameter tranſverſa DB poterit duplum DE, vel DF ſemiconjugatæ; jam per decimam nonam Propoſitionem Libri Secundi hujus, conſtabit propoſitum: Quoniam in figura, quæ ibi ad pag. 12. Libri Secundi, quadratum CD ad duo ſimul æqualia quadrata CA, CB, eſt ut ſemitranſverſum CD à duo ſimul ſemirecta latera Hyperbolæ GDE, vel ut latus tranſverſum ad duo ſimul recta latera.

Atſi in hac Hyperbola ABC quadratum DB fuerit vel majus, vel minus duplo quadrati ſæcundæ diametri DE (manente hac DE) ponatur hoc loco, quòd quadratum DO, ſit præcisè duplum quadrati DE; & concipiatur alia Hyperbola MON concentrica datæ ABC, & cujus eadem ſit ſecunda diameter, conjugata eidem tranſverſæ DB; quæq; ipſas IA, LC ſecet in M, N. Jam conſtat, ex ſecunda Propoſitione Libri Primi hujus, omnes ordinatas ab his Hyperbolis proportionaliter dividi; ac ideò, & quadrata ipſarum eſſe proportionalia; ſed ratio quadratorum IM, DO, LN erga ſummas quadratorum EI, IF; ED, DF; EL, LF, eſt ſemper eadem æqualitatis, ut in Propoſit. XIX. Secundi hujus oſtenſum fuit; ergo ratio quoque quadratorum IA, DB, LC erga eaſdem ſummas quadratorum, erit ſemper eadem, ſed ejuſdem inæqualitatis.





Sed duo ſimul quadrata DE, DF æquantur dimidio quadrati totius EF ſecundæ diametri; ergo in data Hyperbola ABC, quadratum ſemidiametri tranſverſæ DB ad duo ſimul DE, DF eſt; ut idem quadratum DB ad dimidium quadrati ſecundæ diametri EF; vel ſumptis horum quadruplis, ut quadratum totius diametri tranſverſæ ad duplum quadrati ejuſdem EF conjugatæ, vel, ut diameter tranſverſa ad duplum ſui recti lateris: ſed nuper oſtenſum eſt, rationem inter quadratum DB, & duo ſimul DE, DF ſimilem eſſe rationi inter quadratum IA, & duo ſimul IE, IF, ſimilemque rationi inter quadratum LC, & duo ſimul LE, LF &c. ergo hæ omnes rationes ſunt ſimiles illi eidem rationi, quæ reperitur inter diametrum tranſverſam datæ Hyperbolæ, & duplum ſui recti lateris. Quod erat demonſtrandum.

Ex his facilè ſolvemus etiam Problema ſequens, quod aliqui perarduum putarunt.

PROBL. .... PROP. ....

IN dato plano ABCD, in quo ſit data linea recta EF, utcumque poſita, & in infinitum utrinque producta; in hac verò data ſint quoque duo puncta G, H; & propoſitum ſit in hoc dato plano Locum *invenire, in quo ſingula quadrata ordinatarum ad ipſam EF, ad ſingula aggregata quadratorum partium ejuſdem EF inter data puncta G, H, & ordinatas interceptarum, eamdem habeant rationem cujuslibet datæ rectæ R ad S.*

DIſtantia GH inter data puncta bifariam ſecetur in I, à quo in dato plano agatur IK, utcumque inclinata ſuper EF; ſumaturque recta T dimidium datæ rectæ S, ac inter has R, T, ſit media proportionalis V; & ut eſt V ad R, ita fiat IG ad IL; factoq; puncto I centro, IG ſecunda ſemidiametro conjugata, & IL ſemidiametro tranſverſa, deſcribatur in plano dato AC per punctum L Hyperbola MLN.

Dico hujus convexum eſſe *Locum* quæſitum.

Quum



Quum ſit enim, ex conſtructione, ut V ad R, ita IG ad IL, convertendo erit ut R ad V, ita IL ad IG, & ut quadratum R ad quadratum V, vel ut linea R ad lineam T, ita quadratum IL ad quadratum IG, vel ita diameter tranſverſa hujus Hyperbolæ ad ſuum rectum latus; Sed, ut eſt T ad ſui duplum, ita eſt idem rectum latus ad ſui duplum: quare ex æquali, ut eſt R ad S, quæ eſt data ratio, ita eſt tranſverſa diameter hujus Hyperbolæ ad duplum ſui recti lateris; ſed ex præcedenti Theoremate univerſali, uti eſt tranſverſa diameter cujuſcumque Hyperbolæ ad duplum ſui recti lateris, ita ſunt quadrata ordinatarum ad diametrum conjugatam, ad aggregata quadratorum partium ſecundæ diametri ejuſdem Hyperbolæ, & in hac Hyperbola ratio inter diametrum tranſverſam, & duplum ſui recti lateris oſtenſa eſt eadem, ac ratio data inter R, & S: ergo hujus Hyperbolæ convexitas eſt *Locus*, qui quærebatur. Quod erat, &c.

Ex his denique elicitur ſequens

PROP. .... THEOR. ....

LOcus *ordinatarum, quarum quadrata ſint media arithmetica inter quadrata partium datæ rectæ terminatæ, vel integrantium, vel coadditarum, eſt convexum Hyperbolæ æquilateræ, cujus diameter ſecunda conjugata ſit ipſa data, diameter verò tranſverſa per ejus punctum medium ducta, ſit huic æqualis.*

NAm ſic hujus Hyperbolæ rectum latus alterutri diametro æquale erit.

Sunt enim, ex nuper addita Propoſ. .... in Hyperbola æquilatera quadrata ordinatarum ad diametrum ſecundam conjugatam ad aggregata quadratorum partium datæ ſecundæ diametri, vel integrantium, vel coadditarum, ut tranſverſa diameter ad duplum ſui recti lateris. Sed hìc, ex hypotheſi, tranſverſa diameter æqualis eſt recto lateri; ergo ratio quadrati cuiuſcumque ordinatæ ad aggregatū quadratorum partium, vel integrantium, vel coadditarum ſuæ ſecundæ diametri conjugatæ, eſt ſemper ea, quæ inter unum, & duo; hoc eſt, unumquodque quadratum ordinatæ eſt dimidium aggregati quadratorum dictarum partium; ſed omne dimidium duarum ſimul magnitu-

tudinum homogenearum medium eſt arithmeticum inter eaſdem ; ergo in Hyperbola æquilatera quadratum quoque cujuſcumque ordinatæ eſt medium arithmeticum inter quadrata partium datæ rectæ, vel integrantium, vel coadditarum; ſed omnes hujuſmodi ordinatæ terminant ad convexum Hyperbolæ æquilateræ: quare *Locus* optatæ ordinationis eſt is, quem propoſuimus. Quod erat, &c.

ADDENDA LIBRO TERTIO.

Ad pag. 56. Corollarium, quod ibi, notetur num. I. & ut ſequitur reſtituatur, cum additione Secundi ſuper figuris ejuſdem pag. 56.

COROLL. I.

APparet ex hac Propoſit. Septima omnium triangulorum EBF. EGF ſuper eadem baſi EF conſtitutorum, quorum vertices B, G æquidiſtent à puncto medio D communis baſis EF, vel in quibus ſummæ quadratorum propriorum laterum EB, BF; EG, GF ſint æquales, maximum eſſe æquicrure EBF. Nam hujus vertex B maximè diſtat à communi baſi EF.

COROLL. II.

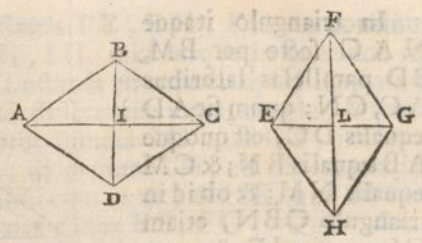
ET reliquorum ſcalenorum EGF, illud, cujus vertex G magis diſtet à vertice æqui-cruris EBF, ſemper minus eſſe; donec omnium minimum congruat cum recta propriæ baſis, ſeu triangularem figuram amittat.

SCHOLIUM II.

EX his inſuper ſequitur, quod in omni parallelogrammo ABCD ſumma quadratorum ſuorum laterum æquatur ſummæ quadratorum ſuarum diametrorum AC, BD.

Nam hæ ſe bifariam ſecant in I, & per Propoſitionem ſextam Libri Tertii hujus, in triangulo ABC quadrata duorum laterum AB, BC æquantur duplo quadrati IA, cum duplo quadrati IB; itidemque in triangulo CDA quadrata duorum laterum CD, DA æquantur

tur duplo quadrati IC, cum duplo quadrati ID: ergo quatuor simul quadrata AB, BC, CD, DA, æquantur duplo quadratorum IA, IB, IC, ID; sed tam duo quadrata IA, IC, quàm duo IB, ID, inter se sunt æqualia; ergo quatuor quadrata laterum AB, BC, CD, DA æquantur quadruplo quadrati IA, cum quadruplo quadrati IB: sive æquantur duobus simul quadratis diametrorum AC, BD. Quod erat, &c.



SCHOLIUM III.

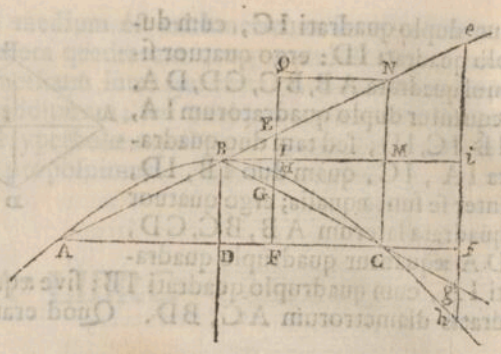
IN parallelogrammis ABCD, EFGH, æqualia latera singulum singulo habentibus; sed quæ diversos angulos inter se constituant, adeoque, & diversas diametrorum longitudines; par tamen quadratorum super diametros AC, BD unius æquatur pari quadratorum super diametros EG, FH alterius. Nam utrique ex his paribus æquatur summa quadratorum quatuor laterum proprii parallelogrammi: sed hæ summæ quadratorum inter se sunt æquales, quod unumquodque latus, unicuique lateri singulum singulo æquale sit; ergo & paria quadratorum AC, BD; EG, FH sunt æqualia.

Ad pag. 85. Quartum Lemma, & Propos. 33. sic aliter clariùs est exponenda super hac figura, ac demonstranda, cum additione sequentium Scholiorum.

SI fuerit quævis Parabolæ portio ABC, cujus sit basis AC diameter BD, ac triangulum inscriptum ABC, alterum verò laterum, ut AB sit quantumlibet productum versus E, sitque diametro BD, inter D, & C, ducta quævis æquidistans FE productam AB secans in E, curvam BC Parabolæ in H, & reliquum latus BC in G. Dico, FH inter curvam, & basim esse mediam harmonicam inter rectas EF, FG.

PEr punctum B ducatur BM parallela ipsi DC, quæ tangat parabolam ad B, & per C ipsi DB parallela CM, quæ producatur usq; ad BE in N. In

In triangulo itaque NAC ſecto per BM, BD parallelas lateribus AC, CN; quum ſit AD æqualis DC, eſt quoque AB æqualis BN; & CM æqualis NM; & ob id in triangulo CBN, etiam GI æquatur IE, & utravis harum minor ipſa FI cui ſumatur IQ æqualis.



Jam, ob vulgatam Parabolæ proprietatem quadr. tang. BM ad quadratum tangentis BI, vel quadratum CM ad quadratum IG eſt, ut linea CM ad IH, vel, ut linea FI ad IH; quare linea FI ad IG eſt, ut IG ad IH, & per converſionem rationis IF ad FG eſt, ut IG ad GH (ſumptis duplis antecedentium IF, IG) QF ad FG, ut EG ad GH; & dividendo QG ad GF eſt, ut EH ad HG, ſed QG æquatur ipſi EF; ergo etiam EF ad FG eſt, ut EH ad HG. Quoniam igitur in his tribus rectis FE, FH, FG, prima FE ad tertiam FG eſt, ut prima differentia EH ad ſecundam HG; erit harum trium media FH media harmonica inter extremas FE, FG. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM I.

SEquitur hinc, quod (tribus datis magnitudinibus in quavis continua geometrica ratione) ſemper ſumma differentiarum eſt media harmonica, inter ſummam maximæ magnitudinum, cum media, & maximam differentiarum.

Superiùs enim oſtenſum eſt, in tribus datis IF, IG, IH in continua ratione geometrica, ipſam FH, quæ eſt ſumma differentiarum earumdem trium eſſe mediam harmonicam inter EF (quæ conſtat ex IF maxima trium datarum, & ex IE, vel ex huic æquali IG media earumdem trium proportionalium) & inter FG, quæ eſt maxima differentiarum earumdem trium continuè proportionalium IF, IG, IH. Et è contra.

SCHOLIUM II.

SEquitur etiam, quòd (tribus datis magnitudinibus in continua ratione harmonica) dimidium differentiæ inter primam, & tertiã, ſemper eſt media geometrica inter ſummam ejuſdem dimidii cum tertia, & differentiam inter hanc ſummam, & mediam harmonicam.

In

In tribus enim ſuperiùs demonſtratis FE, FH, FG in continua ratione harmonica, tres IF, IG, IH ſunt utique in continua ratione geometrica; ſed media IG oſtenſa eſt æqualis ipſi IE, quarum utraque eſt dimidium totius EG differentiæ inter primam, & tertiã trium harmonicarum, & IF æquatur ſummæ IG cum GF, ſive ſummæ ejuſdem dimidii cum tertia; ac demum IH, eſt differentia inter IF (quæ eſt ſumma dicti dimidii cum tertia) & HF, quæ eſt media harmonica data inter extremas dictas EF, FG. Quare, &c.

SCHOLIUM III.

DEnique. Si producantur dextrorſum rectæ ABN ad e, BM ad i, BC ad g, ADC ad f, atq; curva Parabolæ BHC ad h; & extra NC agatur quæcumque recta eh, ipſi NC parallela, quæ neceſſariò ſingulas lineas productas ſecabit in punctis e, i, g, f, & h. Dico, hujus rectæ eh tria ſegmenta he, hf, hg ſemper eſſe in quadam *continua* ratione harmonica.

In ſimilibus enim triangulis CBN, gBe ſectis à recta BMi, oſtenſa eſt CN æqualis MN; quare & gi æquatur ipſi ie, ſed (ob Parabolam BHCh, & æquidiſtantiam rectæ ih ad diametrum BD) tres ih, ig, if, ſunt in quadam continua ratione geometrica; illarumq; trium he, hf, hg, recta hf eſt ſumma differentiarum maximæ cum media, & mediæ cum minima; ſumma verò ex ih maxima trium, & ex ig media, eſt ipſa he [quum ie, ſit æqualis ipſi ig] & maxima demum differentiarum eſt hg: quare, per primum Scholium hujus tres he, hf, hg ſunt in quadam continua ratione harmonica: adeoque prima he ad tertiam hg, eſt ut ef prima differentia ad fg ſecundam. Quod erat demonſtrandum.

Ad pag. 86. ſuper figura, quæ ibi, immediatè inter verſus 15. & 16. addendum eſt ſequens

SCHOLIUM.

SEd in hac Parabola, cujus diameter ED æquatur utrique ex ſemibaſibus DA, DB, ſive æquatur ſuo recto lateri, quævis FC ipſi diametro ED parallela, eſt media harmonica inter partes integrantes AC, CB datæ rectæ AB, omneſque ordinatæ ED, FC, per Parabolæ proprietatem, inter ſe ſunt, ut rectangula ADB, ACB ſub partibus baſis AB; ſequitur hinc, quòd omnes mediæ harmonicæ ED, FC inter partes integrantes eamdem rectam AB ſunt proportionales ipſis rectangulis ADB, ACB ſub partibus integrantibus ipſam AB, & inter quas illæ ſunt mediæ harmonicæ.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [305] - 113
PUBLIC DOMAIN

Sed unumquodque ex his rectangulis ADB, ACB, æquatur quadrato mediæ geometricæ inter partes AD, DB, & AC, CB; ergo ipſæ mediæ harmonicæ ED, FC ſunt proportionales quadratis medio loco geometricè proportionalium inter eaſdem partes integrantes datam AB.

Ad pag. 88. ſuper figura, quæ ibi, immediatè poſt Scholium II. addenda ſunt quæ ſequuntur Scholia.

SCHOLIUM III.

IN triangulis ſimilibus rectangulis EDB, DFB ad puncta D, F eſt ſubtenſa BE major latere BD, & ſubtenſa BD major BF; quapropter inter extremas datas majorem AB, & minorem BC, media arithmetica BE major eſt media geometrica BD; & media geometrica BD maior eſt media harmonica BF.

SCHOLIUM IV.

INſuper quadratum BE ſuperat quadratum BD quadrato DE, vel quadrato EC; quod eſt ſubquadruplum quadrati AC, quæ eſt differentia inter datas coadditas AB, BC: ergo quadratum mediæ arithmeticæ inter duas datas, ſemper ſuperat quadratum mediæ geometricæ inter eaſdem ſubquadruplo quadrati differentiæ inter ipſas.

SCHOLIUM V.

PRætereà quadratum BD ſuperat quadratum BF quadrato FD; ſive rectangulo ſub AF, FC; vel rectangulo ſub EF, FB; ergo quadratum mediæ geometricæ inter datas, vel rectangulum ſub datis ſemper ſuperat quadratum mediæ harmonicæ inter eaſdem rectangulo ſub differentia inter majorem datarum, & mediam harmonicam in differentiam inter mediam harmonicam, & minorem datarum; vel rectangulo ſub ipſa media harmonica in differentiam inter mediam harmonicam, & mediam arithmeticam.

Ad

Ad pag. 91. post Corollarium Propos. 37. adde quæ sequuntur Scholia.

SCHOLIUM. I.

DEnuo. Quum sit rectangulum sub extremis datis æquale rectangulo sub media arithmetica, & media harmonica inter easdem; sitque idem rectangulum sub extremis datis æquale quadrato mediæ geometricæ inter easdem datas; erit etiam quadratum mediæ geometricæ inter extremas datas æquale rectangulo sub media arithmetica, & media harmonica inter easdem.

SCHOLIUM II.

ITidem. Quum rectangulum sub extremis datis AB, BC sit æquale rectangulo sub media arithmetica BD in mediam harmonicam BE; erit duplum rectanguli sub extremis AB, BC, æquale duplo rectanguli sub media arithmetica BD, in mediam harmonicam BE; hoc est, erit æquale unico rectangulo sub summa extremarum AB, BC (quæ est dupla mediæ arithmeticæ BD) in ipsam mediam harmonicam BE.

SCHOLIUM III.

TAndem. Quum duplum rectanguli sub extremis datis magnitudinibus sit æquale, uti nuper ostensum est, unico rectangulo sub summa datarum in mediam harmonicam inter datas; hìc statim habemus demonstrationem sequentis Canonis, per quem expeditè reperiri queat numerus, qui sit medius harmonicus inter duos quoscumque datos. Qui talis est, nimirum.

Duplum producti datorum numerorum dividatur per summam ipsorum, & quotiens erit quæsitus medius harmonicus; nempè ratio inter datos primum, & tertium erit eadem ac ratio differentiæ inter primum datum, & medium inventum ad differentiam inter medium inventum, & tertium datum, ut apparet proximo exemplo.

Propositum sit inter numerôs datos 17, & 5 invenire medium harmonicum.

Ipsi dati 17, & 5 multiplicentur simul, & fiet 85, qui duplicetur, & fiet 170, qui dividatur per datorum summam, quæ est 22, & quotiens est $7\frac{8}{11}$, qui demum erit medius quæsitus inter datos 17, & 5.

Nam primus 17 ad tertium 5 eſt, ut differentia inter primum 17, & medium inventum $7\frac{8}{11}$, quæ eſt $9\frac{3}{11}$ ad differentiam, inter medium inventum $7\frac{8}{11}$, & tertium 5, quæ eſt $2\frac{8}{11}$.

Veluti oſtendit ordo ſequentis regulæ. 17 ad 5 ut $9\frac{3}{11}$ ad $2\frac{8}{11}$; ſive ut 102 ad 30, qui numeri ſunt ſextupli datorum 17, & 5.

SCHOLIUM IV.

In circulo ADCE ſit diameter AC ſecta in B, & in G; è quibus punctis, in ſemicirculo ſuperiori, ſint applicatæ rectæ BD, GH, quarum unaquæque ſit æqualis radio ipſius circuli, & in directum producta in ſemicirculo inferiori per BE, & GL.



Jam per Propoſit. 37. Libri tertii huius, BE eſt media harmonica inter partes AB, BC; & GL eſt media harmonica inter partes AG, GC.

Dico, has medias harmonicas BE, GL eſſe inter ſe, ut rectangula ABC, AGC, ſub partibus integrantibus eamdem AC ab ipſis mediis diviſam.

His datis, & conſtructis: media harmonica BE inter partes AB, BC integrantes datam AC ad mediam harmonicam GL inter partes AG, GC integrantes eamdem AC, eſt, (ſumptis æqualibus altitudinibus BD, GH) ut rectangulum EBD ad rectangulum LGH; vel (ob circulum) ſumptis æqualibus ſpatiis, ut rectangulum ABC ad rectangulum AGC; ſive ut ſunt rectangula partium integrantium eamdem datam AC ab ipſis mediis harmonicis diviſam. Quod erat demonſtrandum.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [308] - 116
PUBLIC DOMAIN

ERRATA SIC CORRIGENDA.

Libri I.

Pag. 1. verſ. 6. a fine donatam - ditatam. p. 3. in figuris 2. 3. ſuperflua eſt recta B L A M. p. 5. v. 13, componendo - componendo, & permutando. v. 22. & iterum permutando - oſtenſum eſt igitur. in centro 1. fig adde literam E. p. 6. v. 12. K P N - K P M. p. 9. v 4. vel tandem Circulus, & Ellipſis - vel tandem duæ Ellipſes. p. 10. v. 1. ad ſub - ad rectangulum ſub. v. 8. V H æquale - V H, vel rectangulum V H Z æquale. v. 15. B E - D E. p. 12. v. 17. B D, B A - B F, B E. p. 13. v. pen. huc - hìc. p. 14. v. 12. a fin. item quadratum - item quadratum H F, ad quadratum. p. 15. v. pen: demoſtrari - demonſtrari. p. 17. v. 7. maior - minor. p. 18. v. 21. G B D - G D B. p. 20. in figur. 1. ſub litera D adde literam E. p. 22. v. 33. A B - N B. v. 39. cum A B in M - cum N B in M, & A C cum B N in N. v. ult. ad A - ad N. A C - N C. p. 23. v. 10. C F, G E - G F, C E. p. 25. v. 3. E C - A C. v. 34. quarta - tertia. p. 27. v. 3. D G B. D B G. v. 6. E B - G B. p. 28. v. 12. B D - G B. v. pen. vertici B - à vertice B. p. 27. & 29. in figura 1. prope Q adde literam F. in 2. fig. adde literam K ſub F. in 4. fig. deeſt linea A D C. in 5. fig. Y - V. p. 29. v. 4. R H - R X. v. 8. K B - Q B. p. 30. v. 2. D M - D N. v. 10. D L - N L. v. 26. contigant - contingant. v. 29. & 30. N O L - N B L. v. 31. G P - G B. v. 36. B I - D I. p. 32. v. 2. D L - N B. D H - M I. v. 18. B V - D V. p. 33. v. 18. triangulo - rectangulo. v. 22. N D L - N B L. p. 34. v. 2. a fin. ſeſto - ſexto. v. 3. a fin. N P L - N B L. p. 35. v. 2. & 9. circunſcripti - circumſcripti, v. 8. C - F. in 1. apoſtilla, a 14. primi - a 18. huius. in 2. b 18. huius - b 19. huius. p. 38. in apoſtil. 2. pro ibidem, lege 87. lib. 1. de max. & minim. in apoſtil. c dele Coroll. v. 5. a fin. Y N M - Y N E. p. 39. in fig. 3 in decuſſatione G B cum D O adde literam V. in apoſtil. a, dele Coroll. p. 41. & 42. in 1. fig. deeſt linea E F. p. 43. v. ult. faciant - faciunt. v. 2. a fin. huc - hìc. v. 4. linearum - linearum in Coniſectionibus. p. 44. v. 3. à fin. D P - D B, in apoſtillis, a 21. - a 22. b 20 - b 19. c 20. huius ad num. 6. - c 19. huius ad num. 3. p. 45. v. 13. in triangulo H G E - in triangulis ſimilibus ad verticem H G E, A G F. p. 46. v. 26. B E N - P E N. p. 47. v. 19. D B F - D B E. p. 51. v. 2. N O I - M O I. v. 10. A L - A F. v. 23. N O - M O. v. 26. N O - M O. p. 53. v. 24. G H, G I - B H, B I. v. 27. G R - G K. p. 54. v. 3. E I - E G. v. 18. E B - E P. v. 35. A S K - A S C. p. 55. v. 17. lege, contingentes. v. 21. lege, contingentis. p. 56. v. 7. ſecundi - tertii. p. 57. v. 23. O D E, ſive F E D - F E D, ſive O D E. v. 35. B O - B C. p. 58. v. pen. A F - B F. p. 63. v. 11. ſumptas - ſumptarũ. p. 65. v. 21. qui - quod. p. 69. v. 6. M K - M N. p. 70. v. 40. rectangula - rectangulum. p. 73. v. 5. eorundem - earundem. p. 75. v. 30. M A - E A. p. 76. in fig. 3. literæ B, D ſunt permutandæ. p. 78. v. 23. æquale - æqualem. p. 79. v. 3. C A - C I. p. 84. v. 29. B N - D N. p. 86. v. 1. A G - A C. D A G - D E A. v. 14. ſemiordinatarum - ſemiordinatis. v. 11. demoſtratum - demonſtratum. p. 87. v 24. B B - V B. B O - B G. p. 89. v. 13. I - V. p. 90. pro Coroll. Propoſ. 53. in 1. & 3. fig. producantur tangentes A E, C H, & axis D B coeuntes in eodem puncto, quod notetur in fig. 1. 2. 3. litera I. p. 92. v. 3. a fin. æqualis - æquale. p. 93. v. 20. O B - H B. p 94. v. 20. ordinatum - ordinatarum. p. 96. v. 20. D E P - D P E. v. 31. X B L T - X S L T. p. 99. v. 40. I - E. p. 100. v. 13. D Y - B Y. p. 102. v. 23. D H G - B H S. p. 107. v. pen. D G - D S. p. 108. v. 7. a fin. B - D. p. 109. v. 1. O B - P B. O D - P D. p. 114. v. 5. centro A - centro E. v. 16. B L T E - B L F E. p. 116. in figura deeſt punctum I in ſectione H D, G B. p. 120. v. 8. B A - B D. v. 9. B A - B D. v. 14. ſunt a - ſunt ad. p. 121. verſ. penult. M - N. p. 122. v. 11. componendo - per converſionem rationis. in apoſtill. b 67. - b 56. p. 123 v. 4. a fin. P - P. p. 124. v. 11. D E - B E. p. 125. v. 37. B 7, Q - R 7 Q. v. 39. 7. 4 - 7. A. v. pen. T, Z - V, Y. V, Y - T, Z. p. 127. v. 3. ſed hùc - ſed hìc. p. 128. v. 20. ut d eſt - eſt d ut. v. 22. D B - D P. p. 129. v. 17. datæ Hyperbolæ - datæ Coniſectionis. p. 134. v. 33. B L, B M - K L, K M. v. 35. K T - K P. p. 135. v. 15. O K - E K. p. 136. v. 3. a fin. poſitum - poſitus. terminum - terminus. in apoſtill. a 19. - 56. v. 9. P B - P R. p. 137. v. 10. intra - infra. p 138. 1. & 2. figura compleatur ut tertia. v. ult. K O - H O, p. 140. v. 17. occurrat O, Q - occurrat in O, Q. v. 141. v. 36. B T - B F. p. 142. v. 20. C - E. Propoſ. XXXXII. - Propoſ. LXXII. v. 26. H A - H V. p. 143. v. 3. XXXXII. - LXXII. v. 13. H M - H N. v. 19 eadem quadrageſima - eadem ſeptuageſima. v. ult. R P S - P R S. p. 151. v. 17. O B M - O B N. v. 18. O B - E B. p. 152 in figura deeſt linea O B. p. 153. v. 1. poſt E S, Q R, adde, in quibus axis tranſverſus Q E ad ſuum rectum latus ſit, ut ſumma laterum D B, B Y datarum ſectionum ad latus B Y. in apoſtill. b 19. - b 57. p. 154. v. 5. a fin. qualiſſimis - qualibus. p. 155. v. 11. hùc - hìc. p. 160. v. 24. & 31. in ratione - in ratione laterum. p. 161. in fig. literæ M, L ſunt permutandæ, & deeſt punctum C in communi ſectione rectæ D I cum Parabola. p. 162. v. 1. L D - M D. v. 3. L D - M D. M D B - L D B. p. 163. v. 1. E F - E B. v. 2. D L - B L. in fig. deeſt ordinata A C.

In pag. 5. & 6. v. 10. a fin. & 8. v. 4. a fin. & 11. v. 5. & 54. v. 4. a fin. & 70. v. 5. a fin. dele inæqualiſſimis.

Li-

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [309] - 117
PUBLIC DOMAIN

Libri II.

P. 3. v. 31. ADB - ACB. in apostill. a 12. & 22. - a 12. & 21. p. 7. v. 25. DG - DB. P. 8. v. pen. semidiametri - semidiametro. p. 13. v. 2. delenda sunt verba à parentheſi contenta. p. 16. v. 12. DE - DL. p. 18. v. 3. CE - CD. v. 10. CE - CD. p. 22. v. 10. XXXVI - XXVI. p. 23. deest in fig. punctum E supra D. p. 25. v. 19. Hyperbola - Hyperbola æquilatera. p. 28. v. 3. CE - CD v. 24. addita - data. p. 37. in figura, ad punctum D addas E. p. 41. v. 2. HE - AE. p. 42. v. 18. FDG - FGD. p. 43. v. 8. a fin. FH - FA. p. 45. v. 7. a fin. ſegmenti - ſegmento. p. 46. v. 22. AB - AD. p. 47. v. 5. NL - HL.

Libri III.

P. 49. v. 15. inſquiſitione - inquiſitione. v. 18. ſubſeſcivit - ſubſecivis. v. 19. in binos hoſce libellos congerere placuit, quæ vel horum poſtremo, vel noſtris - in binos hoſce ſequentes libellos congerere placuit, quæ reliquo quinto, ac noſtris. p. 55. v. 9. a fin. horum quadrata - horum parium quadrata. p. 56. v. 15. HF - GF. p. 61. v. ult. AF - BF. p. 62. v. ult. erit - erit per præcedentem. p. 63. v. 9. oppoſitas - oppoſitos. v. 10. compoſita - compoſita, & circa communem axem. p. 68. v. 23. dele utramque DE. p. 70. v. 6. attingens - attingentis. p. 71. v. 15. DBA - DBA cum quadrato AB. v. 28. AO - BO. p. 72. v. 3. DMA - BMA. p. 74. in fig. 1. adde literam M iuxta G. p. 75. v. 19. fi - fh. p. 76. v. 2. Parabola - Hyperbola. v. 9. ipſi EB - ipſi EB, iungaturque DF. v. 12. D - B. *in fig. 1. deest linea* DF. v. 31. & DB - & DBA. p. 77. v. 5. BD, DA - BD, BA. v. 10. anguli - angulorum. *in fig. deest linea* K *in linea* FC prope C. p. 79. v. 3. a fine SAB - AB. p. 80. v. 2. ex A - ex A, B. p. 83. v. 3. a fin. vel integrantis, vel ſuperadditæ - vel integrantem, vel ſuperadditam. p. 85. v. 22. BL ad LD. DB ad BL. p. 86. v. 8. a fin. harmonicam - harmonicam inter coadditas datas AB, BC. v. 11. BE - DE. p. 87. v. 5. GE - DE. p. 88. v. 14. mediæ trium medietatum - ipſæ tres medietates, v. 27. tangens GF - tangens DF. p. 90. v. 26. huc tres AB, BD - hìc tres AB, DE. p. 91. v. 10. DE - BE.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [310] - 118
PUBLIC DOMAIN

Approbationes trium ſuperiorum Librorum.

IL Sig. Can. Matteo Strozzi ſi compiaccia di vedere ſe nella preſente Opera ſia coſa repugnante alla Fede, & a'buoni coſtumi. Dat. queſto dì 6. Agoſto 1673.

Aleßandro Pucci Vic. Gen. Fior.

Vincentii Viviani DE LOCIS, ſeu LIMITIBUS ORDINATIONUM Opus Conicum, &c. ea qua potui diligentia, & debita qua licuit admiratione perlegi: nihil in eo virtutis ergo, & doctrinæ non ſanctum reperi; Catholicæ veritati repugnans nihil, imò productum cenſeo Viri ſtudio eruditiſſimi in augumentum prorſus innocuæ veritatis; & ita fateor, & fidem facio

Matthæus Strozza J.U.D. Metropolit. Eccleſ. Florentinæ Canonicus, Feſulanæ Vic. Gen. Sacrarum Literarum interpres manu pr.

Imprimatur

Alexander Puccius Archipr. & Vic. Gen. Flor.

Die 9. Auguſti 1673.

Videat, & referat Adm. Rev. P. Sac. Theol. Lect. Sebaſtianus de Cutiliano Ord. Min. Obſerv. & Conſultor huius S. Officii Flor.

Fr. Conſtantius de Fregattinis S. Off. Florent. Cancell. de mand.

Diligenter vidi hoc Opus, & ab omni prorſus labe contra Fidem, & bonos mores immune reperi. Cæterùm ob ejus excellentiam digniſſimum judico ad omnium ſtudioſorum cōmoditatem typis mandari.

Fr. Sebaſtianus de Petra Sancta, Sereniſſ. Card. Medices Confeſſarius, & S. Offic. Conſult.

Stante ſupradicta atteſtatione, &c. Imprimatur Flor. die 11. Aug. 1673.

Fr. Conſtantius de Fregattinis S. Off. Flor. Canc. de mand. R. P. Inquiſ.

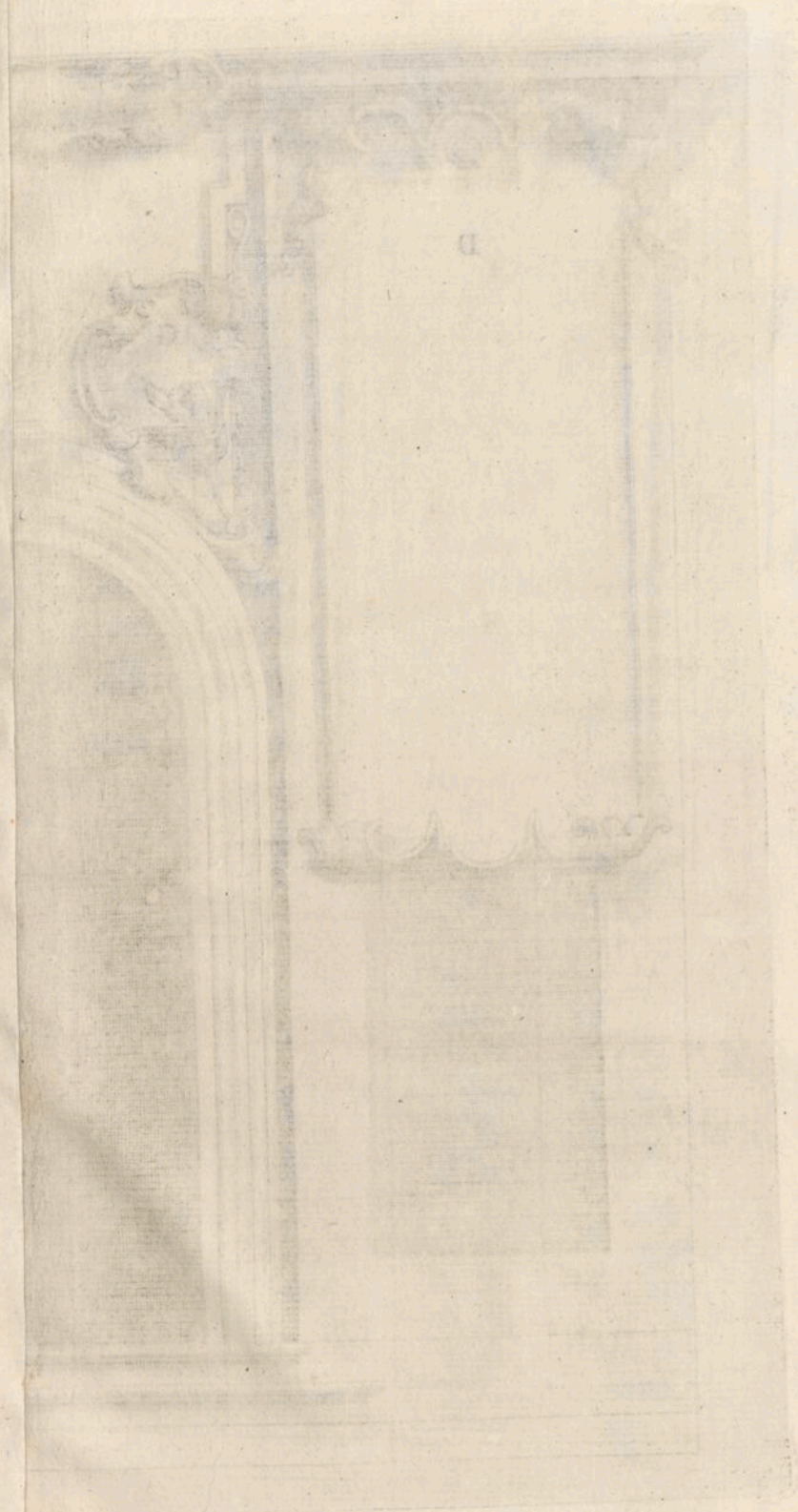
Matthæus de Mercatis Advoc. de mand. Sereniſſ. Magni Ducis Etruriæ.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [311] - 119
PUBLIC DOMAIN

MONITUM LECTORI.

EN Tibi, Amice Lector, hoc Anno 1702. cum ſuis Epigrammatis ære inciſam Orthographiam Ædium AÐEO DATARUM, unde tandem in lucem prodit Secunda Geometrica hæc Divinatio, quæ poſt ſex & quinquaginta Annos ab Auctore conſcripta fuit; & cujuſmodi novem ac viginti ab hinc Annis fuerat typis impreſſa. Habes hìc ejuſdem Auctoris grati animi monumenta: tum erga potentiſſimum Galliarum Regem LUDOVICUM MAGNUM, cujus ampliſſimis Honorariis Ædes ipſæ comparatæ ſunt, & inſtauratæ: tum erga Celſitudines Regias Mediceæ Gentis, Patronos clementiſſimos, quorum profuſam liberalitatem ab Anno ætatis ſuę XVI. eſt expertus: tum erga Præceptorẽ amantiſſimum GALILÆUM, cui, quantulumcumque id eſt, quod in Geometria progreſſus eſt Auctor, totum ſe debere profitetur. Tantas ergo beneficentias, quum apud Poſteros teſtatas ipſe relinquere cuperet, & ingraveſcente ætate, afflictaque valetudine, ac ingruente mortis periculo, omnes alias vias præcluſas eſſe animadverteret; Anno Sal. CIↃ DC LXXXXIII. Elogia hæc in fronte earumdem Ædium, quàm citiſſimè fieri potuit, inſcribi juſſit. Nunc ut ad exteros etiam, qui non peregrinantur, ſempiternò propagetur hæc ſua grati animi ſignificatio, typis ea, ut vides, mandari curavit; ut (ſi fortè in poſterum hæc ipſa, aut temporis edacis culpa, aut ſucceſſorum in Ædibus voluntate, ad alia ſubſtituenda, fuerint abraſa) in indelebili Eruditorum memoria perpetuò maneant.

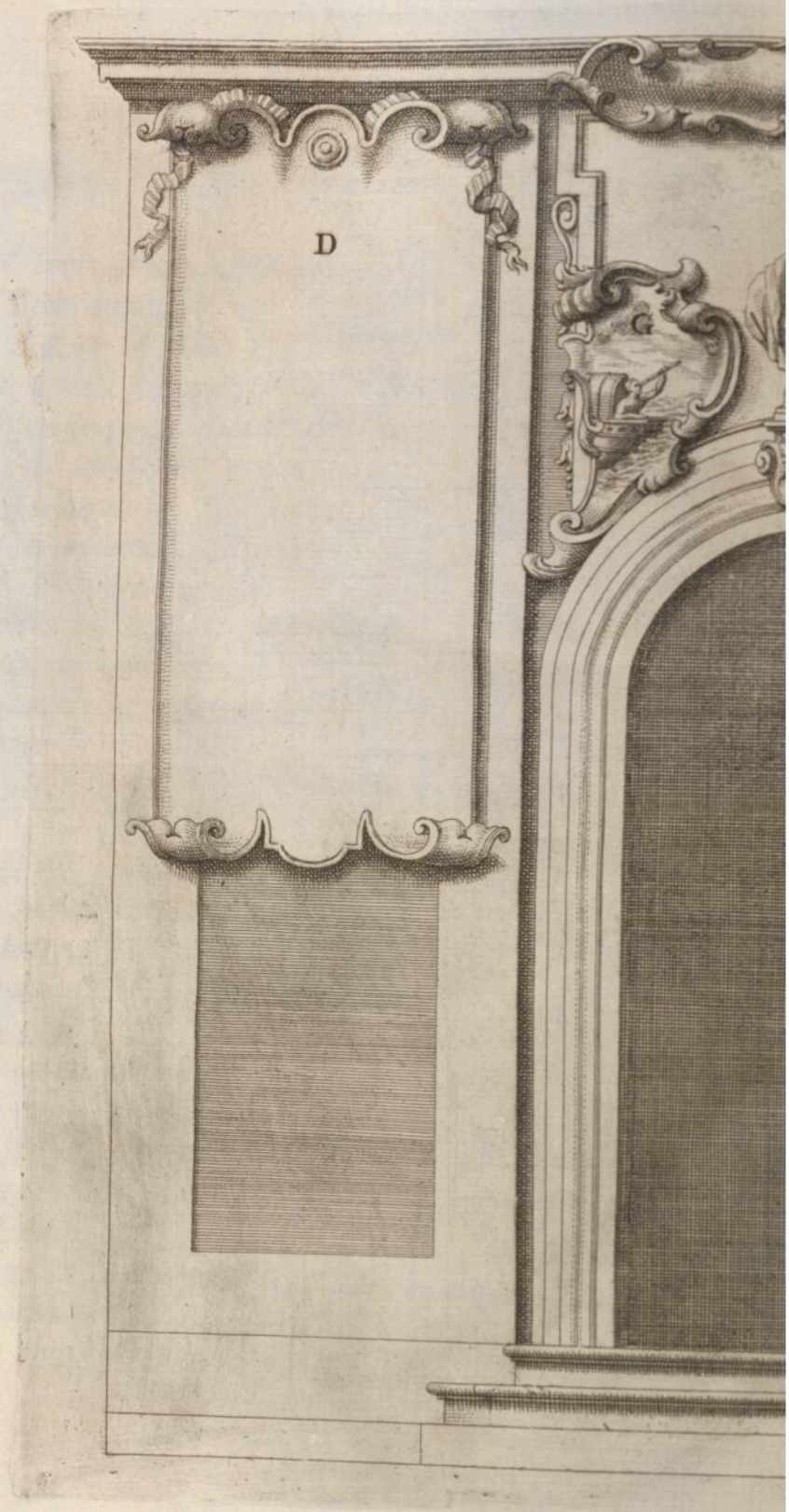
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [312] - 120
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [313] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [314] - -

PUBLIC DOMAIN



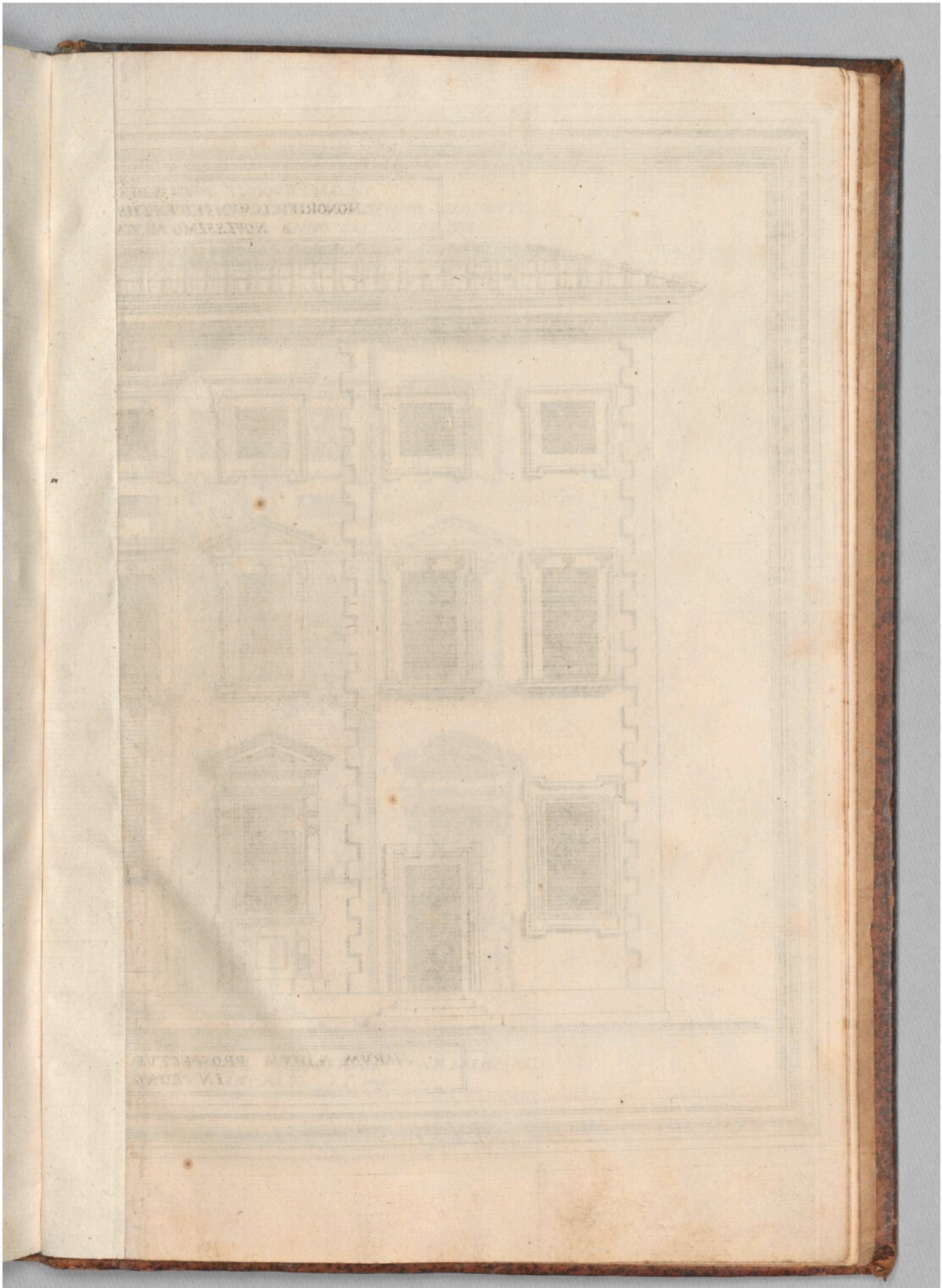
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [315] - -
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [316] - -

PUBLIC DOMAIN

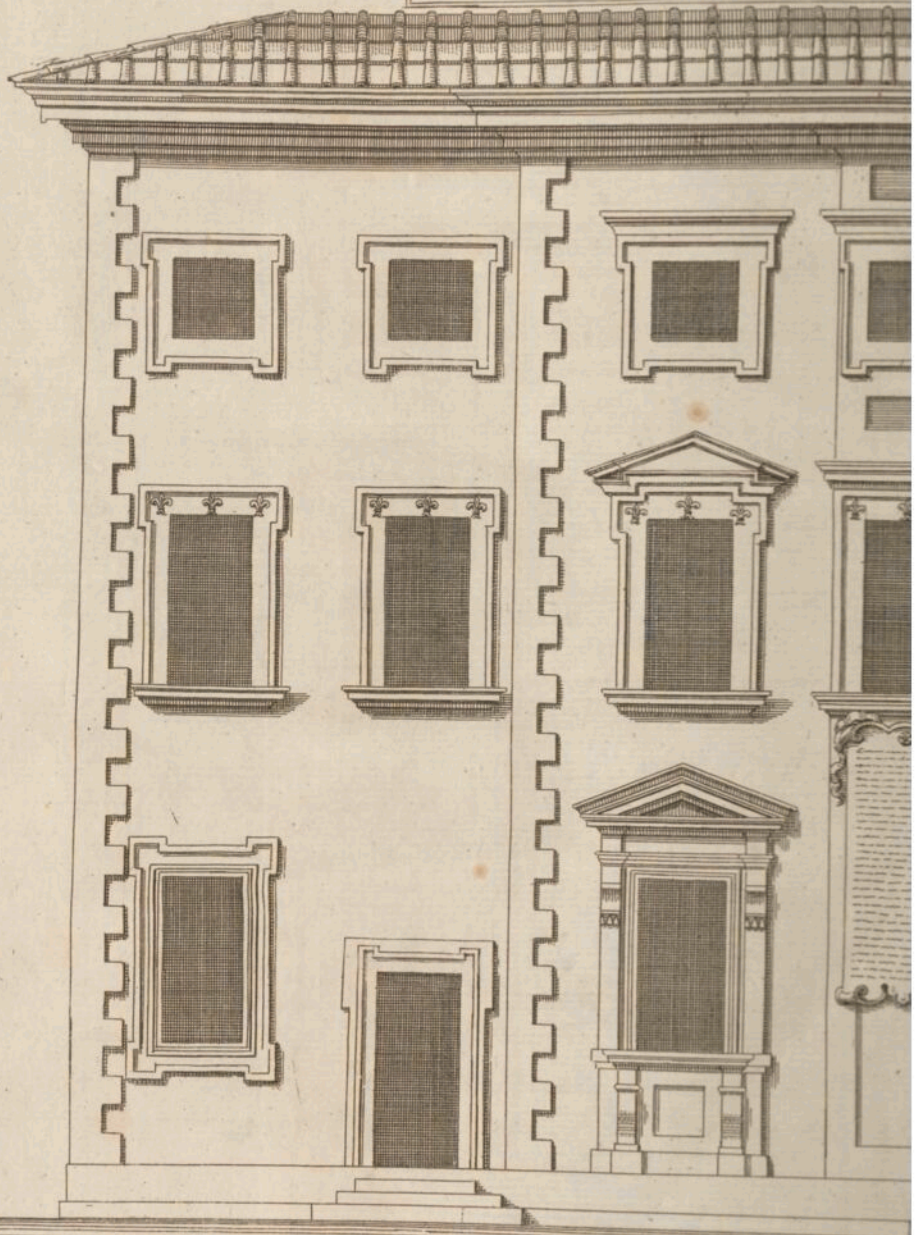


GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [317] - -

PUBLIC DOMAIN

ÆDE
HONORIFICIS.MVNIFICENTI
A NOVISSIMO M. C



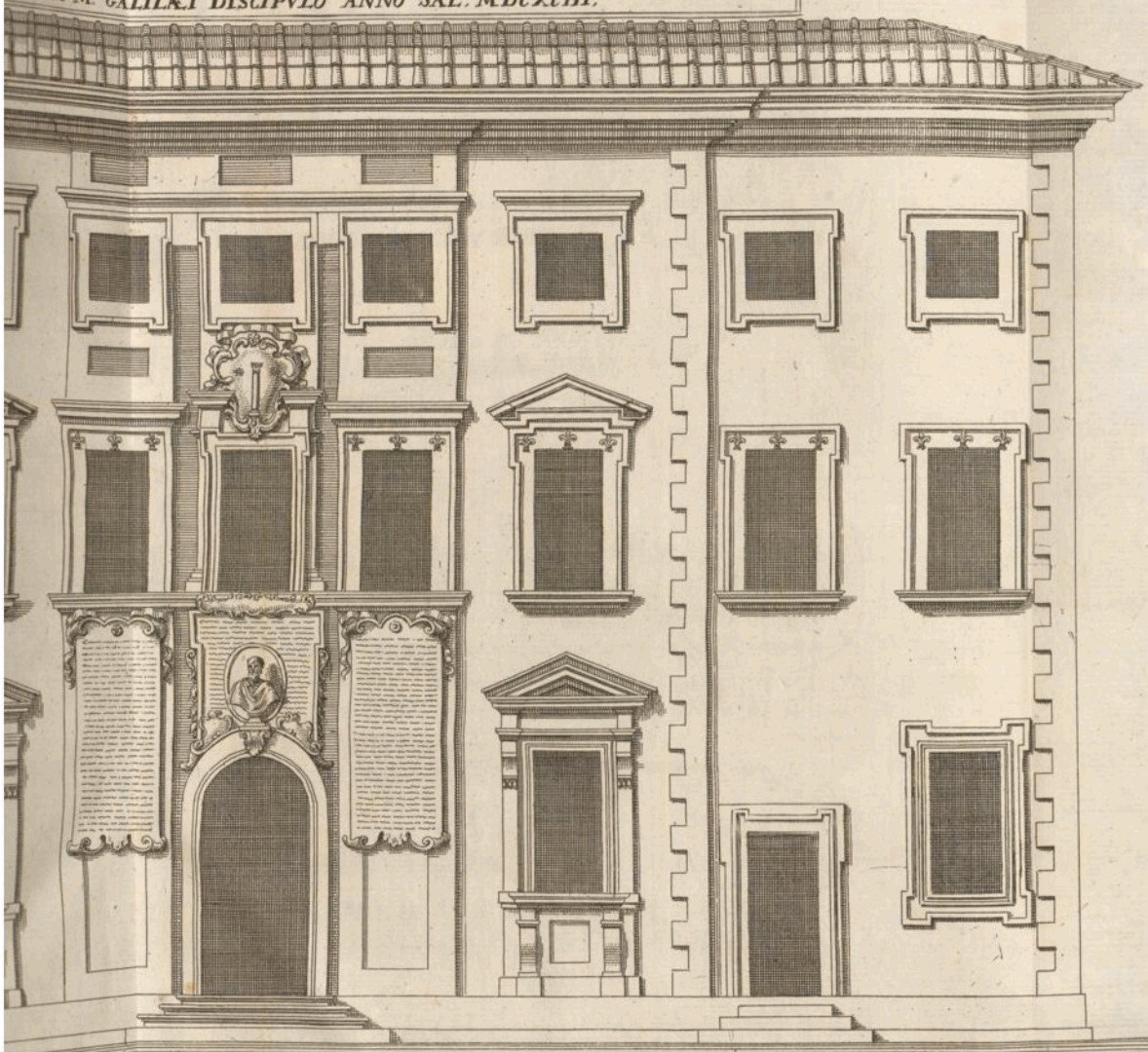
HARVM ÆDIVM PROSPECTVS
IN LONG

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [318] - -

PUBLIC DOMAIN

ÆDES A DEO DATÆ LVDOVICI MAGNI
NIFICENTIIS COMPARATÆ AC DENVO CONSTRVCTÆ FLORENTIÆ
ISSIMO M. GALILÆI DISCIPVLO ANNO SAL. MDCXCIII.



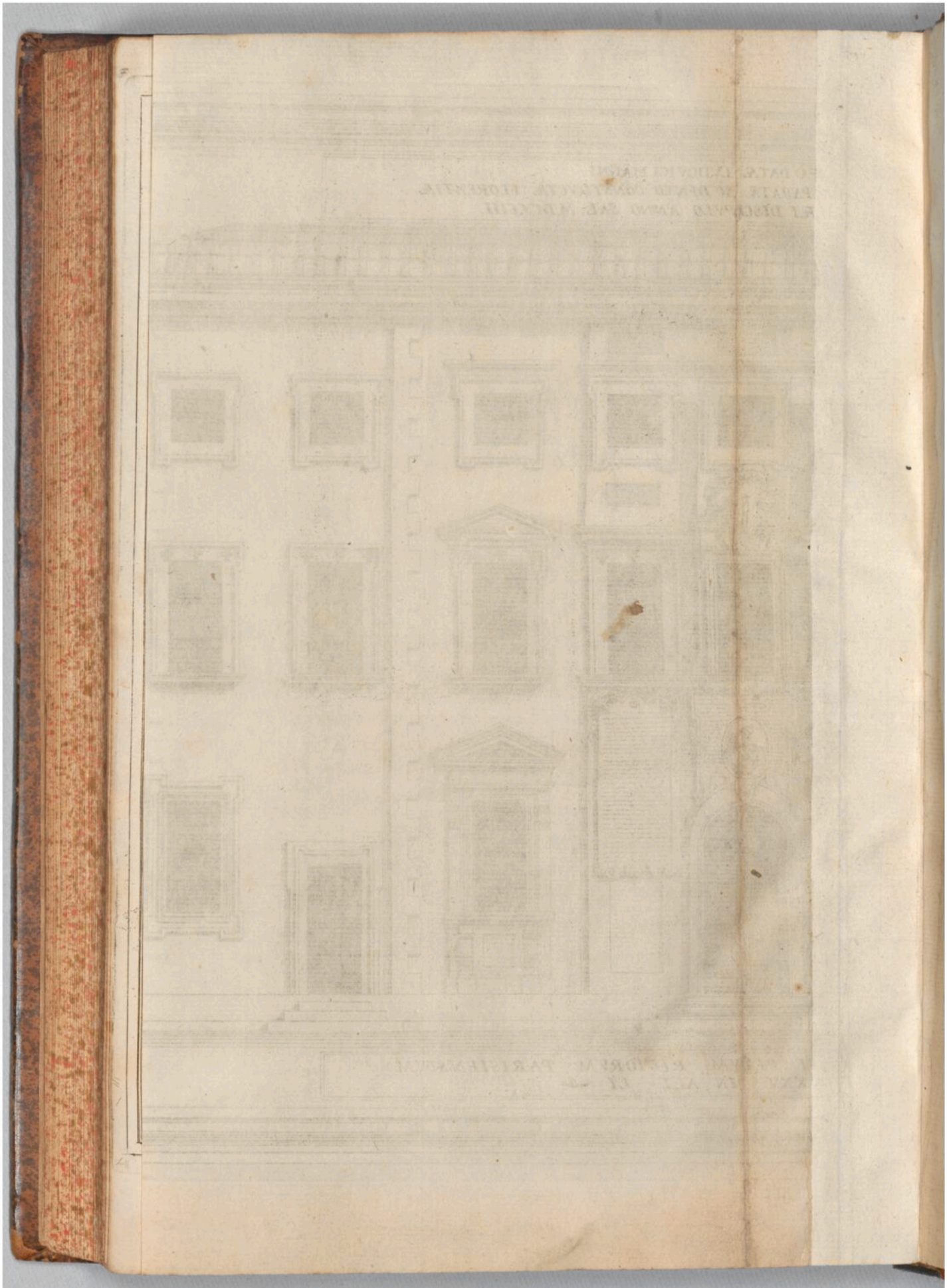
ROSPECTVS EST PEDVM REGIORVM PARISIENSIVM
IN LONG. LXXXV. IN ALT. LI

F.A.Lor.F.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [319] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [320] - -

PUBLIC DOMAIN

INSCRIPTIONES

QUÆ LEGUNTUR

IN FRONTE ÆDIUM A DEO DATARUM
VINCENTII VIVIANI

Florentiæ extructarum in Via Amoris, quæque ſunt in ſpatiis notatis his characteribus A, B, C, D, E, F, G, H.

A

ÆDES A DEO DATÆ
LUDOVICI MAGNI Inclyti Regis Chriſtianiſſimi
Honorificis munificentiis comparatæ, ac denuò conſtructæ.

B

D. O. M.
VIATOR

Qui ſapientiæ amore percelleris, dum per hanc viam incedis, cui fatidico quodam inſtinctu Amoris nomen majores fecere, ſiſte parùm ad hoc (humile quidem) ſed grati, verique amoris monumentum, erga Sapientiſſimum PRÆCEPTOREM. Sereniſſimos MAGNOS DUCES. Et LUDOVICUM MAGNUM Chriſtianiſſimum Galliæ, & Navarræ Regem; & quæ has Ædes exornant, dominique mentem demonſtrant, perlege.

C

GALILÆUS LYNCEUS ætatis Annorum IIL. quem

Aſtra, Mare, ac Terras complexum mente profunda,
Credibile in ſolo cernere cuncta Deo.

D

ÆTERNÆ MEMORIÆ VIRO
GALILÆO DE GALILÆIS, Patriæ, Etruriæ, Italiæ, imò Europæ totius delicio. Philoſophiæ renaſcentis faci. Qui

veritatis propiùs intuendæ desiderio adeò exarsit, ut longè ultrà, tum veterum, tum recentiorum Philosophorum placita progressus, & posthabitis debilioribus humanarum mentium cogitatis, unico Geometriæ (quàm ad Cælum veritatis ducem vocabat) auxilio fretus, viam ad veritatem certiùs indagandam alios primus docuit, feliciterque peregit, comitante semper, per tam arduum iter, pietate; itaut, quæ de Maris æstu, Philolaique systemate exercendi tantùm ingenii causa (quod præsertim Epistola ad Christinam Lotharingiam demonstrat) excogitaverat; religioni libens animo litaverit.

Qui dum Patavii Matheseos Cathedram occuparet, vix audita Anno 1609. *optici tubi fama*, ingenii, & dioptricæ viribus rem assecutus, instrumenti structuram *invenit*, Senatuique Veneto dicavit, quem docti Viri meritò Galilæi nomine donarũt, ut qui primus invenerit ingenio, nõ casu.

Novo hoc fretus auxilio, quasi Terra ejus ingenio satis non esset, Æthera recluſit, novosque veluti Orbes Philosophis, & Astronomis aperuit.

In Luna montes, valles, planities, periodicam ejus discilibrationem.

In Sole nitidissimo lucis fonte, nubium, ac densarum caliginum instar nascentes, & renascentes maculas, ejus circa proprium centrum, ferè menstruam ab occasu in ortum vertiginem primus animadvertit.

Veneris sydus, ac etiam Mercurii varias Lunæ facies æmulari, ac utrumque ob id proprio motu ab occasu pariter in ortum, veluti Mars, Juppiter, ac Saturnus, Solis globum circumire, tutò Astronomos docuit.

Altissimum planetarum in variis cum Sole aspectibus tergeminâ specie, modò rotundum, modò oblongum, modò ansatum; Martemque Perigæum in quadraturis cum Sole, nonnihil mutilum apparere, ante alios admonuit.

Inerrantes stellas, quas numero pauciores noverant prisci, ac veluti clavos unico, solidoque Orbi fixas, quasi auxit, dum novas, & ante se nunquam visas, in Orionis ense, in Plejadibus, in nebulosis, in lacteo circulo, & undique per

Cæ-

Cælum, detexit, & ad Dei omnipotentiam magis, magisq; declarandam, infinitas veluti lampadas, perpetuò ardentes, per immensa fluidorum Cælorum spatia localiter immobiles, sed ad instar Solis, circa propria centra revolubiles, ad primarios, & secundarios propriorum Systematum planetas vivificandos, creatas, arbitratus est.

Jovis Satellites Patavii VII. Idus Januarii Anni 1609. ante omnes primùm, & post tres tantummodò observationes à se peractas, detectos, perpetuæ MEDICEORUM PROCERUM gloriæ dicavit, quorum concitatissimi motus aspectu jamdiu frustrà quæsitum problema de Locorum longitudinibus noctu captandis, proposuit; itaut novis GENTIS MEDICEÆ auspiciis Geograhia, & Idrographia corrigi, restitui, ac perfici datum sit; dum Medicearum Stellarum motus periodicos, & ab Jove distantias, improbo trienni labore assecutus, ad earum citissimè abeũtes aspectus prænunciandos, Canones, & Tabulas confecit; spretisque amplissimis præmiis iis, qui tantùm problemа enodarent, promissis; proprias etiam Theoricas, Tabulas, & Ephemeridas; proprios opticos tubos; propriumque Horologium Oscillatorium à se jam à pluribus Annis Pisis excogitatum, ac insuper Viros horum instrumentorũ usum probè callentes Anno 1615. Catholico primùm Regi PHILIPPO TERTIO; postmodum Anno 1635. confœderatis Hollãdiæ Provinciis, hæroicâ sanè magnanimitate obtulit; sed Dei omnipotentis decreto tã generosa oblatio, ac nobile tẽtamentũ utrinq; evanuit, ut maximũ opus Nauticæ, & Geographiæ bono, LUDOVICI MAGNI Terra', Mariq; potẽtissimi munificẽtia; & summi Astronomi Cassini labore, per ipsa Medicea Sydera inciperet, & perficeretur.

Cometarum denique Generationem, Incrementa, Motus, Interitum explicavit.

Qui verò cœlestia, & longinqua Dei opera aperuit, idem, ut summum Opificem in minimis etiam operibus laudandum proponeret, humanæ Philosophiæ secretiora penetralia reseravit; dum Microscopii ope ex unicâ, & ex duplici lente à se primùm excogitati, & confecti, ac jam Anno 1612.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [323] - 123
PUBLIC DOMAIN

inſtanti CASIMIRO POLONORUM REGI, dono miſſi, humano obtutui minima ſubjecit, & naturæ ipſius quamdam veluti anatomen inſtituit.

Et ſicut Geometriam Philoſophiæ nutricem vocabat, ita exẽplo, & inventis demonſtravit; ſiquidem novâ Methodo ſcientiam Centrobarycam quorumdam ſolidorum, vix etiam initiatis in Geometria aperuit.

Archimedis doctrinam de iis, quæ innatant fluidis, & eorum libramenta, ob vim alternarum preſſionum primus indigitavit, innumeraque ſcriptis ſuis ſparſit ſemina, è quibus plurimorum tractatuum ſeges præſenti ætate accrevit, & in dies Poſteris accreſcet.

Ante alios, vim percuſſionis infinitam ſuapte naturâ animadvertit.

Novas ſcientias omnibus uſque ad ejus ætatem *ſeculis intactas* animadvertit; de ſolidorum reſiſtentia; de motibus gravium, tum æquabiliter incedentium, tum naturaliter deſcendentium, tum projectorum (è quibus præcipuè bellicorum miſſilium artem elicuit) primus Philoſophiæ Sacrario, intulit, promovit, ac Geometricè demonſtravit.

Tantis rerum humanarum bono inventis fama celeberrimi Viri in Æternitatem permanſura, oblivionis, temporumque victrix triumphabit.

Hoc monumento hujus Ædis Dominus gratum animum erga eximiam virtutem, ob auctas, illuſtratas, perfectas naturales ſcientias, tantum teſtatum in futuras ætates voluit.

E
GALILÆO INQUAM DE GALILÆIS

Patritio Florentino, Sereniſſimorum Etruriæ Magnorum Ducum, FERDIN. I. COSMI II. ac FERDINANDI II. primario Philoſopho, ac Mathematico. Academico verè Lynceo, Geographiæ, Hydrographiæ, Coſmographiæ, Mechanices, Phyſices, Aſtrorum ſcientiæ, opitulante Geometria, feliciſſimo inſtauratori. Inanis Artis Genethliacæ perpetuo inſectatori.

No-

NOVISSIMUS TANTI VIRI DISCIPULUS.

uòd ob aurea, Civilis, Moralis,& Chriſtianæ ſapientiæ monita ; ob exemplum vitæ viam veritatis eligere curaverit, ac pro virili, proſecutus fuerit, judicia Dei non ſit oblitus. Nonnulla ex infinitis abditis vera, ex immenſis Geometriæ Theſauris deprompſerit, & per ea homines ad ipſum Deum propiùs accedere ſenſerit.

Quòd hinc veritatem, & juſtitiam eſſe fortiter propugnandas. Mendacium, aſſentationem, & hypocriſin, veluti peſtes defugiendas. A ſegni otio potiſſimùm abhorrendum. Beneficia in ære, Maleficia in aere incidenda. Benemeritis quantum fieri poteſt, aut grato ſaltem animo ſatisfaciendum. Unicuique promiſſa religiosè exolvenda, datamque fidem integrè ſervandam. Honeſtè acquiſita pro ſe, ſuiſq; honeſtè impendenda. Avaritiæ ſordes, & turpia lucra reiicienda. Nihil in perniciem ingrati animi vitio laborantiũ cumulandum. Reliqua, omni prius ære alieno diſſoluto, ingenuis potius, & bene merentibus læto animo dandum, perceperit.

Quòd præceptis hujuſmodi juvenili, tum primum ſuo in animo à natura, à Genitoribus, à ſtudiis, & à Præceptoris doctrina impreſſis, ſuaviſſimis propriorum Principum imperiis, nutibuſque, ſe planè devoverit ; atq; hinc ab ingenita Sereniſſimi FERD. II. benignitate plura ſibi ultrò, graviaque munera, maximis cum honoribus, ac ſtipendiis fuerint collata, certatimque à Sereniſſimo COSMO III. incomparabili clementia, denuo impartita, in quibus is deditiſſimus cliens per quinquaginta ferè Annos, ſemper totus fuerit, iiſque (veritate, & juſtitia ducibus) eximia ſedulitate, & conſtanti fide ad extremum uſque reſponderit.

Quòd denique, ob hæc omnia, LUDOVICI MAGNI, Galliarum, & Navarræ invictiſſimi REGIS CHRISTIANISSIMI, tanquam Numinis ſui, judicium, ac voluntatem promeritus, ampliſſima ejus auguſtæ liberalitatis dona diutiſſimè ſit conſecutus.

SIMULACRUM HOC ÆNEUM

Præceptoris ſui perpetua veneratione digniſſimi ex Proto-

pla-

plaſmate à celebri Sculptore Joanne Caccinio coram Sereniſsimo COSMO II. Anno 1610. ad vivum effformato, exiguum uti Minerval, & grati animi pignus, ingenuique amoris monumentum, tot, tantorumq; beneficiorum Autoris æternùm memor,

Sereniſſimorum eorumdem MM. DD.

Primarius Mathematicus.

Ætatis annorum LXXII.

Anno à Salut. MDCXCIII.

A Galilæi ortu CXXX.

Ab interitu LII.

Primus publicè poſuit.

F

FLORENTIA præ aliis Urbibus DEO nimis cara.

Exurge grata, & gratulabunda.

Ut enim non interruptam illuſtrium, divinorumque Virorum ſeriem videres; eodem Anno, menſe, ac die, quo Mundi Conditor ſubſtulit nobiliorum artium penè deperditarum Picturæ, Sculpturæ, atque Architecturæ ad ſummum uſque reparatorẽ, perfectoremq; Patritium tuũ MICHAELEM ANGELUM, eodem ipſo Anno, Menſe, Die, ac propemodum Horâ hanc dolendam decoris tui jacturam ipſemet Deus refecit, & ut tu adhuc per nova luſtra poſſis Civium tuorũ virtuti, Orbi univerſo prodeſſe, faſtos tuos, Patritii tui GALILÆI ortu auxit, Philoſophiæ, Geometriæ, atq; Aſtronomiæ feliciſſimi Inſtauratoris, Patris, Principis, Ducis.

Hic enim, cœleſtis planè ingenii Vir (longè ſecus, ac Encomiaſtes quidam, invidorum Antagoniſtarum fidei malè nixus, falsò conſcripſerat) Imperante inclyto COSMO I. Piſis legittimè naſcitur ex patre Vincentio Michaelis Angeli Joannis de Galilæis, Patritio Florentino, (qui de vetere, ac recentiore Theorica Muſices pereruditos Dialogos conſcripſit) & ex honeſtiſſima ejuſdem Vincentii uxore egregia Julia Coſmi Venturæ è vetuſtiſsima, ac eminentiſsima Piſtorienſi familia de Amman-

mannatis, tunc Pisis cum eodem Vincentio commorante, Anno à Christi Incarnatione 1563. stylo Florentino, mense Februarii, die decima octava, & hora ab occasu vigesima prima, & s. qui quidem Annus, Mensis, Dies, Hora tamen 23 & s. itidem ab occasu, Pisis Galilæo nostro natalis; eidem Michaeli Angelo Bonarrotio Romæ lethalis fuit, ut ipsi legimus in domesticis Commentariis Leonardi Bonarrotæ Michaelis Angeli fratris filii propria manu conscripti; non verò die 17. ut à Vasario in ejus vita enarratur.

Exurge ergo grata, & gratulabunda Florentia, & Summo Conditori illustres toto Orbe Cives donanti demississima gratiarum actione, obsequia repende. Non defuturos enim semper tibi nobilissimos, insigneſque filios, illustria duorum Virorum æternùm mansura, & semper futura fœcunda exempla promittunt.

Sed sicuti in Galilæi ortu, ejusq; præclarè gestâ vitâ meritò lætaris, ita in ipso ejusdē religiosissimo obitu, Pietatis Christianæ exēplum Civibus monstratura pone luctum, imò exulta.

Postquam enim de rerum abditis nihil pro mentis humanæ captu non conspexisset, ut meliùs in Creatorem animum intenderet, Deo permittente, oculis orbatus, per postremum vitæ quinquennium Divinæ Voluntati pius obsecundavit, quod fortiori animo præstitisse agnoscitur, quo amātissimo eo sensu in nova semper detegenda fuerat usus. Lenta tandem correptus febre (quum bonorum Virorum instituto vixisset, æs proprium, non alienum, in pauperes occultè, effusèque erogando, & multa singularis pietatis exempla edidisset) sensim deficiens, petitis sæpiùs salutaribus Ecclesiæ præsidiis, ac piè susceptis, Pontificia Urbani VIII. benedictione munitus, optimus Philosophus, invocato sæpius Jesu, immortalem spiritum Creatori suo reddidit pacatissimè, Anno à Christo nato MDCXLII. die Mercurii VIII. Januarii, hora quarta n. s. Annos agens LXXVII. Menses X. Dies X. in Suburbano Martellinorum Arcetri Rure, ubi plusquam triginta annos scientiis vacaverat.

Tanti Viri postremæ invaletudini adstarunt assiduè, & postremas voces accepere, Doctor Vincentius filius, Nurus,

Pro-

Proximiores, Sacerdos Paroeciæ; duoque alii ſingulari doctrina, & pietate præſtantes ad expiandam animam à Galilæo jam pridem delecti; duoque hoſpites jam & ſocii Menſæ, alter Evangeliſta Torricellius acutiſsimus Geometra per poſtremum trimeſtre. Alter per ultimum triennium noviſsimus Diſcipulus ter felix, GALILÆO à Sereniſs. FERDIN.II. ſollicitè commendatus, qui memoranda hæc poſuit, ut à ſe in Præceptore conſpecta, vel à cognatis, amicis, famulis, ſedulò, & tutè audita, nepotibus, & poſteris ad Chriſtianos Philoſophos edocendos, fideliter aperiret; aſſentiente, & jubente præſertim Sereniſsimo FERDINANDO Principe Etruriæ Primogenito, Artiū, & Scientiarum Cultore, ac Mœcenate munificentiſsimo.

In Diaglyptico Phrenoſchemate G
Eſte Duces, ô ſi qua via eſt. Virgil. Æneid. Lib. VI.

In Diaglyptico Phrenoſchemate H
In Sole, quis credat? retectas
Arte tua, Galilæe, labes. URB. VIII. P.M.

Imprimatur
Thomas de Gherardeſca Vic. Gen. Flor.

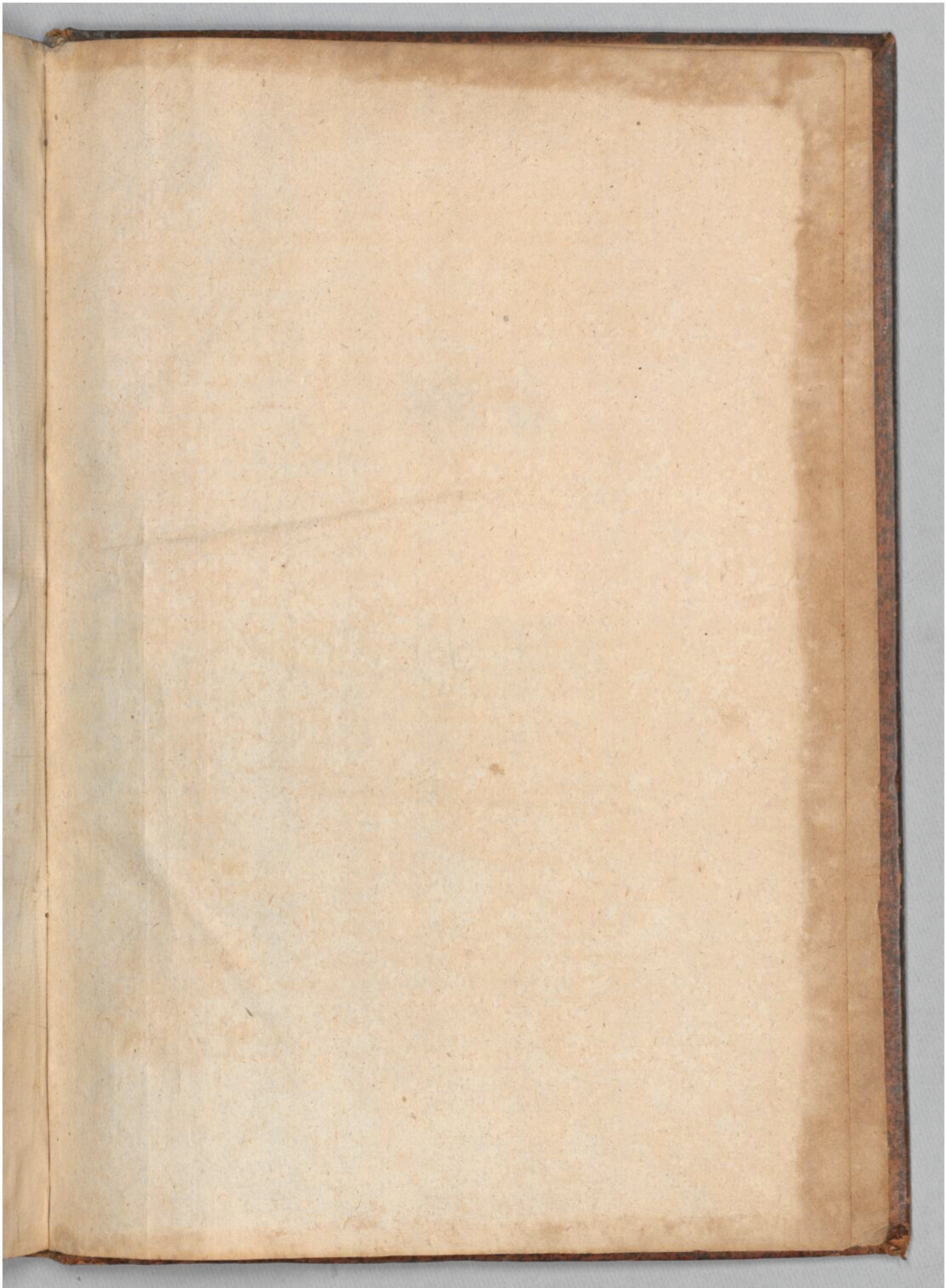
De mandato Rev. P. Inquiſit. Gen. Flor. Adm. R. P. M. Antonius Franciſcus Cioppi Min. Convent. Conſultor hujus S. Officii perlegat attentè præſentem Librum, cui titulus eſt, *Vincentii Viviani, &c.* & referat an ejuſdem poſſit permitti impreſſio. Dat. in S. Off. Flor. die 9. Aug. 1701.
Fr. Lucius Auguſtinus Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Fl.

Ego Fr. Antonius Franciſcus Cioppi ex mandato Patern. Suæ Reverendiſſ. applicatè perlegi attentè, nec aliquid contra legem Dei, & bonis moribus inveni, quapropter Librum hunc exiſtimo dignum, ut typis mandetur. *Ego Fr. Antonius Franciſcus Cioppi Conſ. S. Off. Fl. m. p.*

Attenta ſuprapoſita relatione Imprimatur
Fr. Lucius Auguſtinus Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Fl.

Imprimatur Philippus Bonarrota Sen. Reg. Celſ. Aud.

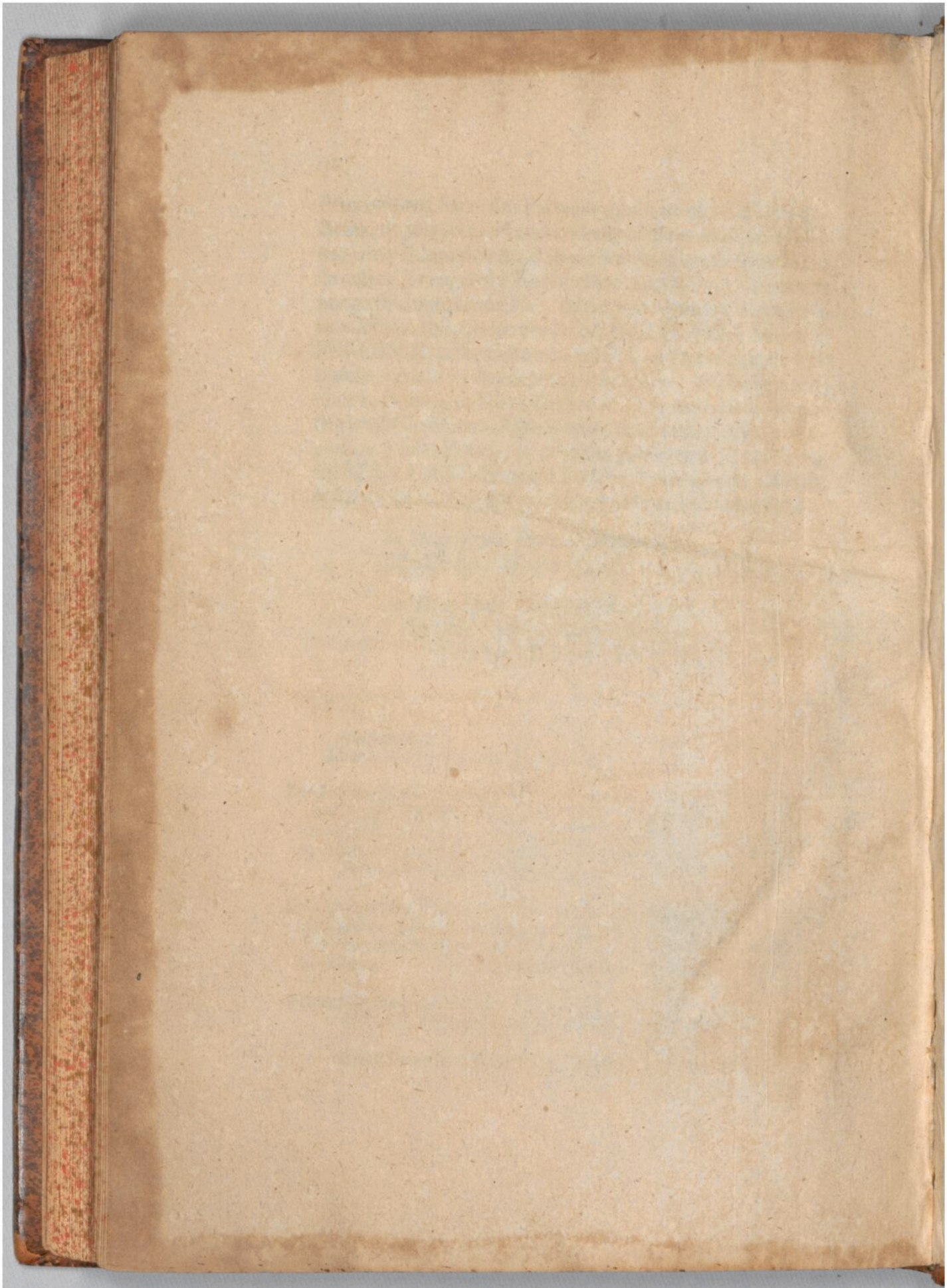
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Signatur: Leibn. Marg. 151, [328] - 128
PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [329] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [330] - -

PUBLIC DOMAIN

GWLB Hannover 35
036 828 777

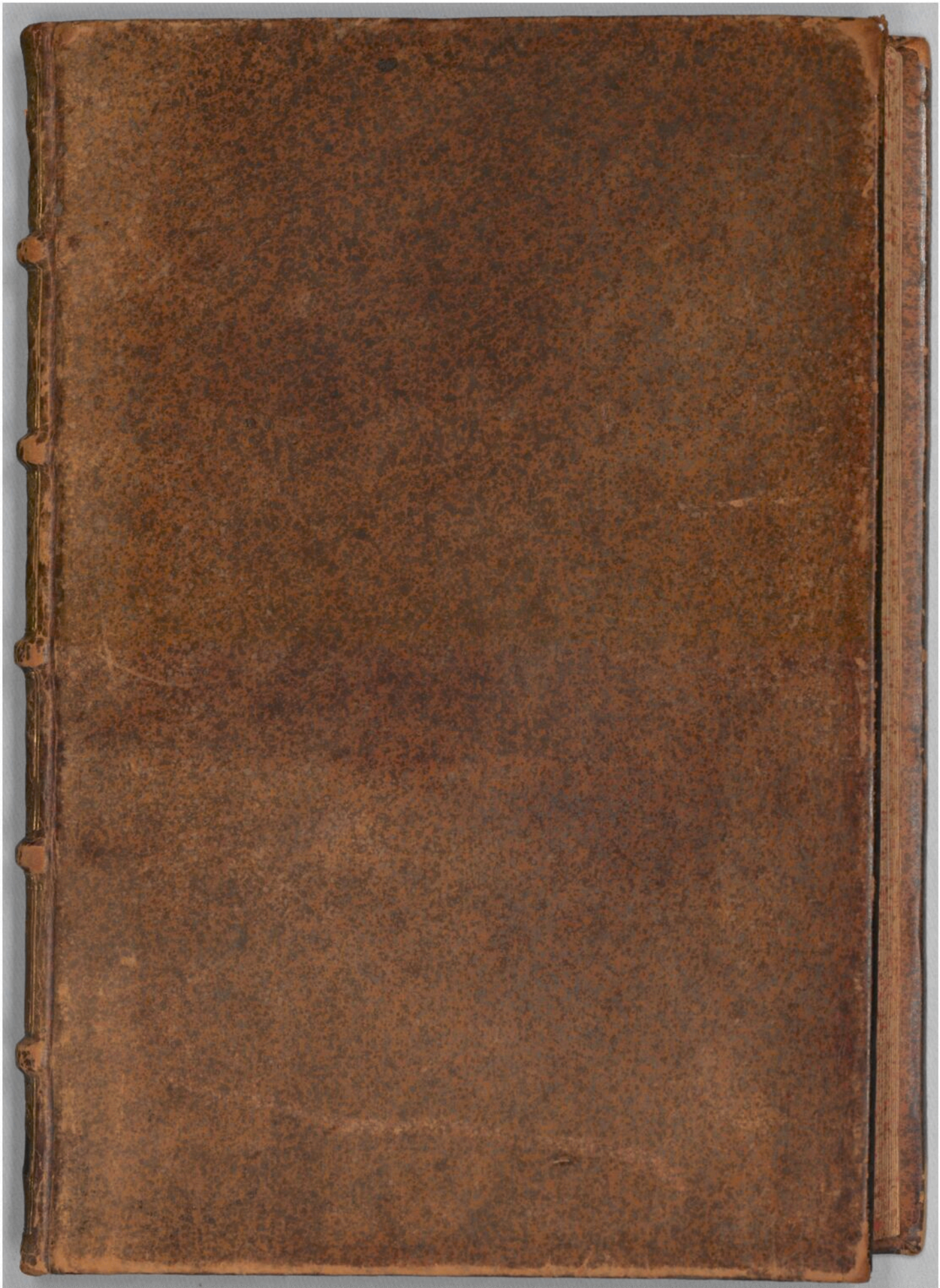
315

IV 6 B
2°
315

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [331] - -

PUBLIC DOMAIN



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
NIEDERSÄCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK

Signatur: Leibn. Marg. 151, [332] - -

PUBLIC DOMAIN



Signatur: Leibn. Marg. 151 [151] - -